

Unidad 03. Elementos sometidos a torsión

Torsión en barras prismáticas circulares

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil
Análisis Estructural Básico

2023b



Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada ([Gere and Goodno, 2012](#)).



Derrotero

- Introducción
- Deformaciones torsional en barras circulares
- Barras circulares de material elástico-lineal
- Torsión no uniforme
- Esfuerzos y deformaciones en cortante puro

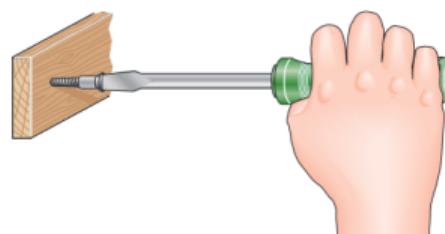
Derrotero

- Introducción
- Deformaciones torsional en barras circulares
- Barras circulares de material elástico-lineal
- Torsión no uniforme
- Esfuerzos y deformaciones en cortante puro

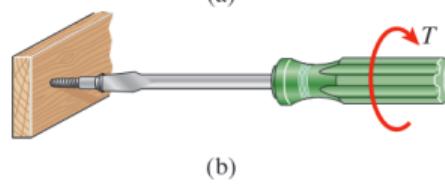
Miembros sometidos a torsión

Torsión hace referencia al torcimiento de una barra recta al ser cargada por momentos (o *pares de torsión*) que tienden a producir rotación con respecto al eje longitudinal de la barra.

- Los momentos que generan torsión en las barras se llaman **momentos de torsión o torques**.
- Miembros cilíndricos sujetos a torques y que transmiten potencia a través de rotaciones son llamados **ejes (shafts)**.

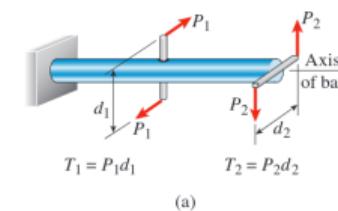


(a)

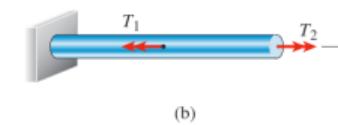


(b)

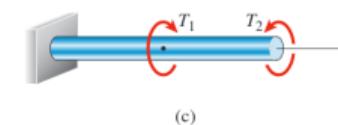
Figure: Torsión en un destornillador debido al torque T aplicado en el mango.



(a)



(b)



(c)

Figure: Barra de sección circular sujetada a torsión por torques T_1 y T_2 .

Miembros sometidos a torsión

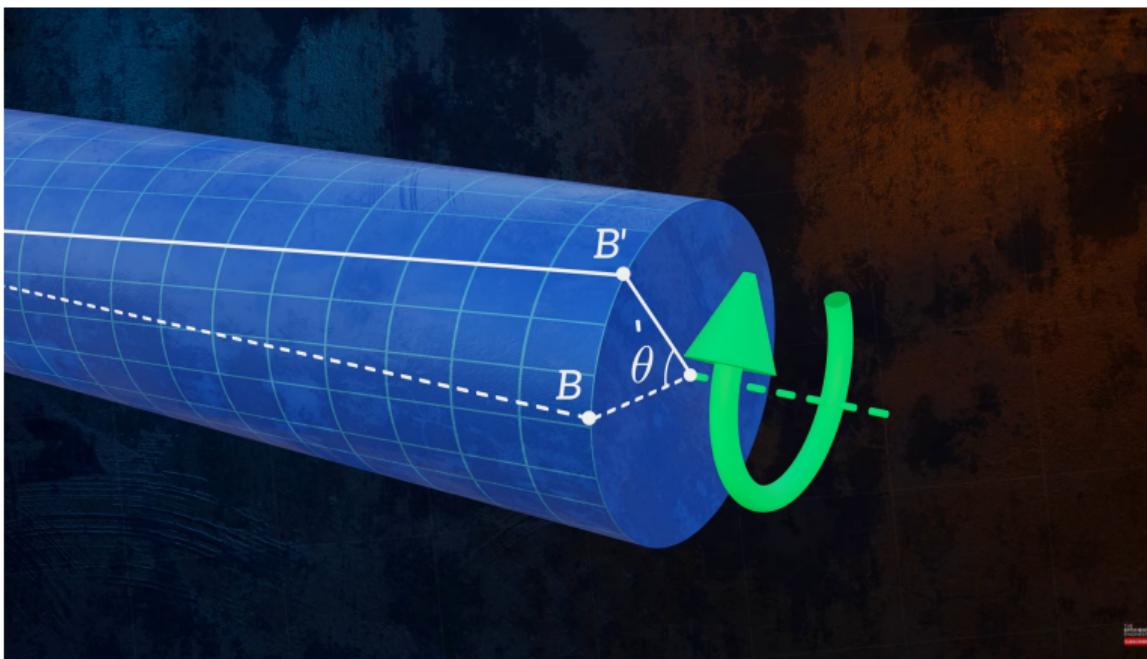


Figure: Understanding torsion, The Efficient Engineer, [video](#).

Derrotero

- Introducción
- Deformaciones torsional en barras circulares
- Barras circulares de material elástico-lineal
- Torsión no uniforme
- Esfuerzos y deformaciones en cortante puro

Torsión pura

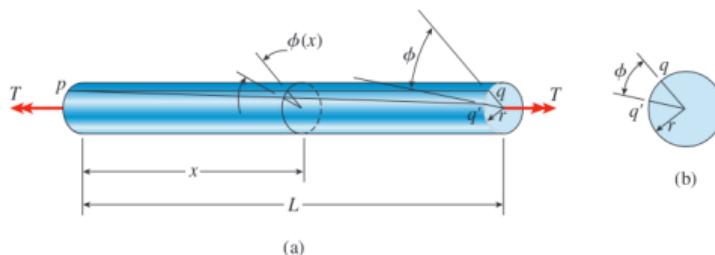


Figure: Deformación de una barra circular sometida a torsión pura

Una barra está sometida a **torsión pura** cuando

- Es prismática.
- Cargada con torques iguales T en sus extremos.
- Todas las secciones transversal son iguales y sometidas al mismo torque interno T .

Bajo este efecto tenemos que después de la torsión:

- Las secciones transversal permanecen planas y circulares.
- Los radios permanecen rectos.
- Para **ángulos de rotación** $\phi(x)$ pequeños no se modificará ni la longitud ni el radio de la barra.
- $\phi(x)$ variará linealmente en x .

Deformación por cortante en la superficie exterior

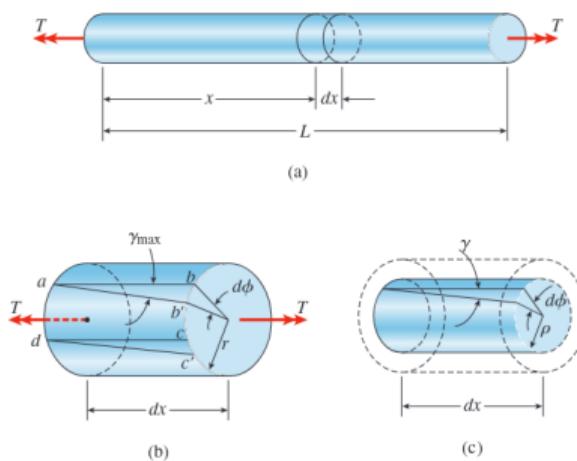


Figure: Deformación de un elemento de longitud dx : extraido de una barra a torsión.

- La superficie de dicha barra estará sometida a cortante puro. Podemos relacionar la deformación por cortante allí con el ángulo de giro:

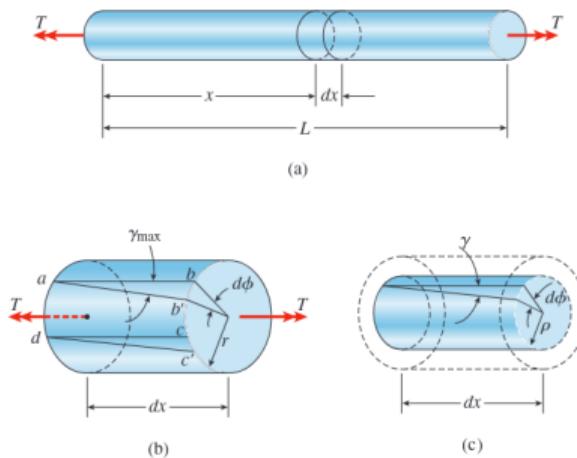
$$\gamma_{\max} = r \frac{d\phi}{dx}.$$

- Llamamos θ como el *razón de torsión* o ángulo de giro por unidad de longitud:

$$\theta = \frac{d\phi}{dx}.$$

- Reescribiendo $\gamma_{\max} = r\theta$, y en *torsión pura* $\gamma_{\max} = r \frac{\phi}{L}$.

Deformaciones angulares al interior de la barra

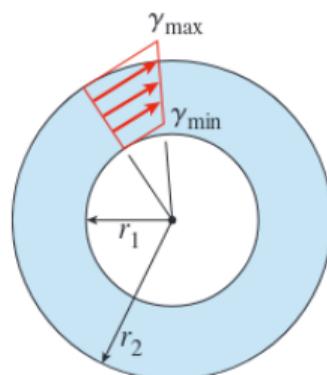


- Elementos interiores también están en cortante puro con la correspondiente deformación angular:

$$\gamma = \rho\theta = \frac{\rho}{r}\gamma_{\max}.$$

Figure: Deformación de un elemento de longitud dx extraído de una barra a torsión.

Tubos circulares



- Para r_1 y r_2 los radios internos y externos del tubo:

$$\gamma_{\max} = r_2 \frac{\phi}{L} \quad \gamma_{\min} = \frac{r_1}{r_2} \gamma_{\max} = r_1 \frac{\phi}{L}.$$

Figure: Variación lineal de la deformación angular entre las caras del tubo.

Derrotero

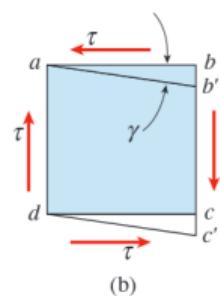
- Introducción
- Deformaciones torsional en barras circulares
- Barras circulares de material elástico-lineal
- Torsión no uniforme
- Esfuerzos y deformaciones en cortante puro

Esfuerzos cortantes actuantes

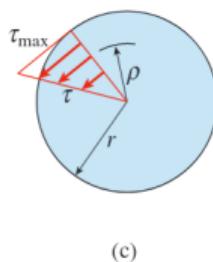
Barras circulares de material elástico-lineal



(a)



(b)



(c)

- Para el material elástico-lineal, la ley de hooke en cortante:

$$\tau = G\gamma.$$

- El esfuerzo cortante en la superficie y al interior de la barra:

$$\tau_{\max} = Gr\theta \quad \tau = G\rho\theta = \frac{\rho}{r}\tau_{\max}.$$

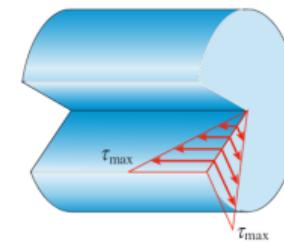


Figure: Esfuerzos cortantes actuando en una barra circular a torsión.

Figure: Esfuerzo cortante longitudinal y transversal en una barra circular sometida a torsión

Fallas por torsión

Barras circulares de material elástico-lineal

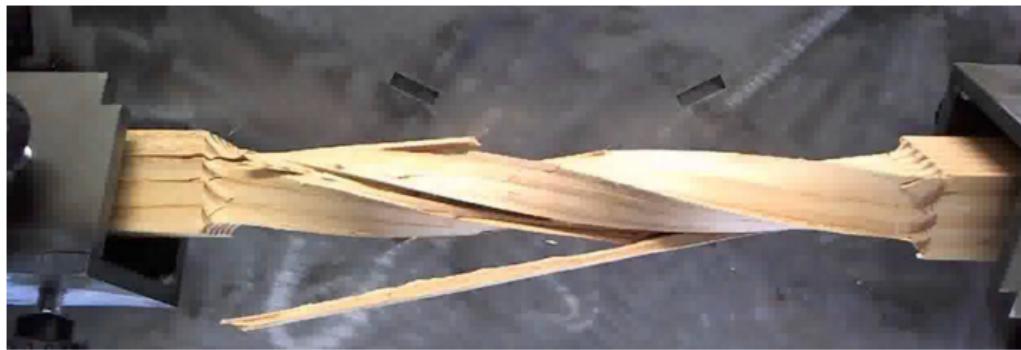


Figure: *Torsion of wood, video.*

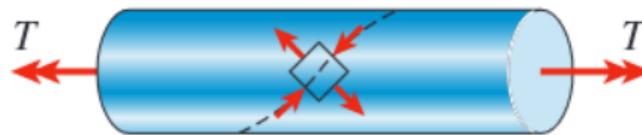


Figure: *Esfuerzos de tracción y compresión actuando en un elemento de esfuerzo orientado a 45° del eje longitudinal.*

Fórmula de la torsión

Relación entre el esfuerzo cortante y el torque

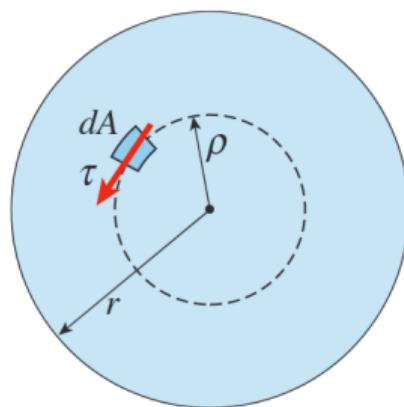


Figure: Determinación de la resultante de esfuerzos cortantes actuando en la sección transversal.

- El torque:

$$T = \int_A dM = \frac{\tau_{\max}}{r} \int_A \rho^2 dA = \frac{\tau_{\max}}{r} I_P.$$

- La fórmula de la torsión:

$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{I_P}.$$

- La fórmula de la torsión para barras sólidas de sección circular.

$$\tau_{\max} = \frac{16T}{\pi d^3}.$$

- La fórmula de la torsión generalizada:

$$\tau = \frac{\rho}{r} \tau_{\max} = \frac{T\rho}{I_P}.$$

Ángulo de giro

- La razón de torsión.

$$\theta = \frac{T}{GI_P}.$$

- GI_P es la **rigidez torsional de la barra**.
- Para una barra en torsión pura:

$$\phi = \frac{TL}{GI_P}$$

Observación: Al realizar un ensayo a torsión en una barra circular, podemos medir el ángulo de giro ϕ producido por un torque conocido T . Luego se puede obtener el valor del módulo de cortante G en el material.

- **Rigidez torsional:** torque requerido para producir una rotación unitaria [rad]:

$$k_T = \frac{GI_P}{L}.$$

- **Flexibilidad torsional:** ángulo de rotación producido por un torque unitario.

$$f_T = \frac{L}{GI_P}.$$

¿Cuál sección trabaja mejor a torsión?

Las secciones circulares huecas son más eficientes que las sólidas para resistir a la torsión.

COMPLETAR

Limitaciones

Ecuaciones válidas para:

- Barras de sección circular, sólidas o huecas.
- Comportamiento elástico-lineal.
- A una distancia de los apoyos o puntos de concentración de esfuerzos.

Las barras con sección no circular (rectangular, I, H, W) requiere de un análisis más detallado a partir de la teoría de la elasticidad. Revisar capítulo 8 de [Álvarez \(2023\)](#).

Derrotero

- Introducción
- Deformaciones torsional en barras circulares
- Barras circulares de material elástico-lineal
- Torsión no uniforme
- Esfuerzos y deformaciones en cortante puro

Torsión no uniforme

Limitaciones

Derrotero

- Introducción
- Deformaciones torsional en barras circulares
- Barras circulares de material elástico-lineal
- Torsión no uniforme
- Esfuerzos y deformaciones en cortante puro

Esfuerzos y deformaciones en cortante puro

Esfuerzos en secciones inclinadas

Esfuerzos en cortante puro

Referencias

Gere, J. M. and Goodno, B. J. (2012). *Mechanics of materials*. Cengage learning.

Álvarez, D. A. (2023). *Teoría de la Elasticidad usando Matlab y Máxima. Tomo 1: Fundamentos*, volume 1. Universidad Nacional de Colombia.