

Universidade Federal de Minas Gerais
Escola de Engenharia
Curso de Graduação em Engenharia de Controle e Automação

Controle Ótimo Aplicado em um Veiculo Elétrico de Competição

Michael Feliphe da Silva Barbosa

Orientador: Prof. Dimas Abreu Archanjo Dutra, Dr.
Supervisor: Prof. Víctor Costa da Silva Campos, Dr.

Belo Horizonte, Julho de 2020

Monografia

Controle Ótimo Aplicado em um Veiculo Elétrico de Competição

Monografia submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado Didático do Curso de Graduação em Engenharia de Controle e Automação da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para aprovação na disciplina Projeto Final de Curso II.

Belo Horizonte, Julho de 2014

Resumo

No presente trabalho estudamos

Por fim, determinamos um modelo matemático para o veículo elétrico e aplicamos a teoria de Controle Ótimo com o objetivo de minimizar a quantidade de energia elétrica consumida durante uma prova da competição.

Abstract

Write a version of your “resumo” in English. Beware of literal translations and double check the translation of technical terms.

Agradecimentos

Aqui vai o texto dos agradecimentos.

Sumário

Lista de Figuras

Listas de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Este capítulo explica a motivação e objetivos deste projeto de otimização do desempenho em competições de um veículo elétrico protótipo de alta eficiência. Apresenta a equipe de competição estudantil Milhagem UFMG onde este PFC foi realizado. E, também, descreve a estrutura desta monografia.

1.1 Motivação e Justificativa

A equipe Milhagem UFMG constrói protótipos de veículos para participar de competições de eficiência energética. Atualmente a equipe possui dois veículos: o M84 equipado com um motor a combustão interna a gasolina e o DT1, apresentado na Figura ??, que possui motor elétrico e bateria. As competições em que a equipe participa são a Shell Eco-Marathon Brasil (nacional) e a Shell EcoMarathon Americas (internacional). Nestas competições os veículos devem consumir a menor quantidade de energia para percorrer trajeto, ou seja, devem ter a maior eficiência energética.

Figura 1.1: Veículo elétrico protótipo DT1



Fonte: Equipe Milhagem UFMG

Os principais fatores que influenciam no consumo de energia do veículo são a aerodinâmica, o peso total, a resistência ao rolamento, o relevo do trajeto e a estratégia de pista. Essa estratégia consiste na forma e nos momentos em que o motor deve ser

acionado. Um exemplo de uma estratégia de pista muito utilizada nesses protótipos é a estratégia start-stop, na qual o motor é desligado quando a velocidade é maior que 30 km/h e religado apenas quando é menor que 20 km/h, semelhante a um controle on-off com histerese.

Durante a avaliação da eficiência energética de um protótipo ele deve seguir as seguintes restrições: posições inicial e final fixas, velocidade inicial nula, velocidade instantânea máxima e velocidade média mínima. Uma vez que essas restrições permitem inúmeras estratégias de pista tem-se a necessidade encontrar a estratégia que maximize a eficiência energética do veículo durante a avaliação de consumo.

1.2 Objetivos do Projeto

Tendo em vista o exposto acima, este projeto tem por objetivos direcionados ao protótipo DT1:

- (a) Definir o modelo matemático para a dinâmica do protótipo;
- (b) Formular o problema de controle ótimo (OCP) pra obter a estratégia ótima;
- (c) Implementar o algoritmo para solução desse OCP;
- (d) Definir a estratégia ótima para a pista da Shell EcoMarathon Américas de 2019.

1.3 Local de Realização

Esse projeto foi desenvolvido na equipe de competição Milhagem UFMG, na qual o autor foi integrante de 2013 à 2015 e em 2018. A equipe é composta por alunos de graduação em engenharia de diversos períodos e sua sede é no Departamento de Engenharia Mecânica da UFM. Foi fundada, sobre orientação do professor Paulo Iscold, em 2005 no Centro de Estudos Aeronáuticos (CEA) do qual fez parte até 2006. De 2006 a 2011 o projeto da equipe ficou suspenso retornando as atividades, sobre orientação do professor Fabrício Pujatti, no Centro de Tecnologia de Mobilidade (CTM). A equipe já desenvolveu 6 veículos, sendo DT1 o primeiro elétrico, e participou de 10 competições com os seguintes resultados:

- Maratona Universitária de Eficiência Energética
 - Categoria gasolina
 - * 2005: 2º Lugar, com a marca de 227,6 [km/L]
 - * 2006: 1º Lugar, com a marca de 598,9 [km/L]
 - * 2011: 5º Lugar, com a marca de 199,0 [km/L]
 - * 2013: 4º Lugar, com a marca de 234,9 [km/L]

- Shell Eco-marathon Brasil
 - Categoria gasolina
 - * 2016: 2º Lugar, com a marca de 196,0 [km/L]
 - Categoria elétrico
 - * 2017: 3º Lugar, com a marca de 315,6 [km/kWh]
 - * 2018: 1º Lugar, com a marca de 266,4 [km/kWh]
- Shell Eco-marathon Americas
 - Categoria elétrico
 - * 2018: 6º Lugar, com a marca de 266,5 [km/kWh]
 - * 2019: 2º Lugar, com a marca de 226,9 [km/kWh]

1.4 Estrutura da Monografia

O relatório está dividido em cinco capítulos. Este capítulo apresentou uma introdução ao projeto a ser descrito nos capítulos seguintes. O Capítulo ?? é uma revisão bibliográfica que dos princípios básicos de modelagem veicular e controle ótimo de forma que abrange todos os conceitos necessários para um melhor entendimento do projeto. O Capítulo ?? aborda a metodologia de desenvolvimento do modelo matemático do DT1 e de implementação implementação do software para otimização da estratégia de pista. Os resultados obtidos no projeto são apresentados no Capítulo ?? e no Capítulo ?? tem-se a conclusão da monografia com algumas sugestões para trabalhos futuros e dificuldades encontradas durante a realização do projeto.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Este capítulo é dividido em duas seções que visam apresentar os conceitos necessários para a compreensão deste PFC. Na primeira seção são aprenasdos conceitos para uma modelagem matemática da dinâmica de um veículo em baixas velocidades. São apresentado na segunda seção uma introdução à teoria de controle ótimo e a utilização de programação não linear na solução de problemas de controle ótimo.

2.1 Modelo do veículo

Um modelo matemático, ou apenas modelo, é um conjunto de equações que descreve de forma adequada o comportamento de um sistema que deseja-se estudar. Uma forma usual de classificação dos métodos de modelagem é separá-los nas categorias: modelagem caixa branca, modelagem caixa preta e modelagem caixa cinza. A modelagem caixa branca, também conhecida como modelagem conceitual, consiste na aplicação princípios fundamentais e por isso exige um conhecimento da natureza do sistema. A modelagem caixa preta, ou modelagem empírica, é baseada na aplicação de técnicas de identificação de sistemas que exigem pouco ou nenhum conhecimento do sistema. Já na modelagem caixa cinza são utilizadas técnicas que estão entre a modelagem caixa branca e a modelagem caixa preta^[??].

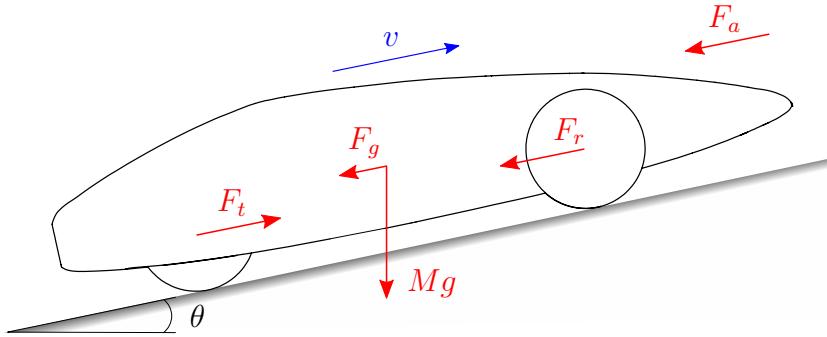
Nessa seção o método de modelagem aplicado é de modelagem caixa branca. A partir da aplicação da segunda lei de Newton no veículo representado no diagrama da Figura ??, obtém-se a equação que descreve a dinâmica longitudinal do mesmo

$$(m_v + m_p + m_r) \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = F_t - (F_a + F_g + F_p) , \quad (2.1)$$

em que m_v é a massa do veículo, m_p é a massa do piloto, m_r é massa equivalente ao momento de inércia das partes rotativas (rodas e eixo do motor), x é a posição, F_t é a propulsão feita pelo motor, F_a é o arrasto aerodinâmico, F_g é a componente do

peso que esta direção da velocidade e F_p é a resistência ao rolamentos dos pneus no pista. Os modelos que descrevem a massa equivalente m_r forças F_a , F_g , F_p e F_t estão apresentados nas subseções a seguir.

Figura 2.1: Diagrama de forças de um veículo em movimento



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.1.1 Inércia rotacional

A inércia de todas as peças giratórias dentro do veículo causa forças fictícias. Esta inércia pode ser representada nos modelos dinâmicos do motor e da transmissão, ou ser representada com uma massa equivalente m_r . Para essa representação é considerado que não há deslizamento do pneu no asfalto e não a escorregamento na transmissão. O cálculo de m_r é

$$m_r = m_{r,r} + m_{r,m} , \quad (2.2a)$$

$$m_{r,r} = \sum_{n=1}^{Nr} J_r \cdot \frac{1}{r_r^2} , \quad (2.2b)$$

$$m_{r,m} = J_m \cdot \frac{\varphi^2}{r_r^2} , \quad (2.2c)$$

em que $m_{r,r}$ é a massa equivalente a inércia das rodas e $m_{r,m}$ é a massa equivalente a inércia do motor, Nr é a quantidade de rodas, J_r e r_r são o momento de inércia e o raio da roda, J_m é o momento de inércia do motor e φ é a relação de transmissão.^[??]

2.1.2 Arrasto Aerodinâmico

O movimento de um objeto imerso em um fluido sofre uma resistência causada por esse fluido. No caso de veículos que se deslocando no ar, essa resistência é chamada de arrasto aerodinâmico. Pode-se aproximar o cálculo dessa força F_a com a equação

$$F_a(v) = \frac{\rho \cdot a_f \cdot c_d \cdot v^2}{2} , \quad (2.3)$$

em que v é a velocidade do veículo em relação ao vento, ρ a densidade do ar, a_f a área frontal do veículo e c_d o coeficiente de arrasto aerodinâmico. O coeficiente c_d é um número adimensional e depende da geometria veículo, é determinado por meio de simulações em *software* de fluido dinâmica computacional (CFD, do inglês *computational fluid dynamics*) e/ou experimentos em túnel de vento^[??]. Alguns valores típicos de C_d para diferentes tipos de veículos são apresentados na Tabela ??.

Tabela 2.1: Comparação do c_d de diferentes tipos veículos

Veículo	c_d
Carro	0,3 - 0,4
Ônibus	0,6 - 0,7
Caminhão	0,6 - 1,0
Moto	0,5 - 1,0

Fonte: Adaptado de ??[??].

2.1.3 Relevo da pista

A componente do peso, F_g , afeta consideravelmente a dinâmica do veículo e atua sempre que a pista não é plana. Seu modelo é a equação

$$F_g(\theta) = m \cdot g \cdot \sin(\theta) ,$$

que, pra pequenas inclinações, pode ser aproximado pela equação

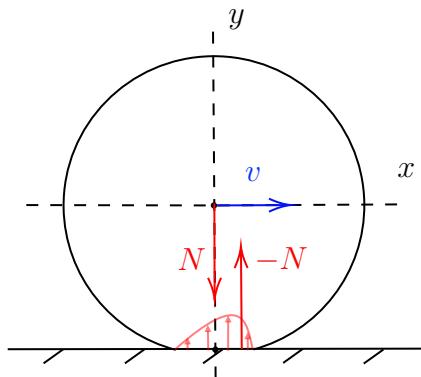
$$F_g(\theta) \approx m \cdot g \cdot \theta , \quad (2.4)$$

em que m é a massa total do veículo, g é a aceleração da gravidade e θ é a inclinação da pista expressa em radianos^[??].

2.1.4 Resistência ao rolamento

A norma ISO 4223-1:2017 define a resistência ao rolamento de um pneu, como a energia consumida pelo pneu por unidade de distância percorrida. Esse consumo de energia se deve principalmente as propriedades viscoelásticas dos compostos de borracha presente no pneu. Durante a rolagem o pneu é deformado na zona de contato entre o pneu e o pavimento, nessa zona de contato a resultante da força de reação à força normal não está no mesmo eixo que a força normal, Figura ??, de forma a gerar um força, F_r , contraria a movimentação do pneu.

Figura 2.2: Legenda diagrama pneu



Fonte: Elaborado pelo autor.

A força de resistência ao rolamento, F_r , depende da construção do pneu e do tipo de pavimento. Essa força também depende da velocidade do veículo e da pressão do ar no pneu, embora nesse trabalho não considera-se essa dependência. Para calcula-la usa-se a relação:

$$F_r = c_r \cdot N , \quad (2.5)$$

em que c_r é o coeficiente de resistência ao rolamento, N é a força normal sobre o pneu e F_r é a força gerada pela resistência ao rolamento. Estão apresentados na Tabela ?? o valor do coeficiente c_r para pneus de uso típico em carros de passeio, bicicletas e de dois pneus específicos para a competição SEM, Michelin® 45-406 Prototype (Figura ??) e Michelin® Radial 45-75 R16.

Figura 2.3: Pneu Michelin® 44-406 Prototype



Fonte: Equipe Milhagem UFMG.

2.1.5 Sistema de propulsão

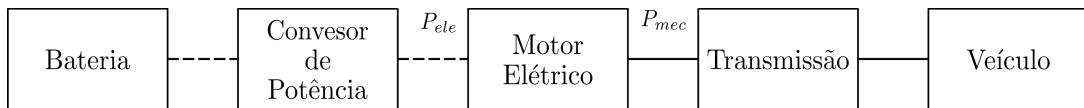
De forma genérica, o sistema de propulsão de um veículo elétrico, representado no diagrama da Figura ??, é composto por bateria, conversor de potencia, motor elétrico e transmissão.

Tabela 2.2: Comparaçāo do coeficiente c_r de diferentes pneus

Pneu	c_r
Usado em carro	0,013
Usado em bicicleta	0,006
Michelin® 45-406 Prototype	0,0024
Michelin® Radial 45-75 R16	0,00081

Fonte: Adaptado de ??[??].

Figura 2.4: Diagrama de blocos do sistema de propulsāo de um veículo elétrico



Fonte: Elaborado pelo autor.

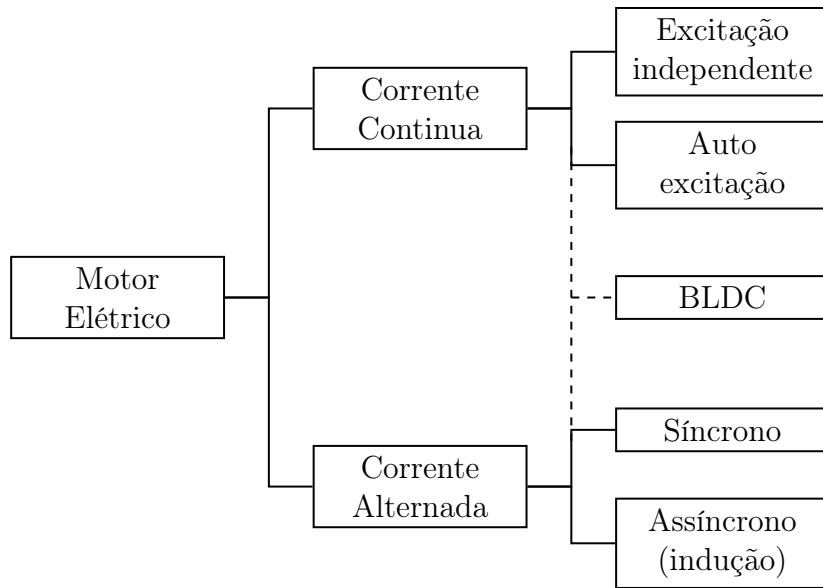
Bateria eletroquímica, ou apenas bateria, é um dispositivo em que durante a descarga ocorre a conversão de energia potencial química em energia elétrica e na carga ocorre a conversão inversa. Ou seja, uma bateria armazena energia elétrica na forma de energia potencial química. Uma bateria é composta por varais células ligadas entre se. Uma célula de bateria é basicamente composta por dois eletrodos – positivo e negativo – imersos em um eletrólito[??].

Conversor eletrônico de potêcia, ou conversor de potêcia, é o circuito cujo a finalidade é extrair energia elétrica de um sistema de energia e transformá-la em uma forma adequada e necessária para um motor[??].

O motor elétrico converte a potencia elétrica – tensão e corrente – em potencia mecânica rotativa – torque e rotação – para impulsionar o veículo.[??] Podem ser classificados em relação a sua alimentação: corrente continua (CA) ou corrente alternada (CC), conforme apresentado na Figura ???. No entanto o motor de corrente continua sem escovas, ou BLDC do inglês *brushless direct current*, é difícil de ser classificado desse forma pois sua configuração é semelhante à de um motor CA, enquanto suas características elétricas são semelhantes às de um motor CC.[??] Nesse trabalho estudara-se o modelo dos motores BLDC pois é o tipo de motor utilizado no protótipo DT1.

O motor BLDC foi desenvolvido em 1962 e possui um sistema de comutação eletrônica ao ives de comutação mecânica como os motores CC. Para não utilizar as escovas da comutação mecânica, os enrolamentos da armadura são colocados no estator (parte estacionaria) e os ímãs são colocados no rotor (parte rotativa). A comutação eletrônica baseia-se em sensores para identificar a posição do rotor e acionar o enrolamento necessário para manter o movimento de rotação.[??] O conjunto de equações que descreve a corrente de armadura i_a e o torque gerado T para um motor BLDC de enrolamentos ligados em Y com neutro acessível e operando em meia onda (a tensão é aplicada entre

Figura 2.5: Classificação de motores elétricos



Fonte: Adaptado de ??[??]

o terminal de um enrolamento e o neutro) é

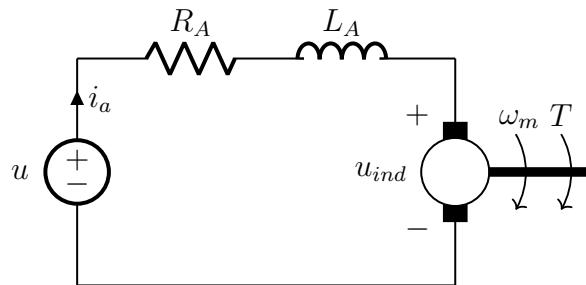
$$u - u_{ind} = L_a \cdot \dot{i}_a + R_a \cdot i_a , \quad (2.6a)$$

$$u_{ind} = K_v \cdot \omega_m , \quad (2.6b)$$

$$T_m = K_t \cdot i_a , \quad (2.6c)$$

em que u é a tensão aplicada, u_{ind} é a tensão induzida, L_a e R_a são, respectivamente a indutância e a resistência da armadura, K_v é a constante de tensão induzida, ω_m é a rotação do motor e K_t é a constante de torque. A Figura ?? apresenta o modelo o circuito de um enrolamento do motor BLDC.[??]

Figura 2.6: Circuito equivalente de um motor BLDC



Fonte: Elaborado pelo autor.

O protótipo DT1 é equipado com um motor Dunkermotoren BG75x75 40V (Figura

??). O motor que possui 3 enrolamentos, imã de neodímio com 8 polos e sensor hall integrado para medir a posição do rotor (24 pulsos por volta), suas características elétricas e mecânicas estão apresentadas na Tabela ??.

Figura 2.7: Motor Dunkermotoren BG75x75 40V



Fonte: Adaptado de

Tabela 2.3: Dados do motor BG75x75 40V

Tensão nominal	[V]	40
Corrente nominal	[A]	15,6
Torque nominal	[N.m]	1,50
Velocidade nominal	[rpm]	3370
Torque de atrito	[N.m]	0,13
Torque de parada	[N.m]	12
Velocidade sem carga	[rpm]	4100
Potencia de saída nominal	[W]	530
Potencia de saída máxima	[W]	1150
Constante de torque	[N.m/A]	0,119
Resistência	[Ω]	0,07
Indutância	[mH]	0,45
Corrente de pico	[A]	63
Inercia do rotor	[g.m²]	0,0625
Massa	[kg]	2,8

Fonte: Adaptado de

A transmissão do veículo regula a transferência de potência do motor para as rodas. É basicamente composta por mecanismo de redução – ex. caixa de câmbio – e por um mecanismo de interrupção – ex. embreagem^{??}. No DT1, o mecanismo de redução utilizado é do tipo roda de atrito e o mecanismo de interrupção é o pivotamento entre os componentes da roda de atrito (Figura ??).

Rodas de atrito são uma das maneiras mais simples para se transmitir potência mecânica entre eixos e sua eficiência é tipicamente de 95 a 98 %. São composta por dois ou mais cilindros em contato direto. Para não ocorrer deslizamento em uma roda de

atrito o torque transmitido não deve exceder a força de atrito entre os cilindros. A eficiência na transmissão do torque

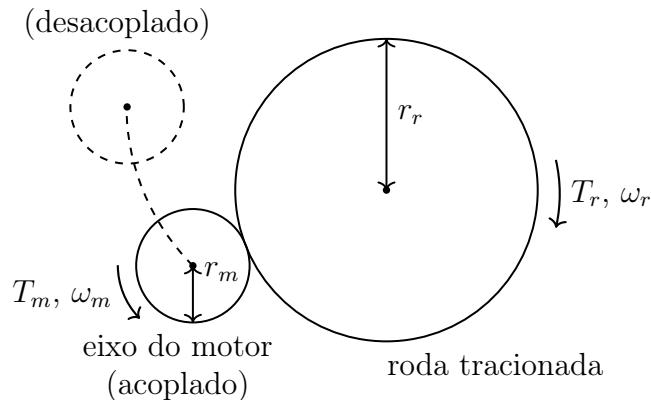
$$\varphi = \frac{r_r}{r_m} , \quad (2.7a)$$

$$\omega_r = -\frac{\omega_m}{\varphi} , \quad (2.7b)$$

$$T_r = \varphi \cdot T_m \cdot \eta , \quad (2.7c)$$

onde φ é a relação de transmissão, R_r e ω_r são o diâmetro e a velocidade angular da roda, R_m e ω_m são o diâmetro e a velocidade angular do cilindro motor e η é a eficiência da roda de atrito.^[????]

Figura 2.8: Representação da transmissão do DT1



Fonte: Elaborada pelo autor.

2.2 Controle Ótimo

"O objetivo da teoria de controle ótimo é determinar os sinais de controle que farão com que um processo satisfaça as restrições físicas e ao mesmo tempo minimize (ou maximize) alguns critérios de desempenho."^[??]

O seguinte conjunto de equações é uma formulação genérica e comum para um problema de controle ótimo (OCP)

$$\min_{x(\cdot), u(\cdot), p, T} \int_0^T L(x(t), u(t), p) dt + E(x(T), p) \quad (2.8a)$$

$$\text{s.t.} \quad x(0) - x_0 = 0, \quad (2.8b)$$

$$\dot{x}(t) - f(x(t), u(t)) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (2.8c)$$

$$h(x(t), u(t)) \leq 0, \quad t \in [0, T], \quad (2.8d)$$

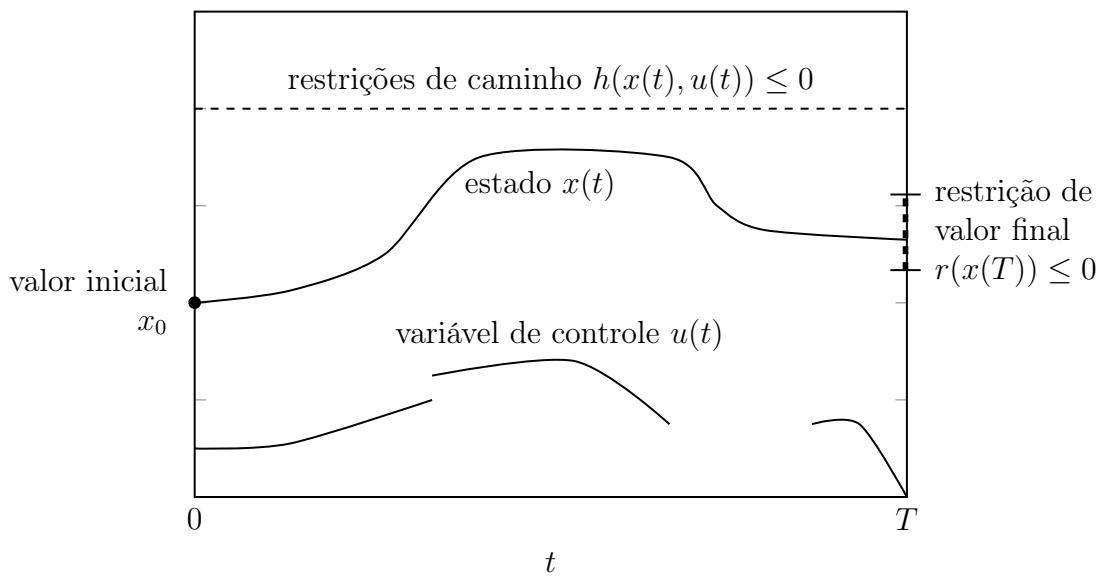
$$r(x(T)) \leq 0, \quad (2.8e)$$

$$T \leq T_{max}, \quad (2.8f)$$

$$p_{min} \leq p \leq p_{max} \quad (2.8g)$$

em que a Equação (??) é o função objetivo, Equação (??) é uma restrição de estados inciais fixos, Equação (??) é a restrição que representa a dinâmica do sistema, Equação (??) são restrições de caminho sobre os estados do sistema e sobre as variáveis de controle, Equação (??) é uma restrição de espaço para os estados finais, Equação (??) é a restrição para o tempo final e Equação (??) são restrições de intervalo para parâmetros otimizáveis. O função objetivo, também conhecido como objetivo de Bolza, é composto por uma integral de $L(x, u)$ conhecida como termo de Lagrange e uma função $E(x)$ conhecida como termo de Meyer^[??].

Figura 2.9: Exemplo do comportamento desejado das variáveis em um OPC



Fonte: Adaptado de

De forma geral, há três abordagens básicas para solução de um OPC, (a) programação dinâmica, (b) métodos indiretos e (c) métodos diretos, conforme apresentado na Figura ??.

- (a) Programação dinâmica: utiliza o princípio de otimalidade de Bellman (em um caminho ótimo A-B-C os caminhos A-B e B-C também são ótimos) para calcular recursivamente a sequencia de controle ótimo.
- (b) Métodos indiretos: utiliza a filosofia "primeiro otimizar e então discretizar", que é escrever as condições de otimalidade contínuas primeiro, resultando em um problemas de valor de contorno (sistema de equações diferenciais acrecido de um conjunto adicional de restrições chamadas condições de contorno) e depois discretizá-lo para resolver numericamente.
- (c) Métodos diretos: utiliza a filosofia "primeiro discretizar e então otimizar", isto é primeiro discretize as equações do OPC e, em seguida, aplique um algoritmo de otimização para resolver o problema de programação não linear resultante (NPL do inglês *Nonlinear Programming Problem*) resultante.

Para a solução de OPC em aplicações no mundo real, os métodos diretos são atualmente as técnicas mais difundidas e usadas com sucesso. [????]

Métodos diretos reformulam o OPC da Equação (??) em um problema de programação não linear de dimensão finita (NLP) da forma:

$$\min_w \quad a(w) \tag{2.9a}$$

$$\text{s.t.} \quad b(w) = 0, \tag{2.9b}$$

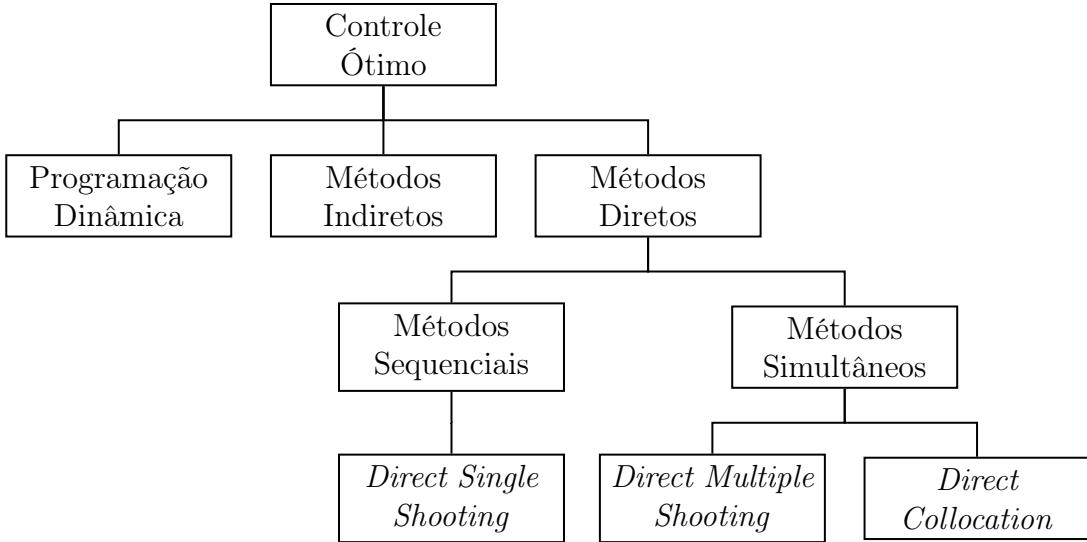
$$c(w) \geq 0, \tag{2.9c}$$

com um vetor de dimensão finita w representando os graus de liberdade de otimização e com funções diferenciáveis a (escalar), b e c (vetores). Todos os métodos diretos começam por uma parametrização da trajetória de controle, mas diferem na forma como a trajetória dos estados é tratada. Podem ser classificados em duas abordagens, sequenciais e simultâneos.

Nas abordagens sequenciais, a trajetória de estado $x(t)$ é uma função implícita dos controles $u(t)$ e do valor inicial x_0 , por exemplo, por uma simulação direta com a ajuda de um solucionador ODE em tiro único direto [45, 31]. Assim, simulação e as iterações de otimização procedem sequencialmente, uma após a outra, e a PNL possui apenas o controle discretizado como graus de liberdade de otimização.

As abordagens simultâneas fazem uma parametrização da trajetória do estado como variáveis de otimização dentro da PNL e adicionam restrições de igualdade adequadas que representam o modelo ODE. Assim, a simulação e a otimização ocorrem simultaneamente, e somente na solução da PNL os estados realmente representam uma solução EDO válida correspondente à trajetória de controle. As duas variações mais comuns da abordagem simultânea são *Direct Multiple Shooting* e *Direct Collocation*.

Figura 2.10: Visão geral dos métodos numéricos para controle ótimo



Fonte: Adaptado de ??[??]

2.2.1 FALCON.m

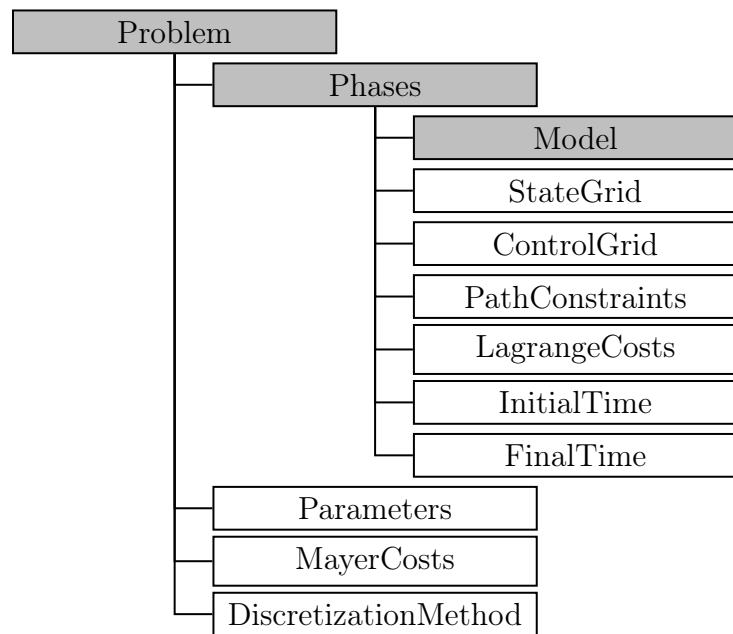
FALCON.m é um é uma biblioteca de *software*, proprietária de uso gratuito, para MATLAB®, desenvolvida no *Institute of Flight System Dynamics* da *Technische Universität München* para resolução e análise de problemas de controle ótimo e estimativa de parâmetros utilizando o método *Direct Collocation*. Capaz de resolver grandes problemas de controle ótimo com de até 600 mil variáveis de otimização [????]. Ela segue o paradigma de programação orientada a objetos e um resumo de seus principais objetos é apresentado na Figura ??:

A biblioteca utiliza otimizadores para NLP externos, Como cada otimizador tem uma interface única, no momento é possível utilizar interfaces para três otimizadores: IPOPT, SNOPT e WORHP. O otimizador utilizado neste trabalho é o IPOPT, padrão da biblioteca FALCON.m.

2.2.2 IPOPT

O projeto COIN-OR, do inglês *COmputational INfrastructure for Operations Research*, é uma iniciativa que visa promover *software* de código aberto para a comunidade de pesquisa operacional [??]. Dentre as bibliotecas disponibilizadas no projeto COIN-OR está a IPOPT, do inglês *Interior Point OPTimizer*. Escrita em C++ e Fortran para solução de problemas de otimização não linear utilizando o método de pontos interiores com filtro apresentado por ??[??] e sua licença é a EPL. Mais detalhes sobre esta biblioteca podem ser obtidos na página do seu repositório no GitHub® (<<https://github.com/coin-or/Ipopt>>).

Figura 2.11: Resumo com principais objetos da biblioteca FALCON.m



Fonte: Adaptado de

Capítulo 3

Metodologia

3.1 Definição do problema

3.2 Solução Numérica

3.2.1 *FALCON.m*

FALCON.m é um biblioteca de *MATLAB®*, orientada a objetos, desenvolvida no *Institute of Flight System Dynamics* da *Technische Universität München* para resolução e análise de problemas de controle ótimo utilizando [??].

Na utilização do *FALCON.m* para resolver um problema de controle ótimo são realizadas as seguintes etapas [??]:

1. **Implementar os modelos dinâmicos:** o modelo dinâmico do sistema deve ser implementado em funções do *MATLAB®*.
2. **Construir os modelos dinâmicos gerais dos subsistemas:** utilizar o *e Model Builder* do *FALCON.m* para relacionar os modelos dinâmicos nas diferentes fases do OCP.
3. **Derivar automaticamente todas as funções necessária:** o *Model Builder* criará automaticamente, as derivadas analíticas de todos os subsistemas e combiná-los ao gradiente geral dos modelos usando a regra da cadeia.
4. **Gerar código automaticamente para os modelos e compilar:**
5. **Implementar funções de restrição adicionais:** repetir os passos de 1 à 4 para todas as restrições e funções de custo.
6. **Definir a estrutura do problema de controle ótimo:**
7. **Discretizar o problema de controle ótimo:**

8. **Resolver o problema discretizado:** o problema de otimização numérica resultante da discretização do problema de controle ótimo é resolvido usando um solucionador numérico apropriado (*IPOPT*, *SNOPT*, *FMINCON* ou *WORHP*).

9. **Analizar dos resultados:**

Detalhes sobre o uso do *FALCON.m* pode ser encontrados em sua documentação [??], bem com uma explicação detalhada da sua implementação na tese de doutorado de ??[??].

Esse é um teste de como escreve codigo `Bake()`

Capítulo 4

Resultados

Para a execução do projeto, algumas etapas de desenvolvimento tiveram de ser seguidas: familiarização com o sistema, estudo dos módulos envolvidos, leitura dos requisitos, elaboração de documento descrevendo todo o processo de implementação e relacionamento com os diversos módulos, implementação e testes.

4.1 Atividades do Projeto

4.2 Requisitos do Sistema

4.3 Desenvolvimento e Implementação

A Tabela ?? apresenta as atividades executadas.

4.4 Testes

4.5 Análise dos Resultados

Apresente os resultados sem adulterações e faça análises objetivas. Pense na melhor maneira de apresentar os resultados graficamente. Se os gráficos são difíceis de interpretar, talvez tabelas sejam uma forma melhor de apresentar resultados. Não apresente

Atividade 1	aa a	ab b
Ativ. 2	aa a	ab b

Tabela 4.1: Exemplo de tabela - Coloque toda informação sobre a tabela aqui

dados (gráficos e tabelas) se não há uma conclusão interessante a ser tirada. Lembre-se de ser conciso.

Não se esqueça das unidades! Pense que *a priori* todo número deve ter uma unidade. Não escreva as unidades em itálico (no ambiente matemático) e tome cuidado para diferenciar maiúsculas e minúsculas. Um exemplo é escrever 22 [kN] e não 22KN (Kelvin vezes Newton!).

Ao apresentar resultados experimentais, tome o cuidado para também apresentar o cálculo das incertezas sempre que forem significativas. Ao fazer conclusões, sempre considere se o tamanho da sua amostra é grande o suficiente do ponto de vista estatístico.

4.6 Resumo do Capítulo

Tente não terminar de forma abrupta. Se for escrever algo aqui, não seja genérico!

4.7 Formato, expressões matemáticas e o \LaTeX

4.7.1 O \LaTeX

O \LaTeX é o método preferencial de preparação de documentos para textos técnicos nas ciências exatas. O \LaTeX permite não só lidar com equações de uma forma mais prática que em editores de texto, mas também facilita a formatação de documentos e tem um desempenho marcadamente superior a editores de texto na preparação de documentos longos como monografias.

Documentos em \LaTeX são escritos em um ou mais arquivos de texto com extensão .tex. Após a escrita, o .tex é *compilado* para gerar arquivos nos formatos .pdf, .dvi ou .ps. Hoje há duas distribuições padrão para o \LaTeX . Sistemas Windows usam o Mik \TeX e sistemas Unix usam o TeXLive. Além das distribuições, muitos usuários utilizam *front-ends* que facilitam a edição do texto, a compilação e a instalação de pacotes.

Os pacotes necessários para compilar o presente documento devem ser encontrados numa instalação completa dessas distribuições. Se tiver dificuldades com os pacotes, você pode instalá-los manualmente ou tentar alterar o código para usar versões antigas dos mesmos.

A compilação pode ser feita pelos comandos `latex` ou `pdflatex`, invocados pela linha de comando ou pelo *front-end*. Note que será necessário empregar o comando **mais de uma vez** para que as referências cruzadas saiam corretas.

Como discutido na Seção, uma ferramenta útil para gerenciar as citações em \LaTeX é o Bib \TeX . Para gerar uma lista bibliográfica a partir do arquivo .bib, este arquivo deve

ser indicado no arquivo `.tex`. Em seguida devem-se executar os comandos `pdflatex`, `bibtex` e `pdflatex` novamente sempre usando o `.tex` como argumento. Note que os comandos são executados nesta ordem e de forma repetida para que as referências cruzadas sejam geradas corretamente.

A fonte **Times**, indicada pela resolução do PFC e usada neste documento, não possui uma das aparências mais agradáveis, especialmente para os símbolos matemáticos. Se preferir símbolos matemáticos mais harmoniosos, remova a inclusão da fonte `newtxmath` no cabeçalho do `.tex`.

Nesta seção você deve encontrar exemplos dos comandos mais usados em L^AT_EX. Outros exemplos e manuais podem ser encontrados na internet com facilidade.

4.7.2 Expressões Matemáticas

Ao escrever expressões matemáticas, defina todas as variáveis antes de usá-las ou imediatamente depois da expressão. Deixar de fazê-lo torna seu texto ilegível. Segue um exemplo.

Seja o par $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Para $s \in \mathbb{C}$, definimos a função $f(s)$ como

$$f(s) \triangleq \frac{a_1 s + a_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

onde os escalares $\zeta, \omega_n > 0$ são constantes.

Note que não foi necessário atribuir valores às variáveis neste momento. Repare também como devemos **usar pontuação** (vírgula) nas equações, tratando-as como parte da frase. Usamos o símbolo \triangleq ou $:=$ para deixar explícito que se trata de uma definição. Ser claro nesse aspecto facilita o entendimento do leitor.

A equação acima não foi numerada porque não será citada no texto. Vejamos um exemplo com numeração.

A função $f(\cdot)$ possui um zero em $-a_2/a_1$ (ou $-\frac{a_2}{a_1}$) e, para $\zeta < 1$, possui polos complexos $p_{1,2}$ dados por

$$p_{1,2} = \omega_n \left(-\zeta \pm j\sqrt{1 - \zeta^2} \right). \quad (4.1)$$

Agora podemos citar os polos dados pela Equação (??) (aqui adotamos a convenção de citar sempre com o número entre parênteses precedido da palavra Equação). Note como usamos um comando especial na Equação (??) para garantir o ajuste automático do tamanho dos parênteses.

Vejamos agora como criar equações alinhadas. Considere o sistema dinâmico dado pelas equações diferenciais:

$$\dot{x}_1 = \cos(x_2) \cdot \ln(1/x_1) + \tan(u) \quad (4.2)$$

$$\dot{x}_2 = e^{-x_1 - x_2}$$

$$y = \min\{x_1, x_2\} , \quad (4.3)$$

onde $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]'$, $t > 0$, é a variável de estado do sistema, $u(t)$ é o sinal de entrada e $y(t)$ é o sinal de saída do sistema. Note no .tex que o caracter de tabulação & foi usado para indicar o ponto de alinhamento horizontal das equações. Além disso, para ilustrar o uso do L^AT_EX, retiramos a numeração da segunda equação e citamos as equações separadamente.

Nas Equações (??) e (??), aparecem operadores como min, ln, cos e tan. A convenção aqui é que **variáveis devem ser escritas em itálico e operadores não**. Por essa razão todas as expressões matemáticas devem ser escritas no ambiente matemático (entre cífrão) mesmo quando for possível usar texto comum. Isso garante a consistência das fontes utilizadas (nem sempre a fonte do ambiente matemático é a mesma fonte do texto).

Para escrever matrizes, podemos fazer por exemplo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \frac{z}{z-\lambda} & \frac{z}{(z-\lambda)^2} \\ 0 & \frac{z}{z-\lambda} \end{bmatrix}, \quad \forall \lambda < |z| .$$

Para escrever uma expressão com múltiplos casos, podemos fazer, para um inteiro N positivo,

$$g[n] = \begin{cases} 0, & \text{se } n \leq 0 \\ n, & \text{se } n = 1, 2, \dots, N-1 \\ N, & \text{se } n \bmod N = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} . \end{cases}$$

Nunca reproveite símbolos matemáticos, isto é, nunca use o mesmo símbolo para designar variáveis diferentes.

Para um exemplo com múltiplas linhas de expressão matemática: tem-se que, para $a \neq 0$,

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
\Rightarrow a(x^2 + bx/a + c/a) &= 0 \Rightarrow a((x + b/(2a))^2 + c/a - b^2/(4a^2)) = 0 \\
\Rightarrow (x + b/(2a))^2 &= (b^2 - 4ac)/(4a^2) \\
\Rightarrow (x + b/(2a)) &= \pm\sqrt{b^2 - 4ac}/(2a) \\
\Rightarrow x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} .
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Note a argumentação lógica aqui. Não estamos dizendo que o valor de x é dado pela última linha. Estamos dizendo que a hipótese da primeira linha juntamente com a hipótese $a \neq 0$ implicam os referidos valores de x . **Um erro comum dos alunos ao escrever é não distinguir a veracidade das implicações com a veracidade das hipóteses.**

Capítulo 5

Conclusões

Novamente, este será um dos trechos que o leitor experiente lerá antes de decidir se vale a pena ler o texto integral. Seja convincente.

5.1 Considerações Finais

Reitere o que de mais importante foi feito, qual era o objetivo inicial e qual o resultado obtido. Se houve requisitos ou especificações de projeto, discuta se foram atingidos. Se os resultados não foram conclusivos ou contrariam o que se esperava, seja honesto e diga-o explicitamente. Busque explicar os insucessos com argumentos sólidos e plausíveis.

5.2 Propostas de Continuidade

Se houve questões ainda não respondidas ou resultados insatisfatórios, aponte direções de continuação.

Apêndice A

O que ficou para depois

Inclua aqui informações que não sejam tão relevantes para o entendimento do projeto mas que ainda sejam importantes para documentá-lo.

Apêndice B

O que mais faltou

Inclua aqui informações que não sejam tão relevantes para o entendimento do projeto mas que ainda sejam importantes para documentá-lo.

```
1 % Create and plot a sphere with radius r.  
2 [x,y,z] = sphere;           % Create a unit sphere.  
3 r = 2;  
4 surf(x*r,y*r,z*r)        % Adjust each dimension and plot.  
5 axis equal                 % Use the same scale for each axis.  
6  
7 % Find the surface area and volume.  
8 A = 4*pi*r^2;  
9 V = (4/3)*pi*r^3;
```