

Unidad 05. Deformaciones causadas por flexión

Vigas estáticamente indeterminadas

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil
Análisis Estructural Básico

2023b



Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada.



Derrotero

- 10.1. Introducción
- 10.2. Tipos de vigas estáticamente indeterminadas
- 10.3. Análisis por la ecuación diferencial de la derivada
- 10.4. Método de la superposición

Derrotero

- 10.1. Introducción
- 10.2. Tipos de vigas estáticamente indeterminadas
- 10.3. Análisis por la ecuación diferencial de la derivada
- 10.4. Método de la superposición

Video: Understanding the deflection of beams

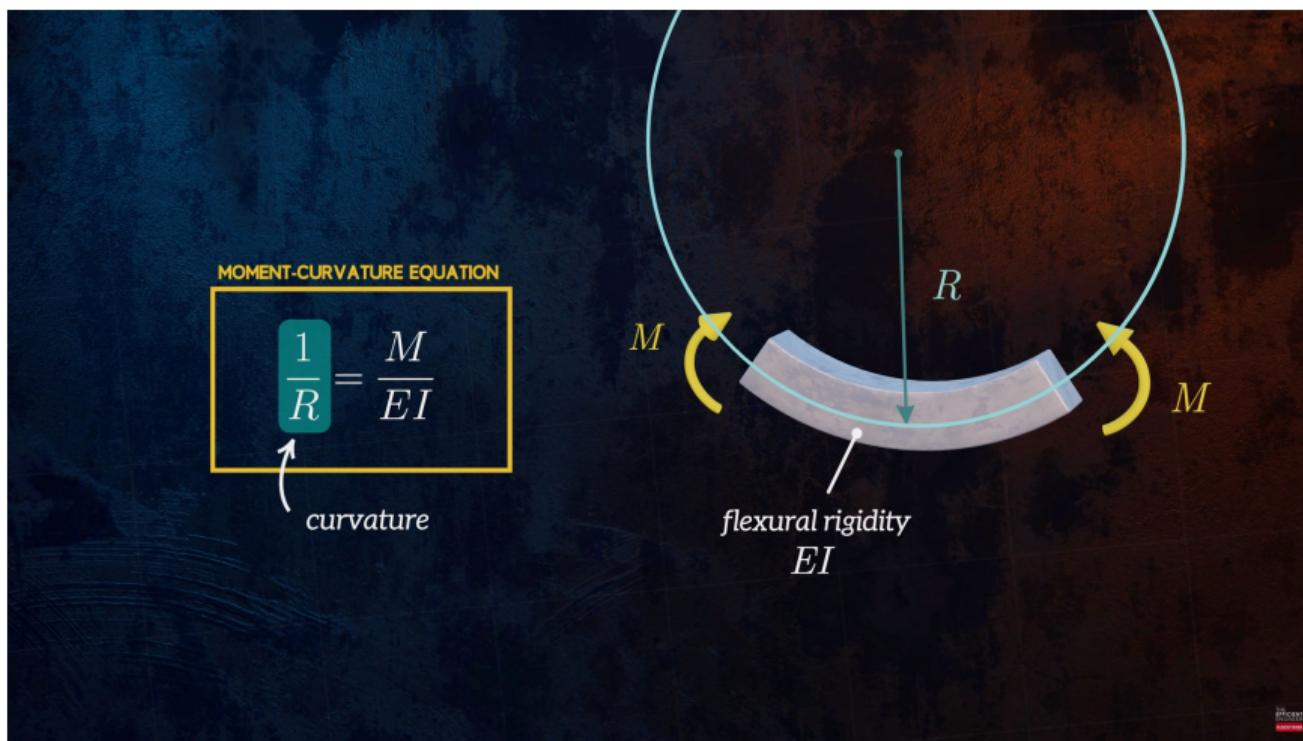


Figura: Understanding the Deflection of Beams, The Efficient Engineer, [link](#).

Consideraciones en el análisis de vigas estáticamente indeterminadas

1. **Vigas estáticamente indeterminadas** son aquellas que no pueden ser analizadas simplemente por la estática.
2. Asumimos que las vigas tienen un comportamiento elástico-lineal (ley de Hooke).
3. Es una introducción al análisis de estructuras estáticamente indeterminadas.

Derrotero

- 10.1. Introducción
- 10.2. Tipos de vigas estáticamente indeterminadas
- 10.3. Análisis por la ecuación diferencial de la derivada
- 10.4. Método de la superposición

Vigas estáticamente indeterminadas

3 tipos usuales de vigas

1. Viga en voladizo con un apoyo.
2. Viga doblemente empotrada.
3. Viga continua.

3 definiciones

1. **Grado de indeterminación:** número de reacciones que exceden el número de ecuaciones.
2. **Redundancia estática:** reacciones que sobran. Se seleccionan buscando la estabilidad de la estructura.
3. **Estructura liberada o primaria:** la estructura cuando se remueven las redundancias estáticas. Debe ser estable y estáticamente determinada.

Objetivo

Determinar las reacciones redundantes, una vez conocidas, todas las reacciones y fuerzas pueden ser calculadas mediante las ecuaciones de equilibrio.

Viga en voladizo con un apoyo

Propped cantilever beam

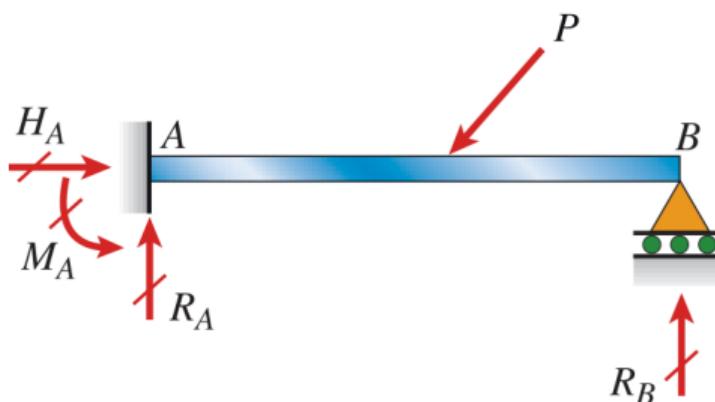


Figura: Viga en voladizo con un apoyo.

2 escenarios:

- R_B redundante: viga en voladizo.
- M_A redundante: viga simplemente apoyada.
- Condición de carga: sin cargas horizontales.

Viga doblemente empotrada

Fixed-end beam

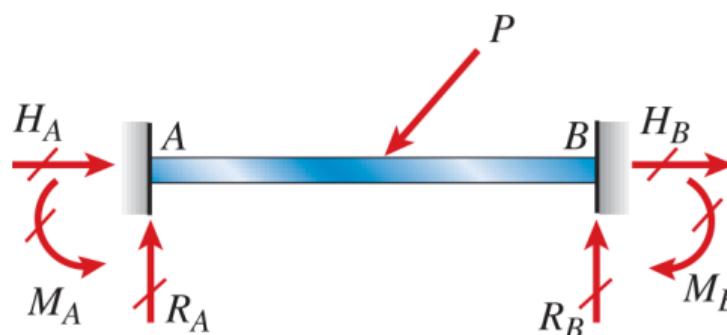


Figura: Viga en voladizo con un apoyo.

2 escenarios:

- R_B , H_B y M_B redundantes: viga en voladizo.
- R_A , H_A y M_A redundantes: viga en voladizo.
- Condición de carga: sin cargas horizontales.

Viga continua

Continuous beam

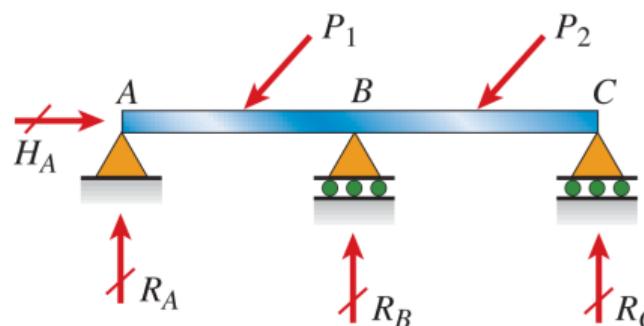


Figura: Viga continua.

2 escenarios.

- R_C redundante.
- R_B redundante.
- Condición de carga: sin cargas horizontales.

Derrotero

- 10.1. Introducción
- 10.2. Tipos de vigas estáticamente indeterminadas
- 10.3. Análisis por la ecuación diferencial de la derivada
- 10.4. Método de la superposición

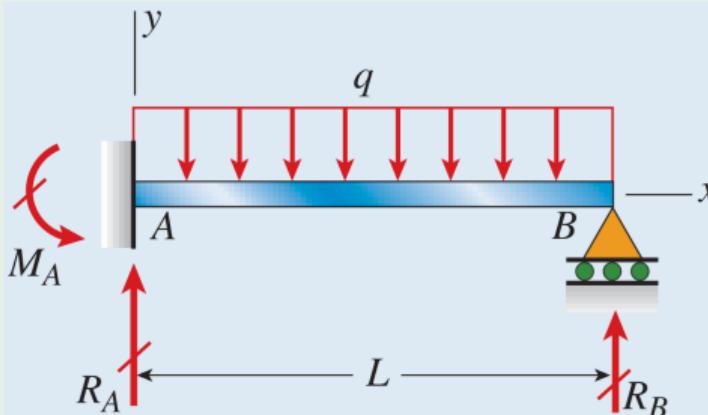
Deflexiones por integración de la ecuación momento-curvatura

Procedimiento:

1. Planteamos una de las ecuaciones diferenciales, por ejemplo, $EI \frac{dv^2(x)}{dx^2} = M(x)$.
2. Las incógnitas del problema serán:
 - Constantes de integración.
 - Redundancias.
3. Soluciones simbólicas serán posibles siempre que el problema sea de complejidad baja.

Ejemplo de clase

Example 10-1



(Gere and Goodno, 2012) Una viga en voladizo con apoyo AB de longitud L soporta una carga uniformemente distribuida de intensidad q . Analice la viga solucionando la ecuación diferencial de segundo orden de la deformada. Determine las reacciones, fuerzas cortantes, momentos flectores, pendientes y deflexiones en la viga.

Figura: Viga en voladizo con apoyo con una carga uniformemente distribuida.

Estudio autónomo de la sección

Ejercicios recomendados

- Todos los ejemplos de la sección
- 10.3-1
- 10.3-5
- 10.3-9a
- 10.3-11

Derrotero

- 10.1. Introducción
- 10.2. Tipos de vigas estáticamente indeterminadas
- 10.3. Análisis por la ecuación diferencial de la derivada
- 10.4. Método de la superposición

Principio de superposición

- El principio de superposición expresa que los esfuerzos, deformaciones y desplazamientos de un sólido en equilibrio sujeto a un conjunto de configuraciones de carga se pueden analizar como la suma de las soluciones que corresponden a dichas configuraciones, asumiendo que cada una de ellas se aplica independientemente.
- No es aplicable cuando** se analiza un sólido cuyo material tiene un comportamiento no lineal o cuando los cambios de posición y forma de la estructura dependen del orden de aplicación de las cargas.

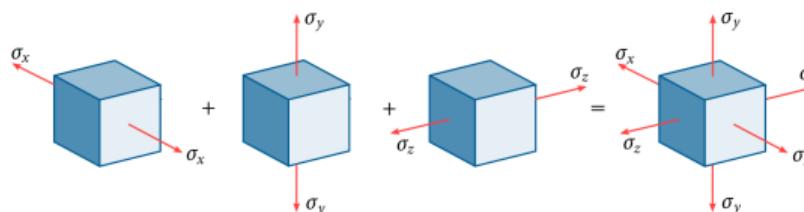


Figura: Al utilizar el principio de superposición, se asume implícitamente que la acción conjunta de los esfuerzos en un sólido tridimensional se puede analizar como la suma de los efectos producidos individualmente por cada uno de los esfuerzos aplicados en las direcciones x , y y z sobre el sólido en consideración. Tomado de Álvarez (2023).

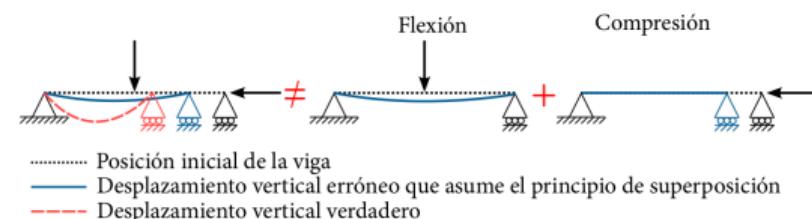


Figura: Barra esbelta sometida a flexocompresión. El principio de superposición asumiría erróneamente que la barra no se pandea, por lo que estimaría unos desplazamientos verticales inferiores a los verdaderos. Tomado de Álvarez (2023).

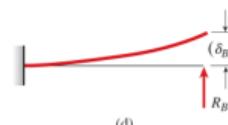
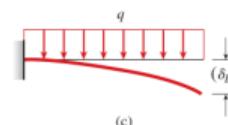
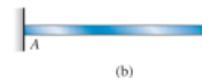
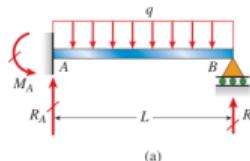
Aplicación del método de la superposición

Procedimiento de análisis

1. Determinar el grado de indeterminación y las redundantes.
2. Plantear **ecuaciones de equilibrio**.
3. Asumimos que las cargas y las redundancias actúan en la estructura liberada.
4. Se calculan las deflexiones en cada escenario, y se toma la suma de las acciones para describir la estructura original.
 - Se plantean **ecuaciones de compatibilidad** en los puntos donde las redundantes sean eliminadas.
 - Se plantean **relaciones fuerza-desplazamiento** en la estructura liberada.
5. Dar solución a las redundantes y encontrar las reacciones faltantes.

Aplicación del método de superposición

Ejemplo de aplicación en una viga empotrada con apoyo (*proppped cantilever beam*) | Tomando como redundante R_B



Planteamiento de las ecuaciones

- Ecuaciones de equilibrio:

$$R_A = qL - R_B \quad M_A = \frac{qL^2}{2} - R_B L.$$

- Ecuaciones de compatibilidad:

$$\delta_B = (\delta_B)_2 - (\delta_B)_1 = 0,$$

donde

- $(\delta_B)_1$ el desplazamiento en el punto B por la carga aplicada.
- $(\delta_B)_2$ el desplazamiento en el punto B por la redundante.

- Relaciones fuerza-desplazamiento:

$$(\delta_B)_1 = \frac{qL^4}{8EI} \quad (\delta_B)_2 = \frac{R_B L^3}{3EI}.$$

Figura: Análisis de una viga empotrada con apoyo por el método de la superposición con redundante R_B .

Aplicación del método de superposición

Ejemplo de aplicación en una viga empotrada con apoyo (*proppped cantilever beam*) | Tomando como redundante M_A

Planteamiento de las ecuaciones

- Ecuaciones de equilibrio:

$$R_A = \frac{qL}{2} + \frac{M_A}{L} \quad R_B = \frac{qL}{2} - \frac{M_A}{L}.$$

- Ecuaciones de compatibilidad:

$$\theta_A = (\theta_A)_2 - (\theta_A)_1 = 0,$$

donde

- $(\theta_A)_1$ la rotación en el punto A por la carga aplicada.
- $(\theta_A)_2$ la rotación en el punto A por la redundante.

- Relaciones fuerza-desplazamiento:

$$(\theta_A)_1 = \frac{qL^3}{24EI} \quad (\theta_A)_2 = \frac{M_A L}{3EI}.$$

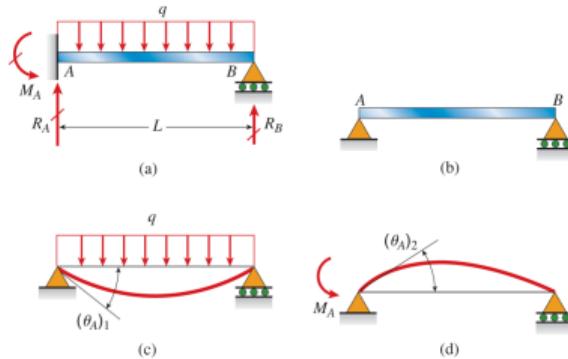
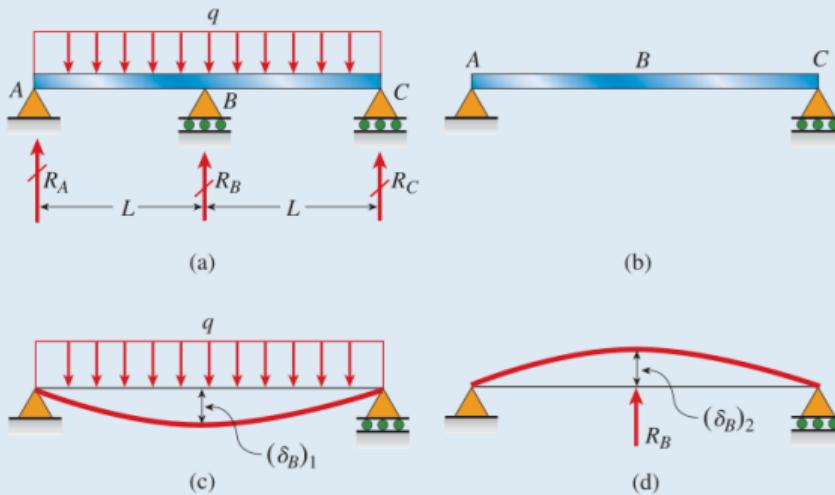


Figura: Análisis de una viga empotrada con apoyo por el método de la superposición con redundante M_A .

Ejemplo de clase

Example 10-3



(Gere and Goodno, 2012) Una viga continua de dos luces ABC soporta una carga uniformemente distribuida de intensidad q , cada luz tiene longitud L . Usando el método de la superposición, determine todas las reacciones para la viga.

Figura: Viga continua de dos luces con una carga uniformemente distribuida.

Deflexiones por integración de la fuerza cortante y ecuaciones de carga

Ejercicios recomendados

- Todos los ejemplos de la sección
- 10.4-1
- 10.4-3
- 10.4-12
- 10.4-20

Referencias

Gere, J. M. and Goodno, B. J. (2012). *Mechanics of materials*. Cengage learning.

Álvarez, D. A. (2023). *Teoría de la elasticidad usando Matlab y Maxima. Volumen 1: Fundamentos*. Universidad Nacional de Colombia.