05. Ecuaciones diferenciales fundamentales de la teoría de la elasticidad

parte a: secciones 5.1 - 5.2

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil
Mecánica de Sólidos

2022b

Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada [Álvarez, 2022].

Derrotero

Derrotero

Introducción

Problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ($\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$)

Introducción

Problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ($\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$)

Introducción

Problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ($\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$)

Introducción

Problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ($\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$)

Introducción

Problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ($\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$)

Introducción

Problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ($\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$)

Problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ($\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$)

Ecuaciones de la mecánica del medio contínuo

La variación de los esfuerzos dentro del sólido estará definida por:

EDPs de equilibrio

Describen leyes físicas universales como conervación de la masa y de la energía. Aplicables a todo material.

EDPs de compatibilidad

Describen el comportamiento mecánico de materiales particulares

Ecuaciones de la mecánica del medio contínuo

La variación de los esfuerzos dentro del sólido estará definida por:

EDPs de equilibrio

Describen leyes físicas universales como conervación de la masa y de la energía. Aplicables a todo material.

EDPs de compatibilidad

Describen el comportamiento mecánico de materiales particulares

Ecuaciones de la mecánica del medio contínuo

La variación de los esfuerzos dentro del sólido estará definida por:

EDPs de equilibrio

Describen leyes físicas universales como conervación de la masa y de la energía. Aplicables a todo material.

EDPs de compatibilidad

Describen el comportamiento mecánico de materiales particulares

Ecuaciones de la mecánica del medio contínuo

La variación de los esfuerzos dentro del sólido estará definida por:

EDPs de equilibrio

Describen leyes físicas universales como conervación de la masa y de la energía. Aplicables a todo material.

EDPs de compatibilidad

Describen el comportamiento mecánico de materiales particulares

Derrotero

5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio

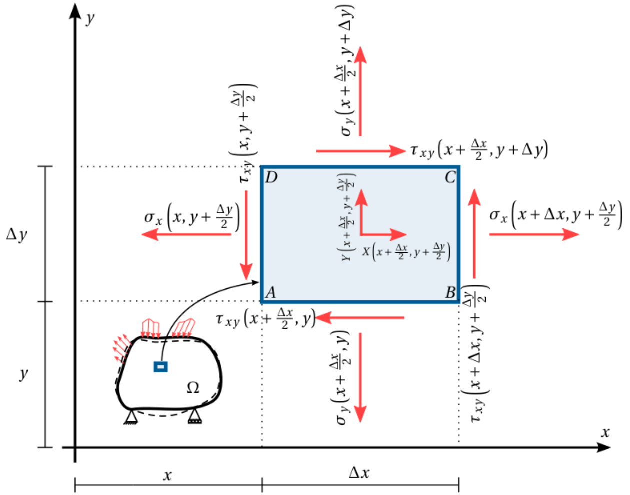

Figura: (5.1) Condiciones de equilibrio de un elemento rectangular cualquiera en el interior del sólido Ω. Observe que las fuerzas másicas también varían en el espacio. Este elemento tiene un espesor t no mostrado y un tamaño grande, que no es infinitesimal; esto en contraposición al elemento mostrado en la figura (2.2) que si tiene un tamaño infinitesimal.

5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Para el caso bidimensional, encontramos el equlibrio mediante el siguiente par de ecuaciones:

$$\frac{\partial \sigma_x(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x,y)}{\partial y} + X(x,y) = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x,y)}{\partial y} + Y(x,y) = 0$$

5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Para el caso bidimensional, encontramos el equlibrio mediante el siguiente par de ecuaciones:

$$\frac{\partial \sigma_x(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x,y)}{\partial y} + X(x,y) = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x,y)}{\partial y} + Y(x,y) = 0$$

5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Para el caso bidimensional, encontramos el equlibrio mediante el siguiente par de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x,y)}{\partial y} + X(x,y) = 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x,y)}{\partial y} + Y(x,y) = 0
\end{aligned}
$$

5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Análogamente, en el caso tridimensional:

$$\frac{\partial \sigma_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial z} + X(x,y,z) = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial z} + Y(x,y,z) = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(x,y,z)}{\partial z} + Z(x,y,z) = 0$$

Análogamente, en el caso tridimensional:

$$\frac{\partial \sigma_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial z} + X(x,y,z) = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial z} + Y(x,y,z) = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(x,y,z)}{\partial z} + Z(x,y,z) = 0$$

Análogamente, en el caso tridimensional:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial z} + X(x,y,z) = 0\\
\frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial z} + Y(x,y,z) = 0\\
\frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(x,y,z)}{\partial z} + Z(x,y,z) = 0
\end{aligned}
$$

5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio (interno)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial z} + X(x,y,z) = 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial z} + Y(x,y,z) = 0 \\
\frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(x,y,z)}{\partial z} + Z(x,y,z) = 0
\end{aligned}
$$

Expresan el equilibrio de fuerzas en las direcciones x, y y z en todos los puntos interiores del sólido.

- Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) en 1829, matemático e ingeniero civil.

Ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio (interno)

$$\frac{\partial \sigma_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial z} + X(x,y,z) = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial z} + Y(x,y,z) = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(x,y,z)}{\partial z} + Z(x,y,z) = 0$$

Expresan el equilibrio de fuerzas en las direcciones x, y y z en todos los puntos interiores del sólido.

- Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) en 1829, matemático e ingeniero civil.

Cuando la única fuerza másica actuando es el peso propio:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial z} &= 0\\
\frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial z} - \rho(x,y,z)g &= 0\\
\frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(x,y,z)}{\partial z} &= 0
\end{aligned}
$$

5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Cuando la única fuerza másica actuando es el peso propio:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial z} - \rho(x,y,z)g &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(x,y,z)}{\partial z} &= 0
\end{aligned}
$$

Cuando la única fuerza másica actuando es el peso propio:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial z} & = 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial z} - \rho(x,y,z)g & = 0 \\
\frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(x,y,z)}{\partial z} & = 0
\end{aligned}
$$

5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$

- En notación vectorial:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

Interpretación física

- Aplicables a cualquier sólido independiente del material constitutivo.
- Los esfuerzos son funciones derivables y continuas con respecto a la posición.
- El problema planteado es estáticamente indeterminado (o hiperestático)

Tarea

Demostrar que mediante el equilibrio por momentos, se obtiene $0 = 0$ o alternativamente $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (en 2D)

5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$

- En notación vectorial:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

Interpretación física

- Aplicables a cualquier sólido independiente del material constitutivo.
- Los esfuerzos son funciones derivables y continuas con respecto a la posición.
- El problema planteado es estáticamente indeterminado (o hiperestático)

Tarea

Demostrar que mediante el equilibrio por momentos, se obtiene $0 = 0$ o alternativamente $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (en 2D)

5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$

- En notación vectorial:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

Interpretación física

- Aplicables a cualquier sólido independiente del material constitutivo.
- Los esfuerzos son funciones derivables y continuas con respecto a la posición.
- El problema planteado es estáticamente indeterminado (o hiperestático)

Tarea

Demostrar que mediante el equilibrio por momentos, se obtiene $0 = 0$ o alternativamente $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (en 2D)

5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$

- En notación vectorial:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

Interpretación física

- Aplicables a cualquier sólido independiente del material constitutivo.
- Los esfuerzos son funciones derivables y continuas con respecto a la posición.
- El problema planteado es estáticamente indeterminado (o hiperestático)

Tarea

Demostrar que mediante el equilibrio por momentos, se obtiene $0 = 0$ o alternativamente $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (en 2D)

5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$

- En notación vectorial:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$
$$\text{div } \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

Interpretación física

- Aplicables a cualquier sólido independiente del material constitutivo.
- Los esfuerzos son funciones derivables y continuas con respecto a la posición.
- El problema planteado es estáticamente indeterminado (o hiperestático)

Tarea

Demostrar que mediante el equilibrio por momentos, se obtiene $0 = 0$ o alternativamente $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (en 2D)

5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$

- En notación vectorial:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

$$\mathrm{div}\ \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

Interpretación física

- Aplicables a cualquier sólido independiente del material constitutivo.
- Los esfuerzos son funciones derivables y continuas con respecto a la posición.
- El problema planteado es estáticamente indeterminado (o hiperestático)

Tarea

Demostrar que mediante el equilibrio por momentos, se obtiene $0 = 0$ o alternativamente $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (en 2D)

5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$

- En notación vectorial:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

$$\mathrm{div}\ \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

Interpretación física

- Aplicables a cualquier sólido independiente del material constitutivo.
- Los esfuerzos son funciones derivables y continuas con respecto a la posición.
- El problema planteado es estáticamente indeterminado (o hiperestático)

Tarea

Demostrar que mediante el equilibrio por momentos, se obtiene $0 = 0$ o alternativamente $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (en 2D)

5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$

- En notación vectorial:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

$$\text{div } \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

Interpretación física

- Aplicables a cualquier sólido independiente del material constitutivo.
- Los esfuerzos son funciones derivables y continuas con respecto a la posición.
- El problema planteado es estáticamente indeterminado (o hiperestático)

Tarea

Demostrar que mediante el equilibrio por momentos, se obtiene $0 = 0$ o alternativamente $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (en 2D)

5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$

- En notación vectorial:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$
$$\text{div}\ \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

Interpretación física

- Aplicables a cualquier sólido independiente del material constitutivo.
- Los esfuerzos son funciones derivables y continuas con respecto a la posición.
- El problema planteado es estáticamente indeterminado (o hiperestático)

Tarea

Demostrar que mediante el equilibrio por momentos, se obtiene $0 = 0$ o alternativamente $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (en 2D)

Derrotero

¿Para qué?

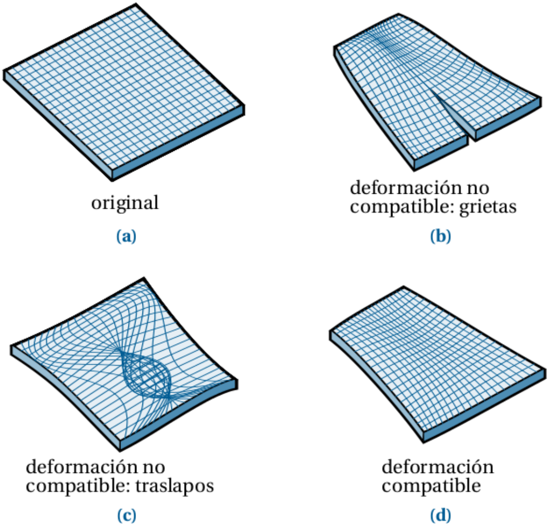

Figura: (5.2) Las condiciones de compatibilidad garantizan que, después de la deformación, el cuerpo (a) sigue siendo contínuo en el sentido de que en su interior no aparecerán grietas, huecos o vacíos (b) ni traslapos del material (c); por esta razón, la posición relativa de las partículas se debe conservar (d)

Derrotero

5.2.1. Ecuaciones de compatibilidad en dos dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Operando:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

Reemplazando:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

5.2.1. Ecuaciones de compatibilidad en dos dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Operando:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

Reemplazando:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

5.2.1. Ecuaciones de compatibilidad en dos dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Operando:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

Reemplazando:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

5.2.1. Ecuaciones de compatibilidad en dos dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Operando:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

Reemplazando:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

5.2.1. Ecuaciones de compatibilidad en dos dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Operando:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

Reemplazando:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

5.2.1. Ecuaciones de compatibilidad en dos dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Operando:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

Reemplazando:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

5.2.1. Ecuaciones de compatibilidad en dos dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Ecuación de compatibilidad bidimensional en términos de deformaciones

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

- Los desplazamientos u y v deben ser funciones continuas y derivables, cuyas primeras dos derivadas parciales mixtas son continuas.
- Únicamente aplicable cuando se presentan deformaciones pequeñas.

Derrotero

5.2.2. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Conociendo:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Sumando estas ecuaciones y organizando términos:

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

5.2.2. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Conociendo:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Sumando estas ecuaciones y organizando términos:

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

5.2.2. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Conociendo:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Sumando estas ecuaciones y organizando términos:

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

5.2.2. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Conociendo:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Sumando estas ecuaciones y organizando términos:

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

5.2.2. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Intercambiando cíclicamente los índices x, y, y z, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &\qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &\qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} &\qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)
\end{aligned}
$$

5.2.2. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Intercambiando cíclicamente los índices x, y, y z, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

5.2.2. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Intercambiando cíclicamente los índices x, y, y z, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

5.2.2. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Ecuaciones de compatibilidad de Saint-Venant

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

(mismas anotaciones)

- Adhémar Jean Claude de Saint-Venant (1797-1886) en 1864, matemático e ingeniero mecánico.

5.2.2. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Ecuaciones de compatibilidad de Saint-Venant

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

(mismas anotaciones)

- Adhémar Jean Claude de Saint-Venant (1797-1886) en 1864, matemático e ingeniero mecánico.

5.2.2. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Las ecuaciones de Saint-Venant se pueden resumir en una única ecuación usando notación tensorial:

$$\varepsilon_{ij,km} + \varepsilon_{mk,ji} - \varepsilon_{ik,jm} - \varepsilon_{mj,ki} = 0; \quad i, j, k, m = 1, 2, 3$$

Esta única ecuación representa 81 ecuaciones diferenciales parciales, no obstante, debido a la simetría del tensor de deformaciones ε_{ij}, solo las seis ecuaciones anteriores son distintas.

5.2.2. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Las ecuaciones de Saint-Venant se pueden resumir en una única ecuación usando notación tensorial:

$$\varepsilon_{ij,km} + \varepsilon_{mk,ji} - \varepsilon_{ik,jm} - \varepsilon_{mj,ki} = 0; \quad i, j, k, m = 1, 2, 3$$

Esta única ecuación representa 81 ecuaciones diferenciales parciales, no obstante, debido a la simetría del tensor de deformaciones ε_{ij}, solo las seis ecuaciones anteriores son distintas.

5.2.2. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Las ecuaciones de Saint-Venant se pueden resumir en una única ecuación usando notación tensorial:

$$\varepsilon_{ij,km} + \varepsilon_{mk,ji} - \varepsilon_{ik,jm} - \varepsilon_{mj,ki} = 0; \quad i, j, k, m = 1, 2, 3$$

Esta única ecuación representa 81 ecuaciones diferenciales parciales, no obstante, debido a la simetría del tensor de deformaciones ε_{ij}, solo las seis ecuaciones anteriores son distintas.

5.2.2. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Las ecuaciones de Saint-Venant se pueden resumir en una única ecuación usando notación tensorial:

$$\varepsilon_{ij,km} + \varepsilon_{mk,ji} - \varepsilon_{ik,jm} - \varepsilon_{mj,ki} = 0; \quad i, j, k, m = 1, 2, 3$$

Esta única ecuación representa 81 ecuaciones diferenciales parciales, no obstante, debido a la simetría del tensor de deformaciones ε_{ij}, solo las seis ecuaciones anteriores son distintas.

5.2.2. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Las ecuaciones anteriores son LD. Se pueden reducir al siguiente sistema de 3 EDPs LI. [Ameen, 2005]:

$$
\begin{aligned}
2\frac{\partial^4 \varepsilon_x}{\partial y^2 \partial z^2} &= \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)\\
2\frac{\partial^4 \varepsilon_y}{\partial x^2 \partial z^2} &= \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)\\
2\frac{\partial^4 \varepsilon_z}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)
\end{aligned}
$$

Sin embargo, se emplea la formulación anterior (sistema 6x6) al ser matemáticamente más simple su uso.

5.2.2. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Las ecuaciones anteriores son LD. Se pueden reducir al siguiente sistema de 3 EDPs LI. [Ameen, 2005]:

$$2\frac{\partial^4 \varepsilon_x}{\partial y^2 \partial z^2} = \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$2\frac{\partial^4 \varepsilon_y}{\partial x^2 \partial z^2} = \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$2\frac{\partial^4 \varepsilon_z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

Sin embargo, se emplea la formulación anterior (sistema 6x6) al ser matemáticamente más simple su uso.

5.2.2. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Las ecuaciones anteriores son LD. Se pueden reducir al siguiente sistema de 3 EDPs LI. [Ameen, 2005]:

$$
\begin{aligned}
2\frac{\partial^4 \varepsilon_x}{\partial y^2 \partial z^2} &= \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)\\
2\frac{\partial^4 \varepsilon_y}{\partial x^2 \partial z^2} &= \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)\\
2\frac{\partial^4 \varepsilon_z}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)
\end{aligned}
$$

Sin embargo, se emplea la formulación anterior (sistema 6x6) al ser matemáticamente más simple su uso.

5.2.2. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Las ecuaciones anteriores son LD. Se pueden reducir al siguiente sistema de 3 EDPs LI. [Ameen, 2005]:

$$
\begin{aligned}
2\frac{\partial^4 \varepsilon_x}{\partial y^2 \partial z^2} &= \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \\
2\frac{\partial^4 \varepsilon_y}{\partial x^2 \partial z^2} &= \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \\
2\frac{\partial^4 \varepsilon_z}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)
\end{aligned}
$$

Sin embargo, se emplea la formulación anterior (sistema 6x6) al ser matemáticamente más simple su uso.

Derrotero

5.2.3. Ecuaciones de compatibilidad para el caso de tensión plana expresada en términos de esfuerzos

Recordemos la condición de **tensión plana**: $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Las ecuaciones que describen sus deformaciones (4.36):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

Aplicando derivadas:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{G}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad en dos dimensiones (5.6), y sustituyendo $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\sigma_y)\right) \tag{1}$$

5.2.3. Ecuaciones de compatibilidad para el caso de tensión plana expresada en términos de esfuerzos

Recordemos la condición de **tensión plana**: $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Las ecuaciones que describen sus deformaciones (4.36):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

Aplicando derivadas:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{G}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad en dos dimensiones (5.6), y sustituyendo $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\sigma_y)\right) \tag{1}$$

5.2.3. Ecuaciones de compatibilidad para el caso de tensión plana expresada en términos de esfuerzos

Recordemos la condición de **tensión plana**: $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Las ecuaciones que describen sus deformaciones (4.36):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

Aplicando derivadas:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{G}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad en dos dimensiones (5.6), y sustituyendo $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\sigma_y)\right) \tag{1}$$

5.2.3. Ecuaciones de compatibilidad para el caso de tensión plana expresada en términos de esfuerzos

Recordemos la condición de **tensión plana**: $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Las ecuaciones que describen sus deformaciones (4.36):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

Aplicando derivadas:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} = \frac{1}{G}\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}$$

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad en dos dimensiones (5.6), y sustituyendo $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$:

$$\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y} = \frac{1}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\sigma_y)\right) \tag{1}$$

5.2.3. Ecuaciones de compatibilidad para el caso de tensión plana expresada en términos de esfuerzos

Recordemos la condición de **tensión plana**: $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Las ecuaciones que describen sus deformaciones (4.36):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

Aplicando derivadas:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{G}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad en dos dimensiones (5.6), y sustituyendo $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\sigma_y)\right) \tag{1}$$

5.2.3. Ecuaciones de compatibilidad para el caso de tensión plana expresada en términos de esfuerzos

Las ecuaciones diferenciales de equilibrio 2D:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

Derivando, sumando y despejando el término que contiene a τ_{xy}:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \tag{2}$$

5.2.3. Ecuaciones de compatibilidad para el caso de tensión plana expresada en términos de esfuerzos

Las ecuaciones diferenciales de equilibrio 2D:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

Derivando, sumando y despejando el término que contiene a τ_{xy}:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \tag{2}$$

5.2.3. Ecuaciones de compatibilidad para el caso de tensión plana expresada en términos de esfuerzos

Las ecuaciones diferenciales de equilibrio 2D:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

Derivando, sumando y despejando el término que contiene a τ_{xy}:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \tag{2}$$

5.2.3. Ecuaciones de compatibilidad para el caso de tensión plana expresada en términos de esfuerzos

Las ecuaciones diferenciales de equilibrio 2D:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

Derivando, sumando y despejando el término que contiene a τ_{xy}:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \tag{2}$$

5.2.3. Ecuaciones de compatibilidad para el caso de tensión plana expresada en términos de esfuerzos

Igualando (1) y (2), simplificando y manipulando matemáticamente:

Ecuación de compatibilidad para el caso de tensión plana

En términos de esfuerzos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

5.2.3. Ecuaciones de compatibilidad para el caso de tensión plana expresada en términos de esfuerzos

Igualando (1) y (2), simplificando y manipulando matemáticamente:

Ecuación de compatibilidad para el caso de tensión plana

En términos de esfuerzos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

5.2.3. Ecuaciones de compatibilidad para el caso de tensión plana expresada en términos de esfuerzos

Igualando (1) y (2), simplificando y manipulando matemáticamente:

Ecuación de compatibilidad para el caso de tensión plana

En términos de esfuerzos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Derrotero

5.2.4. Ecuaciones de compatibilidad para el caso de deformación plana expresada en términos de esfuerzos

Recordemos la condición de **deformación plana**: $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Las ecuaciones que describen sus deformaciones (4.39):

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}((1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}((1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

Aplicando derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x(1-\nu) - \nu\sigma_y) \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y(1-\nu) - \nu\sigma_x) \\
\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{G}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}
\end{aligned}$$

5.2.4. Ecuaciones de compatibilidad para el caso de deformación plana expresada en términos de esfuerzos

Recordemos la condición de **deformación plana**: $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Las ecuaciones que describen sus deformaciones (4.39):

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}((1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}((1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

Aplicando derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x(1-\nu) - \nu\sigma_y) \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y(1-\nu) - \nu\sigma_x) \\
\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{G}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}
\end{aligned}$$

5.2.4. Ecuaciones de compatibilidad para el caso de deformación plana expresada en términos de esfuerzos

Recordemos la condición de **deformación plana**: $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Las ecuaciones que describen sus deformaciones (4.39):

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}((1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}((1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

Aplicando derivadas:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x(1-\nu) - \nu\sigma_y)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y(1-\nu) - \nu\sigma_x)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{G}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

5.2.4. Ecuaciones de compatibilidad para el caso de deformación plana expresada en términos de esfuerzos

Recordemos la condición de **deformación plana**: $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Las ecuaciones que describen sus deformaciones (4.39):

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}((1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}((1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

Aplicando derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x(1-\nu) - \nu\sigma_y) \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y(1-\nu) - \nu\sigma_x) \\
\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{G}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}
\end{aligned}$$

5.2.4. Ecuaciones de compatibilidad para el caso de deformación plana expresada en términos de esfuerzos

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad en dos dimensiones (5.6 del main):

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{G(1+\nu)}{E} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x(1-\nu) - \nu\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y(1-\nu) - \nu\sigma_x) \right) \tag{3}$$

Igualando las ecuaciones (2) y (3)

$$\frac{G(1+\nu)}{E} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x(1-\nu) - \nu\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y(1-\nu) - \nu\sigma_x) \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

5.2.4. Ecuaciones de compatibilidad para el caso de deformación plana expresada en términos de esfuerzos

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad en dos dimensiones (5.6 del main):

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{G(1+\nu)}{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x(1-\nu)-\nu\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y(1-\nu)-\nu\sigma_x)\right) \tag{3}$$

Igualando las ecuaciones (2) y (3)

$$\frac{G(1+\nu)}{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x(1-\nu)-\nu\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y(1-\nu)-\nu\sigma_x)\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

5.2.4. Ecuaciones de compatibilidad para el caso de deformación plana expresada en términos de esfuerzos

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad en dos dimensiones (5.6 del main):

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{G(1+\nu)}{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x(1-\nu) - \nu\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y(1-\nu) - \nu\sigma_x)\right) \quad (3)$$

Igualando las ecuaciones (2) y (3)

$$\frac{G(1+\nu)}{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x(1-\nu) - \nu\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y(1-\nu) - \nu\sigma_x)\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

5.2.4. Ecuaciones de compatibilidad para el caso de deformación plana expresada en términos de esfuerzos

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad en dos dimensiones (5.6 del main):

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{G(1+\nu)}{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x(1-\nu)-\nu\sigma_y)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y(1-\nu)-\nu\sigma_x)\right) \tag{3}$$

Igualando las ecuaciones (2) y (3)

$$\frac{G(1+\nu)}{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x(1-\nu)-\nu\sigma_y)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y(1-\nu)-\nu\sigma_x)\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

5.2.4. Ecuaciones de compatibilidad para el caso de deformación plana expresada en términos de esfuerzos

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad en dos dimensiones (5.6 del main):

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{G(1+\nu)}{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x(1-\nu) - \nu\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y(1-\nu) - \nu\sigma_x)\right) \quad (3)$$

Igualando las ecuaciones (2) y (3)

$$\frac{G(1+\nu)}{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x(1-\nu) - \nu\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y(1-\nu) - \nu\sigma_x)\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

5.2.4. Ecuaciones de compatibilidad para el caso de deformación plana expresada en términos de esfuerzos

Simplificamos sabiendo que:

$$\frac{G(1+\nu)}{E} = \frac{E(1+\nu)}{2(1+\nu)E} = \frac{1}{2}$$

Ecuación de compatibilidad para el caso de deformación plana

En términos de esfuerzos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

5.2.4. Ecuaciones de compatibilidad para el caso de deformación plana expresada en términos de esfuerzos

Simplificamos sabiendo que:

$$\frac{G(1+\nu)}{E} = \frac{E(1+\nu)}{2(1+\nu)E} = \frac{1}{2}$$

Ecuación de compatibilidad para el caso de deformación plana

En términos de esfuerzos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

5.2.4. Ecuaciones de compatibilidad para el caso de deformación plana expresada en términos de esfuerzos

Simplificamos sabiendo que:

$$\frac{G(1+\nu)}{E} = \frac{E(1+\nu)}{2(1+\nu)E} = \frac{1}{2}$$

Ecuación de compatibilidad para el caso de deformación plana

En términos de esfuerzos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Derrotero

5.2.5. Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

Podemos definir una fórmula general de compatibilidad para el caso 2D:

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)}$$

donde

$$K_1 = \begin{cases} -(1+\nu) & \text{para el caso de } \textbf{tensión plana} \\ -\dfrac{1}{1-\nu} & \text{para el caso de } \textbf{deformación plana} \end{cases}$$

5.2.5. Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

Podemos definir una fórmula general de compatibilidad para el caso 2D:

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)}$$

donde

$$K_1 = \begin{cases} -(1+\nu) & \text{para el caso de } \textbf{tensión plana} \\ -\dfrac{1}{1-\nu} & \text{para el caso de } \textbf{deformación plana} \end{cases}$$

5.2.5. Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

Podemos definir una fórmula general de compatibilidad para el caso 2D:

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)}$$

donde

$$K_1 = \begin{cases} -(1+\nu) & \text{para el caso de } \textbf{tensión plana} \\ -\dfrac{1}{1-\nu} & \text{para el caso de } \textbf{deformación plana} \end{cases}$$

5.2.5. Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

Podemos definir una fórmula general de compatibilidad para el caso 2D:

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)}$$

donde

$$K_1 = \begin{cases} -(1+\nu) & \text{para el caso de } \textbf{tensión plana} \\ -\dfrac{1}{1-\nu} & \text{para el caso de } \textbf{deformación plana} \end{cases}$$

5.2.5. Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\nabla^2 \sigma_{ii} = K_1 b_{i,i}$$

- En notación vectorial:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \mathrm{div}\boldsymbol{b}$$

donde

$$\begin{cases} \nabla^2 := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & \textbf{operador laplaciano bidimensional} \\ \mathrm{div}\boldsymbol{b} := \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} & \text{divergenia del campo vectorial } \boldsymbol{b} \end{cases}$$

5.2.5. Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\nabla^2\sigma_{ii} = K_1 b_{i,i}$$

- En notación vectorial:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \mathrm{div}\boldsymbol{b}$$

donde

$$\begin{cases} \nabla^2 := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & \textbf{operador laplaciano bidimensional} \\ \mathrm{div}\boldsymbol{b} := \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} & \text{divergenia del campo vectorial } \boldsymbol{b} \end{cases}$$

5.2.5. Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\nabla^2 \sigma_{ii} = K_1 b_{i,i}$$

- En notación vectorial:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \operatorname{div} \boldsymbol{b}$$

donde

$$\begin{cases} \nabla^2 := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & \textbf{operador laplaciano bidimensional} \\ \operatorname{div} \boldsymbol{b} := \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} & \text{divergenia del campo vectorial } \boldsymbol{b} \end{cases}$$

5.2.5. Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\nabla^2 \sigma_{ii} = K_1 b_{i,i}$$

- En notación vectorial:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \mathrm{div}\boldsymbol{b}$$

donde

$$\begin{cases} \nabla^2 := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & \textbf{operador laplaciano bidimensional} \\ \mathrm{div}\boldsymbol{b} := \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} & \text{divergenia del campo vectorial } \boldsymbol{b} \end{cases}$$

5.2.5. Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\nabla^2 \sigma_{ii} = K_1 b_{i,i}$$

- En notación vectorial:

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \operatorname{div} \boldsymbol{b}$$

donde

$$\begin{cases} \nabla^2 := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & \textbf{operador laplaciano bidimensional} \\ \operatorname{div} \boldsymbol{b} := \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} & \text{divergenia del campo vectorial } \boldsymbol{b} \end{cases}$$

5.2.5. Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

Ecuación de compatibilidad general para el caso bidimensional

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

- Aplicable solo a sólidos con materiales elásticos, lineales, isótropos y homogéneos (Ley de Hooke).
- Materiales homogeneos: $E(x, y, z) = \nu(x, y, z) = \text{cte}$.
- Deformaciones pequeñas.

5.2.5. Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

¿Y si las fuerzas másicas son homogéneas?

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = 0;$$

5.2.5. Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

¿Y si las fuerzas másicas son homogéneas?

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = 0;$$

5.2.5. Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

Ecuación de Lévy

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

La distribución de esfuerzos debe ser igual para todas las estructuras en tensión o deformación plana, siempre y cuando se trate de:

- Contornos idénticos.
- Estructuras sometidas al mismo sistema de fuerzas superficiales y másicas, constantes.

- Maurice Lévy (1838-1910), ingeniero y matemático francés.

Fotoeslasticidad

En el método fotoelástico, un material transparente se somete a una luz polarizada y a unas fuerzas; según la llamada *ley de Brewster* o *ley tenso-óptica*, el material responderá mostrando unas franjas del igual color, las cuales se pueden interpretar como curvas de esfuerzo cortante máximo τ_{max} constante; esto siempre y cuando el esfuerzo fuera del plano sea el esfuerzo intermedio, es decir, σ_2 en el caso tridimensional. (ver video)

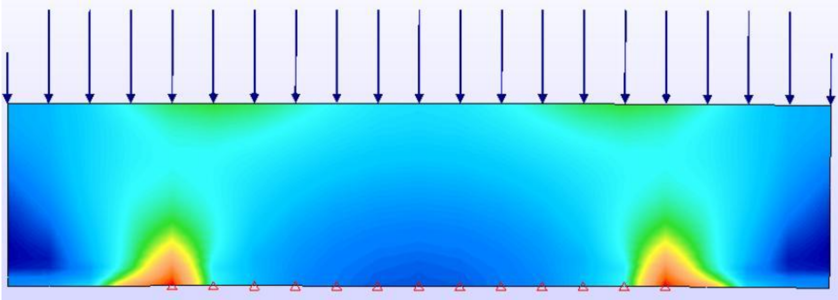

Figura: Estudio de la distribución de esfuerzos sobre un polímero sometido a compresión, utilizando la técnica de fotoelasticidad. Hilda Sofía Soto Lesmes, ver.

Derrotero

5.2.6. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

Recordemos:

- Las ecuaciones (4.3) dadas por la superposición de las deformaciones elásticas:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))
\end{aligned}$$

- Las EDPs de equilibrio interno (5.2):

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = 0$$

5.2.6. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

Recordemos:

- Las ecuaciones (4.3) dadas por la superposición de las deformaciones elásticas:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z))$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))$$

- Las EDPs de equilibrio interno (5.2):

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \boldsymbol{b} = 0$$

5.2.6. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

Recordemos:

- Las ecuaciones (4.3) dadas por la superposición de las deformaciones elásticas:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))
\end{aligned}$$

- Las EDPs de equilibrio interno (5.2):

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = 0$$

5.2.6. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

$$\nabla^2\sigma_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial X}{\partial x}$$

$$\nabla^2\sigma_y + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial Y}{\partial y}$$

$$\nabla^2\sigma_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial Z}{\partial z}$$

$$\nabla^2\tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z} = -\left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y}\right)$$

$$\nabla^2\tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial z} = -\left(\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x}\right)$$

$$\nabla^2\tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y} = -\left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\right)$$

5.2.6. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

Ecuaciones de Michell

$$\nabla^2\sigma_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial X}{\partial x}$$

$$\nabla^2\sigma_y + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial Y}{\partial y}$$

$$\nabla^2\sigma_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial Z}{\partial z}$$

$$\nabla^2\tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z} = -\left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y}\right)$$

$$\nabla^2\tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial z} = -\left(\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x}\right)$$

$$\nabla^2\tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y} = -\left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\right)$$

- John Henry Michell (1863-1940) en 1900, matemático australiano.

5.2.6. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\Theta_{,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}b_{k,k} - b_{i,j} - b_{j,i}$$

donde:

- $\Theta := \sigma_{kk} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ es el primer invariante de esfuerzos I_1
- ∇^2 es el **operador laplaciano tridimensional**:

$$\nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Comentario

A comparación de las ecuaciones de Saint-Venant (5.7) las de Michell son LI

5.2.6. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\Theta_{,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}b_{k,k} - b_{i,j} - b_{j,i}$$

donde:

- $\Theta := \sigma_{kk} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ es el primer invariante de esfuerzos I_1
- ∇^2 es el **operador laplaciano tridimensional**:

$$\nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Comentario

A comparación de las ecuaciones de Saint-Venant (5.7) las de Michell son LI

5.2.6. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\Theta_{,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}b_{k,k} - b_{i,j} - b_{j,i}$$

donde:

- $\Theta := \sigma_{kk} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ es el primer invariante de esfuerzos I_1
- ∇^2 es el **operador laplaciano tridimensional**:

$$\nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Comentario

A comparación de las ecuaciones de Saint-Venant (5.7) las de Michell son LI

5.2.6. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\Theta_{,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}b_{k,k} - b_{i,j} - b_{j,i}$$

donde:

- $\Theta := \sigma_{kk} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ es el primer invariante de esfuerzos I_1
- ∇^2 es el **operador laplaciano tridimensional**:

$$\nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Comentario

A comparación de las ecuaciones de Saint-Venant (5.7) las de Michell son LI

5.2.6. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\Theta_{,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}b_{k,k} - b_{i,j} - b_{j,i}$$

donde:

- $\Theta := \sigma_{kk} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ es el primer invariante de esfuerzos I_1
- ∇^2 es el **operador laplaciano tridimensional**:

$$\nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Comentario

A comparación de las ecuaciones de Saint-Venant (5.7) las de Michell son LI

5.2.6. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\Theta_{,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}b_{k,k} - b_{i,j} - b_{j,i}$$

donde:

- $\Theta := \sigma_{kk} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ es el primer invariante de esfuerzos I_1
- ∇^2 es el **operador laplaciano tridimensional**:

$$\nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Comentario

A comparación de las ecuaciones de Saint-Venant (5.7) las de Michell son LI

5.2.6. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

¿Y si las fuerzas másicas son constantes?

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} X(x,y,z) \\ Y(x,y,z) \\ Z(x,y,z) \end{bmatrix} = \text{cte};$$

5.2.6. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

¿Y si las fuerzas másicas son constantes?

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} X(x,y,z) \\ Y(x,y,z) \\ Z(x,y,z) \end{bmatrix} = \text{cte};$$

5.2.6. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

Ecuaciones de Beltrami

$$\nabla^2\sigma_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = 0 \qquad \nabla^2\tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z} = 0$$

$$\nabla^2\sigma_y + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} = 0 \qquad \nabla^2\tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial z} = 0$$

$$\nabla^2\sigma_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} = 0 \qquad \nabla^2\tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y} = 0$$

- Sólo válidas para materiales elásticos, lineales, homogéneos e isótropos (Ley de Hooke).

- Eugenio Beltrami (1835-1900) en 1892, matemático italiano.
- Son análogas a $\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$ (caso bidimensional).

5.2.6. Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

Ecuaciones de Beltrami

$$\nabla^2\sigma_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = 0 \qquad \nabla^2\tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z} = 0$$

$$\nabla^2\sigma_y + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} = 0 \qquad \nabla^2\tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial z} = 0$$

$$\nabla^2\sigma_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} = 0 \qquad \nabla^2\tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y} = 0$$

- Sólo válidas para materiales elásticos, lineales, homogéneos e isótropos (Ley de Hooke).

- Eugenio Beltrami (1835-1900) en 1892, matemático italiano.
- Son análogas a $\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$ (caso bidimensional).

Derrotero

5.2.7. Interpretación física de las ecuaciones de compatibilidad

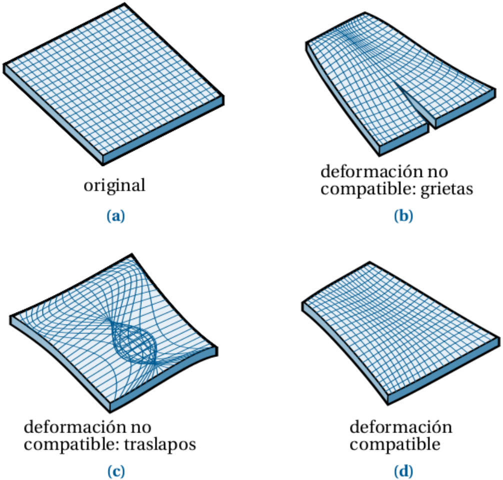

Figura: (5.2) Las condiciones de compatibilidad garantizan que, después de la deformación, el cuerpo (a) sigue siendo contínuo en el sentido de que en su interior no aparecerán grietas, huecos o vacíos (b) ni traslapos del material (c); por esta razón, la posición relativa de las partículas se debe conservar (d)

Interpretación

Sobre las ecuaciones de compatbilidad en términos de deformaciones (5.6) y (5.7)

No deben aparecer grietas (discontinuidades) en el campo de deformaciones.

Razones:

- u, v, w son:
  - Funciones contínuas y derivables.
  - Continuidad $C^3(\Omega)$
- Validas para materiales con cualquier tipo de comportamiento (elástico, plástico, anisótropo, lineal, no lineal, etc) siempre y cuando las deformaciones de este sean pequeñas-

Sobre las ecuaciones de compatbilidad en términos de deformaciones (5.6) y (5.7)

No deben aparecer grietas (discontinuidades) en el campo de deformaciones.

Razones:

- u, v, w son:
  - Funciones contínuas y derivables.
  - Continuidad $C^3(\Omega)$
- Validas para materiales con cualquier tipo de comportamiento (elástico, plástico, anisótropo, lineal, no lineal, etc) siempre y cuando las deformaciones de este sean pequeñas-

Interpretación

Sobre las ecuaciones de compatbilidad en términos de deformaciones (5.6) y (5.7)

No deben aparecer grietas (discontinuidades) en el campo de deformaciones.

Razones:

- u, v, w son:
  - Funciones contínuas y derivables.
  - Continuidad $C^3(\Omega)$
- Validas para materiales con cualquier tipo de comportamiento (elástico, plástico, anisótropo, lineal, no lineal, etc) siempre y cuando las deformaciones de este sean pequeñas-

Interpretación

Sobre las ecuaciones de compatbilidad en términos de deformaciones (5.6) y (5.7)

No deben aparecer grietas (discontinuidades) en el campo de deformaciones.

Razones:

- u, v, w son:
  - Funciones contínuas y derivables.
  - Continuidad $C^3(\Omega)$
- Validas para materiales con cualquier tipo de comportamiento (elástico, plástico, anisótropo, lineal, no lineal, etc) siempre y cuando las deformaciones de este sean pequeñas-

Interpretación

Sobre las ecuaciones de compatbilidad en términos de esfuerzos (5.13) (5.18) (5.17) y (5.19)

Sólo son válidas para materiales con comportamiento elástico, lineal, homogéneo e isótropo siempre y cuando las deformaciones sean pequeñas.

Razón:

- En su deducción se empleó la Ley de Hooke.

Interpretación

Sobre las ecuaciones de compatbilidad en términos de esfuerzos (5.13) (5.18) (5.17) y (5.19)

Sólo son válidas para materiales con comportamiento elástico, lineal, homogéneo e isótropo siempre y cuando las deformaciones sean pequeñas.

Razón:

- En su deducción se empleó la Ley de Hooke.

Interpretación

En general: los traslapos

- El hecho de que el sólido no se traslapará en sus deformaciones está implícitamente dicho por las ecuaciones de compatiblidad al imponer las relaciones entre las segundas derivadas de los desplazamientos u, v y w.
- El propósito principal de las ecuaciones de compatbilidad es imponer restricciones en las deformaciones, garantizando así que los desplazamientos u, v y w tengan un valor único.

Interpretación

En general: los traslapos

- El hecho de que el sólido no se traslapará en sus deformaciones está implícitamente dicho por las ecuaciones de compatiblidad al imponer las relaciones entre las segundas derivadas de los desplazamientos u, v y w.
- El propósito principal de las ecuaciones de compatbilidad es imponer restricciones en las deformaciones, garantizando así que los desplazamientos u, v y w tengan un valor único.

Interpretación

En general: los traslapos

- El hecho de que el sólido no se traslapará en sus deformaciones está implícitamente dicho por las ecuaciones de compatiblidad al imponer las relaciones entre las segundas derivadas de los desplazamientos u, v y w.
- El propósito principal de las ecuaciones de compatbilidad es imponer restricciones en las deformaciones, garantizando así que los desplazamientos u, v y w tengan un valor único.

Derrotero

5.2.7. Ejercicio

Ejemplo

Considere una condición de tensión plana, en la cual $\varepsilon_x(x, y) = a(x^2 + y^2)$ y $\gamma_{x,y}(x, y) = 2xy$, donde a es una constante. Encuentre la deformación longitudinal $\varepsilon_y(x, y)$ correspondiente que sea físicamente válida, asumiendo una condición en la cual las fuerzas másicas se consideran nulas y que el material es elástico, lineal, homogéneo e isótropo.

Apoyo de la solución:

- `<codigo>`

Derrotero

Referencias I

Ameen, M. (2005).
Computational Elasticity: Theory of Elasticity and Finite and Boundary Element Methods.
Alpha Science International.

Álvarez, D. A. (2022).
Teoría de la elasticidad.
Universidad Nacional de Colombia.

Enlaces de interés

- Link de YouTube a la lista de reproducción dle profesor Diego Andrés Álvarez: https://www.youtube.com/watch?v=B18zvnW840c&list=PLOq9elBrzPDGfTsu_6hOiZq47_PhC6QwR