

Algorithmique avancée

Version 3.4

Michaël Guedj



Algorithmique avancée de Michaël Guedj est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons Attribution 4.0 International.

Table des Matières

1	Rappels de logique	5
1.1	Logique propositionnelle	5
1.2	Logique des prédicats	5
2	Algorithmes sur tableaux	7
2.1	Un tableau est-il vide ?	7
2.2	Afficher les éléments d'un tableau	7
2.3	Afficher les éléments positifs d'un tableau	7
2.4	Retourner l'éléments maximum d'un tableau	8
2.5	Retourner l'indice de l'éléments maximum d'un tableau	8
2.6	Retourner la somme des éléments d'un tableau	8
2.7	Rechercher un élément dans un tableau	9
3	Algorithmes sur matrices	10
3.1	Afficher les éléments d'une matrice	10
3.2	Additionner deux matrices	10
3.3	La matrice est-elle diagonale ?	10
4	Complexité en temps	12
4.1	Approximation asymptotique	12
4.2	Complexités en temps classiques	12
5	Tris quadratiques	13
5.1	Algorithme d'échange	13
5.2	Tri par sélection	13
5.3	Tri à bulles	15
6	Récursivité	16
6.1	Considérations sur la récursivité	16
6.2	Exemple : la fonction factorielle	16
7	Calcul des termes de la suite Fibonacci	18
7.1	Définition	18
7.2	Approche récursive	18
7.3	Approche itérative	18
8	Théorème maître	20

9	Diviser pour régner – exponentiation rapide	24
9.1	Approche <i>Diviser pour régner</i>	24
9.2	Exponentiation rapide	24
10	Recherche dichotomique	26
11	Tri fusion	28
12	Tri comptage	32
12.1	Algorithme	32
12.2	Complexité	32
12.3	Exemple	34
13	Représentation des graphes	35
13.1	Considérations préliminaires	35
13.2	Représentation par matrice d’adjacence	35
13.3	Représentation par liste d’adjacence	35
13.4	Exemple	35
13.5	Espace mémoire	36
13.6	Complexité de quelques opérations	36
13.7	Choix d’utilisation	37
13.8	Relation entre sommets adjacents et arêtes	37
14	Arbres	39
14.1	Arbres – arbres binaires	39
14.1.1	Arbres binaires et profondeur	39
14.1.2	Arbres binaires parfaits	39
14.1.3	Parcours préfixe et infixe d’un arbre binaire	41
14.2	Arbre binaire de recherche	41
14.2.1	Définition	41
14.2.2	Recherche dans un ABR	42
14.3	Parcours infixe dans un ABR	42
15	Parcours de graphe en largeur et applications	43
15.1	Parcours en largeur (<i>Breadth First Search</i>)	43
15.2	Applications : graphe d’accessibilité et composantes connexes	43
15.2.1	Graphe d’accessibilité	43
15.2.2	Composantes connexes d’un graphe non orienté	43
15.3	Application : plus court chemin	44
16	Problème de l’arrêt	46

1 Rappels de logique

1.1 Logique propositionnelle

A	B	A and B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A	B	A or B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A	$\neg A$
1	0
0	1

$$A \Rightarrow B \equiv (\neg A \text{ or } B)$$

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$$A \Longleftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B \text{ and } B \Rightarrow A)$$

A	B	$A \Longleftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

1.2 Logique des prédicats

$$\neg(\forall x \in E, P(x)) \equiv \exists x \in E, \neg P(x)$$

$$\neg\left(\exists x \in E, P(x)\right) \equiv \forall x \in E, \neg P(x)$$

2 Algorithmes sur tableaux

2.1 Un tableau est-il vide ?

Algorithm 1 `est_vide` (t : tableau, n : taille du tableau)

```
1: if  $n = 0$  then  
2:   return True  
3: else  
4:   return False  
5: end if
```

Complexité : $O(1)$.

2.2 Afficher les éléments d'un tableau

Algorithm 2 `afficher_tableau` (t : tableau, n : taille du tableau)

```
1: for  $i \leftarrow 0, \dots, n - 1$  do  
2:   print( $t[i]$ )  
3: end for
```

Complexité : $O(n)$.

2.3 Afficher les éléments positifs d'un tableau

Algorithm 3 `afficher_positifs` (t : tableau, n : taille du tableau)

```
1: for  $i \leftarrow 0, \dots, n - 1$  do  
2:   if  $t[i] \geq 0$  then  
3:     print( $t[i]$ )  
4:   end if  
5: end for
```

Complexité : $O(n)$.

2.4 Retourner l'éléments maximum d'un tableau

Algorithm 4 maximum (t : tableau, n : taille du tableau)

```
1:  $max \leftarrow t[0]$  ▷ on suppose  $n > 0$ 
2: for  $i \leftarrow 1, \dots, n - 1$  do
3:   if  $t[i] \geq max$  then
4:      $max \leftarrow t[i]$ 
5:   end if
6: end for
7: return  $max$ 
```

Complexité : $O(n)$.

2.5 Retourner l'indice de l'éléments maximum d'un tableau

Algorithm 5 inidice_maximum (t : tableau, n : taille du tableau)

```
1:  $max \leftarrow t[0]$  ▷ on suppose  $n > 0$ 
2:  $iMax \leftarrow 0$ 
3: for  $i \leftarrow 1, \dots, n - 1$  do
4:   if  $t[i] \geq max$  then
5:      $max \leftarrow t[i]$ 
6:      $iMax \leftarrow i$ 
7:   end if
8: end for
9: return  $iMax$ 
```

Complexité : $O(n)$.

2.6 Retourner la somme des éléments d'un tableau

Algorithm 6 somme (t : tableau, n : taille du tableau)

```
1:  $res \leftarrow 0$ 
2: for  $i \leftarrow 0, \dots, n - 1$  do
3:    $res \leftarrow res + t[i]$ 
4: end for
5: return  $res$ 
```

Complexité : $O(n)$.

2.7 Rechercher un élément dans un tableau

Algorithm 7 recherche (t : tableau, n : taille du tableau, x : élément)

```
1: for  $i \leftarrow 0, \dots, n - 1$  do  
2:   if  $t[i] = x$  then  
3:     return True  
4:   end if  
5: end for  
6: return False
```

Complexité : $O(n)$.

3 Algorithmes sur matrices

3.1 Afficher les éléments d'une matrice

Algorithm 8 `afficher_matrice` (A : matrice $n \times m$)

```
1: for  $i \leftarrow 0, \dots, n-1$  do                                ▷ parcours des lignes
2:   for  $j \leftarrow 0, \dots, m-1$  do                            ▷ parcours des colonnes
3:     print( $A_{i,j}$ )
4:   end for
5:   print("\\n")                                ▷ échappement pour une nouvelle ligne
6: end for
```

Complexité : $O(n \times m)$.

Cas d'une matrice carré $n \times n$: $O(n^2)$.

3.2 Additionner deux matrices

Algorithm 9 `additionner` (A, B : matrice $n \times m$)

```
1:  $C \leftarrow$  matrice  $n \times m$ 
2: for  $i \leftarrow 0, \dots, n-1$  do
3:   for  $j \leftarrow 0, \dots, m-1$  do
4:      $C_{i,j} \leftarrow A_{i,j} + B_{i,j}$ 
5:   end for
6: end for
7: return  $C$ 
```

Complexité : $O(n \times m)$.

3.3 La matrice est-elle diagonale ?

Définition. La matrice carré $n \times n$, soit M , est diagonale si :

$$\forall i, j \in \{0, \dots, n-1\}, i \neq j \Rightarrow M_{i,j} = 0$$

Lemme. La matrice carré $n \times n$, soit M , n'est pas diagonale si :

$$\exists i, j \in \{0, \dots, n-1\}, i \neq j \text{ and } M_{i,j} \neq 0$$

Preuve.

$$A \equiv \text{not } \left(\forall i, j \in \{0, \dots, n-1\}, i \neq j \Rightarrow M_{i,j} = 0 \right)$$

$$\begin{aligned}
A &\equiv \exists i, j \in \{0, \dots, n-1\}, \text{ not } (i \neq j \Rightarrow M_{i,j} = 0) \\
A &\equiv \exists i, j \in \{0, \dots, n-1\}, \text{ not } \left(\text{not } (i \neq j) \text{ or } (M_{i,j} = 0) \right) \\
A &\equiv \exists i, j \in \{0, \dots, n-1\}, (i \neq j) \text{ and } \text{not } (M_{i,j} = 0) \\
A &\equiv \exists i, j \in \{0, \dots, n-1\}, i \neq j \text{ and } M_{i,j} \neq 0
\end{aligned}$$

□

Algorithm 10 `est_diagonale` (M : matrice $n \times n$)

```

1: for  $i \leftarrow 0, \dots, n-1$  do
2:   for  $j \leftarrow 0, \dots, n-1$  do
3:     if  $i \neq j$  and  $M_{i,j} \neq 0$  then
4:       return False
5:     end if
6:   end for
7: end for
8: return True

```

Complexité : $O(n^2)$.

4 Complexité en temps

4.1 Approximation asymptotique

Définition (Notation grand O). Soient f et g , deux suites de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$.
 $f \in O(g)$ si :

$$\exists K \in \mathbb{R}^{*+}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tels que :}$$

$$\forall n \geq n_0, f(n) \leq K.g(n)$$

Autrement dit, $f(n) \leq K.g(n)$ à partir d'un certain rang.

Exemples.

- $7n - 3 \in O(n)$
- $7n - 3 \in O(n^2)$

Remarque 1. *Le but est de trouver l'approximation la plus petite possible.*

4.2 Complexités en temps classiques

Complexité	Notation asymptotique	Exemple
Logarithmique	$O(\log n)$	Recherche dichotomique dans un tableau trié.
Linéaire	$O(n)$	Recherche séquentielle dans un tableau.
Quasi-linéaire	$O(n \log n)$	Tri fusion.
Quadratique	$O(n^2)$	Tri sélection; tri à bulles.
Polynomiale	$O(n^k), k \geq 0$...
Exponentielle	$O(\alpha^n), \alpha > 1$	Algorithme récursif pour Fibonacci.
Factorielle	$O(n!)$	Résolution des n -reines par <i>backtracking</i> .

5 Tris quadratiques

5.1 Algorithme d'échange

Algorithm 11 `echanger`(t : tableau, i, j : entiers)

```
1:  $tmp \leftarrow t[i]$ 
2:  $t[i] \leftarrow t[j]$ 
3:  $t[j] \leftarrow tmp$ 
```

5.2 Tri par sélection

Algorithm 12 `tri_selection`(t : tableau, n : taille du tableau)

```
1: for  $i \leftarrow 0, \dots, n-2$  do
2:    $i_{min} \leftarrow \text{indice\_min\_sous\_tab}(t, i, n-1)$ 
3:   echanger( $t, i, i_{min}$ )
4: end for
```

Algorithm 13 `indice_min_sous_tab`(t : tableau, a, b : entiers)

```
1:  $i_{min} \leftarrow a$ 
2: for  $i \leftarrow a+1, \dots, b$  do
3:   if  $t[i] < t[i_{min}]$  then
4:      $i_{min} \leftarrow i$ 
5:   end if
6: end for
7: return  $i_{min}$ 
```

Théorème. La complexité de `tri_selection` est en $O(n^2)$.

Preuve. Calcul du nombre de comparaisons, soit $\mathcal{C}(n)$, de `tri_selection` (ligne 3 de l'algorithme 13).

$$\mathcal{C}(n) = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} 1$$

$$\mathcal{C}(n) = \sum_{i=0}^{n-2} \left((n-1) - (i+1) + 1 \right)$$

$$\mathcal{C}(n) = \sum_{i=0}^{n-2} (n-1-i-1+1)$$

$$\mathcal{C}(n) = \sum_{i=0}^{n-2} (n-1-i)$$

$$\mathcal{C}(n) = \sum_{i=0}^{n-2} (n-1) - \sum_{i=0}^{n-2} i$$

$$\mathcal{C}(n) = (n-1) \sum_{i=0}^{n-2} 1 - \sum_{i=0}^{n-2} i$$

$$\mathcal{C}(n) = (n-1)(n-1) - \sum_{i=0}^{n-2} i$$

$$\mathcal{C}(n) = (n-1)^2 - \sum_{i=0}^{n-2} i$$

$$\mathcal{C}(n) = (n-1)^2 - \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

$$\mathcal{C}(n) = (n-1) \left((n-1) - \frac{(n-2)}{2} \right)$$

$$\mathcal{C}(n) = (n-1) \left(\frac{2 \cdot (n-1) - (n-2)}{2} \right)$$

$$\mathcal{C}(n) = (n-1) \left(\frac{2n-2-n+2}{2} \right)$$

$$\mathcal{C}(n) = (n-1) \frac{n}{2}$$

$$\mathcal{C}(n) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = O(n^2)$$

□

5.3 Tri à bulles

Algorithm 14 `tri_à_bulles`(t : tableau, n : taille du tableau)

```
1: for  $i \leftarrow n - 1, \dots, 1$  do
2:   for  $j \leftarrow 0, \dots, i - 1$  do
3:     if  $t[j + 1] < t[j]$  then
4:       echanger( $t, j + 1, j$ )
5:     end if
6:   end for
7: end for
```

Théorème. *La complexité de `tri_à_bulles` est en $O(n^2)$.*

Preuve. Calcul du nombre de comparaisons, soit $\mathcal{C}(n)$, de `tri_à_bulles` (ligne 4 de Algorithme 14).

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(n) &= \sum_{i=n-1}^1 \sum_{j=0}^{i-1} 1 = \sum_{i=n-1}^1 (i - 1 - 0 + 1) = \sum_{i=n-1}^1 i \\ \mathcal{C}(n) &= \frac{(n-1+1)(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = O(n^2)\end{aligned}$$

□

6 Récursivité

6.1 Considérations sur la récursivité

La version itérative d'un traitement est souvent à préférer.

En effet :

- un dépassement de pile (*stack overflow*) peut se produire ;
- l'exécution d'une version récursive d'un algorithme est généralement un peu moins rapide que celle de la version itérative correspondante ; et ce même si le nombre d'instructions est le même (à cause de la gestion des appels de fonction) ;
- un algorithme récursif (naïf) peut conduire à exécuter bien plus d'instructions que la version itérative correspondante (cas du calcul de la suite de Fibonacci).

En revanche, la récursivité peut être adaptée dans certains cas.

En effet :

- sur des structures de données naturellement récursives, il est plus facile d'écrire des algorithmes récursifs qu'itératifs ;
- certains algorithmes sont, en outre, difficiles à écrire en itératif.

6.2 Exemple : la fonction factorielle

Définition (fonction factorielle). La fonction factorielle est définie, sur \mathbb{N} , par :

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = \prod_{i=1}^n i = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Définition (définition récursive de la fonction factorielle).

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \times (n-1)! & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Algorithm 15 $\text{fact}(n \in \mathbb{N})$

```
1: if  $n = 0$  then
2:   return 1
3: else
4:   return  $n \times \text{fact}(n-1)$ 
5: end if
```

Complexité : $O(n)$.

Algorithm 16 `fact_it`($n \in \mathbb{N}$)

```
1:  $res \leftarrow 1$ 
2: for  $i \leftarrow 1, \dots, n$  do
3:    $res \leftarrow res \times i$ 
4: end for
5: return  $res$ 
```

Complexité : $O(n)$.

7 Calcul des termes de la suite Fibonacci

7.1 Définition

Définition (suite de Fibonacci).

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

7.2 Approche récursive

Algorithm 17 `fibo_rec`($n \in \mathbb{N}$)

```
1: if  $n = 0$  then
2:   return 0
3: else if  $n = 1$  then
4:   return 1
5: else
6:   return fibo_rec( $n - 1$ ) + fibo_rec( $n - 2$ )
7: end if
```

Théorème. La complexité de `fibo_rec` est en $O(\phi^n)$; où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or.

Preuve. Admis. □

7.3 Approche itérative

Algorithm 18 `fibo_it`($n \in \mathbb{N}$)

```
1:  $F \leftarrow$  tableau de  $n + 1$  éléments
2:  $F[0] \leftarrow 0$ 
3:  $F[1] \leftarrow 1$ 
4: for  $i \leftarrow 2, \dots, n$  do
5:    $F[i] \leftarrow F[i - 1] + F[i - 2]$ 
6: end for
7: return  $F[n]$ 
```

Théorème. La complexité de `fibo_it` est en $O(n)$.

Preuve. – Nombre d'affectations : $O(n)$.

– Nombre d'additions : $O(n)$.

□

8 Théorème maître

Théorème. Soient $a, b, d \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$, $b \geq 2$; soit la fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par :

$$f(n) = \begin{cases} O(1) & \text{si } n \leq 1 \\ a.f(n/b) + O(n^d) & \text{si } n \geq b \end{cases}$$

alors :

$$f(n) = \begin{cases} O(n^d) & \text{si } a < b^d \\ O(n^d \cdot \log n) & \text{si } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^d \end{cases}$$

Preuve.

$$f(n) = a.f\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^d)$$

$$f(n) = a.\left(a.f\left(\frac{n}{b^2}\right) + O\left(\frac{n^d}{b^d}\right)\right) + O(n^d)$$

$$f(n) = a^2.f\left(\frac{n}{b^2}\right) + a.O\left(\frac{n^d}{b^d}\right) + O(n^d)$$

$$f(n) = a^2.\left(a.f\left(\frac{n}{b^3}\right) + O\left(\frac{n^d}{b^{2.d}}\right)\right) + a.O\left(\frac{n^d}{b^d}\right) + O(n^d)$$

$$f(n) = a^3.f\left(\frac{n}{b^3}\right) + a^2.O\left(\frac{n^d}{b^{2.d}}\right) + a.O\left(\frac{n^d}{b^d}\right) + O(n^d)$$

$$f(n) = a^3.\left(a.f\left(\frac{n}{b^4}\right) + O\left(\frac{n^d}{b^{3.d}}\right)\right) + a^2.O\left(\frac{n^d}{b^{2.d}}\right) + a.O\left(\frac{n^d}{b^d}\right) + O(n^d)$$

$$f(n) = a^4.f\left(\frac{n}{b^4}\right) + a^3.O\left(\frac{n^d}{b^{3.d}}\right) + a^2.O\left(\frac{n^d}{b^{2.d}}\right) + a.O\left(\frac{n^d}{b^d}\right) + O(n^d)$$

C'est-à-dire

$$f(n) = a^4.f\left(\frac{n}{b^4}\right) + \sum_{i=0}^3 a^i.O\left(\frac{n^d}{b^{i.d}}\right)$$

Au rang k , on trouve

$$f(n) = a^k.f\left(\frac{n}{b^k}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} a^i.O\left(\frac{n^d}{b^{i.d}}\right)$$

On a

$$\frac{n}{b^k} = 1 \iff n = b^k \iff \log_b n = k$$

D'où

$$f(n) = a^{\log_b n} \cdot f(1) + \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \cdot O\left(\frac{n^d}{b^{i \cdot d}}\right)$$

$$f(n) = a^{\log_b n} \cdot O(1) + \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \cdot O\left(\frac{n^d}{b^{i \cdot d}}\right)$$

On a

$$a^{\log_b n} = e^{\ln a \cdot \ln n \cdot \frac{1}{\ln b}} = n^{\log_b a}$$

D'où

$$f(n) = n^{\log_b a} \cdot O(1) + \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \cdot O\left(\frac{n^d}{b^{i \cdot d}}\right)$$

On a

$$\sum_{i=0}^{\log_b n - 1} a^i \cdot O\left(\frac{n^d}{b^{i \cdot d}}\right) = \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} n^d \cdot O\left(\frac{a^i}{b^{i \cdot d}}\right) = n^d \cdot \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} O\left(\left(\frac{a}{b^d}\right)^i\right)$$

Soit

$$f(n) = n^{\log_b a} \cdot O(1) + n^d \cdot \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} O\left(\left(\frac{a}{b^d}\right)^i\right)$$

(i) Cas : $a = b^d$

$$f(n) = n^{\log_b b^d} \cdot O(1) + n^d \cdot \sum_{i=0}^{\log_b n - 1} O(1)$$

$$f(n) = n^d \cdot O(1) + n^d \cdot O(\log_b n)$$

$$f(n) = O(n^d \cdot \log n)$$

(ii) Cas : $a < b^d$

Alors $\frac{a}{b^d} < 1$, donc

$$\sum_{i=0}^{\log_b n - 1} O\left(\left(\frac{a}{b^d}\right)^i\right) = O\left(\frac{1 - \left(\frac{a}{b^d}\right)^{\log_b n}}{1 - \frac{a}{b^d}}\right)$$

$$\sum_{i=0}^{\log_b n - 1} O\left(\left(\frac{a}{b^d}\right)^i\right) = O\left(\frac{1}{1 - \frac{a}{b^d}}\right)$$

$$\sum_{i=0}^{\log_b n - 1} O\left(\left(\frac{a}{b^d}\right)^i\right) = O(1)$$

D'où

$$f(n) = n^{\log_b a} \cdot O(1) + n^d \cdot O(1)$$

En outre,

$$a < b^d \iff \log_b a < \log_b b^d = d$$

D'où

$$f(n) = O(n^d) \cdot O(1) + n^d \cdot O(1)$$

$$f(n) = O(n^d)$$

(iii) Cas : $a > b^d$

On a

$$\sum_{i=0}^{\log_b n - 1} O\left(\left(\frac{a}{b^d}\right)^i\right) = O\left(\frac{1 - \left(\frac{a}{b^d}\right)^{\log_b n}}{1 - \frac{a}{b^d}}\right)$$

$$\sum_{i=0}^{\log_b n - 1} O\left(\left(\frac{a}{b^d}\right)^i\right) = O\left(\frac{\left(\frac{a}{b^d}\right)^{\log_b n} - 1}{\frac{a}{b^d} - 1}\right)$$

$$\sum_{i=0}^{\log_b n - 1} O\left(\left(\frac{a}{b^d}\right)^i\right) = O\left(\frac{1}{\frac{a}{b^d} - 1} \cdot \left(\left(\frac{a}{b^d}\right)^{\log_b n} - 1\right)\right)$$

$$\sum_{i=0}^{\log_b n - 1} O\left(\left(\frac{a}{b^d}\right)^i\right) = O\left(\left(\frac{a}{b^d}\right)^{\log_b n}\right)$$

$$\sum_{i=0}^{\log_b n - 1} O\left(\left(\frac{a}{b^d}\right)^i\right) = O\left(\frac{a^{\log_b n}}{(b^d \cdot \log_b n)}\right) = O\left(\frac{a^{\log_b n}}{(b^{\log_b n})^d}\right)$$

$$\sum_{i=0}^{\log_b n - 1} O\left(\left(\frac{a}{b^d}\right)^i\right) = O\left(\frac{a^{\log_b n}}{n^d}\right)$$

On a donc

$$f(n) = n^{\log_b a} \cdot O(1) + n^d \cdot O\left(\frac{a^{\log_b n}}{n^d}\right)$$

$$f(n) = n^{\log_b a} \cdot O(1) + O\left(\frac{n^d \cdot a^{\log_b n}}{n^d}\right)$$

$$f(n) = n^{\log_b a} \cdot O(1) + O(a^{\log_b n})$$

Comme $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$, on obtient

$$f(n) = n^{\log_b a} \cdot O(1) + O(n^{\log_b a})$$

Soit

$$f(n) = O(n^{\log_b a})$$

□

9 Diviser pour régner – exponentiation rapide

9.1 Approche *Diviser pour régner*

Principe.

1. **Diviser** : découper le problème à résoudre en a sous-problèmes (de taille n/b chacun);
2. **Régner** : résoudre *récurivement* les a sous-problèmes ;
3. **Combiner** : à partir des solutions des a sous-problèmes, calculer en $O(n^d)$ une solution au problème à résoudre.

La complexité peut alors se traduire par l'équation :

$$t(n) = a.t(n/b) + O(n^d)$$

(plus généralement par l'équation $t(n) = a.t(n/b) + O(\tau(n))$ avec $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$).

9.2 Exponentiation rapide

Théorème. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ (x^2)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n > 0 \text{ et } n \equiv 0 \pmod{2} \\ x.(x^2)^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n > 0 \text{ et } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

Preuve. – Si $n > 0$ et $n \equiv 0 \pmod{2}$, alors $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2.k$. On a $k = \frac{n}{2}$ et

$$x^n = x^{2.k} = (x^2)^k = (x^2)^{\frac{n}{2}}$$

– Si $n > 0$ et $n \equiv 1 \pmod{2}$, alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2.k + 1$. On a $k = \frac{n-1}{2}$ et

$$x^n = x^{2.k+1} = x^{2.k}.x^1 = x.(x^2)^k = x.(x^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

□

Algorithm 19 exp_rapide(x, n)

```
1: if  $n = 0$  return 1 end if
2:
3: if  $n \equiv 0 \pmod{2}$  then
4:   return exp_rapide( $x.x, \frac{n}{2}$ )
5: else
6:   return  $x \times$  exp_rapide( $x.x, \frac{n-1}{2}$ )
7: end if
```

Théorème. *La complexité de `exp_rapide` est en $O(\log n)$.*

Preuve. Soit $\mathcal{C}(n)$ le nombre de comparaisons pour une instance de taille n .

On a,

$$\mathcal{C}(n) = \mathcal{C}(n/2) + O(1)$$

On invoque le théorème maître avec $a = 1$, $b = 2$ et $d = 0$. On a

$$a = 1 = 2^d$$

D'où

$$\mathcal{C}(n) = O(n^d \cdot \log n)$$

Comme $n^0 = 1$, on trouve

$$\mathcal{C}(n) = O(\log n)$$

□

10 Recherche dichotomique

Algorithm 20 `dicho_init`(t : tableau, n : taille du tableau, x : élément)

```
1:  $d \leftarrow 0$ 
2:  $f \leftarrow n - 1$ 
3: return dicho( $t, d, f, x$ )
```

Algorithm 21 `dicho`(t : tableau, d, f : indices, x : élément)

```
1: if  $d > f$  then return  $-1$  end if ▷ non trouvé
2: if  $f = d$  then
3:   if  $t[d] = x$  then return  $d$  else return  $-1$  end if
4: end if
5:  $m \leftarrow \lfloor \frac{d+f}{2} \rfloor$  ▷ partie entière
6: if  $t[m] = x$  then
7:   return  $m$ 
8: end if
9: if  $t[m] < x$  then
10:  return dicho( $t, m + 1, f, x$ )
11: else
12:  return dicho( $t, d, m - 1, x$ )
13: end if
```

Théorème. *La complexité de `dicho` est en $O(\log n)$.*

Preuve. Soit $\mathcal{C}(n)$ le nombre de comparaisons pour une instance de taille n .
On a,

$$\mathcal{C}(n) = \mathcal{C}(n/2) + O(1)$$

On invoque le théorème maître avec $a = 1$, $b = 2$ et $d = 0$. On a

$$a = 1 = 2^d$$

D'où

$$\mathcal{C}(n) = O(n^d \cdot \log n)$$

Comme $n^0 = 1$, on trouve

$$\mathcal{C}(n) = O(\log n)$$

□

Deuxième preuve. Soit $\mathcal{C}(n)$ le nombre de comparaisons pour une instance de taille n . On a,

$$\mathcal{C}(n) = \gamma + \mathcal{C}\left(\frac{n}{2}\right) \quad (\gamma \text{ constante})$$

La deuxième instance appelée vérifie :

$$\mathcal{C}\left(\frac{n}{2}\right) = \gamma + \mathcal{C}\left(\frac{n}{4}\right)$$

D'où,

$$\mathcal{C}(n) = \gamma + \mathcal{C}\left(\frac{n}{2}\right) = \gamma + \left(\gamma + \mathcal{C}\left(\frac{n}{4}\right)\right) = 2\gamma + \mathcal{C}\left(\frac{n}{4}\right)$$

Soit,

$$\underline{\mathcal{C}(n) = 2\gamma + \mathcal{C}\left(\frac{n}{2^2}\right)}$$

La troisième instance appelée vérifie :

$$\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^2}\right) = \gamma + \mathcal{C}\left(\frac{n}{2^3}\right)$$

D'où,

$$\underline{\mathcal{C}(n) = 3\gamma + \mathcal{C}\left(\frac{n}{2^3}\right)}$$

Par suite, $\mathcal{C}(n)$ s'écrit :

$$\underline{\mathcal{C}(n) = k\gamma + \mathcal{C}\left(\frac{n}{2^k}\right)}$$

On a :

$$\frac{n}{2^k} = 1 \Rightarrow \underline{\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^k}\right) = O(1)}$$

Et :

$$\frac{n}{2^k} = 1 \iff n = 2^k \iff \underline{\log_2 n = k}$$

$\mathcal{C}(n)$ s'écrit alors :

$$\mathcal{C}(n) = k\gamma + \mathcal{C}\left(\frac{n}{2^k}\right) = \log_2(n)\gamma + O(1) \in O(\log n)$$

□

11 Tri fusion

Algorithm 22 tri_fusion(lst : liste de taille n)

```

1: if  $n = 1$  return  $lst$  end if
2:  $m = \lfloor n/2 \rfloor$  ▷ Partie entière.
3:  $lst_1 \leftarrow \text{tri\_fusion}(lst[0 \rightarrow m - 1])$ 
4:  $lst_2 \leftarrow \text{tri\_fusion}(lst[m \rightarrow n - 1])$ 
5: return fusion( $lst_1, lst_2$ )

```

Algorithm 23 fusion(lst_1 : liste de taille n_1 , lst_2 : liste de taille n_2)

```

1:  $res \leftarrow [ ]$ 
2: while not ( $\text{est\_vide}(lst_1)$  and  $\text{est\_vide}(lst_2)$ ) do
3:   if  $\text{est\_vide}(lst_1)$  then
4:      $res \leftarrow res + lst_2$ 
5:      $lst_2 \leftarrow [ ]$ 
6:   else if  $\text{est\_vide}(lst_2)$  then
7:      $res \leftarrow res + lst_1$ 
8:      $lst_1 \leftarrow [ ]$ 
9:   else if  $\text{head}(lst_1) \leq \text{head}(lst_2)$  then
10:     $res \leftarrow res + [ \text{head}(lst_1) ]$ 
11:     $lst_1 \leftarrow \text{tail}(lst_1)$ 
12:   else
13:     $res \leftarrow res + [ \text{head}(lst_2) ]$ 
14:     $lst_2 \leftarrow \text{tail}(lst_2)$ 
15:   end if
16: end while
17: return  $res$ 

```

Théorème. *L'algorithme fusion termine.*

Preuve. L'algorithme termine lorsque les listes lst_1 et lst_2 sont vides.

Soit la prédicat P quantifiant, pour chaque tour de boucle i , la somme des tailles des liste lst_1 et lst_2 ; formellement

$$P(i) := |lst_1^i| + |lst_2^i|$$

où lst_1^i (resp. lst_2^i) correspond à la liste lst_1 (resp. lst_2) au i -ème tour de boucle.

Par l'absurde (descente infinie), on suppose que l'algorithme ne termine pas, i.e., $\forall i \in \mathbb{N}, P(i) > 0$.

On vérifie que le prédicat P assure : $\forall i \in \mathbb{N}, P(i) > P(i+1)$.

On considère la suite $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall i \in \mathbb{N}, P_i = P(i)$.

Ainsi, la suite $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est

(i) à valeur entière ($P : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$) ;

(ii) infinie ;

(iii) strictement décroissante.

D'où la fausseté de l'hypothèse de non terminaison de l'algorithme ($\forall i \in \mathbb{N}, P(i) > 0$).

Conclusion : l'algorithme termine ($\exists i \in \mathbb{N}, P(i) = 0$). \square

Théorème. *La complexité de fusion est en $O(n)$.*

Proof. On a

$$t(n) = O(1) + \text{boucle}(0, lst_1^0, lst_2^0)$$

et

$$\text{boucle}(i, lst_1^i, lst_2^i) = \begin{cases} O(1) & \text{si } |lst_1^i| = |lst_2^i| = 0 \\ O(1) & \text{si } |lst_1^i| = 0 \text{ ou } |lst_2^i| = 0 \\ O(1) + \text{boucle}(i, lst_1^{i+1}, lst_2^{i+1}) & \text{sinon ; avec :} \\ & |lst_1^{i+1}| + |lst_2^{i+1}| = |lst_1^i| + |lst_2^i| - 1 \end{cases}$$

On associe la suite $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$; u_j quantifiant le temps en fonction de $|lst_1^j| + |lst_2^j|$:

$$u_j = \begin{cases} O(1) & \text{si } j = 0 \\ O(1) + u_{j-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $n = |lst_1^0| + |lst_2^0|$ et

$$t(n) = O(1) + u_n$$

On calcule u_n .

$$u_n = O(1) + u_{n-1}$$

$$u_n = O(1) + (O(1) + u_{n-2})$$

$$u_n = 2.O(1) + u_{n-2}$$

...

$$u_n = k.O(1) + u_{n-k}$$

Soit

$$u_n = n.O(1) + u_0$$

$$u_n = n.O(1) + O(1)$$

$$u_n = O(n)$$

D'où

$$t(n) = O(n)$$

□

Théorème. *La complexité de `tri_fusion` est en $O(n \log n)$.*

Preuve. Soit $\mathcal{C}(n)$ le nombre de comparaisons pour une instance de taille n .

On a

$$\mathcal{C}(n) = 2.\mathcal{C}(n/2) + O(n)$$

On invoque le théorème maître avec $a = 2$, $b = 2$ et $d = 1$. On a

$$a = 2 = 2^d$$

D'où

$$\mathcal{C}(n) = O(n^d \cdot \log n)$$

C'est-à-dire

$$\mathcal{C}(n) = O(n \cdot \log n)$$

□

Deuxième preuve. Soit $\mathcal{C}(n)$ le nombre de comparaisons pour une instance de taille n .

$$\mathcal{C}(n) = 1 + 2.\mathcal{C}\left(\frac{n}{2}\right) + \gamma.n$$

Où γ est une constante. On a de même :

$$\mathcal{C}\left(\frac{n}{2}\right) = 1 + 2.\mathcal{C}\left(\frac{n}{4}\right) + \gamma.\frac{n}{2}$$

Soit :

$$\mathcal{C}(n) = 1 + 2.\left(1 + 2.\mathcal{C}\left(\frac{n}{4}\right) + \gamma.\frac{n}{2}\right) + \gamma.n$$

$$\mathcal{C}(n) = 1 + 2 + 4.\mathcal{C}\left(\frac{n}{4}\right) + \gamma.n + \gamma.n$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(n) &= 4.\mathcal{C}\left(\frac{n}{4}\right) + 2\gamma.n + 3 \\
\mathcal{C}(n) &= 2^2.\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2\gamma.n + (2+1) \\
\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^2}\right) &= 1 + 2.\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^3}\right) + \gamma.\frac{n}{2^2} \\
\mathcal{C}(n) &= 2^2.\left(1 + 2.\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^3}\right) + \gamma.\frac{n}{2^2}\right) + 2\gamma.n + (2+1) \\
\mathcal{C}(n) &= 2^2 + 2^2.2.\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^3}\right) + \gamma.n + 2\gamma.n + (2+1) \\
\mathcal{C}(n) &= 2^3.\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^3}\right) + 3\gamma.n + (2^2 + 2 + 1) \\
\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^3}\right) &= 1 + 2.\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^4}\right) + \gamma.\frac{n}{2^3} \\
\mathcal{C}(n) &= 2^3.\left(1 + 2.\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^4}\right) + \gamma.\frac{n}{2^3}\right) + 3\gamma.n + (2^2 + 2 + 1) \\
\mathcal{C}(n) &= 2^3 + 2^3.2.\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^4}\right) + 2^3.\gamma.\frac{n}{2^3} + 3\gamma.n + (2^2 + 2 + 1) \\
\mathcal{C}(n) &= 2^3 + 2^4.\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^4}\right) + \gamma.n + 3\gamma.n + (2^2 + 2 + 1) \\
\mathcal{C}(n) &= 2^4.\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^4}\right) + 4\gamma.n + (2^3 + 2^2 + 2 + 1)
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\mathcal{C}(n) = 2^t.\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^t}\right) + t.\gamma.n + (2^t + \dots + 2^2 + 2 + 1)$$

On a :

$$2^t + \dots + 2^2 + 2 + 1 = \frac{2^{t+1} - 1}{2 - 1} = 2^{t+1} - 1$$

D'où,

$$\mathcal{C}(n) = 2^t.\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^t}\right) + t.\gamma.n + 2^{t+1} - 1$$

On a :

$$\frac{n}{2^t} = 1 \iff n = 2^t \iff t = \log_2 n$$

Et $\mathcal{C}(1) = 1$; d'où :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(n) &= 2^{\log_2 n}.1 + \log_2(n).\gamma.n + 2^{\log_2(n)+1} - 1 \\
\mathcal{C}(n) &= n + n.\log_2(n).\gamma + 2^{\log_2(n)}.2 - 1 \\
\mathcal{C}(n) &= n + n.\log_2(n).\gamma + 2.n - 1 \\
\mathcal{C}(n) &= n.\log_2(n).\gamma + 3.n - 1 \in O(n \log n)
\end{aligned}$$

□

12 Tri comptage

12.1 Algorithme

Le tri comptage (ou tri casier, ou encore *counting sort* en anglais) est un algorithme de tri par dénombrement, qui s'applique sur des valeurs entières. Le principe repose sur :

- (i) la construction d'un histogramme des données ;
- (ii) le balayage de cet histogramme, afin de reconstruire les données triées.

Nous donnons, ci-dessous, l'algorithme. Noter que : *tab* est un tableau de n éléments (indexés à partir de 0), et M est la valeur maximale de *tab* (connue *a priori*).

Algorithm 24 `tri_comptage`(*tab* : tableau de n éléments, M : entier)

```
1: histo  $\leftarrow$  tableau de  $M + 1$  éléments
2:                                      $\triangleright$  Initialisation de l'histogramme à 0
3: for  $i \leftarrow 0, \dots, M$  do
4:   histo[ tab[ $i$ ] ]  $\leftarrow$  0
5: end for
6:                                      $\triangleright$  Remplissage de l'histogramme
7: for  $i \leftarrow 0, \dots, n - 1$  do
8:   histo[ tab[ $i$ ] ]  $\leftarrow$  histo[ tab[ $i$ ] ] + 1
9: end for
10:                                      $\triangleright$  Remplissage du tableau trié
11: cpt  $\leftarrow$  0
12: for  $i \leftarrow 0, \dots, M$  do
13:   for  $j \leftarrow 0, \dots, \textit{histo}[i] - 1$  do
14:     tab[cpt]  $\leftarrow$   $i$ 
15:     cpt  $\leftarrow$  cpt + 1
16:   end for
17: end for
```

12.2 Complexité

Théorème. `tri_comptage` est en $O(n + M)$.

Preuve. (i) Première boucle : $O(M)$ affectations.

(ii) Deuxième boucle : $O(n)$ affectations.

(iii) Calcul du nombre d'affectations, soit \mathcal{C} , de la troisième boucle. On a :

$$\mathcal{C} = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^{histo[i]-1} 2$$

$$\mathcal{C} = 2 \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^{histo[i]-1} 1$$

$$\mathcal{C} = 2 \sum_{i=0}^M \max\{|histo[i]|, 1\}$$

On pose :

$$K := \{k \in \{0, \dots, M\} : histo[k] \neq 0\}$$

On a :

$$\mathcal{C} = 2 \left(\sum_{i \in K} |histo[i]| + \sum_{i \in \{0, \dots, M\} - K} 1 \right)$$

On remarque que :

$$\sum_{i \in K} |histo[i]| = n$$

D'où,

$$\mathcal{C} = 2 \left(n + \sum_{i \in \{0, \dots, M\} - K} 1 \right)$$

Mais,

$$\sum_{i \in \{0, \dots, M\} - K} 1 \leq M$$

Soit,

$$\mathcal{C} \leq 2(n + M)$$

D'où,

$$\mathcal{C} = O(n + M)$$

□

12.3 Exemple

Pour trier le tableau suivant par le tri comptage.

Indice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Valeur	3	0	0	2	5	1	3	1	1	5	5	2	2	0	1	2	2	2	7	1

On passe par la construction de l'histogramme :

Indice	0	1	2	3	4	5	6	7
Valeur	3	5	6	2	0	3	0	1

13 Représentation des graphes

13.1 Considérations préliminaires

Soit un graphe $G = (S, A)$ tel que : $|S| = n$ et $|A| = m$ (avec $n, m \in \mathbb{N}$). Les sommets de G sont numérotés de 0 à $n - 1$.

13.2 Représentation par matrice d'adjacence

Définition. La matrice d'adjacence du graphe G , soit M , est une matrice booléenne de type $n \times n$ vérifiant :

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont adjacents} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $i, j \in \{0, \dots, n - 1\}$, si s_i est le i -ième sommet, et si s_j est le j -ième sommet, alors :

$$M_{i,j} = 1 \iff (s_i, s_j) \in A$$

13.3 Représentation par liste d'adjacence

Définition. La liste d'adjacence du graphe G , soit **succ**, est une liste indexée par les sommets de G , et telle que :

$$\forall s \in S, \text{succ}(s) = \{s' : (s, s') \in A\}$$

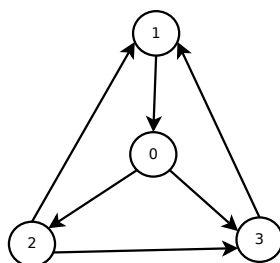
Autrement dit, $\forall s \in S$, **succ**(s) est l'ensemble des sommets adjacents à s .

13.4 Exemple

Soit le graphe $G = (S, A)$, défini par :

$$\begin{cases} S = \{0, 1, 2, 3\} \\ A = \{(0, 2), (0, 3), (1, 0), (2, 1), (2, 3), (3, 1)\} \end{cases}$$

Un tel graphe peut être représenté comme suit :



Les représentations par matrice et liste d'adjacence sont données ci-après.

Matrice d'adjacence	Liste d'adjacence								
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	<table> <tr> <td>0</td><td>{2, 3}</td></tr> <tr> <td>1</td><td>{0}</td></tr> <tr> <td>2</td><td>{1, 3}</td></tr> <tr> <td>3</td><td>{1}</td></tr> </table>	0	{2, 3}	1	{0}	2	{1, 3}	3	{1}
0	{2, 3}								
1	{0}								
2	{1, 3}								
3	{1}								

13.5 Espace mémoire

Matrice d'adjacence	Liste d'adjacence
$O(n^2)$	$O(n + m)$

13.6 Complexité de quelques opérations

Opérations	Matrice d'adjacence	Liste d'adjacence
Tester l'existence d'un arc $s \rightarrow s'$	$O(1)$	$O(\text{succ}(s))$
Retourner les sommets adjacents à un sommet	$O(n)$	$O(1)$
Parcourir l'ensemble des arcs	$O(n^2)$	$O(m)$

13.7 Choix d'utilisation

- D'une manière générale, on considère que si le graphe a "peu" d'arêtes, il est plus intéressant d'utiliser une représentation par liste d'adjacence, plutôt que par matrice d'adjacence (qui contiendrait alors beaucoup de 0).
- Mais si le graphe a "beaucoup" d'arêtes, il est plus intéressant d'utiliser une matrice d'adjacence.

13.8 Relation entre sommets adjacents et arêtes

Définition. Soit la fonction $\widetilde{\text{succ}}$, définie par

$$\widetilde{\text{succ}} : S \rightarrow A$$

$$s \mapsto \widetilde{\text{succ}}(s) := \{(s, s') : s' \in \text{succ}(s)\}$$

qui associe, à chaque sommet, l'ensemble des arêtes qui lui sont adjacentes.

Théorème. Si le graphe G est orienté,

$$\sum_{s \in S} |\widetilde{\text{succ}}(s)| = |A|$$

Preuve. $\{\widetilde{\text{succ}}(s) : s \in S\}$ est une partition de A ; i.e.,

$$\bigcup_{s \in S} \widetilde{\text{succ}}(s) = A$$

et

$$\bigcap_{s \in S} \widetilde{\text{succ}}(s) = \emptyset$$

□

Théorème. Si le graphe G est orienté,

$$\sum_{s \in S} |\widetilde{\text{succ}}(s)| = 2 \cdot |A|$$

Preuve. D'une part,

$$\bigcup_{s \in S} \widetilde{\text{succ}}(s) = A$$

D'autre part, quel que soient s et s' de S , et $a \in A$, tels que $a = (s, s') = (s', s)$; alors

$$a \in \widetilde{\text{succ}}(s) \cap \widetilde{\text{succ}}(s')$$

(chaque arête est comptée exactement 2 fois).

□

On note que, $\forall s \in S$, $|\widetilde{\text{succ}}(s)| = |\text{succ}(s)|$. On en déduit les théorèmes suivants.

Théorème. *Si le graphe G est orienté,*

$$\sum_{s \in S} |\text{succ}(s)| = |A|$$

Preuve. On a :

$$\sum_{s \in S} |\widetilde{\text{succ}}(s)| = \sum_{s \in S} |\text{succ}(s)|$$

Et on a précédemment démontré que :

$$\sum_{s \in S} |\widetilde{\text{succ}}(s)| = |A|$$

□

Théorème. *Si le graphe G est orienté,*

$$\sum_{s \in S} |\text{succ}(s)| = 2 \cdot |A|$$

Preuve. On a :

$$\sum_{s \in S} |\widetilde{\text{succ}}(s)| = \sum_{s \in S} |\text{succ}(s)|$$

Et on a précédemment démontré que :

$$\sum_{s \in S} |\widetilde{\text{succ}}(s)| = 2 \cdot |A|$$

□

14 Arbres

14.1 Arbres – arbres binaires

14.1.1 Arbres binaires et profondeur

Définition (graphe connexe). Un graphe est connexe si : pour tous sommets s et s' , il existe une chaîne reliant s à s' .

Définition (arbre). Un arbre est un graphe connexe sans cycle, dont on distingue un sommet appelé racine.

Définition (arbre binaire). Un arbre binaire est un arbre, dont tout nœud possède, au plus, deux successeurs.

Définition (profondeur d'un nœud). Soit \mathcal{A} un arbre binaire, la profondeur d'un nœud $s \in \mathcal{A}$, notée $\mathbf{p}(s)$, est définie par :

- (i) $\mathbf{p}(s) = 1$, si s est racine de \mathcal{A} ;
- (ii) $\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}(\text{parent de } s) + 1$, sinon.

Définition (profondeur d'un arbre).

$$\mathbf{p}(\mathcal{A}) := \max\{\mathbf{p}(s) \mid s \text{ est une feuille de } \mathcal{A}\}$$

14.1.2 Arbres binaires parfaits

Définition (arbre binaire parfait). Un arbre binaire parfait est un arbre binaire, tel que

- (i) tout nœud interne (i.e. non feuille), possède exactement deux successeurs ;
- (ii) toutes les feuilles sont à la même profondeur de la racine.

Lemme. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$$

Preuve. Par récurrence sur n .

- (i) $n = 0$; $2^0 = 1 = 2^1 - 1$.

(ii) Hypothèse de récurrence : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{i=0}^k 2^i = 2^{k+1} - 1$$

(iii) $n = k + 1$.

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = \sum_{i=0}^k 2^i + 2^{k+1}$$

Par l'hypothèse de récurrence,

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1}$$

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2 \cdot 2^{k+1} - 1$$

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^{k+2} - 1$$

□

Théorème. *Un arbre binaire parfait, de n nœuds, a une profondeur de $O(\log n)$.*

Preuve. Soit \mathcal{A} un arbre binaire parfait de n nœuds.

$$\mathfrak{p}(\mathcal{A}) = 1 \quad \text{pour} \quad n = 1 = 2^1 - 1$$

$$\mathfrak{p}(\mathcal{A}) = 2 \quad \text{pour} \quad n = 1 + 2 = 3 = 2^2 - 1$$

$$\mathfrak{p}(\mathcal{A}) = 3 \quad \text{pour} \quad n = 1 + 2 + 2^2 = 7 = 2^3 - 1$$

Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\mathfrak{p}(\mathcal{A}) = q \quad \text{pour} \quad n = \sum_{i=0, \dots, q-1} 2^i = 2^q - 1$$

On a

$$\mathfrak{p}(\mathcal{A}) = q + 1 \quad \text{pour} \quad n = \sum_{i=0, \dots, q-1} 2^i + 2 \cdot 2^{q-1} = \sum_{i=0, \dots, q} 2^i = 2^{q+1} - 1$$

La récurrence établie, on a ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$p(A) = k \quad \text{pour} \quad n = 2^k - 1$$

Soit

$$2^k = n + 1 \iff k = \log_2(n + 1) \in O(\log n)$$

□

14.1.3 Parcours préfixe et infixe d'un arbre binaire

- On suppose qu'un noeud peut-être "nul" (sa profondeur est alors 0 par convention).
- Initialement, la racine de l'arbre est passée en argument de l'algorithme.

Algorithm 25 `prefixe` ($s \in \mathcal{A}$)

```

1: if est_nul( $s$ ) then
2:   return
3: end if
4: print( $s$ )
5: prefixe( $s_g$ )
6: prefixe( $s_d$ )

```

Algorithm 26 `infixe` ($s \in \mathcal{A}$)

```

1: if est_nul( $s$ ) then
2:   return
3: end if
4: infixe( $s_g$ )
5: print( $s$ )
6: infixe( $s_d$ )

```

Théorème. *La complexité du parcours préfixe (ou infixe), dans un arbre binaire, est en $O(n)$.*

14.2 Arbre binaire de recherche

14.2.1 Définition

Définition (ABR). Un arbre binaire de recherche (ABR) est un arbre binaire valué, qui est soit un arbre vide ; soit un arbre vérifiant, pour tout noeud s :

- $\forall s' \in G(s), s'.val \leq s.val$;
- $\forall s' \in D(s), s.val < s'.val$;

où $G(s)$ (resp. $D(s)$) est le sous-arbre gauche (resp. droit) du noeud s .

14.2.2 Recherche dans un ABR

Algorithm 27 recherche_ABR ($s \in \mathcal{A}, x \in V$: valeur recherchée)

```

1: if est_nul( $s$ ) then
2:   return False
3: else if  $s.val = x$  then
4:   return True
5: else if  $s.val > x$  then
6:   return recherche_ABR( $s.f_g, x$ )
7: else
8:   return recherche_ABR( $s.f_d, x$ )
9: end if

```

Théorème. *La complexité de la recherche dans un ABR est, en moyenne, en $O(\log n)$.*

Preuve. Admis. □

14.3 Parcours infixe dans un ABR

Théorème. *Le parcours infixe d'un ABR donne une séquence des noeuds triés, selon l'ordre croissant des valeurs.*

Preuve. (Par récurrence sur la taille de l'ABR). Si $|\mathcal{A}| = 1$, alors la proposition est trivialement vraie.

Supposons que, pour tout ABR de taille $m \leq k$, la proposition soit vraie. Considérons un ABR de taille $k + 1$; alors la séquence affichée est de la forme :

séquence affichée par **infixe**($s.f_g$) . s . séquence affichée par **infixe**($s.f_d$).

Par définition d'un ABR,

- $\forall s' \in G(s), s'.val \leq s.val$;
- $\forall s' \in D(s), s.val < s'.val$.

D'autre part, l'hypothèse de récurrence nous assure que la séquence affichée par **infixe**($s.f_g$) (resp. **infixe**($s.f_d$)) est conforme à la proposition. □

15 Parcours de graphe en largeur et applications

15.1 Parcours en largeur (*Breadth First Search*)

Algorithm 28 BFS($G = (S, \text{succ})$, s_0)

```
1: done  $\leftarrow$  [  $s_0$  ]
2: todo  $\leftarrow$  File_Vide
3: todo.enfiler( $s_0$ )
4: while todo n'est pas vide do
5:    $s \leftarrow$  todo.defiler()
6:   for  $s' \in \text{succ}(s)$  do
7:     if  $s' \notin \text{done}$  then
8:       todo.enfiler( $s'$ )
9:       done  $\leftarrow$  done + [  $s'$  ]
10:    end if
11:  end for
12: end while
13: return done
```

15.2 Applications : graphe d'accessibilité et composantes connexes

15.2.1 Graphe d'accessibilité

Le parcours en largeur **permet générer le graphe d'accessibilité** des sommets accessibles depuis le sommet "racine" donné en argument (s_0) ; i.e. les sommets pour lesquels il existe un chemin depuis s_0 .

15.2.2 Composantes connexes d'un graphe non orienté

D'une façon générale, le parcours en largeur **permet de déterminer les composantes connexes d'un graphe non orienté**. Pour cela, il suffit d'appliquer le sur-algorithme suivant :

Algorithm 29 Composantes_Connexes($G = (S, \text{succ})$)

```
1: done  $\leftarrow []$  ▷ Liste vide
2: todo  $\leftarrow S$ 
3: while todo n'est pas vide do
4:   s  $\leftarrow \text{todo.pop}()$ 
5:   new  $\leftarrow \text{BFS}(G, s_0)$ 
6:   todo  $\leftarrow \text{todo} - \text{new}$ 
7:   done.append(new)
8: end while
9: return done
```

Le nombre de tours de boucle est égal à la taille de la liste *done*, et correspond au nombre de composantes connexes.

15.3 Application : plus court chemin

Parcours en largeur peut aussi être utilisé pour **chercher chacun des plus courts chemins (en nombre d'arcs ou arêtes) entre la "racine" s_0 et chacun des autres sommets du graphe d'accessibilité depuis s_0** . Pour ce faire, il convient de stocker le prédécesseur de chaque sommet "généré".

L'algorithme suivant est une amélioration de **BFS**, donnant en outre : le tableau π des prédécesseurs, associant à chaque sommet son prédécesseur, i.e. le sommet qui l'a fait entrer dans la file *done*.

Algorithm 30 BFS2($G = (S, \text{succ}), s_0$)

```
1:  $\pi \leftarrow$  tableau de taille  $|S|$ 
2:  $\forall s \in S, \pi[s] \leftarrow \text{None}$ 
3:  $done \leftarrow [s_0]$ 
4:  $todo \leftarrow \text{File\_Vide}$ 
5:  $todo.\text{enfiler}(s_0)$ 
6: while  $todo$  n'est pas vide do
7:    $s \leftarrow todo.\text{defiler}()$ 
8:   for  $s' \in \text{succ}(s)$  do
9:     if  $s' \notin done$  then
10:       $todo.\text{enfiler}(s')$ 
11:       $done \leftarrow done + [s']$ 
12:       $\pi[s'] \leftarrow s$ 
13:     end if
14:   end for
15: end while
16: return ( $done, \pi$ )
```

L'algorithme suivant trouve un plus court chemin, s'il existe, pour aller de s_0 à s_j (préalablement BFS2 a été exécuté).

Algorithm 31 Plus_Cout_Chemin($G = (S, \text{succ}), s_0, s_j$)

```
1:  $res \leftarrow []$  ▷ Liste vide
2:  $s \leftarrow s_j$ 
3: while  $\top$  do
4:   if  $s = s_0$  then
5:      $res.\text{append}(s)$ 
6:     return  $res$ 
7:   else if  $\pi[s] = \text{None}$  then
8:     return  $[]$  ▷ Pas de plus court chemin
9:   end if
10:   $res.\text{append}(s)$ 
11:   $s \leftarrow \pi[s]$ 
12: end while
```

16 Problème de l'arrêt

Définition (ARRÊT).

Entrées :

1. $\langle \text{Prog} \rangle$: le code source d'un programme **Prog** ;
2. x : une entrée pour **Prog**.

Sortie : **Prog**(x) s'arrête-t-il ?

Théorème (Turing). *ARRÊT est indécidable.*

Preuve. (Par l'absurde). On suppose qu'ARRÊT est décidable ; i.e. il existe un programme, soit **Halt**, qui décide le problème de l'arrêt ; i.e., pour tout programme **Prog** de code source $\langle \text{Prog} \rangle$, pour toute entrée x de **Prog** :

- **Prog**(x) s'arrête \iff **Halt**($\langle \text{Prog} \rangle$, x) répond Vrai ;
- **Prog**(x) ne s'arrête pas \iff **Halt**($\langle \text{Prog} \rangle$, x) répond Faux.

On considère le programme **Diagonale** ci-après :

```
Diagonale(y):  
  Si Halt(y, y) = Vrai :  
    effectuer une boucle infinie  
  Sinon  
    retourner "toto"  
  Fin Si
```

Nous considérons l'exécution : **Diagonale**($\langle \text{Diagonale} \rangle$).

(a) Cas 1 : **Halt**($\langle \text{Diagonale} \rangle$, $\langle \text{Diagonale} \rangle$) = Vrai

D'après le code de **Diagonale**, il suit que **Diagonale**($\langle \text{Diagonale} \rangle$) ne s'arrête pas, donc que **Halt**($\langle \text{Diagonale} \rangle$, $\langle \text{Diagonale} \rangle$) répond Faux.

(b) Cas 2 : **Halt**($\langle \text{Diagonale} \rangle$, $\langle \text{Diagonale} \rangle$) = Faux

D'après le code de **Diagonale**, il suit que **Diagonale**($\langle \text{Diagonale} \rangle$) s'arrête, donc que **Halt**($\langle \text{Diagonale} \rangle$, $\langle \text{Diagonale} \rangle$) répond Vrai.

□