Unidad 02. Elementos simples cargados axialmente

Cambios de longitud y estructuras estáticamente indeterminadas

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil
Análisis Estructural Básico

2023b

Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada (Gere and Goodno, 2012).

Derrotero

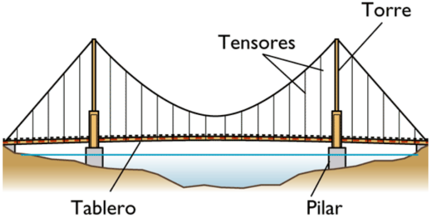
- Introducción
- Cambios de longitud en miembros cargados axialmente
- Cambios de longitud en condiciones no uniformes
- Estructuras estáticamente indeterminadas

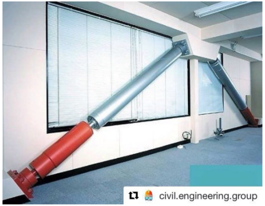
Derrotero

- Introducción
- Cambios de longitud en miembros cargados axialmente
- Cambios de longitud en condiciones no uniformes
- Estructuras estáticamente indeterminadas

Miembros cargados axialmente

Elementos estructurales sometidos solamente a tracción o a compresión son llamados **miembros cargados axialmente** (*axially loaded members*).





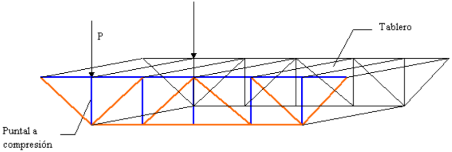


Figure: *Ejemplo de elementos estructurales bajo el estado de carga axial. De izquierda a derecha, arriba a abajo: tensores de un puente colgante a tracción, disipador sísmico a compresión o tracción según movimiento, miembros de una cercha según configuración de carga, y columnas considerando solo la compresión.*

Derrotero

- Introducción
- Cambios de longitud en miembros cargados axialmente
- Cambios de longitud en condiciones no uniformes
- Estructuras estáticamente indeterminadas

Muelles helicoidales (*coil springs*) o simplemente resortes

Se estudia el muelle en su totalidad como elemento, que estará sometido a tracción (estiramiento) o compresión (acortamiento); cada espiral individual está sometida a cortante y a torsión.

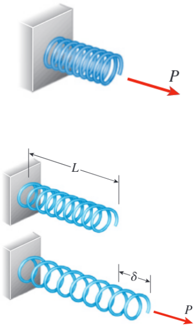


Figure: *(izquierda) resorte sometido a una carga axial y (derecha) elongación de un resorte cargado axialmente.*

Si el material es elástico lineal:

$$P = k\delta \quad \delta = fP$$

Las constantes:

- k: **rigidez** del resorte o constante del resorte: fuerza necesaria para producir una elongación unitaria.
- f: **flexibilidad** del resorte: elongación producida por una fuerza unitaria.

$$k = \frac{1}{f} \quad f = \frac{1}{k}$$

Barras prismáticas

Secciones comunes en la ingeniería civil

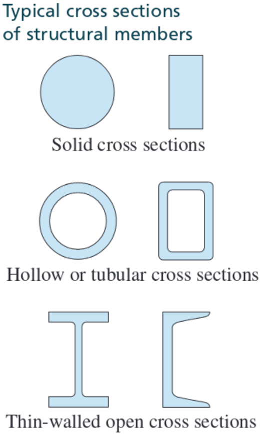


Figure: *Secciones típicas de miembros estructurales.*

Figure: *Perfiles típicos en ingeniería estructural, materil metálico, concreto y maderas. Observe que la sección transversal se mantiene constante en toda su longitud.*

Barras prismáticas

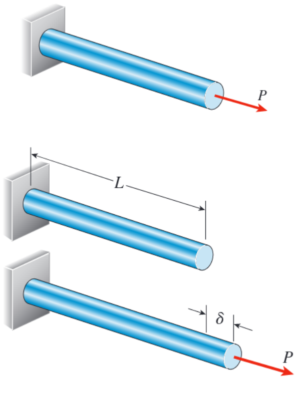


Figure: *(arriba) barra prismática cargada axialmente y (abajo) elongación de la barra prismática a tracción.*

Si el material es elástico lineal:

$$\delta = \frac{PL}{EA}$$

- EA se conoce como **módulo de rigidez axial** de la barra.
- $\delta > 0$ elongación o estiramiento.
- $\delta < 0$ acortamiento.

Podemos definir la rigidez y flexibilidad de una barra prismática:

$$k = \frac{EA}{L} \quad f = \frac{L}{EA}$$

Cables

Los “cables” como los usamos en ingeniería de grandes estructruas son la unión de pequeños cables trenzados helicoidalmente, pueden tener un nucleo de material diferente que ayude a dar flexibilidad o resistencia. Se suelen llamar **torones** (*wire rope*). **Solamente trabajan a tracción**.

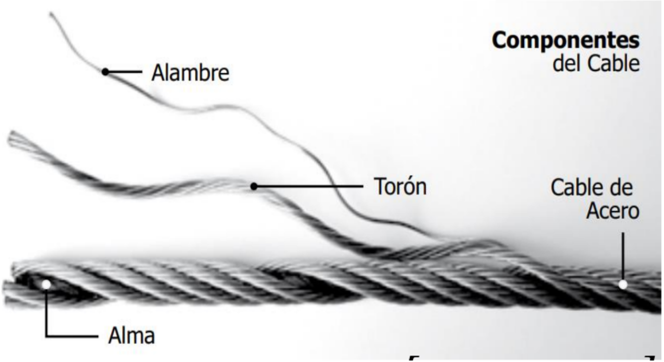


Figure: *Composición de cables del distribuidor Emcocables, link.*

Cables

Los "cables" como los usamos en ingeniería de grandes estructruas son la unión de pequeños cables trenzados helicoidalmente, pueden tener un nucleo de material diferente que ayude a dar flexibilidad o resistencia. Se suelen llamar **torones** (*wire rope*). **Solamente trabajan a tracción**.

Figure: *Sección transversal del cable del puente Golden Gate, link.*

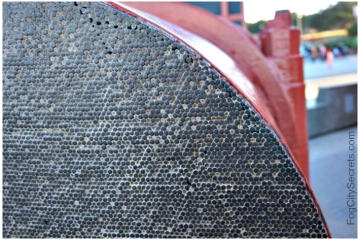


Figure: *Zoom a la sección transversal del cable principal del puente Golden Gate conformada por cientos de cables individuales con un recubrimiento externo, link.*

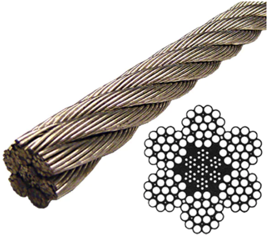


Figure: *Ejemplo: Stainless Steel Wire Rope 304 - 6x19 Class - 7/16"*

- Las propiedades mecánicas para el diseño profesional son dadas por los distribuidores del producto.

Estructuras complejas que hacen uso de los cables: concreto presforzado

El concreto preesforzado es el uso de torones dentro del concreto para alcanzar una mayor resistencia a la tracción.

Figure: *Biblioteca de la sede la Paz en la Universidad Nacional de Colombia con una luz de 18 m de largo, link.*

Lectura

El ABC del concreto preesforzado, link.

Comportamiento de los cables

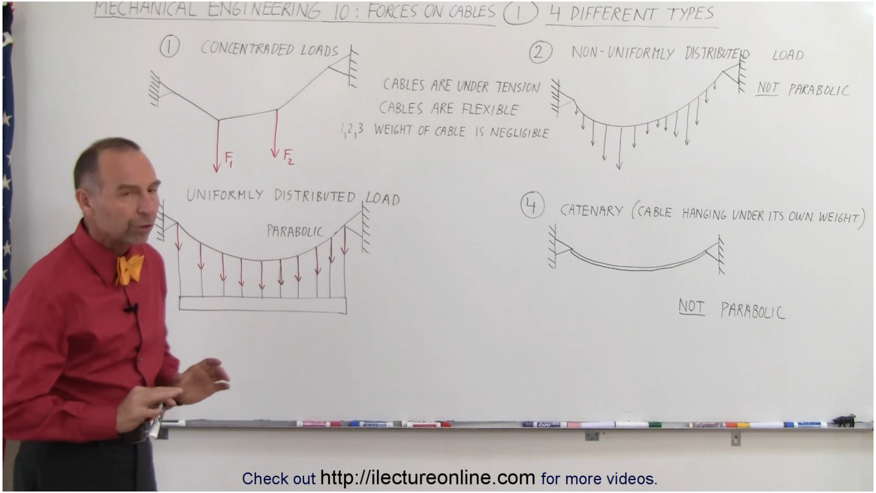


Figure: *Mechanical Engineering: Ch 10: Forces on Cables (1 of 33) 4 Different Types, video.*

Derrotero

- Introducción
- Cambios de longitud en miembros cargados axialmente
- Cambios de longitud en condiciones no uniformes
- Estructuras estáticamente indeterminadas

Barras con cargas axiales internas

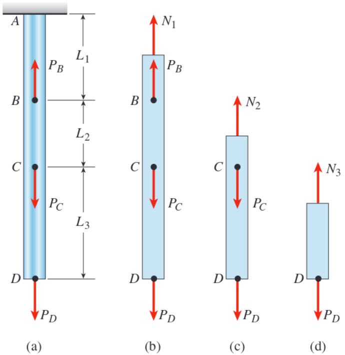


Figure: *(a) barra con cargas externas actuando en puntos intermedios; (b), (c) y (d) diagramas de cuerpo libre mostrando las fuerzas axiales internas N_1, N_2 y N_3.*

Procedimiento:

1. Identificar los segmentos de la barra:
$$L_1 \quad L_2 \quad L_3.$$
2. Determinar las cargas axiales internas:
$$N_1 = -P_B + P_C + P_D \quad N_2 = p_c + p_d \quad N_3 = P_D.$$
3. Determinar el cambio de longitud de cada segmento:
$$\delta_1 = \frac{N_1 L_1}{EA} \quad \delta_2 = \frac{N_2 L_2}{EA} \quad \delta_3 = \frac{N_3 L_3}{EA}.$$
4. Sumar los cambios de longitud:
$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

Barras con cargas axiales internas

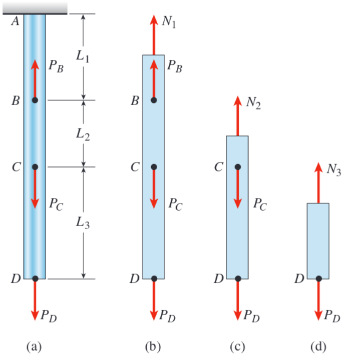


Figure: *(a) barra con cargas externas actuando en puntos intermedios; (b), (c) y (d) diagramas de cuerpo libre mostrando las fuerzas axiales internas N_1, N_2 y N_3.*

Fórmula

El cambio de longitud en barras con cargas axiales intermedias será la suma de las elongaciones o contracciones de cada segmento delimitado por la acción de una carga.

$$\delta = \sum_{i=i}^{n} \frac{N_i L_i}{EA}$$

- n el número de segmentos.
- N_i fuerza axial del segmento.
- Válido solo cuando el material es elástico-lineal.

Barras con segmentos prismáticos

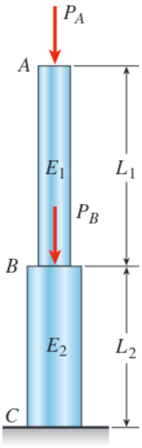


Figure: *Barra conformada por segmentos prismáticos teniendo diferentes cargas axiales, dimensiones y materiales.*

Fórmula

El caso más general considera el cambio de todas las propiedades.

$$\delta = \sum_{i=i}^{n} \frac{N_i L_i}{E_i A_i}$$

- n el número de segmentos.
- N_i fuerza axial del segmento.
- $E_i A_i$ rigidez axial del elemento.
- Válido solo cuando el material es elástico-lineal.

Barras no uniformes ni en carga ni en sección

Una barra cuya sección transversal no es constante será llamada **no prismática**

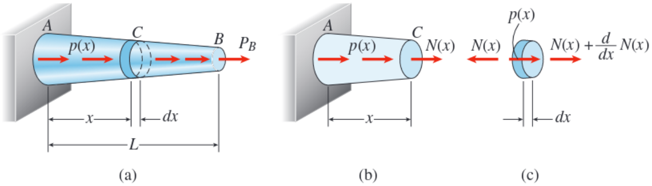


Figure: *Barra con sección transversal y carga variable en su longitud*

- La elongación del diferencial de barra será:

$$d\delta = \frac{N(x)dx}{EA(x)}.$$

- La elongación total es la suma de los efectos de todos los diferenciales.

Fórmula

$$\delta = \int_0^L d\delta = \int_0^L \frac{N(x)dx}{EA(x)}$$

- Solo cuando el material es elástico-lineal.
- Distribución uniforme de esfuerzos en la sección.
- *Small angles in tapered bars.*

Derrotero

Repaso: estructuras isostáticas e hiperestáticas

- Las estructuras a las que podemos calcularles sus reacciones y fuerzas internas solo por relaciones estáticas, son llamadas **isostáticas**.
- De lo contrario, serán **hiperestáticas**.

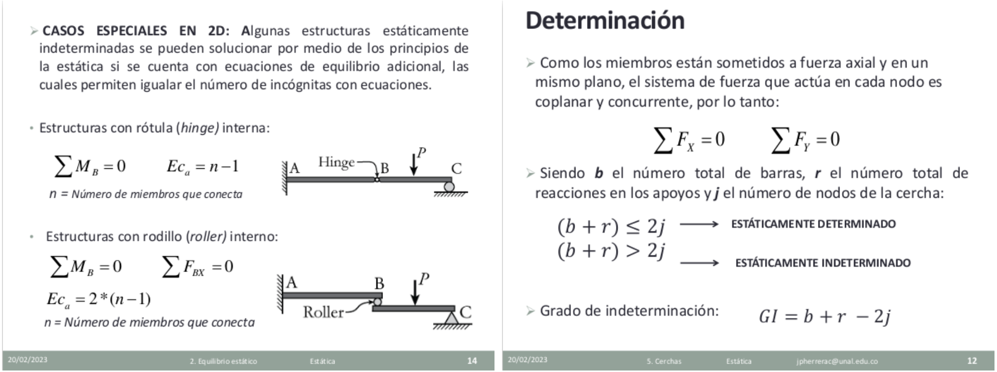


Figure: *Curso de Estática, identificación de indeterminaciones en el proceso de análisis, [Herrera, 2017]*

Repaso: estructuras isostáticas e hiperestáticas

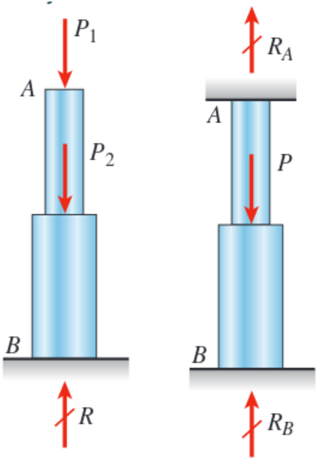


Figure: *(izquierda) barra estáticamente determinada y (derecha) barra estáticamente indeterminada.*

Solución de estructuras simples indeterminadas

El análisis de estructuras indeterminadas involucra usar las siguientes ecuaciones:

- **De equilibrio**: relacionan las cargas actuando en la estructura con las desconocidas (reaciones e internas)
  - Eq. estáticas o cinéticas
- **De compatibilidad**: expresan condiciones de desplazamiento en la estructura.
  - Eq. geométricas, cinemáticas o de deformaciones consistentes.
- **De relaciones F-D**: emplean las propiedades mecánicas de la estructura para relacionar las cargas con los desplazamientos de los miembros.
  - Eq. constitutivas.

Para analizar estructuras más complejas se requieren otros métodos del análisis estructural avanzado, como:

- Método de la flexibilidad (método de las fuerzas)
- Método de la rigidez (método de los desplazamientos)

Solución de estructuras simples indeterminadas

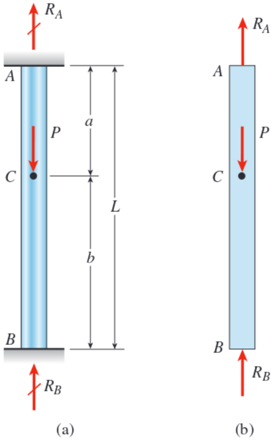


Figure: *Análisis de una barra estáticamente indeterminada.*

Análisis:

1. Tomando sumatoria de fuerzas verticales:

$$\sum F_y = 0; \quad R_A - P + P_B = 0.$$

2. Consideración: la barra no se alarga ni se contrae. Formulamos una **ecuación de compatibilidad**:

$$\delta_{AB} = 0.$$

3. Plantemos **las relaciones fuerza-desplazamiento** conociendo el comportamiento del material:

$$\delta_A C = \frac{R_A a}{EA} \quad \delta_{CB} = -\frac{R_B b}{EA}.$$

4. Solucionamos un sistema de ecuaciones conformado por las ecuaciones de compatbilidad y las relaciones fuerza-desplazamiento. Así obtenemos la ecuación faltante.

Referencias

Gere, J. M. and Goodno, B. J. (2012). *Mechanics of materials*. Cengage learning.