



Mecánica de Sólidos

03. Estudio de los desplazamientos y las deformaciones en un punto

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Docente Ocasional
Ingeniero Civil
Esp. en Estructuras
Maestrando en Estructuras – Investigación

Derrotero

- 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido.
- 3.2. Componentes de la deformación en un punto.
- 3.3. Las galgas extensométricas
- 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- 3.5. Rotación*
- 3.6. Deformaciones principales

Respositorio del curso: github.com/michaelherediaperez/mecanica_de_solidos_un

Advertencia

Estas presentaciones son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, el estudiante no debe tomarlas como material de estudio y debe dirigirse a la literatura recomendada.



Deformaciones

Cambio de forma o tamaño de un sólido debido a los esfuerzos internos producidos por:

- Fuerzas másicas y superficiales
- Ocurrencia de dilatación térmica
- Desplazamientos impuestos

Asumimos:

- Las deformaciones que están ocurriendo dentro del sólido son muy pequeñas.

3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido

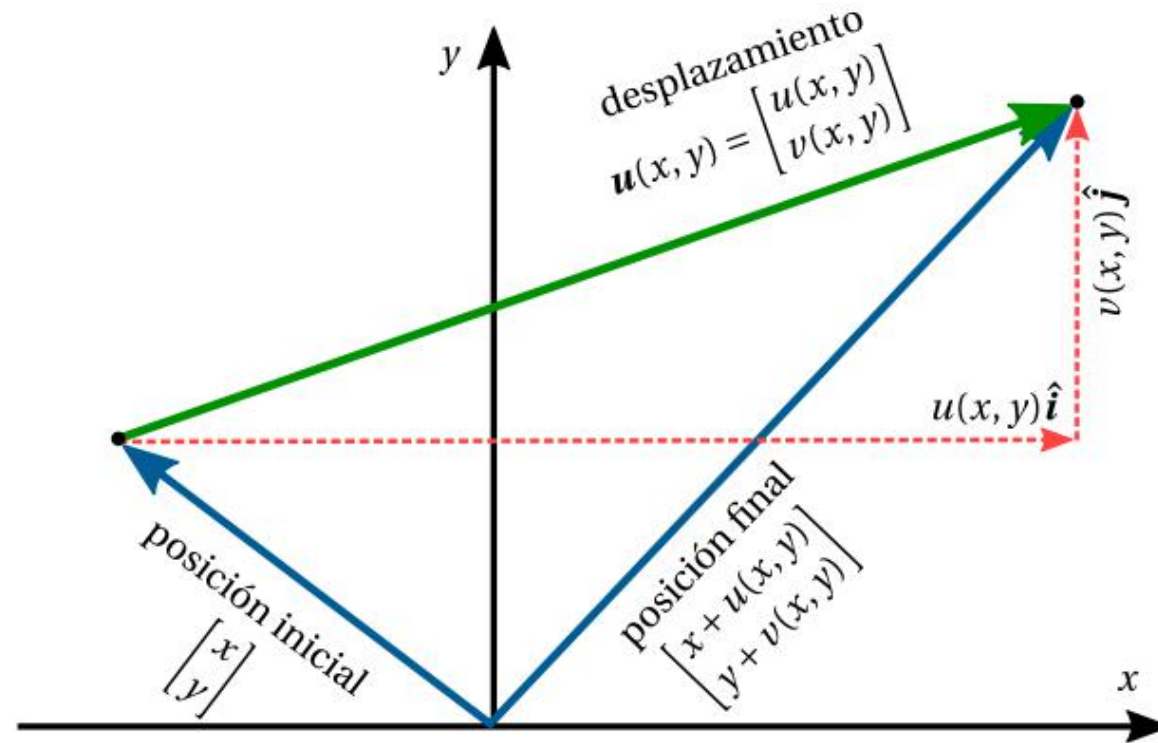
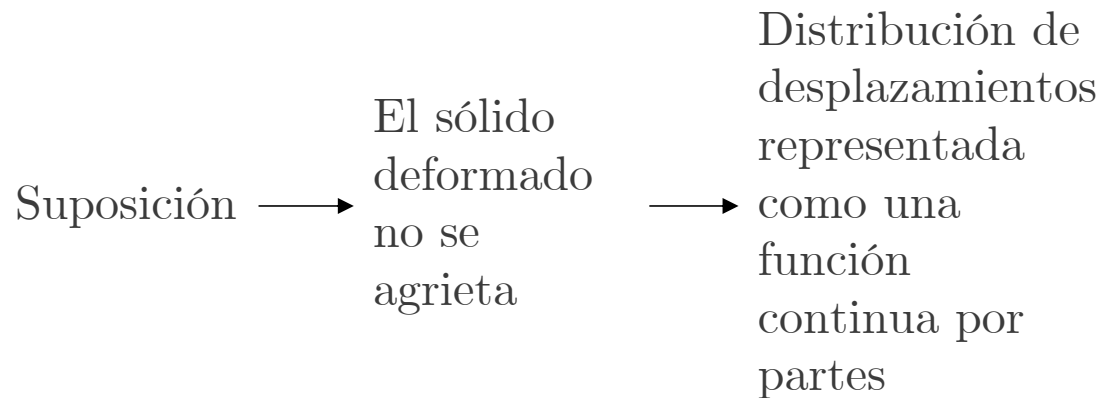
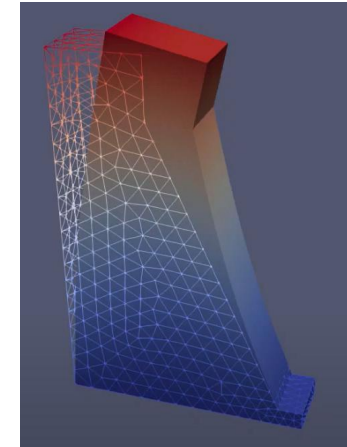


Figura 3.1: El desplazamiento representa el cambio de posición de una partícula cuya posición inicial es (x, y) ; observe que la posición final de la partícula se obtiene como la suma del vector posición inicial más el vector desplazamiento. De otro lado, el vector desplazamiento \mathbf{u} se puede descomponer en sus componentes u y v ; observe que los argumentos de estas funciones son la posición inicial del punto, esto es $u(x, y)$ y $v(x, y)$.

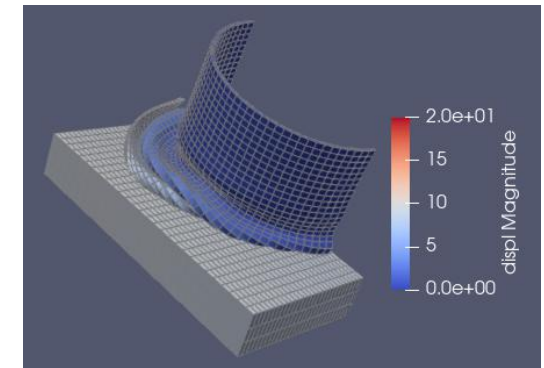
3.1. Campo vectorial de desplazamientos en un sólido



- Dominio (x, y, z)
- Dominio (x, y, z, t)



Muro de contención deformado



Lata aplastada por una placa (Paraview)

3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido

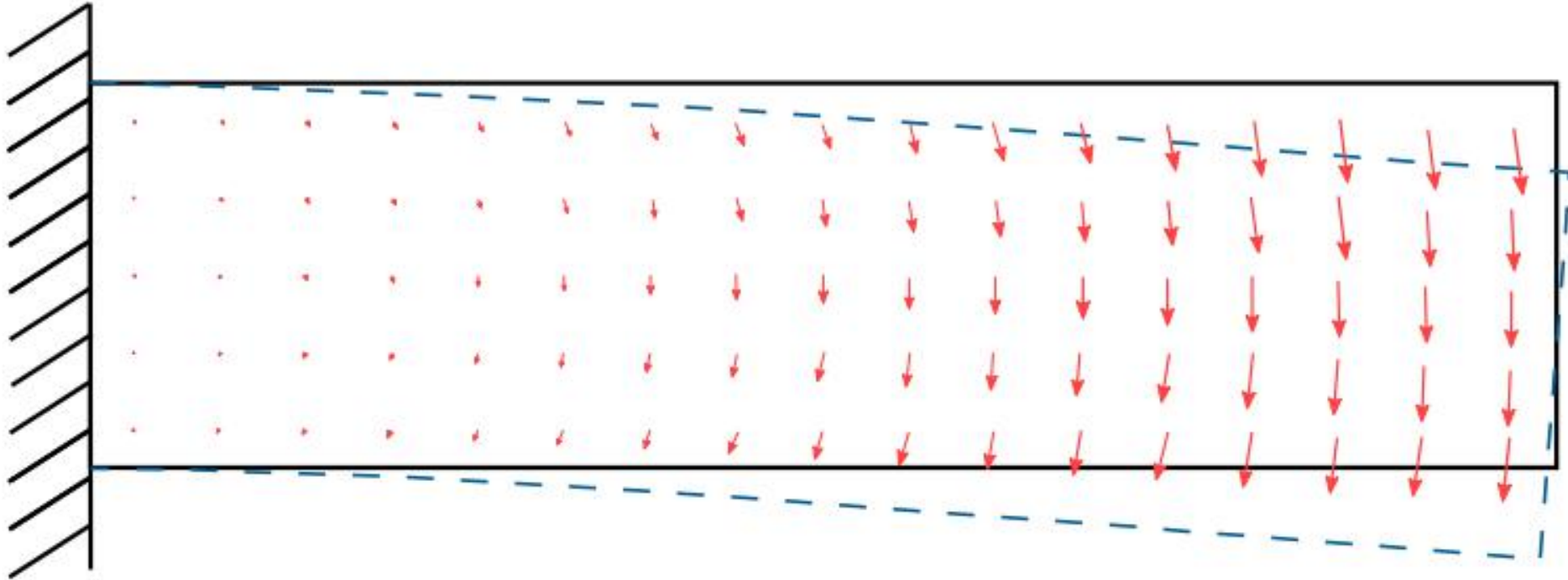


Figura 3.2: Posición inicial, posición deformada y campo vectorial de desplazamientos de una viga en voladizo que se deforma bajo la acción de su peso propio. Aquí cada flecha representa el vector de desplazamientos $\hat{\mathbf{u}} = [u(x, y), v(x, y)]^T$ donde (x, y) es un punto que pertenece al sólido.

3.2. Componentes de la deformación en un punto

3.2.1. Deformación lineal (o deformación longitudinal)

3.2.2. Deformación angular

3.2. Componentes de la deformación en un punto

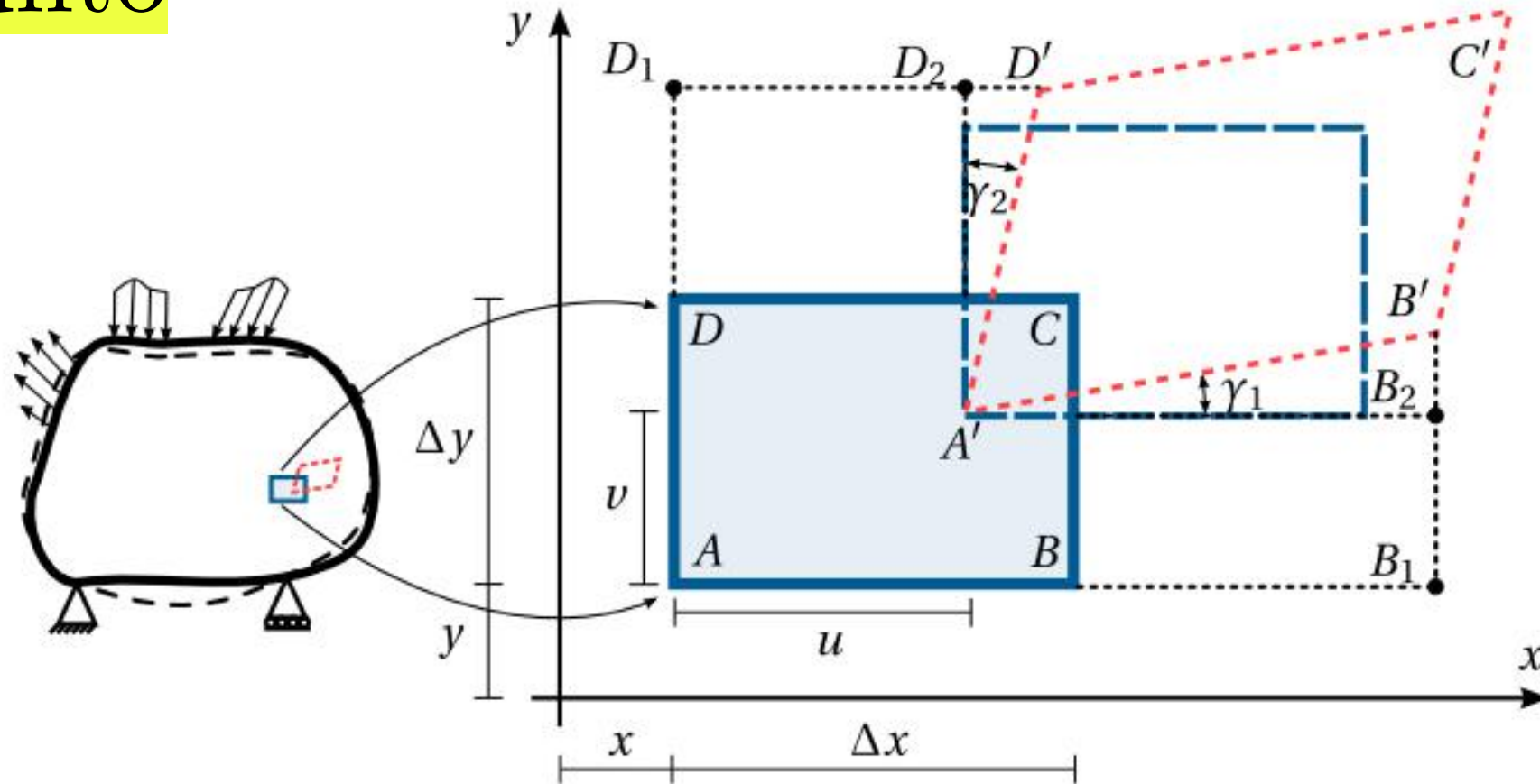


Figura 3.3: Componentes de deformación. Aquí el diferencial de sólido que ocupa la posición ABCD se deforma hasta alcanzar la posición A'B'C'D'. Aquí el rectángulo azul con líneas discontinuas denota el desplazamiento rígido del sólido.

Expansión en series de Taylor en varias variables

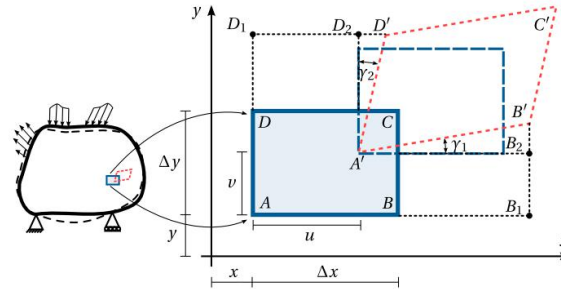
La serie de Taylor para funciones multivariadas alrededor del punto (a_i) , se define como:

$$f(x_1, \dots, x_d) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=0}^{\infty} \frac{(x_1 - a_1)^{n_1} \cdots (x_d - a_d)^{n_d}}{n_1! \cdots n_d!} \left(\frac{\partial^{n_1 + \cdots + n_d} f}{\partial x_1^{n_1} \cdots \partial x_d^{n_d}} \right) (a_1, \dots, a_d).$$

La expansión truncada en series de Taylor de segundo orden es:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx & f(x_0, y_0) + \Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} + \Delta y \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \\ & + \frac{1}{2!} \left[\Delta x^2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(x_0, y_0)} + 2\Delta x \Delta y \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(x_0, y_0)} + \Delta y^2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{(x_0, y_0)} \right] \end{aligned}$$

3.2. Componentes de la deformación en un punto



$$\begin{aligned} A &:= (x, y) \\ B &:= (x + \Delta x, y) \\ C &:= (x + \Delta x, y + \Delta y) \\ D &:= (x, y + \Delta y). \end{aligned}$$

Componentes **horizontales** del desplazamiento

$$\begin{aligned} u(A) &:= u(x, y) &= u(x, y) \\ u(B) &:= u(x + \Delta x, y) &\approx u(x, y) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x, y)} \\ u(C) &:= u(x + \Delta x, y + \Delta y) &\approx u(x, y) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x, y)} + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x, y)} \\ u(D) &:= u(x, y + \Delta y) &\approx u(x, y) + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x, y)} \end{aligned}$$

Componentes **verticales** del desplazamiento

$$\begin{aligned} v(A) &:= v(x, y) &= v(x, y) \\ v(B) &:= v(x + \Delta x, y) &\approx v(x, y) + \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x, y)} \\ v(C) &:= v(x + \Delta x, y + \Delta y) &\approx v(x, y) + \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x, y)} + \Delta y \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{(x, y)} \\ v(D) &:= v(x, y + \Delta y) &\approx v(x, y) + \Delta y \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{(x, y)}. \end{aligned}$$

Aproximación de ángulos pequeños

En el límite cuando el ángulo tiende a cero, mediante una aproximación de primer orden de las funciones trigonométricas truncando su correspondiente serie de Taylor:

$$\sin x \approx x$$

$$\cos x \approx 1$$

$$\tan x \approx x$$

Si se utiliza una una aproximación de segundo orden:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

Aproximación de ángulos pequeños

Tabla A.1: Valor de las funciones trigonométricas para diferentes ángulos.

| θ (grados) | θ (radianes) | $\sin(\theta)$ (error) | $\cos(\theta)$ (error) | $\tan(\theta)$ (error) |
|----------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 0 | 0 | 0 (0%) | 1 (0%) | 0 (0%) |
| 1 | 0.0175 | 0.0175 (0.0051%) | 0.9998 (0.0152%) | 0.0175 (0.0102%) |
| 2 | 0.0349 | 0.0349 (0.0203%) | 0.9994 (0.0610%) | 0.0349 (0.0406%) |
| 3 | 0.0524 | 0.0523 (0.0457%) | 0.9986 (0.1372%) | 0.0524 (0.0914%) |
| 4 | 0.0698 | 0.0698 (0.0813%) | 0.9976 (0.2442%) | 0.0699 (0.1625%) |
| 5 | 0.0873 | 0.0872 (0.1270%) | 0.9962 (0.3820%) | 0.0875 (0.2540%) |
| 6 | 0.1047 | 0.1045 (0.1830%) | 0.9945 (0.5508%) | 0.1051 (0.3658%) |
| 7 | 0.1222 | 0.1219 (0.2492%) | 0.9925 (0.7510%) | 0.1228 (0.4980%) |
| 8 | 0.1396 | 0.1392 (0.3257%) | 0.9903 (0.9828%) | 0.1405 (0.6507%) |
| 9 | 0.1571 | 0.1564 (0.4124%) | 0.9877 (1.2465%) | 0.1584 (0.8238%) |
| 10 | 0.1745 | 0.1736 (0.5095%) | 0.9848 (1.5427%) | 0.1763 (1.0175%) |

$\sin x \approx x$
 $\cos x \approx 1$
 $\tan x \approx x$

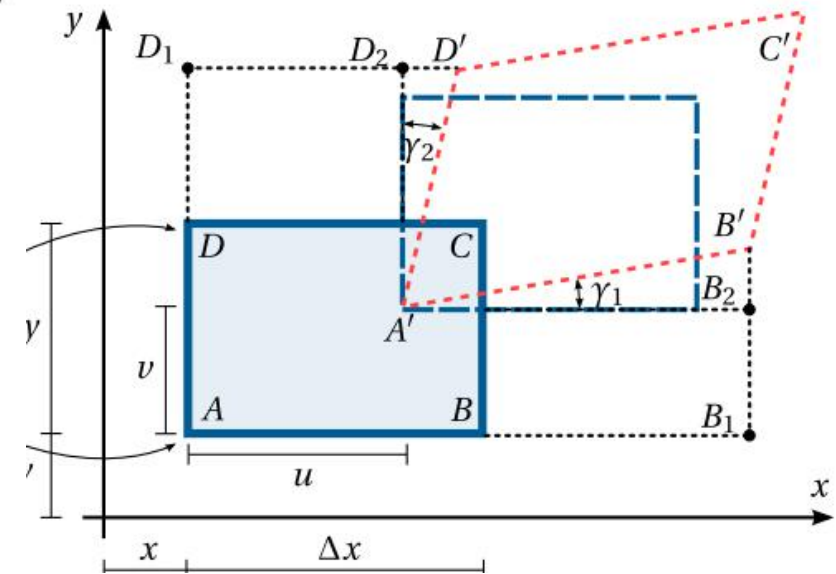
3.2. Componentes de la deformación en un punto

$$A'B_2 = \text{Coord}_X(B') - \text{Coord}_X(A') = \Delta x + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x,y)} \Delta x$$

$$A'D_2 = \text{Coord}_Y(D') - \text{Coord}_Y(A') = \Delta y + \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{(x,y)} \Delta y$$

$$B_2B' = \text{Coord}_Y(B') - \text{Coord}_Y(A') = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{(x,y)} \Delta x$$

$$D_2D' = \text{Coord}_X(D') - \text{Coord}_X(A') = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(x,y)} \Delta y$$



3.2. Componentes de la deformación en un punto (conclusión)

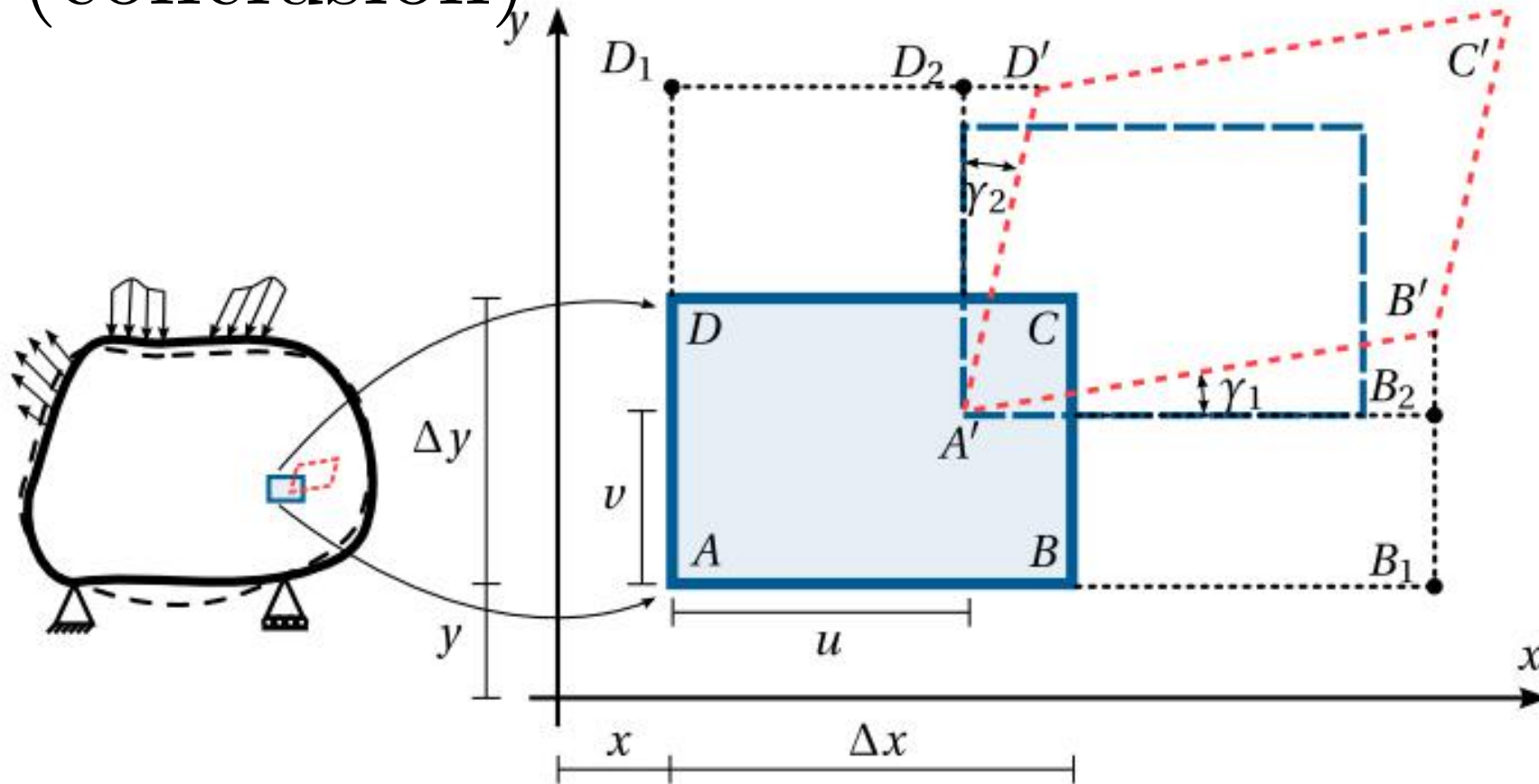


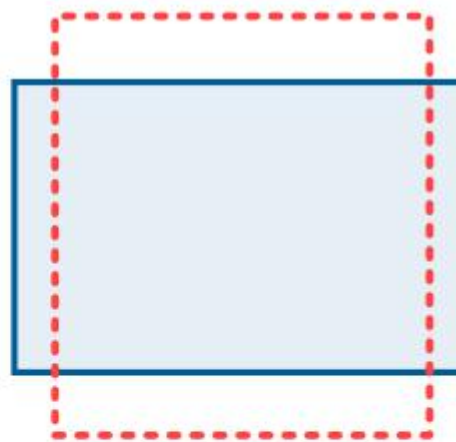
Figura 3.3: Componentes de deformación. Aquí el diferencial de sólido que ocupa la posición $ABCD$ se deforma hasta alcanzar la posición $A'B'C'D'$. Aquí el rectángulo azul con líneas discontinuas denota el desplazamiento rígido del sólido.

3.2.1. Deformación lineal (o deformación longitudinal)

Deformación unitaria o axial: (ϵ) medida de cuánto se estira o contrae el sólido en un punto y en una dirección en particular.



$\epsilon_x > 0$ (estiramiento en dirección x)
 $\epsilon_y < 0$ (contracción en dirección y)



$\epsilon_x < 0$ (contracción en dirección x)
 $\epsilon_y > 0$ (estiramiento en dirección y)

$$\epsilon_x(x, y, z) := \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x}$$

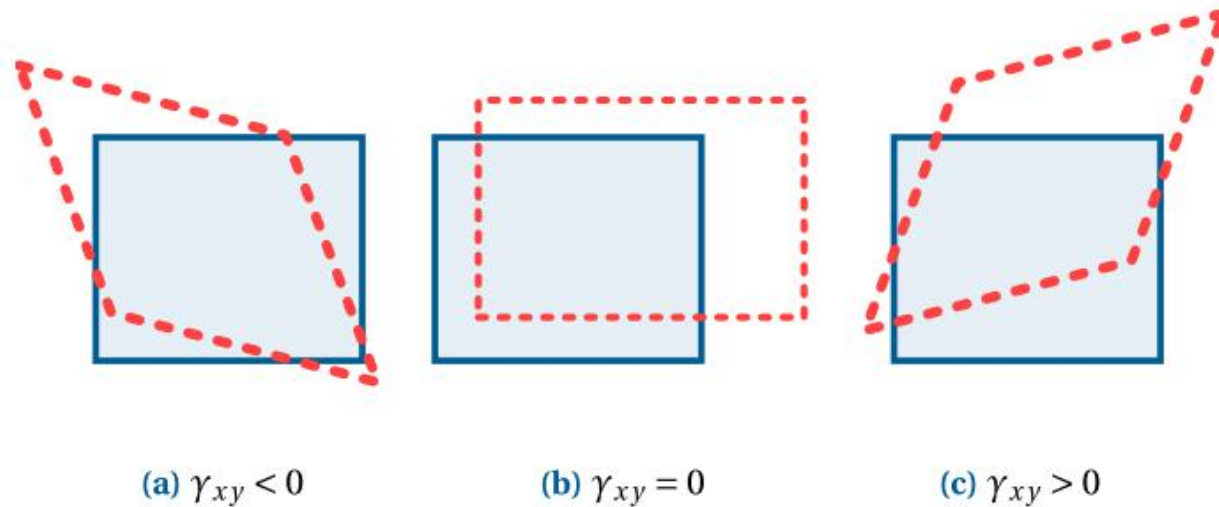
$$\epsilon_y(x, y, z) := \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y}$$

$$\epsilon_z(x, y, z) := \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z}$$

Figura 3.4: Distintas configuraciones de las deformaciones longitudinales en un elemento rectangular. Aquí la línea sólida muestra la forma antes de la deformación; la línea punteada muestra la forma deformada.

3.2.2. Deformación angular

(γ_{ij}) medida de cuánto aumenta o disminuye el ángulo entre dos caras del sólido (i,j) que originalmente eran ortogonales.



$$\begin{aligned}\gamma_{xy}(x, y, z) &:= \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} \\ \gamma_{xz}(x, y, z) &:= \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x} \\ \gamma_{yz}(x, y, z) &:= \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y}\end{aligned}$$

Figura 3.5: Elemento con deformación angular negativa (a), cero (b) y positiva (c). Note que cuando la deformación angular es cero, el ángulo del elemento diferencial no varía a pesar de que este se estira en las direcciones x y y . Aquí la línea sólida muestra la forma antes de la deformación; la línea punteada muestra la forma deformada.

3.2.2. Deformación angular

Tensor (o matriz) de deformaciones infinitesimales de Cauchy: $\underline{\underline{\epsilon}}$

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix}}_{\text{deformaciones matemáticas}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix}}_{\text{deformaciones ingenieriles}}.$$

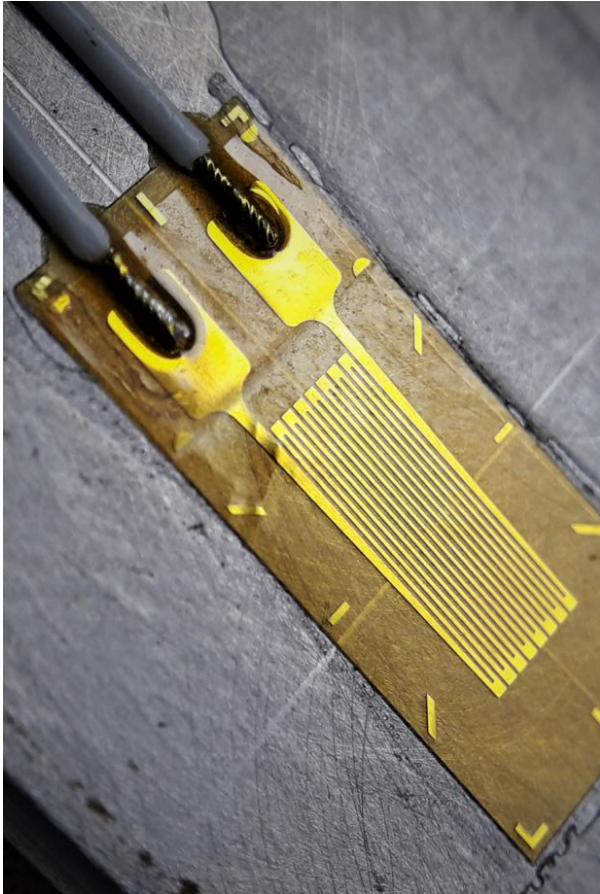
$$\epsilon_{xy}(x, y) := \frac{\gamma_{xy}(x, y)}{2} = \frac{\angle BAC \text{ [rad]} - \angle B'A'D' \text{ [rad]}}{2} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}.$$

Deformaciones angulares
matemáticas

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}(x, y, z) &:= \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} \\ \gamma_{xz}(x, y, z) &:= \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x} \\ \gamma_{yz}(x, y, z) &:= \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y} \end{aligned}$$

Deformaciones angulares **ingenieriles**

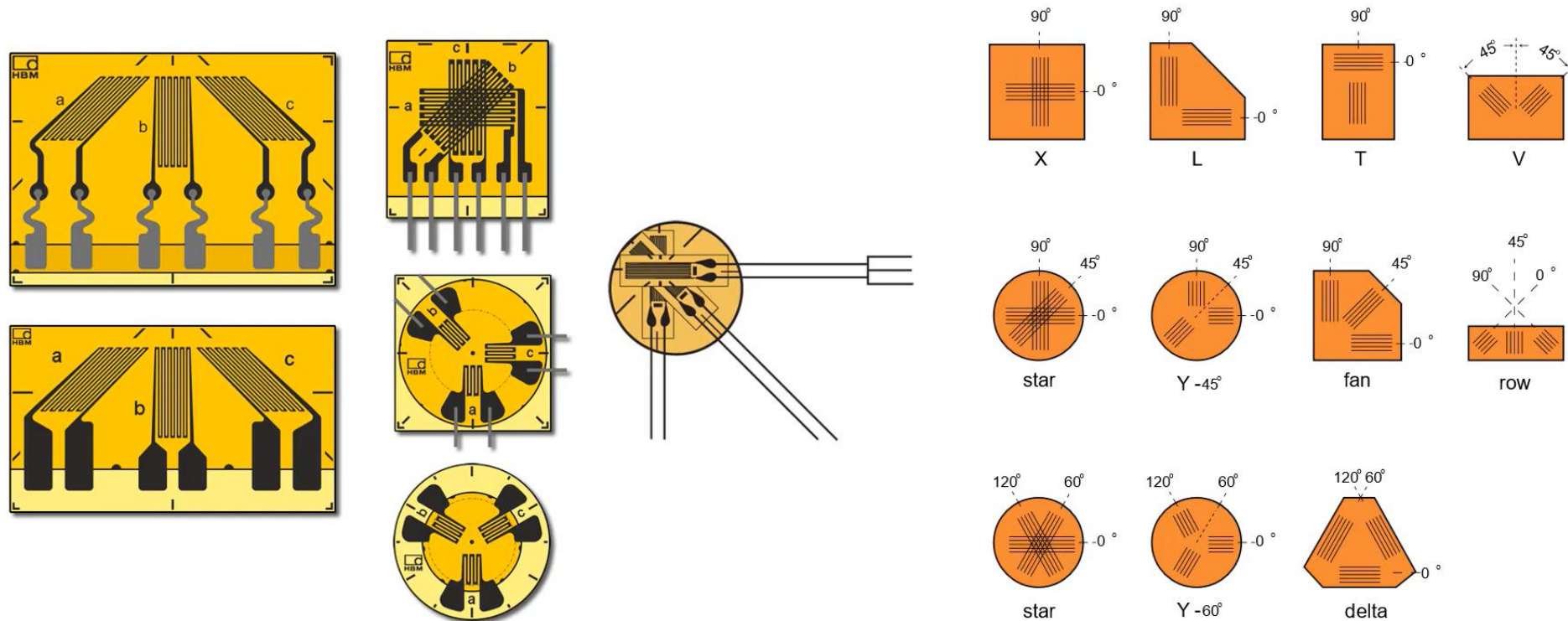
3.3. Las galgas extensométricas



- Elementos que miden la deformación en un punto y a partir de una relación esfuerzo-deformación del material, se pueda conocer de forma indirecta los esfuerzos en esos puntos.
- No es posible medir directamente los esfuerzos al interior de una estructura y solo se pueden inferir estos a través de la medición de deformaciones.
- (Complementar el tema de forma autónoma)

3.3. Las galgas extensométricas

Como estas solo pueden medir deformaciones longitudinales, se agrupan en configuraciones llamadas rosetas de deformación para medir las deformaciones en todas las direcciones posibles.



3.3. Las galgas extensométricas

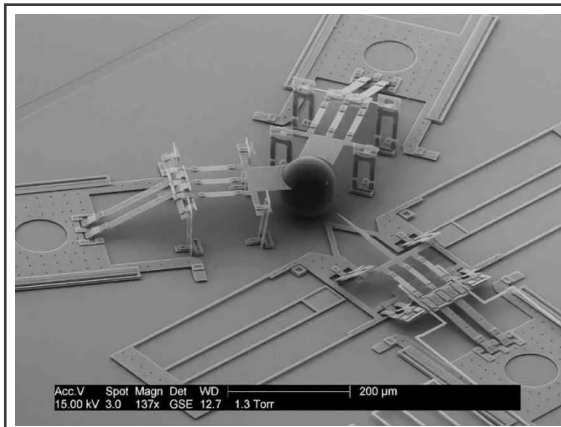


**What is a
Strain Gage?**

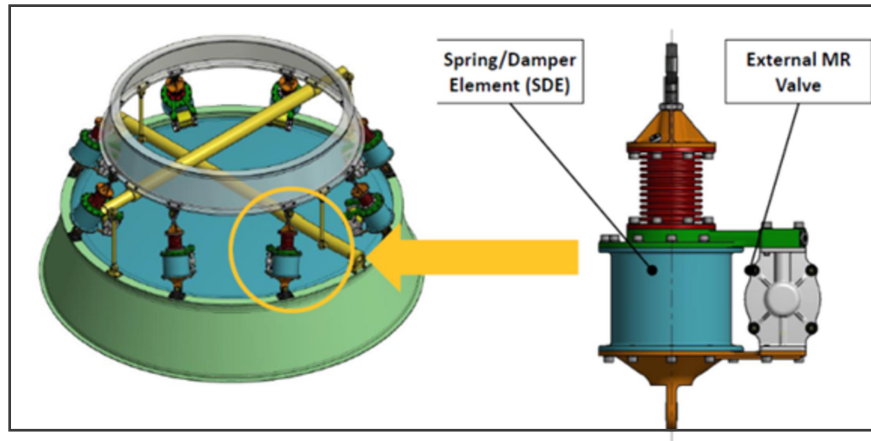
[Strain Gauge 101 - Learn the basics of how they're used - YouTube](#)

¿... y esto?

Muchos dispositivos electrónicos, tan colosales como los Sistemas Activos de Disipación Sísmica, medianos como los acelerógrafos, o tan minúsculos como los MEMS (*Micro Electro-Mechanical Systems*), son activados por desplazamientos y deformaciones.



[MEMS, así funcionan los sistemas microelectromecánicos en el hardware \(hardzone.es\)](#)



[ESA - Semi active damping system](#)



[Introducing Tuned Mass Dampers | January 2017 | Highlighting Japan \(gov-online.go.jp\)](#)

¿Fuerzas, esfuerzos, desplazamientos, deformaciones?

Puede pensarse que las fuerzas y los desplazamientos van primero que los esfuerzos y las deformaciones.

Usualmente, en los laboratorios de estructuras se simulan las cargas con desplazamientos inducidos para hallar esfuerzos, y en los laboratorios de suelos se aplican fuerzas para hallar esfuerzos.

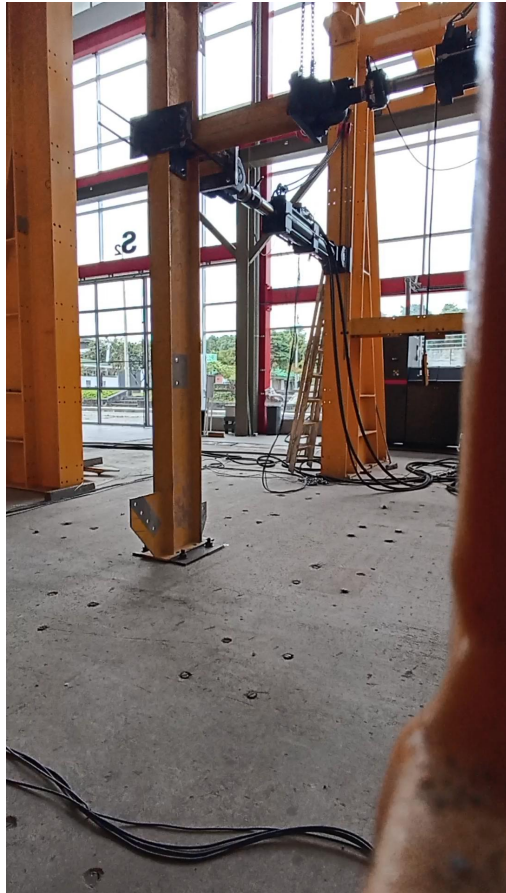
Por ejemplo, el laboratorio de Ingeniería Estructural y Sísmica de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales, induce desplazamientos mediante actuadores en su Mesa Vibradora y en su Sistema Híbrido de Simulación Sísmica.

Mesa vibradora

Laboratorio de Ingeniería Estructural y Sísmica de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales.



Sistema híbrido de simulación sísmica



Laboratorio
de Ingeniería
Estructural
y Sísmica de
la
Universidad
Nacional de
Colombia
sede
Manizales.

3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones

3.4.1. Ejemplo

3.4.2. Ejemplo: cambio de base

3.4.3. Ejemplo: más de tres galgas extensométricas

3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones

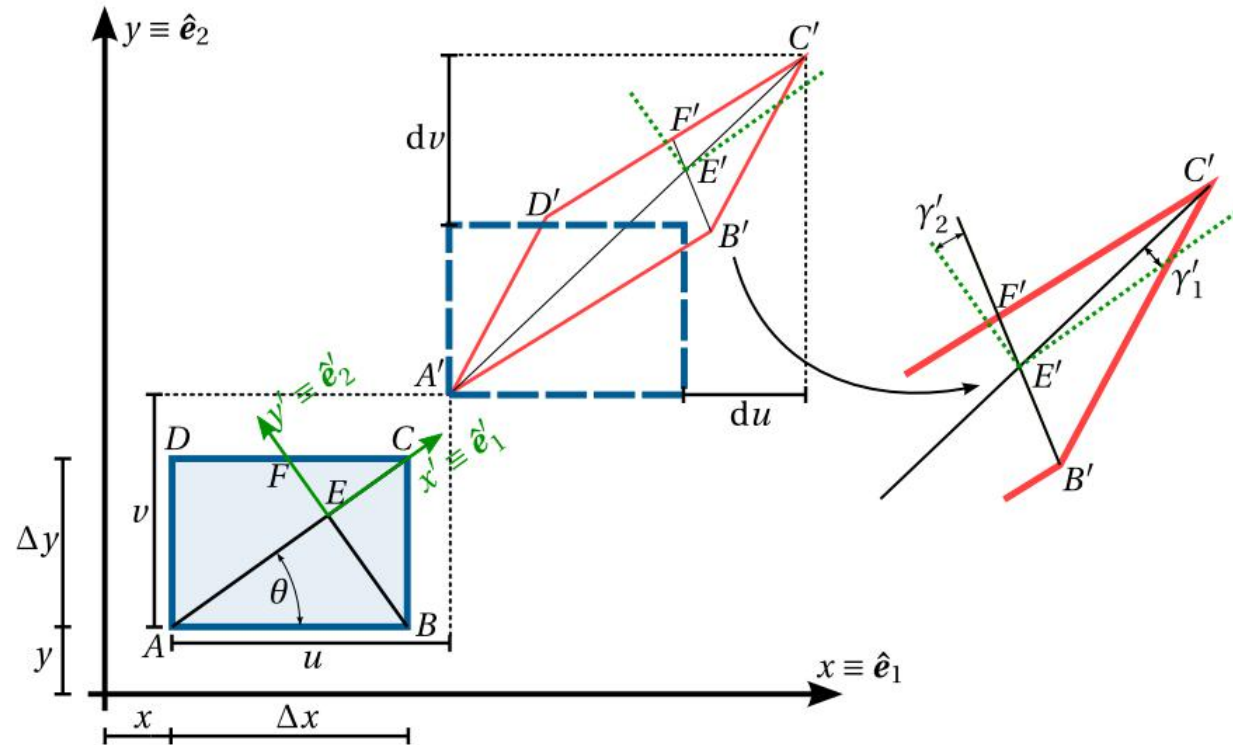


Figura 3.7: Componentes de deformación. Aquí los ejes de coordenadas x, y, x' y y' siguen, respectivamente, la dirección y sentido de los vectores $\hat{i} \equiv \hat{e}_1$ y $\hat{j} \equiv \hat{e}_2$. De otro lado, el rectángulo azul con líneas discontinuas denota el desplazamiento rígido del sólido.

Complementar con los siguientes videos:

1.
<https://www.youtube.com/watch?v=2Ve9bJGPJco&list=PLOq9elBrzPDGpdpXJ1RTi67exW7AQ7m3K&index=5>

2.
<https://www.youtube.com/watch?v=JEJusMgpCpc&list=PLOq9elBrzPDGpdpXJ1RTi67exW7AQ7m3K&index=6>

Y este código:

https://github.com/michaelherediaperez/mecanica_de_solidos_un/blob/main/codigos/cap_03/03_04_exp_otras_direcciones.ipynb

3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones

(Solecki y Connant, 2003)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x'}(\theta) &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta \\ \varepsilon_{y'}(\theta) &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta - \varepsilon_{xy} \sin 2\theta \\ \frac{\gamma_{x'y'}(\theta)}{2} &= \varepsilon_{x'y'}(\theta) = \varepsilon_{xy} \cos 2\theta - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\theta,\end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{x'} & \varepsilon_{x'y'} & \varepsilon_{x'z'} \\ \varepsilon_{x'y'} & \varepsilon_{y'} & \varepsilon_{y'z'} \\ \varepsilon_{x'z'} & \varepsilon_{y'z'} & \varepsilon_{z'} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\varepsilon'}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}}$$

3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones

$$\underline{\varepsilon}' = \underline{\underline{T}}_? \underline{\varepsilon} \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ En términos de deformaciones matemáticas} \\ \bullet \text{ En términos de deformaciones ingenieriles} \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{c} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{z'} \\ \varepsilon_{y'z'} \\ \varepsilon_{x'z'} \\ \varepsilon_{x'y'} \end{array} \right) = \underbrace{\left(\begin{array}{cccccc} \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & 2\gamma_1 \beta_1 & 2\gamma_1 \alpha_1 & 2\alpha_1 \beta_1 \\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & 2\gamma_2 \beta_2 & 2\gamma_2 \alpha_2 & 2\alpha_2 \beta_2 \\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & 2\gamma_3 \beta_3 & 2\gamma_3 \alpha_3 & 2\alpha_3 \beta_3 \\ \alpha_2 \alpha_3 & \beta_2 \beta_3 & \gamma_2 \gamma_3 & \gamma_2 \beta_3 + \beta_2 \gamma_3 & \gamma_2 \alpha_3 + \alpha_2 \gamma_3 & \alpha_2 \beta_3 + \beta_2 \alpha_3 \\ \alpha_1 \alpha_3 & \beta_1 \beta_3 & \gamma_1 \gamma_3 & \gamma_1 \beta_3 + \beta_1 \gamma_3 & \gamma_1 \alpha_3 + \alpha_1 \gamma_3 & \alpha_1 \beta_3 + \beta_1 \alpha_3 \\ \alpha_1 \alpha_2 & \beta_1 \beta_2 & \gamma_1 \gamma_2 & \gamma_1 \beta_2 + \beta_1 \gamma_2 & \gamma_1 \alpha_2 + \alpha_1 \gamma_2 & \alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 \end{array} \right)}_{=T_\sigma \text{ (ver ecuación (2.23))}} \left(\begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow T_\sigma^{-1} = T_\varepsilon^\top$$

$$\left(\begin{array}{c} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{z'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{x'y'} \end{array} \right) = \underbrace{\left(\begin{array}{cccccc} \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & \gamma_1 \beta_1 & \gamma_1 \alpha_1 & \alpha_1 \beta_1 \\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & \gamma_2 \beta_2 & \gamma_2 \alpha_2 & \alpha_2 \beta_2 \\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & \gamma_3 \beta_3 & \gamma_3 \alpha_3 & \alpha_3 \beta_3 \\ 2\alpha_2 \alpha_3 & 2\beta_2 \beta_3 & 2\gamma_2 \gamma_3 & \gamma_2 \beta_3 + \beta_2 \gamma_3 & \gamma_2 \alpha_3 + \alpha_2 \gamma_3 & \alpha_2 \beta_3 + \beta_2 \alpha_3 \\ 2\alpha_1 \alpha_3 & 2\beta_1 \beta_3 & 2\gamma_1 \gamma_3 & \gamma_1 \beta_3 + \beta_1 \gamma_3 & \gamma_1 \alpha_3 + \alpha_1 \gamma_3 & \alpha_1 \beta_3 + \beta_1 \alpha_3 \\ 2\alpha_1 \alpha_2 & 2\beta_1 \beta_2 & 2\gamma_1 \gamma_2 & \gamma_1 \beta_2 + \beta_1 \gamma_2 & \gamma_1 \alpha_2 + \alpha_1 \gamma_2 & \alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 \end{array} \right)}_{T_\varepsilon} \left(\begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right)$$

3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones

- Deformación en función de los vectores normales al plano:

$$\varepsilon_{\hat{n}}(\alpha, \beta, \gamma) = \hat{n}^T \underline{\underline{\varepsilon}} \hat{n} = \varepsilon_x \alpha^2 + \varepsilon_y \beta^2 + \varepsilon_z \gamma^2 + 2\varepsilon_{xy} \alpha \beta + 2\varepsilon_{yz} \beta \gamma + 2\varepsilon_{xz} \alpha \gamma \longrightarrow \text{La deformación longitudinal en una dirección del vector normal } \hat{n}$$

$$\varepsilon_{\hat{m}\hat{n}} = \hat{m}^T \underline{\underline{\varepsilon}} \hat{n}, \longrightarrow \text{La deformación angular matemática sobre un plano generado por los vectores mutuamente ortogonales } \hat{m} \text{ y } \hat{n}$$

- Relación entre las deformaciones calculadas en sistemas de ejes coordenados diferentes:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = T \underline{\underline{\varepsilon'}} T^T.$$

3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones

- Formulación en dos dimensiones:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_{x'} & \varepsilon_{x'y'} & \varepsilon_{x'z'} \\ \varepsilon_{x'y'} & \varepsilon_{y'} & \varepsilon_{y'z'} \\ \varepsilon_{x'z'} & \varepsilon_{y'z'} & \varepsilon_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[mecanica_de_solidos_un/03_04.ipynb at main · michaelherediaperez/mecanica_de_solidos_un \(github.com\)](#)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'} &= \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + 2\varepsilon_{xy} \sin\theta \cos\theta \\ \varepsilon_{y'} &= \varepsilon_x \sin^2\theta + \varepsilon_y \cos^2\theta - 2\varepsilon_{xy} \sin\theta \cos\theta \\ \varepsilon_{x'y'} &= \varepsilon_y \sin\theta \cos\theta - \varepsilon_x \sin\theta \cos\theta + \varepsilon_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ \varepsilon_{x'z'} &= \varepsilon_{y'z'} = \varepsilon_{z'} = 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \sin\theta \cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sin\theta \cos\theta \\ -2\sin\theta \cos\theta & 2\sin\theta \cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}_{\varepsilon,2D}} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

3.4.1. Ejemplo

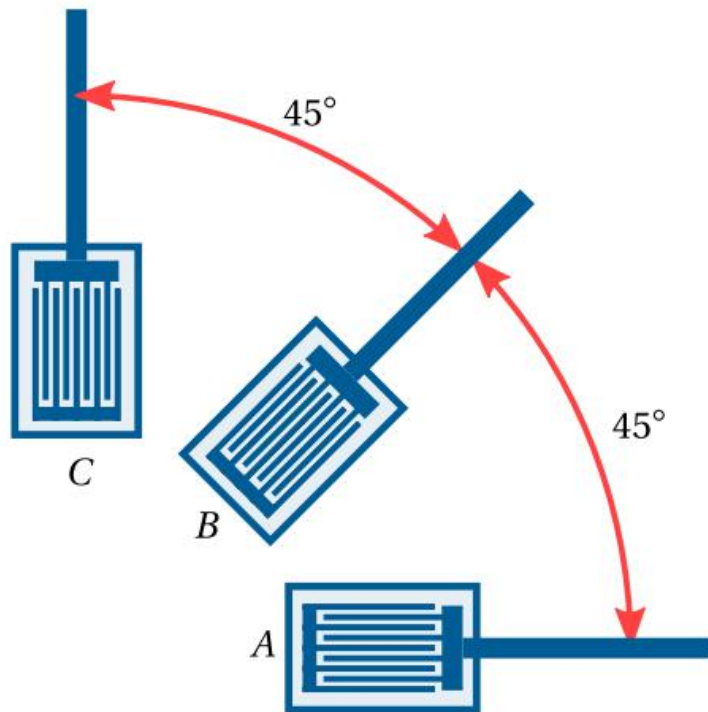


Figura 3.6: Roseta de deformación.

Reemplazando
en las ecuaciones
(3.16a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_A = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 0^\circ + \epsilon_{xy} \sin 0^\circ \\ \epsilon_B = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 90^\circ + \epsilon_{xy} \sin 90^\circ \\ \epsilon_C = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 180^\circ + \epsilon_{xy} \sin 180^\circ \end{array} \right.$$

$$\epsilon_A = \epsilon_x$$

$$\epsilon_B = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \epsilon_{xy}$$

$$\epsilon_C = \epsilon_y;$$

$$\begin{array}{l} \epsilon_x = \epsilon_A \\ \epsilon_y = \epsilon_C \\ \epsilon_{xy} = \epsilon_B - \frac{\epsilon_A + \epsilon_C}{2} \end{array}$$

3.4.2. Ejemplo: cambio de base

[mecanica_de_solidos_un/03_04_02_ejemplo.ipynb at main · michaelherediaperez/mecanica_de_solidos_un \(github.com\)](#)

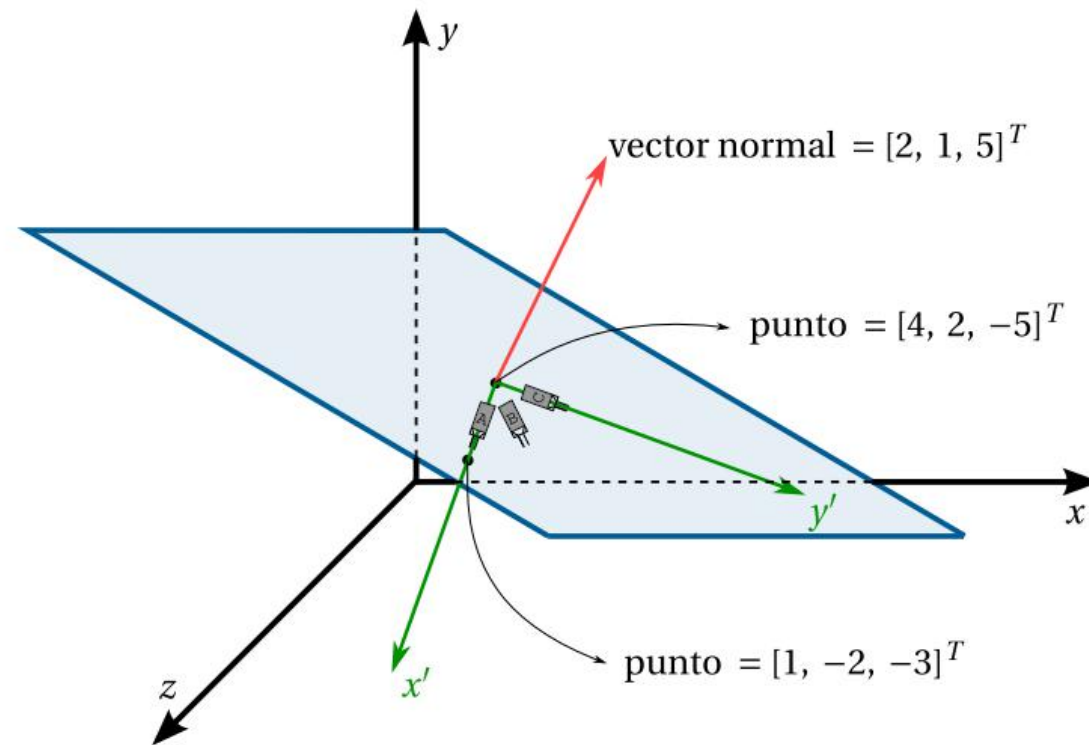


Figura 3.8: Configuración espacial de las galgas analizadas en el problema de la Sección 3.4.2. Recordemos que los ejes x' , y' y z' son mutuamente ortogonales.

3.4.3. Ejemplo: más de tres galgas extensométricas

[mecanica_de_solidos_un/03_04_03_ejemplo.ipynb at main · michaelherediaperez/mecanica_de_solidos_un \(github.com\)](#)

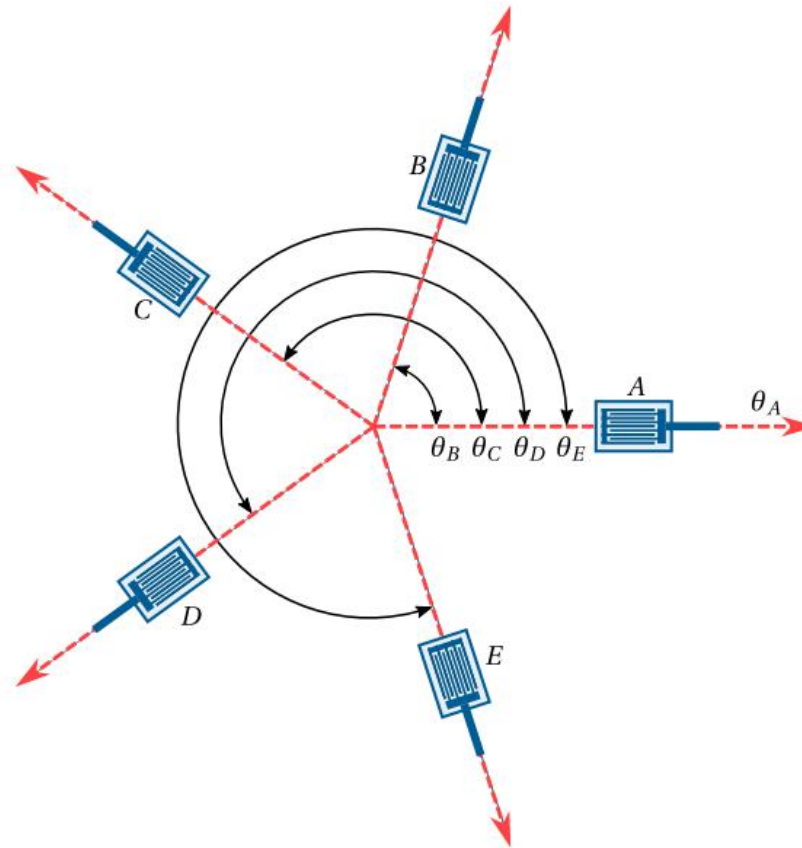


Figura 3.9: Configuración de la roseta de deformación analizada en el ejercicio de la Sección 3.4.3.

3.5. Rotación

(Esta sección será de estudio autónomo)

Prestar atención a:

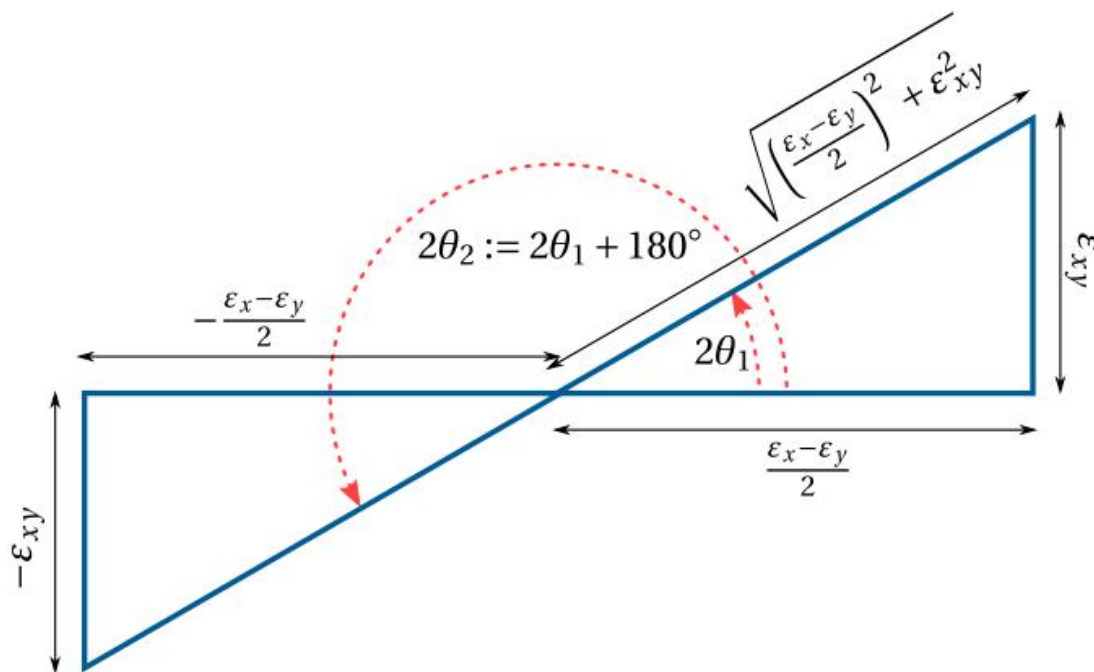
- El gradiente y el rotacional del campo vectorial de desplazamientos.
- La matriz H como operación de una matriz simétrica y antisimétrica.
- El concepto de rotación rígida.
- Proceso de deformación de un sólido.

3.6. Deformaciones principales

3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones

3.4.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones



$$\sin 2\theta_1 = \frac{\varepsilon_{xy}}{R}$$

$$\cos 2\theta_1 = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2R}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2}$$

$$\sin 2\theta_2 = -\frac{\varepsilon_{xy}}{R}$$

$$\cos 2\theta_2 = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2R}$$

$$\frac{d\varepsilon_{x'}}{d\theta} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\theta + 2\varepsilon_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{+\varepsilon_{xy}}{+\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}}$$

$$\tan 2\theta_2 = \frac{-\varepsilon_{xy}}{-\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}};$$

Figura 3.13: Cálculo de $\sin 2\theta_1$, $\cos 2\theta_1$, $\sin 2\theta_2$ y $\cos 2\theta_2$. Estas relaciones trigonométricas se obtuvieron teniendo en cuenta que $\tan 2\theta_1$ y $\tan 2\theta_2$ están dadas por la ecuación (3.34).

Verificamos que en la dirección de las inclinaciones principales, la deformación angular del elemento es cero

3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones

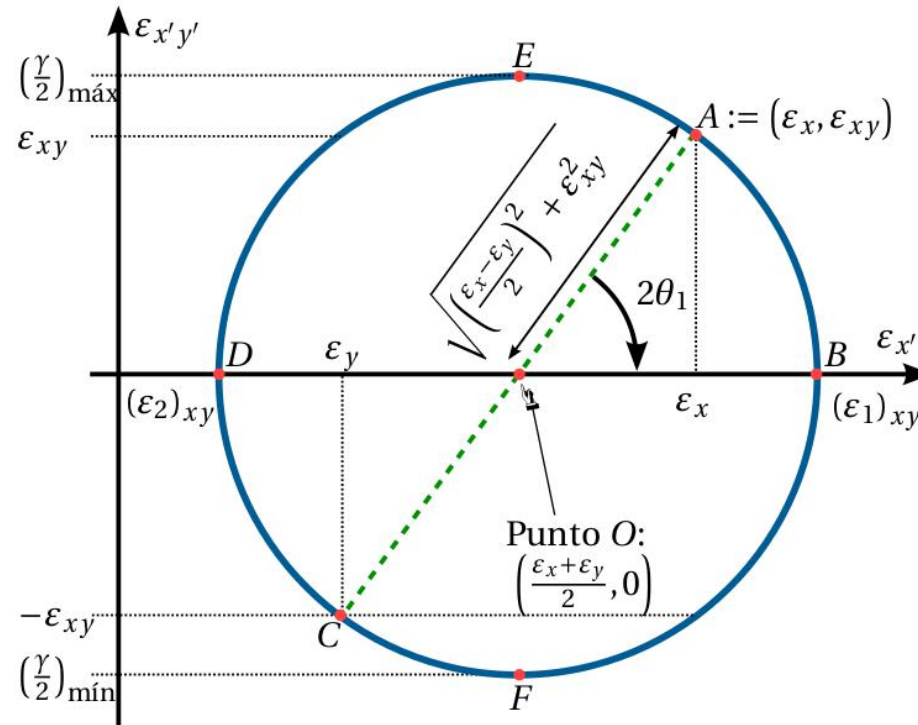


Figura 3.14: Círculo de Mohr en dos dimensiones para el estado de deformación plana. El círculo de Mohr es el conjunto de todos los puntos $(\varepsilon_{x'}(\theta), \varepsilon_{x'y'}(\theta))$ que aparecen al variar el parámetro θ en el intervalo $[0, 180^\circ)$. Aquí $\varepsilon_{x'}(\theta)$ y $\varepsilon_{x'y'}(\theta)$ están descritos, respectivamente, por las ecuaciones (3.16a) y (3.16c). El centro de esta circunferencia es $\left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}, 0\right)$ y su radio es $\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2}$. El ángulo $\angle AOB$ se utiliza para determinar la inclinación θ_1 del plano principal donde se produce la deformación longitudinal máxima.

3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

$$\varepsilon_{\hat{n}}(\alpha, \beta, \gamma) = \varepsilon_x \alpha^2 + \varepsilon_y \beta^2 + \varepsilon_z \gamma^2 + 2\varepsilon_{xy} \alpha \beta + 2\varepsilon_{yz} \beta \gamma + 2\varepsilon_{xz} \alpha \gamma.$$

$$\rightarrow L(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon_n) = \varepsilon_x \alpha^2 + \varepsilon_y \beta^2 + \varepsilon_z \gamma^2 + 2\varepsilon_{xy} \alpha \beta + 2\varepsilon_{yz} \beta \gamma + 2\varepsilon_{xz} \alpha \gamma + \varepsilon_n (1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)$$

$$\frac{\partial L(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon_n)}{\partial \alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_x \alpha + \varepsilon_{xy} \beta + \varepsilon_{xz} \gamma = \varepsilon_n \alpha$$

$$\frac{\partial L(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon_n)}{\partial \beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{xy} \alpha + \varepsilon_y \beta + \varepsilon_{yz} \gamma = \varepsilon_n \beta$$

$$\frac{\partial L(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon_n)}{\partial \gamma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{xz} \alpha + \varepsilon_{yz} \beta + \varepsilon_z \gamma = \varepsilon_n \gamma$$

$$\frac{\partial L(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon_n)}{\partial \varepsilon_n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1;$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \varepsilon_n \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \hat{\boldsymbol{n}} = \varepsilon_n \hat{\boldsymbol{n}}.$$

3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

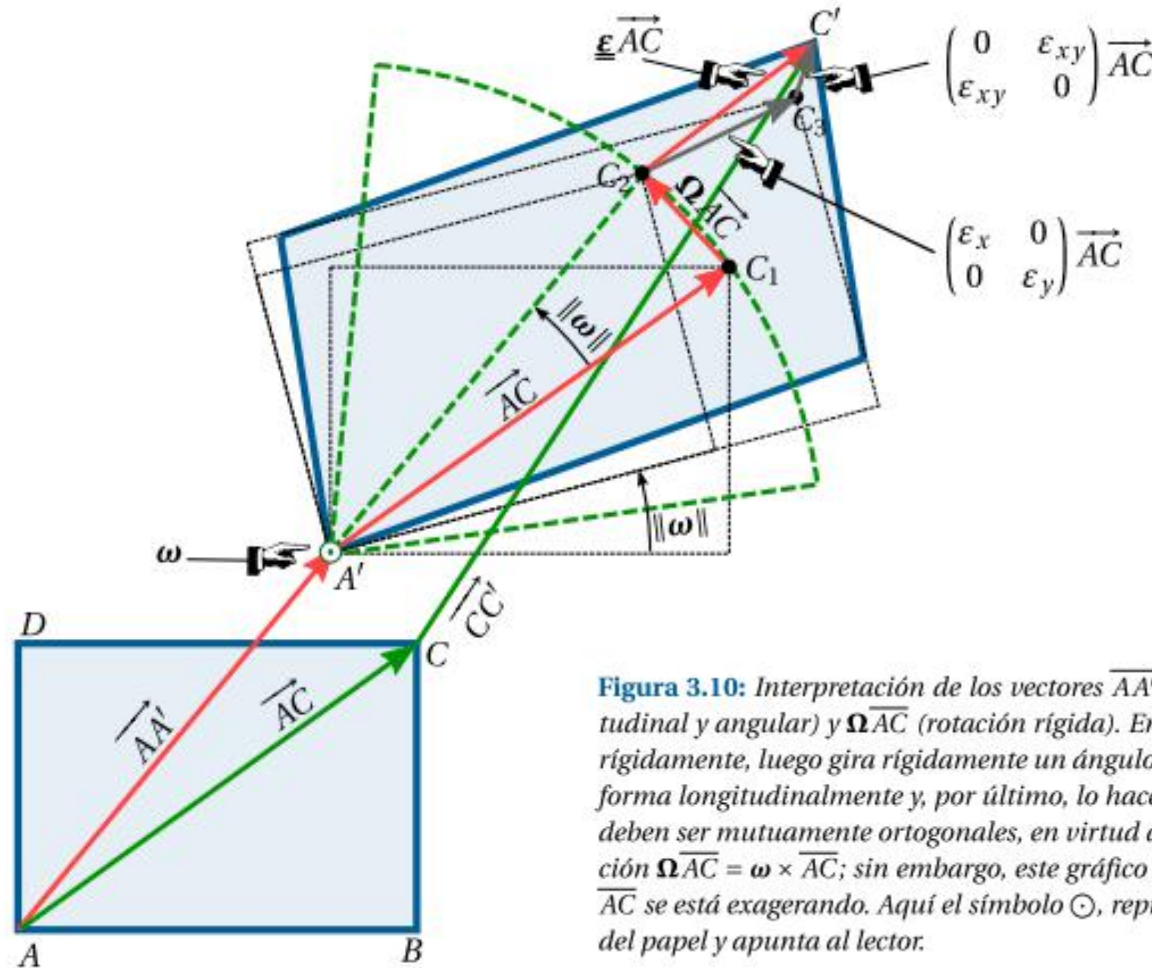


Figura 3.10: Interpretación de los vectores $\overline{AA'}$ (traslación rígida), $\underline{\underline{\epsilon AC}}$ (deformación longitudinal y angular) y $\overline{\Omega AC}$ (rotación rígida). En la figura, el sólido ABCD primero se traslada rígidamente, luego gira rígidamente un ángulo $\theta = \|\omega\|$ alrededor del vector ω , después se deforma longitudinalmente y, por último, lo hace angularmente. NOTA: los vectores \overline{AC} y $\overline{\Omega AC}$ deben ser mutuamente ortogonales, en virtud de las propiedades del producto cruz y la ecuación $\overline{\Omega AC} = \omega \times \overline{AC}$; sin embargo, este gráfico no lo demuestra, ya que la rotación del vector \overline{AC} se está exagerando. Aquí el símbolo \odot , representa una flecha (que es el vector ω) que sale del papel y apunta al lector.

$$C_2\vec{C} := \underline{\underline{\epsilon}}\vec{AC}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}\vec{AC} = \epsilon_n\vec{AC}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}\hat{n} = \epsilon_n\underline{\underline{\hat{n}}}$$

3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

Polinomio característico de $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bullet \text{ Caso bidimensional} & \rightarrow \varepsilon_n^2 - (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \varepsilon_n + \varepsilon_x \varepsilon_y - \varepsilon_{xy}^2 = 0 \\ \bullet \text{ Caso tridimensional} & \rightarrow -\varepsilon_n^3 + I_1^d \varepsilon_n^2 - I_2^d \varepsilon_n + I_3^d = 0 \end{array} \right.$$

$$e := I_1^d := \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \text{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}})$$

dilatación cúbica

$$I_2^d := \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_{yz}^2 = \frac{1}{2} ((\text{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}))^2 - \text{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^2}))$$

$$I_3^d := \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + 2\varepsilon_{xy} \varepsilon_{xz} \varepsilon_{yz} - \varepsilon_x \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_y \varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_z \varepsilon_{xy}^2 = \det(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}})$$

(Profundizar en el desarrollo de estas ecuaciones, el sentido físico y matemático, comparando con el capítulo 2)

Referencias

- Álvarez Diego A. (2022) - *Notas de clase del curso mecánica de sólidos*. En preparación. (main.pdf)
- Algunas de las secciones de este capítulo están explicadas en los videos de YouTube que aparecen en la siguiente lista de reproducción:
<https://www.youtube.com/playlist?list=PLOq9elBrzPDGpdpXJ1RTi67exW7AQ7m3K>