

Probabilités discrètes – Résumé

– version 0.1

Dr M. GUEDJ



“Probabilités discrètes – Résumé” de Dr Michaël GUEDJ est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons Attribution 4.0 International. Fondé(e) sur une œuvre à https://github.com/michaelguedj/ens__proba.

1 Loi de probabilité

Définition 1 (Loi de probabilité). *Une loi de probabilité (ou probabilité) \Pr , sur 2^Ω , est une application vérifiant :*

1. *Masse unitaire : $\Pr(\Omega) = 1$;*
2. *Positivité : $\Pr : 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$;*
3. *Additivité : $\forall A, B \in 2^\Omega$,*

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$

Dans ce qui suit \Pr est une probabilité sur Ω .

Théorème 2. $\forall A \in 2^\Omega$,

$$\Pr(A) = 1 - \Pr(\bar{A})$$

Théorème 3. $\forall A, B \in 2^\Omega$,

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

2 Probabilité conditionnelle

Définition 4 (Probabilité conditionnelle). *Une probabilité conditionnelle est la probabilité d'un événement sachant qu'un autre événement a eu lieu. Soient deux événements A et B (i.e. $A, B \in 2^\Omega$), si $\Pr(A) \neq 0$, alors la probabilité conditionnelle de B conditionnée par A (aussi appelée probabilité de B sachant A) est définie par :*

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)}$$

Exemple. Soit une classe de lycée. Nous considérons les événements suivants :

- F : “un élève est une fille”;
- A : “un élève étudie l'allemand”.

La classe vérifie :

	F	$\neg F$
A	10	7
$\neg A$	4	9

Quelle est la probabilité qu'un élève étudie l'allemand, sachant que cet élève est une fille (i.e. $\Pr(A|F)$) ? On a par définition :

$$\Pr(A|F) = \frac{\Pr(A \wedge F)}{\Pr(F)}$$

Ici :

$$\Pr(A|F) = \frac{\text{Nombre de filles étudiant l'allemand}}{\text{Nombre de filles}}$$

Soit :

$$\Pr(A|F) = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

Théorème 5. $\forall A, B \in 2^\Omega, \Pr(A) \neq 0$,

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(B|A) \cdot \Pr(A)$$

3 Théorème des probabilités totales

Théorème 6 (Théorème des probabilités totales). *Soit A un évènement. Si $(B_i)_{i \in I}$ est une partition de Ω , alors :*

$$\Pr(A) = \sum_{i \in I} \Pr(A|B_i) \Pr(B_i)$$

4 Théorème de Bayes

Théorème 7 (Théorème de Bayes). *Soient A et B deux événements de probabilités non nulles. Alors :*

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A|B) \Pr(B)}{\Pr(A)}$$

5 Variable aléatoire – Espérance

Exemple 8 (Fil rouge). *On lance deux pièces.*

$$\Omega = \{FF, PF, FP, PP\}$$

La variable aléatoire X quantifie le nombre de pile :

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

On a :

$$\Pr(X = 0) = \frac{\#\{FF\}}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Pr(X = 1) = \frac{\#\{PF, FP\}}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Pr(X = 2) = \frac{\#\{PP\}}{4} = \frac{1}{4}$$

Exemple 9 (Fil rouge).

$$\mathcal{L}_X = \{ 0 \rightarrow \frac{1}{4}; \quad 1 \rightarrow \frac{1}{2}; \quad 2 \rightarrow \frac{1}{4} \}$$

Définition 10 (Espérance).

$$E(X) := \sum_i x_i \cdot \Pr(X = x_i)$$

Exemple 11 (Fil rouge).

$$E(X) = 0 \cdot \Pr(X = 0) + 1 \cdot \Pr(X = 1) + 2 \cdot \Pr(X = 2)$$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$E(X) = 1$$

*Autrement dit, pour chaque lancé de 2 pièces, on peut “espérer” avoir 1 pile.
En pratique, cela signifie que si on effectue n lancers de 2 pièces, alors : si n
est “grand”, le nombre de piles est “proche” de n .*