

# Unidad 03. Elementos sometidos a torsión

## Torsión en barras prismáticas circulares

Michael Heredia Pérez  
[mherediap@unal.edu.co](mailto:mherediap@unal.edu.co)

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales  
Departamento de Ingeniería Civil  
Análisis Estructural Básico

2023b



## Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada ([Gere and Goodno, 2012](#)).



# Derrotero

- Introducción
- Deformaciones torsional en barras circulares
- Barras circulares de material elástico-lineal
- Torsión no uniforme
- Esfuerzos y deformaciones en cortante puro

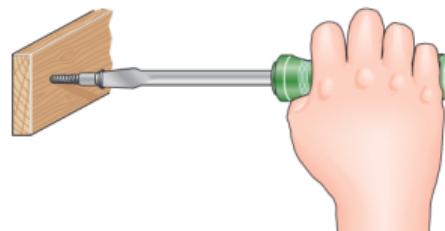
# Derrotero

- Introducción
- Deformaciones torsional en barras circulares
- Barras circulares de material elástico-lineal
- Torsión no uniforme
- Esfuerzos y deformaciones en cortante puro

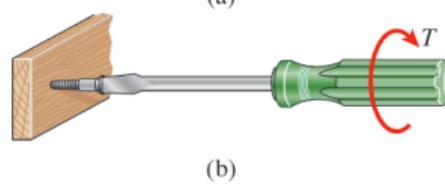
## Miembros sometidos a torsión

**Torsión** hace referencia al torcimiento de una barra recta al ser cargada por momentos (o *pares de torsión*) que tienden a producir rotación con respecto al eje longitudinal de la barra.

- Los momentos que generan torsión en las barras se llaman **momentos de torsión o torques**.
- Miembros cilíndricos sujetos a torques y que transmiten potencia a través de rotaciones son llamados **ejes (shafts)**.

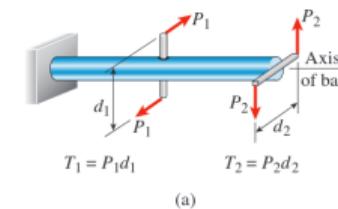


(a)

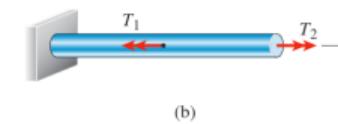


(b)

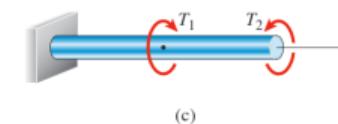
Figure: Torsión en un destornillador debido al torque  $T$  aplicado en el mango.



(a)



(b)



(c)

Figure: Barra de sección circular sujetada a torsión por torques  $T_1$  y  $T_2$ .

## Miembros sometidos a torsión

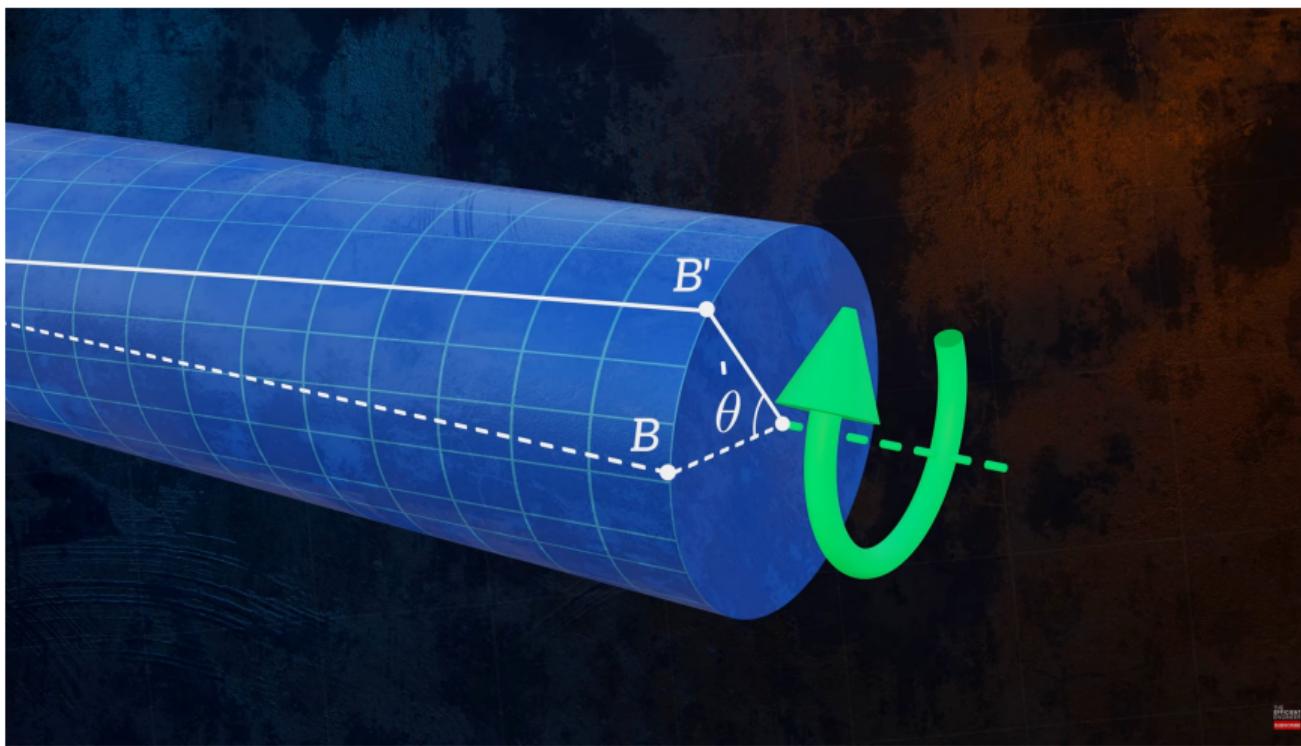
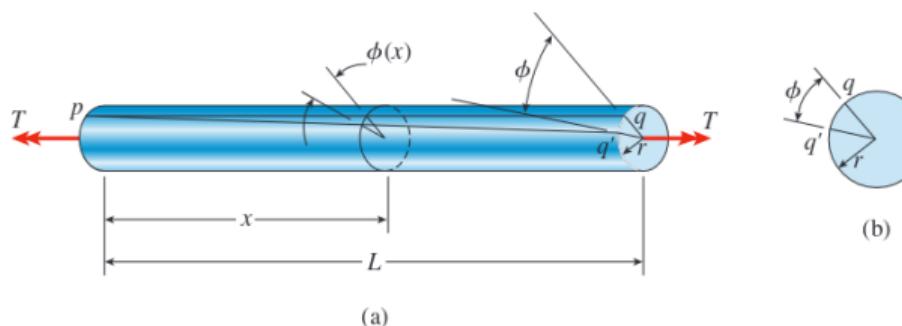


Figure: Understanding torsion, The Efficient Engineer, [video](#).

# Derrotero

- Introducción
- Deformaciones torsional en barras circulares
- Barras circulares de material elástico-lineal
- Torsión no uniforme
- Esfuerzos y deformaciones en cortante puro

## Torsión pura



*Figure: Deformación de una barra circular sometida a torsión pura*

Una barra está sometida a **torsión pura** cuando

- Es prismática.
- Cargada con torques iguales  $T$  en sus extremos.
- Todas las secciones transversales son iguales y sometidas al mismo torque interno  $T$ .

Bajo este efecto tenemos que después de la torsión:

- Las secciones transversales permanecen planas y circulares.
- Los radios permanecen rectos.
- Para **ángulos de rotación**  $\phi(x)$  pequeños no se modificará ni la longitud ni el radio de la barra.
- $\phi(x)$  variará linealmente en  $x$ .

## Deformación por cortante en la superficie exterior

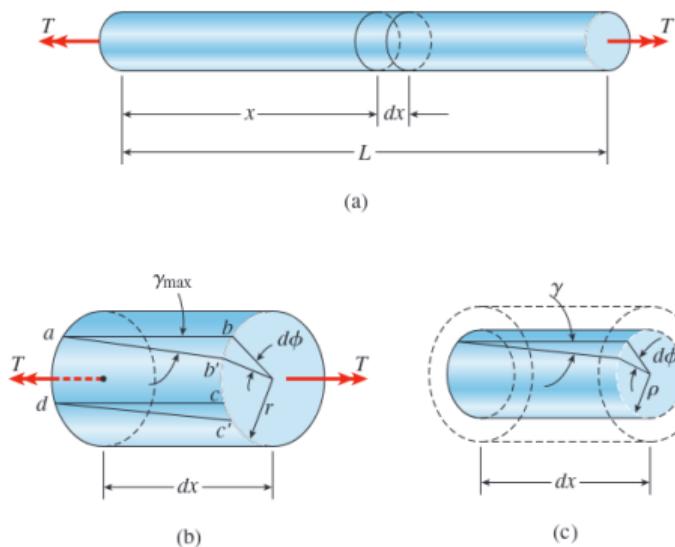


Figure: Deformación de un elemento de longitud  $dx$  extraido de una barra a torsión.

- La superficie de dicha barra estará sometida a cortante puro. Podemos relacionar la deformación por cortante allí con el ángulo de giro:

$$\gamma_{\max} = r \frac{d\phi}{dx}.$$

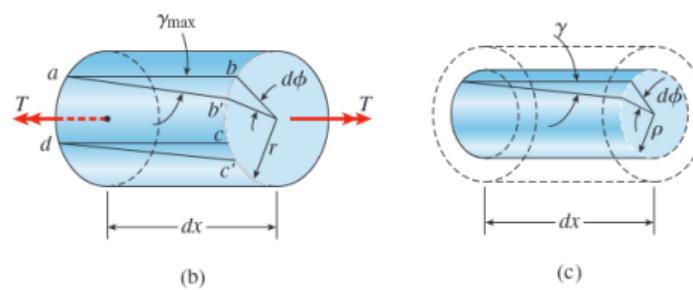
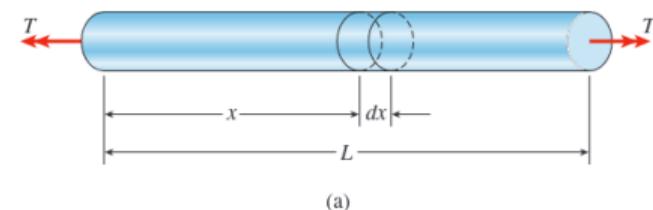
- Llamamos  $\theta$  como la **razón de torsión** o el **ángulo de giro por unidad de longitud**:

$$\theta = \frac{d\phi}{dx}.$$

- Reescribiendo  $\gamma_{\max} = r\theta$ , y en **torsión pura**  

$$\gamma_{\max} = r \frac{\phi}{L}.$$

## Deformaciones angulares al interior de la barra

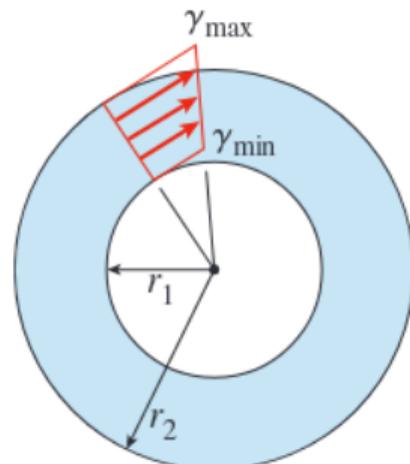


- Elementos interiores también están en cortante puro con la correspondiente deformación angular:

$$\gamma = \rho\theta = \frac{\rho}{r}\gamma_{\max}.$$

Figure: Deformación de un elemento de longitud  $dx$  extraído de una barra a torsión.

## Tubos circulares



- Para  $r_1$  y  $r_2$  los radios internos y externos del tubo:

$$\gamma_{\max} = r_2 \frac{\phi}{L} \quad \gamma_{\min} = \frac{r_1}{r_2} \gamma_{\max} = r_1 \frac{\phi}{L}.$$

Figure: Variación lineal de la deformación angular entre las caras del tubo.

# Derrotero

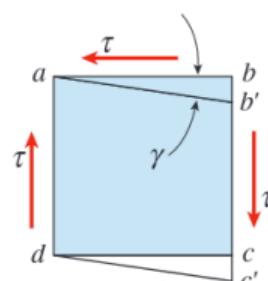
- Introducción
- Deformaciones torsional en barras circulares
- Barras circulares de material elástico-lineal
- Torsión no uniforme
- Esfuerzos y deformaciones en cortante puro

# Esfuerzos cortantes actuantes

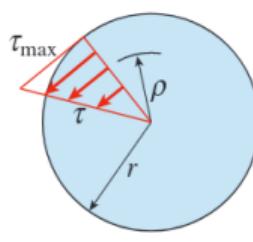
Barras circulares de material elástico-lineal



(a)



(b)



(c)

- Para el material elástico-lineal, la ley de hooke en cortante:

$$\tau = G\gamma.$$

- El esfuerzo cortante en la superficie y al interior de la barra:

$$\tau_{\max} = Gr\theta \quad \tau = G\rho\theta = \frac{\rho}{r}\tau_{\max}.$$

Figure: Esfuerzos cortantes actuando en una barra circular a torsión.

## Falla por torsión en barras

Materiales cuyas fibras longitudinales son débiles a cortante



Figure: *Torsion of wood, video.*

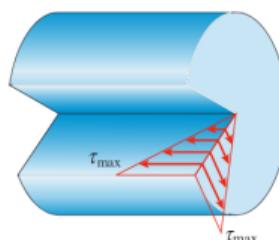


Figure: *Esfuerzo cortante longitudinal y transversal en una barra circular sometida a torsión*

# Fallas por torsión en barras

Materiales más débiles a tracción que a corte

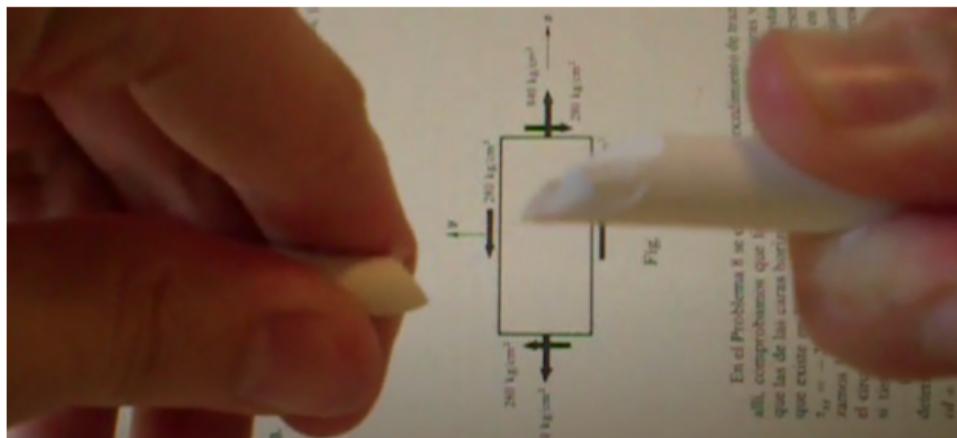


Figure: *Torsión tiza: rotura a 45°, video.*

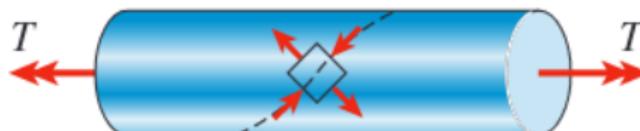


Figure: *Esfuerzos de tracción y compresión actuando en un elemento de esfuerzo orientado a 45° del eje longitudinal.*

# Fórmula de la torsión

Relación entre el esfuerzo cortante y el torque

- El torque:

$$T = \int_A dM = \frac{\tau_{\max}}{r} \int_A \rho^2 dA = \frac{\tau_{\max}}{r} I_P.$$

- El momento polar de inercia para secciones circulares:

$$I_P = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

- La fórmula de la torsión:

$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{I_P}.$$

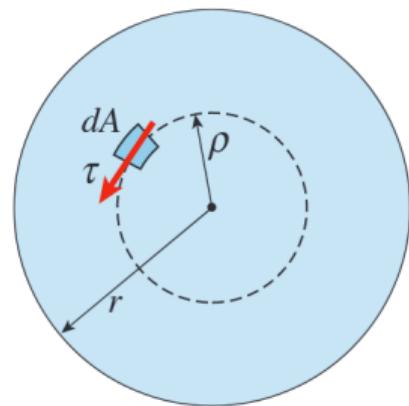


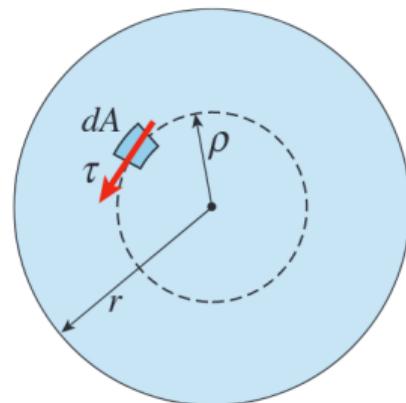
Figure: Determinación de la resultante de esfuerzos cortantes actuando en la sección transversal.

## Lectura

- Appendix D, Case 9 de Gere and Goodno (2012).
- Section 12.6 of chapter 12 de Gere and Goodno (2012).

# Fórmula de la torsión

Relación entre el esfuerzo cortante y el torque



- La fórmula de la torsión para barras sólidas de sección circular.

$$\tau_{\max} = \frac{16T}{\pi d^3}.$$

- La fórmula de la torsión generalizada:

$$\tau = \frac{\rho}{r} \tau_{\max} = \frac{T\rho}{I_P}.$$

Figure: Determinación de la resultante de esfuerzos cortantes actuando en la sección transversal.

# Ángulo de giro

- La razón de torsión.

$$\theta = \frac{T}{GI_P}.$$

- $GI_P$  es la **rigidez torsional de la barra**.
- Para una barra en torsión pura, el ángulo de giro es:

$$\phi = \frac{TL}{GI_P}$$

**Observación:** Al realizar un ensayo a torsión en una barra circular, podemos medir el ángulo de giro  $\phi$  producido por un torque conocido  $T$ . Luego se puede obtener el valor del módulo de cortante  $G$  en el material.

- **Rigidez torsional:** torque requerido para producir una rotación unitaria [rad]:

$$k_T = \frac{GI_P}{L}.$$

- **Flexibilidad torsional:** ángulo de rotación producido por un torque unitario.

$$f_T = \frac{L}{GI_P}.$$

# ¿Cuál sección trabaja mejor a torsión? ¿Llena o vacía?

Las secciones huecas son más eficientes que las sólidas para resistir a la torsión

- El momento polar de inercia en la sección transversal del tubo:

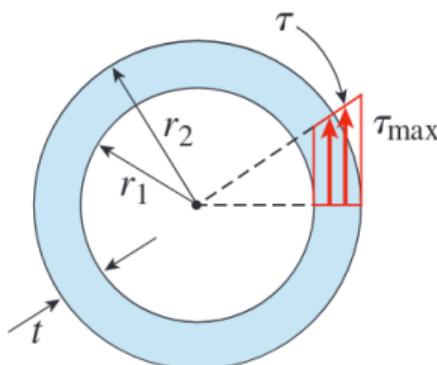


Figure: Tubo circular a torsión.

$$I_P = \frac{\pi}{2}(r_2^4 - r_1^4) = \frac{\pi}{32}(d_2^4 - d_1^4).$$

- Simplificando:

$$I_P = \frac{\pi r t}{2} (r^2 + t^2) = \frac{\pi d t}{4} (d^2 + t^2).$$

*r* : el radio promedio.

*d* : el diámetro promedio.

*t* : espesor de la pared del tubo.

- Para tubos de pared delgada,  $t^2 \approx 0$ :

$$I_P \approx 2\pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{4}.$$

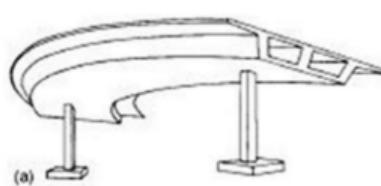
Observación: En las ecuaciones anteriores para barras sólidas, basta con considerar el momento polar de inercia para calcular tubos circulares.

## Secciones de puentes

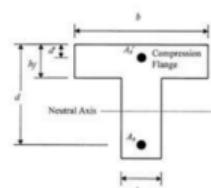
En el diseño de puentes suele preferirse, para el tablero, las secciones tipo cajón en lugar de secciones abiertas (como vigas rectas) ya que estas últimas son muy pobres para resistir la torsión. Esta decisión en el diseño dependerá de:

- La luz del tramo.
- El ancho del tablero (número de calzadas).
- Tipo de tráfico.
- Curvatura de la vía.
- Etc ...

## Sección Transversal



Tablero Cerrado



Tablero Abierto: Viga y losa (Viga T)

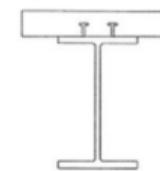
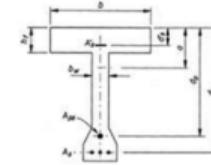


Figure: Sección transversal típica en puentes, curso de Diseño de Puentes del profesor Josué Galvis [Galvis, 2022a].

## Secciones en puentes



**Figure:** Secciones típicas de puentes, (izquierda) sección tipo cajón y (derecha) tablero apoyado sobre vigas.

## Secciones en puentes



**Figure:** Puentes vehiculares en Roma: moderno vs contemporáneo, recuerdo septiembre 2023. Archivo personal.

## Limitaciones

Las ecuaciones vistas son válidas para:

- Barras de sección circular, sólidas o huecas.
- Comportamiento elástico-lineal.
- A una distancia de los apoyos o puntos de concentración de esfuerzos.

Las barras con sección no circular (rectangular, I, H, W) requiere de un análisis más detallado a partir de la teoría de la elasticidad. Revisar capítulo 8 de [Álvarez \(2023\)](#).

# Derrotero

- Introducción
- Deformaciones torsional en barras circulares
- Barras circulares de material elástico-lineal
- **Torsión no uniforme**
- Esfuerzos y deformaciones en cortante puro

## Torsión no uniforme

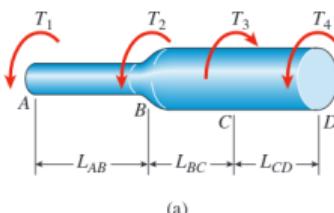
La barra no necesariamente es prismática y los torques son aplicados en su longitud

Tenemos 3 casos de análisis:

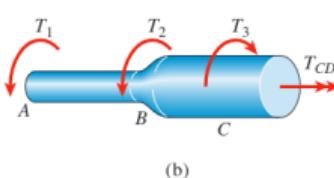
1. Barras conformadas por segmentos prismáticos con torque constante en cada uno de ellos.
2. Barras con sección variable continua y torque constante.
3. Barras con sección variable continua y torque variable continuo.

# Torsión no uniforme

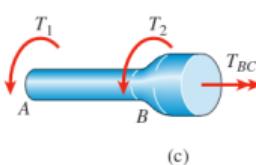
Caso 1: Barras conformadas por segmentos prismáticos con torque constante en cada uno de ellos



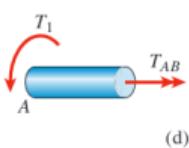
(a)



(b)



(c)



(d)

Análisis:

- Determinar la magnitud y dirección de los torques internos en cada segmento. Para la figura:

$$T_{CD} = -T_1 - T_2 + T_3 \quad T_{BC} = -T_1 - T_2 \quad T_{AB} = -T_1.$$

- El máximo esfuerzo a torsión en la barra es el mayor esfuerzo a torsión calculado en una de las secciones de estudio:

$$\tau_{\max} = \max \tau_{\max,i} = \max \frac{T_i r_i}{(I_p)_i}.$$

- El ángulo de giro entre los extremos de la barra es la suma algebráica de los ángulos de giro de las secciones de estudio:

$$\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i = \sum_{i=1}^n \frac{T_i L_i}{G_i (I_p)_i}.$$

# Torsión no uniforme

## Caso 2: Barras con sección variable continua y torque constante

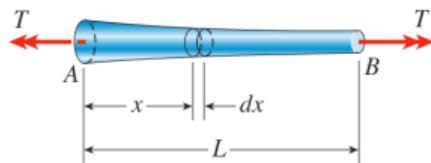


Figure: Barra en torsión no uniforme, caso 2.

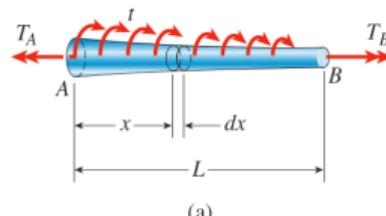
Análisis:

1. El máximo esfuerzo cortante ocurrirá en la sección transversal con el menor diámetro (barras sólidas y usualmente tubos vacíos).
2. Determinar la sección transversal de menor diámetro. Si no es posible, evaluar en todas las secciones.
3. El ángulo de giro se obtiene a partir de un análisis infinitesimal:

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{Tdx}{GI_P(x)} \\ \phi &= \int_0^L d\phi = \int_0^L \frac{Tdx}{GI_P(x)}. \end{aligned}$$

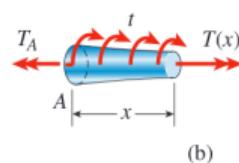
# Torsión no uniforme

Caso 3: Barras con sección variable continua y torque variable continuo



Análisis:

1. El procedimiento es igual que en el caso anterior, considerando la variación del torque:



$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{T(x)dx}{GI_P(x)} \\ \phi &= \int_0^L d\phi = \int_0^L \frac{T(x)dx}{GI_P(x)}. \end{aligned}$$

Figure: Barra en torsión no uniforme, caso 3. Está sujeta a un torque distribuido de magnitud  $t$  por unidad de distancia a lo largo del eje de la barra.

## Limitaciones

Las ecuaciones vistas son válidas para:

- Barras de sección circular, sólidas o huecas.
- Comportamiento elástico-lineal.
- A una distancia de los apoyos o puntos de concentración de esfuerzos.
  - **Observación:** las concentraciones de esfuerzos tienen poca influencia en el ángulo de giro.
- Buena aproximación para barras cónicas cuando el ángulo sea menor que  $10^\circ$ .

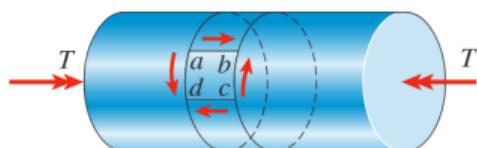
Las barras con sección no circular (rectangular, I, H, W) requiere de un análisis más detallado a partir de la teoría de la elasticidad. Revisar capítulo 8 de [Álvarez \(2023\)](#).

# Derrotero

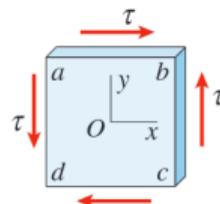
- Introducción
- Deformaciones torsional en barras circulares
- Barras circulares de material elástico-lineal
- Torsión no uniforme
- Esfuerzos y deformaciones en cortante puro

# Esfuerzos y deformaciones en cortante puro

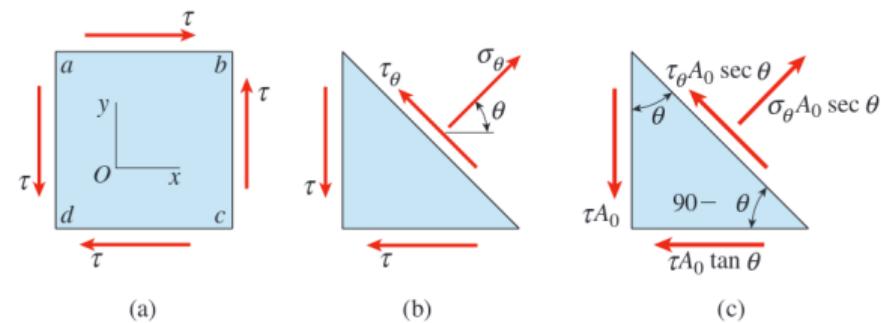
Cuando una barra se somete a torsión, aparecen esfuerzos cortantes en su sección transversal y en los planos longitudinales



(a)



(b)



**Figure:** Análisis de esfuerzos en secciones inclinadas: (a) elemento a cortante puro, (b) esfuerzos actuando en un elemento diferencial triangular, y (c) fuerzas actuando en el elemento triangular (diagrama de cuerpo libre).

**Figure:** Esfuerzos actuando en un elemento diferencial obtenido de la superficie de una barra sometida a torsión.

# Esfuerzos en secciones inclinadas

Resultado del análisis anterior en una barra sometida a cortante puro

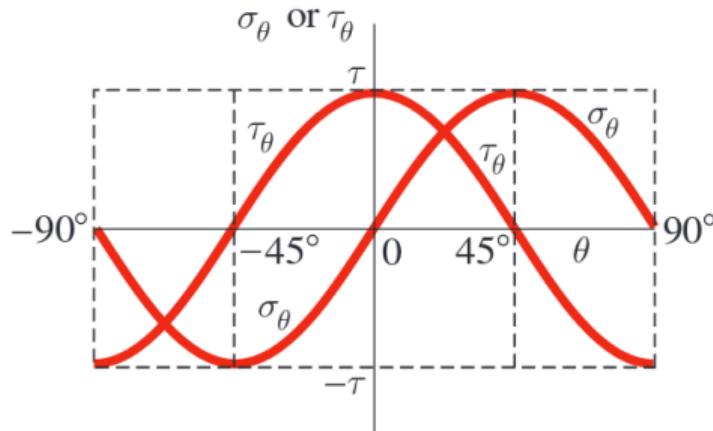


Figure: Gráfica de esfuerzos normales  $\sigma_\theta$  y esfuerzos cortante  $\tau_\theta$  contra el ángulo  $\theta$  del plano inclinado.

- Las ecuaciones para describir los esfuerzos:

$$\sigma_\theta = \tau \sin 2\theta \quad \tau_\theta = \tau \cos 2\theta.$$

- COMPLETAR**

# Esfuerzos en secciones inclinadas

Entendiendo la falla de materiales frágiles frágiles y débiles a tracción

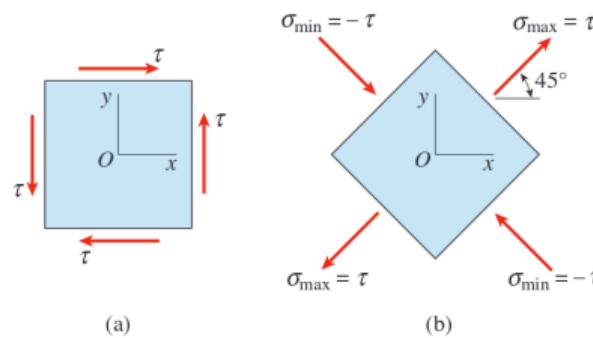


Figure: Elementos diferenciales orientados a  $\theta = 0^\circ$  y  $\theta = 45^\circ$  para cortante puro.

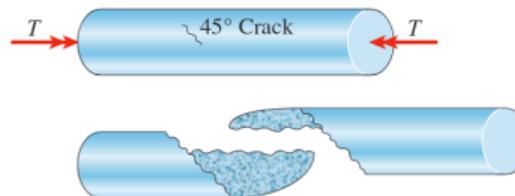


Figure: Falla por torsión en un material frágil por grietas de tracción en una superficie helicoidal a  $45^\circ$ .

## Deformaciones en cortante puro

## Referencias

Gere, J. M. and Goodno, B. J. (2012). *Mechanics of materials*. Cengage learning.

Álvarez, D. A. (2023). *Teoría de la Elasticidad usando Matlab y Máxima. Tomo 1: Fundamentos*, volume 1. Universidad Nacional de Colombia.