

Probabilités discrètes

– version 1.3

Dr M. GUEDJ



Probabilités discrètes de Dr Michaël GUEDJ est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons Attribution 4.0 International. Fondé(e) sur une œuvre à [https://github.com/michaelguedj/ens\\_\\_proba](https://github.com/michaelguedj/ens__proba).

## Table des Matières

<b>1</b>	<b>Loi de Probabilité</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Premiers résultats</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Probabilité conditionnelle</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Théorème des probabilités totales</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Application : paradoxe de Monty Hall</b>	<b>12</b>
<b>6</b>	<b>Théorème de Bayes</b>	<b>14</b>
<b>7</b>	<b>Variable aléatoire</b>	<b>14</b>

## 1 Loi de Probabilité

Dans ce qui suit,

- Nous considérons un ensemble non vide  $\Omega$  appelé **univers** ;
- $\Omega$  est ici considéré fini (i.e. contient un nombre fini d'éléments) ;
- Tout élément  $\omega \in \Omega$  est appelé **éventualité** ;
- Toute partie  $A$  de  $\Omega$  est appelée **événement** ;
- L'ensemble des parties d'un ensemble  $E$  est noté :  $2^E$  ; e.g. :

$$E = \{a, b, c\}$$

$$2^E = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$$

- En particulier, l'ensemble des événements de  $\Omega$  est noté :  $2^\Omega$ .

**Définition 1** (loi de probabilité). *Une loi de probabilité (ou probabilité)  $\text{Pr}$ , sur  $2^\Omega$ , est une application vérifiant :*

- 1. Masse unitaire :  $\text{Pr}(\Omega) = 1$  ;*
- 2. Positivité :  $\text{Pr} : 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$  ;*

3. *Additivité* :  $\forall A, B \in 2^\Omega$ ,

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$

Dans ce qui suit  $\Pr$  est une probabilité sur  $\Omega$ .

## 2 Premiers résultats

**Théorème 2.**  $\forall A \in 2^\Omega$ ,

$$\Pr(A) = 1 - \Pr(\bar{A})$$

*Preuve.* Soit  $A \in 2^\Omega$ , on a :

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

d'où par définition de  $\Pr$  :

$$\Pr(A \cup \bar{A}) = \Pr(A) + \Pr(\bar{A})$$

On a :  $A \cup \bar{A} = \Omega$  ; et par définition de  $\Pr$  :  $\Pr(\Omega) = 1$  ; donc :

$$\Pr(A \cup \bar{A}) = 1$$

Par suite,

$$1 = \Pr(A) + \Pr(\bar{A}) \iff 1 - \Pr(\bar{A}) = \Pr(A)$$

□

**Théorème 3.**

$$\Pr(\emptyset) = 0$$

*Proof.*

$$\Pr(\emptyset) = 1 - \Pr(\Omega)$$

□

**Théorème 4.**  $\forall A, B \in 2^\Omega$ ,

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

*Preuve.* Soit  $A, B \in 2^\Omega$  ; On pose :

$$A' := A - (A \cap B)$$

$$B' := B - (A \cap B)$$

On a :  $A' \cap B' = \emptyset$  et donc, par définition de  $\Pr$ ,

$$\underline{\Pr(A' \cup B') = \Pr(A') + \Pr(B')}$$

On a :

$$(A \cap B) \cap (A' \cup B') = \emptyset$$

et donc, par définition de  $\Pr$ ,

$$\Pr((A \cap B) \cup (A' \cup B')) = \Pr(A \cap B) + \Pr(A' \cup B')$$

En outre,

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A' \cup B')$$

Donc,

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A \cap B) + \Pr(A' \cup B')$$

Soit,

$$\underline{\Pr(A \cup B) = \Pr(A \cap B) + \Pr(A') + \Pr(B')} \quad (\mathcal{E}_1)$$

On a :

$$A = (A \cap B) \cup A' \text{ et } (A \cap B) \cap A' = \emptyset$$

$$B = (A \cap B) \cup B' \text{ et } (A \cap B) \cap B' = \emptyset$$

D'où par définition de  $\Pr$  :

$$\Pr(A) = \Pr(A \cap B) + \Pr(A') \iff \underline{\Pr(A') = \Pr(A) - \Pr(A \cap B)} \quad (\mathcal{E}_2)$$

$$\Pr(B) = \Pr(A \cap B) + \Pr(B') \iff \underline{\Pr(B') = \Pr(B) - \Pr(A \cap B)} \quad (\mathcal{E}_3)$$

Par  $(\mathcal{E}_1)$ ,  $(\mathcal{E}_2)$  et  $(\mathcal{E}_3)$ ,

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A \cap B) + \Pr(A) - \Pr(A \cap B) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

D'où

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

□

**Théorème 5.** Soient deux événements  $A, B \in 2^\Omega$ ,

$$A \subset B \Rightarrow \Pr(A) \leq \Pr(B)$$

*Preuve.*

1. Cas 1 :  $B = \emptyset$

D'où,  $A = \emptyset$  ; et donc  $\Pr(A) = \Pr(B) = 0$ .

2. Cas 2 :  $B \neq \emptyset$

$\exists C \in 2^\Omega$ , tel que :  $A \cup C = B$  et  $A \cap C = \emptyset$ .

D'où,

$$\Pr(A \cup C) = \Pr(A) + \Pr(C) = \Pr(B)$$

Par positivité de la probabilité,  $\Pr(A) \leq \Pr(B)$ .

□

**Théorème 6.** Soient deux événements  $A, B \in 2^\Omega$ ,

$$A \subset B \Rightarrow \Pr(A \cap B) = \Pr(A)$$

*Preuve.*

$$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$$

□

**Lemme 7.** Soit  $A \in 2^\Omega$  tel que :

(i)  $A \subset B$  ;

(ii)  $B \neq \emptyset$  ;

Alors,  $\exists C \in 2^\Omega$ , tel que :

(i)  $A \cup C = B$  ;

(ii)  $A \cap C = \emptyset$ .

*Preuve.* Sous les hypothèses, deux cas se présentent :

1.  $A = \emptyset$  ; alors  $C = B$  ;
2.  $A \neq \emptyset$  ; on pose :  $C = \bar{A} \cap B$  ; en effet :
  - (i)  $A \cup C = A \cup (\bar{A} \cap B) = (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B) = \Omega \cap B = B$  ;
  - (ii)  $A \cap C = A \cap (\bar{A} \cap B) = (A \cap \bar{A}) \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$ .

□

### 3 Probabilité conditionnelle

**Définition 8** (Probabilité conditionnelle). *Une probabilité conditionnelle est la probabilité d'un événement sachant qu'un autre événement a eu lieu. Soient deux événements  $A$  et  $B$  (i.e.  $A, B \in 2^\Omega$ ), si  $\Pr(A) \neq 0$ , alors la probabilité conditionnelle de  $B$  conditionnée par  $A$  (aussi appelée probabilité de  $B$  sachant  $A$ ) est définie par :*

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)}$$

**Exemple.** Soit une classe de lycée. Nous considérons les événements suivants :

- $F$  : “un élève est une fille”;
- $A$  : “un élève étudie l'allemand”.

La classe vérifie :

	$F$	$\neg F$
$A$	10	7
$\neg A$	4	9

Quelle est la probabilité qu'un élève étudie l'allemand, sachant que cet élève est une fille (i.e.  $\Pr(A|F)$ ) ? On a par définition :

$$\Pr(A|F) = \frac{\Pr(A \cap F)}{\Pr(F)}$$

Ici :

$$\Pr(A|F) = \frac{\text{Nombre de filles étudiant l'allemand}}{\text{Nombre de filles}}$$

Soit :

$$\Pr(A|F) = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

**Théorème 9.**  $\forall A, B \in 2^\Omega, \Pr(A) \neq 0,$

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(B|A) \cdot \Pr(A)$$

*Proof.*

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)} \iff \Pr(B|A) \cdot \Pr(A) = \Pr(A \cap B)$$

□

**Lemme 10.** *Soient  $A_1, A_2, \dots, A_k$  des événements tels que  $\Pr(A_1 \cap \dots \cap A_k) \neq 0$ . Alors :  $\forall i \in \{1, \dots, k\}, \Pr(A_1 \cap \dots \cap A_i) \neq 0$ .*

*Preuve.* On pose :

$$B_i := A_1 \cap \dots \cap A_i$$

On a alors,  $\forall i \in \{1, \dots, k\},$

$$B_k \subset B_i$$

D'où,  $\forall i \in \{1, \dots, k\}, \exists C \subset \Omega,$  tel que :

$$B_i = B_k \cup C \text{ et } B_k \cap C = \emptyset$$

Par hypothèse,  $\Pr(B_k) \neq 0$  et  $\Pr(C) \in [0, 1]$ . On en déduit :

$$\Pr(B_i) = \Pr(B_k) + \Pr(C) \neq 0$$

□

**Théorème 11.** *Soient  $A_1, A_2, \dots, A_k$  des événements tels que :*

(i)  $k \geq 2$  ;

(ii)  $\Pr(A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}) \neq 0$  ;



Alors :

$$\Pr(A_1 \cap \dots \cap A_k) = \Pr(A_1) \cdot \Pr(A_2|A_1) \cdot \Pr(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \Pr(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1})$$

*Preuve.* On démontre, par récurrence, la propriété  $\Pi$ , définie ci-après, pour  $\iota \in \{2, \dots, k\}$  :

$$\Pi(\iota) : \Pr(A_1 \cap \dots \cap A_\iota) = \Pr(A_1) \cdot \Pr(A_2|A_1) \cdot \Pr(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \Pr(A_\iota|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{\iota-1})$$

1. Cas initial : Par hypothèse, et le lemme précédant, on a :  $\Pr(A_1) \neq 0$ ,  
d'où :

$$\Pi(2) : \Pr(A_1 \cap A_2) = \Pr(A_1) \cdot \Pr(A_2|A_1)$$

2. Hypothèse de récurrence : Pour  $\kappa \in \{2, \dots, k-1\}$ ,

$$\Pi(\kappa) : \Pr(A_1 \cap \dots \cap A_\kappa) = \Pr(A_1) \cdot \Pr(A_2|A_1) \cdot \Pr(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \Pr(A_\kappa|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{\kappa-1})$$

3. Hérédité : On a :

$$\Pr(A_1 \cap \dots \cap A_\kappa \cap A_{\kappa+1}) = \Pr(A_{\kappa+1} \cap (A_1 \cap \dots \cap A_\kappa))$$

Par hypothèse, et le lemme précédant,

$$\Pr(A_1 \cap \dots \cap A_\kappa) \neq 0$$

D'où,

$$\Pr(A_{\kappa+1} \cap (A_1 \cap \dots \cap A_\kappa)) = \Pr(A_{\kappa+1}|A_1 \cap \dots \cap A_\kappa) \cdot \Pr(A_1 \cap \dots \cap A_\kappa)$$

Par hypothèse de récurrence,

$$\Pr(A_1 \cap \dots \cap A_\kappa) = \Pr(A_1) \cdot \Pr(A_2|A_1) \cdot \Pr(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \Pr(A_\kappa|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{\kappa-1})$$

D'où,

$$\Pr(A_{\kappa+1} \cap (A_1 \cap \dots \cap A_\kappa)) = \Pr(A_{\kappa+1}|A_1 \cap \dots \cap A_\kappa) \times \\ \Pr(A_1) \cdot \Pr(A_2|A_1) \cdot \Pr(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \Pr(A_\kappa|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{\kappa-1})$$

D'où, l'établissement de  $\Pi(\kappa+1)$ .

Donc, en particulier,  $\Pi(k)$  est vraie, selon les hypothèses.

□

## 4 Théorème des probabilités totales

**Définition 12** (Partition).  $(B_i)_{i \in I}$  est une partition de  $B$  ( $I$  est supposé fini dénombrable) ; si :

$$(i) \quad \forall i \in I, B_i \neq \emptyset ;$$

$$(ii) \quad i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset ;$$

$$(iii) \quad B = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

**Théorème 13.** Soit  $A$  et  $B$  deux évènements. Si  $(B_i)_{i \in I}$  est une partition de  $B$ , alors :

$$\Pr(A \cap B) = \sum_{i \in I} \Pr(A \cap B_i)$$

*Preuve.*

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A \cap \bigcup_{i \in I} B_i) \quad ; \quad (B = \bigcup_{i \in I} B_i)$$

$$\Pr(A \cap B) = \Pr\left(\bigcup_{i \in I} A \cap B_i\right)$$

$$\Pr(A \cap B) = \sum_{i \in I} \Pr(A \cap B_i)$$

□

**Théorème 14.** Soit  $A$  un évènement. Si  $(B_i)_{i \in I}$  est une partition de  $\Omega$ , alors :

$$\Pr(A) = \sum_{i \in I} \Pr(A \cap B_i)$$

*Preuve.*

$$\Pr(A) = \Pr(A \cap \Omega) = \sum_{i \in I} \Pr(A \cap B_i)$$

□

**Théorème 15** (théorème des probabilités totales). *Soit  $A$  et  $B$  deux événements. Si  $(B_i)_{i \in I}$  est une partition de l'évènement  $B$ , alors :*

$$\Pr(A|B) = \sum_{i \in I} \Pr(A|B_i) \Pr(B_i|B)$$

*Preuve.*

$$\begin{aligned} \Pr(A|B) &= \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \\ \Pr(A|B) &= \frac{\sum_i \Pr(A \cap B_i)}{\Pr(B)} \\ \Pr(A|B) &= \sum_i \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\Pr(B)} \\ \Pr(A|B) &= \sum_i \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\Pr(B)} \frac{\Pr(B_i)}{\Pr(B_i)} \\ \Pr(A|B) &= \sum_i \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\Pr(B_i)} \frac{\Pr(B_i)}{\Pr(B)} \\ \Pr(A|B) &= \sum_i \Pr(A|B_i) \frac{\Pr(B_i)}{\Pr(B)} \\ \Pr(A|B) &= \sum_i \Pr(A|B_i) \frac{\Pr(B_i \cap B)}{\Pr(B)} \\ \Pr(A|B) &= \sum_i \Pr(A|B_i) \Pr(B_i|B) \end{aligned}$$

□

**Lemme 16.** *Soient  $A$  un événement de probabilité non nulle. Alors :*

$$\Pr(A|\Omega) = \Pr(A)$$

*Preuve.*  $\Pr(A|\Omega) = \frac{\Pr(A \cap \Omega)}{\Pr(\Omega)} = \Pr(A).$

□

**Théorème 17.** *Soit  $A$  un évènement. Si  $(B_i)_{i \in I}$  est une partition de  $\Omega$ , alors :*

$$\Pr(A) = \sum_{i \in I} \Pr(A|B_i) \Pr(B_i)$$

*Preuve.*

$$\Pr(A) = \Pr(A|\Omega) = \sum_{i \in I} \Pr(A|B_i) \Pr(B_i|\Omega)$$

$$\Pr(A) = \sum_{i \in I} \Pr(A|B_i) \Pr(B_i)$$

□

## 5 Application : paradoxe de Monty Hall

**Définition 18** (Problème de Monty Hall).

- *Soient trois portes : l'une cache une voiture, chacune des deux autres cachant une chèvre.*
- *Le présentateur sait où se cache la voiture.*
- *Le joueur, qui souhaite trouver la voiture, choisit une des portes (sans que celle-ci ne soit ouverte).*
- *Le présentateur ouvre une autre porte (que celle choisie par le joueur), qui révèle alors une chèvre.*
- *Le présentateur demande au candidat si celui-ci souhaite modifier son choix, avant que soit effectué l'ouverture des portes.*

On pose :

- $G :=$  "Le joueur gagne" ;
- $1^{Vrai} :=$  "le premier choix effectué par le joueur est le bon".

**Lemme 19.**

$$\Pr(G) = \Pr(G|1^{Vrai}).\Pr(1^{Vrai}) + \Pr(G|\overline{1^{Vrai}}).\Pr(\overline{1^{Vrai}})$$

*Preuve.*  $\{1^{Vrai}, \overline{1^{Vrai}}\}$  est une partition de l'espace des possibles. On utilise le théorème 17.  $\square$

Dans ce qui suit, le problème est implicitement généralisé à  $n$  portes (le problème initial supposant  $n = 3$ ).

**Théorème 20.**

$$\Pr(G) = \Pr(G|1^{Vrai}).\frac{1}{n} + \Pr(G|\overline{1^{Vrai}}).\frac{n-1}{n}$$

*Preuve.*  $\Pr(1^{Vrai}) = \frac{1}{n}$  ;  $\Pr(\overline{1^{Vrai}}) = \frac{n-1}{n}$ .  $\square$

**Théorème 21.**

- Si le joueur conserve son premier choix, alors  $\Pr(G) = \frac{1}{n}$  ;
- Si le joueur modifie son premier choix, alors  $\Pr(G) = \frac{n-1}{n}$ .

*Preuve.* Cas 1 : le joueur conserve son premier choix

- $\Pr(G|1^{Vrai}) = 1$  ;
- $\Pr(G|\overline{1^{Vrai}}) = 0$ .

D'où,

$$\Pr(G) = 1.\frac{1}{n} + 0.\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

Cas 2 : le joueur modifie son premier choix

- $\Pr(G|1^{Vrai}) = 0$  ;
- $\Pr(G|\overline{1^{Vrai}}) = 1$ .

D'où,

$$\Pr(G) = 0.\frac{1}{n} + 1.\frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

$\square$

## 6 Théorème de Bayes

**Théorème 22** (Théorème de Bayes). *Soient  $A$  et  $B$  deux événements de probabilités non nulles. Alors :*

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A|B) \Pr(B)}{\Pr(A)}$$

*Preuve.*

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(B \cap A)}{\Pr(A)} \iff \Pr(A \cap B) = \Pr(B|A) \cdot \Pr(A)$$

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \iff \Pr(A \cap B) = \Pr(A|B) \cdot \Pr(B)$$

D'où,

$$\Pr(B|A) \cdot \Pr(A) = \Pr(A|B) \cdot \Pr(B) \iff \Pr(B|A) = \frac{\Pr(A|B) \cdot \Pr(B)}{\Pr(A)}$$

□

## 7 Variable aléatoire

**Définition 1** (Critère). Un critère sur  $\Omega$  est une application  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

On pose :

$$X(\Omega) := \{X(w_i) : w_i \in \Omega\}$$

$X(\Omega)$  exprime : "l'ensemble des valeurs possibles du critères  $X$ " sur  $\Omega$ .

**Définition 2** (Variable aléatoire). Une variable aléatoire (selon le critère  $X$ ) est une variable parcourant  $X(\Omega)$ .

Autrement dit,  $X(\Omega)$  est l'ensemble des valeurs que peut prendre une variable aléatoire (selon le critère  $X$ ).

**Notation 3.** Un abus courant est de confondre la variable aléatoire avec son critère :  $X$  est un critère sur  $\Omega$ , tout en étant une variable aléatoire selon ce critère. Nous suivons cet abus, comme il est de coutume. Par suite,

1.  $X \in X(\Omega)$  ;
2. Pour  $x \in \mathbb{R}$ , " $X = x$ " signifie : " $x$  est réalisée", i.e. :

$$\exists w \in \Omega, X(w) = x$$

3. Pour  $x \in \mathbb{R}$ , " $\Pr(X = x)$ " signifie : "la probabilité que  $x$  soit réalisée" ; autrement dit :

$$\Pr(X = x) := \frac{\#\{w \in \Omega : X(w) = x\}}{\#\Omega}$$

Il suit que :  $\forall x \in \mathbb{R} - X(\Omega)$ ,

$$\Pr(X = x) = 0$$

**Exemple 23** (Fil rouge). *On lance deux pièces.*

$$\Omega = \{FF, PF, FP, PP\}$$

*La variable aléatoire  $X$  quantifie le nombre de pile :*

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

*On a :*

$$\Pr(X = 0) = \frac{\#\{FF\}}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Pr(X = 1) = \frac{\#\{PF, FP\}}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Pr(X = 2) = \frac{\#\{PP\}}{4} = \frac{1}{4}$$

**Définition 24** (Loi de probabilité d'une variable aléatoire). *La loi de probabilité d'une variable aléatoire  $X$  est la fonction :*

$$\mathcal{L}_X : X(\Omega) \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \Pr(X = x)$$

**Exemple 25** (Fil rouge).

$$\mathcal{L}_X = \{ 0 \rightarrow \frac{1}{4}; \quad 1 \rightarrow \frac{1}{2}; \quad 2 \rightarrow \frac{1}{4} \}$$

**Définition 26** (Espérance).

$$E(X) := \sum_i x_i \cdot \Pr(X = x_i)$$

**Exemple 27** (Fil rouge).

$$E(X) = 0 \cdot \Pr(X = 0) + 1 \cdot \Pr(X = 1) + 2 \cdot \Pr(X = 2)$$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$E(X) = 1$$

*Autrement dit, pour chaque lancé de 2 pièces, on peut “espérer” avoir 1 pile.  
En pratique, cela signifie que si on effectue  $n$  lancers de 2 pièces, alors : si  $n$   
est “grand”, le nombre de piles est “proche” de  $n$ .*