Unidad 06. Pandeo de columnas

Pandeo de columnas

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil
Análisis Estructural Básico

2023b

Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada.

Derrotero

Derrotero

Video: Understanding buckling

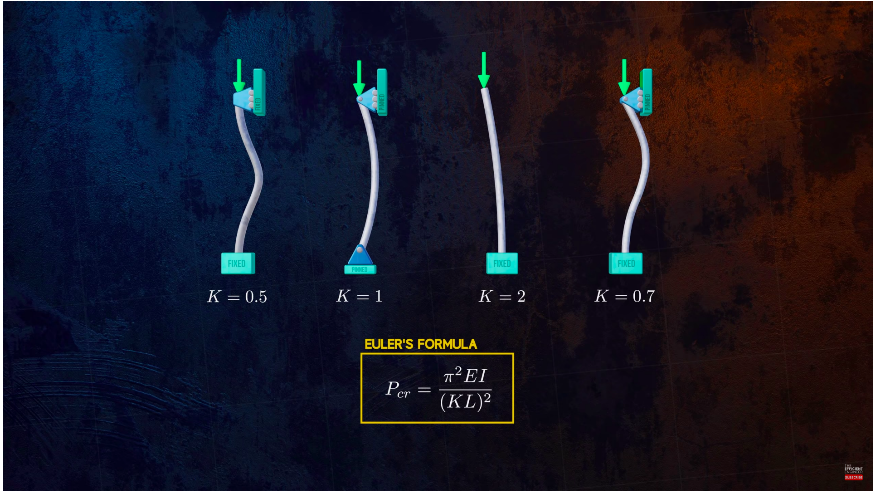


Figura: *Understanding buckling, The Efficient Engineer, link.*

Introducción al pandeo (*buckling*)

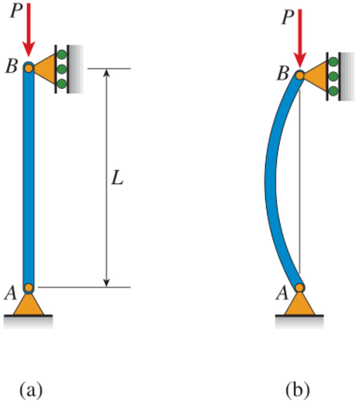


Figura: *Pandeo de una columna esbleta debido a cargas axiales de compresión P.*

- Las estructuras portantes pueden fallar de diferentes maneras dependiendo de:
  - el tipo de estructura,
  - las condiciones de soporte,
  - el tipo de cargas,
  - los materiales usados.
- Consideraremos el **pandeo** en columnas. Una **columna** es un elemento largo y esbelto cargado axialmente a compresión.
- Los elementos sometidos a compresión que son relativamente esbeltos tienden a deflectarse lateralmente y fallar por pandeo en lugar de fallar por compresión.
- Es un falla común que debe considerarse en el proceso de diseño.

Introducción al pandeo (*buckling*)

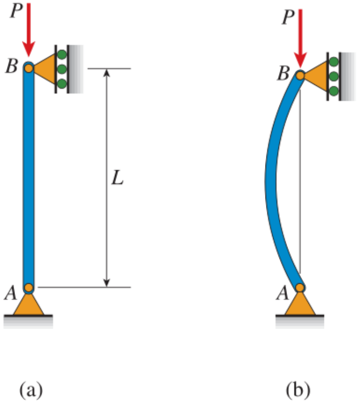


Figura: *Pandeo de una columna esbleta debido a cargas axiales de compresión P.*

- Las estructuras portantes pueden fallar de diferentes maneras dependiento de:
  - el tipo de estructura,
  - las condiciones de soporte,
  - el tipo de cargas,
  - los materiales usados.
- Consideraremos el **pandeo** en columnas. Una **columna** es un elemento largo y esbelto cargado axialmente a compresión.
- Los elementos sometidos a compresión que son relativamente esbeltos tienden a deflectarse lateralmente y fallar por pandeo en lugar de fallar por compresión.
- Es un falla común que debe considerarse en el proceso de diseño.

Introducción al pandeo (*buckling*)

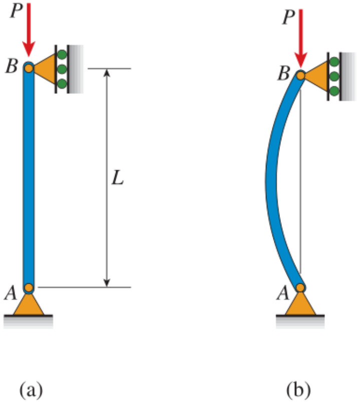


Figura: *Pandeo de una columna esbleta debido a cargas axiales de compresión P.*

- Las estructuras portantes pueden fallar de diferentes maneras dependiento de:
  - el tipo de estructura,
  - las condiciones de soporte,
  - el tipo de cargas,
  - los materiales usados.
- Consideraremos el **pandeo** en columnas. Una **columna** es un elemento largo y esbelto cargado axialmente a compresión.
- Los elementos sometidos a compresión que son relativamente esbeltos tienden a deflectarse lateralmente y fallar por pandeo en lugar de fallar por compresión.
- Es un falla común que debe considerarse en el proceso de diseño.

Introducción al pandeo (*buckling*)

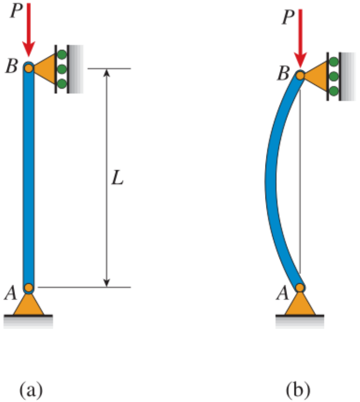


Figura: *Pandeo de una columna esbleta debido a cargas axiales de compresión P.*

- Las estructuras portantes pueden fallar de diferentes maneras dependiento de:
  - el tipo de estructura,
  - las condiciones de soporte,
  - el tipo de cargas,
  - los materiales usados.
- Consideraremos el **pandeo** en columnas. Una **columna** es un elemento largo y esbelto cargado axialmente a compresión.
- Los elementos sometidos a compresión que son relativamente esbeltos tienden a deflectarse lateralmente y fallar por pandeo en lugar de fallar por compresión.
- Es un falla común que debe considerarse en el proceso de diseño.

Introducción al pandeo (*buckling*)

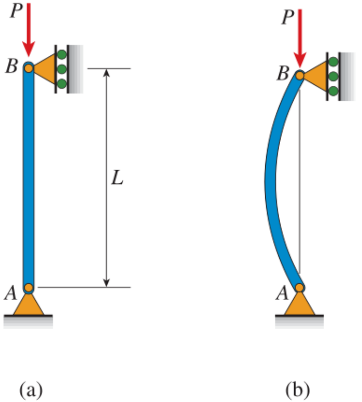


Figura: *Pandeo de una columna esbleta debido a cargas axiales de compresión P.*

- Las estructuras portantes pueden fallar de diferentes maneras dependiento de:
  - el tipo de estructura,
  - las condiciones de soporte,
  - el tipo de cargas,
  - los materiales usados.
- Consideraremos el **pandeo** en columnas. Una **columna** es un elemento largo y esbelto cargado axialmente a compresión.
- Los elementos sometidos a compresión que son relativamente esbeltos tienden a deflectarse lateralmente y fallar por pandeo en lugar de fallar por compresión.
- Es un falla común que debe considerarse en el proceso de diseño.

Introducción al pandeo (*buckling*)

Figura: *Falla por pandeo de un silo metálico, link.*

Figura: *Aplastamiento de una lata y falla por pandeo, link.*

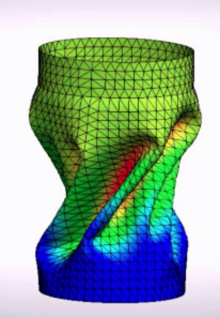


Figura: *Pandeo por torsión en tubos. Ejemplo de una lata, video.*

Derrotero

Pandeo y estabilidad

Buckling and stability

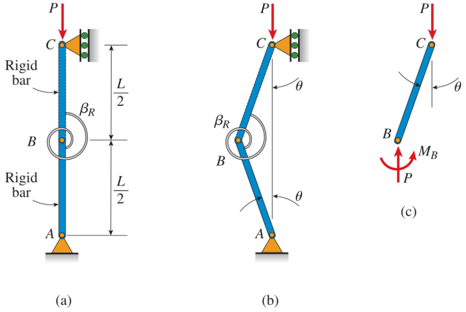


Figura: *Pandeo de una estructura idealizada que consta de dos barras rígidas y un resorte rotacional.*

- El resorte genera un momento que intenta devolver la estructura a su posición inicial, generando un **momento resistente** frente a la acción de una carga externa que causa desplazamiento lateral en B.
- La estructura es **estable** cuando la carga P es relativamente pequeña frente al momento resistente del resorte, y regresa a su estado inicial.
- La estructura es **inestable** cuando la carga P excede el momento resistente del resorte, aumentando el desplazamiento vertical hasta el colapso.

Pandeo y estabilidad

Buckling and stability

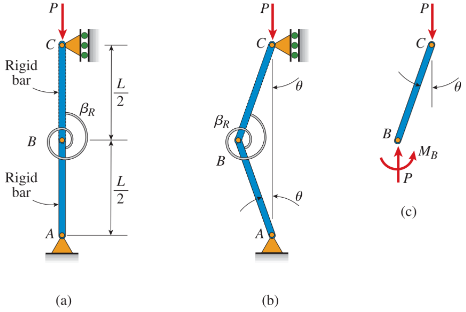


Figura: *Pandeo de una estructura idealizada que consta de dos barras rígidas y un resorte rotacional.*

- El resorte genera un momento que intenta devolver la estructura a su posición inicial, generando un **momento resistente** frente a la acción de una carga externa que causa desplazamiento lateral en B.
- La estructura es **estable** cuando la carga P es relativamente pequeña frente al momento resistente del resorte, y regresa a su estado inicial.
- La estructura es **inestable** cuando la carga P excede el momento resistente del resorte, aumentando el desplazamiento vertical hasta el colapso.

Pandeo y estabilidad

Buckling and stability

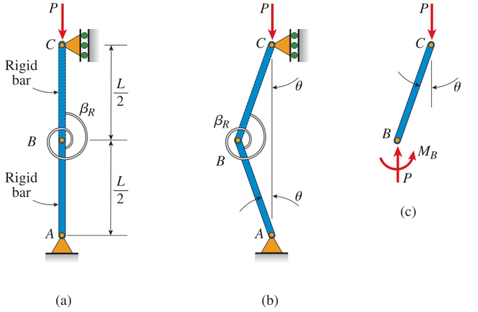


Figura: *Pandeo de una estructura idealizada que consta de dos barras rígidas y un resorte rotacional.*

- El resorte genera un momento que intenta devolver la estructura a su posición inicial, generando un **momento resistente** frente a la acción de una carga externa que causa desplazamiento lateral en B.
- La estructura es **estable** cuando la carga P es relativamente pequeña frente al momento resistente del resorte, y regresa a su estado inicial.
- La estructura es **inestable** cuando la carga P excede el momento resistente del resorte, aumentando el desplazamiento vertical hasta el colapso.

Pandeo y estabilidad

Buckling and stability

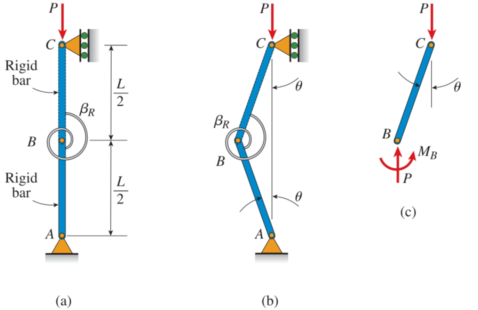


Figura: *Pandeo de una estructura idealizada que consta de dos barras rígidas y un resorte rotacional.*

- El resorte genera un momento que intenta devolver la estructura a su posición inicial, generando un **momento resistente** frente a la acción de una carga externa que causa desplazamiento lateral en B.
- La estructura es **estable** cuando la carga P es relativamente pequeña frente al momento resistente del resorte, y regresa a su estado inicial.
- La estructura es **inestable** cuando la carga P excede el momento resistente del resorte, aumentando el desplazamiento vertical hasta el colapso.

Carga crítica P_{cr}

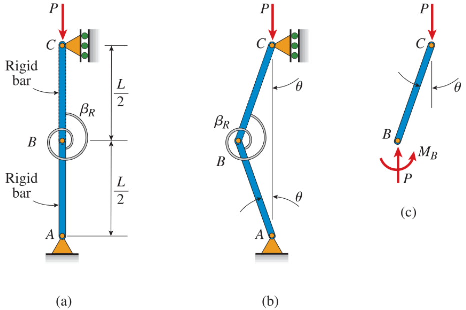


Figura: *Pandeo de una estructura idealizada que consta de dos barras rígidas y un resorte rotacional.*

- La transición entre el estado estable e inestable ocurre para una carga en específico, conocida como la **carga crítica**.
- Considerando el estado perturbado de la estructura e investigando su equilibrio, encontraremos la carga crítica:

$$P_{cr} = \frac{4\beta_R}{L}$$

asumiendo que θ es un ángulo pequeño.

Carga crítica P_{cr}

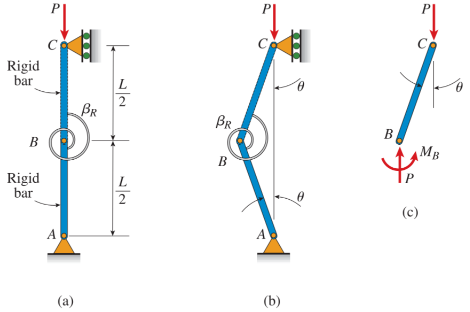


Figura: *Pandeo de una estructura idealizada que consta de dos barras rígidas y un resorte rotacional.*

- La transición entre el estado estable e inestable ocurre para una carga en específico, conocida como la **carga crítica**.
- Considerando el estado perturbado de la estructura e investigando su equilibrio, encontraremos la carga crítica:

$$P_{cr} = \frac{4\beta_R}{L}$$

asumiendo que θ es un ángulo pequeño.

Carga crítica P_{cr}

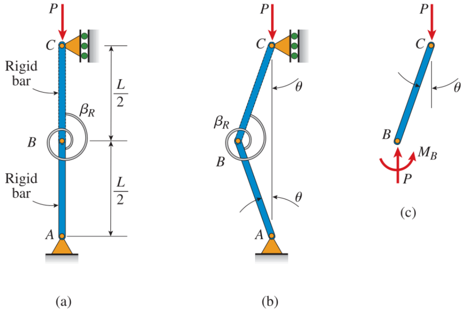


Figura: *Pandeo de una estructura idealizada que consta de dos barras rígidas y un resorte rotacional.*

- La transición entre el estado estable e inestable ocurre para una carga en específico, conocida como la **carga crítica**.
- Considerando el estado perturbado de la estructura e investigando su equilibrio, encontraremos la carga crítica:

$$P_{cr} = \frac{4\beta_R}{L}$$

asumiendo que θ es un ángulo pequeño.

Carga crítica P_{cr}

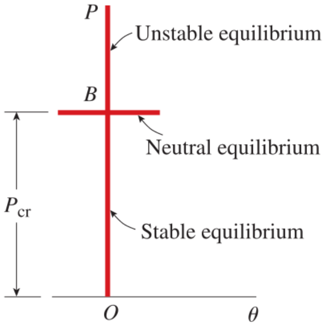


Figura: *Diagrama de equilibrio por pandeo para la estructura idealizada.*

- Si $P < P_{cr}$ la estructura está en *equilibrio estable*.
- Si $P = P_{cr}$ la estructura está en *equilibrio neutro*.
- Si $P > P_{cr}$ la estructura está en *equilibrio inestable*.

Observación: en $P_{cr} = 4\beta_R/L$, la estabilidad de la estructura aumenta al aumentar su rigidez o disminuir su longitud.

Carga crítica P_{cr}

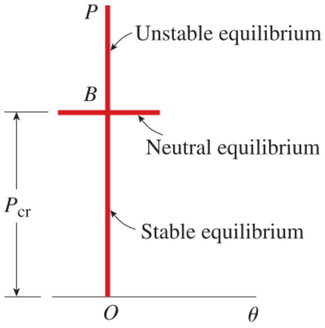


Figura: *Diagrama de equilibrio por pandeo para la estructura idealizada.*

- Si $P < P_{cr}$ la estructura está en *equilibrio estable*.
- Si $P = P_{cr}$ la estructura está en *equilibrio neutro*.
- Si $P > P_{cr}$ la estructura está en *equilibrio inestable*.

Observación: en $P_{cr} = 4\beta_R/L$, la estabilidad de la estructura aumenta al aumentar su rigidez o disminuir su longitud.

Derrotero

- Introducción
- 11.2. Pandeo y estabilidad
- 11.3. Columnas con terminación en pines
- 11.4. Columnas con otras condiciones de soporte
- 11.5. Columnas con cargas axiales excéntricas

Columnas con pines en los extremos

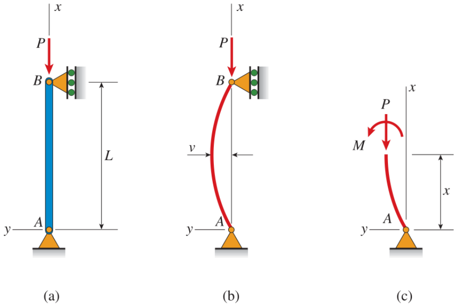


Figura: *Columna con pines en los extremos: (a) columna ideal, (b) forma pandeada, (c) fuerza axial P y momento flector M actuando en la sección transversal.*

Hipótesis de análisis

- La carga vertical P actúa en el centroide de la sección.
- La columna es perfectamente recta y derecha, sin imperfecciones.
- Hecha de un material elástico-lineal (ley de Hooke).

Si cumple con lo anterior, se dirá una **columna ideal**, además:

- Sistema coordenado: eje x en la longitud de la columna.
- Plano xy como plano de simetría de la columna, y donde ocurre el pandeo.

Columnas con pines en los extremos

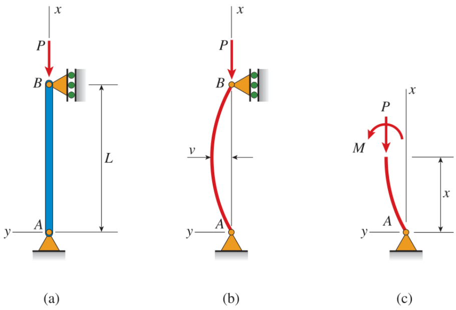


Figura: *Columna con pines en los extremos: (a) columna ideal, (b) forma pandeada, (c) fuerza axial P y momento flector M actuando en la sección transversal.*

Hipótesis de análisis

- La carga vertical P actúa en el centroide de la sección.
- La columna es perfectamente recta y derecha, sin imperfecciones.
- Hecha de un material elástico-lineal (ley de Hooke).

Si cumple con lo anterior, se dirá una **columna ideal**, además:

- Sistema coordenado: eje x en la longitud de la columna.
- Plano xy como plano de simetría de la columna, y donde ocurre el pandeo.

Columnas con pines en los extremos

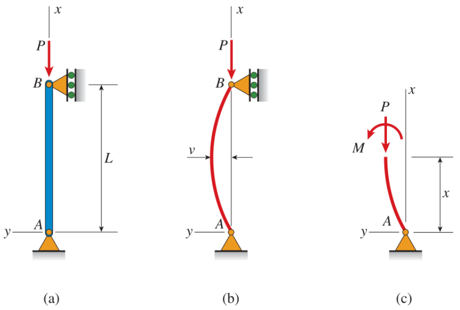


Figura: *Columna con pines en los extremos: (a) columna ideal, (b) forma pandeada, (c) fuerza axial P y momento flector M actuando en la sección transversal.*

Hipótesis de análisis

- La carga vertical P actúa en el centroide de la sección.
- La columna es perfectamente recta y derecha, sin imperfecciones.
- Hecha de un material elástico-lineal (ley de Hooke).

Si cumple con lo anterior, se dirá una **columna ideal**, además:

- Sistema coordenado: eje x en la longitud de la columna.
- Plano xy como plano de simetría de la columna, y donde ocurre el pandeo.

Columnas con pines en los extremos

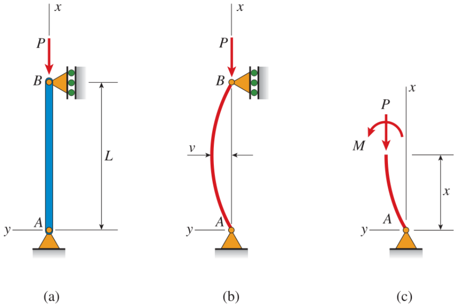


Figura: *Columna con pines en los extremos: (a) columna ideal, (b) forma pandeada, (c) fuerza axial P y momento flector M actuando en la sección transversal.*

Hipótesis de análisis

- La carga vertical P actúa en el centroide de la sección.
- La columna es perfectamente recta y derecha, sin imperfecciones.
- Hecha de un material elástico-lineal (ley de Hooke).

Si cumple con lo anterior, se dirá una **columna ideal**, además:

- Sistema coordenado: eje x en la longitud de la columna.
- Plano xy como plano de simetría de la columna, y donde ocurre el pandeo.

Columnas con pines en los extremos

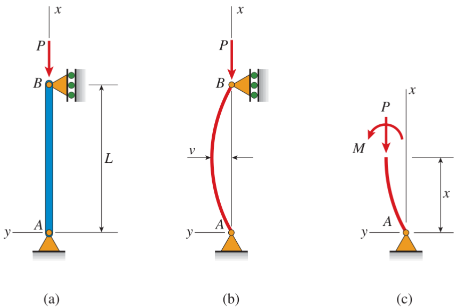


Figura: *Columna con pines en los extremos: (a) columna ideal, (b) forma pandeada, (c) fuerza axial P y momento flector M actuando en la sección transversal.*

Comportamiento de la columna ideal

- Si $P < P_{cr}$ la columna está en *equilibrio estable* en su posición recta.
- Si $P = P_{cr}$ la columna está en *equilibrio neutro* en su posición recta o en su posición levemente flectada.
- Si $P > P_{cr}$ la columna está en *equilibrio inestable* en la posición recta y fallará por pandeo debido a la menor perturbación.

Columnas con pines en los extremos

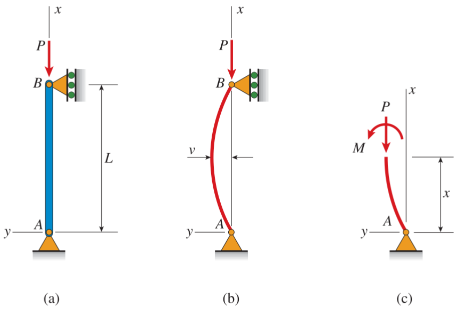


Figura: *Columna con pines en los extremos: (a) columna ideal, (b) forma pandeada, (c) fuerza axial P y momento flector M actuando en la sección transversal.*

Comportamiento de la columna ideal

- Si $P < P_{cr}$ la columna está en *equilibrio estable* en su posición recta.
- Si $P = P_{cr}$ la columna está en *equilibrio neutro* en su posición recta o en su posición levemente flectada.
- Si $P > P_{cr}$ la columna está en *equilibrio inestable* en la posición recta y fallará por pandeo debido a la menor perturbación.

Columnas con pines en los extremos

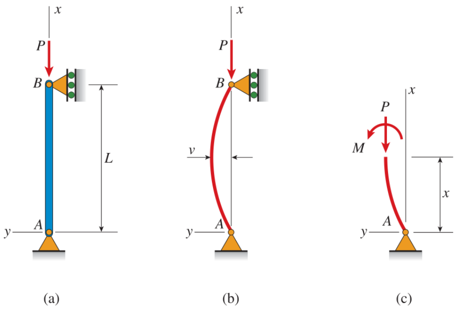


Figura: *Columna con pines en los extremos: (a) columna ideal, (b) forma pandeada, (c) fuerza axial P y momento flector M actuando en la sección transversal.*

Comportamiento de la columna ideal

- Si $P < P_{cr}$ la columna está en *equilibrio estable* en su posición recta.
- Si $P = P_{cr}$ la columna está en *equilibrio neutro* en su posición recta o en su posición levemente flectada.
- Si $P > P_{cr}$ la columna está en *equilibrio inestable* en la posición recta y fallará por pandeo debido a la menor perturbación.

Columnas con pines en los extremos

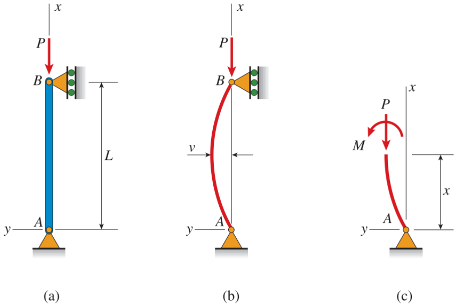


Figura: *Columna con pines en los extremos: (a) columna ideal, (b) forma pandeada, (c) fuerza axial P y momento flector M actuando en la sección transversal.*

Comportamiento de la columna ideal

- Si $P < P_{cr}$ la columna está en *equilibrio estable* en su posición recta.
- Si $P = P_{cr}$ la columna está en *equilibrio neutro* en su posición recta o en su posición levemente flectada.
- Si $P > P_{cr}$ la columna está en *equilibrio inestable* en la posición recta y fallará por pandeo debido a la menor perturbación.

Ecuación diferencial para el pandeo en columnas

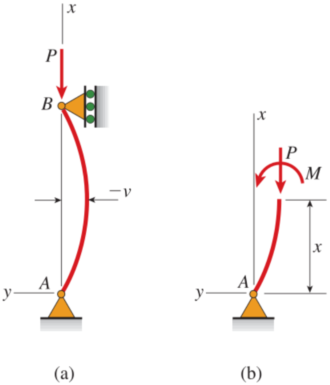


Figura: *Columna con pines en los extremos. La dirección del pandeo no interesa.*

La ecuación diferencial de la curva deflectada (curva de pandeo):

$$EI\frac{d^2v(x)}{dx^2} + Pv(x) = 0,$$

es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, homogénea y lineal.

¿Cuál es la diferencia entre una viga y una columna?

- En flexión de vigas, el momento flector M es función solamente de la carga.
- En pandeo de columnas, el momento flector $M = -Pv$ es función de las deflexiones.

Ecuación diferencial para el pandeo en columnas

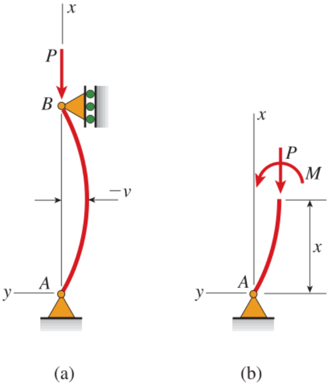


Figura: *Columna con pines en los extremos. La dirección del pandeo no interesa.*

La ecuación diferencial de la curva deflectada (curva de pandeo):

$$EI\frac{d^2v(x)}{dx^2} + Pv(x) = 0,$$

es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, homogénea y lineal.

¿Cuál es la diferencia entre una viga y una columna?

- En flexión de vigas, el momento flector M es función solamente de la carga.
- En pandeo de columnas, el momento flector $M = -Pv$ es función de las deflexiones.

Ecuación diferencial para el pandeo en columnas

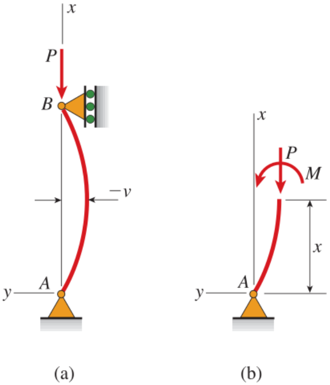


Figura: *Columna con pines en los extremos. La dirección del pandeo no interesa.*

La ecuación diferencial de la curva deflectada (curva de pandeo):

$$EI\frac{d^2v(x)}{dx^2} + Pv(x) = 0,$$

es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, homogénea y lineal.

¿Cuál es la diferencia entre una viga y una columna?

- En flexión de vigas, el momento flector M es función solamente de la carga.
- En pandeo de columnas, el momento flector $M = -Pv$ es función de las deflexiones.

Ecuación diferencial para el pandeo en columnas

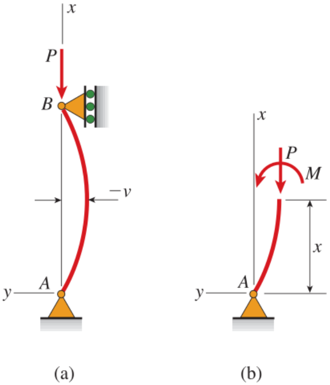


Figura: *Columna con pines en los extremos. La dirección del pandeo no interesa.*

La ecuación diferencial de la curva deflectada (curva de pandeo):

$$EI\frac{d^2v(x)}{dx^2} + Pv(x) = 0,$$

es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, homogénea y lineal.

¿Cuál es la diferencia entre una viga y una columna?

- En flexión de vigas, el momento flector M es función solamente de la carga.
- En pandeo de columnas, el momento flector $M = -Pv$ es función de las deflexiones.

Ecuación diferencial para el pandeo en columnas

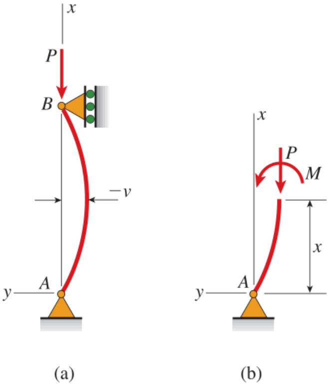


Figura: *Columna con pines en los extremos. La dirección del pandeo no interesa.*

La ecuación diferencial de la curva deflectada (curva de pandeo):

$$EI\frac{d^2v(x)}{dx^2} + Pv(x) = 0,$$

es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, homogénea y lineal.

¿Cuál es la diferencia entre una viga y una columna?

- En flexión de vigas, el momento flector M es función solamente de la carga.
- En pandeo de columnas, el momento flector $M = -Pv$ es función de las deflexiones.

Solución de la ecuación diferencial

Es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, homogénea y lineal. Hacemos

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad k = \sqrt{\frac{P}{EI}},$$

reescribimos la ecuación como

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} + k^2v(x) = 0.$$

La solución general es

$$\begin{cases} v(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \\ v(0) = 0; \; v(L) = 0 \end{cases}$$

Resolviendo encontramos:

- El valor de P que satisface la ecuación de pandeo con soluciones no triviales:

$$P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

- La ecuación de la curva de pandeo:

$$v(x) = C_1 \sin kx = C_1 \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Interpretación: solo cuando P toma dichos valores es posible que la columna de flecte. Para los demás valores de P la columna está en equilibrio solo si permanece recta; así, este P será la **carga crítica**.

Solución de la ecuación diferencial

Es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, homogénea y lineal.
Hacemos

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad k = \sqrt{\frac{P}{EI}},$$

reescribimos la ecuación como

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} + k^2 v(x) = 0.$$

La solución general es

$$\begin{cases} v(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \\ v(0) = 0;\ v(L) = 0 \end{cases}$$

Resolviendo encontramos:

- El valor de P que satisface la ecuación de pandeo con soluciones no triviales:

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

- La ecuación de la curva de pandeo:

$$v(x) = C_1 \sin kx = C_1 \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Interpretación: solo cuando P toma dichos valores es posible que la columna de flecte. Para los demás valores de P la columna está en equilibrio solo si permanece recta; así, este P será la **carga crítica**.

Solución de la ecuación diferencial

Es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, homogénea y lineal. Hacemos

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad k = \sqrt{\frac{P}{EI}},$$

reescribimos la ecuación como

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} + k^2 v(x) = 0.$$

La solución general es

$$\begin{cases} v(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \\ v(0) = 0;\ v(L) = 0 \end{cases}$$

Resolviendo encontramos:

- El valor de P que satisface la ecuación de pandeo con soluciones no triviales:

$$P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

- La ecuación de la curva de pandeo:

$$v(x) = C_1 \sin kx = C_1 \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Interpretación: solo cuando P toma dichos valores es posible que la columna de flecte. Para los demás valores de P la columna está en equilibrio solo si permanece recta; así, este P será la **carga crítica**.

Solución de la ecuación diferencial

Es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, homogénea y lineal. Hacemos

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad k = \sqrt{\frac{P}{EI}},$$

reescribimos la ecuación como

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} + k^2v(x) = 0.$$

La solución general es

$$\begin{cases} v(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \\ v(0) = 0;\ v(L) = 0 \end{cases}$$

Resolviendo encontramos:

- El valor de P que satisface la ecuación de pandeo con soluciones no triviales:

$$P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

- La ecuación de la curva de pandeo:

$$v(x) = C_1 \sin kx = C_1 \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Interpretación: solo cuando P toma dichos valores es posible que la columna de flecte. Para los demás valores de P la columna está en equilibrio solo si permanece recta; así, este P será la **carga crítica**.

Solución de la ecuación diferencial

Es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, homogénea y lineal. Hacemos

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad k = \sqrt{\frac{P}{EI}},$$

reescribimos la ecuación como

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} + k^2 v(x) = 0.$$

La solución general es

$$\begin{cases} v(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \\ v(0) = 0; \; v(L) = 0 \end{cases}$$

Resolviendo encontramos:

- El valor de P que satisface la ecuación de pandeo con soluciones no triviales:

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

- La ecuación de la curva de pandeo:

$$v(x) = C_1 \sin kx = C_1 \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Interpretación: solo cuando P toma dichos valores es posible que la columna de flecte. Para los demás valores de P la columna está en equilibrio solo si permanece recta; así, este P será la **carga crítica**.

Solución de la ecuación diferencial

Es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, homogénea y lineal. Hacemos

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad k = \sqrt{\frac{P}{EI}},$$

reescribimos la ecuación como

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} + k^2 v(x) = 0.$$

La solución general es

$$\begin{cases} v(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \\ v(0) = 0;\ v(L) = 0 \end{cases}$$

Resolviendo encontramos:

- El valor de P que satisface la ecuación de pandeo con soluciones no triviales:

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

- La ecuación de la curva de pandeo:

$$v(x) = C_1 \sin kx = C_1 \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Interpretación: solo cuando P toma dichos valores es posible que la columna de flecte. Para los demás valores de P la columna está en equilibrio solo si permanece recta; así, este P será la **carga crítica**.

Carga crítica fundamental

Carga crítica de Euler y pandeo de Euler | Leonhard Euler (1707-1783) en 1744, matemático

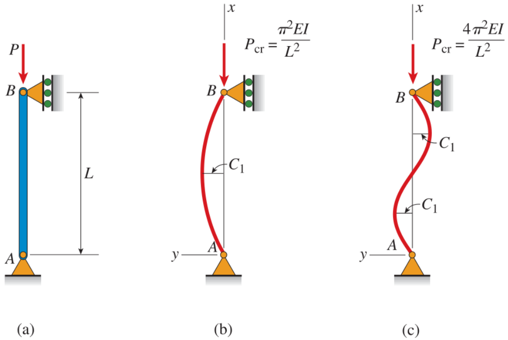


Figura: *Formas pandeadas de una columna ideal con terminaciónes pinadas: (a) columna recta inicial, (b) forma pandeada para $n = 1$ y (c) forma pandeada para $n = 2$.*

Para $n = 1$ tenemos el llamado **caso fundamental**:

- La carga crítica:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}.$$

- La forma pandeada (forma modal):

$$v(x) = C_1 \sin \frac{\pi x}{L}.$$

Observación: la única forma de obtener modos superiores de pandeo es proveyendo soporte lateral a la columna en puntos intermedios.

Carga crítica fundamental

Carga crítica de Euler y pandeo de Euler | Leonhard Euler (1707-1783) en 1744, matemático

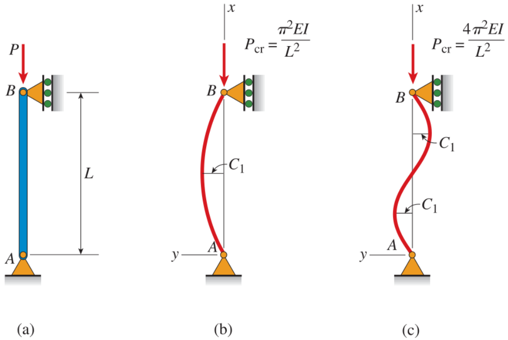


Figura: *Formas pandeadas de una columna ideal con terminaciónes pinadas: (a) columna recta inicial, (b) forma pandeada para $n = 1$ y (c) forma pandeada para $n = 2$.*

Para $n = 1$ tenemos el llamado **caso fundamental**:

- La carga crítica:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}.$$

- La forma pandeada (forma modal):

$$v(x) = C_1 \sin \frac{\pi x}{L}.$$

Observación: la única forma de obtener modos superiores de pandeo es proveyendo soporte lateral a la columna en puntos intermedios.

Comentarios generales

1. La carga crítica de la columna es proporcional a la rigidez a flexión EI e inversamente proporcional al cuadrado de la longitud.
2. La rigidez a flexión EI se puede aumentar cambiando de material (E) o modificando la distribución del material en la sección transversal I.
3. Debemos diferenciar entre el **pandeo global** y el **pandeo local**. Ocurrencia común en tubos de pared delgada: ver video.
4. Si no hay soporte lateral de la columna, esta se pandeará sobre el eje centroidal principal que tenga el menor momento de inercia.

Comentarios generales

1. La carga crítica de la columna es proporcional a la rigidez a flexión EI e inversamente proporcional al cuadrado de la longitud.
2. La rigidez a flexión EI se puede aumentar cambiando de material (E) o modificando la distribución del material en la sección transversal I.
3. Debemos diferenciar entre el **pandeo global** y el **pandeo local**. Ocurrencia común en tubos de pared delgada: ver video.
4. Si no hay soporte lateral de la columna, esta se pandeará sobre el eje centroidal principal que tenga el menor momento de inercia.

Comentarios generales

1. La carga crítica de la columna es proporcional a la rigidez a flexión EI e inversamente proporcional al cuadrado de la longitud.
2. La rigidez a flexión EI se puede aumentar cambiando de material (E) o modificando la distribución del material en la sección transversal I.
3. Debemos diferenciar entre el **pandeo global** y el **pandeo local**. Ocurrencia común en tubos de pared delgada: ver video.
4. Si no hay soporte lateral de la columna, esta se pandeará sobre el eje centroidal principal que tenga el menor momento de inercia.

Comentarios generales

1. La carga crítica de la columna es proporcional a la rigidez a flexión EI e inversamente proporcional al cuadrado de la longitud.
2. La rigidez a flexión EI se puede aumentar cambiando de material (E) o modificando la distribución del material en la sección transversal I.
3. Debemos diferenciar entre el **pandeo global** y el **pandeo local**. Ocurrencia común en tubos de pared delgada: ver video.
4. Si no hay soporte lateral de la columna, esta se pandeará sobre el eje centroidal principal que tenga el menor momento de inercia.

Comentarios generales

1. La carga crítica de la columna es proporcional a la rigidez a flexión EI e inversamente proporcional al cuadrado de la longitud.
2. La rigidez a flexión EI se puede aumentar cambiando de material (E) o modificando la distribución del material en la sección transversal I.
3. Debemos diferenciar entre el **pandeo global** y el **pandeo local**. Ocurrencia común en tubos de pared delgada: ver video.
4. Si no hay soporte lateral de la columna, esta se pandeará sobre el eje centroidal principal que tenga el menor momento de inercia.

Esfuerzos críticos

El esfuerzo crítico es el esfuerzo de compresión promedio en la sección transversal en el instante en que la carga alcanza su valor crítico:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2}.$$

Definimos:

- (r) el radio de giro:

$$r = \frac{I}{A}.$$

- Relación de esbeltez:

$$\text{relación de esbeltez} = \frac{L}{r}.$$

- Reescribiendo el esfuerzo:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}.$$

Esfuerzos críticos

El esfuerzo crítico es el esfuerzo de compresión promedio en la sección transversal en el instante en que la carga alcanza su valor crítico:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2}.$$

Definimos:

- (r) el radio de giro:

$$r = \frac{I}{A}.$$

- Relación de esbeltez:

$$\text{relación de esbeltez} = \frac{L}{r}.$$

- Reescribiendo el esfuerzo:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}.$$

Esfuerzos críticos

El esfuerzo crítico es el esfuerzo de compresión promedio en la sección transversal en el instante en que la carga alcanza su valor crítico:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2}.$$

Definimos:

- (r) el radio de giro:

$$r = \frac{I}{A}.$$

- Relación de esbeltez:

$$\text{relación de esbeltez} = \frac{L}{r}.$$

- Reescribiendo el esfuerzo:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}.$$

Esfuerzos críticos: la curva de Euler

Válida cuando el esfuerzo crítico es menor que el esfuerzo de en el límite de proporcionalidad

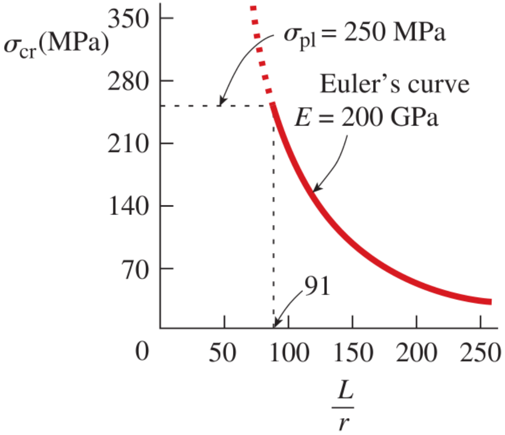


Figura: *Gráfico de la curva de Euler para un acero estructural con $E = 200$ GPa y $\sigma_{pl} = 250$ MPa.*

Secciones óptimas para columnas

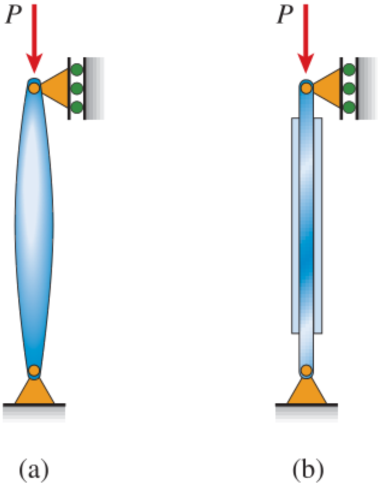


Figura: *Columnas no prismáticas.*

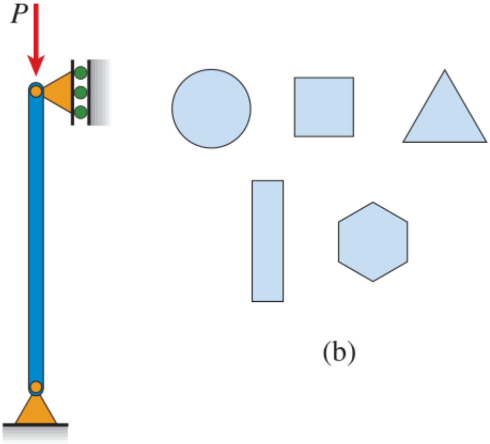


Figura: *Diferentes secciones transversales para la columna.*

Estudio autónomo de la sección

Ejercicios recomendados

- Todos los ejemplos de la sección (Gere and Goodno, 2012).

Derrotero

Columnas con otras condiciones de soporte

Figura: *Torre del cable aéreo de Manizales en su etaba pre-operativa. Archivo personal.*

Figura: *Pila o columna del puente Pumarejo en Barranquilla en su etapa constructiva. Archivo personal.*

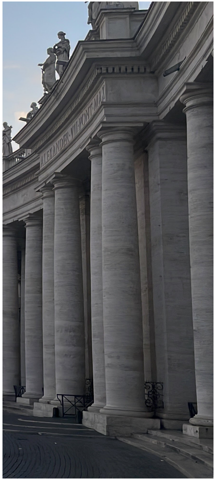


Figura: *Columnas que bordean la basílica de San Pedro en Ciudad del Vaticano. Archivo personal.*

Longitud efectiva de columnas

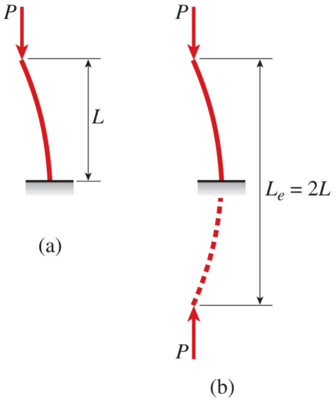


Figura: *Deformada mostrando la longitud efectiva L_e para una columna empotrada en la base y libre en el extremo superior.*

- La carga crítica de una columna con diferentes tipos de soportes se puede relacionar con aquella de una columna con terminaciones pinadas haciendo uso de la "longitud efectiva".
- La **longitud efectiva** L_e de cualquier columna es la longitud de la columna pinada equivalente, es decir, la longitud de la columna pinada que tiene una curva deformada que encaje con la deformada de la columna original.
- Medimos el **factor de longitud efectiva** k:

$$L_e = kL$$

- La carga crítica:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}.$$

Longitud efectiva de columnas

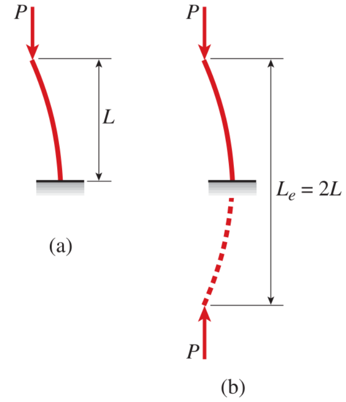


Figura: *Deformada mostrando la longitud efectiva L_e para una columna empotrada en la base y libre en el extremo superior.*

- La carga crítica de una columna con diferentes tipos de soportes se puede relacionar con aquella de una columna con terminaciones pinadas haciendo uso de la “longitud efectiva”.
- La **longitud efectiva** L_e de cualquier columna es la longitud de la columna pinada equivalente, es decir, la longitud de la columna pinada que tiene una curva deformada que encaje con la deformada de la columna original.
- Medimos el **factor de longitud efectiva** k:

$$L_e = kL$$

- La carga crítica:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}.$$

Longitud efectiva de columnas

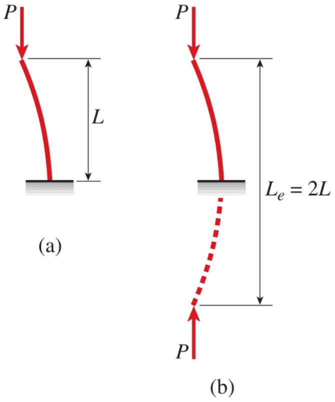


Figura: *Deformada mostrando la longitud efectiva L_e para una columna empotrada en la base y libre en el extremo superior.*

- La carga crítica de una columna con diferentes tipos de soportes se puede relacionar con aquella de una columna con terminaciones pinadas haciendo uso de la "longitud efectiva".
- La **longitud efectiva** L_e de cualquier columna es la longitud de la columna pinada equivalente, es decir, la longitud de la columna pinada que tiene una curva deformada que encaje con la deformada de la columna original.
- Medimos el **factor de longitud efectiva** k:

$$L_e = kL$$

- La carga crítica:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}.$$

Longitud efectiva de columnas

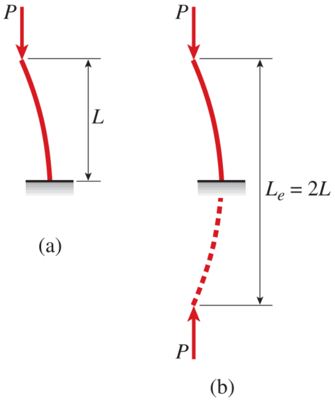


Figura: *Deformada mostrando la longitud efectiva L_e para una columna empotrada en la base y libre en el extremo superior.*

- La carga crítica de una columna con diferentes tipos de soportes se puede relacionar con aquella de una columna con terminaciones pinadas haciendo uso de la "longitud efectiva".
- La **longitud efectiva** L_e de cualquier columna es la longitud de la columna pinada equivalente, es decir, la longitud de la columna pinada que tiene una curva deformada que encaje con la deformada de la columna original.
- Medimos el **factor de longitud efectiva** k:

$$L_e = kL$$

- La carga crítica:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}.$$

Longitud efectiva de columnas

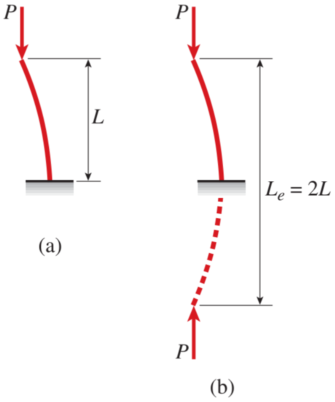


Figura: *Deformada mostrando la longitud efectiva L_e para una columna empotrada en la base y libre en el extremo superior.*

- La carga crítica de una columna con diferentes tipos de soportes se puede relacionar con aquella de una columna con terminaciones pinadas haciendo uso de la "longitud efectiva".
- La **longitud efectiva** L_e de cualquier columna es la longitud de la columna pinada equivalente, es decir, la longitud de la columna pinada que tiene una curva deformada que encaje con la deformada de la columna original.
- Medimos el **factor de longitud efectiva** k:

$$L_e = kL$$

- La carga crítica:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}.$$

Resumen de resultados

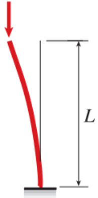
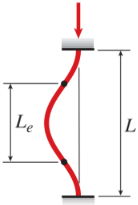
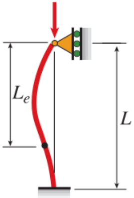
(a) Pinned-pinned column	(b) Fixed-free column	(c) Fixed-fixed column	(d) Fixed-pinned column
$P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$P_{cr} = \dfrac{4\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \dfrac{2.046\ \pi^2 EI}{L^2}$
			
$L_e = L$	$L_e = 2L$	$L_e = 0.5L$	$L_e = 0.699L$
$K = 1$	$K = 2$	$K = 0.5$	$K = 0.699$

Figura: *Cargas críticas, longitudes efectivas y factores para columnas ideales.*

Derrotero

- Introducción
- 11.2. Pandeo y estabilidad
- 11.3. Columnas con terminación en pines
- 11.4. Columnas con otras condiciones de soporte
- 11.5. Columnas con cargas axiales excéntricas

Columnas con cargas excéntricas

Lectura

Importancia de los análisis P-DELTA, link.

Referencias

Gere, J. M. and Goodno, B. J. (2012). *Mechanics of materials*. Cengage learning.