

Unidad 02. Elementos simples cargados axialmente

Otras consideraciones de esfuerzo y energía de deformación

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil
Análisis Estructural Básico

2023b



Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada ([Gere and Goodno, 2012](#)).



Derrotero

- Efectos términos, desajustes y deformaciones previas
- Esfuerzos en secciones inclinadas
- Energía de deformación
- Temas de estudio autónomo

Derrotero

- Efectos términos, desajustes y deformaciones previas
- Esfuerzos en secciones inclinadas
- Energía de deformación
- Temas de estudio autónomo

Efectos térmicos

Los cambios de temperatura pueden generar expansiones o contracciones en los materiales, resultando en **esfuerzos térmicos y deformaciones térmicas**.

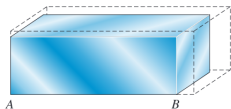


Figure: Bloque de material sometido a un incremento de temperatura. Sin considerar fricción ni confinamiento.

- Existe una proporcionalidad entre las deformaciones por temperatura ε_T y el cambio de temperatura ΔT :

$$\varepsilon_T = \alpha(\Delta T)$$

- Se pueden calcular los esfuerzos para estas deformaciones:

$$\sigma = E\alpha(\Delta T)$$

Coefficiente de dilatación térmica α :

- Unidades $[1/^\circ\text{C}]$.
- Cociente que mide el cambio relativo de longitud o volumen que se produce cuando un cuerpo sólido o un fluido dentro de un recipiente cambia de temperatura provocando una dilatación térmica.

Material	Coefficiente de dilatación α ($10^{-6}/^\circ\text{C}$)
Acero	11-13
Aluminio	23
Caucho	77
Concreto	12
Hierro	11.1
Vidrio	8.5

Figure: Coeficientes de dilatación térmica lineal medidos a 20° centígrados, de Álvarez (2023).

Efectos térmicos

- Los materiales comunes en ingeniería se expanden cuando se calientan, y se contraen cuando se enfrían. Un incremento en la temperatura producirá deformaciones térmicas positivas.
- Podemos calcular las nuevas dimensiones del elemento mediante una **relación temperatura-desplazamiento**:

$$\delta_T = \varepsilon_T L = \alpha(\Delta T)L.$$

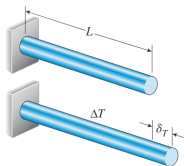


Figure: Elongación de una barra prismática por un incremento uniforme de la temperatura.

- En el análisis importará si la estructura es estáticamente determinada o indeterminada.

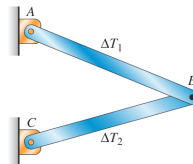


Figure: Cercha isostática con un cambio de temperatura uniforme en cada miembro.

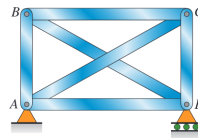


Figure: Cercha hiperestática sometida a cambios de temperatura.

Desajustes y pre deformaciones

- Los desajustes se pueden considerar irregularidades, intencionales o no, en las dimensiones de las estructuras.
- Al encajar elementos desajustados, se tendrán **predeformaciones** (*prestrains*) que podrán causar **preesfuerzos** (*prestressed*) antes de cargar la estructura.
- En el análisis importará si la estructura es estáticamente determinada o indeterminada.

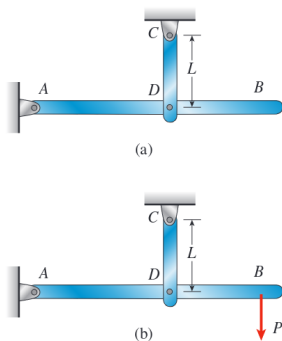


Figure: Estructura isostática con un pequeño desajuste.

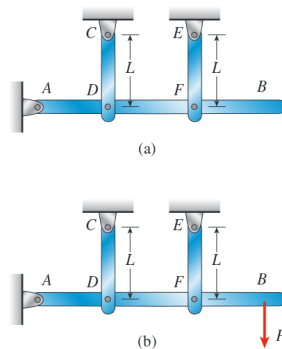


Figure: Estructura hiperestática con un pequeño desajuste.

Pernos y tensores de tornillo

- Pretensar una estructura requiere que una o más partes de ella sean comprimidas o traccionadas a partir de su longitud inicial. Por ejemplo: pernos y tensores.

Tensores individuales

Cada giro del perno generará un acortamiento o elongación proporcional al número de pasos de rosca recorridos n .

$$\delta = np$$

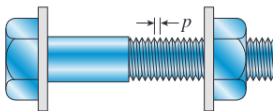


Figure: El paso de rosca del perno es la distancia entre una rosca y la siguiente.

- Muy usados en estructura metálica para rigidizar cubiertas y pórticos.

Tensores dobles

Cada giro del tensor generará un acortamiento o elongación proporcional al doble de pasos de rosca recorridos $2n$.

$$\delta = 2np$$

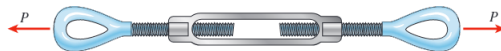


Figure: Tensor doble.

Derrotero

- Efectos términos, desajustes y deformaciones previas
- Esfuerzos en secciones inclinadas
- Energía de deformación
- Temas de estudio autónomo

Elementos de esfuerzo

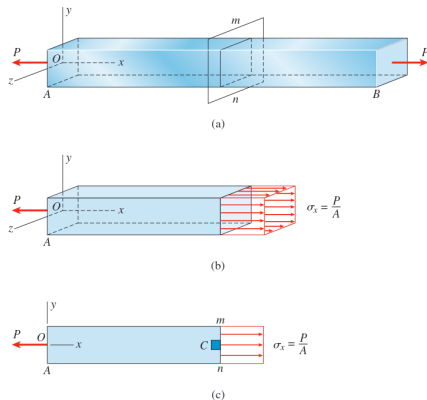


Figure: Barra prismática a tracción mostrando los esfuerzos actuando en su sección transversal mn : (a) barra con fuerzas axiales P , (b) vista tridimensional del corte de la barra mostrando los esfuerzos normales y (c) la vista bidimensional.

Recordemos las suposiciones: distribución uniforme del esfuerzo en toda el área A de la sección transversal, $\sigma_x = P/A$, si:

- Barra prismática.
- Material homogéneo.
- P actúa en el centroide de la sección.
- La sección de estudio está alejada de puntos de concentración de esfuerzos.

Podemos tomar un **elemento de esfuerzo**, o mejor llamado un diferencial de sólido.

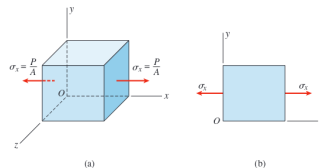
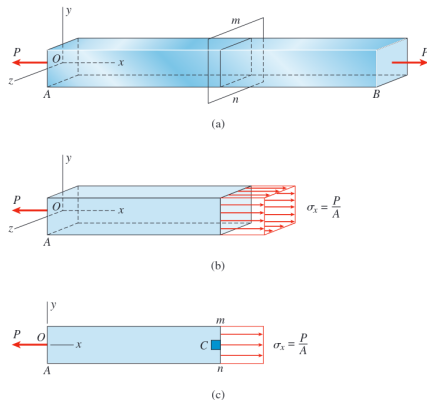


Figure: Diferencial de sólido en el punto C de la barra cargada axialmente: (a) vista tridimensional y (b) vista bidimensional.

Esfuerzos en secciones inclinadas

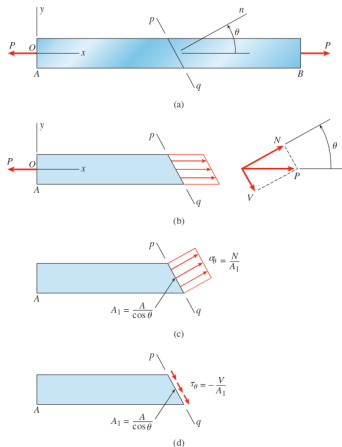


Veamos:

- Ya que los esfuerzos a lo largo de la barra son iguales, estos deben ser uniformes en la sección inclinada.
- Sabemos que la resultante de los esfuerzos debe ser igual a la fuerza horizontal P .
- Se mide la inclinación respecto a la normal n de la sección inclinada y el eje x .

Figure: Barra prismática a tracción mostrando los esfuerzos actuando en su sección inclinada pq : (a) barra con fuerzas axiales P , (b) vista tridimensional del corte de la barra mostrando los esfuerzos normales y (c) la vista bidimensional.

Esfuerzos en secciones inclinadas



Queremos hallar los esfuerzos actuando en la sección inclinada pq :

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2 \theta = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

$$\tau_\theta = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta = -\frac{\sigma_x}{2} (\sin 2\theta)$$

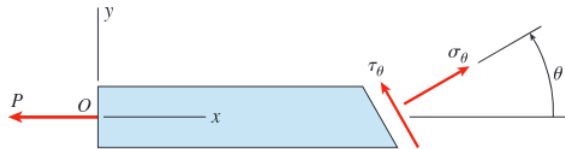


Figure: Convención de signos positivos para esfuerzos actuando en la sección inclinada.

Figure: Barra prismática a tracción mostrando los esfuerzos actuando en su sección inclinada pq .

Máximo esfuerzo normal y cortante

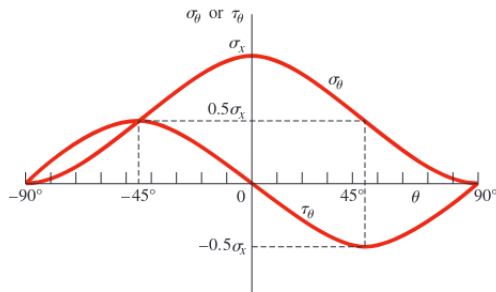


Figure: Gráfico de esfuerzos normales σ_θ y esfuerzos cortantes τ_θ versus el ángulo θ de la sección inclinada.

- El esfuerzo normal máximo ocurre a $\theta = 0^\circ$, y vale:

$$\sigma_{\max} = \sigma_x.$$

- El esfuerzo cortante máximo y mínimo ocurre en $\theta = -45^\circ$ y $\theta = +45^\circ$, respectivamente, y vale:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x}{2}.$$

- Observación: las ecuaciones anteriores constituyen un conjunto de curvas paramétricas. En el caso bidimensional y tridimensional se generalizan en un **círculo de Mohr**, respectivamente.
- Los **esfuerzos uniaxiales** son un caso especial del llamado estado de *tensión plana*.

Máximo esfuerzo normal y cortante

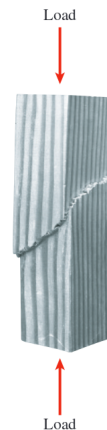
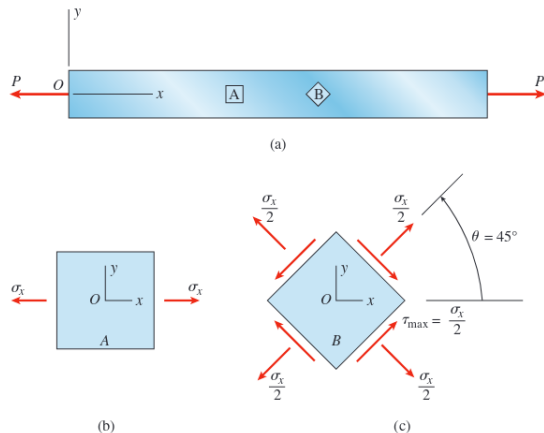


Figure: Esfuerzos normales y cortantes actuando en diferenciales de sólido orientados a $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 45^\circ$, para una barra a tracción. Figure: Falla a cortante en un plano a 45° en un bloque de madera cargado a compresión.

Comentarios sobre el concreto

Members of the American Concrete Institute ACI Building Code Committee 318

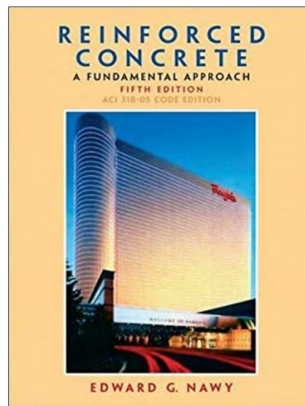
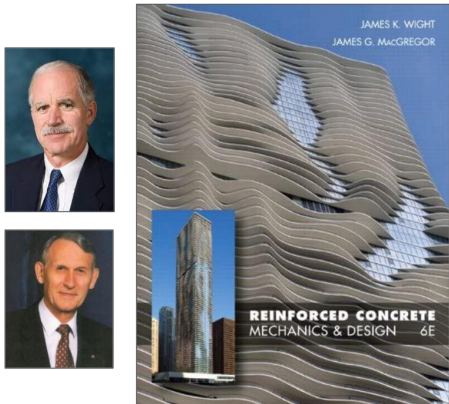


Figure: Autores James K. Wight y James G. MacGregor, portada de su libro *Reinforced Concrete, Mechanics & Design 6ed.* (James K Wight, 2011) Figure: Autor Edward G. Nawy, portada de su libro *Reinforced Concrete, a fundamental approach 5ed.* (Nawy, 2002)

Comentarios sobre el concreto

Compresión

(James K Wigh, 2011) Chapter 3

- ... “Brittle materials tend to develop tensile fractures perpendicular to the direction of the largest tensile strain”.
- ... “This, when concrete is subjected to uniaxial compressive loading, crack tend to develop parallel to the maximum compressive stress”.
- ... “The stress-strain curve remains linear up to 30% of the compressive strength of the concrete”.

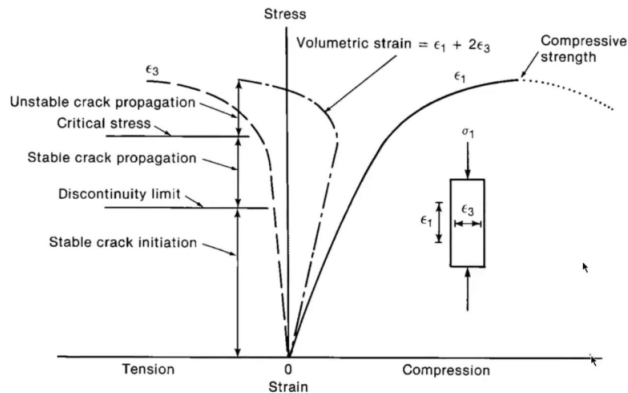


Figure: Stress-strain curves for concrete loaded in uniaxial compression (James K Wigh, 2011).

Comentarios sobre el concreto

Tracción (*tensile strength*)

(James K Wigth, 2011)

... “The tensile strength of concrete falls between 8 and 15 percent of the compressive strength”.

(Nawy, 2002)

... “The tensile strength of concrete is relatively low. A good approximation for the tensile strength f_{ct} is $0.10f'_c < f_{ct} < 0.20f'_c$ ”.

... “It is difficult to measure tensile strength due to gripping”.

Comentarios sobre el concreto

Cortante

(Nawy, 2002)

- ... “Varying from 20% of the compressive strength in normal loading to a considerably higher percentage of up to 85% of the compressive strength in cases where direct shear exist in combination with compression”.

Comentarios sobre el concreto

Comportamiento biaxial y f'_c

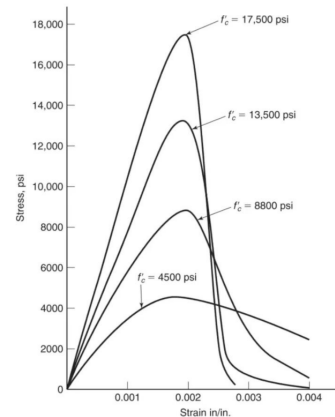
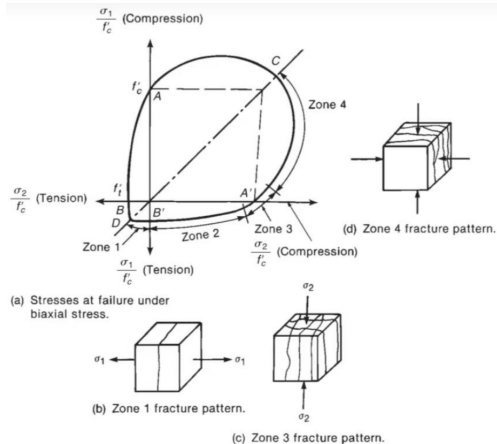


Figure: Strength and modes of failure of unreinforced concrete subjected to biaxial stresses (James K Wigth, 2011).

Figure: Typical concrete stress-strain curves in compression (James K Wigth, 2011).

Comentarios sobre el concreto

Criterio de falla de Mohr-Coulomb

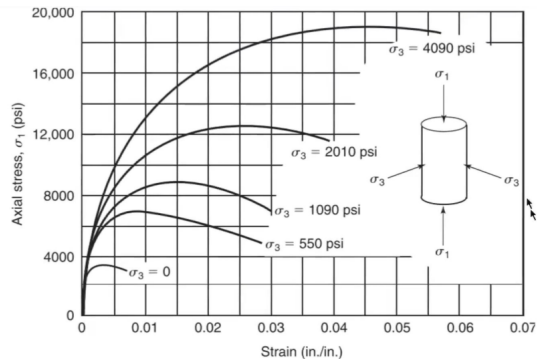


Figure: Axial stress-strain curves from triaxial compression test on concrete cylinders; unconfined compressive strength $f'_c = 3600 \text{ psi}$ (James K Wigh, 2011).

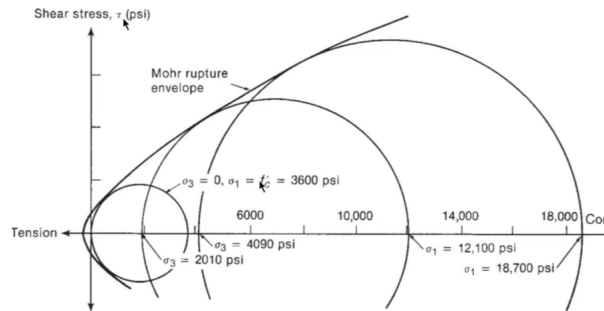


Figure: Mohr rupture envelope for concrete test (James K Wigh, 2011).

Derrotero

- Efectos térmicos, desajustes y deformaciones previas
- Esfuerzos en secciones inclinadas
- **Energía de deformación**
- Temas de estudio autónomo

Trabajo y energía

Consideraciones estáticas

Energía de deformación es un concepto fundamental en la mecánica aplicada, y sus principios son ampliamente utilizados para determinar la respuesta de máquinas y estructuras bajo cargas tanto estáticas como dinámicas.

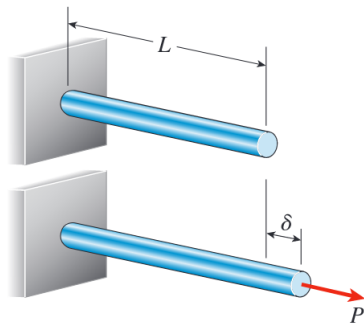


Figure: Barra prismática sometida a una carga aplicada estáticamente.

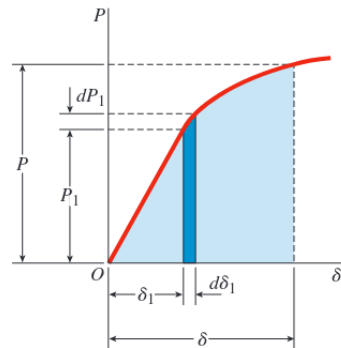


Figure: Diagrama fuerza-desplazamiento.

Trabajo y energía

Consideraciones estáticas

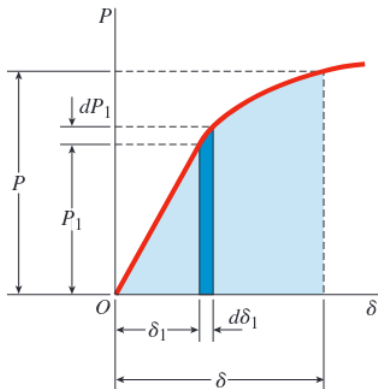


Figure: Diagrama fuerza-desplazamiento.

Veamos:

- El **trabajo** total realizado por la carga que incrementa desde cero hasta su máximo P :

$$W = \int_0^{\delta} P_1 d\delta_1$$

- La **energía de deformación** se define como la energía absorbida por la barra durante el proceso de carga:

$$U = W = \int_0^{\delta} P_1 d\delta_1$$

- La energía de deformación también es llamada **trabajo interno**.
- Unidades: julios [$1 \text{ J} = 1 \text{ N.m}$]

Energía elástica y plástica de deformación

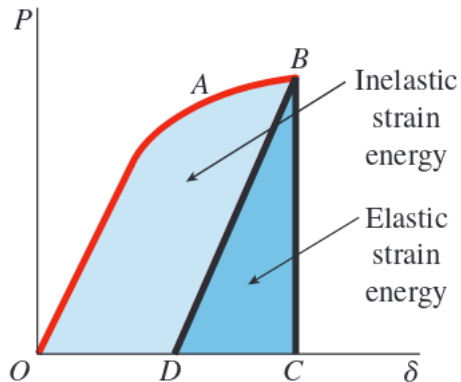
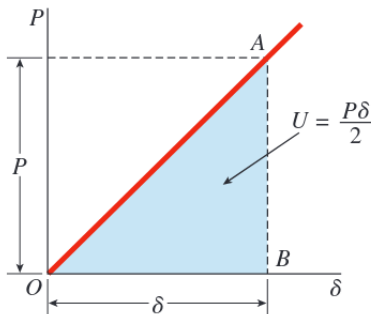


Figure: Energía de deformación plástica y elástica.

- La energía **elástica de deformación** es recuperada durante la descarga del elemento.
- La **energía plástica de deformación** se pierde en el proceso de descarga, principalmente en forma de calor.

Comportamiento elástico lineal

La barra sigue la ley de Hooke



- La energía elástica almacenada en la barra:

$$U = W = \frac{1}{2}P\delta.$$

- La energía elástica en términos de la carga o en términos de la elongación.

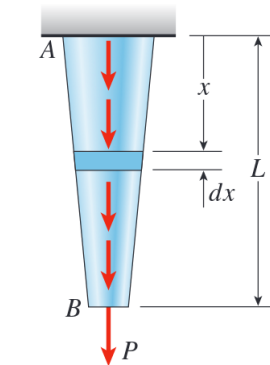
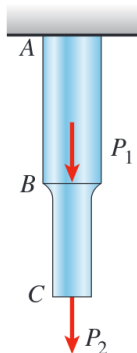
$$U = \frac{P^2L}{2EA} \quad U = \frac{EA\delta^2}{2L}.$$

- En el caso de resortes:

$$U = \frac{P^2}{2k} \quad U = \frac{1}{2}k\delta^2.$$

Figure: Diagrama fuerza-desplazamiento para una barra con comportamiento elástico lineal.

Barras no uniformes



- Energía total en la barra es la suma de la energía de sus segmentos (lineal o no lineal):

$$U = \sum_{i=1}^n U_i.$$

- Si todos los segmentos son elásticos lineales.

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 L_i}{2E_i A_i}.$$

- Si la barra no es prismática, y si la carga varía uniformemente:

$$U = \int_0^L \frac{[N(x)]^2 dx}{2EA(x)}.$$

Figure: Barra conformada por diferentes segmentos de sección prismática. Figure: Barra con variación uniforme de su sección y carga aplicada.

Comentarios

- La energía de deformación no es una función lineal de las cargas, nisiquiera cuando el material es elástico-lineal.
 - “No podemos calcular la energía de deformación de una estructura que soporta más de una carga combinando las energías de deformación que se obtienen a partir de las cargas individuales que actúan por separado”.
- Expresiones válidas para estudiar la compresión.
- La energía de deformación siempre es positiva, y se puede considerar como una **energía potencial**.

Desplazamientos causados por cargas individuales

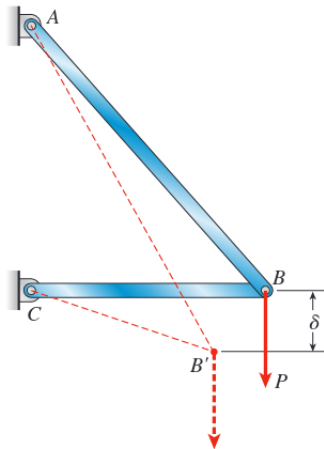


Figure: Estructura soportando una carga individual P .

Análisis: el desplazamiento de una estructura puede ser determinado directamente a partir de la energía de deformación:

$$U = W = \frac{1}{2} P \delta$$

$$\delta = \frac{2U}{P}$$

Siempre y cuando.

- Comportamiento elástico-lineal.
- Solo una carga actuando en la estructura.
- El desplazamiento debe ir en la dirección de la carga y debe ser en el punto donde la carga es aplicada.

Principio muy muy limitado.

Densidad de energía de deformación

Densidad de energía de deformación: (u) La energía de deformación por unidad de volumen del material.

$$u = \frac{P^2}{2EA^2} \quad u = \frac{E\delta^2}{2L^2}.$$

En otros términos, considerando las formulaciones de esfuerzos normales y deformación longitudinales:

$$u = \frac{\sigma^2}{2E} \quad u = \frac{E\varepsilon^2}{2}.$$

Con unidades de $[\text{J}/\text{m}^3]$ o $[\text{Pa}]$.

Dos propiedades adicionales:

- **Módulo de resiliencia:** (u_r) mide la capacidad del material de absorber y liberar energía dentro del rango elástico. Considera σ_{pl} el esfuerzo en el límite de proporcionalidad:

$$u_r = \frac{\sigma_{pl}^2}{2E}.$$

- **Módulo de tenacidad:** (u_t) mide la capacidad del material de absorber energía sin fracturarse o romperse. Considera σ_u el esfuerzo último del material.

Derrotero

- Efectos términos, desajustes y deformaciones previas
- Esfuerzos en secciones inclinadas
- Energía de deformación
- Temas de estudio autónomo

Temas de estudio autónomo

Lectura

Capítulo 2, sección 2.8. *Imapct loading* de Gere and Goodno (2012).

Lectura

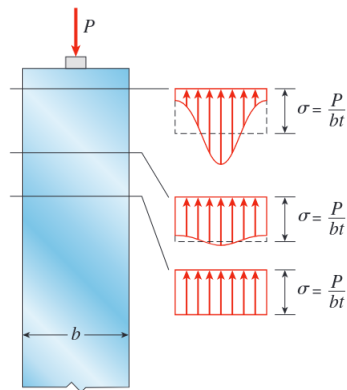
Capítulo 2, sección 2.9. *Repatated loading and fatigue* de Gere and Goodno (2012).

Lectura

Capítulo 2, sección 2.10. *Stress concentrations* de Gere and Goodno (2012).

Principio de Saint-Venant

Adhemar Jean Calude Barré de Saint-Venant (1797-1886), ingeniero mecánico y matemático francés.



“Suponga que las fuerzas que actúan sobre un pequeño elemento de la superficie de un cuerpo elástico son reemplazadas por otro sistema de fuerzas actuando sobre la misma porción de superficie y que es estáticamente equivalente al anterior. Entonces, aunque esta distribución de fuerzas produce cambios sustanciales en los esfuerzos de forma local, esta distribución de fuerzas tiene un efecto despreciable en los esfuerzos que son producidos a distancias mayores comparadas con las dimensiones lineales de la superficie en la cual las fuerzas fueron cambiadas.” (Álvarez, 2023).

Figure: Distribución de los esfuerzos cerca del final de la barra de sección rectangular ($b \times t$) sujeta a una carga concentrada P actuando en una pequeña área.

Principio de Saint-Venant

Adhemar Jean Calude Barré de Saint-Venant (1797-1886), ingeniero mecánico y matemático francés.

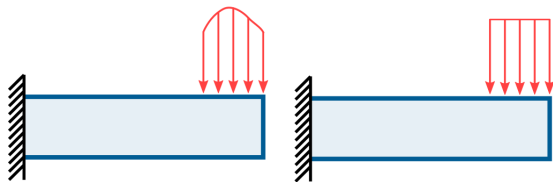


Figure: El principio de Saint-Venant establece que es posible reemplazar complicadas distribuciones de carga en la frontera o condiciones de frontera complicadas por otras estáticamente equivalentes que sean mucho más fáciles de manipular, siempre y cuando, la frontera sea geoméricamente corta. Los esfuerzos serán diferentes localmente, pero lejos del punto de aplicación de la carga, los esfuerzos serán similares para ambas geometrías (Álvarez, 2023).

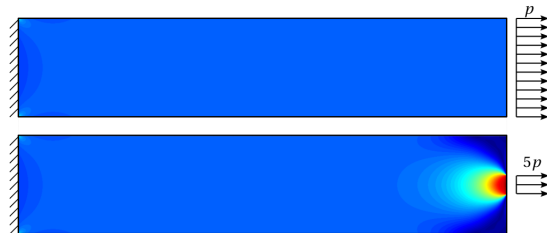


Figure: Al sólido mostrado en la parte superior se le aplicó en su borde derecho una carga distribuida de magnitud p , mientras que al inferior se le aplicó en la quinta parte de su lado derecho un esfuerzo, estáticamente equivalente, de magnitud $5p$. Observe la distribución de los esfuerzos cortantes máximos τ_{\max} en ambos casos. Si bien, localmente, cerca a las cargas hay diferencias en la distribución de los esfuerzos, lejos del punto de aplicación de las cargas la distribución de esfuerzos es prácticamente igual; esto evidencia el principio de Saint-Venant (Álvarez, 2023).

Referencias

Gere, J. M. and Goodno, B. J. (2012). *Mechanics of materials*. Cengage learning.

James K Wigth, J. G. M. (2011). *Reinforced concrete, mechanis & design*. Prentice Hall; 6th ed.

Nawy, E. G. (2002). *Reinforced concrete, a fundamental approach*. Prentice Hall; 5th ed.

Álvarez, D. A. (2023). *Teoría de la Elasticidad usando Matlab y Máxima. Tomo 1: Fundamentos*, volume 1. Universidad Nacional de Colombia.