

Algorithmique avancée

Version 2.3

Michaël Guedj



Algorithmique avancée de Michaël Guedj est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons Attribution 4.0 International.

Table des Matières

1	Rappels de logique	5
1.1	Logique propositionnelle	5
1.2	Logique des prédicats	5
2	Algorithmes sur tableaux	7
2.1	Un tableau est-il vide ?	7
2.2	Afficher les éléments d'un tableau	7
2.3	Afficher les éléments positifs d'un tableau	7
2.4	Retourner l'éléments maximum d'un tableau	8
2.5	Retourner l'indice de l'éléments maximum d'un tableau	8
2.6	Retourner la somme des éléments d'un tableau	8
2.7	Rechercher un élément dans un tableau	9
3	Algorithmes sur matrices	10
3.1	Afficher les éléments d'une matrice	10
3.2	Additionner deux matrices	10
3.3	La matrice est-elle diagonale ?	10
4	Complexité en temps	12
4.1	Approximation asymptotique	12
4.2	Complexités en temps classiques	12
5	Tris quadratiques	13
5.1	Algorithme d'échange	13
5.2	Tri par sélection	13
5.3	Tri à bulles	15
6	Récursivité	16
6.1	Considérations sur la récursivité	16
6.2	Exemple : la fonction factorielle	16
7	Calcul des termes de la suite Fibonacci	18
7.1	Définition	18
7.2	Approche récursive	18
7.3	Approche itérative	18
8	Théorème maître	20

9	Diviser pour régner – exponentiation rapide	21
9.1	Approche <i>Diviser pour régner</i>	21
9.2	Exponentiation rapide	21
10	Recherche dichotomique	23
11	Tri fusion	25
12	Représentation des graphes	29
12.1	Considérations préliminaires	29
12.2	Représentation par matrice d’adjacence	29
12.3	Représentation par liste d’adjacence	29
12.4	Exemple	29
12.5	Espace mémoire	30
12.6	Complexité de quelques opérations	30
12.7	Choix d’utilisation	31
12.8	Relation entre sommets adjacents et arêtes	31
13	Arbres	32
13.1	Arbres – arbres binaires	32
13.2	Arbre binaire de recherche	34
13.2.1	Définition	34
13.2.2	Recherche dans un ABR	34
13.3	Parcours infixe dans un ABR	35
14	Parcours de graphes	36
14.1	Parcours en largeur (<i>Breadth First Search</i>)	36

1 Rappels de logique

1.1 Logique propositionnelle

A	B	A and B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A	B	A or B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A	$\neg A$
1	0
0	1

$$A \Rightarrow B \equiv (\neg A \text{ or } B)$$

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$$A \Longleftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B \text{ and } B \Rightarrow A)$$

A	B	$A \Longleftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

1.2 Logique des prédicats

$$\neg(\forall x \in E, P(x)) \equiv \exists x \in E, \neg P(x)$$

$$\neg\left(\exists x \in E, P(x)\right) \equiv \forall x \in E, \neg P(x)$$

2 Algorithmes sur tableaux

2.1 Un tableau est-il vide ?

Algorithm 1 `est_vide` (t : tableau, n : taille du tableau)

```
1: if  $n = 0$  then  
2:   return True  
3: else  
4:   return False  
5: end if
```

Complexité : $O(1)$.

2.2 Afficher les éléments d'un tableau

Algorithm 2 `afficher_tableau` (t : tableau, n : taille du tableau)

```
1: for  $i \leftarrow 0, \dots, n - 1$  do  
2:   print( $t[i]$ )  
3: end for
```

Complexité : $O(n)$.

2.3 Afficher les éléments positifs d'un tableau

Algorithm 3 `afficher_positifs` (t : tableau, n : taille du tableau)

```
1: for  $i \leftarrow 0, \dots, n - 1$  do  
2:   if  $t[i] \geq 0$  then  
3:     print( $t[i]$ )  
4:   end if  
5: end for
```

Complexité : $O(n)$.

2.4 Retourner l'éléments maximum d'un tableau

Algorithm 4 maximum (t : tableau, n : taille du tableau)

```
1:  $max \leftarrow t[0]$   $\triangleright$  on suppose  $n > 0$ 
2: for  $i \leftarrow 1, \dots, n - 1$  do
3:   if  $t[i] \geq max$  then
4:      $max \leftarrow t[i]$ 
5:   end if
6: end for
7: return  $max$ 
```

Complexité : $O(n)$.

2.5 Retourner l'indice de l'éléments maximum d'un tableau

Algorithm 5 inidice_maximum (t : tableau, n : taille du tableau)

```
1:  $max \leftarrow t[0]$   $\triangleright$  on suppose  $n > 0$ 
2:  $iMax \leftarrow 0$ 
3: for  $i \leftarrow 1, \dots, n - 1$  do
4:   if  $t[i] \geq max$  then
5:      $max \leftarrow t[i]$ 
6:      $iMax \leftarrow i$ 
7:   end if
8: end for
9: return  $iMax$ 
```

Complexité : $O(n)$.

2.6 Retourner la somme des éléments d'un tableau

Algorithm 6 somme (t : tableau, n : taille du tableau)

```
1:  $res \leftarrow 0$ 
2: for  $i \leftarrow 0, \dots, n - 1$  do
3:    $res \leftarrow res + t[i]$ 
4: end for
5: return  $res$ 
```

Complexité : $O(n)$.

2.7 Rechercher un élément dans un tableau

Algorithm 7 recherche (t : tableau, n : taille du tableau, x : élément)

```
1: for  $i \leftarrow 0, \dots, n - 1$  do  
2:   if  $t[i] = x$  then  
3:     return True  
4:   end if  
5: end for  
6: return False
```

Complexité : $O(n)$.

3 Algorithmes sur matrices

3.1 Afficher les éléments d'une matrice

Algorithm 8 `afficher_matrice` (A : matrice $n \times m$)

```
1: for  $i \leftarrow 0, \dots, n-1$  do                                ▷ parcours des lignes
2:   for  $j \leftarrow 0, \dots, m-1$  do                            ▷ parcours des colonnes
3:     print( $A_{i,j}$ )
4:   end for
5:   print("\\n")                                ▷ échappement pour une nouvelle ligne
6: end for
```

Complexité : $O(n \times m)$.

Cas d'une matrice carré $n \times n$: $O(n^2)$.

3.2 Additionner deux matrices

Algorithm 9 `additionner` (A, B : matrice $n \times m$)

```
1:  $C \leftarrow$  matrice  $n \times m$ 
2: for  $i \leftarrow 0, \dots, n-1$  do
3:   for  $j \leftarrow 0, \dots, m-1$  do
4:      $C_{i,j} \leftarrow A_{i,j} + B_{i,j}$ 
5:   end for
6: end for
7: return  $C$ 
```

Complexité : $O(n \times m)$.

3.3 La matrice est-elle diagonale ?

Définition. La matrice carré $n \times n$, soit M , est diagonale si :

$$\forall i, j \in \{0, \dots, n-1\}, i \neq j \Rightarrow M_{i,j} = 0$$

Lemme. La matrice carré $n \times n$, soit M , n'est pas diagonale si :

$$\exists i, j \in \{0, \dots, n-1\}, i \neq j \text{ and } M_{i,j} \neq 0$$

Preuve.

$$A \equiv \text{not } \left(\forall i, j \in \{0, \dots, n-1\}, i \neq j \Rightarrow M_{i,j} = 0 \right)$$

$$\begin{aligned}
A &\equiv \exists i, j \in \{0, \dots, n-1\}, \text{ not } (i \neq j \Rightarrow M_{i,j} = 0) \\
A &\equiv \exists i, j \in \{0, \dots, n-1\}, \text{ not } \left(\text{not } (i \neq j) \text{ or } (M_{i,j} = 0) \right) \\
A &\equiv \exists i, j \in \{0, \dots, n-1\}, (i \neq j) \text{ and } \text{not } (M_{i,j} = 0) \\
A &\equiv \exists i, j \in \{0, \dots, n-1\}, i \neq j \text{ and } M_{i,j} \neq 0
\end{aligned}$$

□

Algorithm 10 `est_diagonale` (M : matrice $n \times n$)

```

1: for  $i \leftarrow 0, \dots, n-1$  do
2:   for  $j \leftarrow 0, \dots, n-1$  do
3:     if  $i \neq j$  and  $M_{i,j} \neq 0$  then
4:       return False
5:     end if
6:   end for
7: end for
8: return True

```

Complexité : $O(n^2)$.

4 Complexité en temps

4.1 Approximation asymptotique

Définition (Notation grand O). Soient f et g , deux suites de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$.
 $f \in O(g)$ si :

$$\exists K \in \mathbb{R}^{*+}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tels que :}$$

$$\forall n \geq n_0, f(n) \leq K.g(n)$$

Autrement dit, $f(n) \leq K.g(n)$ à partir d'un certain rang.

Exemples.

- $7n - 3 \in O(n)$
- $7n - 3 \in O(n^2)$

Remarque. Le but est de trouver l'approximation la plus petite possible.

4.2 Complexités en temps classiques

Complexité	Notation asymptotique	Exemple
Logarithmique	$O(\log n)$	Recherche dichotomique dans un tableau trié.
Linéaire	$O(n)$	Recherche séquentielle dans un tableau.
Quasi-linéaire	$O(n \log n)$	Tri fusion.
Quadratique	$O(n^2)$	Tri sélection; tri à bulles.
Polynomiale	$O(n^k), k \geq 0$...
Exponentielle	$O(\alpha^n), \alpha > 1$	Algorithme récursif pour Fibonacci.
Factorielle	$O(n!)$	Résolution des n -reines par <i>backtracking</i> .

5 Tris quadratiques

5.1 Algorithme d'échange

Algorithm 11 `echanger`(t : tableau, i, j : entiers)

```
1:  $tmp \leftarrow t[i]$ 
2:  $t[i] \leftarrow t[j]$ 
3:  $t[j] \leftarrow tmp$ 
```

5.2 Tri par sélection

Algorithm 12 `tri_selection`(t : tableau, n : taille du tableau)

```
1: for  $i \leftarrow 0, \dots, n-2$  do
2:    $i_{min} \leftarrow \text{indice\_min\_sous\_tab}(t, i, n-1)$ 
3:   echanger( $t, i, i_{min}$ )
4: end for
```

Algorithm 13 `indice_min_sous_tab`(t : tableau, a, b : entiers)

```
1:  $i_{min} \leftarrow a$ 
2: for  $i \leftarrow a+1, \dots, b$  do
3:   if  $t[i] < t[i_{min}]$  then
4:      $i_{min} \leftarrow i$ 
5:   end if
6: end for
7: return  $i_{min}$ 
```

Théorème. La complexité de `tri_selection` est en $O(n^2)$.

Preuve. Calcul du nombre de comparaisons, soit $\mathcal{C}(n)$, de `tri_selection` (ligne 3 de l'algorithme 13).

$$\mathcal{C}(n) = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} 1$$

$$\mathcal{C}(n) = \sum_{i=0}^{n-2} \left((n-1) - (i+1) + 1 \right)$$

$$\mathcal{C}(n) = \sum_{i=0}^{n-2} (n-1-i-1+1)$$

$$\mathcal{C}(n) = \sum_{i=0}^{n-2} (n-1-i)$$

$$\mathcal{C}(n) = \sum_{i=0}^{n-2} (n-1) - \sum_{i=0}^{n-2} i$$

$$\mathcal{C}(n) = (n-1) \sum_{i=0}^{n-2} 1 - \sum_{i=0}^{n-2} i$$

$$\mathcal{C}(n) = (n-1)(n-1) - \sum_{i=0}^{n-2} i$$

$$\mathcal{C}(n) = (n-1)^2 - \sum_{i=0}^{n-2} i$$

$$\mathcal{C}(n) = (n-1)^2 - \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

$$\mathcal{C}(n) = (n-1) \left((n-1) - \frac{(n-2)}{2} \right)$$

$$\mathcal{C}(n) = (n-1) \left(\frac{2 \cdot (n-1) - (n-2)}{2} \right)$$

$$\mathcal{C}(n) = (n-1) \left(\frac{2n-2-n+2}{2} \right)$$

$$\mathcal{C}(n) = (n-1) \frac{n}{2}$$

$$\mathcal{C}(n) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = O(n^2)$$

□

5.3 Tri à bulles

Algorithm 14 `tri_à_bulles`(t : tableau, n : taille du tableau)

```
1: for  $i \leftarrow n - 1, \dots, 1$  do
2:   for  $j \leftarrow 0, \dots, i - 1$  do
3:     if  $t[j + 1] < t[j]$  then
4:       echanger( $t, j + 1, j$ )
5:     end if
6:   end for
7: end for
```

Théorème. *La complexité de `tri_à_bulles` est en $O(n^2)$.*

Preuve. Calcul du nombre de comparaisons, soit $\mathcal{C}(n)$, de `tri_à_bulles` (ligne 4 de Algorithme 14).

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(n) &= \sum_{i=n-1}^1 \sum_{j=0}^{i-1} 1 = \sum_{i=n-1}^1 (i - 1 - 0 + 1) = \sum_{i=n-1}^1 i \\ \mathcal{C}(n) &= \frac{(n-1+1)(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = O(n^2)\end{aligned}$$

□

6 Récursivité

6.1 Considérations sur la récursivité

La version itérative d'un traitement est souvent à préférer.

En effet :

- un dépassement de pile (*stack overflow*) peut se produire ;
- l'exécution d'une version récursive d'un algorithme est généralement un peu moins rapide que celle de la version itérative correspondante ; et ce même si le nombre d'instructions est le même (à cause de la gestion des appels de fonction) ;
- un algorithme récursif (naïf) peut conduire à exécuter bien plus d'instructions que la version itérative correspondante (cas du calcul de la suite de Fibonacci).

En revanche, la récursivité peut être adaptée dans certains cas.

En effet :

- sur des structures de données naturellement récursives, il est plus facile d'écrire des algorithmes récursifs qu'itératifs ;
- certains algorithmes sont, en outre, difficiles à écrire en itératif.

6.2 Exemple : la fonction factorielle

Définition (fonction factorielle). La fonction factorielle est définie, sur \mathbb{N} , par :

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = \prod_{i=1}^n i = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Définition (définition récursive de la fonction factorielle).

$$n! = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n \times (n-1)! & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Algorithm 15 `fact`($n \in \mathbb{N}$)

```
1: if  $n = 0$  then
2:   return 1
3: else
4:   return  $n \times \text{fact}(n-1)$ 
5: end if
```

Complexité : $O(n)$.

Algorithm 16 `fact_it`($n \in \mathbb{N}$)

```
1:  $res \leftarrow 1$ 
2: for  $i \leftarrow 1, \dots, n$  do
3:    $res \leftarrow res \times i$ 
4: end for
5: return  $res$ 
```

Complexité : $O(n)$.

7 Calcul des termes de la suite Fibonacci

7.1 Définition

Définition (suite de Fibonacci).

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

7.2 Approche récursive

Algorithm 17 `fibo_rec`($n \in \mathbb{N}$)

```
1: if  $n = 0$  then
2:   return 0
3: else if  $n = 1$  then
4:   return 1
5: else
6:   return fibo_rec( $n - 1$ ) + fibo_rec( $n - 2$ )
7: end if
```

Théorème. La complexité de `fibo_rec` est en $O(\phi^n)$; où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or.

Preuve. Admis. □

7.3 Approche itérative

Algorithm 18 `fibo_it`($n \in \mathbb{N}$)

```
1:  $F \leftarrow$  tableau de  $n + 1$  éléments
2:  $F[0] \leftarrow 0$ 
3:  $F[1] \leftarrow 1$ 
4: for  $i \leftarrow 2, \dots, n$  do
5:    $F[i] \leftarrow F[i - 1] + F[i - 2]$ 
6: end for
7: return  $F[n]$ 
```

Théorème. La complexité de `fibo_it` est en $O(n)$.

Preuve. – Nombre d'affectations : $O(n)$.

– Nombre d'additions : $O(n)$.

□

8 Théorème maître

Théorème. Soient $a, b, d \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$, $b \geq 2$; soit la fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par :

$$f(n) = \begin{cases} O(1) & \text{si } n \leq 1 \\ a.f(n/b) + O(n^d) & \text{si } n \geq b \end{cases}$$

alors :

$$f(n) = \begin{cases} O(n^d) & \text{si } a < b^d \\ O(n^d \cdot \log n) & \text{si } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^d \end{cases}$$

Preuve. Admis.

□

9 Diviser pour régner – exponentiation rapide

9.1 Approche *Diviser pour régner*

Principe.

1. **Diviser** : découper le problème à résoudre en a sous-problèmes (de taille n/b chacun);
2. **Régner** : résoudre *récurivement* les a sous-problèmes ;
3. **Combiner** : à partir des solutions des a sous-problèmes, calculer en $O(n^d)$ une solution au problème à résoudre.

La complexité peut alors se traduire par l'équation :

$$t(n) = a.t(n/b) + O(n^d)$$

9.2 Exponentiation rapide

Théorème. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ (x^2)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n > 0 \text{ et } n \equiv 0 \pmod{2} \\ x.(x^2)^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n > 0 \text{ et } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

Preuve. – Si $n > 0$ et $n \equiv 0 \pmod{2}$, alors $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2.k$. On a $k = \frac{n}{2}$ et

$$x^n = x^{2.k} = (x^2)^k = (x^2)^{\frac{n}{2}}$$

– Si $n > 0$ et $n \equiv 1 \pmod{2}$, alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2.k + 1$. On a $k = \frac{n-1}{2}$ et

$$x^n = x^{2.k+1} = x^{2.k}.x^1 = x.(x^2)^k = x.(x^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

□

Algorithm 19 exp_rapide(x, n)

```
1: if  $n = 0$  return 1 end if
2:
3: if  $n \equiv 0 \pmod{2}$  then
4:   return exp_rapide( $x.x, \frac{n}{2}$ )
5: else
6:   return  $x \times$  exp_rapide( $x.x, \frac{n-1}{2}$ )
7: end if
```

Théorème. *La complexité de `exp_rapide` est en $O(\log n)$.*

Preuve. Soit $\mathcal{C}(n)$ le nombre de comparaisons pour une instance de taille n .
On a,

$$\mathcal{C}(n) = \mathcal{C}(n/2) + O(1)$$

On invoque le théorème maître avec $a = 1$, $b = 2$ et $d = 0$. On a

$$a = 1 = 2^d$$

D'où

$$\mathcal{C}(n) = O(n^d \cdot \log n)$$

Comme $n^0 = 1$, on trouve

$$\mathcal{C}(n) = O(\log n)$$

□

10 Recherche dichotomique

Algorithm 20 `dicho_init`(t : tableau, n : taille du tableau, x : élément)

```

1:  $d \leftarrow 0$ 
2:  $f \leftarrow n - 1$ 
3: return dicho( $t, d, f, x$ )

```

Algorithm 21 `dicho`(t : tableau, d, f : indices, x : élément)

```

1: if  $d > f$  then return  $-1$  end if ▷ non trouvé
2: if  $f = d$  then
3:   if  $t[d] = x$  then return  $d$  else return  $-1$  end if
4: end if
5:  $m \leftarrow \lfloor \frac{d+f}{2} \rfloor$  ▷ partie entière
6: if  $t[m] = x$  then
7:   return  $m$ 
8: end if
9: if  $t[m] < x$  then
10:  return dicho( $t, m + 1, f, x$ )
11: else
12:  return dicho( $t, d, m - 1, x$ )
13: end if

```

Théorème. *La complexité de `dicho` est en $O(\log n)$.*

Preuve. Soit $\mathcal{C}(n)$ le nombre de comparaisons pour une instance de taille n .
On a,

$$\mathcal{C}(n) = \mathcal{C}(n/2) + O(1)$$

On invoque le théorème maître avec $a = 1$, $b = 2$ et $d = 0$. On a

$$a = 1 = 2^d$$

D'où

$$\mathcal{C}(n) = O(n^d \cdot \log n)$$

Comme $n^0 = 1$, on trouve

$$\mathcal{C}(n) = O(\log n)$$

□

Deuxième preuve. Soit $\mathcal{C}(n)$ le nombre de comparaisons pour une instance de taille n . On a,

$$\mathcal{C}(n) = \gamma + \mathcal{C}\left(\frac{n}{2}\right) \quad (\gamma \text{ constante})$$

La deuxième instance appelée vérifie :

$$\mathcal{C}\left(\frac{n}{2}\right) = \gamma + \mathcal{C}\left(\frac{n}{4}\right)$$

D'où,

$$\mathcal{C}(n) = \gamma + \mathcal{C}\left(\frac{n}{2}\right) = \gamma + \left(\gamma + \mathcal{C}\left(\frac{n}{4}\right)\right) = 2\gamma + \mathcal{C}\left(\frac{n}{4}\right)$$

Soit,

$$\underline{\mathcal{C}(n) = 2\gamma + \mathcal{C}\left(\frac{n}{2^2}\right)}$$

La troisième instance appelée vérifie :

$$\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^2}\right) = \gamma + \mathcal{C}\left(\frac{n}{2^3}\right)$$

D'où,

$$\underline{\mathcal{C}(n) = 3\gamma + \mathcal{C}\left(\frac{n}{2^3}\right)}$$

Par suite, $\mathcal{C}(n)$ s'écrit :

$$\underline{\mathcal{C}(n) = k\gamma + \mathcal{C}\left(\frac{n}{2^k}\right)}$$

On a :

$$\frac{n}{2^k} = 1 \Rightarrow \underline{\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^k}\right) = O(1)}$$

Et :

$$\frac{n}{2^k} = 1 \iff n = 2^k \iff \underline{\log_2 n = k}$$

$\mathcal{C}(n)$ s'écrit alors :

$$\mathcal{C}(n) = k\gamma + \mathcal{C}\left(\frac{n}{2^k}\right) = \log_2(n)\gamma + O(1) \in O(\log n)$$

□

11 Tri fusion

Algorithm 22 tri_fusion(lst : liste de taille n)

```

1: if  $n = 1$  return  $lst$  end if
2:  $m = \lfloor n/2 \rfloor$  ▷ Partie entière.
3:  $lst_1 \leftarrow \text{tri\_fusion}(lst[0 \rightarrow m - 1])$ 
4:  $lst_2 \leftarrow \text{tri\_fusion}(lst[m \rightarrow n - 1])$ 
5: return fusion( $lst_1, lst_2$ )

```

Algorithm 23 fusion(lst_1 : liste de taille n_1 , lst_2 : liste de taille n_2)

```

1:  $res \leftarrow [ ]$ 
2: while not ( $\text{est\_vide}(lst_1)$  and  $\text{est\_vide}(lst_2)$ ) do
3:   if  $\text{est\_vide}(lst_1)$  then
4:      $res \leftarrow res + lst_2$ 
5:      $lst_2 \leftarrow [ ]$ 
6:   else if  $\text{est\_vide}(lst_2)$  then
7:      $res \leftarrow res + lst_1$ 
8:      $lst_1 \leftarrow [ ]$ 
9:   else if  $\text{head}(lst_1) \leq \text{head}(lst_2)$  then
10:     $res \leftarrow res + [ \text{head}(lst_1) ]$ 
11:     $lst_1 \leftarrow \text{tail}(lst_1)$ 
12:   else
13:     $res \leftarrow res + [ \text{head}(lst_2) ]$ 
14:     $lst_2 \leftarrow \text{tail}(lst_2)$ 
15:   end if
16: end while
17: return  $res$ 

```

Théorème. *L'algorithme fusion termine.*

Preuve. L'algorithme termine lorsque les listes lst_1 et lst_2 sont vides.

Soit la prédicat P quantifiant, pour chaque tour de boucle i , la somme des tailles des liste lst_1 et lst_2 ; formellement

$$P(i) := |lst_1^i| + |lst_2^i|$$

où lst_1^i (resp. lst_2^i) correspond à la liste lst_1 (resp. lst_2) au i -ème tour de boucle.

Par l'absurde (descente infinie), on suppose que l'algorithme ne termine pas, i.e., $\forall i \in \mathbb{N}, P(i) > 0$.

On vérifie que le prédicat P assure : $\forall i \in \mathbb{N}, P(i) > P(i+1)$.

On considère la suite $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall i \in \mathbb{N}, P_i = P(i)$.

Ainsi, la suite $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est

(i) à valeur entière ($P : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$) ;

(ii) infinie ;

(iii) strictement décroissante.

D'où la fausseté de l'hypothèse que l'algorithme ne termine pas ($\forall i \in \mathbb{N}, P(i) > 0$).

Conclusion : l'algorithme termine ($\exists i \in \mathbb{N}, P(i) = 0$). \square

Théorème. *La complexité de fusion est en $O(n)$.*

Proof. On a

$$t(n) = O(1) + \text{boucle}(0, lst_1^0, lst_2^0)$$

et

$$\text{boucle}(i, lst_1^i, lst_2^i) = \begin{cases} O(1) & \text{si } |lst_1^i| = |lst_2^i| = 0 \\ O(1) & \text{si } |lst_1^i| = 0 \text{ ou } |lst_2^i| = 0 \\ O(1) + \text{boucle}(i, lst_1^{i+1}, lst_2^{i+1}) & \text{sinon ; avec :} \\ & |lst_1^{i+1}| + |lst_2^{i+1}| = |lst_1^i| + |lst_2^i| - 1 \end{cases}$$

On associe la suite $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$; u_j quantifiant le temps en fonction de $|lst_1^j| + |lst_2^j|$:

$$u_j = \begin{cases} O(1) & \text{si } j = 0 \\ O(1) + u_{j-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $n = |lst_1^0| + |lst_2^0|$ et

$$t(n) = O(1) + u_n$$

On calcule u_n .

$$u_n = O(1) + u_{n-1}$$

$$u_n = O(1) + (O(1) + u_{n-2})$$

$$u_n = 2.O(1) + u_{n-2}$$

...

$$u_n = k.O(1) + u_{n-k}$$

Soit

$$u_n = n.O(1) + u_0$$

$$u_n = n.O(1) + O(1)$$

$$u_n = O(n)$$

D'où

$$t(n) = O(n)$$

□

Théorème. *La complexité de `tri_fusion` est en $O(n \log n)$.*

Preuve. Soit $\mathcal{C}(n)$ le nombre de comparaisons pour une instance de taille n .

On a

$$\mathcal{C}(n) = 2.\mathcal{C}(n/2) + O(n)$$

On invoque le théorème maître avec $a = 2$, $b = 2$ et $d = 1$. On a

$$a = 2 = 2^d$$

D'où

$$\mathcal{C}(n) = O(n^d \cdot \log n)$$

C'est-à-dire

$$\mathcal{C}(n) = O(n \cdot \log n)$$

□

Deuxième preuve. Soit $\mathcal{C}(n)$ le nombre de comparaisons pour une instance de taille n .

$$\mathcal{C}(n) = 1 + 2.\mathcal{C}\left(\frac{n}{2}\right) + \gamma.n$$

Où γ est une constante. On a de même :

$$\mathcal{C}\left(\frac{n}{2}\right) = 1 + 2.\mathcal{C}\left(\frac{n}{4}\right) + \gamma.\frac{n}{2}$$

Soit :

$$\mathcal{C}(n) = 1 + 2.\left(1 + 2.\mathcal{C}\left(\frac{n}{4}\right) + \gamma.\frac{n}{2}\right) + \gamma.n$$

$$\mathcal{C}(n) = 1 + 2 + 4.\mathcal{C}\left(\frac{n}{4}\right) + \gamma.n + \gamma.n$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(n) &= 4.\mathcal{C}\left(\frac{n}{4}\right) + 2\gamma.n + 3 \\
\mathcal{C}(n) &= 2^2.\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2\gamma.n + (2+1) \\
\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^2}\right) &= 1 + 2.\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^3}\right) + \gamma.\frac{n}{2^2} \\
\mathcal{C}(n) &= 2^2.\left(1 + 2.\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^3}\right) + \gamma.\frac{n}{2^2}\right) + 2\gamma.n + (2+1) \\
\mathcal{C}(n) &= 2^2 + 2^2.2.\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^3}\right) + \gamma.n + 2\gamma.n + (2+1) \\
\mathcal{C}(n) &= 2^3.\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^3}\right) + 3\gamma.n + (2^2 + 2 + 1) \\
\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^3}\right) &= 1 + 2.\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^4}\right) + \gamma.\frac{n}{2^3} \\
\mathcal{C}(n) &= 2^3.\left(1 + 2.\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^4}\right) + \gamma.\frac{n}{2^3}\right) + 3\gamma.n + (2^2 + 2 + 1) \\
\mathcal{C}(n) &= 2^3 + 2^3.2.\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^4}\right) + 2^3.\gamma.\frac{n}{2^3} + 3\gamma.n + (2^2 + 2 + 1) \\
\mathcal{C}(n) &= 2^3 + 2^4.\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^4}\right) + \gamma.n + 3\gamma.n + (2^2 + 2 + 1) \\
\mathcal{C}(n) &= 2^4.\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^4}\right) + 4\gamma.n + (2^3 + 2^2 + 2 + 1)
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\mathcal{C}(n) = 2^t.\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^t}\right) + t.\gamma.n + (2^t + \dots + 2^2 + 2 + 1)$$

On a :

$$2^t + \dots + 2^2 + 2 + 1 = \frac{2^{t+1} - 1}{2 - 1} = 2^{t+1} - 1$$

D'où,

$$\mathcal{C}(n) = 2^t.\mathcal{C}\left(\frac{n}{2^t}\right) + t.\gamma.n + 2^{t+1} - 1$$

On a :

$$\frac{n}{2^t} = 1 \iff n = 2^t \iff t = \log_2 n$$

Et $\mathcal{C}(1) = 1$; d'où :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(n) &= 2^{\log_2 n}.1 + \log_2(n).\gamma.n + 2^{\log_2(n)+1} - 1 \\
\mathcal{C}(n) &= n + n.\log_2(n).\gamma + 2^{\log_2(n)}.2 - 1 \\
\mathcal{C}(n) &= n + n.\log_2(n).\gamma + 2.n - 1 \\
\mathcal{C}(n) &= n.\log_2(n).\gamma + 3.n - 1 \in O(n \log n)
\end{aligned}$$

□

12 Représentation des graphes

12.1 Considérations préliminaires

Soit un graphe $G = (S, A)$ tel que : $|S| = n$ et $|A| = m$ (avec $n, m \in \mathbb{N}$). Les sommets de G sont numérotés de 0 à $n - 1$.

12.2 Représentation par matrice d'adjacence

Définition. La matrice d'adjacence du graphe G , soit M , est une matrice booléenne de type $n \times n$ vérifiant :

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont adjacents} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $i, j \in \{0, \dots, n - 1\}$, si s_i est le i -ième sommet, et si s_j est le j -ième sommet, alors :

$$M_{i,j} = 1 \iff (s_i, s_j) \in A$$

12.3 Représentation par liste d'adjacence

Définition. La liste d'adjacence du graphe G , soit **succ**, est une liste indexée par les sommets de G , et telle que :

$$\forall s \in S, \text{succ}(s) = \{s' : (s, s') \in A\}$$

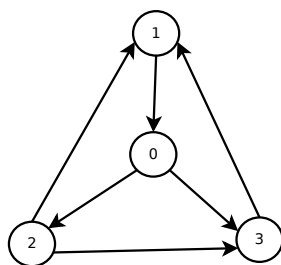
Autrement dit, $\forall s \in S$, **succ**(s) est l'ensemble des sommets adjacents à s .

12.4 Exemple

Soit le graphe $G = (S, A)$, défini par :

$$\begin{cases} S = \{0, 1, 2, 3\} \\ A = \{(0, 2), (0, 3), (1, 0), (2, 1), (2, 3), (3, 1)\} \end{cases}$$

Un tel graphe peut être représenté comme suit :



Les représentations par matrice et liste d'adjacence sont données ci-après.

Matrice d'adjacence	Liste d'adjacence								
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	<table> <tr> <td>0</td><td>{2, 3}</td></tr> <tr> <td>1</td><td>{0}</td></tr> <tr> <td>2</td><td>{1, 3}</td></tr> <tr> <td>3</td><td>{1}</td></tr> </table>	0	{2, 3}	1	{0}	2	{1, 3}	3	{1}
0	{2, 3}								
1	{0}								
2	{1, 3}								
3	{1}								

12.5 Espace mémoire

Matrice d'adjacence	Liste d'adjacence
$O(n^2)$	$O(n + m)$

12.6 Complexité de quelques opérations

Opérations	Matrice d'adjacence	Liste d'adjacence
Tester l'existence d'un arc $s \rightarrow s'$	$O(1)$	$O(\text{succ}(s))$
Retourner les sommets adjacents à un sommet	$O(n)$	$O(1)$
Parcourir l'ensemble des arcs	$O(n^2)$	$O(m)$

12.7 Choix d'utilisation

- D'une manière générale, on considère que si le graphe a "peu" d'arêtes, il est plus intéressant d'utiliser une représentation par liste d'adjacence, plutôt que par matrice d'adjacence (qui contiendrait alors beaucoup de 0).
- Mais si le graphe a "beaucoup" d'arêtes, il est plus intéressant d'utiliser une matrice d'adjacence.

12.8 Relation entre sommets adjacents et arêtes

Théorème. *Si le graphe G est orienté,*

$$\sum_{s \in S} |\text{succ}(s)| = |A|$$

Preuve. $\{\text{succ}(s) : s \in S\}$ est une partition de A ; i.e.,

$$\bigcup_{s \in S} \text{succ}(s) = S$$

et

$$\bigcap_{s \in S} \text{succ}(s) = \emptyset$$

□

Théorème. *Si le graphe G est orienté,*

$$\sum_{s \in S} |\text{succ}(s)| = 2 \cdot |A|$$

Preuve. D'une part,

$$\bigcup_{s \in S} \text{succ}(s) = S$$

D'autre part, quel que soit s et s' de S , et $a \in A$,

$$a = (s, s') \iff a \in \text{succ}(s) \cap \text{succ}(s')$$

(chaque arête est compté exactement 2 fois).

□

13 Arbres

13.1 Arbres – arbres binaires

Définition (graphe connexe). Un graphe est connexe si : pour tous sommets s et s' , il existe une chaîne reliant s à s' .

Définition (arbre). Un arbre est un graphe connexe sans cycle, dont on distingue un sommet appelé racine.

Définition (arbre binaire). Un arbre binaire est un arbre, dont tout nœud possède, au plus, deux successeurs.

Définition (profondeur d'un nœud). Soit \mathcal{A} un arbre binaire, la profondeur d'un nœud $s \in \mathcal{A}$, notée $\mathbf{p}(s)$, est définie par :

- (i) $\mathbf{p}(s) = 0$, si s est nœud nul ;
- (ii) $\mathbf{p}(s) = 1$, si s est racine de \mathcal{A} ;
- (iii) $\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}(\text{parent de } s) + 1$, sinon.

Définition (profondeur d'un arbre).

$$\mathbf{p}(\mathcal{A}) := \max\{\mathbf{p}(s) \mid s \text{ est une feuille de } \mathcal{A}\}$$

Définition (arbre binaire parfait). Un arbre binaire parfait est un arbre binaire, tel que

- (i) tout nœud interne (i.e. non feuille), possède exactement deux successeurs ;
- (ii) toutes les feuilles sont à même profondeur de la racine.

Lemme. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$$

Preuve. Par récurrence sur n .

- (i) $n = 0$; $2^0 = 1 = 2^1 - 1$.
- (ii) Hypothèse de récurrence : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{i=0}^k 2^i = 2^{k+1} - 1$$

(iii) $n = k + 1$.

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = \sum_{i=0}^k 2^i + 2^{k+1}$$

Par l'hypothèse de récurrence,

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1}$$

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2 \cdot 2^{k+1} - 1$$

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^{k+2} - 1$$

□

Théorème. *Un arbre binaire parfait, de n nœuds, a une profondeur de $O(\log n)$.*

Preuve. Soit \mathcal{A} un arbre binaire parfait de n nœuds.

$$\mathfrak{p}(\mathcal{A}) = 1 \iff n = 1 = 2^1 - 1$$

$$\mathfrak{p}(\mathcal{A}) = 2 \iff n = 1 + 2 = 3 = 2^2 - 1$$

$$\mathfrak{p}(\mathcal{A}) = 3 \iff n = 1 + 2 + 2^2 = 7 = 2^3 - 1$$

Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\mathfrak{p}(\mathcal{A}) = q \iff n = \sum_{i=0, \dots, q-1} 2^i = 2^q - 1$$

On a

$$\mathfrak{p}(\mathcal{A}) = q + 1 \iff n = \sum_{i=0, \dots, q-1} 2^i + 2 \cdot 2^{q-1}$$

D'où,

$$n = \sum_{i=0, \dots, q} 2^i = 2^{q+1} - 1$$

On a ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathfrak{p}(\mathcal{A}) = k \iff n = 2^k - 1$$

Soit

$$2^k = n + 1 \iff k = \log_2(n + 1) \in O(\log n)$$

□

Algorithm 24 infixe ($s \in \mathcal{A}$)

```
1: if est_nul( $s$ ) then
2:   return
3: else
4:   print( $s$ )
5: end if
6: infixe( $s_g$ )
7: infixe( $s_d$ )
```

Théorème. *La complexité du parcours infixe, dans un arbre binaire, est en $O(n)$.*

13.2 Arbre binaire de recherche

13.2.1 Définition

Définition (ABR). Un arbre binaire de recherche (ABR) est un arbre binaire valué, qui est soit arbre vide ; soit vérifiant, pour tout noeud s :

- $\forall s' \in G(s), s'.val \leq s.val$;
- $\forall s' \in D(s), s.val < s'.val$;

où $G(s)$ (resp. $D(s)$) est le sous-arbre gauche (resp. droit) du noeud s .

13.2.2 Recherche dans un ABR

Algorithm 25 recherche_ABR ($s \in \mathcal{A}, x \in V$: valeur recherchée)

```
1: if est_nul( $s$ ) then
2:   return False
3: else if  $s.val = x$  then
4:   return True
5: else if  $s.val > x$  then
6:   return recherche_ABR( $s.f_g, x$ )
7: else
8:   return recherche_ABR( $s.f_d, x$ )
9: end if
```

Théorème. *La complexité de la recherche dans un ABR est, en moyenne, en $O(\log n)$.*

Preuve. Admis. □

13.3 Parcours infixe dans un ABR

Théorème. *Le parcours infixe d'un ABR donne une séquence des noeuds triés selon l'ordre croissant des valeurs.*

Preuve. (Par récurrence sur la taille de l'ABR). Si $|\mathcal{A}| = 1$, alors la proposition est vraie.

Supposons que, pour tout ABR de taille $m \leq k$, la proposition soit vraie. Considérons un ABR de taille $k + 1$; alors la séquence affichée est de la forme :

séquence affichée par $\text{infixe}(s.f_g)$. s . séquence affichée par $\text{infixe}(s.f_d)$.

Par définition d'un ABR,

- $\forall s' \in G(s), s'.val \leq s.val$;
- $\forall s' \in D(s), s.val < s'.val$.

D'autre part, l'hypothèse de récurrence nous assure que la séquence affichée par $\text{infixe}(s.f_g)$ (resp. $\text{infixe}(s.f_d)$) est conforme à la proposition. \square

14 Parcours de graphes

14.1 Parcours en largeur (*Breadth First Search*)

Algorithm 26 BFS($G = (S, \text{succ})$, s_0)

```
1: done  $\leftarrow$  [  $s_0$  ]
2: todo  $\leftarrow$  File_Vide
3: todo.enfiler( $s_0$ )
4: while todo n'est pas vide do
5:    $s \leftarrow$  todo.defiler()
6:   for  $s' \in \text{succ}(s)$  do
7:     if  $s' \notin \text{done}$  then
8:       todo.enfiler( $s'$ )
9:       done  $\leftarrow$  done + [  $s'$  ]
10:    end if
11:  end for
12: end while
13: return done
```

Permet de trouver le plus court chemin entre deux sommets (dans un graphe non pondéré).