

# TP de Probabilités discrètes

Version 2.2

Michaël Guedj



TP de Probabilités discrètes de Michaël Guedj est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons Attribution 4.0 International.

## Table des Matières

<b>1</b>	<b>TP 1 – Le paradoxe des anniversaires</b>	<b>3</b>
1.1	Problème des anniversaires . . . . .	3
1.2	Intuition . . . . .	3
1.3	Considérations préalables . . . . .	4
1.4	Résolution du problème des anniversaires . . . . .	4
1.5	Côté individu . . . . .	4
1.6	Simulation . . . . .	5
<b>2</b>	<b>TP 1 – Le paradoxe des anniversaires – Correction</b>	<b>7</b>
2.1	Problème des anniversaires . . . . .	7
2.2	Intuition . . . . .	7
2.3	Considérations préalables . . . . .	7
2.4	Résolution du problème des anniversaires . . . . .	7
2.5	Côté individu . . . . .	9
2.6	Simulation . . . . .	10
<b>3</b>	<b>TP 2 – Paradoxe des deux enfants</b>	<b>12</b>
3.1	Enoncé du problème . . . . .	12
3.2	Résolution . . . . .	12
3.3	Exercice . . . . .	12
<b>4</b>	<b>TP3 – Espérance</b>	<b>13</b>
4.1	Espérance et lancers de pièces . . . . .	13
4.2	Espérance et boîte magique . . . . .	14
<b>5</b>	<b>TP4 – Le paradoxe de Monty Hall</b>	<b>15</b>

## 1 TP 1 – Le paradoxe des anniversaires

### 1.1 Problème des anniversaires

Dans une classe de 25 élèves, quelle est la probabilité  $p$ , que deux élèves (au moins), fêtent leurs anniversaires le même jour ?

### 1.2 Intuition

En vous basant sur votre intuition, estimer la probabilité en question.

### 1.3 Considérations préalables

On suppose :

- Que les années comportent 365 jours par an (années bissextiles non considérées) ;
- La distribution des naissances est uniforme ; i.e. quelque soit le jour  $i \in \{1, \dots, 365\}$ , quelque soit l'élève  $x$ , la probabilité que  $x$  fête son anniversaire le jour  $i$  est de  $\frac{1}{365}$ .

### 1.4 Résolution du problème des anniversaires

On considère une classe de  $n$  élèves.

1. Soit  $n = 2$ . Donner la probabilité  $\bar{p}$  que les deux élèves de la classe ne fêtent pas leurs anniversaires le même jour.
2. Idem pour  $n = 3$ .
3. Idem pour  $n = k$ .
4. Résoudre le problème des anniversaires (utiliser la relation :  $p = 1 - \bar{p}$ ).
5. Considérer les cas :  $n = 30$  ;  $n = 50$  et  $n = 80$ .

### 1.5 Côté individu

Soit un individu : *Toto*, dans une classe de  $n = 25$  élèves. Quelle est la probabilité qu'un (autre) élève soit né le même jour que Toto ?

1. Si  $n = 2$ , quelle est la probabilité  $\bar{p}$  pour que l'autre élève soit né un autre jour que Toto ?

2. Idem pour  $n = 3$ .
3. Idem pour  $n = k$ .
4. Trouver la probabilité  $p$  qu'un (autre) élève soit né le même jour que Toto (utiliser la relation  $p = 1 - \bar{p}$ ).
5. Que donne  $p$  pour  $n = 30$  ?  $n = 50$  ?  $n = 80$  ?

## 1.6 Simulation

On modélise une classe de  $n$  élèves par une liste de  $n$  éléments compris entre 1 et 365. (On suppose que la liste est indexée de 0 à  $n - 1$ ).

- (A) L'algorithme, ci-après, permet de tester si deux personnes, dans la classe, sont nés le même jour.

```
test_anniversaire(classe : liste de taille n)
begin
  for i = 0, ..., n-1 do
    for j = i+1, ..., n-1 do
      if classe[i] = classe[j] then
        return True
      end if
    end for; end for
  return False
end
```

**Lemme.** *Au  $i$ -ième tour de la première boucle, en supposant que l'algorithme ne s'est pas arrêté,*

$$\forall x \in \{0, \dots, i-1\}, \forall j \in \{x+1, \dots, n-1\}, \text{classe}[i] \neq \text{classe}[j]$$

*Proof.* Par l'absurde,

$$\exists x \in \{0, \dots, i-1\}, \exists j \in \{x+1, \dots, n-1\}, \text{classe}[x] = \text{classe}[j]$$

Donc au tour de boucle  $x$ , l'algorithme s'est arrêté, ce qui contredit notre hypothèse.  $\square$

**Théorème.** *Au  $i$ -ième tour de la première boucle, en supposant que l'algorithme ne s'est pas arrêté,*

$$\forall j \in \{0, \dots, i-1\}, \text{classe}[i] \neq \text{classe}[j]$$

*Preuve.* Par le lemme précédant,

$$\forall x \in \{0, \dots, i-1\}, \forall j \in \{x+1, \dots, n-1\}, classe[i] \neq classe[j]$$

On pose :

$$E(x) := \{x+1, \dots, n-1\}$$

On a ainsi :

$$\forall x \in \{0, \dots, i-1\}, \forall j \in E(x), classe[i] \neq classe[j]$$

On remarque que :

$$E(0) \supset E(1) \supset \dots \supset E(i-1)$$

(En effet :

$$E(0) = \{1, \dots, n-1\}$$

$$E(1) = \{2, \dots, n-1\}$$

...

$$E(i-1) = \{i, \dots, n-1\}$$

)

De plus,

$$i \in E(i-1)$$

Donc,

$$\forall x \in \{0, \dots, i-1\}, i \in E(x)$$

On rappelle que :

$$\forall x \in \{0, \dots, i-1\}, \forall j \in E(x), classe[i] \neq classe[j]$$

D'où,

$$\forall x \in \{0, \dots, i-1\}, classe[x] \neq classe[i]$$

□

- (B) L'algorithme, ci-après, permet de tester si une personne, dans la classe, est né le même jour que Toto.

```

test_anniversaire_toto(classe : liste de taille n)
begin
    // Toto est supposé en position 0 (sans perte de généralité)
    for i = 1, ..., n-1 do
        if classe[0] = classe[i] then
            return True
        end if
    end for
    return False
end

```

- (C) Via implémentation, évaluer “pratiquement” la justesse des résultats des sections précédentes.

## 2 TP 1 – Le paradoxe des anniversaires – Correction

### 2.1 Problème des anniversaires

Dans une classe de 25 élèves, quelle est la probabilité  $p$ , que deux élèves (au moins), fêtent leurs anniversaires le même jour ?

### 2.2 Intuition

En vous basant sur votre intuition, estimer la probabilité en question.

### 2.3 Considérations préalables

On suppose :

- Que les années comportent 365 jours par an (années bissextiles non considérées) ;
- La distribution des naissances est uniforme ; i.e. quelque soit le jour  $i \in \{1, \dots, 365\}$ , quelque soit l'élève  $x$ , la probabilité que  $x$  fête son anniversaire le jour  $i$  est de  $\frac{1}{365}$ .

### 2.4 Résolution du problème des anniversaires

On considère une classe de  $n$  élèves.

1. Soit  $n = 2$ . Donner la probabilité  $\bar{p}$  que les deux élèves de la classe ne fêtent pas leurs anniversaires le même jour.

$$\bar{p} = \frac{365 \times 364}{365^2}$$

(a) Nombre de possibilités satisfaisant la contrainte :  $365 \times 364$ .

(b) Nombre total de possibilités :  $365^2$ .

2. Idem pour  $n = 3$ .

$$\bar{p} = \frac{365 \times 364 \times 363}{365^3}$$

$$(\bar{p} = \frac{365 \times (365 - 2 + 1) \times (365 - 3 + 1)}{365^3})$$

(a) Nombre de possibilités satisfaisant la contrainte :  $365 \times 364 \times 363$ .



(b) Nombre total de possibilités :  $365^3$ .

3. Idem pour  $n = k$ .

$$\bar{p} = \frac{365 \times 364 \times \dots \times (365 - k + 1)}{365^k}$$

$$\bar{p} = \prod_{i=1}^k \frac{(365 - i + 1)}{365}$$

(a) Nombre de possibilités satisfaisant la contrainte :

$$365 \times 364 \times \dots \times (365 - k + 1)$$

(b) Nombre total de possibilités :  $365^k$ .

4. Résoudre le problème des anniversaires (utiliser la relation :  $p = 1 - \bar{p}$ ).

On a, pour  $n = k$ :

$$p = 1 - \prod_{i=1}^k \frac{(365 - i + 1)}{365}$$

Soit, pour  $n = 25$  :

$$p = 1 - \prod_{i=1}^{25} \frac{(365 - i + 1)}{365}$$

Soit :

$$0.56 < p < 0.57$$

5. Considérer les cas :  $n = 30$  ;  $n = 50$  et  $n = 80$ .

Pour  $n = 30$ ,

$$0.70 < p < 0.71$$

Pour  $n = 50$ ,

$$0.970 < p < 0.971$$

Pour  $n = 80$ ,

$$p \approx 0.99991$$

## 2.5 Côté individu

Soit un individu : *Toto*, dans une classe de  $n = 25$  élèves. Quelle est la probabilité qu'un (autre) élève soit né le même jour que Toto ?

1. Si  $n = 2$ , quelle est la probabilité  $\bar{p}$  pour que l'autre élève soit né un autre jour que Toto ?

$$\bar{p} = \frac{364}{365}$$

2. Idem pour  $n = 3$ .

$$\bar{p} = \left(\frac{364}{365}\right)^2$$

3. Idem pour  $n = k$ .

$$\bar{p} = \left(\frac{364}{365}\right)^{k-1}$$

4. Trouver la probabilité  $p$  qu'un (autre) élève soit né le même jour que Toto (utiliser la relation  $p = 1 - \bar{p}$ ).

Pour  $n = k$ ,

$$p = 1 - \bar{p} = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{k-1}$$

Pour  $n = 25$

$$p \approx 0.06$$

5. Que donne  $p$  pour  $n = 30$  ?  $n = 50$  ?  $n = 80$  ?

Pour  $n = 30$ ,

$$p \approx 0.08$$

Pour  $n = 50$ ,

$$p \approx 0.13$$

Pour  $n = 80$ ,

$$p \approx 0.2$$

## 2.6 Simulation

On modélise une classe de  $n$  élèves par une liste de  $n$  éléments compris entre 1 et 365. (On suppose que la liste est indexée de 0 à  $n - 1$ ).

- (A) L'algorithme, ci-après, permet de tester si deux personnes, dans la classe, sont nés le même jour.

```
test_anniversaire(classe : liste de taille n)
begin
  for i = 0, ..., n-1 do
    for j = i+1, ..., n-1 do
      if classe[i] = classe[j] then
        return True
      end if
    end for; end for
  return False
end
```

**Lemme.** *Au  $i$ -ième tour de la première boucle, en supposant que l'algorithme ne s'est pas arrêté,*

$$\forall x \in \{0, \dots, i-1\}, \forall j \in \{x+1, \dots, n-1\}, \text{classe}[i] \neq \text{classe}[j]$$

*Proof.* Par l'absurde,

$$\exists x \in \{0, \dots, i-1\}, \exists j \in \{x+1, \dots, n-1\}, \text{classe}[x] = \text{classe}[j]$$

Donc au tour de boucle  $x$ , l'algorithme s'est arrêté, ce qui contredit notre hypothèse.  $\square$

**Théorème.** *Au  $i$ -ième tour de la première boucle, en supposant que l'algorithme ne s'est pas arrêté,*

$$\forall j \in \{0, \dots, i-1\}, \text{classe}[i] \neq \text{classe}[j]$$

*Preuve.* Par le lemme précédant,

$$\forall x \in \{0, \dots, i-1\}, \forall j \in \{x+1, \dots, n-1\}, \text{classe}[i] \neq \text{classe}[j]$$

On pose :

$$E(x) := \{x+1, \dots, n-1\}$$

On a ainsi :

$$\forall x \in \{0, \dots, i-1\}, \forall j \in E(x), classe[i] \neq classe[j]$$

On remarque que :

$$E(0) \supset E(1) \supset \dots \supset E(i-1)$$

(En effet :

$$E(0) = \{1, \dots, n-1\}$$

$$E(1) = \{2, \dots, n-1\}$$

...

$$E(i-1) = \{i, \dots, n-1\}$$

)

De plus,

$$i \in E(i-1)$$

Donc,

$$\forall x \in \{0, \dots, i-1\}, i \in E(x)$$

On rappelle que :

$$\forall x \in \{0, \dots, i-1\}, \forall j \in E(x), classe[i] \neq classe[j]$$

D'où,

$$\forall x \in \{0, \dots, i-1\}, classe[x] \neq classe[i]$$

□

- (B) L'algorithme, ci-après, permet de tester si une personne, dans la classe, est né le même jour que Toto.

```
test_anniversaire_toto(classe : liste de taille n)
begin
  // Toto est supposé en position 0 (sans perte de généralité)
  for i = 1, ..., n-1 do
    if classe[0] = classe[i] then
      return True
    end if
  end for
  return False
end
```

- (C) Via implémentation, évaluer “pratiquement” la justesse des résultats des sections précédentes.

### 3 TP 2 – Paradoxe des deux enfants

#### 3.1 Enoncé du problème

Toto a exactement deux enfants. Étant donné que l'un de ces deux enfants est un garçon, et que la probabilité d'avoir un garçon est de  $\frac{1}{2}$ , quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi un garçon ?

#### 3.2 Résolution

$$\Pr(2 \text{ garçons} \mid 1 \text{ garçon au moins}) = \frac{\Pr(2 \text{ garçons} \wedge 1 \text{ garçon au moins})}{\Pr(1 \text{ garçon au moins})}$$

$$\Pr(2 \text{ garçons} \mid 1 \text{ garçon au moins}) = \frac{\Pr(2 \text{ garçons})}{\Pr(1 \text{ garçon au moins})}$$

$$\Pr(2 \text{ garçons} \mid 1 \text{ garçon au moins}) = \frac{1/4}{3/4}$$

$$\Pr(2 \text{ garçons} \mid 1 \text{ garçon au moins}) = \frac{1}{3}$$

#### 3.3 Exercice

L'objectif est d'effectuer des simulations informatiques, assurant (ou non), la fiabilité du résultat théorique.

## 4 TP3 – Espérance

### 4.1 Espérance et lancers de pièces

#### Enoncé du problème

On demande à 100 personnes de lancer (chacun) deux pièces de monnaie. On comptabilise ensuite le nombre de piles.

Quel est le nombre de piles (“environ”) obtenu ?

De même mais avec 1 000 personnes ; puis 10 000 personnes.

#### Explication théorique

L’univers des événements pour un lancer est :  $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$  avec, en supposant  $\Pr(P) = \Pr(F) = \frac{1}{2}$  :

$$\Pr(PP) = \Pr(PF) = \Pr(FP) = \Pr(FF) = \frac{1}{4}$$

La variable aléatoire  $X$  quantifie le nombre de piles pour un lancer.

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

La loi de probabilité de  $X$  est :

$$\mathcal{L}_X = \left\{ 0 \rightarrow \frac{1}{4}; \quad 1 \rightarrow \frac{1}{2}; \quad 2 \rightarrow \frac{1}{4} \right\}$$

L’espérance de  $X$  est ainsi :

$$E(X) = 0 \cdot \Pr(X = 0) + 1 \cdot \Pr(X = 1) + 2 \cdot \Pr(X = 2)$$

$$E(X) = 0 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$E(X) = 1$$

Autrement dit, pour chaque lancer de 2 pièces, on peut “espérer” avoir 1 pile.

En pratique, cela signifie que si on effectue  $n$  lancers, alors : si  $n$  est “grand”, le nombre de piles sera “proche” de  $n$ .

#### Exercice

L’objectif est d’effectuer des simulations informatiques, assurant (ou non), la fiabilité du résultat théorique.

## 4.2 Espérance et boîte magique

### Enoncé du problème

Soit une boîte magique agissant comme suit :

- La boîte "génère" : 3, avec probabilité :  $\frac{1}{3}$  ;
- La boîte "génère" :  $-1$ , avec probabilité :  $\frac{2}{3}$ .

Quelle est la somme des valeurs générées par la boîte, pour  $n$  générations de valeur ?

### Explication théorique

L'univers des événements pour une génération est :

$$\Omega = \{-1, 3\}$$

Ici la variable aléatoire  $X$  prend ses valeurs dans  $X(\Omega) = \Omega$ .

La loi de probabilité de  $X$  est :

$$\mathcal{L}_X = \left\{ -1 \rightarrow \frac{2}{3}; \quad 3 \rightarrow \frac{1}{3} \right\}$$

L'espérance de  $X$  est ainsi :

$$E(X) = -1 \cdot \Pr(X = -1) + 3 \cdot \Pr(X = 3)$$

$$E(X) = -1 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3}$$

$$E(X) = \frac{1}{3}$$

Autrement dit, pour chaque valeur générée, on peut "espérer" avoir  $\frac{1}{3}$ .

En pratique, cela signifie que si on effectue  $n$  générations de valeur, alors : si  $n$  est "grand", la somme des valeurs générées sera "proche" de :

$$n \cdot E(X) = \frac{n}{3}$$

### Exercice

L'objectif est d'effectuer des simulations informatiques, assurant (ou non), la fiabilité du résultat théorique.

## 5 TP4 – Le paradoxe de Monty Hall

- Soient trois portes : l'une cache une voiture, chacune des deux autres cachant une chèvre.
- Le présentateur sait où se cache la voiture.
- Le joueur, qui souhaite trouver la voiture, choisit une des portes (sans que celle-ci ne soit ouverte).
- Le présentateur ouvre une autre porte (que celle choisie par le joueur), qui révèle alors une chèvre.
- Le présentateur demande au candidat si celui-ci souhaite modifier son choix, avant que soit effectué l'ouverture des portes.

### Exercice

Que doit faire le joueur ?