Implementación de artículo científico
AN EULER-BERNOULLI-LIKE FINITE ELEMENT METHOD FOR TIMOSHENKO BEAMS

Michael Heredia Pérez

22 de junio de 2020

Resumen

Esto es una traducción del artículo propuesto por Falsone y Settineri (2011). Se presenta la formulación matemática de la mecánica de Sólidos para la viga de Timoshenko (*Timoshenko Beam Model* - TBM en inglés) y cómo se aproxima a la teoría de Euler-Bernoulli (*Euler-Bernoulli Beam Model* - EBBM en inglés) mediante el uso de una variable ficticia relacionada al giro de la sección transversal; y apartir de esto se emplea el enfoque de Galerkin para resolver la nueva ecuación diferencial que se formaría en términos de la variable ficticia, mediante el método de los elementos finitos.

1. Búsqueda de la ecuación diferencial alternativa para TBM

El comportamiento de la viga de Timoshenko está gobernado por 3 pares de ecuaciones:

- Las ecuaciones de equilibrio:

$$\frac{dV(x)}{dx} = q(x) \tag{1a}$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) \tag{1b}$$

- Las ecuaciones de compatibilidad:

$$\phi(x) = \theta(x) - \frac{dv(x)}{dx} \tag{2a}$$

$$\kappa(x) = \frac{d\theta(x)}{dx} \tag{2b}$$

- Las ecuaciones constitutivas

$$V(x) = \alpha AG\phi(x) \tag{3a}$$

$$M(x) = EI\kappa(x) \tag{3b}$$

En las ecuaciones constitutivas asumimos que, tanto la rigidez a la flexión EI como la rigidez al corte AG, son constantes.

Se busca resumir las 6 ecuaciones anteriores en solo 2, para lo cual se toma:

$$\frac{dV(x)}{dx} = \alpha AG\frac{d\phi(x)}{dx} = \alpha AG\left(\frac{\theta(x)}{dx} - \frac{d^2v(x)}{dx^2}\right) \rightarrow \alpha AG\left(\frac{d\theta(x)}{dx} - \frac{d^2v(x)}{dx^2}\right) = q(x) \tag{4a}$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = EI\frac{d\kappa(x)}{dx} = EI\frac{d}{dx}\left(\frac{\theta(x)}{dx}\right) = V(x) \rightarrow EI\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} = \alpha AG\left(\theta(x) - \frac{dv(x)}{dx}\right) \tag{4b}$$

Despejando $\frac{d\theta(x)}{dx}$ de la ecuación (4a) y derivando con respecto a x la ecuación (4b)

$$\alpha AG\left(\frac{d\theta(x)}{dx} - \frac{d^2v(x)}{dx^2}\right) = q(x) \rightarrow \frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{q(x)}{t} + \frac{d^2v(x)}{dx^2} \tag{5a}$$

$$EI\left(\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} = \alpha AG\theta(x)\frac{dv(x)}{dx}\right) \rightarrow EI\left(\frac{d^3\theta(x)}{dx^3}\right) = EI\left(\frac{d\theta(x)}{dx} - \frac{d^2v(x)}{dx^2}\right) \tag{5b}$$

Reemplazando en (5b) la ecuación (5a) y la aplicación de dos derivadas de la misma, obtenemos una única ecuación diferencial para modelar el problema de la viga de Timoshenko:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{q(x)}{\alpha AG} + \frac{d^2v(x)}{dx^2}\right) \\ \frac{d^3\theta(x)}{dx^3} = \frac{1}{t}\frac{d^2q(x)}{dx^2} + \frac{d^4v(x)}{dx^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}\frac{d^2q(x)}{dx^2} + \frac{d^4v(x)}{dx^4} = \alpha AG\left(\frac{q(x)}{t} + \frac{d^2v(x)}{dx^2} - \frac{d^2v(x)}{dx^2}\right) \\ \frac{EI}{\alpha AG}\frac{d^2q(x)}{dx^2} + EI\frac{d^4v(x)}{dx^4} = q(x) \end{aligned}$$

Reorganizando los términos, despejando la derivada cuarta de $v(x)$

$$\boxed{\frac{d^4v(x)}{dx^4} = \frac{1}{EI}q(x) - \frac{1}{\alpha AG}\frac{d^2q(x)}{dx^2}} \tag{6}$$

Al comparar la ecuación de EBBM con (6), veremos que la única diferencia es la inclusión de un térmio adicional $-\frac{1}{t}\frac{d^2q(x)}{dx^2}$ en la ecuación de TBM; también vemos que ambas teorías son iguales cuando:

- $G \to \infty$, el material de la viga es infinitamente rígido al corte.
- Cuando la función de carga $q(x)$ es constante o lineal.

Ahora, a partir de la ecaución (6) se busca una expresión para el momento flector, la fuerza cortante y el ángulo de giro. El dominio de dicha ecuación diferencial es la longitud de la viga L, por lo tanto, podemos integrar en x entre 0 y L:

$$\begin{aligned}
\int_0^L \frac{d^4v(x)}{dx^4}dx &= \int_0^L \left(\frac{1}{EI}q(x) - \frac{1}{\alpha AG}\frac{d^2q(x)}{dx^2}\right)dx \\
\frac{d^3v(x)}{dx^3} &= \frac{1}{EI}V(x) - \frac{1}{\alpha AG}\frac{dq(x)}{dx} \\
V(x) &= EI\frac{d^3v(x)}{dx^3} + \frac{EI}{\alpha AG}\frac{dq(x)}{dx}
\end{aligned}$$

Integrando la fuerza cortante hallamos el momento

$$\begin{aligned}
\int_0^L V(x)dx &= EI\int_0^L \frac{d^3v(x)}{dx^3}dx + \frac{EI}{\alpha AG}\int_0^L \frac{dq(x)}{dx}dx \\
M(x) &= EI\frac{d^2v(x)}{dx^2} + \frac{EI}{\alpha AG}q(x)
\end{aligned}$$

Para hallar una expresión que represente al ángulo de giro, tomamos la ecuación (2a) y la reemplazamos en (3a), la cual finalmente se iguala a la expresión anterior del momento, así:

$$\begin{aligned}
V(x) = \alpha AG\phi(x) = \alpha AG\left(\theta(x) - \frac{dv(x)}{dx}\right) &= EI\frac{d^3v(x)}{dx^3} + \frac{EI}{\alpha AG}\frac{dq(x)}{dx} \\
\theta(x) - \frac{dv(x)}{dx} &= \frac{EI}{\alpha AG}\frac{d^3v(x)}{dx^3} + \frac{EI}{(\alpha AG)^2}\frac{dq(x)}{dx} \\
\theta(x) &= \frac{EI}{\alpha AG}\frac{d^3v(x)}{dx^3} + \frac{EI}{(\alpha AG)^2}\frac{dq(x)}{dx} - \frac{dv(x)}{dx}
\end{aligned}$$

Las expresiones anteriores se reescriben a continuación por su immportancia.

$$V(x) = EI\frac{d^3v(x)}{dx^3} + \frac{EI}{\alpha AG}\frac{dq(x)}{dx} \tag{7a}$$

$$M(x) = EI\frac{d^2v(x)}{dx^2} + \frac{EI}{\alpha AG}q(x) \tag{7b}$$

$$\theta(x) = \frac{EI}{\alpha AG}\frac{d^3v(x)}{dx^3} + \frac{EI}{(\alpha AG)^2}\frac{dq(x)}{dx} - \frac{dv(x)}{dx} \tag{7c}$$

Se puede observar que al hacer $\frac{EI}{\alpha AG} \to 0$ ambas teorías, TBM y EBBM, modelan mediante las mismas ecuaciones la fuerza cortante, el momento flector y el ángulo de giro de la sección transversal.

Las ecuaciones (4a) y (4b) se pueden combinar en una sola en términos de $\theta(x)$ para llegar a una ecuación alternativa, al derivar (4b) con respecto a x e igualándola con (4a):

$$EI\frac{d^3\theta(x)}{dx^3} = \alpha AG\left(\frac{d\theta(x)}{dx} - \frac{d^2v(x)}{dx^2}\right) = q(x)$$

$$EI\frac{d^3\theta(x)}{dx^3} = q(x) \tag{8}$$

Sin embargo, una ecuación diferencial de tercer orden no puede gobernar el problema de la viga de Timoshenko, ya que sería insuficiente para las 4 condiciones de frontera que se tienen. Para solucionar este inconveniente podemos definir una variable ficticia en términos del ángulo de giro, tal que:

$$\boxed{\theta(x) = \frac{d\bar{v}(x)}{dx}}$$

donde $\bar{v}(x)$ es un desplazamiento ficticio. De esta forma, al tomar la tercera derivada de $\theta(x)$ en la ecuación anterior $\frac{d^3\theta(x)}{dx^3} = \frac{d^4\bar{v}(x)}{dx^4}$, y reemplazando el resultado en (8), obtenemos:

$$\boxed{\frac{d^4\bar{v}(x)}{dx^4} = \frac{1}{EI}q(x)} \tag{9}$$

La ecuación (9) tiene la misma forma de la ecuación de EBBM dentro del problema de TBM. Analizando esta nueva variable, podemos despejarla y aplicar integración:

$$\theta(x) = \frac{d\bar{v}(x)}{dx}$$
$$\int \theta(x)dx = \int d\bar{v}(x)$$
$$\bar{v}(x) = \int \theta(x)dx + C$$

Se puede observar que la variable nueva $\bar{v}(x)$ está definida a pesar de una constante C de integración, la cual es desconocida; ahora, de la ecuación (3a) despejamos $\phi(x)$ para reemplazarlo en $\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} + \phi(x)$, obteniendo

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} + \frac{V(x)}{t}$$

Si integramos con respecto a x:

$$\int \theta(x) = v(x) + \int \frac{V(x)}{t} + C$$

y de la expresión anterior para $\theta(x)$

$$\bar{v}(x) = \int \theta(x) + C = v(x) + \frac{M(x)}{t} + \underbrace{C}_{\Sigma C}$$

llegando a la siguiente expresión:

$$\bar{v}(x) = v(x) + \frac{M(x)}{t} \tag{10}$$

Así, si derivamos a ambos lados de la ecuación (10) obtenemos el mismo resultado: el giro de la sección, sin importar qué constante hayamos tomado, por lo tanto podemos tomar $C = 0$ sin ningún problema.

Cada una de las condiciones de frontera se pueden relacionar con la nueva variable; ya se tiene el ángulo de giro $\theta(x) = \frac{d\bar{v}(x)}{dx}$, mirando las ecuaciones (3b) y (2b) $M(x) = EI\frac{d^2\bar{v}(x)}{dx^2}$, y con al ecuación (1b) $V(x) = EI\frac{d^3\bar{v}(x)}{dx^3}$, reemplazando la expresión reciente del momento en la ecuaión (10) $v(x) = \bar{v}(x) - \frac{EI}{\alpha AG}\frac{d^2\bar{v}(x)}{dx^2}$.

Recopilando estas ecuaciones:

$$\boxed{\begin{aligned}
\theta(x) &= \frac{d\bar{v}(x)}{dx} && \text{(11a)}\\
M(x) &= EI\frac{d^2\bar{v}(x)}{dx^2} && \text{(11b)}\\
V(x) &= EI\frac{d^3\bar{v}(x)}{dx^3} && \text{(11c)}\\
v(x) &= \bar{v}(x) - \frac{EI}{\alpha AG}\frac{d^2\bar{v}(x)}{dx^2} && \text{(11d)}
\end{aligned}}$$

En base a las deducciones hechas, el TBM se ha reducido a resolver la ecuación (9) con las condiciones de frontera del conjunto de ecuaciones (11).

2. Formulación debil de la ecuación a resolver

A partir del enfoque de Galerkin explicado en Kwon y Bang (2018) se lleva la ecuación (9) a la formulación debil, de tal forma que sea menos estricta en su continuidad y por ende más amigable de utilizar.

Para un elemento finito (EF) genérico definido en el dominio $[x_i, x_{n+i}]$, para i el número de nodo, n el número de EFs, buscamos suponer una función solución del problema (*trial function* en inglés) tal que satisfaga las condiciones de frontera del EF, es decir, los desplazamiento verticales y giros medidos en los nodos. Si

$\bar{\mathbf{a}}^{(e)} = \left[\bar{v}_{x_i}, \theta_{x_i}, \bar{v}_{x_{n+i}}, \theta_{x_{n+i}}\right]^T$ es el vector que contiene los movimientos nodales para un EF (e), podremos hacer una combinación lineal de forma tal que se involucren los movimientos nodales desconocidos mediante funciones, creando una función solución de prueba de la forma:

$$\bar{v}(x) = N_1(x)\bar{v}_{x_i} + N_2(x)\theta_{x_i} + N_3(x)\bar{v}_{x_{n+i}} + N_4(x)\theta_{x_{n+i}} \tag{12}$$

$$\bar{v}(x) = \mathbf{N}^T(x)\bar{\mathbf{a}}^{(e)} \tag{13}$$

$\mathbf{N}^T(x)$ es un vector que contiene funciones con las cuales estamos haciendo una interpolación de los movimientos nodales, tal que se respeten las condiciones de frontera. Por otro lado, la notación $\bar{()}$ se entiende como una función solución de prueba, asímismo se definió en un principio la variable ficticia, queriendo decir que siempre se ha supuesto como una posible solución al problema.

El problema consiste entonces en encontrar las constantes $\bar{v}_{x_i}, \theta_{x_i}, \bar{v}_{x_{n+i}}, \theta_{x_{n+i}}$ tales que el error de la solución sea mínimo. Para tal fin, evaluamos la ecuación (9) en la función (12), y como este resultado no será exacto, podemos calcular un residuo R de la operación:

$$R = EI\frac{d^4\bar{v}(x)}{dx^4} - q(x) \tag{14}$$

Para que este residuo sea lo más pequeño posible, casi cero, se deberá multiplicar por unas funciones de ayuden a ponderar la aproximación que se hizo en (12), para tal fin, Galerkin propone que las funciones ponderadoras (*weight or test functions* en inglés) sean obtenidas a partir de tomar la derivada de la función solución de prueba con respecto a cada una de las constantes:

$$w_1 = \frac{d\bar{v}(x)}{d\bar{v}_{x_i}} = N_1(x)$$
$$w_2 = \frac{d\bar{v}(x)}{d\theta_{x_i}} = N_2(x)$$
$$w_3 = \frac{d\bar{v}(x)}{d\bar{v}_{x_{n+i}}} = N_3(x)$$
$$w_4 = \frac{d\bar{v}(x)}{d\theta_{x_{n+i}}} = N_4(x)$$

Si llamamos $\mathbf{w}(x)$ al conjunto de estas funciones ponderadoras, veremos que es igual al conjunto $\mathbf{N}(x)$, y llamaremos a este grupo de funciones las funciones de forma del EF, siguiendo con todas las propiedades que la teoría trae. Ahora, para aplicar la formulación debil a la ecuación en cuestión, bastará con integrar sobre todo el dominio del EF la multiplicación del residuo por el conjunto de funciones ponderadoras, y hacer esta integral igual a cero para buscar los valores de las constants que satisfacen la ecuación.

$$\int_{x_i}^{x_{n+i}} \mathbf{w}(x) R dx = 0$$

$$\int_{x_i}^{x_{n+i}} \mathbf{w}(x) \left(EI \frac{d^4 \bar{v}(x)}{dx^4} - \frac{1}{EI} q(x) \right) dx = 0$$

$$\int_{x_i}^{x_{n+i}} \mathbf{w}(x) EI \frac{d^4 \bar{v}(x)}{dx^4} dx - \int_{x_i}^{x_{n+i}} \mathbf{w}(x) q(x) dx = 0$$

Tomamos la primera integral e integramos por partes hasta reducir la derivada parcial de cuarto orden a una de segundo orden. En un primer procedimiento

$$r = \mathbf{w}(x) \qquad ds = EI \frac{d^4 \bar{v}(x)}{dx^4} dx$$

$$dr = \frac{d\mathbf{w}(x)}{dx} dx \qquad s = EI \frac{d^3 \bar{v}(x)}{dx^3}$$

aplicando $\int r ds = rs - \int s dr$

$$\int_{x_i}^{x_{n+i}} \mathbf{w}(x) EI \frac{d^4 \bar{v}(x)}{dx^4} dx = \mathbf{w}(x) EI \frac{d^3 \bar{v}(x)}{dx^3} \Bigg|_{x_i}^{x_{n+i}} - \int_{x_i}^{x_{n+i}} \frac{d\mathbf{w}(x)}{dx} EI \frac{d^3 \bar{v}(x)}{dx^3} dx$$

nuevamente,

$$r = \frac{d\mathbf{w}(x)}{dx} \qquad ds = EI \frac{d^3 \bar{v}(x)}{dx^3} dx$$

$$dr = \frac{d^2\mathbf{w}(x)}{dx} dx \qquad s = EI \frac{d^2 \bar{v}(x)}{dx^2}$$

$$= \mathbf{w}(x) \frac{d^3 \bar{v}(x)}{dx^3} \Bigg|_{x_i}^{x_{n+i}} - \left[\frac{d\mathbf{w}(x)}{dx} EI \frac{d^2 \bar{v}(x)}{dx^2} \Bigg|_{x_i}^{x_{n+i}} - \int_{x_i}^{x_{n+i}} \frac{d^2\mathbf{w}(x)}{dx^2} EI \frac{d^2 \bar{v}(x)}{dx^2} dx \right]$$

$$= \left[\mathbf{w}(x) EI \frac{d^3 \bar{v}(x)}{dx^3} - \frac{d\mathbf{w}(x)}{dx} EI \frac{d^2 \bar{v}(x)}{dx^2} \right] \Bigg|_{x_i}^{x_{n+i}} + \int_{x_i}^{x_{n+i}} \frac{d^2\mathbf{w}(x)}{dx^2} EI \frac{d^2 \bar{v}(x)}{dx^2} dx$$

Juntando toda la expresión desde que se partió la integral nos da como resultado:

$$\boxed{\begin{aligned}&\left[\mathbf{w}(x)EI\frac{d^3\bar{v}(x)}{dx^3}-\frac{d\mathbf{w}(x)}{dx}EI\frac{d^2\bar{v}(x)}{dx^2}\right]\Bigg|_{x_i}^{x_{n+i}}\\ &+\int_{x_i}^{x_{n+i}}\frac{d^2\mathbf{w}(x)}{dx^2}EI\frac{d^2\bar{v}(x)}{dx^2}dx-\int_{x_i}^{x_{n+i}}\mathbf{w}(x)q(x))dx=0\end{aligned}} \tag{15}$$

En la ecuación (15) tenemos la formulación débil de la ecuación alternativa para TBM (9), vemos que tiene 3 términos, los cuales estudiamos a continuación.

Si evaluamos el primer término obtendremos valores de fuerza cortante y momento flector en los nodos del EF; tomaremos factor común (-1) por notación:

$$-\left[\mathbf{w}(x)\underbrace{EI\frac{d^3\bar{v}(x)}{dx^3}}_{\substack{\text{valor de la}\\ \text{fuerza cortante}\\ \text{en los nodos}\\ V(x_{n+i})-V(x_i)}}-\frac{d\mathbf{w}(x)}{dx}\underbrace{EI\frac{d^2\bar{v}(x)}{dx^2}}_{\substack{\text{valor del}\\ \text{Momento flector}\\ \text{en los nodos}\\ M(x_{n+i})-M(x_i)}}\right]\Bigg|_{x_i}^{x_{n+i}} \tag{16}$$

Diremos entonces que $\mathbf{q}^{(e)} =$ (16) será el vector de fuerzas nodales de equilibrio del EF (e).

$$\mathbf{q}^{(e)} = [V_i, M_i, V_{n+i}, M_{n+i}] \tag{17}$$

Tomando el segundo término y reemplazando los $\bar{v}(x)$ por la ecuación (13), y sabiendo que $\mathbf{N}(x) = \mathbf{w}(x)$:

$$\begin{aligned}&\int_{x_i}^{x_{n+i}}\frac{d^2}{dx^2}\mathbf{N}(x)EI\frac{d^2}{dx^2}(\mathbf{N}^T(x)\bar{\mathbf{a}}^{(e)})dx\\ &=\underbrace{\int_{x_i}^{x_{n+i}}\frac{d^2}{dx^2}\mathbf{N}(x)EI\frac{d^2}{dx^2}\mathbf{N}^T(x)dx}_{\bar{\mathbf{K}}^{(e)}}\,\bar{\mathbf{a}}^{(e)}\end{aligned}$$

obteniendo

$$= \bar{\mathbf{K}}^{(e)}\bar{\mathbf{a}}^{(e)} \tag{18}$$

Donde $\bar{\mathbf{K}}^{(e)}$ es la matriz de rigidez del EF (e) asociada a la variable ficticia. Por último, el termino final es simplemente $\mathbf{f}^{(e)}$, el vector de fuerzas nodales equivalentes:

$$\mathbf{f}^{(e)} = \int_{x_i}^{x_{n+i}}\mathbf{w}(x)q(x))dx \tag{19}$$

Al resolver la acoplación para todos los elementos finitos, tendremos la solución según Galerkin al problema:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_{n+i}} \mathbf{w}(x) R(x) dx = 0}$$

y reemplazando la integral por lo que ya está calculado, obtendremos:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(-\mathbf{f}^{(e)} + \bar{\mathbf{K}}^{(e)} \bar{\mathbf{a}}^{(e)} \right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{q}^{(e)}$$

$$\boxed{\bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{a}} - \mathbf{f} = \mathbf{q}} \tag{20}$$

3. Transformación de la variable ficticia a la verdadera

Como ya se había dicho, el vector de movimientos nodales ficitcios es de la forma $\bar{\mathbf{a}}^{(e)} = \left[\bar{v}_{x_i}, \theta_{x_i}, \bar{v}_{x_{n+i}}, \theta_{x_{n+i}} \right]^T$, con n entradas para n el número de grados de libertad[1]. En él las variables principales son $\bar{v}(x)$ y $\theta = \frac{d\bar{v}(x)}{dx}$, sin embargo el vector que necesitamos es el que contiene los movimientos verdaderos, de la forma $\mathbf{a}^{(e)} = \left[v_{x_i}, \theta_{x_i}, v_{x_{n+i}}, \theta_{x_{n+i}} \right]^T$, el cual podemos obtener mediante la siguiente relación:

$$\bar{\mathbf{a}}^{(e)} = (\mathbf{I_n} - \mathbf{C}^{(e)})^{-1} \mathbf{a}^{(e)} \tag{21}$$

donde $\mathbf{I_n}$ Es la matriz identidad de orden n y $\mathbf{C}^{(e)}$ es otra matriz, también cuadrada de tamaño nxn dada de la siguiente forma:

$$\mathbf{C}^{(e)} = \frac{EI}{\alpha AG} \begin{bmatrix} \left. \frac{d^2\mathbf{N}(x)}{dx^2} \right|_{x=x_i} \\ \emptyset \\ \left. \frac{d^2\mathbf{N}(x)}{dx^2} \right|_{x=x_{n+i}} \\ \emptyset \end{bmatrix} \tag{22}$$

En (22), se muestra la matriz $\mathbf{C}^{(e)}$ para el EF de estudio, nótese que para las posiciones del vector de movimientos cuya entrada son los desplazamientos vale la segunda derivada del vector de funciones de forma, mientras que para las posiciones donde estarían los giros vale cero vector. Con esta información es posible expandir la matriz hasta la dimensión que se requiera.

Así, reemplazando (21) en la ecuación de equilibrio matricial para el EF

[1]Nótese que es desarrollo de las ecuaciones se está haciendo para un EF de 2 nodos

$$\bar{\mathbf{K}}^{(e)}\bar{\mathbf{a}}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} + = \mathbf{q}^{(e)}$$

obtenemos

$$\bar{\mathbf{K}}^{(e)}(\mathbf{I_n} - \mathbf{C}^{(e)})^{-1}\mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} + = \mathbf{q}^{(e)}$$

$$\mathbf{K}^{(e)}\mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} + = \mathbf{q}^{(e)} \tag{23a}$$

$$\bar{\mathbf{K}}^{(e)}(\mathbf{I_n} - \mathbf{C}^{(e)})^{-1} = \mathbf{K}^{(e)} \tag{23b}$$

(23b) es una expresión que relaciona la rigidez de EBBM con la relación de TBM. (23a) no es más que la matriz de rigidez de TBM, la cual para $n = 4$ conicide con la matriz obtenida con el método de la interpolación acoplada o *IIE* por sus siglas en inglés, una peculiaridad de esto es que la matriz calculada con el método IIE es la matriz de rigidez exacta para TBM.

Reemplazando la ecuación (21) en (13) podemos obtener el desplazamiento fictivio en función del vector de edsplazamientos verdaderos:

$$\bar{v}(x) = \mathbf{N}^T(x)(\mathbf{I_n} - \mathbf{C}^{(e)})^{-1}\mathbf{a}^{(e)} \tag{24}$$

y posteriormente reemplazar (24) en las demás expresiones de (11) para el momento flector, fuerza cortante y ángulo de giro, que también quedarán en función de los movimientos verdaderos. Si se toman específicamente las ecuaciones (11a) y (11d) modificadas, junto con (24), es posible encontrar las funciones de forma para los desplazamientos verticales $v(x)$ y los giros $\theta(x)$:

$$\mathbf{N_v}(\mathbf{x}) = \left(\mathbf{N}(\mathbf{x}) - \frac{EI}{\alpha AG}\frac{d^2\mathbf{N}(x)}{dx^2}\right)(\mathbf{I_n} - \mathbf{C}^{(e)})^{-1} \tag{25a}$$

$$\mathbf{N}_\theta(\mathbf{x}) = -\frac{d\mathbf{N}(\mathbf{x})}{dx}(\mathbf{I_n} - \mathbf{C}^{(e)})^{-1} \tag{25b}$$

Estas funciones de froma no son ni Lagrangianas ni Hermíticas, pero si permiten capturar la interdependencia presente entre los desplazamientos y los giros nodales.

Referencias

Falsone, G., y Settineri, D. (2011). An euler–bernoulli-like finite element method for timoshenko beams. *Mechanics Research Communications*, *38*(1), 12–16.

Kwon, Y. W., y Bang, H. (2018). *The finite element method using matlab.* CRC press.