

Universidade Federal de Minas Gerais
Escola de Engenharia
Curso de Graduação em Engenharia de Controle e Automação

Controle Ótimo Aplicado em um Veículo Elétrico de Competição

Michael Felipe da Silva Barbosa

Orientador: Prof. Dimas Abreu Archanjo Dutra, Dr.
Supervisor: Prof. Víctor Costa da Silva Campos, Dr.

Belo Horizonte, Julho de 2020

Monografia

Controle Ótimo Aplicado em um Veículo Elétrico de Competição

Monografia submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado Didático do Curso de Graduação em Engenharia de Controle e Automação da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para aprovação na disciplina Projeto Final de Curso II.

Belo Horizonte, Julho de 2014

Resumo

No presente trabalho estudamos

Por fim, determinamos um modelo matemático para o veículo elétrico e aplicamos a teoria de Controle Ótimo com o objetivo de minimizar a quantidade de energia elétrica consumida durante uma prova da competição.

Abstract

Write a version of your “resumo” in English. Beware of literal translations and double check the translation of technical terms.

Agradecimentos

Aqui vai o texto dos agradecimentos.

Sumário

Resumo	i
Abstract	iii
Agradecimentos	v
Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
1.1 Motivação e Justificativa	2
1.2 Objetivos do Projeto	2
1.3 Local de Realização	2
1.4 Estrutura da Monografia	3
2 Revisão Bibliográfica	5
2.1 Modelo do veículo	5
2.1.1 Arrasto Aerodinâmico	6
2.1.2 Relevo da pista	6
2.1.3 Resistência ao rolamento	7
2.1.4 Sistema de propulsão	8
2.2 Controle Ótimo	9
3 Metodologia	11
3.1 Definição do problema	11
3.2 Solução Numérica	11
3.2.1 <i>FALCON.m</i>	11
4 Resultados	13
4.1 Atividades do Projeto	13
4.2 Requisitos do Sistema	13
4.3 Desenvolvimento e Implementação	13
4.4 Testes	13
4.5 Análise dos Resultados	13
4.6 Resumo do Capítulo	14

4.7	Formato, expressões matemáticas e o \LaTeX	14
4.7.1	O \LaTeX	14
4.7.2	Expressões Matemáticas	15
5	Conclusões	17
5.1	Considerações Finais	17
5.2	Propostas de Continuidade	17
	Referências Bibliográficas	18
A	O que ficou para depois	21
B	O que mais faltou	23

Lista de Figuras

2.1	Diagrama de forças de um veículo em movimento	6
2.2	Legenda diagrama pneu	7
2.3	Diagrama de blocos do sistema de propulsão de um veículo elétrico . .	8
2.4	Visão geral do métodos numéricos para controle ótimo	9

Lista de Tabelas

2.1	Comparação do c_d de diferentes tipos veículos	6
2.2	Comparação do coeficiente c_r de diferentes pneus	8
4.1	Exemplo de tabela - Coloque toda informação sobre a tabela aqui . . .	13

Capítulo 1

Introdução

A equipe Milhagem UFMG constrói protótipos de veículos para participar de competições de eficiência energética. Atualmente a equipe possui dois veículos, o M84 e o DT1 que são respectivamente movidos a gasolina e bateria elétrica. As competições em que a equipe tem participação são a Shell Eco-Marathon Brasil (nacional) e a Shell EcoMarathon Americas (internacional). Nessas competições os veículos devem consumir a menor quantidade de energia para percorrer trajeto, ou seja, devem ter a maior eficiência energética.

Os principais fatores que influenciam no consumo de energia do veículo são a aerodinâmica, o peso total, a resistência ao rolamento, o relevo do trajeto e a estratégia de pista. Essa estratégia consiste na forma e nos momentos em que o motor deve ser acionado. Um exemplo de uma estratégia de pista muito utilizada nesses protótipos é a estratégia start-stop, na qual o motor é desligado quando a velocidade é maior que 30 km/h e religado apenas quando é menor que 20 km/h, semelhante a um controle on-off com histerese.

Durante a avaliação da eficiência energética de um protótipo ele deve seguir as seguintes restrições: posições inicial e final fixas, velocidade inicial nula, velocidade instantânea máxima e velocidade média mínima. Uma vez que essas restrições permitem inúmeras estratégias de pista tem-se a necessidade encontrar a estratégia que maximize a eficiência energética do veículo durante a avaliação de consumo. Além disso, os protótipos estão em constante evolução, de forma que essa evolução também modifica as possibilidades de estratégia de pista o que gera a necessidade de uma solução que também adaptativa.

As teorias de controle ótimo e estimação de sistemas fornecem o embasamento para a criação de um software que calcula a estratégia de maior eficiência e adaptando-se a evolução do protótipo. Neste projeto, o software será constituído de dois estágios, no primeiro os parâmetros do modelo matemático do veículo serão estimados mediante dados de um ensaio no protótipo e no segundo estágio a estratégia ótima será calculada dado o modelo estimado no estágio anterior.

1.1 Motivação e Justificativa

Argumente sobre a importância do projeto desenvolvido usando uma visão de alto nível, sem entrar em detalhes. Contextualize seu projeto dentro do local de execução ou da literatura e explique como ele é necessário ou inovador. É possível fazer uma breve revisão bibliográfica, confrontando seu trabalho com outras referências bibliográficas para mostrar a sua contribuição. No quesito contribuição, é muito importante deixar claro o tempo todo que partes do projetos foram executadas por outros e que partes foram executadas por você. Caso contrário, corre-se o risco de inadvertidamente tomar crédito pelo trabalho de outrem, o que pode ter implicações legais.

1.2 Objetivos do Projeto

Tendo em vista o exposto acima, este projeto tem por objetivos:

- a) Definir um modelo matemático para o protótipo DT1;
- b) Implementação de um algoritmo para estimação dos parâmetros desse modelo;
- c) Formular um problema de controle ótimo (OCP) pra obter a estratégia ótima;
- d) Implementação de um algoritmo para solução desse OCP;
- e) Definir a estratégia ótima.

1.3 Local de Realização

Esse projeto foi desenvolvido na equipe de Milhagem UFMG. Equipe sediada no Departamento de Engenharia Mecânica da UFMG, composta por alunos de graduação em engenharia. Foi fundada, sobre orientação do professor Paulo Iscold, em 2005 no Centro de Estudos Aeronáuticos (CEA) do qual fez parte até 2006. De 2006 a 2011 o projeto da equipe ficou suspenso retornando as atividades, sobre orientação do professor Fabrício Pujatti, no Centro de Tecnologia de Mobilidade (CTM).

Hipótrico da equipe de participação em competições:

- Maratona Universitária de Eficiência Energética
 - 2005: 2^o Lugar na categoria gasolina com a marca de 227,6 [km/L]
 - 2006: 1^o Lugar na categoria gasolina com a marca de 598,9 [km/L]
 - 2011: 5^o Lugar na categoria gasolina com a marca de 199,0 [km/L]
 - 2013: 4^o Lugar na categoria gasolina com a marca de 234,9 [km/L]
- Shell Eco-marathon Brasil
 - 2016: 2^o Lugar na categoria gasolina com a marca de 196,0 [km/L]
 - 2017: 3^o Lugar na categoria elétrico com a marca de 315,6 [km/kWh]

- 2018: 1º Lugar na categoria elétrico com a marca de 266,4 [km/kWh]
- Shell Eco-marathon Americas
 - 2018: 6º Lugar na categoria elétrico com a marca de 266,5 [km/kWh]
 - 2019: 2º Lugar na categoria elétrico com a marca de 226,9 [km/kWh]

1.4 Estrutura da Monografia

O relatório está dividido em quatro capítulos. Este capítulo apresentou uma introdução ao projeto a ser descrito nesta monografia e a equipe onde o trabalho foi realizado. O Capítulo 2 descreve os princípios básicos de um sistema ... (sistema onde se insere o trabalho) e abrange todos os conceitos necessários para um melhor entendimento do projeto. O Capítulo 3 aborda a metodologia de desenvolvimento, seguida pela implementação dos No Capítulo 4 tem-se a conclusão da monografia e algumas sugestões e dificuldades encontradas na realização do projeto.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Este capítulo é dividido em três seções que visam apresentar os conceitos necessários para a compreensão deste PFC. Na primeira seção são apresentados conceitos para uma modelagem matemática da dinâmica de um veículo em baixas velocidades. São apresentados na segunda seção uma introdução à teoria de controle ótimo e a utilização de programação não linear na solução de problemas de controle ótimo. Por fim, na última seção é apresentada a teoria de estimação de parâmetros.

2.1 Modelo do veículo

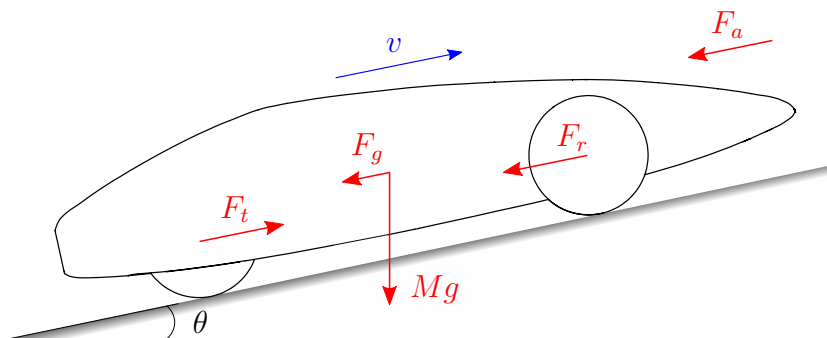
Um modelo matemático, ou apenas modelo, é um conjunto de equações que descreve de forma adequada o comportamento de um sistema que deseja-se estudar. Uma forma usual de classificação dos métodos de modelagem é separá-los nas categorias: modelagem caixa branca, modelagem caixa preta e modelagem caixa cinza. A modelagem caixa branca, também conhecida como modelagem conceitual, consiste na aplicação de princípios fundamentais e por isso exige um conhecimento da natureza do sistema. A modelagem caixa preta, ou modelagem empírica, é baseada na aplicação de técnicas de identificação de sistemas que exigem pouco ou nenhum conhecimento do sistema. Já na modelagem caixa cinza são utilizadas técnicas que estão entre a modelagem caixa branca e a modelagem caixa preta⁽¹⁾.

Nessa seção o método de modelagem aplicado é de modelagem caixa branca. A partir da aplicação da segunda lei de Newton no veículo representado no diagrama da Figura 2.1, obtém-se a equação que descreve a dinâmica longitudinal do mesmo

$$m \cdot \dot{v} = F_t - (F_a + F_g + F_p) \quad , \quad (2.1)$$

em que m é a massa total, v é a velocidade, F_t é a propulsão feita pelo motor subtraída as perdas do sistema de transmissão, F_a é o arrasto aerodinâmico, F_g é a componente do peso que está na direção da velocidade e F_p é a resistência ao rolamento dos pneus na pista. Os modelos que descrevem as forças F_a , F_g , F_p e F_t estão apresentados nas subseções a seguir.

Figura 2.1: Diagrama de forças de um veículo em movimento



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.1.1 Arrasto Aerodinâmico

O movimento de um objeto imerso em um fluido sofre uma resistência causada por esse fluido. No caso de veículos que se deslocando no ar, essa resistência é chamada de arrasto aerodinâmico. Pode-se aproximar o calculo dessa força F_a com a equação

$$F_a(v) = \frac{\rho \cdot a_f \cdot c_d \cdot v^2}{2} , \quad (2.2)$$

em que v é a velocidade do veiculo em relação ao vento, ρ a densidade do ar, a_f a área frontal do veiculo e c_d o coeficiente de arrasto aerodinâmico. O coeficiente c_d é um numero adimensional e depende da geometria veiculo, é determinado por meio de simulações em software CFD (fluido dinâmica computacional) e/ou experimentos em túnel de vento⁽²⁾. Alguns valores típicos de C_d para diferentes tipos de veículos são apresentados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Comparação do c_d de diferentes tipos veículos

Veiculo	c_d
Carro	0,3 - 0,4
Ônibus	0,6 - 0,7
Caminhão	0,6 - 1,0
Moto	0,5 - 1,0

Fonte: Adaptado de Popp e Schiehlen⁽³⁾.

2.1.2 Relevo da pista

A componente do peso, F_g , afeta consideravelmente a dinâmica do veiculo e atua sempre que a pista não é plana. Seu modelo é a equação

$$F_g(\theta) = m \cdot g \cdot \sin(\theta) ,$$

que, pra pequenas inclinações, pode ser aproximado pela equação

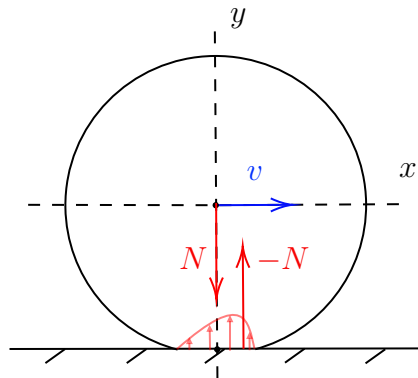
$$F_g(\theta) \approx m \cdot g \cdot \theta \quad , \quad (2.3)$$

em que m é a massa total do veículo, g é a aceleração da gravidade e θ é a inclinação da pista expressa em radianos⁽²⁾.

2.1.3 Resistência ao rolamento

A norma ISO 4223-1:2017 define a resistência ao rolamento de um pneu, como a energia consumida pelo pneu por unidade de distancia percorrida. Esse consumo de energia se deve principalmente as propriedades viscoelásticas dos compostos de borracha presente no pneu. Durante a rolagem o pneu é deformado na zona de contato entre o pneu e o pavimento, nessa zona de contato a resultante da força de reação à força normal não está no mesmo eixo que a força normal, Figura ??, de forma a gerar um força, F_r , contraria a movimentação do pneu.

Figura 2.2: Legenda diagrama pneu



Fonte: Elaborado pelo autor.

A força de resistência ao rolamento, F_r , depende da construção do pneu e do tipo de pavimento. Essa força também depende da velocidade do veículo e da pressão do ar no pneu, embora nesse trabalho não considere-se essa dependência. Para calculá-la usa-se a relação:

$$F_r = c_r \cdot N \quad , \quad (2.4)$$

em que c_r é o coeficiente de resistência ao rolamento, N é a força normal sobre o pneu e F_r é a força gerada pela resistência ao rolamento. Estão apresentados na Tabela 2.2 o valor do coeficiente c_r para pneus de uso típico em carros de passeio, bicicletas e de dois pneus específicos para a competição SEM, Michelin 45-406 e Michelin 45-75R16.

Tabela 2.2: Comparação do coeficiente c_r de diferentes pneus

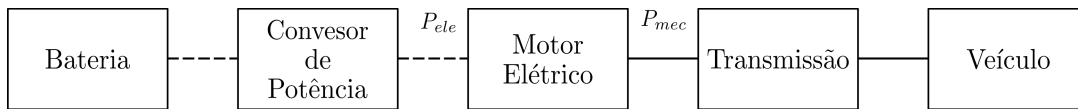
Pneu	c_r
Usado em carro	0,013
Usado em bicicleta	0,006
Michelin 45-406	0,0024
Michelin 45-75R16	0,00081

Fonte: Adaptado de Santin et al.⁽⁴⁾.

2.1.4 Sistema de propulsão

De forma genérica, o sistema de propulsão de um veículo elétrico, representado no diagrama da Figura 2.3, é composto por bateria, conversor de potencia, motor elétrico e transmissão.

Figura 2.3: Diagrama de blocos do sistema de propulsão de um veículo elétrico



Fonte: Elaborado pelo autor.

Bateria

Bateria eletroquímica, ou apenas bateria, é um dispositivo em que durante a descarga ocorre a conversão de energia potencial química em energia elétrica e na carga ocorre a conversão inversa. Ou seja, uma bateria armazena energia elétrica na forma de energia potencial química. Uma bateria é composta por várias células ligadas entre si. Uma célula de bateria é basicamente composta por dois eletrodos – positivo e negativo – imersos em um eletrólito⁽⁵⁾.

Conversor de Potência

Conversor eletrônico de potência, ou conversor de potência, é o circuito cujo a finalidade é extrair energia elétrica de um sistema de energia e transformá-la em uma forma adequada e necessária para um motor⁽⁶⁾.

Motor Elétrico

O motor elétrico converte a potencia elétrica – tensão e corrente – em potencia mecânica – torque e rotação – para impulsionar o veículo⁽⁵⁾. Nesse trabalho estudara-se o modelo de apenas os motores BLDC pois é o tipo de motor utilizado no protótipo DT1.

$$u - u_{ind} = l_m \cdot \dot{i} + r_m \quad , \quad (2.5)$$

Transmissão

A transmissão do veículo regula a transferência de potência do motor para as rodas. É basicamente composta por mecanismo de redução – ex. caixa de velocidades – e por um mecanismo de interrupção – ex. embreagem⁽⁵⁾.

2.2 Controle Ótimo

"O objetivo da teoria de controle ótimo é determinar os sinais de controle que farão com que um processo satisfaça as restrições físicas e ao mesmo tempo minimize (ou maximize) alguns critérios de desempenho⁽⁷⁾."

A seguinte equação é uma formulação genérica e comum para OCP

$$\min_{x(\cdot), u(\cdot)} \int_0^T L(x(t), u(t)) dt + E(x(T)) \quad (2.6a)$$

$$\text{s.t.} \quad x(0) - x_0 = 0, \quad (2.6b)$$

$$\dot{x}(t) - f(x(t), u(t)) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (2.6c)$$

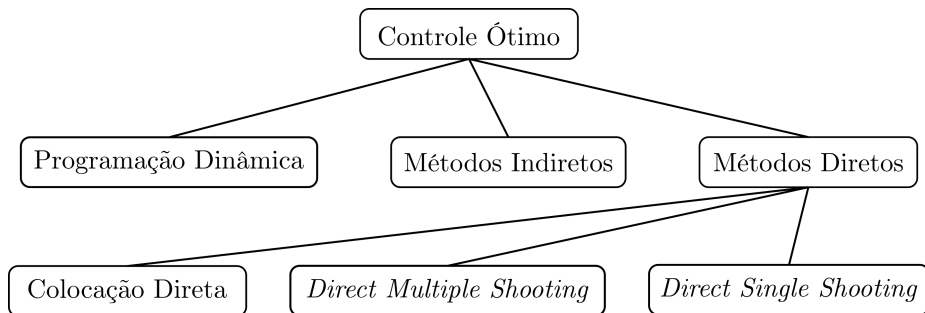
$$h(x(t), u(t)) \leq 0, \quad t \in [0, T], \quad (2.6d)$$

$$r(x(T)) \leq 0, \quad (2.6e)$$

em que a Equação 2.6a é o funcional-objetivo, Equação 2.6b é uma restrição de estados iniciais fixos, Equação 2.6c é a restrição que representa a dinâmica do sistema, Equação 2.6d são restrições de caminho e Equação 2.6e é uma restrição de espaço para os estados finais.

O funcional-objetivo, também conhecido como objetivo de Bolza, é composto por uma integral de $L(x, u)$ conhecida como termo de Lagrange e uma função $E(x)$ conhecida como termo de Meyer⁽⁸⁾.

Figura 2.4: Visão geral do métodos numéricos para controle ótimo



Fonte: Adaptado de Diehl et al.⁽⁹⁾

Capítulo 3

Metodologia

3.1 Definição do problema

3.2 Solução Numérica

3.2.1 *FALCON.m*

FALCON.m é uma biblioteca de *MATLAB*[®], orientada a objetos, desenvolvida no *Institute of Flight System Dynamics* da *Technische Universität München* para resolução e análise de problemas de controle ótimo utilizando ⁽¹²⁾.

Na utilização do *FALCON.m* para resolver um problema de controle ótimo são realizadas as seguintes etapas ⁽¹⁰⁾:

1. **Implementar os modelos dinâmicos:** o modelo dinâmico do sistema deve ser implementado em funções do *MATLAB*[®].
2. **Construir os modelos dinâmicos gerais dos subsistemas:** utilizar o *Model Builder* do *FALCON.m* para relacionar os modelos dinâmicos nas diferentes fases do OCP.
3. **Derivar automaticamente todas as funções necessária:** o *Model Builder* criará, automaticamente, as derivadas analíticas de todos os subsistemas e combiná-los ao gradiente geral dos modelos usando a regra da cadeia.
4. **Gerar código automaticamente para os modelos e compilar:**
5. **Implementar funções de restrição adicionais:** repetir os passos de 1 à 4 para todas as restrições e funções de custo.
6. **Definir a estrutura do problema de controle ótimo:**
7. **Discretizar o problema de controle ótimo:**
8. **Resolver o problema discretizado:** o problema de otimização numérica resultante da discretização do problema de controle ótimo é resolvido usando um

solucionador numérico apropriado (*IPOPT*, *SNOPT*, *FMINCON* ou *WORHP*).

9. Analisar dos resultados:

Detalhes sobre o uso do *FALCON.m* pode ser encontrados em sua documentação ⁽¹²⁾, bem com uma explicação detalhada da sua implementação na tese de doutorado de Rieck⁽¹¹⁾.

Esse é um teste de como escreve código `Bake()`

Capítulo 4

Resultados

Para a execução do projeto, algumas etapas de desenvolvimento tiveram de ser seguidas: familiarização com o sistema, estudo dos módulos envolvidos, leitura dos requisitos, elaboração de documento descrevendo todo o processo de implementação e relacionamento com os diversos módulos, implementação e testes.

4.1 Atividades do Projeto

4.2 Requisitos do Sistema

4.3 Desenvolvimento e Implementação

A Tabela 4.1 apresenta as atividades executadas.

4.4 Testes

4.5 Análise dos Resultados

Apresente os resultados sem adulterações e faça análises objetivas. Pense na melhor maneira de apresentar os resultados graficamente. Se os gráficos são difíceis de interpretar, talvez tabelas sejam uma forma melhor de apresentar resultados. Não apresente dados (gráficos e tabelas) se não há uma conclusão interessante a ser tirada. Lembre-se de ser conciso.

Atividade 1	aa a	ab b
Ativ. 2	aa a	ab b

Tabela 4.1: Exemplo de tabela - Coloque toda informação sobre a tabela aqui

Não se esqueça das unidades! Pense que *a priori* todo número deve ter uma unidade. Não escreva as unidades em itálico (no ambiente matemático) e tome cuidado para diferenciar maiúsculas e minúsculas. Um exemplo é escrever 22 [kN] e não 22*KN* (Kelvin vezes Newton!).

Ao apresentar resultados experimentais, tome o cuidado para também apresentar o cálculo das incertezas sempre que forem significativas. Ao fazer conclusões, sempre considere se o tamanho da sua amostra é grande o suficiente do ponto de vista estatístico.

4.6 Resumo do Capítulo

Tente não terminar de forma abrupta. Se for escrever algo aqui, não seja genérico!

4.7 Formato, expressões matemáticas e o L^AT_EX

4.7.1 O L^AT_EX

O L^AT_EX é o método preferencial de preparação de documentos para textos técnicos nas ciências exatas. O L^AT_EX permite não só lidar com equações de uma forma mais prática que em editores de texto, mas também facilita a formatação de documentos e tem um desempenho marcadamente superior a editores de texto na preparação de documentos longos como monografias.

Documentos em L^AT_EX são escritos em um ou mais arquivos de texto com extensão .tex. Após a escrita, o .tex é *compilado* para gerar arquivos nos formatos .pdf, .dvi ou .ps. Hoje há duas distribuições padrão para o L^AT_EX. Sistemas Windows usam o MikT_EX e sistemas Unix usam o T_EXLive. Além das distribuições, muitos usuários utilizam *front-ends* que facilitam a edição do texto, a compilação e a instalação de pacotes.

Os pacotes necessários para compilar o presente documento devem ser encontrados numa instalação completa dessas distribuições. Se tiver dificuldades com os pacotes, você pode instalá-los manualmente ou tentar alterar o código para usar versões antigas dos mesmos.

A compilação pode ser feita pelos comandos `latex` ou `pdflatex`, invocados pela linha de comando ou pelo *front-end*. Note que será necessário empregar o comando **mais de uma vez** para que as referências cruzadas saiam corretas.

Como discutido na Seção, uma ferramenta útil para gerenciar as citações em L^AT_EX é o BibT_EX. Para gerar uma lista bibliográfica a partir do arquivo .bib, este arquivo deve ser indicado no arquivo .tex. Em seguida devem-se executar os comandos `pdflatex`, `bibtex` e `pdflatex` novamente sempre usando o .tex como argumento. Note que os comandos são executados nesta ordem e de forma repetida para que as referências cruzadas sejam geradas corretamente.

A fonte Times, indicada pela resolução do PFC e usada neste documento, não possui

uma das aparências mais agradáveis, especialmente para os símbolos matemáticos. Se preferir símbolos matemáticos mais harmoniosos, remova a inclusão da fonte `newtxmath` no cabeçalho do `.tex`.

Nesta seção você deve encontrar exemplos dos comandos mais usados em L^AT_EX. Outros exemplos e manuais podem ser encontrados na internet com facilidade.

4.7.2 Expressões Matemáticas

Ao escrever expressões matemáticas, defina todas as variáveis antes de usá-las ou imediatamente depois da expressão. Deixar de fazê-lo torna seu texto ilegível. Segue um exemplo.

Seja o par $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Para $s \in \mathbb{C}$, definimos a função $f(s)$ como

$$f(s) \triangleq \frac{a_1 s + a_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \ ,$$

onde os escalares $\zeta, \omega_n > 0$ são constantes.

Note que não foi necessário atribuir valores às variáveis neste momento. Repare também como devemos **usar pontuação** (vírgula) nas equações, tratando-as como parte da frase. Usamos o símbolo \triangleq ou $:=$ para deixar explícito que se trata de uma definição. Ser claro nesse aspecto facilita o entendimento do leitor.

A equação acima não foi numerada porque não será citada no texto. Vejamos um exemplo com numeração.

A função $f(\cdot)$ possui um zero em $-a_2/a_1$ (ou $-\frac{a_2}{a_1}$) e, para $\zeta < 1$, possui polos complexos $p_{1,2}$ dados por

$$p_{1,2} = \omega_n \left(-\zeta \pm j\sqrt{1 - \zeta^2} \right) \ . \quad (4.1)$$

Agora podemos citar os polos dados pela Equação (4.1) (aqui adotamos a convenção de citar sempre com o número entre parênteses precedido da palavra Equação). Note como usamos um comando especial na Equação (4.1) para garantir o ajuste automático do tamanho dos parênteses.

Vejamos agora como criar equações alinhadas. Considere o sistema dinâmico dado pelas equações diferenciais:

$$\dot{x}_1 = \cos(x_2) \cdot \ln(1/x_1) + \tan(u) \quad (4.2)$$

$$\dot{x}_2 = e^{-x_1 - x_2}$$

$$y = \min\{x_1, x_2\} \ , \quad (4.3)$$

onde $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]'$, $t > 0$, é a variável de estado do sistema, $u(t)$ é o sinal de entrada e $y(t)$ é o sinal de saída do sistema. Note no `.tex` que o caracter de tabulação `&` foi usado para indicar o ponto de alinhamento horizontal das equações. Além disso,

para ilustrar o uso do L^AT_EX, retiramos a numeração da segunda equação e citamos as equações separadamente.

Nas Equações (4.2) e (4.3), aparecem operadores como min, ln, cos e tan. A convenção aqui é que **variáveis devem ser escritas em itálico e operadores não**. Por essa razão todas as expressões matemáticas devem ser escritas no ambiente matemático (entre cifrão) mesmo quando for possível usar texto comum. Isso garante a consistência das fontes utilizadas (nem sempre a fonte do ambiente matemático é a mesma fonte do texto).

Para escrever matrizes, podemos fazer por exemplo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \frac{z}{z-\lambda} & \frac{z}{(z-\lambda)^2} \\ 0 & \frac{z}{z-\lambda} \end{bmatrix}, \quad \forall \lambda < |z|.$$

Para escrever uma expressão com múltiplos casos, podemos fazer, para um inteiro N positivo,

$$g[n] = \begin{cases} 0, & \text{se } n \leq 0 \\ n, & \text{se } n = 1, 2, \dots, N-1 \\ N, & \text{se } n \bmod N = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Nunca reaproveite símbolos matemáticos, isto é, nunca use o mesmo símbolo para designar variáveis diferentes.

Para um exemplo com múltiplas linhas de expressão matemática: tem-se que, para $a \neq 0$,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ \Rightarrow a(x^2 + bx/a + c/a) &= 0 \Rightarrow a((x + b/(2a))^2 + c/a - b^2/(4a^2)) = 0 \\ \Rightarrow (x + b/(2a))^2 &= (b^2 - 4ac)/(4a^2) \\ \Rightarrow (x + b/(2a)) &= \pm \sqrt{b^2 - 4ac}/(2a) \\ \Rightarrow x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Note a argumentação lógica aqui. Não estamos dizendo que o valor de x é dado pela última linha. Estamos dizendo que a hipótese da primeira linha juntamente com a hipótese $a \neq 0$ implicam os referidos valores de x . **Um erro comum dos alunos ao escrever é não distinguir a veracidade das implicações com a veracidade das hipóteses.**

Capítulo 5

Conclusões

Novamente, este será um dos trechos que o leitor experiente lerá antes de decidir se vale a pena ler o texto integral. Seja convincente.

5.1 Considerações Finais

Reitere o que de mais importante foi feito, qual era o objetivo inicial e qual o resultado obtido. Se houve requisitos ou especificações de projeto, discuta se foram atingidos. Se os resultados não foram conclusivos ou contrariam o que se esperava, seja honesto e diga-o explicitamente. Busque explicar os insucessos com argumentos sólidos e plausíveis.

5.2 Propostas de Continuidade

Se houve questões ainda não respondidas ou resultados insatisfatórios, aponte direções de continuação.

Referências Bibliográficas

- 1 AGUIRRE, L. A. **Introdução à Identificação de Sistemas**: Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais. 3. ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2007.
- 2 GUZZELLA, L.; SCARRETTA, A. **Vehicle Propulsion Systems**: Introduction to modeling and optimization. Heidelberg: Springer, 2013.
- 3 POPP, K.; SCHIEHLEN, W. **Ground Vehicle Dynamics**. Heidelberg: Springer, 2010.
- 4 SANTIN, J. J. et al. **The World's Most Fuel Efficient Vehicle**: Design and development of pac car ii. Zürich: vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich, 2007. Disponível em: <<https://vdf.ch/the-world-s-most-fuel-efficient-vehicle.html>>.
- 5 EHSANI, M. et al. **Modern Electric, Hybrid Electric, and Fuel Cell Vehicles**. 3. ed. Boca Raton: CRC Press, 2018.
- 6 KIM, S. H. **Electric Motor Control**: Dc, ac, and bldc motors. 1. ed. [S.l.]: Elsevier Science, 2017.
- 7 KIRK, D. E. **Optimal Control Theory**: An introduction. [S.l.]: Dover Publications, 2004.
- 8 GROS, S.; DIEHL, M. **Numerical Optimal Control**. [s.n.], 2020. Em fase de elaboração. Disponível em: <<https://www.syscop.de/files/2020ss/NOC/book-NOCSE.pdf>>.
- 9 DIEHL, M. et al. Fast direct multiple shooting algorithms for optimal robot control. In: **Lecture Notes in Control and Information Sciences**. Springer Berlin Heidelberg, 2006. p. 65–93. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-36119-0_4>.
- 10 BITTNER, M. **Utilization of Problem and Dynamic Characteristics for Solving Large Scale Optimal Control Problems**. Tese (Doutorado) — Technische Universität München, München, 2017. Disponível em: <<https://mediatum.ub.tum.de/doc/1343164/1343164.pdf>>.
- 11 RIECK, R. M. **Discrete Controls and Constraints in Optimal Control Problems**. Tese (Doutorado) — Technische Universität München, München, 2017. Disponível em: <<https://mediatum.ub.tum.de/doc/1316413/1316413.pdf>>.
- 12 RIECK, M. et al. **FALCON.m User Guide**. München, 2020.

Apêndice A

O que ficou para depois

Inclua aqui informações que não sejam tão relevantes para o entendimento do projeto mas que ainda sejam importantes para documentá-lo.

Apêndice B

O que mais faltou

Inclua aqui informações que não sejam tão relevantes para o entendimento do projeto mas que ainda sejam importantes para documentá-lo.

```
1 % Create and plot a sphere with radius r.
2 [x,y,z] = sphere;      % Create a unit sphere.
3 r = 2;
4 surf(x*r,y*r,z*r)     % Adjust each dimension and plot.
5 axis equal            % Use the same scale for each axis.
6
7 % Find the surface area and volume.
8 A = 4*pi*r^2;
9 V = (4/3)*pi*r^3;
```