Probabilités discrètes

Version 2.5

Michaël Guedj

Table des Matières

1 Loi de Probabilité

Dans ce qui suit,

– Nous considérons un ensemble non vide Ω appelé **univers** ;

– Ω est ici considéré fini (i.e. contient un nombre fini d'éléments) ;

– Tout élément $\omega \in \Omega$ est appelé **éventualité** ;

– Toute partie A de Ω est appelée **événement** ;

– L'ensemble des parties d'un ensemble E est noté : 2^E ; e.g. :

$$E = \{a, b, c\}$$

$$2^E = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$$

– En particulier, l'ensemble des événements de Ω est noté : 2^Ω.

Définition (loi de probabilité)**.** Une loi de probabilité (ou probabilité) Pr, sur 2^Ω, est une application vérifiant :

1. Masse unitaire : $\Pr(\Omega) = 1$;

2. Positivité : $\Pr : 2^\Omega \to [0, 1]$;

3. Additivité : $\forall A, B \in 2^\Omega$,

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$

Dans ce qui suit Pr est une probabilité sur Ω.

2 Premiers résultats

Théorème. $\forall A \in 2^{\Omega}$,

$$\Pr(A) = 1 - \Pr(\bar{A})$$

Preuve. Soit $A \in 2^{\Omega}$, on a :

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

d'où par définition de Pr :

$$\Pr(A \cup \bar{A}) = \Pr(A) + \Pr(\bar{A})$$

On a : $A \cup \bar{A} = \Omega$; et par définition de Pr : $\Pr(\Omega) = 1$; donc :

$$\Pr(A \cup \bar{A}) = 1$$

Par suite,

$$1 = \Pr(A) + \Pr(\bar{A}) \iff 1 - \Pr(\bar{A}) = \Pr(A)$$

$\square$

Théorème.

$$\Pr(\emptyset) = 0$$

Preuve.

$$\Pr(\emptyset) = 1 - \Pr(\Omega)$$

$\square$

Théorème. $\forall A, B \in 2^{\Omega}$,

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

Preuve. Soit $A, B \in 2^{\Omega}$; On pose :

$$A' := A - (A \cap B)$$

$$B' := B - (A \cap B)$$

On a : $A' \cap B' = \emptyset$ et donc, par définition de Pr,

$$\underline{\Pr(A' \cup B') = \Pr(A') + P(B')}$$

On a :

$$(A \cap B) \cap (A' \cup B') = \emptyset$$

et donc, par définition de Pr,

$$\Pr((A \cap B) \cup (A' \cup B')) = \Pr(A \cap B) + \Pr(A' \cup B')$$

En outre,

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A' \cup B')$$

Donc,

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A \cap B) + \Pr(A' \cup B')$$

Soit,

$$\underline{\Pr(A \cup B) = \Pr(A \cap B) + \Pr(A') + \Pr(B')} \qquad (\mathcal{E}_1)$$

On a :

$$A = (A \cap B) \cup A' \text{ et } (A \cap B) \cap A' = \emptyset$$

$$B = (A \cap B) \cup B' \text{ et } (A \cap B) \cap B' = \emptyset$$

D'où par définition de Pr :

$$\Pr(A) = \Pr(A \cap B) + \Pr(A') \iff \underline{\Pr(A') = \Pr(A) - \Pr(A \cap B)} \qquad (\mathcal{E}_2)$$

$$\Pr(B) = \Pr(A \cap B) + \Pr(B') \iff \underline{\Pr(B') = \Pr(B) - \Pr(A \cap B)} \qquad (\mathcal{E}_3)$$

Par $(\mathcal{E}_1)$, $(\mathcal{E}_2)$ et $(\mathcal{E}_3)$,

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A \cap B) + \Pr(A) - \Pr(A \cap B) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

D'où

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

□

Théorème. *Soient deux événements* $A, B \in 2^{\Omega}$,

$$A \subset B \Rightarrow \Pr(A \cap B) = \Pr(A)$$

Preuve.

$$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$$

□

Lemme. *Soit* $A \in 2^{\Omega}$ *tel que :*

(i) $A \subset B$ *;*

(ii) $B \neq \emptyset$ *;*

Alors, $\exists C \in 2^{\Omega}$*, tel que :*

(i) $A \cup C = B$ *;*

(ii) $A \cap C = \emptyset$.

Preuve. Sous les hypothèses, deux cas se présentent :

1. $A = \emptyset$; alors $C = B$;
2. $A \neq \emptyset$; on pose : $C = \bar{A} \cap B$; en effet :
   (i) $A \cup C = A \cup (\bar{A} \cap B) = (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B) = \Omega \cap B = B$;
   (ii) $A \cap C = A \cap (\bar{A} \cap B) = (A \cap \bar{A}) \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$.

$\square$

Théorème. *Soient deux événements* $A, B \in 2^{\Omega}$*,*

$$A \subset B \Rightarrow \Pr(A) \leq \Pr(B)$$

Preuve.

1. <u>Cas 1 : $B = \emptyset$</u>
   D'où, $A = \emptyset$; et donc $\Pr(A) = \Pr(B) = 0$.
2. <u>Cas 2 : $B \neq \emptyset$</u>
   $\exists C \in 2^{\Omega}$, tel que : $A \cup C = B$ et $A \cap C = \emptyset$.
   D'où,
   $$\Pr(A \cup C) = \Pr(A) + \Pr(C) = \Pr(B)$$
   Par positivité de la probabilité, $\Pr(A) \leq \Pr(B)$.

$\square$

3 Probabilité conditionnelle

Définition (Probabilité conditionnelle)**.** Une probabilité conditionnelle est la probabilité d'un événement sachant qu'un autre événement a eu lieu. Soient deux événements A et B (i.e. $A, B \in 2^{\Omega}$), si $\Pr(A) \neq 0$, alors la probabilité conditionnelle de B conditionnée par A (aussi appelée probabilité de B sachant A) est définie par :

$$\Pr(B|A) := \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)}$$

Exemple. Soit une classe de lycée. Nous considérons les événements suivants :

– F : ''un élève est une fille";

– A : "un élève étudie l'allemand".

La classe vérifie :

	F	$\neg F$
A	10	7
$\neg A$	4	9

Quelle est la probabilité qu'un élève étudie l'allemand, sachant que cet élève est une fille (i.e. $\Pr(A|F)$) ?

On a par définition :

$$\Pr(A|F) = \frac{\Pr(A \wedge F)}{\Pr(F)}$$

Ici :

$$\Pr(A|F) = \frac{\text{Nombre de filles étudiant l'allemand}}{\text{Nombre de filles}}$$

Soit :

$$\Pr(A|F) = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

Théorème. $\forall A, B \in 2^{\Omega}$, $\Pr(A) \neq 0$,

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(B|A). \Pr(A)$$

Preuve.

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)} \iff \Pr(B|A). \Pr(A) = \Pr(A \cap B)$$

□

Lemme. *Soient* $A_1, A_2..., A_k$ *des événements tels que* $\Pr(A_1 \cap ... \cap A_k) \neq 0$.
Alors : $\forall i \in \{1, ..., k\}, \Pr(A_1 \cap ... \cap A_i) \neq 0$.

Preuve. On pose :

$$B_i := A_1 \cap ... \cap A_i$$

On a alors, $\forall i \in \{1, ..., k\}$,

$$B_k \subset B_i$$

D'où, $\forall i \in \{1, ..., k\}$, $\exists C \subset \Omega$, tel que :

$$B_i = B_k \cup C \quad \text{et} \quad B_k \cap C = \emptyset$$

Par hypothèse, $\Pr(B_k) \neq 0$ et $\Pr(C) \in [0, 1]$. On en déduit :

$$\Pr(B_i) = \Pr(B_k) + \Pr(C) \neq 0$$

□

Théorème. *Soient* $A_1, A_2..., A_k$ *des événements tels que :*

(i) $k \geq 2$ *;*

(ii) $\Pr(A_1 \cap ... \cap A_{k-1}) \neq 0$ *;*

Alors :

$$\Pr(A_1 \cap ... \cap A_k) = \Pr(A_1). \Pr(A_2|A_1). \Pr(A_3|A_1 \cap A_2)... \Pr(A_k|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1})$$

Preuve. On démontre, par récurrence, la propriété Π, définie ci-après, pour $\iota \in \{2, ..., k\}$:

$$\Pi(\iota) : \Pr(A_1 \cap ... \cap A_\iota) = \Pr(A_1). \Pr(A_2|A_1). \Pr(A_3|A_1 \cap A_2)... \Pr(A_\iota|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{\iota-1})$$

1. Cas initial : Par hypothèse, on a : $\Pr(A_1) \neq 0$, d'où :

$$\Pi(2) : \Pr(A_1 \cap A_2) = \Pr(A_1). \Pr(A_2|A_1)$$

2. Hypothèse de récurrence : Pour $\kappa \in \{2, ..., k-1\}$,

$$\Pi(\kappa) : \Pr(A_1 \cap ... \cap A_\kappa) = \Pr(A_1). \Pr(A_2|A_1). \Pr(A_3|A_1 \cap A_2)... \Pr(A_\kappa|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{\kappa-1})$$

3. Hérédité : On a :

$$\Pr(A_1 \cap ... \cap A_\kappa \cap A_{\kappa+1}) = \Pr(A_{\kappa+1} \cap (A_1 \cap ... \cap A_\kappa))$$

En outre, par hypothèse,

$$\Pr(A_1 \cap ... \cap A_\kappa) \neq 0$$

D'où,

$\Pr(A_{\kappa+1} \cap (A_1 \cap ... \cap A_\kappa)) = \Pr(A_{\kappa+1}|A_1 \cap ... \cap A_\kappa). \Pr(A_1 \cap ... \cap A_\kappa)$

Par hypothèse de récurrence,

$\Pr(A_1 \cap ... \cap A_\kappa) = \Pr(A_1). \Pr(A_2|A_1). \Pr(A_3|A_1 \cap A_2) ... \Pr(A_\kappa|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{\kappa-1})$

D'où,

$$\begin{aligned}\Pr(A_{\kappa+1} \cap (A_1 \cap ... \cap A_\kappa)) &= \Pr(A_{\kappa+1}|A_1 \cap ... \cap A_\kappa) \times \\ &\Pr(A_1). \Pr(A_2|A_1). \Pr(A_3|A_1 \cap A_2) ... \Pr(A_\kappa|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{\kappa-1})\end{aligned}$$

D'où, l'établissement de $\Pi(\kappa + 1)$.
Donc, en particulier, $\Pi(k)$ est vraie.

□

4 Théorème des probabilités totales

Définition (Partition)**.** $(B_i)_{i\in I}$ est une partition de B (I est supposé fini dénombrable) si :

(i) $\forall i \in I, B_i \neq \emptyset$;

(ii) $i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$;

(iii) $B = \bigcup_{i\in I} B_i$.

Théorème. *Soient A et B deux évènements. Si $(B_i)_{i\in I}$ est une partition de B, alors :*

$$\Pr(A \cap B) = \sum_{i\in I} \Pr(A \cap B_i)$$

Preuve.

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A \cap \bigcup_{i\in I} B_i) \qquad ; \big(B = \bigcup_{i\in I} B_i\big)$$

$$\Pr(A \cap B) = \Pr\big(\bigcup_{i\in I} A \cap B_i\big)$$

$$\Pr(A \cap B) = \sum_{i\in I} \Pr(A \cap B_i)$$

□

Théorème. *Soit A un évènement. Si $(B_i)_{i\in I}$ est une partition de Ω, alors :*

$$\Pr(A) = \sum_{i\in I} \Pr(A \cap B_i)$$

Preuve.

$$\Pr(A) = \Pr(A \cap \Omega) = \sum_{i\in I} \Pr(A \cap B_i)$$

□

Théorème (premier théorème des probabilités totales)**.** *Soit A et B deux évènements. Si $(B_i)_{i\in I}$ est une partition de l'évènement B, alors :*

$$\Pr(A|B) = \sum_{i\in I} \Pr(A|B_i)\Pr(B_i|B)$$

Preuve.

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

$$\Pr(A|B) = \frac{\sum_i \Pr(A \cap B_i)}{\Pr(B)}$$

$$\Pr(A|B) = \sum_i \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\Pr(B)}$$

$$\Pr(A|B) = \sum_i \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\Pr(B)} \frac{\Pr(B_i)}{\Pr(B_i)}$$

$$\Pr(A|B) = \sum_i \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\Pr(B_i)} \frac{\Pr(B_i)}{\Pr(B)}$$

$$\Pr(A|B) = \sum_i \Pr(A|B_i) \frac{\Pr(B_i)}{\Pr(B)}$$

$$\Pr(A|B) = \sum_i \Pr(A|B_i) \frac{\Pr(B_i \cap B)}{\Pr(B)}$$

$$\Pr(A|B) = \sum_i \Pr(A|B_i) \Pr(B_i|B)$$

□

Lemme. *Soient A un événement, alors :*

$$\Pr(A|\Omega) = \Pr(A)$$

Preuve. $\Pr(A|\Omega) = \frac{\Pr(A\cap\Omega)}{\Pr(\Omega)} = \Pr(A)$. □

Théorème (deuxième théorème des probabilités totales)**.** *Soit A un évènement. Si $(B_i)_{i\in I}$ est une partition de Ω, alors :*

$$\Pr(A) = \sum_{i\in I} \Pr(A|B_i) \Pr(B_i)$$

Preuve.

$$\Pr(A) = \Pr(A|\Omega) = \sum_{i\in I} \Pr(A|B_i) \Pr(B_i|\Omega)$$

$$\Pr(A) = \sum_{i\in I} \Pr(A|B_i) \Pr(B_i)$$

□

5 Application : paradoxe de Monty Hall

Définition (problème de Monty Hall)**.**

- Soient trois portes : l'une cache une voiture, chacune des deux autres cachant une chèvre.
- Le présentateur sait où se cache la voiture.
- Le joueur, qui souhaite trouver la voiture, choisit une des portes (sans que celle-ci ne soit ouverte).
- Le présentateur ouvre une autre porte (que celle choisie par le joueur), qui révèle alors une chèvre.
- Le présentateur demande au candidat si celui-ci souhaite modifier son choix, avant que soit effectué l'ouverture des portes.

On pose :

- $G :=$ "Le joueur gagne" ;
- $1^{Vrai} :=$ "le premier choix effectué par le joueur est le bon".

Lemme.

$$\Pr(G) = \Pr(G|1^{Vrai}).\Pr(1^{Vrai}) + \Pr(G|\overline{1^{Vrai}}).\Pr(\overline{1^{Vrai}})$$

Preuve. $\{1^{Vrai}, \overline{1^{Vrai}}\}$ est une partition de l'espace des possibles. On utilise le deuxième théorème des probabilités totales. □

Dans ce qui suit, le problème est implicitement généralisé à n portes (le problème initial supposant $n = 3$) ; le nombre de portes ouvertes (dévoilant chacune une chèvre) est ainsi : $n - 2$.

Lemme.

$$\Pr(G) = \Pr(G|1^{Vrai}).\frac{1}{n} + \Pr(G|\overline{1^{Vrai}}).\frac{n-1}{n}$$

Preuve. $\Pr(1^{Vrai}) = \frac{1}{n}$; $\Pr(\overline{1^{Vrai}}) = \frac{n-1}{n}$. □

Théorème.

- *Si le joueur conserve son premier choix, alors* $\Pr(G) = \frac{1}{n}$ *;*
- *Si le joueur modifie son premier choix, alors* $\Pr(G) = \frac{n-1}{n}$.

Preuve. Cas 1 : le joueur conserve son premier choix

- $\Pr(G|1^{Vrai}) = 1$;
- $\Pr(G|\overline{1^{Vrai}}) = 0$.

D'où,

$$\Pr(G) = 1.\frac{1}{n} + 0.\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

Cas 2 : le joueur modifie son premier choix

- $\Pr(G|1^{Vrai}) = 0$;
- $\Pr(G|\overline{1^{Vrai}}) = 1$.

D'où,

$$\Pr(G) = 0.\frac{1}{n} + 1.\frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

□

6 Théorème de Bayes-Laplace

Théorème (théorème de Bayes-Laplace)**.** *Soient A et B deux événements de probabilités non nulles. Alors :*

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A|B)\Pr(B)}{\Pr(A)}$$

Preuve.

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(B \cap A)}{\Pr(A)} \iff \Pr(A \cap B) = \Pr(B|A).\Pr(A)$$

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \iff \Pr(A \cap B) = \Pr(A|B).\Pr(B)$$

D'où,

$$\Pr(B|A).\Pr(A) = \Pr(A|B).\Pr(B) \iff \Pr(B|A) = \frac{\Pr(A|B).\Pr(B)}{\Pr(A)}$$

$\square$

7 Variable aléatoire

Definition 1 (critère)**.** Un critère sur Ω est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

On pose :

$$X(\Omega) := \{X(w_i) : w_i \in \Omega\}$$

$X(\Omega)$ exprime : "l'ensemble des valeurs possibles du critères X" sur Ω.

Definition 2 (variable aléatoire)**.** Une variable aléatoire (selon le critère X) est une variable parcourant $X(\Omega)$.

Autrement dit, $X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs que peut prendre une variable aléatoire (selon le critère X).

Un abus courant est de confondre la variable aléatoire avec son critère : X est un critère sur Ω, tout en étant une variable aléatoire selon ce critère. Nous suivons cet abus, comme il est de coutume. Par suite,

1. $X \in X(\Omega)$;
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, "$X = x$" signifie : "x est réalisée", i.e. :
$$\exists w \in \Omega, X(w) = x$$
3. Pour $x \in \mathbb{R}$, "$\Pr(X = x)$" signifie : "la probabilité que x soit réalisée" ; autrement dit :
$$\Pr(X = x) := \frac{\#\{w \in \Omega : X(w) = x\}}{\#\Omega}$$

Il suit que : $\forall x \in \mathbb{R} - X(\Omega)$,

$$\Pr(X = x) = 0$$

Exemple (fil rouge)**.** On lance deux pièces.

$$\Omega = \{FF, PF, FP, PP\}$$

La variable aléatoire X quantifie le nombre de pile :

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

On a :

$$\Pr(X = 0) = \frac{\#\{FF\}}{4} = \frac{1}{4}$$
$$\Pr(X = 1) = \frac{\#\{PF, FP\}}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\Pr(X = 2) = \frac{\#\{PP\}}{4} = \frac{1}{4}$$

Définition (loi de probabilité d'une variable aléatoire)**.** La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est la fonction :

$$\mathcal{L}_X : X(\Omega) \to [0, 1]$$

$$x \mapsto \Pr(X = x)$$

Exemple (fil rouge)**.**

$$\mathcal{L}_X = \{ \quad 0 \to \frac{1}{4}; \quad 1 \to \frac{1}{2}; \quad 2 \to \frac{1}{4} \quad \}$$

Définition (espérance)**.**

$$\mathrm{E}(X) := \sum_i x_i . \Pr(X = x_i)$$

Exemple (fil rouge)**.**

$$\mathrm{E}(X) = 0. \Pr(X = 0) + 1. \Pr(X = 1) + 2. \Pr(X = 2)$$

$$\mathrm{E}(X) = 0.\frac{1}{4} + 1.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{E}(X) = 1$$

Autrement dit, pour chaque lancé de 2 pièces, on peut “espérer” avoir 1 pile. En pratique, cela signifie que si on effectue n lancés de 2 pièces, alors : si n est “grand”, le nombre de piles est “proche” de n.