

# Unidad 04. Esfuerzos causados por la flexión

## Diseño por flexión y esfuerzos cortantes en vigas

Michael Heredia Pérez  
[mherediap@unal.edu.co](mailto:mherediap@unal.edu.co)

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales  
Departamento de Ingeniería Civil  
Análisis Estructural Básico

2023b



## Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada.



## Derrotero

- 5.6. Diseño de vigas por esfuerzos de flexión
- 5.8. Esfuerzos cortantes en vigas se sección rectangular
- 5.9. Esfuerzos cortantes en vigas se sección circular
- 5.10. Esfuerzos cortantes en el alma de vigas con patines
- 5.11. Flujo de cortante

## Derrotero

- 5.6. Diseño de vigas por esfuerzos de flexión
- 5.8. Esfuerzos cortantes en vigas se sección rectangular
- 5.9. Esfuerzos cortantes en vigas se sección circular
- 5.10. Esfuerzos cortantes en el alma de vigas con patines
- 5.11. Flujo de cortante

## Diseño de vigas por esfuerzos de flexión

Desde el punto de vista de la resistencia, buscamos la **forma** y **tamaño** de la viga tal que los esfuerzos actuantes en ella no excedan el esfuerzo admisible del material. Buscaremos el requerido módulo de la sección, según sea su simetría geométrica y comportamiento:

### Caso 1: simétrico

- Secciones doblemente simétricas y con la misma resistencia a tracción que a compresión:

$$S = \frac{M_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{allow}}}.$$

- Debemos elegir una viga que proporcione un módulo de sección al menos tan grande como el obtenido a partir de la ecuación.

### Caso 2: asimétrico

- Secciones que no son doblemente simétricas y que su resistencia a tracción y a compresión es diferente.
- Debemos calcular  $S$  para cada comportamiento, buscando cumplir con una viga que satisfaga ambos criterios.

## Vigas de secciones y formas estandar

Las dimensiones y propiedades de vigas en materiales metálicos y maderas, así como su procedimiento de diseño, están regulados por diferentes instituciones de autoridad en el mundo, algunas de ellas son:

### Estructuras metálicas

- *National Structural Steelwork Specification*, The British Constructional Steelwork Association, UK.
- *Steel Construction Manual*, AISC American Institute of Steel Construction, United States.
- *Eurocode 3*, Europa.
- *Reglamento Colombiano de Construcción Sismo resistente NSR-10, título F: estructuras metálicas.*

### Estructuras de madera

- *National Design Specification for Wooden Construction*, United States.
- *Eurocode 5*, Europa.
- *Reglamento Colombiano de Construcción Sismo resistente NSR-10, título G: estructuras de madera y estructuras de guadua.*


# Vigas de secciones y formas estandar

Un vistazo al manual del AISC para estructuras metalicas

1-16

DIMENSIONS AND PROPERTIES

Table 1-1 (continued)  
W-Shapes  
Dimensions



Shape	Area, A in. <sup>2</sup>	Depth, d in.	Web		Flange		Distance							
			Thickness, t <sub>w</sub> in.	Thickness, t <sub>f</sub> in.	Width, b <sub>f</sub> in.	Thickness, t <sub>f</sub> in.	k <sub>des</sub> in.	k <sub>des</sub> in.	k <sub>des</sub> in.	T in.	Work- able Gage in.			
W30x201 <sup>†</sup>	115	33.2	33 1/2	1.36	1 1/2	15.6	15 1/2	2.44	2 1/4	3.23	3 1/2	1 1/2	26 1/2	5 1/2
<x201 <sup>†</sup>	109	32.8	32 1/2	1.24	1 1/2	15.5	15 1/2	2.24	2 1/4	3.03	3 1/2	1 1/2		
<x200 <sup>†</sup>	95.8	32.4	32 1/2	1.14	1 1/2	15.4	15 1/2	2.05	2 1/4	2.84	2 1/2	1 1/2		
<x200	86.0	32.0	32	1.02	1 1/2	15.3	15 1/2	1.85	2 1/4	2.64	2 1/2	1 1/2		
<x191 <sup>†</sup>	77.0	31.6	31 1/2	0.830	1 1/2	15.2	15 1/2	1.65	2 1/4	2.44	2 1/2	1 1/2		
<x191	69.3	31.2	31 1/2	0.830	1 1/2	15.1	15	1.50	2 1/2	2.29	2 1/2	1 1/2		
<x211	62.3	30.9	31	0.775	1 1/2	15.1	15 1/2	1.32	2 1/2	2.10	2 1/2	1 1/2		
<x191 <sup>†</sup>	56.1	30.7	30 1/2	0.710	1 1/2	15.0	15	1.10	2 1/2	1.87	2 1/2	1 1/2		
<x173 <sup>†</sup>	50.8	30.4	30 1/2	0.655	1 1/2	15.0	15	1.07	2 1/2	1.65	2 1/2	1 1/2		
W30x148 <sup>†</sup>	43.6	30.7	30 1/2	0.650	1 1/2	15.0	15 1/2	1.18	1.63	2.10	2 1/2	1 1/2	26 1/2	5 1/2
<x132 <sup>†</sup>	38.8	30.3	30 1/2	0.615	1 1/2	15.0	15 1/2	1.00	1	1.65	1 1/2	1 1/2		
<x124 <sup>†</sup>	36.5	30.2	30 1/2	0.585	1 1/2	15.0	15 1/2	0.930	1	1.58	1 1/2	1 1/2		
<x110 <sup>†</sup>	34.2	30.0	30	0.565	1 1/2	15.0	15 1/2	0.850	1	1.50	1 1/2	1 1/2		
<x108 <sup>†</sup>	31.7	29.8	29 1/2	0.545	1 1/2	15.0	15 1/2	0.760	1	1.41	1 1/2	1 1/2		
<x99 <sup>†</sup>	29.0	29.7	29 1/2	0.520	1 1/2	15.0	15 1/2	0.670	1	1.32	1 1/2	1 1/2		
<x90 <sup>†</sup>	26.3	29.5	29 1/2	0.470	1 1/2	15.0	15 1/2	0.610	1	1.26	1 1/2	1 1/2		
W27x200 <sup>†</sup>	159	32.5	32 1/2	1.97	2	15.3	15 1/2	3.54	3 1/2	4.33	4 1/2	1 1/2	22 1/2	5 1/2
<x200 <sup>†</sup>	159	32.4	32 1/2	1.98	2	15.4	15 1/2	3.48	3 1/2	4.28	4 1/2	1 1/2		
<x200 <sup>†</sup>	99.2	30.0	30	1.26	1 1/2	14.8	14 1/2	2.28	2 1/2	3.07	3 1/2	1 1/2		
<x200 <sup>†</sup>	90.2	29.6	29 1/2	1.16	1 1/2	14.4	14 1/2	2.09	2 1/2	2.88	3	1 1/2		
<x211	83.3	29.3	29 1/2	1.06	1 1/2	14.4	14 1/2	1.83	2 1/2	2.72	3 1/2	1 1/2		
<x200 <sup>†</sup>	76.1	29.0	29	0.980	1 1/2	14.3	14 1/2	1.77	2 1/2	2.56	2 1/2	1 1/2		
<x235	68.4	28.7	28 1/2	0.910	1 1/2	14.2	14 1/2	1.61	2 1/2	2.40	2 1/2	1 1/2		
<x217	63.9	28.4	28 1/2	0.830	1 1/2	14.1	14 1/2	1.50	2 1/2	2.29	2 1/2	1 1/2		
<x194 <sup>†</sup>	57.1	28.1	28 1/2	0.750	1 1/2	14.0	14	1.34	2 1/2	2.13	2 1/2	1 1/2		
<x178	52.5	27.8	27 1/2	0.725	1 1/2	14.1	14 1/2	1.19	2 1/2	1.98	2 1/2	1 1/2		
<x161 <sup>†</sup>	47.6	27.6	27 1/2	0.660	1 1/2	14.0	14	1.08	2 1/2	1.87	2 1/2	1 1/2		
<x140 <sup>†</sup>	43.2	27.4	27 1/2	0.615	1 1/2	14.0	14	0.975	1	1.76	1 1/2	1 1/2		
W27x129 <sup>†</sup>	37.8	27.6	27 1/2	0.610	1 1/2	14.0	14	1.10	1.70	2	1 1/2	22 1/2	5 1/2	
<x114 <sup>†</sup>	33.6	27.3	27 1/2	0.570	1 1/2	14.0	15 1/2	0.830	1	1.53	1 1/2	1 1/2		
<x102 <sup>†</sup>	30.0	27.1	27 1/2	0.515	1 1/2	14.0	15 1/2	0.830	1	1.43	1 1/2	1 1/2		
<x94 <sup>†</sup>	27.6	26.9	26 1/2	0.490	1 1/2	14.0	15 1/2	0.745	1	1.34	1 1/2	1 1/2		
<x84 <sup>†</sup>	24.7	26.7	26 1/2	0.460	1 1/2	14.0	15 1/2	0.640	1	1.24	1 1/2	1 1/2		

<sup>†</sup> Shape is slender for compression with  $F_y = 50$  ksi.  
<sup>††</sup> The actual axis, centroid and orientation of lighter components should be compared with the geometry of the cross section to ensure compatibility.  
<sup>†††</sup> Flange thickness greater than 2 in. Special requirements may apply per AISC Specification Section A3.3.  
<sup>††††</sup> Shape does not meet the  $b/t_f$  limit for shear in AISC Specification Section G2.3.1b with  $F_y = 50$  ksi.

AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION

DIMENSIONS AND PROPERTIES

Table 1-1 (continued)  
W-Shapes  
Properties

W30-W27










Nominal Wt.	Compact Section Coeffs				Axis X-X				Axis Y-Y				Torsional Properties	
	$b_f$ in.	$t_f$ in.	$J$ in. <sup>4</sup>	$S_x$ in. <sup>3</sup>	$r_x$ in.	$S_y$ in. <sup>3</sup>	$r_y$ in.	$J$ in. <sup>4</sup>	$C_w$ in. <sup>6</sup>	$r_x$ in.	$r_y$ in.	$J$ in. <sup>4</sup>	$C_w$ in. <sup>6</sup>	$r_x$ in.
381	31.9	19.7	20700	1250	13.4	1450	1550	198	3.67	310	4.57	30.8	173	360000
357	34.6	21.6	18700	1140	13.3	1320	1390	179	3.64	279	4.31	26.6	134	340000
326	37.5	23.4	16800	1040	13.2	1190	1240	162	3.60	252	4.26	26.4	105	267000
292	41.2	26.2	14800	930	13.2	1060	1100	144	3.58	223	4.22	26.2	75.2	250000
261	43.6	28.7	13100	829	13.1	943	959	127	3.53	196	4.16	26.0	54.1	215000
235	50.2	32.2	11700	748	13.0	847	855	114	3.51	175	4.13	25.8	46.3	180000
211	57.4	34.5	10300	665	12.9	751	757	100	3.49	155	4.11	25.6	26.4	168000
191	62.3	37.7	9330	600	12.8	675	673	89.5	3.46	138	4.06	25.5	21.0	146000
173	70.4	46.8	8230	541	12.7	607	596	79.8	3.42	123	4.03	25.3	15.6	129000
140	44.4	41.6	6690	436	12.4	500	527	43.3	3.39	69.0	3.77	25.5	14.5	49400
132	52.7	43.9	5770	380	12.2	437	496	37.2	3.35	58.4	3.75	25.3	9.72	42100
124	65.6	46.2	5390	355	12.1	408	481	34.4	3.32	54.0	3.73	25.3	7.99	38600
116	67.1	47.8	4830	329	12.0	378	454	31.3	3.29	48.2	3.70	25.2	6.43	34900
109	68.8	49.6	4470	299	11.9	346	446	27.9	3.25	43.9	3.67	25.0	4.99	30900
99	78.6	51.9	3990	269	11.7	312	426	24.5	3.20	38.6	3.62	25.0	3.77	26800
90	83.2	57.5	3610	245	11.7	283	415	22.1	3.19	34.7	3.60	25.0	2.84	24000
539	21.5	12.1	25900	1570	12.7	1690	2110	277	3.60	437	4.41	29.0	496	440000
569	23.6	13.3	16200	1420	12.2	1540	1710	346	3.45	429	4.15	27.9	170	263000
536	31.9	18.9	14900	1327	12.1	1130	1180	162	3.45	252	4.10	27.7	131	201000
507	34.6	20.6	13100	887	12.0	1030	1050	146	3.41	227	4.04	27.5	101	190000
481	37.1	22.5	11900	814	12.0	936	953	123	3.39	206	4.02	27.4	78.5	178000
458	40.2	24.4	10900	745	11.9	852	859	120	3.38	187	3.98	27.2	61.6	158000
435	44.1	26.2	9700	677	11.8	772	769	108	3.33	168	3.92	27.1	47.0	143000
427	47.1	28.7	8910	627	11.8	711	704	100	3.32	154	3.89	26.9	37.6	128000
394	52.6	31.8	7890	563	11.7	627	619	88.1	3.29	138	3.85	26.8	27.1	113000
378	55.2	32.9	7020	505	11.6	570	555	78.8	3.25	122	3.83	26.6	20.1	96400
361	64.6	36.1	6310	458	11.5	497	497	70.9	3.23	109	3.79	26.5	15.1	87300
346	71.6	38.4	5660	414	11.5	464	443	63.5	3.20	97.7	3.76	26.4	11.5	77200
329	45.5	36.7	4790	345	11.2	395	394	56.8	3.21	57.6	3.66	26.5	11.1	52500
314	54.1	42.5	4090	299	11.0	343	359	31.5	3.18	49.3	3.63	26.4	7.33	27600
302	63.0	47.1	3620	267	11.0	305	339	27.8	3.15	43.4	3.62	26.3	5.28	24000
284	70.0	49.5	3270	243	10.9	278	324	24.8	3.12	38.8	3.59	26.2	4.00	21300
24	7.70	52.7	2550	213	10.7	244	196	21.2	3.07	33.2	3.54	26.1	2.81	17900

AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION

Figura: Recorte del Steel Construction Manual, AISC.

# Vigas de secciones y formas estandar

Un vistazo a la norma NSR-10 para estructuras metalicas

NSR-10 – Capítulo F.5 – Estructuras de aluminio			
Tabla F.5.4.7.2 Parámetros de pandeo torsional para miembros a compresión			
1		$p \leq 5$	$\lambda_0 = \lambda_1 = 50 \left( 1 - 0.6p^{0.5} \right) \left( h/v \right)^{1/2}$ $\lambda = \lambda_0 / \lambda_1$ $X = 0.6$
2		$p \leq 5$ $1 \leq v \leq 2.5$	$\lambda_0 = \lambda_1 - \left( v - 1 \right) \left[ 2 \left( v - 1 \right)^2 - 1.5p \right]$ $\lambda = \lambda_0 / \lambda_1$ $X = 0.6$
3			$\lambda_0 = 66$ $\lambda = \lambda_0 / \lambda_1$ $X = 0.6$
4		$p \leq 5$ $0.5 \leq B/D \leq 1.0$	$\lambda_0 = \left( h/v \right) \left\{ 4.1 + 0.5 \left( h/B \right)^2 \right\} - 0.6p^{0.5} \left( h/v \right)^{1/2}$ $\lambda = \lambda_0 / \lambda_1$ $X = 0.6 - 0.4 \left( 1 - B/D \right)^2$
5		$p \leq 5$ $0.5 \leq B/D \leq 1.0$ $1 \leq v \leq 2.5$	$\lambda_0 = \lambda_1 + 1.5p \left( v - 1 \right) - 2 \left( v - 1 \right)^2$ $\lambda = \lambda_0 / \lambda_1$ $X = X_1$
6			$\lambda_0 = 37$ $\lambda = \left( 1.4 \lambda_0 / \lambda_1 \right)$ $X = 0.60$
7		$p \leq 3.5$	$\lambda_0 = 5.1 h/v \left( 1 - p^{0.5} \right) \left( h/v \right)^{1/2}$ $X = 1$
8		$p \leq 5$ $0.5 \leq B/D \leq 2.0$	$\lambda_0 = \lambda_1 = \left( h/v \right) \left\{ 4.4 + 1.1 \left( h/B \right)^2 \right\} - 0.7p^{0.5} \left( h/v \right)^{1/2}$ $\lambda = \lambda_0 / \lambda_1$ $X = \lambda_0 - 1.1 - 0.3 h/B$
9		$p \leq 5$ $0.5 \leq B/D \leq 2.0$ $1 \leq v \leq 2.5$	$\lambda_0 = \lambda_1 + 1.5p \left( v - 1 \right) - 2 \left( v - 1 \right)^2$ $\lambda = \lambda_0 / \lambda_1$ $X = X_1$
F-493			









NSR-10 – Capítulo F.5 – Estructuras de aluminio			
Tabla F.5.4.7.2 (continuación) Parámetros de pandeo torsional para miembros a compresión			
10			$\lambda_0 = 78$ $\lambda = \left( \lambda_0 / \lambda_1 \right)$ $X = 0.33$
11			$\lambda_0 = 68$ $\lambda = \left( \lambda_0 / \lambda_1 \right)$ $X = 0.76$
12			$\lambda_0 = 63$ $\lambda = \left( \lambda_0 / \lambda_1 \right)$ $X = 0.89$
13		$0.5 \leq B/D \leq 2.0$ $p \leq 3.5$	$\lambda_0 = \left( h/v \right) \left\{ 1.4 + 1.5 \left( h/B \right) + 1.1 \left( h/v \right) \right\} - p^{0.5} \left( h/v \right)^{1/2}$ $\lambda = \left( \lambda_0 / \lambda_1 \right)$ $X = 1.3 - 0.8 h/B + 0.2 \left( h/v \right)^2$
14			$\lambda_0 = 65$ $\lambda = \left( \lambda_0 / \lambda_1 \right)$ $X = 0.78$
15		$1 \leq D/B \leq 3$ $1 \leq t_1/t_2 \leq 2$	$\lambda_0 = \left( h/v \right) \left\{ 7 + 1.5 \left( h/B \right) \left( t_1/t_2 \right) \right\}$ $\lambda = \left( \lambda_0 / \lambda_1 \right)$ $X = 0.25 h/B - 0.04 \left( h/v \right)^2$ $Y = 0.14 - 0.02 h/B - 0.02 t_1/t_2$
16		$1 \leq D/B \leq 3$ $C/B \leq 0.4$	$\lambda_0 = \left( h/v \right) \left\{ 7 + 1.5 \left( h/B \right) + 5 \left( C/B \right) \right\}$ $\lambda = \left( \lambda_0 / \lambda_1 \right)$ $X = 0.25 h/B - 0.04 \left( h/v \right)^2 - 0.25 C/B$ $Y = 0.12 - 0.02 h/B + \left\{ 1.4 \left( C/B \right)^2 / \left( h/B - 0.5 \right) \right\}$
17		$1 \leq D/B \leq 3$ $C/B \leq 0.4$	$\lambda_0 = \left( h/v \right) \left\{ 7 + 1.5 \left( h/B \right) + 5 \left( C/B \right) \right\}$ $\lambda = \left( \lambda_0 / \lambda_1 \right)$ $X = 0.35 h/B - 0.04 \left( h/v \right)^2$ $Y = 0.12 - 0.02 h/B + \left\{ 0.05 \left( C/B \right) \left( h/B - 0.5 \right) \right\}$
F-494			

Figura: Recorte del título F de la NSR-10.



## Eficiencia relativa de distintas formas de vigas

Desde el punto de vista de la resistencia, la eficiencia en vigas depende principalmente de la forma de la sección transversal. **La forma más eficiente es aquella en la cual el material está localizado lo más lejos posible del eje neutro.**

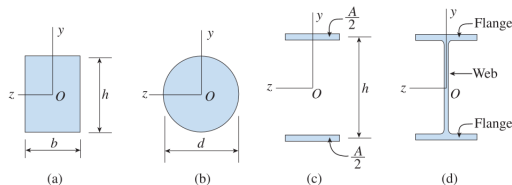


Figura: Diferentes secciones transversales de vigas.

Sección cuadrada:

$$S_{\text{cuadrado}} = \frac{h^3}{6}$$

$$= 0,1160d^3$$

Sección circular

$$S_{\text{circulo}} = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$= 0,0982d^3$$

Sección ideal:

$$I = 2 \frac{A}{2} \left( \frac{h}{2} \right)^2 = \frac{Ah^2}{4}$$

$$S = \frac{I}{h/2} = 0,5Ah$$

Sección tipo I:

$$S \approx 0,35Ah$$

## Ejemplo de clase

### Example 5-5

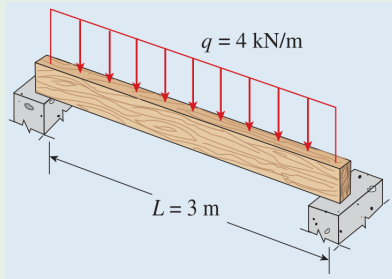


Figura: Viga de madera simplemente apoyada.

Una viga simplemente apoyada de madera tiene una luz de 3 m y soporta una carga uniformemente distribuida de 4 kN/m. El esfuerzo admisible a flexión es de 12 MPa, la madera pesa  $5.4\text{ kN/m}^3$ , y la viga está soportada lateralmente frente a pandeo (*buckling*) o vuelco (*tipping*). Seleccione una sección adecuada de la tabla en el apéndice F de Gere and Goodno (2012).

## Estudio autónomo de la sección

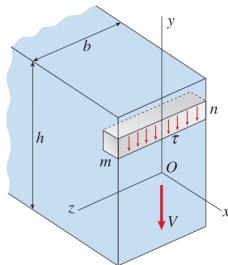
### Ejercicios recomendados

- Todos los ejemplos de la sección
- 5.6-5
- 5.6-12
- 5.6-17

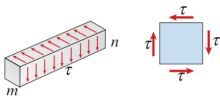
## Derrotero

- 5.6. Diseño de vigas por esfuerzos de flexión
- 5.8. Esfuerzos cortantes en vigas se sección rectangular
- 5.9. Esfuerzos cortantes en vigas se sección circular
- 5.10. Esfuerzos cortantes en el alma de vigas con patines
- 5.11. Flujo de cortante

## Esfuerzos cortantes verticales y horizontales



(a)



(b)



(c)

### Hipótesis de análisis

1. Los esfuerzos cortantes  $\tau$  actuantes en la sección transversal son paralelos a la fuerza cortante  $V$ , es decir, paralelos a los lados de la sección transversal.
2. Los esfuerzos cortantes  $\tau$  están uniformemente distribuidos en el espesor  $b$  de la sección, aunque pueden variar en la altura.
3. Las superficies superior e inferior no estarán sometidas a esfuerzos cortantes, en otras palabras,  $\tau = 0$  cuando  $y = \pm h/2$ .

Figura: Esfuerzos cortantes en una viga de sección rectangular

## Fórmula del cortante

Estando en un estado de flexión no uniforme, se generan fuerzas cortantes en la sección, generando esfuerzos cortantes verticales y horizontales de igual magnitud, así que calculando los horizontales se da respuesta a los verticales.

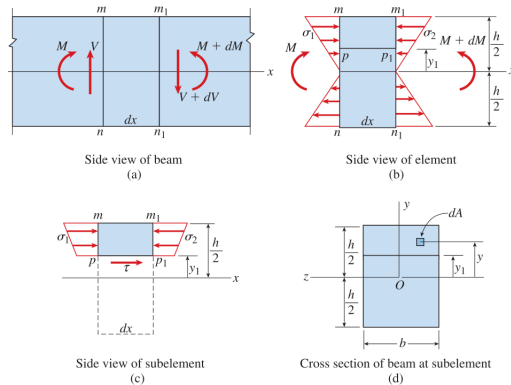


Figura: Esfuerzos cortantes en una viga de sección rectangular

## Fórmula del cortante

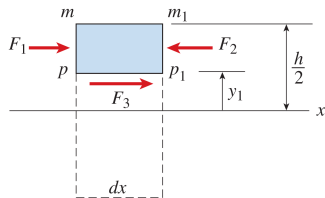


Figura: Diagrama de cuerpo libre parcial de un subelemento mostrando todas las fuerzas horizontales.

Análisis:

- Las resultantes de los esfuerzos normales por flexión en el elemento:

$$F_1 = \int \frac{My}{I} dA \quad F_2 = \int \frac{(M + dM)y}{I} dA.$$

- Del equilibrio horizontal en la sección transversal:

$$F_3 = \frac{dM}{I} \int y dA.$$

- Bajo la hipótesis de que  $\tau$  está uniformemente distribuido en el espesor:

$$F_3 = \tau b dx$$

- Igualando, y sabiendo que  $dM(x)/dx = V(x)$ :

$$\tau = \frac{V}{Ib} \int y dA.$$

## Fórmula del cortante

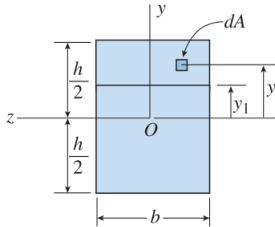


Figura: Subelemento en la sección transversal analizada de una viga.

- La integral es el primer momento de área del trozo de sección transversal sobre el nivel al cual se quiere calcular el esfuerzo cortante:

$$Q = \int y dA.$$

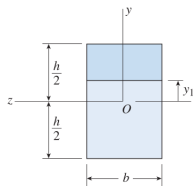
- La fórmula del cortante:

$$\tau = \frac{VQ}{Ib}.$$

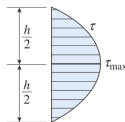
**Observación:** el primer momento de área  $Q$  varía con la distancia  $y_1$  desde el eje neutro, igualmente lo hará el esfuerzo cortante  $\tau$ .



## Cálculo del primer momento de área $Q$



(a)



(b)

- Si lo calculamos por “geometría de bloques”:

$$Q = b \left( \frac{h}{2} - y_1 \right) \left( y_1 + \frac{h/2 - y_1}{2} \right) = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right).$$

- Si lo calculamos resolviendo la integral:

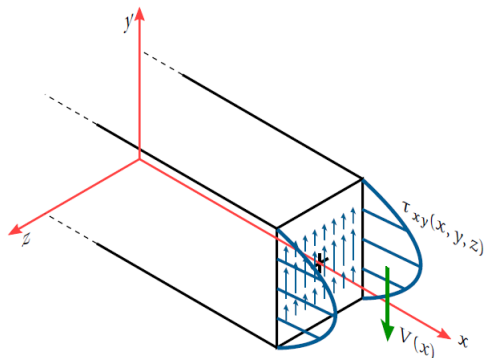
$$Q = \int_{y_1}^{h/2} y b \, dy = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right).$$

- En todo caso, reemplazando en la fórmula de cortante:

$$\tau = \frac{V}{2I} \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$

**Figura:** Distribución de los esfuerzos cortantes en una viga de sección rectangular: (a) sección transversal de la viga y (b) diagrama que muestra la distribución parabólica de esfuerzos cortantes en la altura de la viga.

# Interpretación de las ecuaciones derivadas



- El esfuerzo cortante es nulo en  $y_1 = \pm h/2$ .
- El máximo esfuerzo cortante ocurre en el eje neutro ( $y_1 = 0$ ) donde  $Q$  alcanza su máximo, así:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3}{2} \frac{V}{A}.$$

**Figura:** Los esfuerzos cortantes, en el caso de una viga de sección rectangular, varían de forma parabólica con respecto al eje  $y$ . La fuerza cortante es positiva cuando la resultante de los esfuerzos cortantes  $\tau_{xy}$  mostrados apunta en la dirección contraria al eje  $y$ . Tomado de [Álvarez \(2024\)](#).

## Limitaciones en el cálculo del esfuerzo cortante con la formulación planteada

### Fórmula del cortante (*Shear formula*)

$$\tau = \frac{VQ}{Ib}$$

1. Ecuaciones válidas para vigas de material elástico lineal con pequeñas deflexiones.
2. En el caso de secciones rectangulares, la precisión de la fórmula del cortante depende de la relación altura-ancho de la sección. Cuando  $h/b \rightarrow 1$  la fórmula del cortante sobreestima el esfuerzo cortante.
3. No es aplicable a secciones triangulares o semicirculares. La fórmula del cortante aplica solamente a vigas prismáticas.

## Efectos de las deformaciones angulares

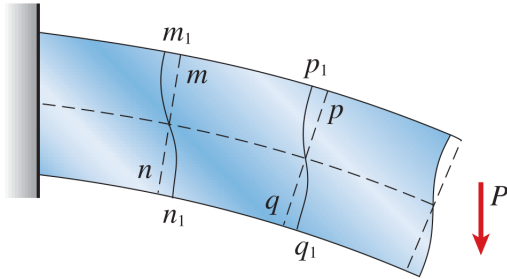


Figura: Alabeo de la sección transversal de una viga debido a las deformaciones angulares.

1. Como resultado de las deformaciones angulares, la sección transversal que antes era plana ahora se alabea. Deformación angular máxima en el eje neutro y mínima (nula) en las superficies externas, donde las curvas son perpendiculares a las mismas.
2. Elongación/contracción de los elementos longitudinales debidas a la flexión no se afectan por las deformaciones angulares, y la distribución de esfuerzos normales es la misma que en flexión pura.
3. En la mayoría de casos, es confiable usar la fórmula de la flexión para condiciones de flexión no uniforme.

## Ejemplo de clase

### Example 5-11

Una viga simplemente apoyada de metal con luz de 1 m soportada en los puntos  $A$  y  $B$ . La carga en la viga incluye su peso propio y tiene una intensidad de  $28 \text{ kN/m}$ . La sección transversal de la viga es rectangular de  $25 \times 100 \text{ mm}$ . Desprecie el pandeo lateral. Determine el esfuerzo normal y esfuerzo cortante en el punto  $C$ , a  $25 \text{ mm}$  por debajo de la parte superior de la viga y a  $200 \text{ mm}$  del apoyo en  $B$ . Muestre estos esfuerzos dibujados en un elemento de esfuerzos en el punto dado.

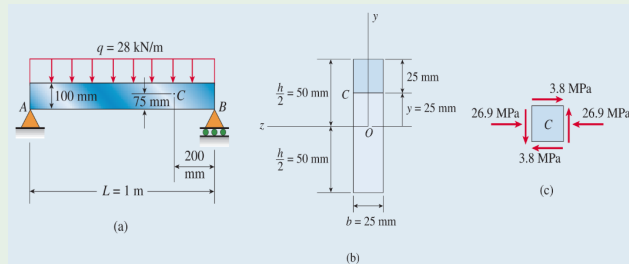


Figura: (a) Viga simple con carga uniformemente distribuida, (b) sección transversal de la viga y (c) elemento de esfuerzo mostrando los esfuerzos en el punto  $C$ .

## Estudio autónomo de la sección

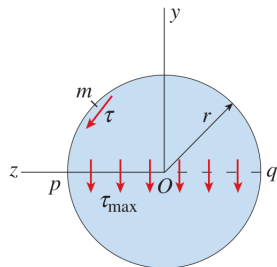
### Ejercicios recomendados

- Todos los ejemplos de la sección
- 5.8-1
- 5.8-5
- 5.8-8
- 5.8-9

## Derrotero

- 5.6. Diseño de vigas por esfuerzos de flexión
- 5.8. Esfuerzos cortantes en vigas se sección rectangular
- 5.9. Esfuerzos cortantes en vigas se sección circular
- 5.10. Esfuerzos cortantes en el alma de vigas con patines
- 5.11. Flujo de cortante

## Esfuerzos cortantes en vigas se sección circular



Podemos calcular los esfuerzos cortantes en el eje neutro. Asumimos:

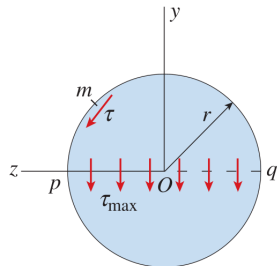
1. En el eje neutro están los esfuerzos máximos.
2. Allí los esfuerzos cortantes actúan paralelos al eje  $y$  y son de intensidad constante en el espesor de la viga.
3. Por 2. podemos aplicar la fórmula del cortante  $\tau = VQ/Ib$  en el eje neutro.

Figura: Esfuerzo cortante actuando en la sección transversal de una viga circular.



## Esfuerzos cortantes en vigas se sección circular

Para una sección circular sólida



Conocemos las propiedades para el semicírculo de análisis (apéndice D Gere and Goodno (2012)): el momento de inercia  $I$ , el primer momento de área  $Q$  y su base  $b$ :

$$I = \frac{\pi r^4}{4} \quad Q = A\bar{y} = \left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \left(\frac{4r}{3\pi}\right) = \frac{2r^3}{3} \quad b = 2r.$$

Reemplazando en la fórmula del cortante (esfuerzo cortante máximo):

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{V(2r^3/3)}{(\pi r^4/4)(2r)} = \frac{4}{3} \frac{V}{A}.$$

Figura: Esfuerzo cortante actuando en la sección transversal de una viga circular.

## Esfuerzos cortantes en vigas se sección circular

Para una sección circular hueca

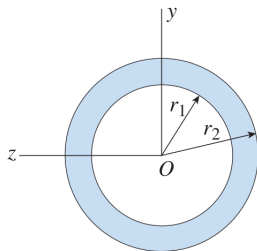


Figura: Sección circular hueca, un tubo.

Para el *semitubo* conocemos: el momento de inercia  $I$ , el primer momento de área  $Q$  y su base  $b$ :

$$I = \frac{\pi}{4}(r_2^4 - r_1^4) \quad Q = \frac{2}{3}(r_2^3 - r_1^3) \quad b = 2(r_2 - r_1).$$

Reemplazando en la fórmula del cortante (esfuerzo cortante máximo):

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{4}{3} \frac{V}{A} \left( \frac{r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2}{r_2^2 + r_1^2} \right),$$

$$A = \pi(r_2^2 - r_1^2).$$

## Estudio autónomo de la sección

### Ejercicios recomendados

- Todos los ejemplos de la sección

## Derrotero

- 5.6. Diseño de vigas por esfuerzos de flexión
- 5.8. Esfuerzos cortantes en vigas se sección rectangular
- 5.9. Esfuerzos cortantes en vigas se sección circular
- 5.10. Esfuerzos cortantes en el alma de vigas con patines
- 5.11. Flujo de cortante

## Vigas con patines

beams with flanges, vigas con alas, aletas o patines

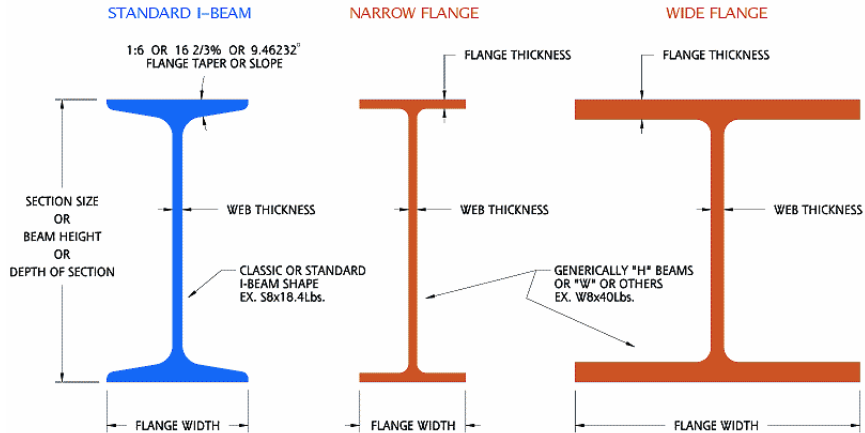
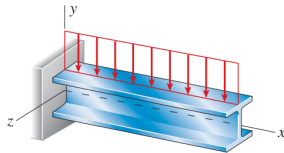


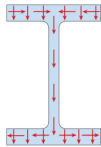
Figura: Diferentes tipos de vigas con patín, [link](#).

## Vigas con patines

beams with flanges, vigas con alas, aletas o patines



(a)



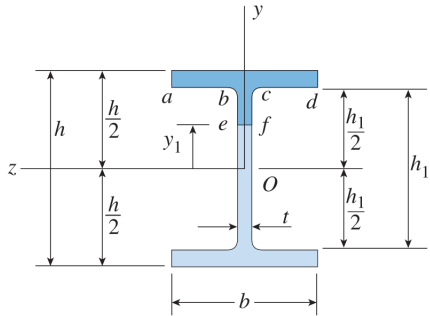
(b)

### Comportamiento

- Los esfuerzos cortantes en las alas actúan en la dirección vertical y horizontal (ejes  $y$  y  $z$ ).
- En las alas, los esfuerzos horizontales son mucho mayores que los verticales (se estudiará luego).
- Los esfuerzos cortantes en el alma solo actúan en la dirección vertical y son mayores que los calculados en las alas.

**Figura:** (a) Viga de sección alada ancha y (b) direcciones del esfuerzo cortante actuando en la sección transversal

## Esfuerzos cortantes en el alma de la viga con patin



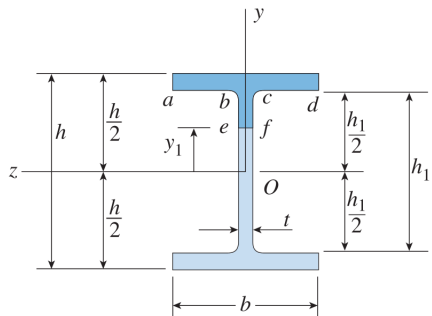
### Hipótesis de análisis

1. El esfuerzo cortante actúa paralelo al eje  $y$ , y es uniformemente distribuido en el espesor del alma.
2. Aplica la fórmula del cortante:

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

Figura: Esfuerzo cortante en el alma de la viga wide-flange: (a) sección transversal.

## Esfuerzos cortantes en el alma de la viga con patin



**Figura:** Esfuerzo cortante en el alma de la viga wide-flange: (a) sección transversal.

### Cálculo del primer momento de área

1. Se considera el área por encima del punto de análisis, despreciando los filetes de unión alma-ala.
2. El área se puede dividir en dos figuras:

$$A_1 = b \left( \frac{h}{2} - \frac{h_1}{2} \right) \quad A_2 = t \left( \frac{h_1}{2} - y_1 \right).$$

3. Se evalúa el primer momento de área con respecto al eje neutro  $z$ :

$$\begin{aligned} Q &= \sum_i^n \bar{Y}_i A_i \\ &= A_1 \left( \frac{h_1}{2} + \frac{h/2 - h_1/2}{2} \right) + A_2 \left( y_1 + \frac{h_1/2 - y_1}{2} \right) \\ &= \frac{b}{8} (h^2 - h_1^2) + \frac{t}{8} (h_1^2 - 4y_1^2) \end{aligned}$$



## Esfuerzos cortantes en el alma de la viga con patin

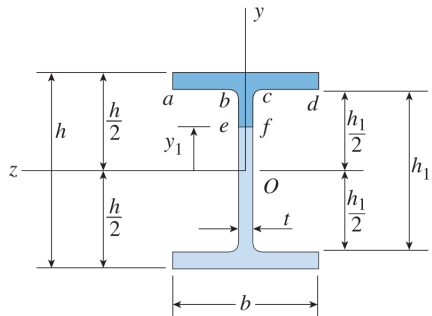


Figura: Esfuerzo cortante en el alma de la viga wide-flange: (a) sección transversal.

### Fórmula del cortante

- Se reemplaza el primer momento de área  $Q$ :

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V}{8It} [b(h^2 - h_1^2) + t(h_1^2 - 4y_1^2)] .$$

- El momento de inercia de la sección:

$$I = \frac{1}{12}(bh^3 - bh_1^3 + th_1^3).$$

**Limitación:** esta ecuación no puede ser utilizada para determinar el esfuerzo cortante vertical en las alas de la viga.

## Esfuerzos cortantes en el alma de la viga con patin

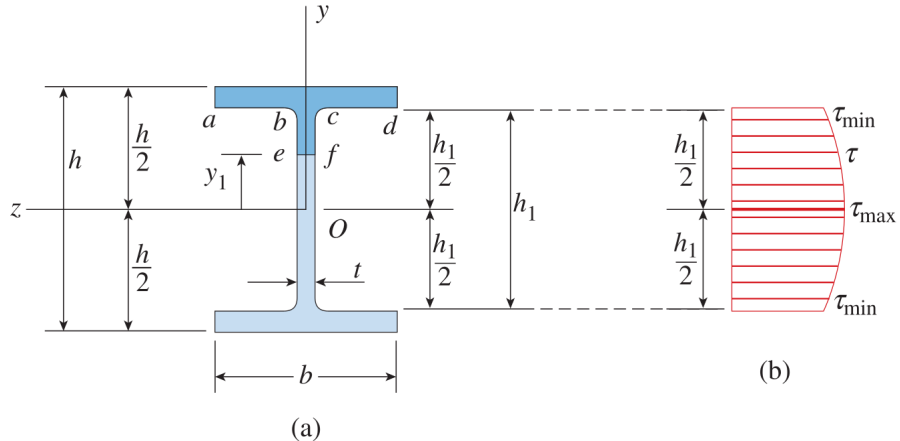
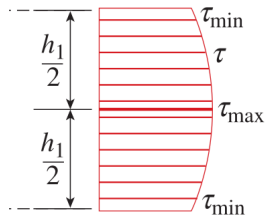


Figura: Esfuerzo cortante en el alma de la viga wide-flange: (a) sección transversal y (b) distribución del esfuerzo cortante en el alma.

## Esfuerzos cortantes máximos y mínimos



(b)

Figura: Esfuerzo cortante en el alma de la viga wide-flange: (b) distribución del esfuerzo cortante en el alma.

- $\tau(y_1 = 0) = \tau_{\text{máx}}:$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{V}{8It}(bh^2 - bh_1^2 + th_1^2).$$

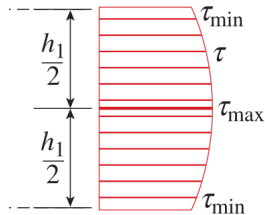
Es el máximo esfuerzo cortante en TODA la sección.

- $\tau(y_1 = \pm h_1/2) = \tau_{\text{mín}}:$

$$\tau_{\text{mín}} = \frac{Vb}{8It}(h^2 - h_1^2).$$

- Para una viga típica de patín ancho (*wide-flange beam*), el esfuerzo cortante máximo en el alma es entre 10 % y 60 % más grande que el mínimo.

## Fuerza cortante en el alma



(b)

Figura: Esfuerzo cortante en el alma de la viga wide-flange: (b) distribución del esfuerzo cortante en el alma.

Se divide el diagrama de esfuerzo cortante en dos segmentos:

- Un segmento rectagnular de área

$$A_{\text{rectangular}} = \tau_{\text{mín}} h_1$$

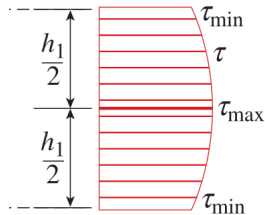
- Un segmento parabólico de área

$$A_{\text{parabólica}} = \frac{2}{3}(h_1)(\tau_{\text{máx}} - \tau_{\text{mín}})$$

- Sumando áreas y multiplicando por el espesor  $t$ , obtenemos:

$$V_{\text{web}} = \frac{th_1}{3}(2\tau_{\text{máx}} + \tau_{\text{mín}})$$

## Fuerza cortante en el alma



(b)

Figura: Esfuerzo cortante en el alma de la viga wide-flange: (b) distribución del esfuerzo cortante en el alma.

Comportamiento:

- Fuerza cortante teórica o real:

$$V_{\text{web}} = \frac{th_1}{3}(2\tau_{\text{máx}} + \tau_{\text{mín}}).$$

- En vigas de dimensiones usuales, la fuerza cortante en el alma es aproximadamente entre 90 % y 98 % del total de fuerza cortante en la sección transversal.

$$\tau_{\text{aver}} = \frac{V}{th_1}.$$

Un error en el cálculo del esfuerzo de  $\pm 10\%$ .

## Limitaciones de las ecuaciones desarrolladas

- Fórmula del cortante:

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V}{8It} [b(h^2 - h_1^2) + t(h_1^2 - 4y_1^2)].$$

- Esfuerzo cortante máximo:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{V}{8It} (bh^2 - bh_1^2 + yh_1^2).$$

- Esfuerzo cortante mínimo:

$$\tau_{\text{mín}} = \frac{Vb}{8It} (h^2 - h_1^2).$$

$$\tau_{\text{mín}} = \frac{Vb}{8It} (h^2 - h_1^2).$$

- Fuerza cortante en el alma:

$$V_{\text{web}} = \frac{th_1}{3} (2\tau_{\text{máx}} + \tau_{\text{mín}}).$$

1. Análisis hecho para el estudio del esfuerzo cortante en el alma de vigas de patín ancho (*wide-flange*).
2. No podemos asumir que el esfuerzo cortante sea constante en el ancho de la sección al estudiar los patines.
3. La fórmula del cortante no puede ser utilizada para esfuerzos cortantes verticales en los patines, pero sí da buenas aproximaciones en los horizontales.
4. Metodología válida únicamente para almas delgadas (*thin-webs*).

## Estudio autónomo de la sección

### Ejercicios recomendados

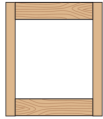
- Todos los ejemplos de la sección
- 5.10-4
- 5.10-7
- 5.10-12

## Derrotero

- 5.6. Diseño de vigas por esfuerzos de flexión
- 5.8. Esfuerzos cortantes en vigas se sección rectangular
- 5.9. Esfuerzos cortantes en vigas se sección circular
- 5.10. Esfuerzos cortantes en el alma de vigas con patines
- 5.11. Flujo de cortante



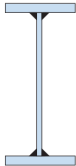
## Vigas armadas y flujo de cortante



(a)



(b)



(c)

- **Vigas armadas** son vigas construidas a partir de la unión de dos o más materiales para formar una sola viga, buscan cumplir con necesidades arquitectónicas o estructurales.
- Se analiza el comportamiento de la unidad en dos fases:
  1. Hecha de una pieza: esfuerzos por flexión y esfuerzos cortantes.
  2. Conexiones entre las partes: deben ser lo suficientemente fuertes para transmitir la fuerza horizontal de corte que actúan entre ellas, mediante el *flujo de cortante*.
- **Flujo de cortante** ( $f$ ) es la fuerza cortante horizontal por unidad de distancia a lo largo del eje longitudinal de la viga:

$$f = \frac{VQ}{I}.$$

**Figura:** Sección transversal de vigas armadas:  
(a) cajón de madera, (b) glulam beam o viga laminada, (c) sección I armada.

## Determinación del primer momento de área $Q$ .

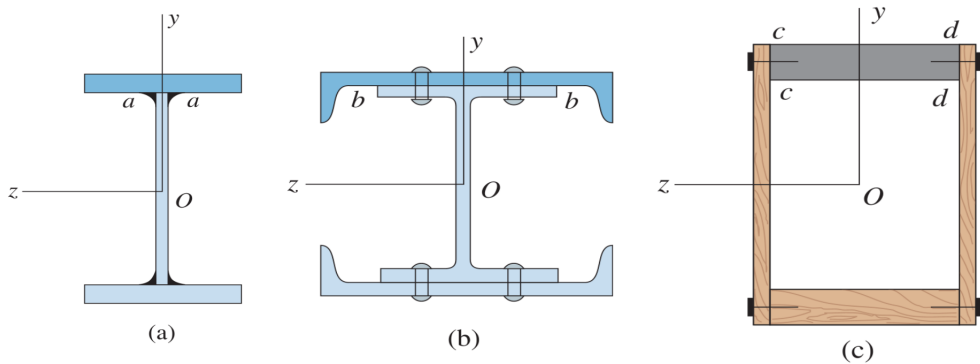


Figura: Áreas usadas para calcular el primer momento de área.

## Estudio autónomo de la sección

### Lectura

Flujo de cortante, wikipedia, [link](#).

### Ejercicios recomendados

- Todos los ejemplos de la sección

## Referencias

Gere, J. M. and Goodno, B. J. (2012). *Mechanics of materials*. Cengage learning.

Álvarez, D. A. (2024). *Teoría de la elasticidad usando Matlab y Maxima. Volumen 3: Vigas, Losas y Estabilidad elástica*. Universidad Nacional de Colombia.