

Unidad 04. Esfuerzos causados por la flexión

Repaso, curvatura y esfuerzos normales en vigas

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil
Análisis Estructural Básico

2023b



Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada.



Derrotero

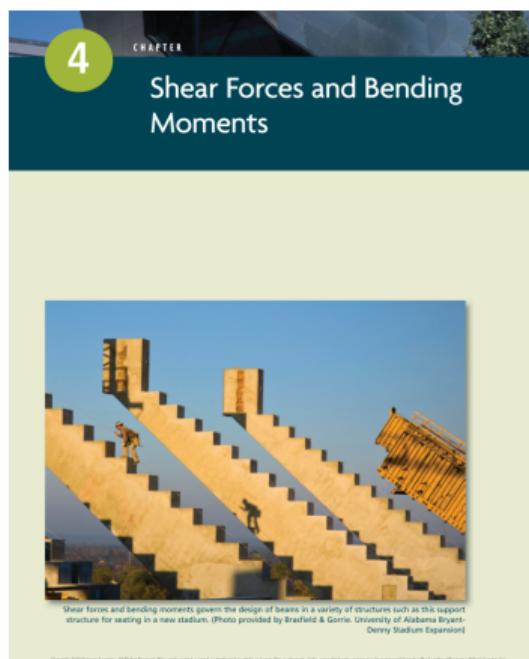
- Introducción
- 5.2. Flexión pura y flexión no uniforme
- 5.3. Curvatura de la viga
- 5.4. Deformaciones longitudinales en vigas
- 5.5. Esfuerzos normales en vigas

Derrotero

- Introducción
- 5.2. Flexión pura y flexión no uniforme
- 5.3. Curvatura de la viga
- 5.4. Deformaciones longitudinales en vigas
- 5.5. Esfuerzos normales en vigas

Vigas

Material de repaso y temas cruciales (estática)



- Tipos de vigas.
- Tipos de cargas en vigas.
- Convención y sistema de coordenadas en vigas.
- Fuerzas internas en vigas:
 - Fuerza cortante (V).
 - Momento flector (M).
- Diagramas de fuerzas axiales.
- Relaciones entre carga distribuida (w), fuerza cortante (V) y momento flector (M):

$$\frac{dV(x)}{dx} = -w(x), \quad \frac{dM(x)}{dx} = V(x).$$

Figura: Chapter 4: shear forces and bending moments, de [Gere and Goodno \(2012\)](#), solamente 36 páginas!

Video: Understanding Stresses in Beams

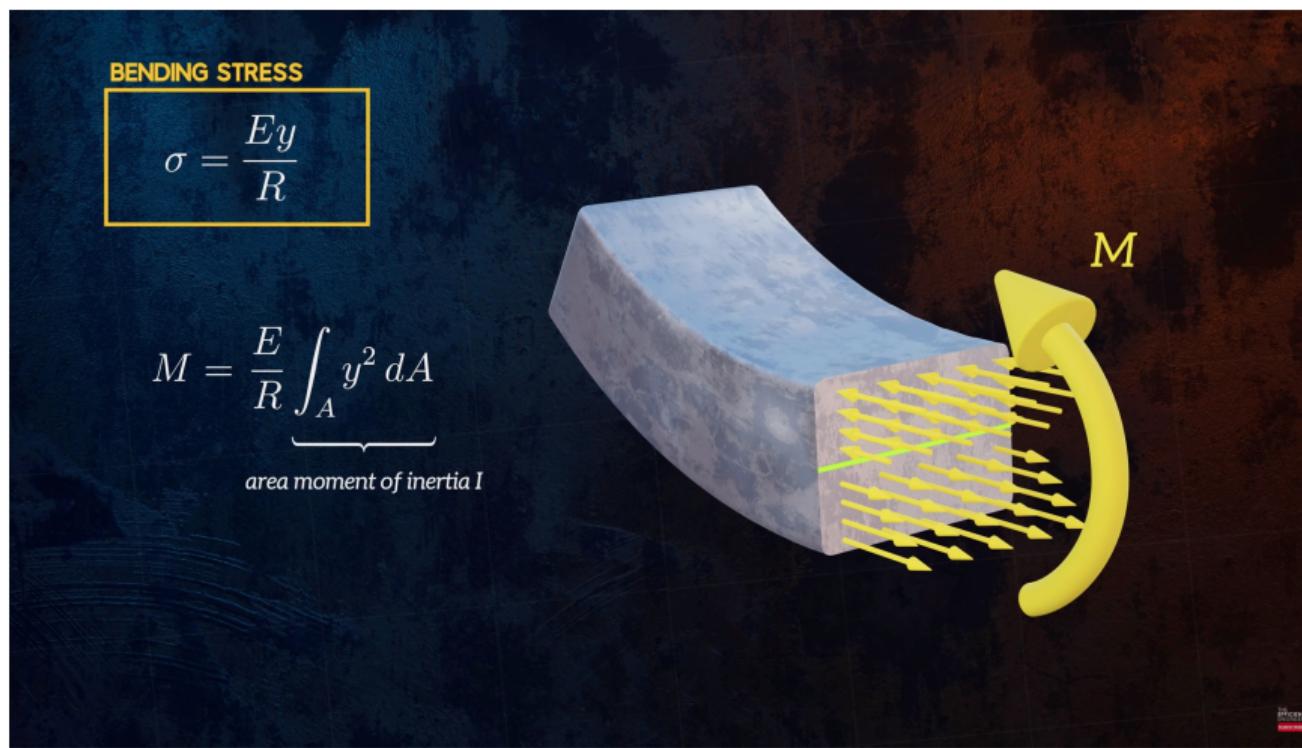


Figura: *Understanding Stresses in Beams*, The Efficient Engineer, [link](#).

Ftool

Herramienta para rectificar el análisis de fuerzas internas y gráficos

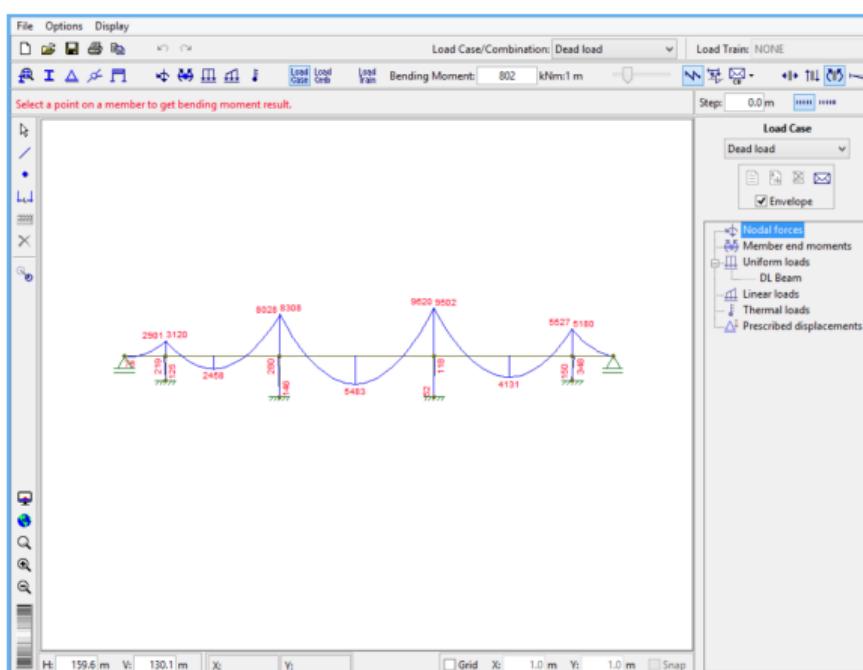


Figura: Ejemplo de uso de FTOOL.

Ftool es un software que tiene como objetivo principal el prototipado simple y eficiente de las estructuras. sirve para el análisis estructural de cerchas planas, marcos planos y vigas planas, permitiendo obtener:

- Fuerzas internas y deflexiones.
- Líneas de influencia.
- Envolventes de carga en trenes.
- Casos y combinaciones de carga.

MechaniCalc

Herramienta para rectificar el análisis de fuerzas internas y gráficos

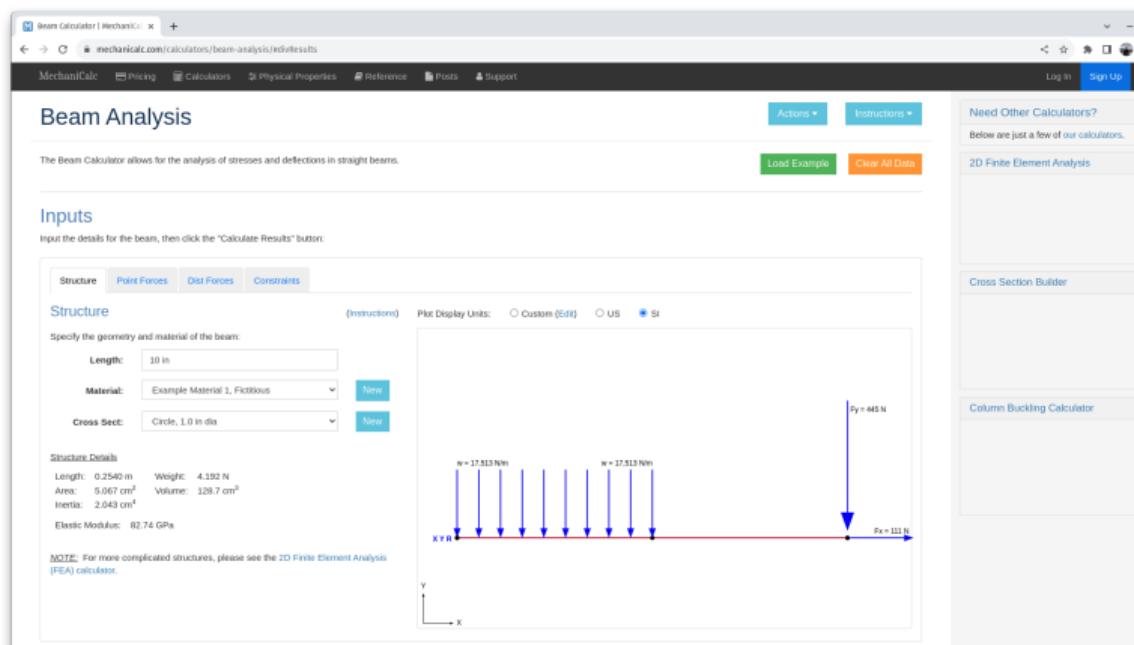


Figura: Calculadora de vigas de la página MechaniCalc, [link](#).

Introducción: esfuerzos en vigas

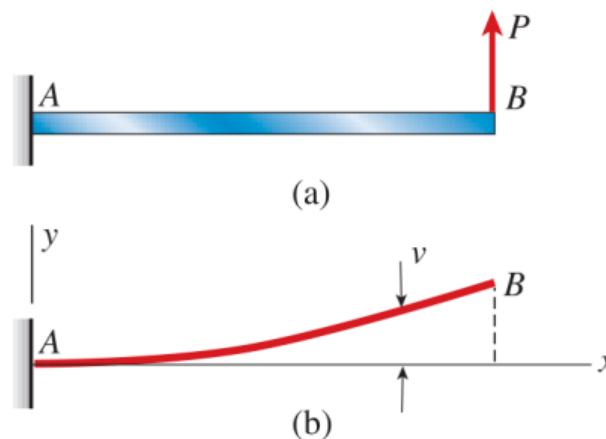


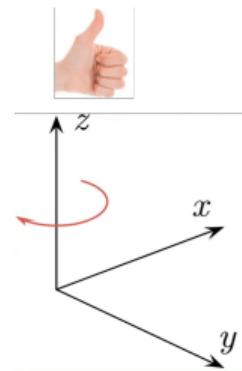
Figura: Flexión de una viga en voladizo: (a) viga con carga y (b) deflexión.

- Los esfuerzos y las deformaciones son necesarias para el análisis y diseño de vigas frente a distintas cargas y condiciones.
- Las cargas actuantes en la viga generan una **deflexión**, vista como la **curva de deflexión** o la también llamada **deformada**.
- Seguiremos el sistema coordinado de la mano derecha.
- Simetría de la sección transversal en el eje y .

Un pequeño comentario sobre el sistema coordenado en tres dimensiones

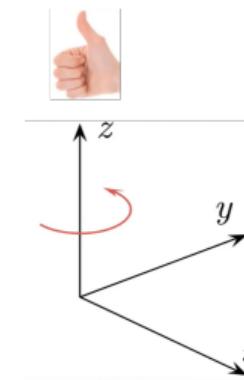
Sistema coordenado de la mano **izquierda**

- Usado usualmente en geotécnica y pavimentos.



Sistema coordenado de la mano **derecha**

- Usado usualmente en estructuras e hidráulica.

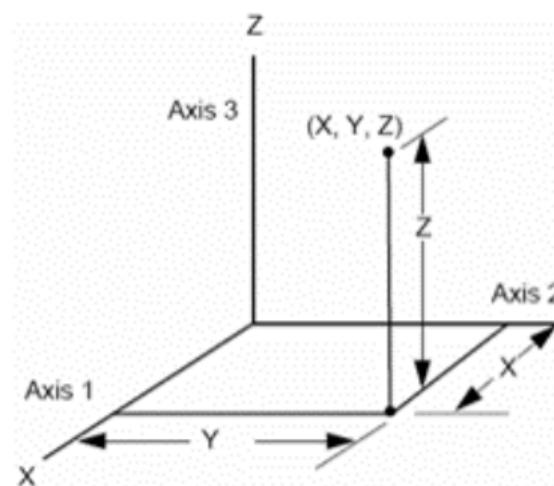


Atención

La consecuencia de usar un sistema de coordenadas u otro es que las fórmulas que se deducen con diferente sistema de coordenadas pueden diferir en los signos de las fórmulas.

¿... dónde veo esto?

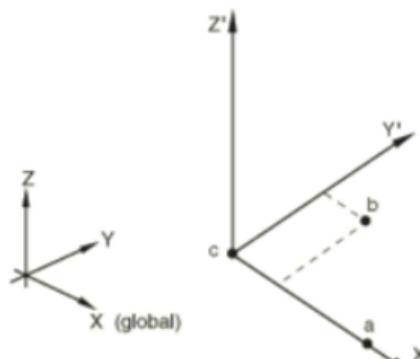
Manual de MIDAS GTS



MIDAS GTS traduce "Sistema de Análisis Geotécnico"... y trabaja el sistema coordenado de la mano derecha!

¿... dónde veo esto?

Manual de ABAQUS



Manual de FEM DESIGN

Global co-ordinate system	
Function	Definition of co-ordinates Definition of directions Interpretation of results -
Type	Right-handed Cartesian
Axes	X, Y, Z
Symbol	
Symbol color	Fixed 3 colors, X = green Y = red Z = blue

ABAQUS y FEM DESIGN son softwares enfocados en el área estructural y mecánica, y también trabajan en el sistema coordenado de la mano derecha

¿... dónde veo esto?

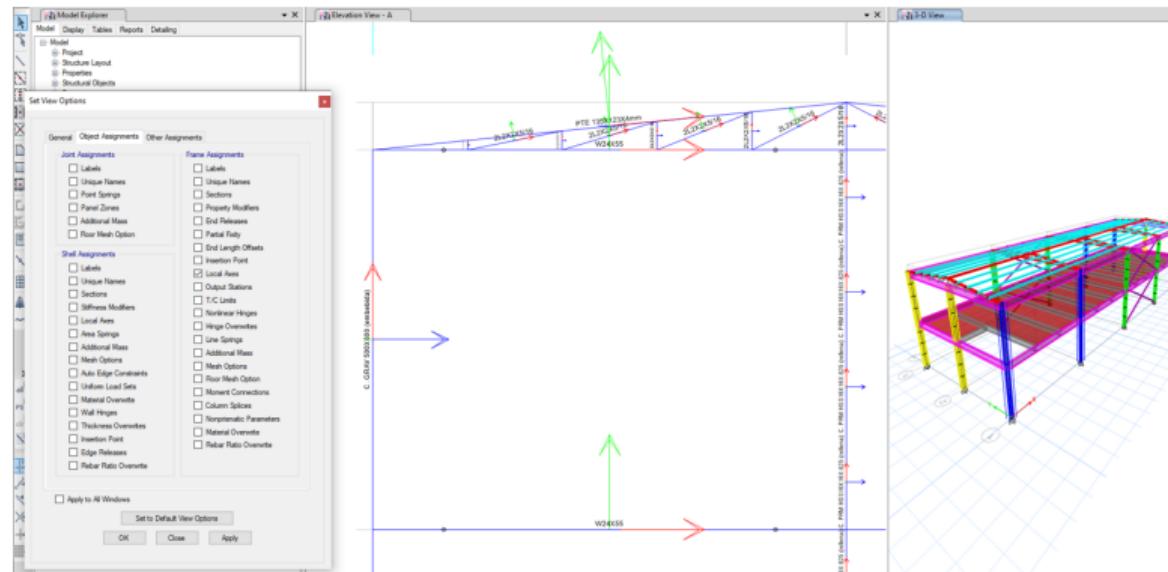
NO es información trivial, de ser así no se molestarían en ponerlo en los manuales de usuario de los software para análisis por computador.

Otro ejemplo

La fuerza cortante en función de la carga distribuida en vigas... ¿cómo se define?

$$\frac{dV}{dx} = w \text{ o } \frac{dV}{dx} = -w$$

¿... dónde veo esto?



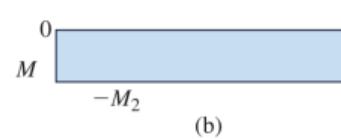
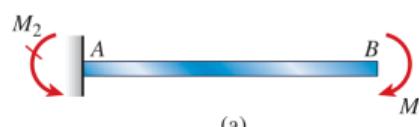
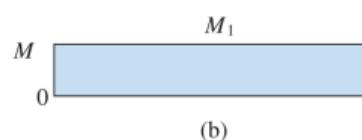
En ETABS, al igual que en todos los softwares de ingeniería estructural y mecánica, los elementos son simplificados y estudiados dentro de su propio sistema de coordenadas. Se activa la opción *Local Axes* (ejes locales) para ver sus ejes, estos están codificados por colores según su documentación.

Derrotero

- Introducción
- 5.2. Flexión pura y flexión no uniforme
- 5.3. Curvatura de la viga
- 5.4. Deformaciones longitudinales en vigas
- 5.5. Esfuerzos normales en vigas

Flexión pura y flexión no uniforme

Flexión pura



Flexión no uniforme

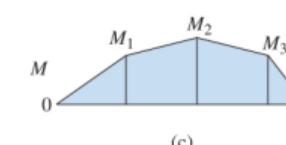
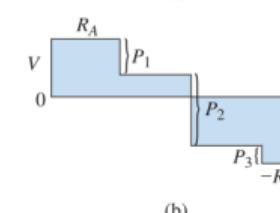
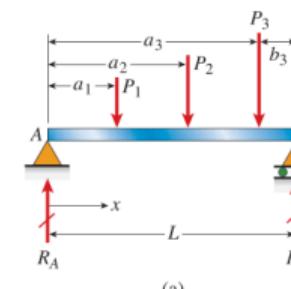


Figura: Viga simplemente apoyada ($M = M_1$) y en voladizo $M = -M_2$.

Figura: Viga con cargas puntuales que generan fuerza cortante al interior.

Ensayo a flexión pura

Estudio de la flexión pura en la zona más representativa de la viga

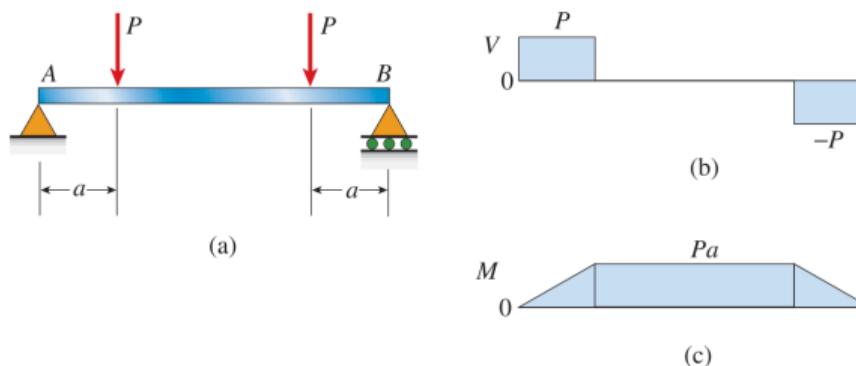


Figura: Viga simplemente apoyada con la región central en flexión pura y flexión no uniforme en los extremos.



Figura: Ensayo de viga a flexión pura. Laboratorio de estructuras e ingeniería sísmica, UNAL Manizales (2022b).

Derrotero

- Introducción
- 5.2. Flexión pura y flexión no uniforme
- **5.3. Curvatura de la viga**
- 5.4. Deformaciones longitudinales en vigas
- 5.5. Esfuerzos normales en vigas

Curvatura de una viga

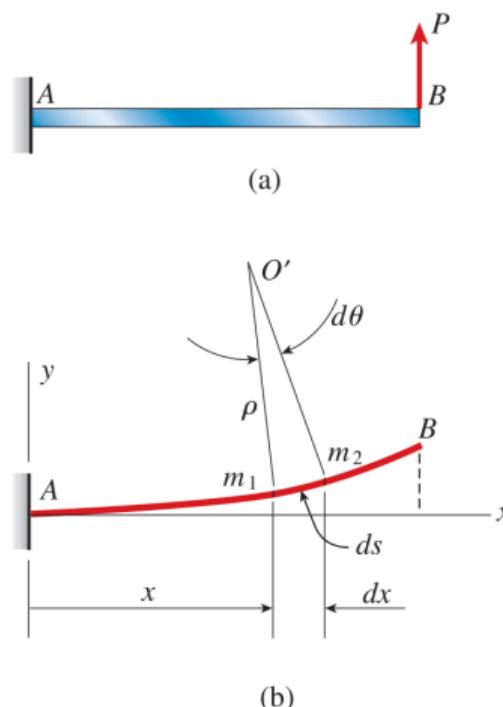


Figura: Curvatura de una viga en voladizo: (a) viga con cargas y (b) deflexión.

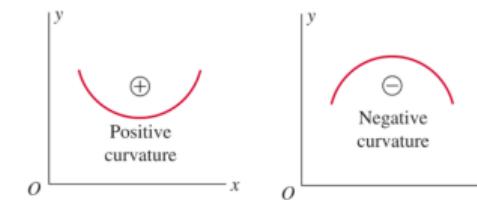
- La curvatura κ es una medida de que tanto se flecta una viga, y es recíproca al radio de curvatura ρ .
- La ecuación de la curvatura:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds},$$

ya que las deflexiones serán muy pequeñas comparadas con la longitud de la viga:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}.$$

- Variación de κ en función de la flexión.
- Convención de signos para κ :



Derrotero

- Introducción
- 5.2. Flexión pura y flexión no uniforme
- 5.3. Curvatura de la viga
- 5.4. Deformaciones longitudinales en vigas
- 5.5. Esfuerzos normales en vigas

Deformaciones longitudinales en vigas

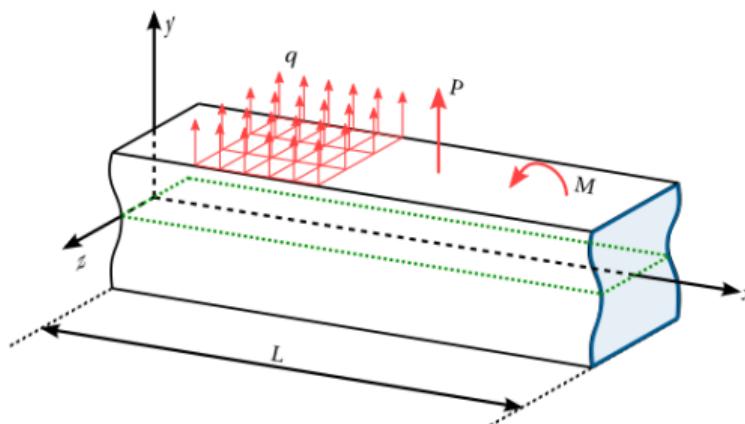


Figura: La línea verde punteada delimitan la llamada superficie neutra de la viga. La carga distribuida q , carga puntual P y momento fletor M actuantes están representados en su convención positiva. Tomado de Álvarez (2024).

Definiciones:

- **Superficie neutra de la viga:** aquella superficie que separa las fibras de la viga que están sometidas a un estado de tracción y aquellas que están sometidas a un estado de compresión en la dirección del eje x.
- **Eje neutro de la sección transversal:** corte de la superficie anterior con una sección transversal al eje x.
- **Eje o fibra neutra de la viga:** intersección de la superficie mencionada con el plano xy .

Deformaciones longitudinales en vigas

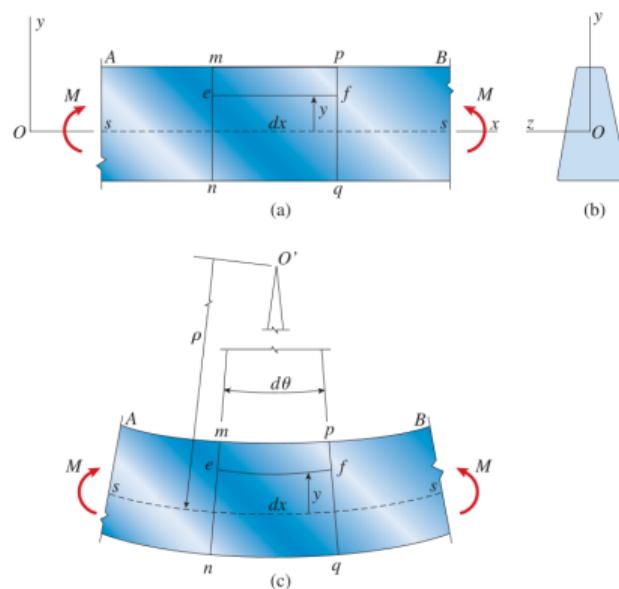


Figura: Deformación de una viga a flexión pura, (a) vista lateral de un diferencial de viga, (b) sección transversal de la viga y (c) diferencial de la viga deformado.

Hipótesis de análisis:

1. Las secciones planas y ortogonales a la superficie neutra de la viga se conservan planas y ortogonales a dicha superficie después de la flexión.
2. En la superficie neutra de la viga no existen esfuerzos normales ni deformaciones en la dirección del eje x .

Cálculo de la deformación longitudinal:

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} = -\kappa y.$$

Observación: solo se tomaron consideraciones geométricas.

Regiones de discontinuidad

Zonas donde la primera hipótesis no aplica, y un análisis especializado debe hacerse

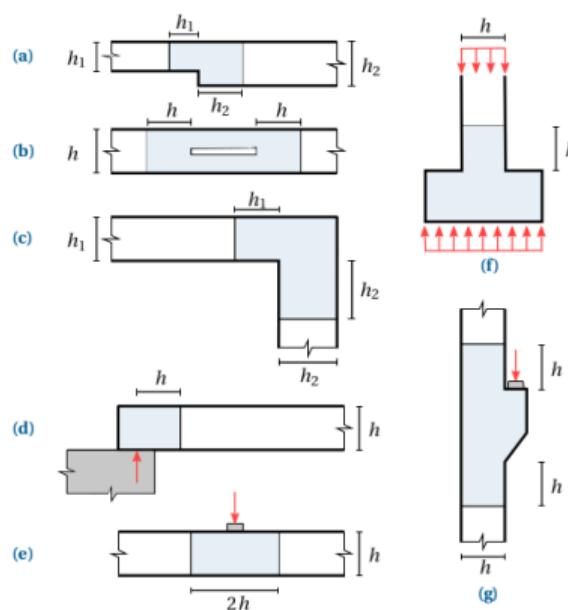


Figura: Regiones de discontinuidad (o regiones D) del modelo puntal tensor. En estas zonas la hipótesis de linealidad de la sección transversal plana ortogonal a la viga después de la deformación, empleada en las teorías de Euler-Bernoulli y de Timoshenko-Ehrenfest, no se cumple. Tomado de Álvarez (2024).

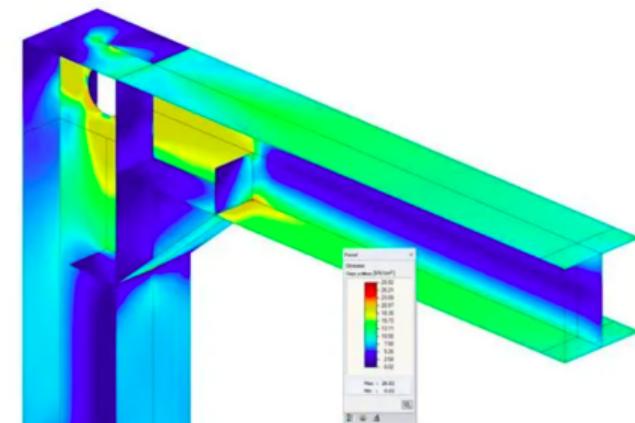
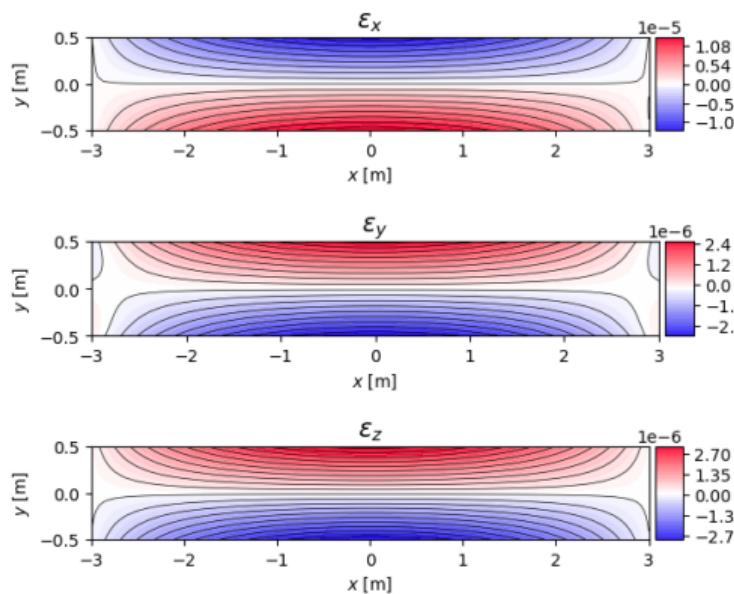


Figura: Ejemplo de análisis por elementos finitos de la unión viga-columna en estructura metálica. Observe la discontinuidad de los colores.

Deformaciones longitudinales en vigas

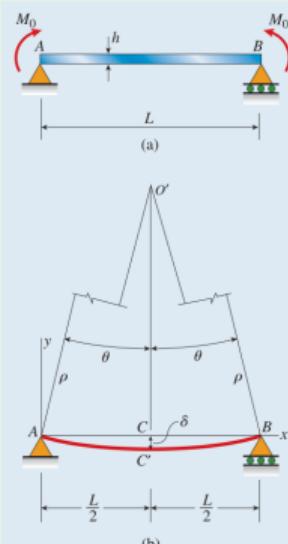


Las deformaciones longitudinales en vigas estarán acompañadas por deformaciones transversales debidas al efecto de Poisson. Sin embargo, no estarán acompañadas de esfuerzos transversales debido a la libertad de movimiento lateral. Esta condición es análoga al de una barra prismática a tracción o compresión, así que podemos considerar *los elementos longitudinales de una viga a flexión pura como un estado de esfuerzos uniaxiales*.

Figura: Gráficos de deformaciones longitudinales para una viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida, [link](#).

Ejemplo de clase

Example 5-1



Una viga AB simplemente apoyada hecha en acero con luz de 4.9 m y una altura de 300 mm, es flexionada por un par de momentos M_0 como se muestra en la figura. La deformación longitudinal en la fibra inferior es 0.00125 y la distancia entre el eje neutro y la fibra inferior es 150 mm.

- Determine el radio de curvatura ρ , la curvatura k y la deflexión δ en la viga.

Figura: Viga a flexión pura: (a) viga con cargas y (b) deflexión.

Estudio autónomo de la sección

Ejercicios recomendados

- Todos los ejemplos de la sección
- 5.4-4
- 5.4-6

Derrotero

- Introducción
- 5.2. Flexión pura y flexión no uniforme
- 5.3. Curvatura de la viga
- 5.4. Deformaciones longitudinales en vigas
- 5.5. Esfuerzos normales en vigas

Esfuerzos normales en vigas para materiales con comportamiento elástico-lineal

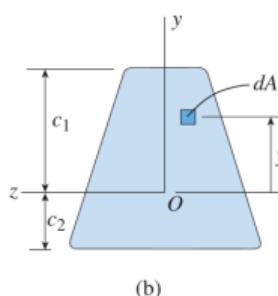
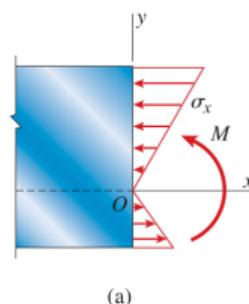


Figura: Esfuerzos normales en vigas de material elástico-lineal: (a) vista lateral de una viga mostrando la distribución del esfuerzo normal, (b) sección transversal de la viga.

- Los esfuerzos actúan en toda la sección transversal y varían en intensidad dependiendo de la forma de la curva esfuerzo-deformación y de las dimensiones de la sección.
- Aplica la Ley de Hooke, modelo elástico lineal:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -\frac{Ey}{\rho} = -E\kappa y.$$

Nos preguntamos:

1. ¿Origen de coordenadas? ¿Dónde se ubica el eje neutro de la sección?
2. ¿Cómo relacionamos la curvatura y los esfuerzos? ¿el momento y los esfuerzos?

Localización del eje neutro de una viga

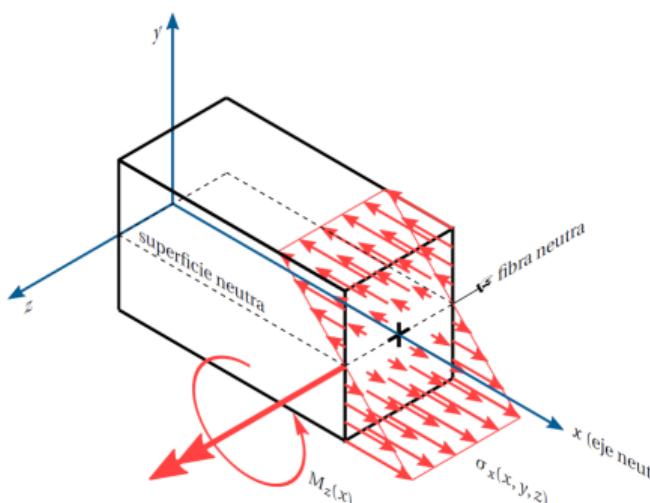


Figura: Distribución de fuerzas internas en la sección transversal de la viga. Tomado de Álvarez (2024).

Aplicamos el equilibrio en la sección transversal, ΣF_x :

$$\int_A \sigma_x dA = - \int_A E\kappa y dA = 0,$$

luego

$$\int_A y dA = 0.$$

Concluimos:

1. El eje neutro pasa por el centroide de la sección cuando el material sigue la ley de Hooke y no hay fuerzas axiales actuando en la sección transversal.
2. El origen de coordenadas O está ubicado en el centroide de la sección transversal.

Relación momento-curvatura

Aplicamos el equilibrio en la sección transversal, $\Sigma M = 0$:

$$M = - \int_A \sigma_x y dA.$$

Operamos y obtenemos la **ecuación momento-curvatura**:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

Concluimos:

1. I momento de inercia de la sección con respecto al eje neutro (z).
2. EI se conoce como **rigidez a la flexión**, es una medida de la resistencia de la viga a flectarse.
3. Convención de signos: un momento positivo produce una curvatura positiva, y viceversa.

Figura: Distribución de fuerzas internas en la sección transversal de la viga. Tomado de Álvarez (2024).

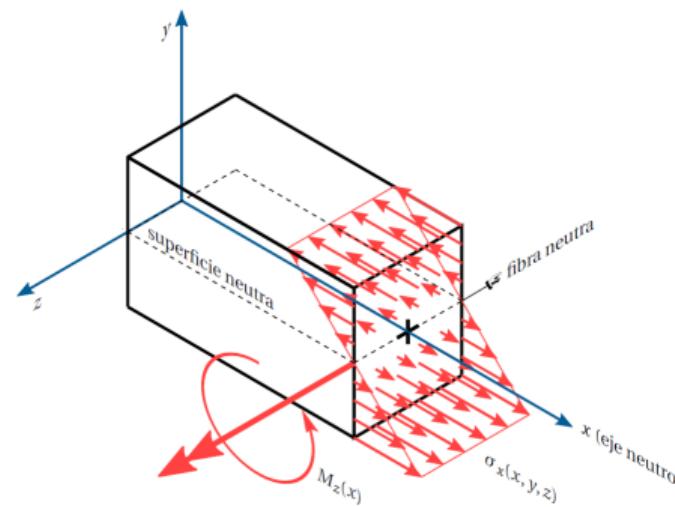


Diagrama momento-curvatura

Tema de estudio en diseño estructural por desempeño

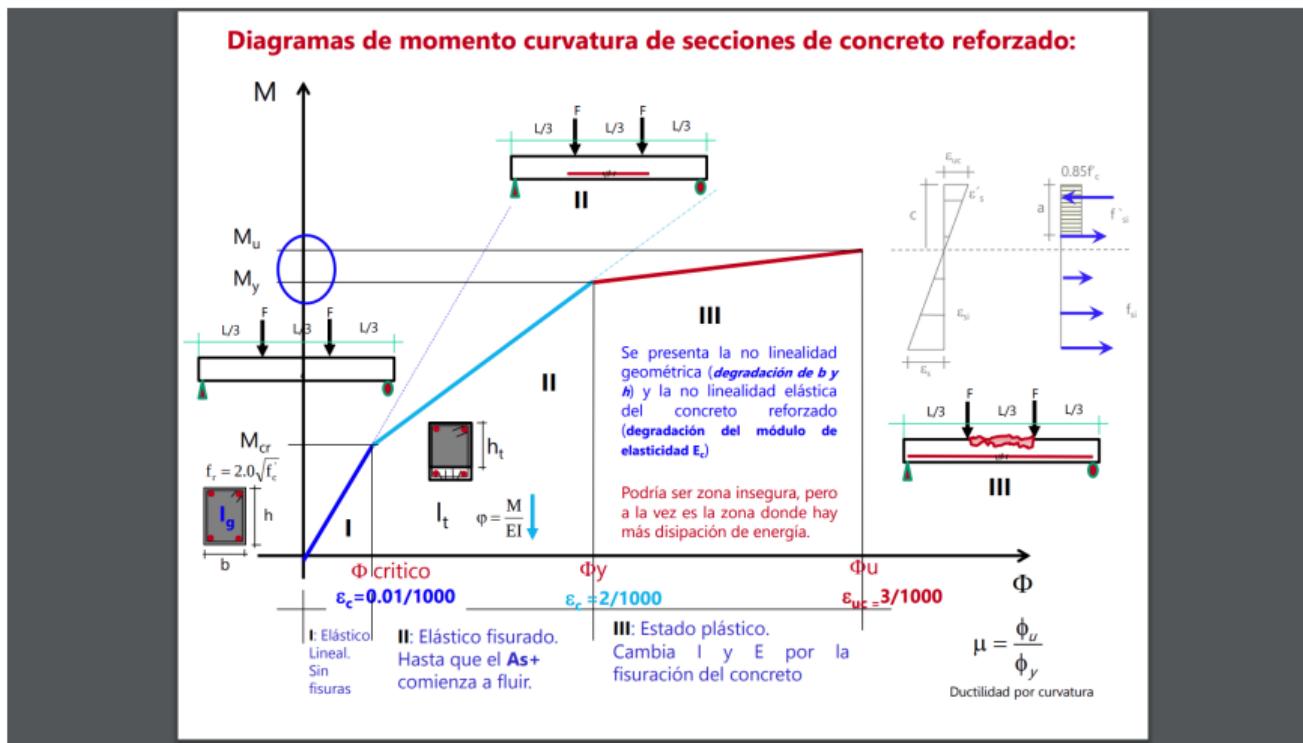


Figura: Esquema del diagrama de momento curvatura de secciones de concreto reforzado. Curso de Diseño sísmico de concreto reforzado [Bedoya, 2022].

Fórmula de la flexión

Determinamos los esfuerzos en términos del momento de flexión

Podemos calcular los llamados **esfuerzos por flexión** con la fórmula de la flexión:

$$\sigma = -\frac{My}{I}.$$

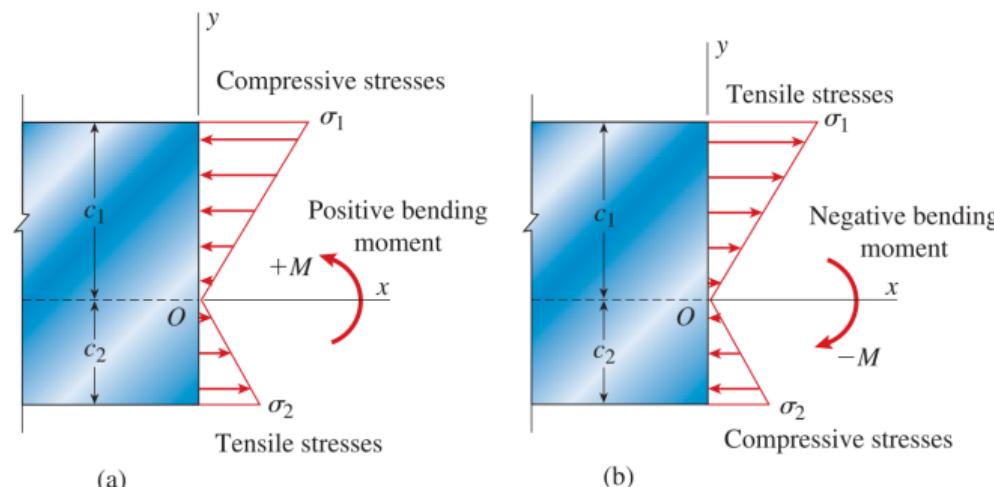


Figura: Relación entre signos del momento flector y las direcciones de los esfuerzos normales: (a) momento positivo y (b) momento negativo.

Módulo de sección transversal

El **módulo de sección transversal** $S_i = \frac{I}{c_i}$ combina las propiedades de la sección transversal más relevantes en una sola cantidad, con unidades [mm³].

Esfuerzos máximos en la sección transversal

$$\sigma_1 = -\frac{Mc_1}{I} = \frac{M}{S_1} \quad \sigma_2 = \frac{Mc_2}{I} = \frac{M}{S_2}.$$

Formas doblemente simétricas

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{S}, \quad S = \frac{I}{c}.$$

Para secciones rectangulares $b \times h$:

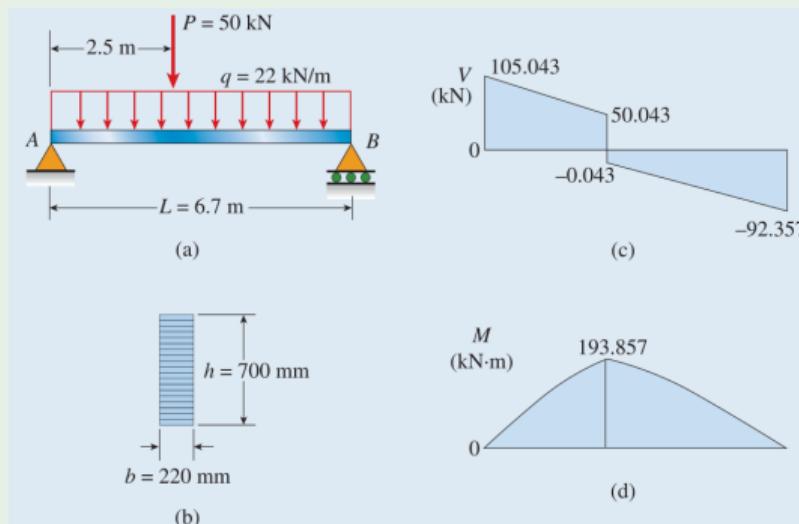
$$I = \frac{bh^3}{12} \quad S = \frac{bh^3}{6}.$$

Ejemplo de clase

Example 5-3

Una viga simple AB con una luz de 6.7 m, como se ve en la figura, soporta una carga uniformemente distribuida de intensidad 22 kN/m y una carga concentrada $P = 50$ kN. La carga uniforme ya considera el peso propio de la estructura. La viga está construida en madera laminada (*Glued laminated timber*) y tiene una sección transversal de 220x700 mm.

1. Determine los esfuerzos máximos a tracción y compresión en la viga.
2. Si la carga q no cambia, encuentre el máximo permisible de P si el esfuerzo normal admisible es $\sigma_a = 13$ MPa.



Estudio autónomo de la sección

Ejercicios recomendados

- Todos los ejemplos de la sección
- 5.5-3
- 5.5-4
- 5.5-6
- 5.5-12
- 5.5-21

Referencias

Gere, J. M. and Goodno, B. J. (2012). *Mechanics of materials*. Cengage learning.

Álvarez, D. A. (2024). *Teoría de la elasticidad usando Matlab y Maxima. Volumen 3: Vigas, Losas y Estabilidad elástica*. Universidad Nacional de Colombia.