

Universidade Federal de Minas Gerais
Escola de Engenharia
Curso de Graduação em Engenharia de Controle e Automação

Controle Ótimo Aplicado em um Veiculo Elétrico de Competição

Michael Feliphe da Silva Barbosa

Orientador: Prof. Dimas Abreu Archanjo Dutra, Dr.
Supervisor: Prof. Víctor Costa da Silva Campos, Dr.

Belo Horizonte, Julho de 2020

Monografia

Controle Ótimo Aplicado em um Veiculo Elétrico de Competição

Monografia submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado Didático do Curso de Graduação em Engenharia de Controle e Automação da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para aprovação na disciplina Projeto Final de Curso II.

Belo Horizonte, Julho de 2014

Resumo

No presente trabalho estudamos

Por fim, determinamos um modelo matemático para o veículo elétrico e aplicamos a teoria de Controle Ótimo com o objetivo de minimizar a quantidade de energia elétrica consumida durante uma prova da competição.

Abstract

Write a version of your “resumo” in English. Beware of literal translations and double check the translation of technical terms.

Agradecimentos

Aqui vai o texto dos agradecimentos.

Sumário

Resumo	i
Abstract	iii
Agradecimentos	v
Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
1.1 Motivação e Justificativa	1
1.2 Objetivos do Projeto	2
1.3 Local de Realização	2
1.4 Estrutura da Monografia	3
2 Revisão Bibliográfica	5
2.1 Modelo do veículo	5
2.1.1 Inércia rotacional	6
2.1.2 Arrasto aerodinâmico	6
2.1.3 Relevo da pista	7
2.1.4 Resistência ao rolamento	7
2.1.5 Sistema de propulsão	8
2.2 Controle Ótimo	12
2.2.1 Introdução teórica	13
2.2.2 O <i>software</i> FALCON.m	15
3 Metodologia	17
3.1 Modelo do veículo DT1	17
3.2 Modelo da pista	19
3.3 Problema de controle ótimo (OPC)	20
3.4 Código para solução do OPC	20
4 Resultados	23

5 Conclusões	25
5.1 Considerações Finais	25
5.2 Propostas de Continuidade	25
Referências Bibliográficas	26
A Códigos implementados	29
B Dados da pista	33

Listas de Figuras

1.1	Veículo elétrico protótipo DT1	1
2.1	Diagrama de forças de um veículo em movimento	6
2.2	Legenda diagrama pneu	8
2.3	Diagrama de blocos do sistema de propulsão de um veículo elétrico . . .	9
2.4	Classificação de motores elétricos	9
2.5	Círculo equivalente de um motor BLDC	10
2.6	Motor Dunkermotoren BG75x75 40V	11
2.7	Representação da transmissão do DT1	12
2.8	Exemplo do comportamento desejado das variáveis em um OPC	14
2.9	Visão geral dos métodos numéricos para controle ótimo	15
2.10	Resumo com principais objetos da biblioteca FALCON.m	16
3.1	Perfil de altitude da pista da Shell Eco-marathon Americas de 2019 . .	19
3.2	Arquivos MATLAB® do projeto	21

Lista de Tabelas

2.1	Comparação do c_d de diferentes tipos veículos	7
2.2	Comparação do coeficiente c_r de diferentes pneus	8
2.3	Dados do motor BG75x75 40V	11
3.1	Constantes utilizadas no modelo do veiculo	18
B.1	Dados da pista da Shell Eco-marathon Americas de 2019	33

Capítulo 1

Introdução

Este capítulo explica a motivação e objetivos deste projeto de otimização do desempenho em competições de um veículo elétrico protótipo de alta eficiência. Apresenta a equipe de competição estudantil Milhagem UFMG onde este PFC foi realizado. E, também, descreve a estrutura desta monografia.

1.1 Motivação e Justificativa

A equipe Milhagem UFMG constrói protótipos de veículos para participar de competições de eficiência energética. Atualmente a equipe possui dois veículos: o M84 equipado com um motor a combustão interna a gasolina e o DT1, apresentado na Figura 1.1, que possui motor elétrico e bateria. As competições em que a equipe participa são a Shell Eco-Marathon Brasil (nacional) e a Shell EcoMarathon Americas (internacional). Nestas competições os veículos devem consumir a menor quantidade de energia para percorrer trajeto, ou seja, devem ter a maior eficiência energética.

Figura 1.1: Veículo elétrico protótipo DT1



Fonte: Equipe Milhagem UFMG

Os principais fatores que influenciam no consumo de energia do veículo são a aerodinâmica, o peso total, a resistência ao rolamento, o relevo do trajeto e a estratégia de pista. Essa estratégia consiste na forma e nos momentos em que o motor deve ser

acionado. Um exemplo de uma estratégia de pista muito utilizada nesses protótipos é a estratégia start-stop, na qual o motor é desligado quando a velocidade é maior que 30 km/h e religado apenas quando é menor que 20 km/h, semelhante a um controle on-off com histerese.

Durante a avaliação da eficiência energética de um protótipo ele deve seguir as seguintes restrições: posições inicial e final fixas, velocidade inicial nula, velocidade instantânea máxima e velocidade média mínima. Uma vez que essas restrições permitem inúmeras estratégias de pista tem-se a necessidade encontrar a estratégia que maximize a eficiência energética do veículo durante a avaliação de consumo.

1.2 Objetivos do Projeto

Tendo em vista o exposto acima, este projeto tem por objetivos direcionados ao protótipo DT1:

- (a) Definir o modelo matemático para a dinâmica do protótipo;
- (b) Formular o problema de controle ótimo (OCP) pra obter a estratégia ótima;
- (c) Implementar o algoritmo para solução desse OCP;
- (d) Definir a estratégia ótima para a pista da Shell EcoMarathon Américas de 2019.

1.3 Local de Realização

Esse projeto foi desenvolvido na equipe de competição Milhagem UFMG, na qual o autor foi integrante de 2013 à 2015 e em 2018. A equipe é composta por alunos de graduação em engenharia de diversos períodos e sua sede é no Departamento de Engenharia Mecânica da UFM. Foi fundada, sobre orientação do professor Paulo Iscold, em 2005 no Centro de Estudos Aeronáuticos (CEA) do qual fez parte até 2006. De 2006 a 2011 o projeto da equipe ficou suspenso retornando as atividades, sobre orientação do professor Fabrício Pujatti, no Centro de Tecnologia de Mobilidade (CTM). A equipe já desenvolveu 6 veículos, sendo DT1 o primeiro elétrico, e participou de 10 competições com os seguintes resultados:

- Maratona Universitária de Eficiência Energética
 - Categoria gasolina
 - * 2005: 2º Lugar, com a marca de 227,6 [km/L]
 - * 2006: 1º Lugar, com a marca de 598,9 [km/L]
 - * 2011: 5º Lugar, com a marca de 199,0 [km/L]
 - * 2013: 4º Lugar, com a marca de 234,9 [km/L]

- Shell Eco-marathon Brasil
 - Categoria gasolina
 - * 2016: 2º Lugar, com a marca de 196,0 [km/L]
 - Categoria elétrico
 - * 2017: 3º Lugar, com a marca de 315,6 [km/kWh]
 - * 2018: 1º Lugar, com a marca de 266,4 [km/kWh]
- Shell Eco-marathon Americas
 - Categoria elétrico
 - * 2018: 6º Lugar, com a marca de 266,5 [km/kWh]
 - * 2019: 2º Lugar, com a marca de 226,9 [km/kWh]

1.4 Estrutura da Monografia

O relatório está dividido em cinco capítulos. Este capítulo apresentou uma introdução ao projeto a ser descrito nos capítulos seguintes. O Capítulo 2 é uma revisão bibliográfica que dos princípios básicos de modelagem veicular e controle ótimo de forma que abrange todos os conceitos necessários para um melhor entendimento do projeto. O Capítulo 3 aborda a metodologia de desenvolvimento do modelo matemático do DT1 e de implementação implementação do software para otimização da estratégia de pista. Os resultados obtidos no projeto são apresentados no Capítulo 4 e no Capítulo 5 tem-se a conclusão da monografia com algumas sugestões para trabalhos futuros e dificuldades encontradas durante a realização do projeto.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Este capítulo é dividido em duas seções que visam apresentar os conceitos necessários para a compreensão deste PFC. Na primeira seção são apresentados conceitos para uma modelagem matemática da dinâmica de um veículo em baixas velocidades. São apresentados na segunda seção uma introdução à teoria de controle ótimo e a utilização de *software* na solução de problemas de controle ótimo.

2.1 Modelo do veículo

Um modelo matemático, ou apenas modelo, é um conjunto de equações que descreve de forma adequada o comportamento de um sistema que deseja-se estudar. Uma forma usual de classificação dos métodos de modelagem é separá-los nas categorias: modelagem caixa branca, modelagem caixa preta e modelagem caixa cinza. A modelagem caixa branca, também conhecida como modelagem conceitual, consiste na aplicação princípios fundamentais e por isso exige um conhecimento da natureza do sistema. A modelagem caixa preta, ou modelagem empírica, é baseada na aplicação de técnicas de identificação de sistemas que exigem pouco ou nenhum conhecimento do sistema. Já na modelagem caixa cinza são utilizadas técnicas que estão entre a modelagem caixa branca e a modelagem caixa preta^[1].

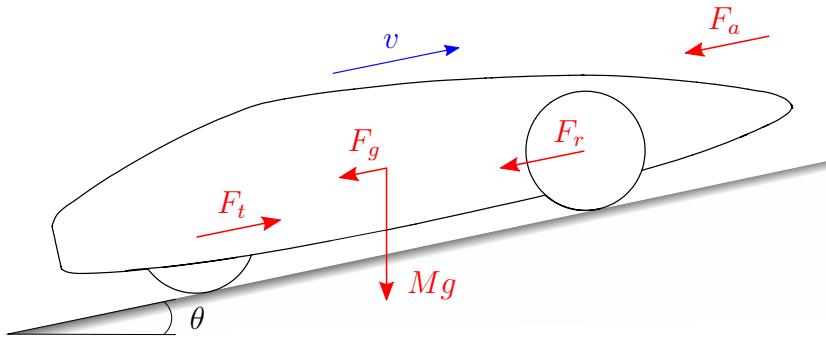
Nessa seção o método de modelagem aplicado é de modelagem caixa branca. A partir da aplicação da segunda lei de Newton no veículo representado no diagrama da Figura 2.1, obtém-se a equação que descreve a dinâmica longitudinal do mesmo

$$(m_v + m_p + m_r)\dot{v} = F_t - (F_a + F_g + F_r) , \quad (2.1)$$

em que m_v é a massa do veículo, m_p é a massa do piloto, m_r é massa equivalente ao momento de inércia das partes rotativas (rodas e eixo do motor), x é a posição, F_t é a propulsão feita pelo motor, F_a é o arrasto aerodinâmico, F_g é a componente do

peso que esta direção da velocidade e F_r é a resistência ao rolamentos dos pneus no pista. Os modelos que descrevem a massa equivalente m_r e forças F_a , F_g , F_r e F_t estão apresentados nas subseções a seguir.

Figura 2.1: Diagrama de forças de um veículo em movimento



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.1.1 Inércia rotacional

A inércia de todas as peças giratórias dentro do veículo causa forças fictícias. Esta inércia pode ser representada nos modelos dinâmicos do motor e da transmissão, ou ser representada com uma massa equivalente m_r . Para essa representação é considerado que não há deslizamento do pneu no asfalto e não a escorregamento na transmissão. O cálculo de m_r é

$$m_r = m_{r,r} + m_{r,m} , \quad (2.2a)$$

$$m_{r,r} = \sum_{n=1}^{Nr} J_r \cdot \frac{1}{r_r^2} , \quad (2.2b)$$

$$m_{r,m} = J_m \cdot \frac{\varphi^2}{r_r^2} , \quad (2.2c)$$

em que $m_{r,r}$ é a massa equivalente a inércia das rodas e $m_{r,m}$ é a massa equivalente a inércia do motor, Nr é a quantidade de rodas, J_r e r_r são o momento de inércia e o raio da roda, J_m é o momento de inércia do motor e φ é a relação de transmissão.^[2]

2.1.2 Arrasto aerodinâmico

O movimento de um objeto imerso em um fluido sofre uma resistência causada por esse fluido. No caso de veículos que se deslocando no ar, essa resistência é chamada de arrasto aerodinâmico. Pode-se aproximar o cálculo dessa força F_a com a equação

$$F_a(v) = \frac{\rho \cdot a_f \cdot c_d \cdot v^2}{2} , \quad (2.3)$$

em que v é a velocidade do veículo em relação ao vento, ρ a densidade do ar, a_f a área frontal do veículo e c_d o coeficiente de arrasto aerodinâmico. O coeficiente c_d é um número adimensional e depende da geometria veículo, é determinado por meio de simulações em *software* de fluido dinâmica computacional (CFD, do inglês *computational fluid dynamics*) e/ou experimentos em túnel de vento^[2]. Alguns valores típicos de C_d para diferentes tipos de veículos são apresentados na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Comparação do c_d de diferentes tipos veículos

Veículo	c_d
Carro	0,3 - 0,4
Ônibus	0,6 - 0,7
Caminhão	0,6 - 1,0
Moto	0,5 - 1,0

Fonte: Adaptado de Popp e Schiehlen^[3].

2.1.3 Relevo da pista

A componente do peso, F_g , afeta consideravelmente a dinâmica do veículo e atua sempre que a pista não é plana. Seu modelo é a equação

$$F_g(\theta) = (m_v + m_p) \cdot g \cdot \sin(\theta) , \quad (2.4)$$

que, pra pequenas inclinações, pode ser aproximado pela equação

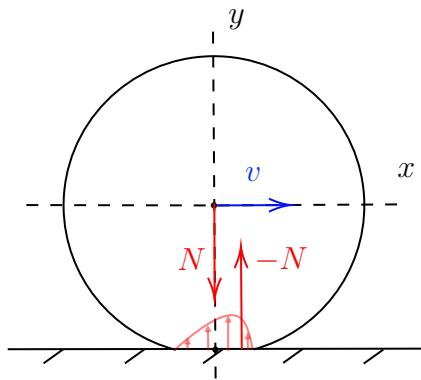
$$F_g(\theta) \approx (m_v + m_p) \cdot g \cdot \theta ,$$

em que m é a massa total do veículo, g é a aceleração da gravidade e θ é a inclinação da pista expressa em radianos^[2].

2.1.4 Resistência ao rolamento

A norma ISO 4223-1:2017 define a resistência ao rolamento de um pneu, como a energia consumida pelo pneu por unidade de distância percorrida. Esse consumo de energia se deve principalmente as propriedades viscoelásticas dos compostos de borracha presente no pneu. Durante a rolagem o pneu é deformado na zona de contato entre o pneu e o pavimento, nessa zona de contato a resultante da força de reação à força normal não está no mesmo eixo que a força normal, Figura 2.2, de forma a gerar um força, F_r , contraria a movimentação do pneu.

Figura 2.2: Legenda diagrama pneu



Fonte: Elaborado pelo autor.

A força de resistência ao rolamento, F_r , depende da construção do pneu e do tipo de pavimento. Essa força também depende da velocidade do veículo e da pressão do ar no pneu, embora nesse trabalho não considera-se essa dependência. Para calcula-la usa-se a relação:

$$F_r = c_r \cdot N , \quad (2.5)$$

em que c_r é o coeficiente de resistência ao rolamento, N é a força normal sobre o pneu e F_r é a força gerada pela resistência ao rolamento. Estão apresentados na Tabela 2.2 o valor do coeficiente c_r para pneus de uso típico em carros de passeio, bicicletas e de dois pneus específicos para a competição SEM, Michelin® 45-406 Prototype (Figura ??) e Michelin® Radial 45-75 R16.

Tabela 2.2: Comparação do coeficiente c_r de diferentes pneus

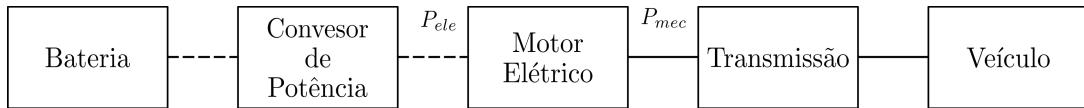
Pneu	c_r
Usado em carro	0,013
Usado em bicicleta	0,006
Michelin® 45-406 Prototype	0,0024
Michelin® Radial 45-75 R16	0,00081

Fonte: Adaptado de Santin et al.^[4].

2.1.5 Sistema de propulsão

De forma genérica, o sistema de propulsão de um veículo elétrico, representado no diagrama da Figura 2.3, é composto por bateria, conversor de potencia, motor elétrico e transmissão.

Figura 2.3: Diagrama de blocos do sistema de propulsão de um veículo elétrico



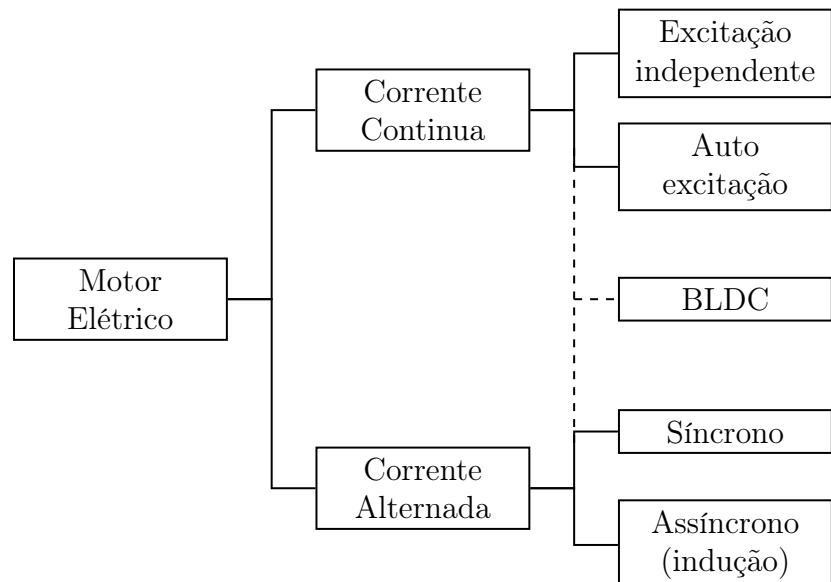
Fonte: Elaborado pelo autor.

Bateria eletroquímica, ou apenas bateria, é um dispositivo em que durante a descarga ocorre a conversão de energia potencial química em energia elétrica e na carga ocorre a conversão inversa. Ou seja, uma bateria armazena energia elétrica na forma de energia potencial química. Uma bateria é composta por vários células ligadas entre se. Uma célula de bateria é basicamente composta por dois eletrodos – positivo e negativo – imersos em um eletrólito^[5].

Conversor eletrônico de potência, ou conversor de potência, é o circuito cujo a finalidade é extrair energia elétrica de um sistema de energia e transformá-la em uma forma adequada e necessária para um motor^[6].

O motor elétrico converte a potencia elétrica – tensão e corrente – em potencia mecânica rotativa – torque e rotação – para impulsionar o veículo.^[5] Podem ser classificados em relação a sua alimentação: corrente continua (CA) ou corrente alternada (CC), conforme apresentado na Figura 2.4. No entanto o motor de corrente continua sem escovas, ou BLDC do inglês *brushless direct current*, é difícil de ser classificado desse forma pois sua configuração é semelhante à de um motor CA, enquanto suas características elétricas são semelhantes às de um motor CC.^[6] Nesse trabalho estudara-se o modelo dos motores BLDC pois é o tipo de motor utilizado no protótipo DT1.

Figura 2.4: Classificação de motores elétricos

Fonte: Adaptado de Kim^[6]

O motor BLDC foi desenvolvido em 1962 e possui um sistema de comutação eletrônica ao invés de comutação mecânica como os motores CC. Para não utilizar as escovas da comutação mecânica, os enrolamentos da armadura são colocados no estator (parte estacionária) e os ímãs são colocados no rotor (parte rotativa). A comutação eletrônica baseia-se em sensores para identificar a posição do rotor e acionar o enrolamento necessário para manter o movimento de rotação.^[6] O conjunto de equações que descreve a corrente de armadura i_a e o torque gerado T para um motor BLDC de enrolamentos ligados em Y com neutro acessível e operando em meia onda (a tensão é aplicada entre o terminal de um enrolamento e o neutro) é

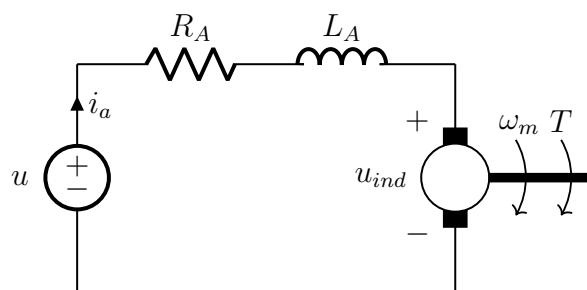
$$u - u_{ind} = L_a \cdot \dot{i}_a + R_a \cdot i_a , \quad (2.6a)$$

$$u_{ind} = K_v \cdot \omega_m , \quad (2.6b)$$

$$T_m = K_t \cdot i_a , \quad (2.6c)$$

em que u é a tensão aplicada, u_{ind} é a tensão induzida, L_a e R_a são, respectivamente a indutância e a resistência da armadura, K_v é a constante de tensão induzida, ω_m é a rotação do motor e K_t é a constante de torque. A Figura 2.5 apresenta o modelo o circuito de um enrolamento do motor BLDC.^[7]

Figura 2.5: Circuito equivalente de um motor BLDC



Fonte: Elaborado pelo autor.

O protótipo DT1 é equipado com um motor Dunkermotoren BG75x75 40V (Figura 2.6). O motor que possui 3 enrolamentos, ímã de neodímio com 8 polos e sensor hall integrado para medir a posição do rotor (24 pulsos por volta), suas características elétricas e mecânicas estão apresentadas na Tabela 2.3.

Figura 2.6: Motor Dunkermotoren BG75x75 40V



Fonte: Adaptado de

Tabela 2.3: Dados do motor BG75x75 40V

Tensão nominal	[V]	40
Corrente nominal	[A]	15,6
Torque nominal	[N.m]	1,50
Velocidade nominal	[rpm]	3370
Torque de atrito	[N.m]	0,13
Torque de parada	[N.m]	12
Velocidade sem carga	[rpm]	4100
Potencia de saída nominal	[W]	530
Potencia de saída máxima	[W]	1150
Constante de torque	[N.m/A]	0,119
Resistência	[Ω]	0,07
Indutância	[mH]	0,45
Corrente de pico	[A]	63
Inercia do rotor	[g.m²]	0,0625
Massa	[kg]	2,8

Fonte: Adaptado de

A transmissão do veículo regula a transferência de potência do motor para as rodas. É basicamente composta por mecanismo de redução – ex. caixa de câmbio – e por um mecanismo de interrupção – ex. embreagem^[5]. No DT1, o mecanismo de redução utilizado é do tipo roda de atrito e o mecanismo de interrupção é o pivotamento entre os componentes da roda de atrito, apresentado na Figura 2.7.

Rodas de atrito são uma das maneiras mais simples para se transmitir potência mecânica entre eixos e sua eficiência é tipicamente de 95 a 98 %. São composta por dois ou mais cilindros em contato direto. Para não ocorrer deslizamento em uma roda de atrito o torque transmitido não deve exceder a força de atrito entre os cilindros. Os torque e rotações são descritos pelas equações

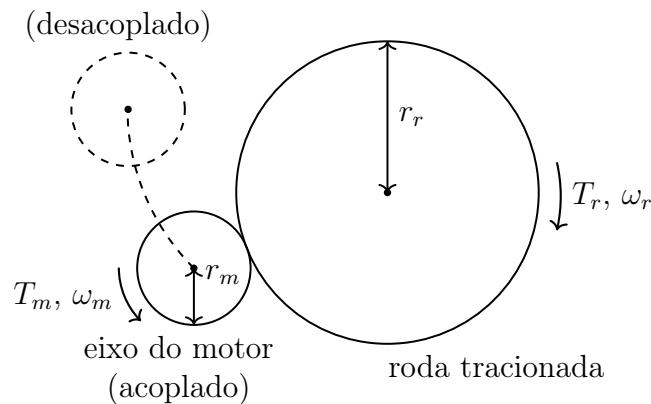
$$\varphi = \frac{r_r}{r_m} , \quad (2.7a)$$

$$\omega_r = -\frac{\omega_m}{\varphi} , \quad (2.7b)$$

$$T_r = \varphi \cdot T_m \cdot \eta , \quad (2.7c)$$

onde φ é a relação de transmissão, R_r e ω_r são o diâmetro e a velocidade angular da roda, R_m e ω_m são o diâmetro e a velocidade angular do cilindro motor e η é a eficiência da roda de atrito.^[8, 9]

Figura 2.7: Representação da transmissão do DT1



Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir das Equações (2.6) e (2.7), desconsiderando as perdas por atrito visco nos rolamentos, as perdas causadas pela resistência interna na bateria e a perda no conversor de potência, o conjunto que descreve a força de propulsão F_t de um veículo elétrico é

$$\dot{i}_a = \frac{u - K_v \cdot \omega_m - R_a \cdot i_a}{L_a} , \quad (2.8a)$$

$$F_t = \frac{K_t \cdot i_a \cdot \eta}{r_m} . \quad (2.8b)$$

2.2 Controle Ótimo

"O objetivo da teoria de controle ótimo é determinar os sinais de controle que farão com que um processo satisfaça as restrições físicas e ao mesmo tempo minimize (ou maximize) alguns critérios de desempenho."^[10]

2.2.1 Introdução teórica

O conjunto de Equações (3.3) é uma formulação genérica e comum para um problema de controle ótimo (OCP)

$$\min_{x(\cdot), u(\cdot), p, T} \int_0^T L(x(t), u(t), p) dt + E(x(T), p) \quad (2.9a)$$

$$\text{s.t.} \quad x(0) - x_0 = 0, \quad (2.9b)$$

$$\dot{x}(t) - f(x(t), u(t)) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (2.9c)$$

$$h(x(t), u(t)) \leq 0, \quad t \in [0, T], \quad (2.9d)$$

$$r(x(T)) \leq 0, \quad (2.9e)$$

$$T \leq T_{max}, \quad (2.9f)$$

$$p_{min} \leq p \leq p_{max} \quad (2.9g)$$

em que a Equação (3.3a) é o função objetivo, Equação (3.3c) é uma restrição de estados inciais fixos, Equação (3.3e) é a restrição que representa a dinâmica do sistema, Equação (3.3f) são restrições de caminho sobre os estados do sistema e sobre as variáveis de controle, Equação (3.3i) é uma restrição de espaço para os estados finais, Equação (3.3j) é a restrição para o tempo final e Equação (3.3k) são restrições de intervalo para parâmetros otimizáveis. O função objetivo, também conhecido como objetivo de Bolza, é composto por uma integral de $L(x, u)$ conhecida como termo de Lagrange e uma função $E(x)$ conhecida como termo de Meyer^[11].

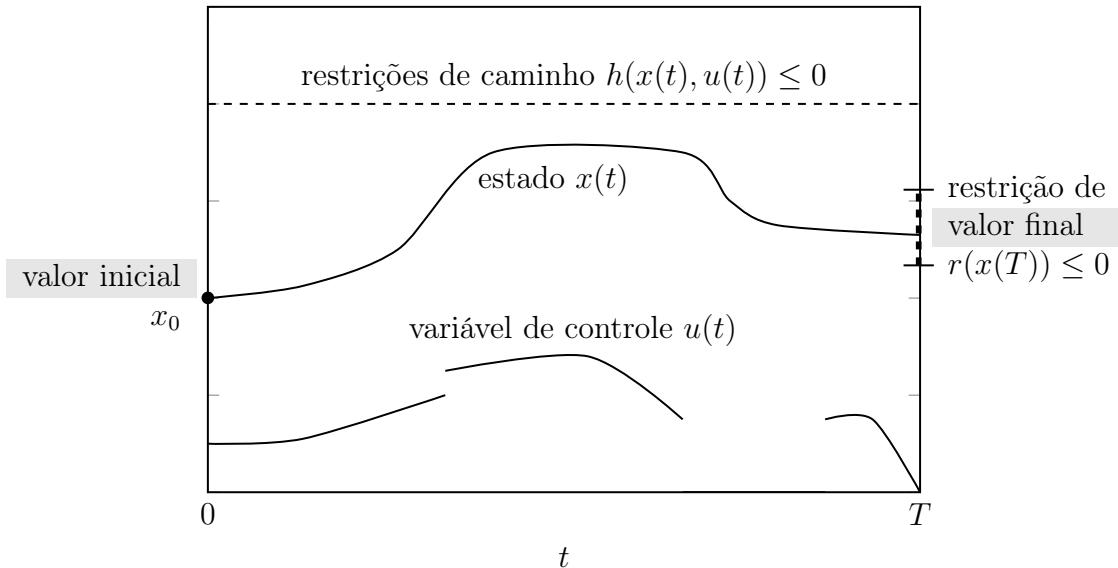
A solução de um problema de controle ótimo é uma sequencia de sinais de controle em malha aberta e um conjunto de parametros, o comportamento esperado é exemplificado na Figura 2.8.

De forma geral, há três abordagens básicas para solução computacional de um OPC, (a) programação dinâmica, (b) métodos indiretos e (c) métodos diretos, conforme apresentado na Figura 2.9.

- (a) Programação dinâmica: utiliza o princípio de otimalidade de Bellman (em um caminho ótimo A-B-C os caminhos A-B e B-C também são ótimos) para calcular recursivamente a sequencia de controle ótimo.
- (b) Métodos indiretos: utiliza a filosofia "primeiro otimizar e então discretizar", que é escrever as condições de otimalidade contínuas primeiro, resultando em um problemas de valor de contorno (sistema de equações diferenciais acrecido de um conjunto adicional de restrições chamadas condições de contorno) e depois discretizá-lo para resolver numericamente.
- (c) Métodos diretos: utiliza a filosofia "primeiro discretizar e então otimizar", isto é primeiro discretize as equações do OPC e, em seguida, aplique um algoritmo de

otimização para resolver o problema de programação não linear resultante (NPL do inglês *Nonlinear Programming Problem*) resultante.

Figura 2.8: Exemplo do comportamento desejado das variáveis em um OPC



Fonte: Adaptado de

Para a solução de OPC em aplicações no mundo real, os métodos diretos são atualmente as técnicas mais difundidas e usadas com sucesso. [12, 13]

Métodos diretos reformulam o OPC da Equação (3.3) em um problema de programação não linear de dimensão finita (NLP) da forma:

$$\min_w \quad a(w) \tag{2.10a}$$

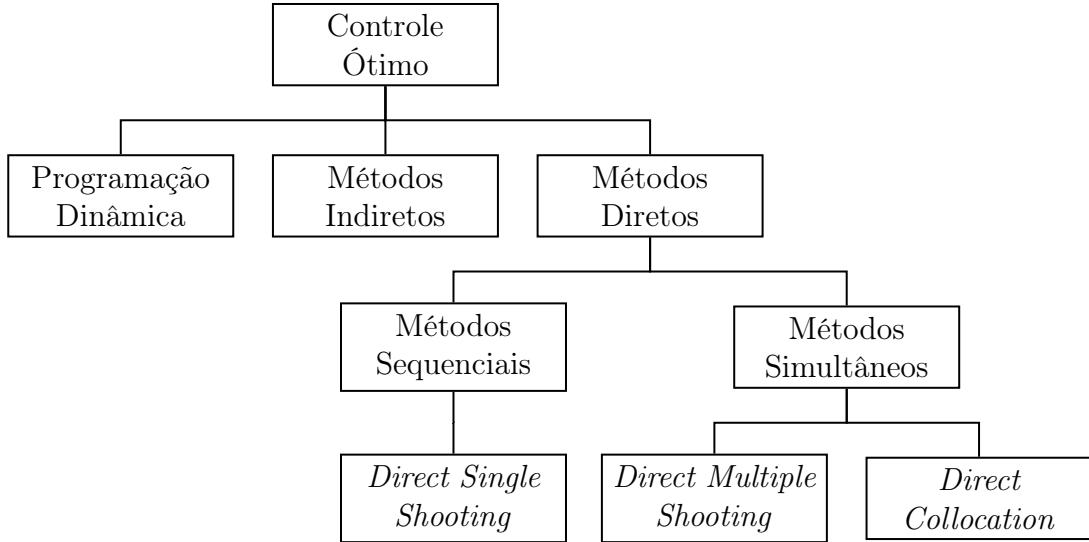
$$\text{s.t.} \quad b(w) = 0, \tag{2.10b}$$

$$c(w) \geq 0, \tag{2.10c}$$

com um vetor de dimensão finita w representando os graus de liberdade de otimização e com funções diferenciáveis a (escalar), b e c (vetores). Todos os métodos diretos começam por uma parametrização da variável de controle, mas diferem na forma como os estados são tratados. Podem ser classificados em duas abordagens, seqüenciais e simultâneos.

Nas abordagens seqüenciais, os estados $x(t)$ são uma função implícita dos controles $u(t)$ e do valor inicial x_0 . Dessa forma, a simulação e as iterações de otimização procedem seqüencialmente e o NLP possui apenas o controle discretizado como graus de liberdade de otimização. O método mais usado de abordagem seqüencial é o *Direct Single Shooting*.

Figura 2.9: Visão geral dos métodos numéricos para controle ótimo

Fonte: Adaptado de Diehl et al.^[12]

As abordagens simultâneas fazem uma parametrização dos estados como variáveis de otimização dentro do NLP e adicionam restrições de igualdade que representam a dinâmica do sistema. Com isso, a simulação e a otimização ocorrem simultaneamente, e somente na solução do NLP os estados representam uma solução da equação da dinâmica do sistema válida e correspondente à variável de controle. As duas variações mais comuns da abordagem simultânea são *Direct Multiple Shooting* e *Direct Collocation*.

2.2.2 O software FALCON.m

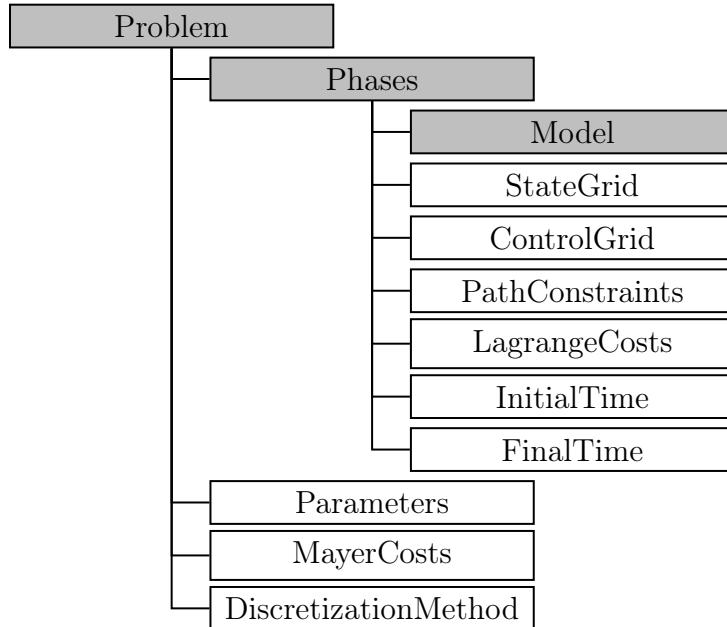
FALCON.m é um é uma biblioteca de *software*, proprietária de uso gratuito, para MATLAB®, desenvolvida no *Institute of Flight System Dynamics* da *Technische Universität München* para resolução e análise de problemas de controle ótimo e estimativa de parâmetros utilizando o método *Direct Collocation*. Capaz de resolver grandes problemas de controle ótimo com de até 600 mil variáveis de otimização.^[14, 15]

Ela segue o paradigma de programação orientada a objetos, um resumo de suas principais classes de objetos é apresentado na Figura 2.10. A classe **Problem** é a principal, nela são configurados as fases (**Phases**) do OPC, os parâmetros otimizáveis, o custo de Mayer e o método de discretização a ser utilizado. Os métodos de discretização disponíveis na biblioteca são: trapezoidal (padrão) ou *backward Euler*. Na classe **Phases**, são adicionados o modelo da dinâmica do sistema, os estados, as variáveis de controle, as restrições de caminho, o custo de Lagrange e os instantes de tempos inicial e final.^[16]

A biblioteca utiliza otimizadores para NLP externos, Como cada otimizador tem uma interface única, no momento, é possível utilizar interfaces para três otimizadores: IPOPT, SNOPT e WORHP. O otimizador utilizado neste trabalho é o IPOPT, configuração

pré-definida da biblioteca FALCON.m. Mais informações sobre a utilização do FALCON.m pode ser constuldas em seu manual Rieck et al.^[14].

Figura 2.10: Resumo com principais objetos da biblioteca FALCON.m



Fonte: Adaptado de Bittner^[16]

IPOPT

O projeto COIN-OR, do inglês *COmputational INfrastructure for Operations Research*, é uma iniciativa que visa promover *software* de código aberto para a comunidade de pesquisa operacional^[17]. Dentre as bibliotecas disponibilizadas no projeto COIN-OR está a IPOPT, do inglês *Interior Point OPTimizer*. Escrita em C++ e Fortran para solução de problemas de otimização não linear (NLP) utilizando o método de pontos interiores com filtro apresentado por Wächter e Biegler^[18]. Sua licença é a EPL que permite uso gratuito e acesso ao código. Mais detalhes sobre esta biblioteca podem ser obtidos na pagina do seu repositório no GitHub® <<https://github.com/coin-or/Ipopt>>.

Capítulo 3

Metodologia

É apresentado neste capítulo o desenvolvimento realizado neste projeto, os problemas encontrados e as soluções propostas. Na primeira seção tem-se a definição do modelo matemático do veículo protótipo DT1. A segunda seção traz a formulação proposta para o problema de controle ótimo que encontrar a estratégia de pista ótima. Por fim, na última seção é apresentado os passos realizados no desenvolvimento do código que soluciona o OPC proposto.

3.1 Modelo do veículo DT1

O modelo da dinâmica do veículo protótipo DT1 foi definido com base na revisão bibliográfica apresentada na Seção 2.1. Para isto as seguintes simplificações e considerações foram feita:

- **Dinâmica lateral:** não foi levando em conta a dinâmica lateral do veículo considerando que ele se move apenas em linha reta;
- **Vento:** a velocidade do vento foi desconsiderada na Equação (2.3);
- **Pneus:** a variação do coeficiente de rolamento em função da temperatura, da pressão e a velocidade não foi considerada na Equação (2.5);
- **Rolamentos:** o atrito viscos dos rolamentos foi considerado nulo;
- **Perdas elétricas:** a bateria e o conversor eletrônico de potência foram tratados como componentes ideias não apresentando perdas de energia ou modificações na dinâmica das grandezas elétricas;
- **Indutância do motor:** como o dinâmica da velocidade é pelo menos dez vez mais lenta que a dinâmica da corrente elétrica no motor a contribuição do indutor foi removida da Equação (2.8a).

A partir das Equações (2.1) à (2.5) e (2.8) e destas simplificações e considerações foi definido a seguinte equação para descrever o comportamento do veículo

$$(m_v + m_p + m_r)\dot{v} = F_t - (F_a + F_g + F_r) , \quad (3.1a)$$

$$m_r = N_r \cdot \frac{J_r}{r_r^2} + \frac{J_m}{r_m^2} , \quad (3.1b)$$

$$F_t = \frac{K_t \cdot i_a \cdot \eta}{r_m} , \quad (3.1c)$$

$$R_a \cdot i_a = u - \frac{K_v \cdot v}{r_m} , \quad (3.1d)$$

$$F_a = \frac{\rho \cdot a_f \cdot c_d \cdot v^2}{2} , \quad (3.1e)$$

$$F_g = (m_v + m_p) \cdot g \cdot \sin(\theta(x)) , \quad (3.1f)$$

$$F_r = c_r \cdot (m_v + m_p) \cdot g \cdot \cos(\theta(x)) , \quad (3.1g)$$

em que as constantes estão apresentadas na Tabela 3.1 e as variáveis são \dot{v} a aceleração do carro em $[m/s^2]$, v a velocidade do carro em $[m/s^2]$, x a distância percorrida pelo carro na pista em $[m]$, u a tensão aplicada no motor em $[V]$, r_m o raio do cilindro de transmissão no eixo do motor elétrico em $[m]$ e θ é a inclinação da pista em $[rad]$.

Tabela 3.1: Constantes utilizadas no modelo do veículo

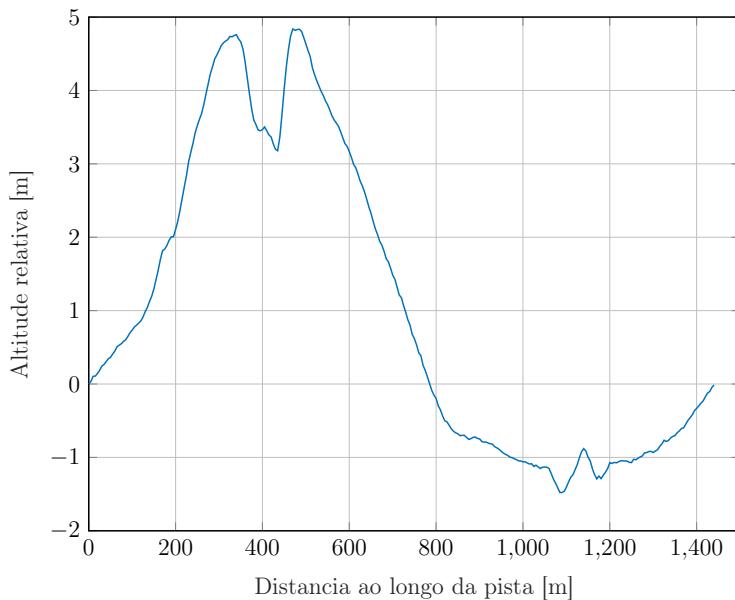
Constante	Símbolo	Unidade	Valor
Massa veículo	m_v	[kg]	36
Massa do piloto	m_p	[kg]	50
Resistência de armadura	R_a	[Ω]	0,07
Const. de tensão induzida	K_v	[$V/(rad/s)$]	0,119
Quantidade de rodas	N_r	[]	3
Momento de inércia da roda	J_r	[$kg.m^2$]	0,015
Momento de inércia do motor	J_m	[$kg.m^2$]	$0,0625 \times 10^{-3}$
Raio da roda	r_r	[m]	0,254
Const. de torque	K_t	[Nm/A]	0,119
Eficiência da roda de atrito	η	[]	0,95
Densidade do ar	ρ	[kg/m^3]	1,22
Área frontal do veículo	a_f	[m^2]	0,26
Coeficiente de arrasto aerodinâmico	c_d	[]	0,164
Aceleração da gravidade	g	[m/s^2]	9,81
Coeficiente de resistência ao rolamento	c_r	[]	0,0024

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2 Modelo da pista

Para obter os dados de altitude da pista da Shell Eco-marathon Americas de 2019 no Kartódromo de Sonoma foi feito uma requisição a equipe *Duke Electric Vehicles* da *Duke University* que disponibilizou os dados coletados e tratados por ela. A Figura apresentada 3.1 o perfil de altitude da pista com estes dados.

Figura 3.1: Perfil de altitude da pista da Shell Eco-marathon Americas de 2019



Fonte: Dados da equipe de competição *Duke Electric Vehicles*.

Uma forma de representar esses dados no código para solução o OPC é por meio de uma *lookup table* porém ao implementar os dados dessa forma a solução não convergiu. Uma possível explicação para essa não convergência é que os dados eram derivados duas vezes, uma para determinar a inclinação e outra pelo realizado algorítimo de otimização e ao analisar esses dados derivados usando o comando `diff` do MATLAB® foram observadas curvas com grande variação de inclinação e ruido. Além disso seria preciso repetir sete vezes os dois vetores de dados para emular as repetidas voltas realizadas pelo carro durante a tentativa. A solução para esses problemas foi aproximar a curva de altitude da pista por uma soma de senos com o comando comando `fit(x, h, 'sin8')` do MATLAB® e então realizar a derivada para obter a seguinte equação inclinação:

$$\begin{aligned} \theta(x) = & \arctg(0.012293\cos(0.004363x - 0.228758) + 0.003041\cos(0.000236x + 0.399758) \\ & + 0.005818\cos(0.008726x - 2.193381) + 0.002926\cos(0.000246x + 3.490690) \\ & + 0.003958\cos(0.017449x - 3.058604) + 0.005365\cos(0.026184x + 0.579933) \\ & + 0.004361\cos(0.021814x + 1.627015) + 0.005539\cos(0.030552x - 1.400496)). \quad (3.2) \end{aligned}$$

3.3 Problema de controle ótimo (OPC)

$$\min_{i(t), r_m, T} \int_0^T i(t) \cdot [i(t) \cdot Ra + Kv \cdot (v(t)/r_m)] dt \quad (3.3a)$$

$$\text{s.t.} \quad x(0) = 0, \quad (3.3b)$$

$$v(0) = 0, \quad (3.3c)$$

$$\dot{x}(t) - v(t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (3.3d)$$

$$\dot{v}(t) - \frac{F_t - (F_a + F_g + F_r)}{M} = 0, \quad t \in [0, T], \quad (3.3e)$$

$$i(t) - \frac{42 - Kv \cdot (v/r_m)}{R_a} \leq 0, \quad t \in [0, T], \quad (3.3f)$$

$$i(t) \leq 30, \quad t \in [0, T], \quad (3.3g)$$

$$v(t) \leq 12.5, \quad t \in [0, T], \quad (3.3h)$$

$$x(T) = 10080, \quad (3.3i)$$

$$T \leq 1400, \quad (3.3j)$$

$$0.020 \leq r_m \leq 0.050 \quad (3.3k)$$

3.4 Código para solução do OPC

Nesta etapa do trabalho a versão do MATLAB® utilizada foi a R2019b Update 7 e a versão do FALCON.m utilizada foi a v1.26. O compilador MinGW-w64 C/C++, pré-requisito da biblioteca FALCON, foi instalado gratuitamente na versão 19.2.0 pela loja de aplicativos do MATLAB®. A licença do MATLAB® utilizada foi a licença acadêmica fornecida pela UFMG à seus alunos. Já a licença do FALCON.m, de uso individual e intransferível, foi obtida por meio de solicitação feita ao *Institute of Flight System Dynamics* da *Technische Universität München* pelo site <<https://www.fsd.lrg.tum.de/software/falcon-m/license-and-download/>>.

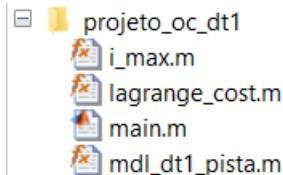
A implementação do código para solução do problema de controle ótimo proposto segui os seguintes passos:

1. **Definir as variáveis de estado e de controle e os parâmetros:** no arquivo principal, do tipo *script*, instanciar as variáveis de estado e de controle e os parâmetros otimizáveis;
2. **Implementar os modelos dinâmicos:** em arquivos do tipo *function*, implementar o modelo dinâmico do sistema;
3. **Definir os modelos dinâmicos dos subsistemas:** no arquivo principal, utilizar o *Model Builder* da *FALCON.m* para vincular os arquivos do passo 2 no programa principal;

4. **Derivar as funções necessária:** o *Model Builder* irá criar, a partir da chamado do método `.Build()`, as derivadas analíticas de todos os subsistemas e combiná-los ao gradiente geral dos modelos usando a regra da cadeia;
5. **Implementar funções de custo e de restrição de caminho:** repetir os passos de 1 à 4 para todas as restrições de caminho e funções de custo;
6. **Definir o problema de controle ótimo:** no arquivo principal, gerados no passo 4 com o problema e definir as condições finais e iniciais para os estados do sistema;
7. **Resolver o problema:** chamar o método `.Solve()`, no arquivo, principal para a resolução do problema.

O código de solução desenvolvido a partir destes passos é composto por quatro arquivos, apresentados na Figura 3.2, três *functions* e um *script*. Os arquivos *function*, `i_max.m`, `lagrange_cost.m` e `mdl_dt1_pista.m` são, respectivamente, a restrição de corrente máxima da Equação(??), o custo de Lagrange da Equação (??) e o modelo da dinâmica do veículo da Equação (??) acrescido do modelo de inclinação da pista.

Figura 3.2: Arquivos MATLAB® do projeto



Fonte: Elaborada pelo autor.

Durante a escrita do arquivo `main.m` uma dificuldade encontrada foi a determinação da variável `scale`, ultima variável nos construtores `falcon.State()`, `falcon.Control()` e `falcon.Parameter()`. Inicialmente os valores definidos foram a ordem de grandeza da cada variáveis o que gerou matrizes mau condicionadas no NLP e consequente um alto tempo de solução o problema. Os valores corretos, conforme sugerido no manual do FALCON.m^[14], dever ser definidos de tal forma que a ordem de grandeza da variável seja um. Por exemplo: uma varivel que representa a correte elétrica de um circuito em [mA] deve ter o parâmetro `scale` igual a 10^{-3} . A definição dos estados, variável de controle e parâmetros com o parâmetro `scale` adequado é apresentado no Código 3.1.

Além disso, verificou-se que, apesar do indicado no manual da biblioteca FALCON.m^[14], ela, na versão utilizada com IPOPT não executa em um MATLAB com a versão recente que a utilizada pois a MathWorks não garante su

Código 3.1: Trecho do arquivo `main.m` com definição dos estados, variável de controle e parâmetros do OPC proposto

```
4 % vetor de estados
5 x_vec = [ falcon.State('x', 0, 11000, 1e-4);...
6         falcon.State('v', 0, 12.5, 1e-1) ];
7 % variavel de controle
8 u_vec = falcon.Control('i', 0, 63, 1);
9 % tempo final
10 tf = falcon.Parameter('FinalTime', 1400, 0, 1400, 1e-3);
11 % raio do cilindro no motor
12 rm = falcon.Parameter('raioM', 0.026, 0.020, 0.050, 1e2);
```

Fonte: Elaborado pelo autor.

Capítulo 4

Resultados

Para a execução do projeto, algumas etapas de desenvolvimento tiveram de ser seguidas: familiarização com o sistema, estudo dos módulos envolvidos, leitura dos requisitos, elaboração de documento descrevendo todo o processo de implementação e relacionamento com os diversos módulos, implementação e testes.

Capítulo 5

Conclusões

Novamente, este será um dos trechos que o leitor experiente lerá antes de decidir se vale a pena ler o texto integral. Seja convincente.

5.1 Considerações Finais

Reitere o que de mais importante foi feito, qual era o objetivo inicial e qual o resultado obtido. Se houve requisitos ou especificações de projeto, discuta se foram atingidos. Se os resultados não foram conclusivos ou contrariam o que se esperava, seja honesto e diga-o explicitamente. Busque explicar os insucessos com argumentos sólidos e plausíveis.

5.2 Propostas de Continuidade

Se houve questões ainda não respondidas ou resultados insatisfatórios, aponte direções de continuação.

Referências Bibliográficas

- 1 AGUIRRE, L. A. **Introdução à Identificação de Sistemas:** Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais. 3. ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2007.
- 2 GUZZELLA, L.; SCIARRETTA, A. **Vehicle Propulsion Systems:** Introduction to modeling and optimization. Heidelberg: Springer, 2013.
- 3 POPP, K.; SCHIEHLEN, W. **Ground Vehicle Dynamics.** Heidelberg: Springer, 2010.
- 4 SANTIN, J. J. et al. **The World's Most Fuel Efficient Vehicle:** Design and development of Pac Car II. Zürich: vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich, 2007.
- 5 EHSANI, M. et al. **Modern Electric, Hybrid Electric, and Fuel Cell Vehicles.** 3. ed. Boca Raton: CRC Press, 2018.
- 6 KIM, S. H. **Electric Motor Control:** DC, AC, and BLDC motors. 1. ed. [S.l.]: Elsevier Science, 2017.
- 7 GIERAS, J. F. **Permanent Magnet Motor Technology: Design and Applications.** 3. ed. Boca Raton: CRC Press, 2009.
- 8 NIEMANN, G. **Elementos de máquinas.** 1. ed. [S.l.]: BLUCHER, 1971. v. 3. ISBN 9788521214274.
- 9 NORTON, R. **Cinemática e dinâmica dos mecanismos.** [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2010.
- 10 KIRK, D. E. **Optimal Control Theory:** An introduction. [S.l.]: Dover Publications, 2004.
- 11 GROS, S.; DIEHL, M. **Numerical Optimal Control.** [s.n.], 2020. Em fase de elaboração. Disponível em: <<https://www.syscop.de/files/2020ss/NOC/book-NOCSE.pdf>>.
- 12 DIEHL, M. et al. Fast direct multiple shooting algorithms for optimal robot control. In: **Lecture Notes in Control and Information Sciences.** Heidelberg: Springer, 2006. p. 65–93.
- 13 BETTS, J. **Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming.** 2. ed. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010. (Advances in Design and Control).
- 14 RIECK, M. et al. **FALCON.m User Guide.** München, 2020. Disponível em: <<https://www.fsd.lrg.tum.de/software/wp-content/uploads/UserGuideMain.pdf>>.

- 15 RIECK, R. M. **Discrete Controls and Constraints in Optimal Control Problems.** Tese (Doutorado) — Technische Universität München, München, 2017. Disponível em: <<https://mediatum.ub.tum.de/doc/1316413/1316413.pdf>>.
- 16 BITTNER, M. **Utilization of Problem and Dynamic Characteristics for Solving Large Scale Optimal Control Problems.** Tese (Doutorado) — Technische Universität München, München, 2017. Disponível em: <<https://mediatum.ub.tum.de/doc/1343164/1343164.pdf>>.
- 17 SALTZMAN, M. J. Coin-or: An open-source library for optimization. In: **Advances in Computational Economics.** [S.l.]: Springer, 2002. p. 3–32.
- 18 WÄCHTER, A.; BIEGLER, L. T. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. **Mathematical Programming**, Springer, v. 106, 03 2006.

Apêndice A

Códigos implementados

Este apêndice contem os códigos implementados pelo autor apresentados na Seção 3.4.

Código A.1: Arquivo i_max.m

```
1 function [Iup] = i_max(v, i, rm)
2 Kv = 0.119;      % Constante de tensão induzida no motor [V/(rad/s)]
3 Ra = 0.07;       % Resistência elétrica do motor [V/A]
4 Vbat = 42;       % Tensão da bateria [V]
5
6 I_MAX = (Vbat-Kv*(v/rm))/Ra;
7
8 Iup = i - I_MAX;
9 end
```

Código A.2: Arquivo lagrange_cost.m

```
1 function [Cost] = lagrange_cost(v, i, rm)
2 Kv = 0.119;      % Constante de tensão induzida no motor [V/(rad/s)]
3 Ra = 0.07;       % Resistência elétrica do motor [V/A]
4
5 u = i*Ra + Kv*(v/rm);
6
7 Cost = u*i;
8 end
```

Código A.3: Arquivo mdl_dt1_pista.m

```
1 function [mdl_out] = mdl_dt1_pista(x, v, i, rm)
2 % constantes
3 Kt = 0.119;      % Constante de torque do motor [N/A]
4 rr = 0.254;       % Raio da roda [m]
```

```

5 ro = 1.22;           % Densidade do ar [kg/m³]
6 Af = 0.26;           % Área frontal [m²]
7 Cd = 0.164;          % Coef. de arrasto aerodinâmico []
8 G = 9.81;             % Aceleração da gravidade [m/s²]
9 mi = 0.0024;          % Coef. de resistência ao rolamento dos pneus []
10 Jr = 0.015;           % Momento de inercia da roda[kg.m²]
11 Jm = 0.0625e-3;       % Momento do inercia do motor [kg.m²]
12 mv = 18;              % Massa do veiculo [kg]
13 mp = 50;              % Massa do piloto [kg]
14 ef = 0.95;            % Eficiênciam da roda de atrito (transmissão) []
15
16 % aproximação com 8 cos da inclinação da pista
17 theta = atan(0.012293*cos(0.004363*x-0.228758)+...
18     0.003041*cos(0.000236*x+0.399758)+...
19     0.005818*cos(0.008726*x-2.193381)+...
20     0.002926*cos(0.000246*x+3.490690)+...
21     0.003958*cos(0.017449*x-3.058604)+...
22     0.005365*cos(0.026184*x+0.579933)+...
23     0.004361*cos(0.021814*x+1.627015)+...
24     0.005539*cos(0.030552*x-1.400496));
25
26 eta = rr/rm;           % relação de transmissão
27 mr = 3*(Jr/rr^2) + Jm*(eta^2/rr^2); % massa eq. rotacional
28 M = mv + mp + mr;
29
30 Ft = ((Kt*i)*ef)/rm;      % força de tração
31 Fa = (ro*Af*Cd*v^2)/2;    % arrasto aerodinâmico
32 Fr = (mv + mp)*G*mi*cos(theta); % resistência ao rolamento
33 Fg = (mv + mp)*G*sin(theta); % componente do peso
34
35 % derivada dos estados
36 x_dot = v;
37 v_dot = (Ft - Fa - Fr - Fg)/M;
38
39 mdl_out = [x_dot; v_dot; Ft; Fa; Fr; Fg; theta];
40 end

```

Código A.4: Arquivo main.m

```

1 clc; clearvars; close all;
2
3 %% Definição do estados, variáveis de controle e de saída
4 % vetor de estados

```

```

5 x_vec = [ falcon.State('x', 0, 11000, 1e-4); ...
6         falcon.State('v', 0, 12.5, 1e-1) ];
7 % variavel de controle
8 u_vec = falcon.Control('i', 0, 63, 1);
9 % tempo final
10 tf = falcon.Parameter('FinalTime', 1400, 0, 1400, 1e-3);
11 % raio do cilindro no motor
12 rm = falcon.Parameter('raioM', 0.026, 0.020, 0.050, 1e2);
13 % variaveis de saida
14 modeloutput = [...
15     falcon.Output('Ft');...
16     falcon.Output('Fa');...
17     falcon.Output('Fr');...
18     falcon.Output('Fg');...
19     falcon.Output('theta')];
20
21 %% Construção do modelo, da restrição de caminho e o custo de Lagrange
22 % modelo do veiculo e pista
23 mdl = falcon.SimulationModelBuilder('DT1', x_vec, u_vec, rm);
24 mdl.addSubsystem(@mdl_dt1_pista, {'x', 'v', 'i', 'raioM'}, {'mdl_out'});
25 mdl.SplitVariable('mdl_out', {'x_dot','v_dot', 'Ft', 'Fa', 'Fr', 'Fg', ...
    'theta'});
26 mdl.setStateDerivativeNames('x_dot','v_dot');
27 mdl.setOutputs(modeloutput);
28 mdl.Build;
29 % restricao de caminho
30 lgc = falcon.PathConstraintBuilder('LCost', [], x_vec(2), u_vec(1), rm,
    @lagrange_cost);
31 lgc.Build;
32 % custo de lagrange
33 pti = falcon.PathConstraintBuilder('LimCor', [], x_vec(2), u_vec(1), rm,
    @i_max);
34 pti.Build;
35
36 %% Definição do problema de controle ótimo
37 % instancia do problema
38 problem = falcon.Problem('DT1_B1');
39 % discretização
40 tau = linspace(0,1,1001);
41 % fase 1 de 1
42 phase = problem.addNewPhase(@DT1, x_vec, tau, 0, tf);
43 phase.Model.setModelParameters(rm);

```

```
44 % malha do vetor de controle
45 phase.addNewControlGrid(u_vec, tau);
46 % variaveis de saida do modelo
47 phase.Model.setModelOutputs(modeloutput);
48 % condições inciais e finais dos estados
49 phase.setInitialBoundaries([0;0]);
50 phase.setFinalBoundaries([10080;0],[10080;12.5]);
51 % restrição de corrente
52 pathc = phase.addNewPathConstraint(@LimCor,falcon.Constraint('Iup', -inf
      , 0, 1),tau);
53 pathc.setParameters(rm);
54 % funcional de custo
55 lagc = phase.addNewLagrangeCost(@LCost,falcon.Cost('Cost',1e-4));
56 % parametro otimizavel
57 lagc.setParameters(rm);
58
59 %% Calculo da solução
60 problem.setMajorIterLimit(10000)
61 problem.Solve();
62
63 %% Plots
64 mostar_resultados(problem,rm)
```

Apêndice B

Dados da pista

É apresentado na Tabela B.1 o dados coletados e processados da pista da Shell Eco-marathon Americas de 2019 no Kartódromo de Sonoma pela equipe *Duke Electric Vehicles* da *Duke University* concedidos a equipe Milhagem UFMG por meio de solicitação no site <<http://www.duke-ev.org/>>.

Tabela B.1: Dados da pista da Shell Eco-marathon Americas de 2019

Distancia percorrida [m]	Variação de altitude [m]	Latitude	Longitude	Elevação
0	0	38.1612738600	-122.454429100	-21.21110
5.122	0.0357	38.1613029200	-122.454474500	-21.17536
10.05	0.1049	38.1613307940	-122.454518280	-21.10612
15.10	0.1077	38.1613587920	-122.454563700	-21.10336
20.05	0.1434	38.1613862320	-122.454608280	-21.06766
25.01	0.1853	38.1614137920	-122.454652860	-21.02566
30.09	0.2428	38.1614427520	-122.454697760	-20.96822
35.01	0.2653	38.1614707900	-122.454741240	-20.94566
40.10	0.3062	38.1614994740	-122.454786460	-20.90476
45.03	0.3443	38.1615268620	-122.454830700	-20.86662
50.01	0.3632	38.1615544000	-122.454875700	-20.84766
55.06	0.4084	38.1615828700	-122.454920500	-20.80246
60.08	0.4487	38.1616102000	-122.454966160	-20.76208
65.00	0.5074	38.1616373020	-122.455010600	-20.70332
70.01	0.5286	38.1616649540	-122.455055780	-20.68206
75.04	0.5487	38.1616924220	-122.455101420	-20.66192
80.02	0.5800	38.1617207240	-122.455145600	-20.63052
85.05	0.6030	38.1617487200	-122.455190660	-20.60744
90.00	0.6475	38.1617766380	-122.455234700	-20.56290

95.03	0.6991	38.1618043860	-122.455280080	-20.51126
100.08	0.7343	38.1618322140	-122.455325660	-20.47594
105.08	0.7766	38.1618600180	-122.455370600	-20.43358
110.02	0.8014	38.1618862000	-122.455416200	-20.40868
115.10	0.8308	38.1619142460	-122.455462000	-20.37926
120.04	0.8594	38.1619403040	-122.455507680	-20.35050
125.07	0.9147	38.1619636780	-122.455556840	-20.29516
130.04	0.9869	38.1619902100	-122.455602460	-20.22278
135.05	1.0445	38.1620144420	-122.455650740	-20.16512
140.02	1.1265	38.1620396560	-122.455697540	-20.08306
145.06	1.1975	38.1620632000	-122.455746760	-20.01186
150.07	1.2976	38.1620860080	-122.455796000	-19.91168
155.06	1.4261	38.1621107860	-122.455843560	-19.78310
160.04	1.5534	38.1621351520	-122.455891240	-19.65566
165.02	1.7003	38.1621589680	-122.455939340	-19.50862
170.05	1.8175	38.1621841540	-122.455987100	-19.39126
175.03	1.8384	38.1622099900	-122.456033480	-19.37028
180.10	1.8899	38.1622359640	-122.456081020	-19.31864
185.09	1.9589	38.1622615180	-122.456127900	-19.24946
190.07	2.0057	38.1622886940	-122.456173140	-19.20254
195.07	2.0065	38.1623152900	-122.456219140	-19.20162
200.08	2.1076	38.1623419380	-122.456265300	-19.10036
205.04	2.2170	38.1623684920	-122.456310820	-18.99074
210.03	2.3643	38.1623949280	-122.456356880	-18.84334
215.09	2.5290	38.1624216480	-122.456403620	-18.67838
220.06	2.6872	38.1624481320	-122.456449300	-18.52004
225.10	2.8419	38.1624751680	-122.456495420	-18.36520
230.05	3.0316	38.1625027040	-122.456539760	-18.17530
235.07	3.1582	38.1625300080	-122.456585480	-18.04848
240.01	3.2783	38.1625575080	-122.456629780	-17.92822
245.00	3.4201	38.1625852200	-122.456674560	-17.78624
250.01	3.5218	38.1626125220	-122.456720060	-17.68432
255.05	3.6083	38.1626401340	-122.456765640	-17.59766
260.00	3.6874	38.16266662840	-122.456811460	-17.51832
265.00	3.8081	38.1626934240	-122.456856900	-17.39742
270.07	3.9548	38.1627211020	-122.456902880	-17.25054
275.01	4.0884	38.1627465560	-122.456949160	-17.11674
280.07	4.2276	38.1627747500	-122.456994560	-16.97732
285.07	4.3233	38.1628019320	-122.457039940	-16.88136
290.08	4.4291	38.1628290860	-122.457085680	-16.77538
295.02	4.4829	38.1628576220	-122.457128820	-16.72134
300.05	4.5448	38.1628866860	-122.457172940	-16.65918

305.07	4.6099	38.1629145080	-122.457218020	-16.59386
310.06	4.6480	38.1629416000	-122.457263540	-16.55554
315.04	4.6728	38.1629684000	-122.457309100	-16.53050
320.01	4.6916	38.1629932440	-122.457356200	-16.51140
325.04	4.7362	38.1630191140	-122.457403380	-16.46660
330.00	4.7312	38.1630416320	-122.457452260	-16.47136
335.08	4.7491	38.1630666300	-122.457500800	-16.45316
340.00	4.7603	38.1630904000	-122.457548200	-16.44172
345.04	4.7026	38.1631164880	-122.457595280	-16.49918
350.05	4.6627	38.1631426640	-122.457641900	-16.53874
355.03	4.5687	38.1631696580	-122.457687240	-16.63244
360.08	4.3907	38.1631969700	-122.457733300	-16.81018
365.04	4.1746	38.1632243260	-122.457777960	-17.02600
370.01	3.9562	38.1632533660	-122.457820960	-17.24410
375.04	3.7561	38.1632871480	-122.457859300	-17.44398
380.01	3.5983	38.1633280020	-122.457882260	-17.60148
385.01	3.5352	38.1633729500	-122.457879200	-17.66438
390.02	3.4615	38.1634170900	-122.457867060	-17.73802
395.07	3.4504	38.1634591800	-122.457845200	-17.74896
400.10	3.4657	38.1634997160	-122.457819620	-17.73366
405.04	3.5031	38.1635360260	-122.457786960	-17.69620
410.04	3.4510	38.1635669940	-122.457745500	-17.74832
415.00	3.3952	38.1635950740	-122.457701520	-17.80422
420.06	3.3656	38.1636180940	-122.457651620	-17.83392
425.00	3.2732	38.1636335660	-122.457598780	-17.92646
430.01	3.1978	38.1636477640	-122.457544520	-18.00196
435.03	3.1786	38.1636561900	-122.457488300	-18.02130
440.06	3.3636	38.1636602200	-122.457431180	-17.83650
445.06	3.6767	38.1636608340	-122.457374180	-17.52358
450.11	4.0237	38.1636589080	-122.457316800	-17.17684
455.11	4.3273	38.1636549500	-122.457260060	-16.87346
460.03	4.5620	38.1636479500	-122.457204720	-16.63892
465.01	4.7455	38.1636395900	-122.457148900	-16.45568
470.09	4.8381	38.1636303860	-122.457092120	-16.36332
475.00	4.8199	38.1636179420	-122.457038320	-16.38174
480.09	4.8294	38.1636047560	-122.456982740	-16.37246
485.00	4.8345	38.1635937960	-122.456928500	-16.36756
490.09	4.8057	38.1635821600	-122.456872280	-16.39660
495.08	4.7222	38.1635633980	-122.456820500	-16.48032
500.08	4.6332	38.1635405180	-122.456771380	-16.56962
505.10	4.5412	38.1635145500	-122.456724520	-16.66180
510.01	4.4620	38.1634880400	-122.456679600	-16.74124

515.04	4.3113	38.1634574520	-122.456637300	-16.89218
520.05	4.2162	38.1634269040	-122.456595360	-16.98758
525.01	4.1340	38.1633966420	-122.456553700	-17.07000
530.04	4.0623	38.1633656560	-122.456511860	-17.14188
535.01	3.9908	38.1633331760	-122.456472780	-17.21360
540.00	3.9346	38.1632994020	-122.456435200	-17.27010
545.08	3.8594	38.1632660460	-122.456395560	-17.34546
550.11	3.8051	38.1632336300	-122.456355380	-17.40000
555.10	3.7335	38.1632019300	-122.456315060	-17.47184
560.09	3.6562	38.1631702760	-122.456274680	-17.54928
565.01	3.5990	38.1631400860	-122.456233460	-17.60676
570.06	3.5572	38.1631107940	-122.456189440	-17.64872
575.08	3.5131	38.1630795120	-122.456148020	-17.69302
580.07	3.4390	38.1630489460	-122.456106300	-17.76728
585.00	3.3566	38.1630197860	-122.456063920	-17.84986
590.01	3.2757	38.1629927940	-122.456018100	-17.93100
595.05	3.2379	38.1629649280	-122.455972700	-17.96896
600.02	3.1673	38.1629376840	-122.455927700	-18.03970
605.08	3.0848	38.1629078420	-122.455884100	-18.12240
610.02	2.9922	38.1628807820	-122.455839320	-18.21518
615.00	2.9464	38.1628528340	-122.455794880	-18.26108
620.01	2.8593	38.1628248840	-122.455749920	-18.34842
625.10	2.7650	38.1627978840	-122.455703020	-18.44280
630.07	2.6996	38.1627723980	-122.455656360	-18.50832
635.07	2.6198	38.1627462640	-122.455609900	-18.58830
640.01	2.5203	38.1627209660	-122.455563560	-18.68790
645.04	2.4145	38.1626958980	-122.455515860	-18.79392
650.06	2.3246	38.1626724200	-122.455466820	-18.88392
655.00	2.2181	38.1626500060	-122.455418200	-18.99056
660.05	2.1145	38.1626298500	-122.455366500	-19.09422
665.02	2.0380	38.1626084340	-122.455316760	-19.17088
670.05	1.9448	38.1625874640	-122.455265820	-19.26414
675.05	1.8925	38.1625674080	-122.455214800	-19.31656
680.08	1.8091	38.1625453360	-122.455164600	-19.40002
685.08	1.7089	38.1625243040	-122.455114280	-19.50034
690.03	1.6652	38.1625059420	-122.455062700	-19.54418
695.04	1.5816	38.1624865360	-122.455011200	-19.62784
700.01	1.4836	38.1624670460	-122.454960100	-19.72594
705.10	1.4270	38.1624518300	-122.454905380	-19.78256
710.01	1.3236	38.1624407480	-122.454851040	-19.88600
715.00	1.2146	38.1624292980	-122.454796060	-19.99504
720.10	1.1747	38.1624227720	-122.454738400	-20.03504

725.08	1.0692	38.1624197240	-122.454681780	-20.14050
730.02	0.9782	38.1624146040	-122.454625800	-20.23152
735.02	0.8732	38.1624100740	-122.454569080	-20.33658
740.00	0.8007	38.1624065700	-122.454512380	-20.40906
745.05	0.6754	38.1624025380	-122.454455000	-20.53440
750.08	0.6163	38.1623994340	-122.454397740	-20.59354
755.06	0.5317	38.1623969120	-122.454341040	-20.67814
760.07	0.4259	38.1623941900	-122.454283920	-20.78396
765.00	0.3846	38.1623901980	-122.454228000	-20.82520
770.10	0.2509	38.1623811940	-122.454170960	-20.95890
775.03	0.1850	38.1623676500	-122.454117320	-21.02488
780.10	0.0944	38.1623548500	-122.454061860	-21.11542
785.11	0.0042	38.1623424080	-122.454006920	-21.20564
790.01	-0.0877	38.1623266100	-122.453954680	-21.29764
795.03	-0.1512	38.1623108160	-122.453901040	-21.36116
800.03	-0.1979	38.1622939780	-122.453848040	-21.40780
805.05	-0.2986	38.1622812460	-122.453793080	-21.50848
810.06	-0.3541	38.1622607260	-122.453742160	-21.56402
815.01	-0.4364	38.1622421300	-122.453690940	-21.64628
820.07	-0.5007	38.1622217060	-122.453639340	-21.71056
825.04	-0.5166	38.1622012820	-122.453588760	-21.72654
830.07	-0.5625	38.1621775740	-122.453539860	-21.77242
835.07	-0.6104	38.1621523880	-122.453492540	-21.82032
840.01	-0.6443	38.1621271120	-122.453446280	-21.85412
845.07	-0.6649	38.1620973980	-122.453402380	-21.87478
850.11	-0.6776	38.1620664460	-122.453360380	-21.88746
855.07	-0.7038	38.1620349520	-122.453320280	-21.91366
860.02	-0.6995	38.1620022600	-122.453281840	-21.90938
865.10	-0.7000	38.1619690020	-122.453242040	-21.90986
870.02	-0.7261	38.1619351640	-122.453205780	-21.93590
875.09	-0.7550	38.1618985400	-122.453171200	-21.96480
880.10	-0.7451	38.1618615480	-122.453138340	-21.95488
885.03	-0.7270	38.1618232260	-122.453109820	-21.93678
890.05	-0.7221	38.1617845220	-122.453080220	-21.93194
895.00	-0.7417	38.1617456300	-122.453052640	-21.95152
900.03	-0.7464	38.1617059000	-122.453025060	-21.95618
905.09	-0.7818	38.1616643120	-122.453001540	-21.99156
910.06	-0.7922	38.1616230960	-122.452979280	-22.00200
915.01	-0.7905	38.1615815680	-122.452958820	-22.00030
920.11	-0.8049	38.1615384000	-122.452938880	-22.01468
925.00	-0.8138	38.1614969900	-122.452919860	-22.02356
930.08	-0.8210	38.1614541180	-122.452899340	-22.03074

935.08	-0.8543	38.1614118780	-122.452879700	-22.06398
940.08	-0.8703	38.1613696660	-122.452859740	-22.07998
945.02	-0.8898	38.1613280600	-122.452839740	-22.09938
950.10	-0.9171	38.1612841140	-122.452823380	-22.12666
955.00	-0.9410	38.1612421860	-122.452806100	-22.15052
960.01	-0.9590	38.1611992360	-122.452788380	-22.16856
965.00	-0.9725	38.1611570420	-122.452768720	-22.18202
970.06	-0.9976	38.1611137840	-122.452750500	-22.20708
975.02	-1.0021	38.1610708860	-122.452734860	-22.21144
980.02	-1.0205	38.1610279320	-122.452717580	-22.22978
985.05	-1.0300	38.1609844100	-122.452701520	-22.23924
990.06	-1.0474	38.1609411520	-122.452685220	-22.25666
995.08	-1.0488	38.1608975880	-122.452669760	-22.25792
1000.11	-1.0606	38.1608541600	-122.452653540	-22.26972
1005.03	-1.0602	38.1608118840	-122.452636740	-22.26922
1010.05	-1.0762	38.1607690040	-122.452618260	-22.28510
1015.01	-1.0899	38.1607265520	-122.452600560	-22.29870
1020.06	-1.0864	38.1606832400	-122.452583200	-22.29518
1025.01	-1.1233	38.1606409200	-122.452565220	-22.33196
1030.00	-1.1056	38.1605981040	-122.452548020	-22.31422
1035.08	-1.1308	38.1605542600	-122.452531400	-22.33932
1040.05	-1.1516	38.1605118560	-122.452513060	-22.35994
1045.06	-1.1333	38.1604692340	-122.452494220	-22.34156
1050.09	-1.1305	38.1604260540	-122.452477020	-22.33868
1055.03	-1.1343	38.1603833400	-122.452461120	-22.34232
1060.07	-1.1495	38.1603396140	-122.452445420	-22.35746
1065.01	-1.2184	38.1602967340	-122.452430340	-22.42624
1070.05	-1.2939	38.1602533620	-122.452413660	-22.50164
1075.06	-1.3496	38.1602109880	-122.452393760	-22.55716
1080.10	-1.4133	38.1601675100	-122.452377200	-22.62072
1085.05	-1.4788	38.1601249480	-122.452360320	-22.68614
1090.06	-1.4777	38.1600821400	-122.452342380	-22.68490
1095.06	-1.4619	38.1600401640	-122.452321760	-22.66890
1100.01	-1.4064	38.1599980760	-122.452302940	-22.61326
1105.00	-1.3362	38.1599555940	-122.452284240	-22.54286
1110.09	-1.2711	38.1599128300	-122.452263240	-22.47766
1115.10	-1.2373	38.1598720400	-122.452238920	-22.44370
1120.06	-1.1685	38.1598291420	-122.452223020	-22.37468
1125.06	-1.0985	38.1597842600	-122.452217700	-22.30458
1130.03	-1.0040	38.1597394940	-122.452217880	-22.20994
1135.00	-0.9233	38.1596949380	-122.452222760	-22.12908
1140.00	-0.8802	38.1596509780	-122.452235000	-22.08588

1145.06	-0.9149	38.1596097340	-122.452259720	-22.12052
1150.10	-0.9994	38.1595743000	-122.452295640	-22.20506
1155.01	-1.0491	38.1595506400	-122.452343000	-22.25474
1160.08	-1.1572	38.1595320720	-122.452395760	-22.36292
1165.04	-1.2352	38.1595212240	-122.452450700	-22.44102
1170.09	-1.2925	38.1595141200	-122.452507640	-22.49842
1175.04	-1.2543	38.1595104080	-122.452563920	-22.46032
1180.07	-1.2888	38.1595113820	-122.452621280	-22.49498
1185.10	-1.2424	38.1595205500	-122.452677440	-22.44868
1190.06	-1.2007	38.1595361840	-122.452730520	-22.40716
1195.03	-1.1523	38.1595598180	-122.452778640	-22.35898
1200.07	-1.0711	38.1595935160	-122.452817160	-22.27792
1205.02	-1.0818	38.1596319880	-122.452845840	-22.28880
1210.01	-1.0682	38.1596744160	-122.452864520	-22.27542
1215.08	-1.0743	38.1597181120	-122.452881540	-22.28162
1220.01	-1.0606	38.1597612760	-122.452894580	-22.26812
1225.02	-1.0465	38.1598046180	-122.452910420	-22.25420
1230.10	-1.0468	38.1598487180	-122.452926200	-22.25464
1235.07	-1.0490	38.1598921320	-122.452939860	-22.25694
1240.02	-1.0505	38.1599353600	-122.452954020	-22.25862
1245.01	-1.0674	38.1599780700	-122.452971460	-22.27562
1250.04	-1.0703	38.1600216040	-122.452987680	-22.27872
1255.06	-1.0247	38.1600644500	-122.453006100	-22.23322
1260.08	-1.0325	38.1601074300	-122.453023680	-22.24116
1265.00	-1.0105	38.1601499180	-122.453039620	-22.21926
1270.08	-0.9942	38.1601937040	-122.453056460	-22.20306
1275.03	-0.9801	38.1602356280	-122.453075980	-22.18914
1280.06	-0.9383	38.1602770780	-122.453099120	-22.14746
1285.04	-0.9340	38.1603159380	-122.453127500	-22.14328
1290.08	-0.9203	38.1603556560	-122.453155340	-22.12966
1295.07	-0.9174	38.1603950480	-122.453182820	-22.12682
1300.02	-0.9349	38.1604333240	-122.453211760	-22.14444
1305.08	-0.9123	38.1604716020	-122.453243060	-22.12202
1310.05	-0.8966	38.1605087220	-122.453274800	-22.10634
1315.05	-0.8504	38.1605449360	-122.453308680	-22.06030
1320.11	-0.8165	38.1605791880	-122.453346780	-22.02652
1325.05	-0.7662	38.1606120120	-122.453384820	-21.97626
1330.06	-0.7824	38.1606419360	-122.453427740	-21.99252
1335.00	-0.7711	38.1606702860	-122.453471160	-21.98136
1340.10	-0.7344	38.1606980980	-122.453517440	-21.94470
1345.07	-0.7142	38.1607251260	-122.453562640	-21.92458
1350.01	-0.7042	38.1607541420	-122.453605440	-21.91466

1355.01	-0.6655	38.1607824620	-122.453649700	-21.87606
1360.08	-0.6398	38.1608104420	-122.453695500	-21.85044
1365.10	-0.6060	38.1608381440	-122.453740700	-21.81668
1370.01	-0.5978	38.1608644000	-122.453785880	-21.80858
1375.04	-0.5478	38.1608905560	-122.453832660	-21.75856
1380.04	-0.4958	38.1609185560	-122.453877460	-21.70662
1385.00	-0.4603	38.1609459780	-122.453922080	-21.67118
1390.02	-0.4183	38.1609750600	-122.453965920	-21.62926
1395.07	-0.3629	38.1610023140	-122.454012100	-21.57392
1401.94	-0.3204	38.1610410200	-122.454073200	-21.53146
1406.26	-0.2872	38.1610656260	-122.454111500	-21.49826
1410.59	-0.2581	38.1610902440	-122.454149800	-21.46920
1415.09	-0.2296	38.1611155600	-122.454189800	-21.44068
1420.03	-0.1751	38.1611437120	-122.454233500	-21.38618
1425.04	-0.1247	38.1611721120	-122.454277920	-21.33580
1430.10	-0.1028	38.1612003920	-122.454323260	-21.31396
1435.05	-0.0481	38.1612285880	-122.454367020	-21.25928
1440.01	-0.0130	38.1612567000	-122.454410980	-21.22418

Fonte: Equipe *Duke Electric Vehicles*.