

Unidad 04. Esfuerzos causados por la flexión

Diseño por flexión y esfuerzos cortantes en vigas

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil
Análisis Estructural Básico

2023b



Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada.



Derrotero

- 5.6. Diseño de vigas por esfuerzos de flexión
- 5.8. Esfuerzos cortantes en vigas se sección rectangular
- 5.9. Esfuerzos cortantes en vigas se sección circular
- 5.10. Esfuerzos cortantes en el alma de vigas con patines
- 5.11. Flujo de cortante

Derrotero

- 5.6. Diseño de vigas por esfuerzos de flexión
- 5.8. Esfuerzos cortantes en vigas se sección rectangular
- 5.9. Esfuerzos cortantes en vigas se sección circular
- 5.10. Esfuerzos cortantes en el alma de vigas con patines
- 5.11. Flujo de cortante

Diseño de vigas por esfuerzos de flexión

Desde el punto de vista de la resistencia, buscamos la **forma** y **tamaño** de la viga tal que los esfuerzos actuantes en ella no excedan el esfuerzo admisible del material. Buscaremos el requerido módulo de la sección, según sea su simetría geométrica y comportamiento:

Caso 1: simétrico

- Secciones doblemente simétricas y con la misma resistencia a tracción que a compresión:

$$S = \frac{M_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{allow}}}.$$

- Debemos elegir una viga que proporcione un módulo de sección al menos tan grande como el obtenido a partir de la ecuación.

Caso 2: asimétrico

- Secciones que no son doblemente simétricas y que su resistencia a tracción y a compresión es diferente.
- Debemos calcular S para cada comportamiento, buscando cumplir con una viga que satisfaga ambos criterios.

Vigas de secciones y formas estandar

Las dimensiones y propiedades de vigas en materiales metálicos y maderas, así como su procedimiento de diseño, están regulados por diferentes instituciones de autoridad en el mundo, algunas de ellas son:

Estructuras metálicas

- *National Structural Steelwork Specification*, The British Constructional Steelwork Association, UK.
- *Steel Construction Manual*, AISC American Institute of Steel Construction, United States.
- *Eurocode 3*, Europa.
- *Reglamento Colombiano de Construcción Sismo resistente NSR-10, título F: estructuras metálicas.*

Estructuras de madera

- *National Design Specification for Wooden Construction*, United States.
- *Eurocode 5*, Europa.
- *Reglamento Colombiano de Construcción Sismo resistente NSR-10, título G: estructuras de madera y estructuras de guadua.*

Vigas de secciones y formas estandar

Un vistazo al manual del AISC para estructuras metalicas

1-16

DIMENSIONS AND PROPERTIES

**Table 1-1 (continued)
W-Shapes
Dimensions**

Shape	Area, A	Depth, d	Web		Flange		Distance						
			Thickness, t _w	t _w	Width, b _f	Thickness, t _f	k _{des}	k _{des}	k _{des}	T	Work- able Gage		
	in. ²	in.	in.	in.	in.	in.	in.	in.	in.	in.	in.	in.	in.
W30x201 [†]	115	33.2	13.6	1 1/4	15.6	15 1/2	2.44	2 1/4	3.23	3 1/2	1 1/2	26 1/2	5 1/2
<x201 [†]	109	32.8	13.4	1 1/4	15.5	15 1/2	2.24	2 1/4	3.03	3 1/2	1 1/2		
<x200 [†]	95.8	32.4	12.9	1 1/4	15.4	15 1/2	2.05	2 1/4	2.84	2 1/2	1 1/2		
<x200	86.0	32.0	12.5	1 1/4	15.3	15 1/2	1.85	2 1/4	2.64	2 1/2	1 1/2		
<x190	77.0	31.6	12.0	1 1/4	15.2	15 1/2	1.65	2 1/4	2.44	2 1/2	1 1/2		
<x190	69.3	31.2	11.5	1 1/4	15.1	15 1/2	1.45	2 1/4	2.24	2 1/2	1 1/2		
<x180	62.3	30.9	11.1	1 1/4	15.1	15 1/2	1.32	2 1/4	2.10	2 1/2	1 1/2		
<x180	56.1	30.7	10.7	1 1/4	15.0	15 1/2	1.19	2 1/4	1.97	2 1/2	1 1/2		
<x170 [†]	50.9	30.4	10.3	1 1/4	15.0	15 1/2	1.07	2 1/4	1.85	2 1/2	1 1/2		
W30x148 [†]	43.6	30.7	10.0	1 1/4	15.0	15 1/2	1.18	1 1/2	1.63	2 1/2	1 1/2	26 1/2	5 1/2
<x148 [†]	38.8	30.3	10.0	1 1/4	15.0	15 1/2	1.00	1 1/2	1.65	1 1/2	1 1/2		
<x148	36.5	30.2	10.0	1 1/4	15.0	15 1/2	0.900	1 1/2	1.58	1 1/2	1 1/2		
<x130 [†]	34.2	30.0	10.0	1 1/4	15.0	15 1/2	0.800	1 1/2	1.50	1 1/2	1 1/2		
<x130	31.7	29.9	10.0	1 1/4	15.0	15 1/2	0.700	1 1/2	1.41	1 1/2	1 1/2		
<x99 [†]	29.0	29.7	29 1/2	0.520	15.0	15 1/2	0.670	1 1/2	1.32	1 1/2	1 1/2		
<x99	26.3	29.5	29 1/2	0.470	15.0	15 1/2	0.610	1 1/2	1.26	1 1/2	1 1/2		
W27x200 [†]	159	32.5	13.7	1 1/2	15.3	15 1/2	3.54	2 1/4	4.33	4 1/2	1 1/2	22 1/2	5 1/2
<x200 [†]	159	32.4	13.6	1 1/2	15.2	15 1/2	3.40	2 1/4	4.14	4 1/2	1 1/2		
<x200	140.0	32.0	13.0	1 1/2	15.1	15 1/2	3.20	2 1/4	3.97	4 1/2	1 1/2		
<x180 [†]	130.0	31.6	12.5	1 1/2	15.0	15 1/2	2.99	2 1/4	3.78	4 1/2	1 1/2		
<x180	121.0	31.2	12.0	1 1/2	14.9	15 1/2	2.72	2 1/4	3.58	4 1/2	1 1/2		
<x170 [†]	111.0	30.9	11.9	1 1/2	14.8	15 1/2	2.56	2 1/4	3.38	4 1/2	1 1/2		
<x170	102.0	30.5	11.5	1 1/2	14.7	15 1/2	2.40	2 1/4	3.18	4 1/2	1 1/2		
<x150 [†]	92.0	29.9	11.1	1 1/2	14.6	15 1/2	2.24	2 1/4	2.98	4 1/2	1 1/2		
<x150	83.0	29.5	10.7	1 1/2	14.5	15 1/2	2.08	2 1/4	2.78	4 1/2	1 1/2		
<x130 [†]	76.1	29.0	10.3	1 1/2	14.4	15 1/2	1.92	2 1/4	2.58	4 1/2	1 1/2		
<x130	68.4	28.7	10.0	1 1/2	14.3	15 1/2	1.76	2 1/4	2.38	4 1/2	1 1/2		
<x110 [†]	63.9	28.4	10.0	1 1/2	14.1	15 1/2	1.60	2 1/4	2.18	4 1/2	1 1/2		
<x110	57.1	28.1	10.0	1 1/2	14.0	15 1/2	1.44	2 1/4	2.00	4 1/2	1 1/2		
<x90 [†]	52.5	27.8	10.0	1 1/2	14.1	15 1/2	1.19	2 1/4	1.98	2 1/2	1 1/2		
<x90	47.6	27.6	10.0	1 1/2	14.0	15 1/2	1.07	2 1/4	1.87	2 1/2	1 1/2		
<x80 [†]	43.2	27.4	10.0	1 1/2	14.0	15 1/2	0.975	2 1/4	1.76	2 1/2	1 1/2		
W27x120 [†]	78.8	27.6	10.0	1 1/2	14.0	15 1/2	1.10	1 1/2	1.70	2 1/2	1 1/2	22 1/2	5 1/2
<x120 [†]	78.8	27.6	10.0	1 1/2	14.0	15 1/2	1.00	1 1/2	1.63	1 1/2	1 1/2		
<x120	70.0	27.1	10.0	1 1/2	14.0	15 1/2	0.900	1 1/2	1.53	1 1/2	1 1/2		
<x90 [†]	67.6	26.9	10.0	1 1/2	14.0	15 1/2	0.745	1 1/2	1.34	1 1/2	1 1/2		
<x90	64.7	26.7	10.0	1 1/2	14.0	15 1/2	0.640	1 1/2	1.24	1 1/2	1 1/2		

[†] Shape is slender for compression with $F_y = 50$ ksi.

^{††} The actual size, composition and orientation of bolting components should be compared with the geometry of the cross section to ensure compatibility.


^{†††} Flange thickness greater than 2 in. Special requirements may apply per AISC Specification Section A3.3.

^{††††} Shape does not meet the b/t_f limit for shear in AISC Specification Section G2.3.5 with $F_y = 50$ ksi.

AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION

1-17

DIMENSIONS AND PROPERTIES



**Table 1-1 (continued)
W-Shapes
Properties**










Nom- inal WT	Compact Section Coefficients				Axis X-X				Axis Y-Y				Torsional Properties	
	I_x	I_y	S_x	S_y	I_x	I_y	S_x	S_y	I_x	I_y	S_x	S_y	J	C_w
381	3,159,197	207,000	1,250	134	1,450	1,550	198	3,67	310	4,57	30.8	173	36,000	
357	3,462,216	187,000	1,140	133	1,320	1,390	179	3,64	279	4,31	26.6	134	34,000	
326	3,752,214	168,000	1,040	132	1,190	1,240	162	3,60	252	4,26	24.4	105	26,000	
292	4,122,262	148,000	930	132	1,060	1,100	144	3,58	223	4,22	20.2	75.2	20,000	
261	4,598,257	131,000	829	131	943	959	127	3,53	196	4,16	16.0	54.1	17,500	
235	5,057,522	117,000	748	130	847	855	114	3,51	175	4,13	12.8	46.3	16,000	
211	5,743,545	103,000	665	129	751	757	100	3,49	155	4,11	9.86	26.4	16,800	
191	6,263,277	93,000	600	128	675	673	89.5	3,48	138	4,08	7.95	21.0	14,600	
173	7,044,468	82,000	541	127	607	596	79.8	3,42	123	4,05	6.53	15.6	12,900	
140	4,444,416	66,000	436	124	500	227	43.3	2.39	68.0	2.77	28.5	14.5	4,940	
132	5,272,419	57,000	380	122	437	196	37.2	2.35	58.4	2.75	29.3	9.72	4,210	
124	6,055,462	53,000	355	121	408	181	34.4	2.23	54.0	2.73	29.3	7.99	3,860	
116	6,717,478	48,000	329	120	378	164	31.3	2.18	49.2	2.70	29.2	6.43	3,490	
108	6,884,466	44,000	299	119	346	146	27.9	2.15	43.9	2.67	29.0	4.99	3,090	
99	7,081,519	39,000	269	117	312	128	24.5	2.10	38.6	2.62	29.0	3.77	2,800	
90	8,521,575	30,000	245	117	283	115	22.1	2.09	34.7	2.60	28.9	2.84	2,400	
539	2,151,123	25,000	1,570	127	1,086	2,110	277	3,60	437	4,41	29.0	406	44,000	
560	2,586,173	16,000	1,620	122	1,040	1,179	3,46	1,279	170	4,15	27.9	170	25,000	
336	3,119,189	14,000	927	121	1,130	1,180	162	3,45	252	4,10	27.7	131	10,000	
387	3,482,206	13,000	887	120	1,020	1,050	146	3,41	227	4,04	27.5	101	19,000	
381	3,212,255	11,000	814	120	936	853	123	3,39	206	4,02	27.4	78.5	17,000	
258	4,032,244	10,000	745	119	852	859	120	3,38	187	3,98	27.2	61.6	15,000	
235	4,412,262	9,000	677	118	772	769	108	3,33	168	3,92	27.1	47.0	14,000	
217	4,771,287	8,000	627	118	711	704	100	3,32	154	3,89	26.9	37.6	12,800	
194	5,281,118	7,000	567	117	634	621	89.1	3,29	138	3,85	26.8	27.1	11,300	
178	5,932,329	7,000	565	116	570	555	78.8	3,25	122	3,83	26.6	20.1	9,640	
161	6,469,361	6,000	498	115	515	497	70.9	3,23	109	3,79	26.5	15.1	8,700	
146	7,146,364	5,000	414	115	464	443	63.5	3,20	97.7	3,76	26.4	11.5	7,700	
129	4,555,387	4,000	345	112	395	384	56.8	3,21	57.6	3,66	26.5	11.1	5,200	
114	5,414,225	4,000	299	110	343	339	31.5	2.18	49.3	2.66	26.4	7.33	2,700	
102	6,035,471	3,620	267	110	305	339	27.8	2.15	43.4	2.62	26.3	5.28	2,400	
94	6,710,495	3,270	243	109	278	324	24.8	2.12	38.8	2.56	26.2	4.00	2,100	
84	7,730,527	2,850	213	107	244	306	21.2	2.07	33.2	2.54	26.1	2.81	1,700	

AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION

Figura: Recorte del Steel Construction Manual, AISC.

Vigas de secciones y formas estandar

Un vistazo a la norma NSR-10 para estructuras metalicas

NSR-10 – Capítulo F.5 – Estructuras de aluminio			
Tabla F.5.4.7.2 Parámetros de pandeo torsional para miembros a compresión			
1		$p \leq 5$	$\lambda_0 = \lambda_1 = 5H/(1 - 0.6p^{1/2})(H/t)^{1/2}$ $s = \lambda_1/\lambda_0$ $X = 0.6$
2		$p \leq 5$ $1 \leq w \leq 2.5$	$\lambda_0 = \lambda_1 = (w-1)[2(w-1)^2 - 1.5p]$ $s = \lambda_1/\lambda_0$ $X = 0.6$
3		$p = 1$	$\lambda_0 = 66$ $s = \lambda_1/\lambda_0$ $X = 0.6$
4		$p \leq 5$ $0.5 \leq B/D \leq 1.0$	$\lambda_0 = (H/t)[4.2 + 0.5(B/D)^2] - 0.6p^{1/2}(H/t)^{1/2}$ $s = \lambda_1/\lambda_0 = [1 + 0.4(1 - B/D)^2](\lambda_1/\lambda_0)$ $X = X_1 = 0.6 - 0.4(1 - B/D)^2$
5		$p \leq 5$ $0.5 \leq B/D \leq 1.0$ $1 \leq w \leq 2.5$	$\lambda_0 = \lambda_1 + 1.5p(w-1) - 2(w-1)^2$ $s = \lambda_1/\lambda_0$ $X = X_1$
6		$p \leq 5$ $0.5 \leq B/D \leq 1.0$ $1 \leq w \leq 2.5$	$\lambda_0 = 37$ $s = [1.4(\lambda_1/\lambda_0)]$ $X = 0.60$
7		$p \leq 3.5$	$\lambda_0 = 5.1H/(1 - p^{1/2})(H/t)^{1/2}$ $X = 1$
8		$p \leq 5$ $0.5 \leq B/D \leq 2.0$	$\lambda_0 = \lambda_1 = (H/t)[4.4 + 1.1(H/B)^2] - 0.7p^{1/2}(H/t)^{1/2}$ $s = \lambda_1/\lambda_0$ $X = X_1 = 1.1 - 0.3H/B$
9		$p \leq 5$ $0.5 \leq B/D \leq 2.0$ $1 \leq w \leq 2.5$	$\lambda_0 = \lambda_1 + 1.5p(w-1) - 2(w-1)^2$ $s = \lambda_1/\lambda_0$ $X = X_1$
F-493			









NSR-10 – Capítulo F.5 – Estructuras de aluminio			
Tabla F.5.4.7.2 (continuación) Parámetros de pandeo torsional para miembros a compresión			
10		$p \leq 5$	$\lambda_0 = 78$ $s = (\lambda_1/\lambda_0)$ $X = 0.33$
11		$p \leq 5$ $1 \leq w \leq 2.5$	$\lambda_0 = 68$ $s = (\lambda_1/\lambda_0)$ $X = 0.76$
12		$p \leq 5$ $1 \leq w \leq 2.5$	$\lambda_0 = 63$ $s = (\lambda_1/\lambda_0)$ $X = 0.89$
13		$8.5 \leq B/D \leq 2.0$ $p \leq 3.5$	$\lambda_0 = (H/t)[1.4 + 1.5(w/B) + 1.1(H/B)] - p^{1/2}(H/t)^{1/2}$ $s = (\lambda_1/\lambda_0)$ $X = 1.3 - 0.8B/D + 0.2(H/B)^2$
14		$p \leq 5$ $0.5 \leq B/D \leq 1.0$ $1 \leq w \leq 2.5$	$\lambda_0 = 65$ $s = (\lambda_1/\lambda_0)$ $X = 0.78$
15		$1 \leq B/H \leq 3$ $1 \leq t_1/t_2 \leq 2$	$\lambda_0 = (H/t_1)[7 + 1.5(B/H)(t_1/t_2)]$ $s = (\lambda_1/\lambda_0)$ $X = 0.35B/H - 0.04(H/B)^2$ $Y = 0.14 - 0.02H/B - 0.02t_1/t_2$
16		$1 \leq B/H \leq 3$ $C/B \leq 0.4$	$\lambda_0 = (H/t_1)[7 + 1.5(B/H) + 5(C/B)]$ $s = (\lambda_1/\lambda_0)$ $X = 0.35B/H - 0.04(H/B)^2 - 0.25C/B$ $Y = 0.12 - 0.02H/B + [1.4(C/B)^2]/(H/B - 0.5)$
17		$1 \leq B/H \leq 3$ $C/B \leq 0.4$	$\lambda_0 = (H/t_1)[7 + 1.5(B/H) + 5(C/B)]$ $s = (\lambda_1/\lambda_0)$ $X = 0.35B/H - 0.04(H/B)^2$ $Y = 0.12 - 0.02H/B + [0.05(C/B)]/(H/B - 0.5)$
F-494			

Figura: Recorte del título F de la NSR-10.

Eficiencia relativa de distintas formas de vigas

Desde el punto de vista de la resistencia, la eficiencia en vigas depende principalmente de la forma de la sección transversal. **La forma más eficiente es aquella en la cual el material está localizado lo más lejos posible del eje neutro.**

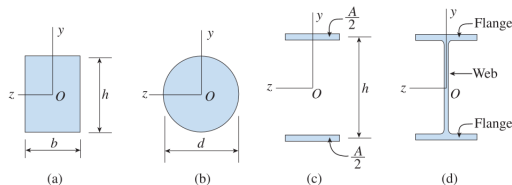


Figura: Diferentes secciones transversales de vigas.

Sección cuadrada:

$$S_{\text{cuadrado}} = \frac{h^3}{6}$$

$$= 0,1160d^3$$

Sección circular

$$S_{\text{circulo}} = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$= 0,0982d^3$$

Sección ideal:

$$I = 2 \frac{A}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{Ah^2}{4}$$

$$S = \frac{I}{h/2} = 0,5Ah$$

Sección tipo I:

$$S \approx 0,35Ah$$

Ejemplo de clase

Example 5-5

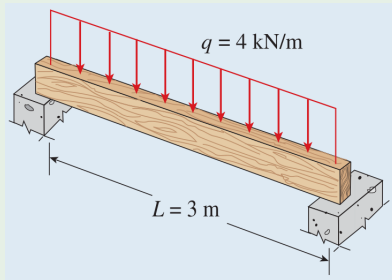


Figura: Viga de madera simplemente apoyada.

Una viga simplemente apoyada de madera tiene una luz de 3 m y soporta una carga uniformemente distribuida de 4 kN/m. El esfuerzo admisible a flexión es de 12 MPa, la madera pesa 5.4 kN/m^3 , y la viga está soportada lateralmente frente a pandeo (*buckling*) o vuelco (*tipping*). Seleccione una sección adecuada de la tabla en el apéndice F de Gere and Goodno (2012).

Estudio autónomo de la sección

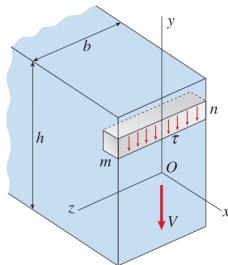
Ejercicios recomendados

- Todos los ejemplos de la sección
- 5.6-5
- 5.6-12
- 5.6-17

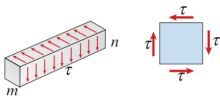
Derrotero

- 5.6. Diseño de vigas por esfuerzos de flexión
- 5.8. Esfuerzos cortantes en vigas se sección rectangular
- 5.9. Esfuerzos cortantes en vigas se sección circular
- 5.10. Esfuerzos cortantes en el alma de vigas con patines
- 5.11. Flujo de cortante

Esfuerzos cortantes verticales y horizontales



(a)



(b)



(c)

Hipótesis de análisis

1. Los esfuerzos cortantes τ actuantes en la sección transversal son paralelos a la fuerza cortante V , es decir, paralelos a los lados de la sección transversal.
2. Los esfuerzos cortantes τ están uniformemente distribuidos en el espesor b de la sección, aunque pueden variar en la altura.
3. Las superficies superior e inferior no estarán sometidas a esfuerzos cortantes, en otras palabras, $\tau = 0$ cuando $y = \pm h/2$.

Figura: Esfuerzos cortantes en una viga de sección rectangular

Fórmula del cortante

Estando en un estado de flexión no uniforme, se generan fuerzas cortantes en la sección, generando esfuerzos cortantes verticales y horizontales de igual magnitud, así que calculando los horizontales se da respuesta a los verticales.

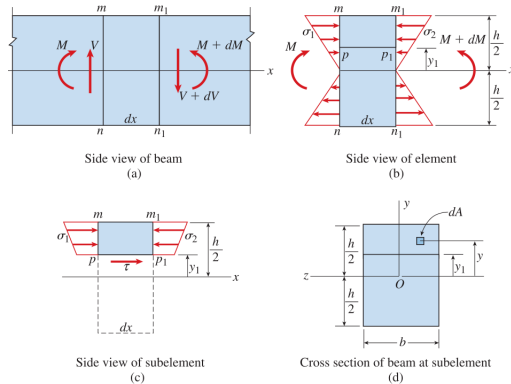
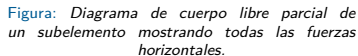


Figura: Esfuerzos cortantes en una viga de sección rectangular



- Las resultantes de los esfuerzos normales por flexión en el elemento:

- Del equilibrio horizontal en la sección transversal:

- Bajo la hipótesis de que τ está uniformemente distribuido en el espesor:

- Igualando, y sabiendo que $dM(x)/dx = V(x)$:

$$\tau = \frac{V}{Ib} \int y dA.$$

Fórmula del cortante

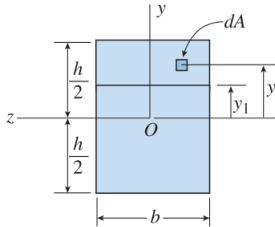


Figura: Subelemento en la sección transversal analizada de una viga.

- La integral es el primer momento de área del trozo de sección transversal sobre el nivel al cual se quiere calcular el esfuerzo cortante:

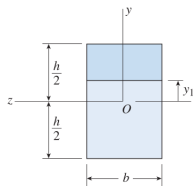
$$Q = \int y dA.$$

- La fórmula del cortante:

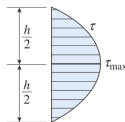
$$\tau = \frac{VQ}{Ib}.$$

Observación: el primer momento de área Q varía con la distancia y_1 desde el eje neutro, igualmente lo hará el esfuerzo cortante τ .

Cálculo del primer momento de área Q



(a)



(b)

- Si lo calculamos por “geometría de bloques”:

$$Q = b \left(\frac{h}{2} - y_1 \right) \left(y_1 + \frac{h/2 - y_1}{2} \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right).$$

- Si lo calculamos resolviendo la integral:

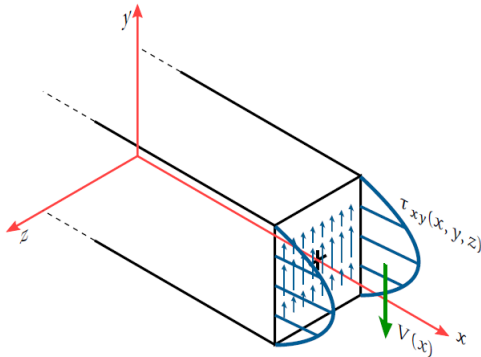
$$Q = \int_{y_1}^{h/2} yb \, dy = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right).$$

- En todo caso, reemplazando en la fórmula de cortante:

$$\tau = \frac{V}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$

Figura: Distribución de los esfuerzos cortantes en una viga de sección rectangular: (a) sección transversal de la viga y (b) diagrama que muestra la distribución parabólica de esfuerzos cortantes en la altura de la viga.

Interpretación de las ecuaciones derivadas



- El esfuerzo cortante es nulo en $y_1 = \pm h/2$.
- El máximo esfuerzo cortante ocurre en el eje neutro ($y_1 = 0$) donde Q alcanza su máximo, así:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3}{2} \frac{V}{A}.$$

Figura: Los esfuerzos cortantes, en el caso de una viga de sección rectangular, varían de forma parabólica con respecto al eje y . La fuerza cortante es positiva cuando la resultante de los esfuerzos cortantes τ_{xy} mostrados apunta en la dirección contraria al eje y . Tomado de [Álvarez \(2024\)](#).

Limitaciones en el cálculo del esfuerzo cortante con la formulación planteada

Fórmula del cortante (*Shear formula*)

$$\tau = \frac{VQ}{Ib}$$

1. Ecuaciones válidas para vigas de material elástico lineal con pequeñas deflexiones.
2. En el caso de secciones rectangulares, la precisión de la fórmula del cortante depende de la relación altura-ancho de la sección. Cuando $h/b \rightarrow 1$ la fórmula del cortante sobreestima el esfuerzo cortante.
3. No es aplicable a secciones triangulares o semicirculares. La fórmula del cortante aplica solamente a vigas prismáticas.

Efectos de las deformaciones angulares

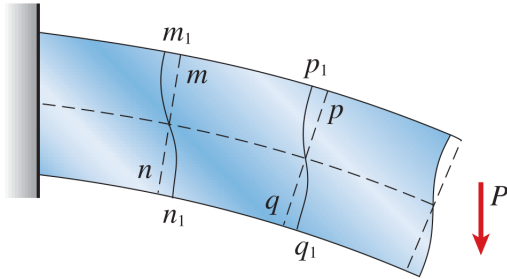


Figura: Alabeo de la sección transversal de una viga debido a las deformaciones angulares.

1. Como resultado de las deformaciones angulares, la sección transversal que antes era plana ahora se alabea. Deformación angular máxima en el eje neutro y mínima (nula) en las superficies externas, donde las curvas son perpendiculares a las mismas.
2. Elongación/contracción de los elementos longitudinales debidas a la flexión no se afectan por las deformaciones angulares, y la distribución de esfuerzos normales es la misma que en flexión pura.
3. En la mayoría de casos, es confiable usar la fórmula de la flexión para condiciones de flexión no uniforme.

Ejemplo de clase

Example 5-11

Una viga simplemente apoyada de metal con luz de 1 m soportada en los puntos A y B . La carga en la viga incluye su peso propio y tiene una intensidad de 28 kN/m . La sección transversal de la viga es rectangular de $25 \times 100 \text{ mm}$. Desprecie el pandeo lateral. Determine el esfuerzo normal y esfuerzo cortante en el punto C , a 25 mm por debajo de la parte superior de la viga y a 200 mm del apoyo en B . Muestre estos esfuerzos dibujados en un elemento de esfuerzos en el punto dado.

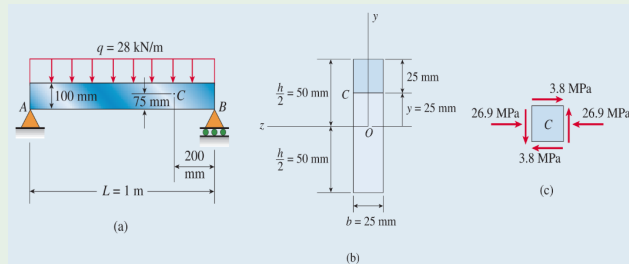


Figura: (a) Viga simple con carga uniformemente distribuida, (b) sección transversal de la viga y (c) elemento de esfuerzo mostrando los esfuerzos en el punto C .

Estudio autónomo de la sección

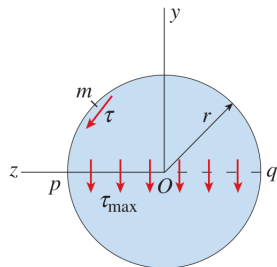
Ejercicios recomendados

- Todos los ejemplos de la sección
- 5.8-1
- 5.8-5
- 5.8-8
- 5.8-9

Derrotero

- 5.6. Diseño de vigas por esfuerzos de flexión
- 5.8. Esfuerzos cortantes en vigas se sección rectangular
- 5.9. Esfuerzos cortantes en vigas se sección circular
- 5.10. Esfuerzos cortantes en el alma de vigas con patines
- 5.11. Flujo de cortante

Esfuerzos cortantes en vigas se sección circular



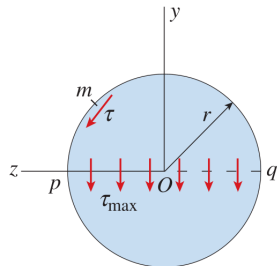
Podemos calcular los esfuerzos cortantes en el eje neutro. Asumimos:

1. En el eje neutro están los esfuerzos máximos.
2. Allí los esfuerzos cortantes actúan paralelos al eje y y son de intensidad constante en el espesor de la viga.
3. Por 2. podemos aplicar la fórmula del cortante $\tau = VQ/Ib$ en el eje neutro.

Figura: Esfuerzo cortante actuando en la sección transversal de una viga circular.

Esfuerzos cortantes en vigas se sección circular

Para una sección circular sólida



Conocemos el momento de inercia I , el primer momento de área Q y el diámetro b por notación:

$$I = \frac{\pi r^4}{4} \quad Q = A\bar{y} = \left(\frac{\pi r^2}{2} \right) \left(\frac{4r}{3\pi} \right) = \frac{2r^3}{3} \quad b = 2r.$$

Reemplazando en la fórmula del cortante (esfuerzo cortante máximo):

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{V(3r^3/3)}{(\pi r^4/4)(2r)} = \frac{4}{3} \frac{V}{A}.$$

Figura: Esfuerzo cortante actuando en la sección transversal de una viga circular.

Esfuerzos cortantes en vigas se sección circular

Para una sección circular hueca

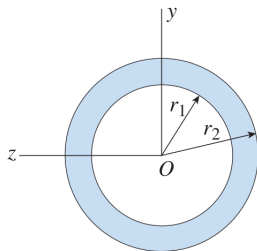


Figura: Sección circular hueca, un tubo.

Conocemos el momento de inercia I , el primer momento de área Q y el diámetro b por notación:

$$I = \frac{\pi}{4}(r_2^4 - r_1^4) \quad Q = \frac{2}{3}(r_2^3 - r_1^3) \quad b = 2(r_2 - r_1).$$

Reemplazando en la fórmula del cortante (esfuerzo cortante máximo):

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{4}{3} \frac{V}{A} \left(\frac{r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2}{r_2^2 + r_1^2} \right),$$

$$A = \pi(r_2^2 - r_1^2).$$

Estudio autónomo de la sección

Ejercicios recomendados

- Todos los ejemplos de la sección

Derrotero

- 5.6. Diseño de vigas por esfuerzos de flexión
- 5.8. Esfuerzos cortantes en vigas se sección rectangular
- 5.9. Esfuerzos cortantes en vigas se sección circular
- 5.10. Esfuerzos cortantes en el alma de vigas con patines
- 5.11. Flujo de cortante

Vigas con patines

beams with flanges, vigas con alas, aletas o patines

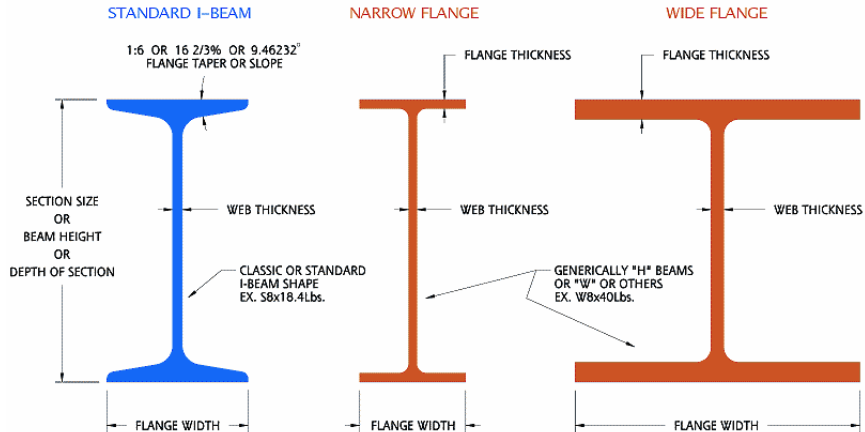
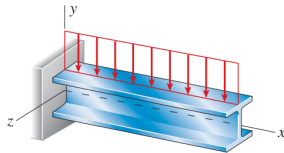


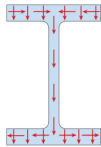
Figura: Diferentes tipos de vigas con patín, [link](#).

Vigas con patines

beams with flanges, vigas con alas, aletas o patines



(a)



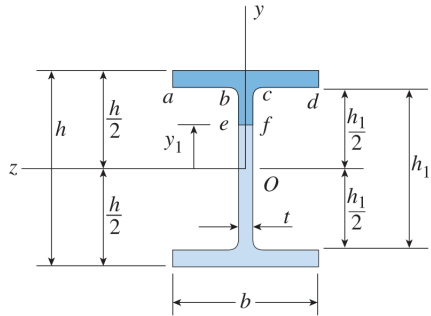
(b)

Comportamiento

- Los esfuerzos cortantes en las alas actúan en la dirección vertical y horizontal (ejes y y z).
- En las alas, los esfuerzos horizontales son mucho mayores que los verticales (se estudiará luego).
- Los esfuerzos cortantes en el alma solo actúan en la dirección vertical y son mayores que los calculados en las alas.

Figura: (a) Viga de sección alada ancha y (b) direcciones del esfuerzo cortante actuando en la sección transversal

Esfuerzos cortantes en el alma de la viga con patin



Hipótesis de análisis

1. El esfuerzo cortante actúa paralelo al eje y , y es uniformemente distribuido en el espesor del alma.
2. Aplica la fórmula del cortante:

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

Figura: Esfuerzo cortante en el alma de la viga wide-flange: (a) sección transversal.

Esfuerzos cortantes en el alma de la viga con patin

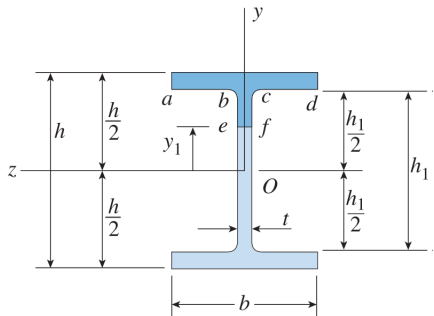


Figura: Esfuerzo cortante en el alma de la viga wide-flange: (a) sección transversal.

Cálculo del primer momento de área

1. Se considera el área por encima del punto de análisis, despreciando los filetes de unión alma-ala.
2. El área se puede dividir en dos figuras:

$$A_1 = b \left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2} \right) \quad A_2 = t \left(\frac{h_1}{2} - y_1 \right).$$

3. Se evalúa el primer momento de área con respecto al eje neutro z :

$$\begin{aligned} Q &= \sum_i^n \bar{Y}_i A_i \\ &= A_1 \left(\frac{h_1}{2} + \frac{h/2 - h_1/2}{2} \right) + A_2 \left(y_1 + \frac{h_1/2 - y_1}{2} \right) \\ &= \frac{b}{8} (h^2 - h_1^2) + \frac{t}{8} (h_1^2 - 4y_1^2) \end{aligned}$$

Esfuerzos cortantes en el alma de la viga con patin

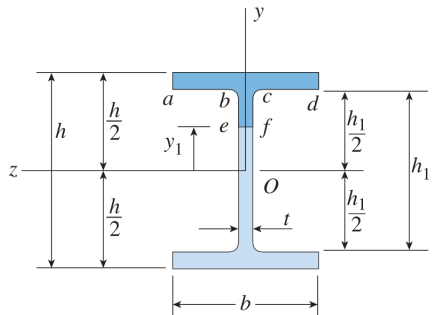


Figura: Esfuerzo cortante en el alma de la viga wide-flange: (a) sección transversal.

Fórmula del cortante

- Se reemplaza el primer momento de área Q :

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V}{8It} [b(h^2 - h_1^2) + t(h_1^2 - 4y_1^2)] .$$

- El momento de inercia de la sección:

$$I = \frac{1}{12}(bh^3 - bh_1^3 + th_1^3).$$

Limitación: esta ecuación no puede ser utilizada para determinar el esfuerzo cortante vertical en las alas de la viga.

Esfuerzos cortantes en el alma de la viga con patin

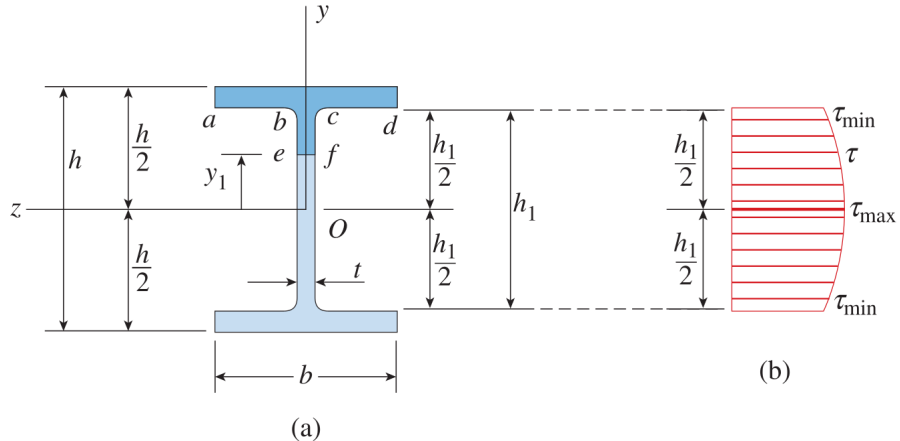
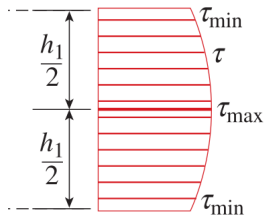


Figura: Esfuerzo cortante en el alma de la viga wide-flange: (a) sección transversal y (b) distribución del esfuerzo cortante en el alma.

Esfuerzos cortantes máximos y mínimos



(b)

Figura: Esfuerzo cortante en el alma de la viga wide-flange: (b) distribución del esfuerzo cortante en el alma.

- $\tau(y_1 = 0) = \tau_{\text{máx}}:$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{V}{8It} (bh^2 - bh_1^2 + yh_1^2).$$

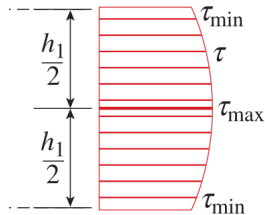
Es el máximo esfuerzo cortante en TODA la sección.

- $\tau(y_1 = \pm h_1/2) = \tau_{\text{mín}}:$

$$\tau_{\text{mín}} = \frac{Vb}{8It} (h^2 - h_1^2).$$

- Para una viga típica de patín ancho (*wide-flange beam*), el esfuerzo cortante máximo en el alma es entre 10 % y 60 % más grande que el mínimo.

Fuerza cortante en el alma



(b)

Figura: Esfuerzo cortante en el alma de la viga wide-flange: (b) distribución del esfuerzo cortante en el alma.

Se divide el diagrama de esfuerzo cortante en dos segmentos:

- Un segmento rectagnular de área

$$A_{\text{rectangular}} = \tau_{\text{mín}} h_1$$

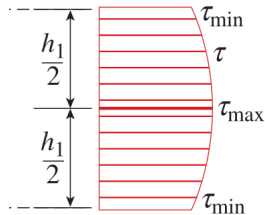
- Un segmento parabólico de área

$$A_{\text{parabólica}} = \frac{2}{3}(h_1)(\tau_{\text{máx}} - \tau_{\text{mín}})$$

- Sumando áreas y multiplicando por el espesor t , obtenemos:

$$V_{\text{web}} = \frac{th_1}{3}(2\tau_{\text{máx}} + \tau_{\text{mín}})$$

Fuerza cortante en el alma



(b)

Figura: Esfuerzo cortante en el alma de la viga wide-flange: (b) distribución del esfuerzo cortante en el alma.

Comportamiento:

- Fuerza cortante teórica o real:

$$V_{\text{web}} = \frac{th_1}{3}(2\tau_{\text{máx}} + \tau_{\text{mín}}).$$

- En vigas de dimensiones usuales, la fuerza cortante en el alma es aproximadamente entre 90 % y 98 % del total de fuerza cortante en la sección transversal.

$$\tau_{\text{aver}} = \frac{V}{th_1}.$$

Un error en el cálculo del esfuerzo de $\pm 10\%$.

Limitaciones de las ecuaciones desarrolladas

- Fórmula del cortante:

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V}{8It} [b(h^2 - h_1^2) + t(h_1^2 - 4y_1^2)].$$

- Esfuerzo cortante máximo:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{V}{8It} (bh^2 - bh_1^2 + yh_1^2).$$

- Esfuerzo cortante mínimo:

$$\tau_{\text{mín}} = \frac{Vb}{8It} (h^2 - h_1^2).$$

$$\tau_{\text{mín}} = \frac{Vb}{8It} (h^2 - h_1^2).$$

- Fuerza cortante en el alma:

$$V_{\text{web}} = \frac{th_1}{3} (2\tau_{\text{máx}} + \tau_{\text{mín}}).$$

1. Análisis hecho para el estudio del esfuerzo cortante en el alma de vigas de patín ancho (*wide-flange*).
2. No podemos asumir que el esfuerzo cortante sea constante en el ancho de la sección al estudiar los patines.
3. La fórmula del cortante no puede ser utilizada para esfuerzos cortantes verticales en los patines, pero si da buenas aproximaciones en los horizontales.
4. Metodología válida únicamente para almas delgadas (*thin-webs*).

Estudio autónomo de la sección

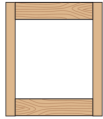
Ejercicios recomendados

- Todos los ejemplos de la sección
- 5.10-4
- 5.10-7
- 5.10-12

Derrotero

- 5.6. Diseño de vigas por esfuerzos de flexión
- 5.8. Esfuerzos cortantes en vigas se sección rectangular
- 5.9. Esfuerzos cortantes en vigas se sección circular
- 5.10. Esfuerzos cortantes en el alma de vigas con patines
- 5.11. Flujo de cortante

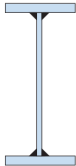
Vigas armadas y flujo de cortante



(a)



(b)



(c)

- **Vigas armadas** son vigas construidas a partir de la unión de dos o más materiales para formar una sola viga, buscan cumplir con necesidades arquitectónicas o estructurales.
- Se analiza el comportamiento de la unidad en dos fases:
 1. Hecha de una pieza: esfuerzos por flexión y esfuerzos cortantes.
 2. Conexiones entre las partes: deben ser lo suficientemente fuertes para transmitir la fuerza horizontal de corte que actúan entre ellas, mediante el *flujo de cortante*.
- **Flujo de cortante** (f) es la fuerza cortante horizontal por unidad de distancia a lo largo del eje longitudinal de la viga:

$$f = \frac{VQ}{I}.$$

Figura: Sección transversal de vigas armadas:
(a) cajón de madera, (b) glulam beam o viga laminada, (c) sección I armada.

Determinación del primer momento de área Q .

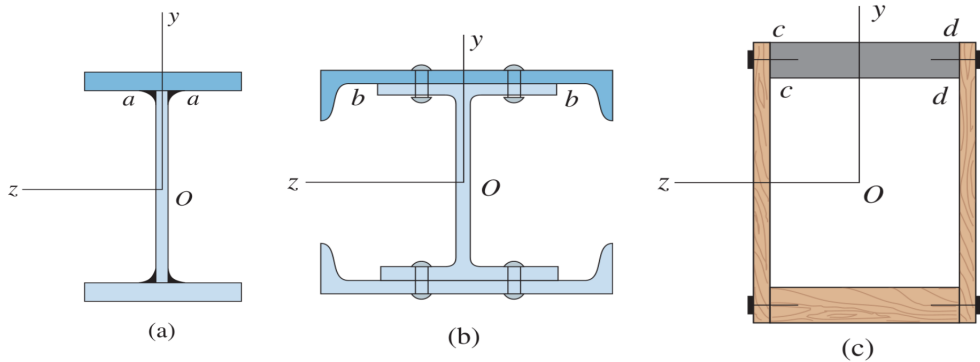


Figura: Áreas usadas para calcular el primer momento de área.

Estudio autónomo de la sección

Lectura

Flujo de cortante, wikipedia, [link](#).

Ejercicios recomendados

- Todos los ejemplos de la sección

Referencias

Gere, J. M. and Goodno, B. J. (2012). *Mechanics of materials*. Cengage learning.

Álvarez, D. A. (2024). *Teoría de la elasticidad usando Matlab y Maxima. Volumen 3: Vigas, Losas y Estabilidad elástica*. Universidad Nacional de Colombia.