

## 02. Estudio de los esfuerzos en un punto

secciones 2.7 a 2.10

Michael Heredia Pérez

[mherediap@unal.edu.co](mailto:mherediap@unal.edu.co)

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales  
Departamento de Ingeniería Civil  
Mecánica Tensorial

2023a





# Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada (Álvarez, 2022).





# Derrotero

- 1 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- 2 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
  - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
  - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
  - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
  - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- 3 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
  - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
  - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
  - 2.9.3. La función  $\tan^{-1}$
  - 2.9.4. Ejemplo
  - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- 4 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- 5 Referencias

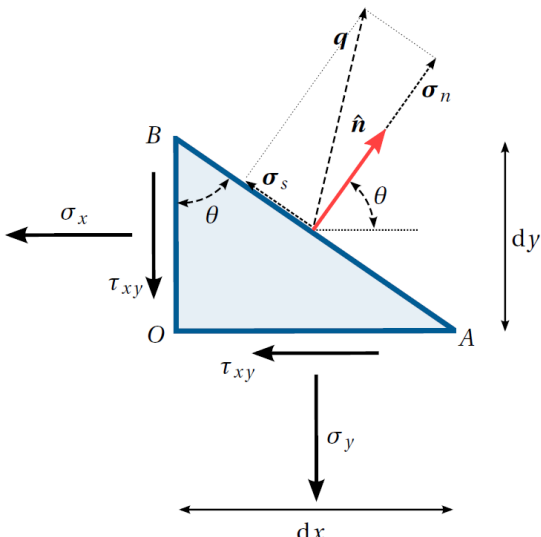


# Derrotero

- 1 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- 2 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
  - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
  - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
  - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
  - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- 3 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
  - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
  - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
  - 2.9.3. La función  $\tan^{-1}$
  - 2.9.4. Ejemplo
  - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- 4 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- 5 Referencias



# Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano



Entendamos el vector del esfuerzo normal  $\sigma_n$  como la proyección del vector de esfuerzos  $\mathbf{q}$  sobre el vector normal al plano  $\hat{\mathbf{n}}$ :

$$\sigma_n = \text{Proy } \mathbf{q} / \hat{\mathbf{n}} = \frac{\langle \mathbf{q}, \hat{\mathbf{n}} \rangle}{\langle \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle} \hat{\mathbf{n}}$$



# Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano en 3D

- El valor del esfuerzo normal:

$$\sigma_n = \sigma_x \alpha^2 + \sigma_y \beta^2 + \sigma_z \gamma^2 + 2\tau_{xz} \alpha \gamma + 2\tau_{yz} \beta \gamma + 2\tau_{xy} \alpha \beta$$

- El valor del esfuerzo tangencial o cortante:

$$\tau_n^2 = (\sigma_x \alpha + \tau_{xy} \beta + \tau_{xz} \gamma)^2 + (\tau_{xy} \alpha + \sigma_y \beta + \tau_{yz} \gamma)^2 + (\tau_{xz} \alpha + \tau_{yz} \beta + \sigma_z \gamma)^2 - \sigma_n^2$$

## Código

- [02\\_07.ipynb](#)



# Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano

en 2D

$$\sigma'_x \rightarrow \sigma_n \quad \tau_{x'y'} \rightarrow \tau_n$$

- El valor del esfuerzo normal:

$$\begin{aligned} \sigma_n(\theta) &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \end{aligned}$$

- El valor del esfuerzo tangencial o cortante:

$$\tau_n(\theta) = \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta$$



# Derrotero

- ① 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- ② 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
  - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
  - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
  - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
  - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- ③ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
  - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
  - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
  - 2.9.3. La función  $\tan^{-1}$
  - 2.9.4. Ejemplo
  - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- ④ 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- ⑤ Referencias





# Derrotero

- 1 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- 2 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
  - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
  - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
  - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
  - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- 3 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
  - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
  - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
  - 2.9.3. La función  $\tan^{-1}$
  - 2.9.4. Ejemplo
  - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- 4 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- 5 Referencias



# Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones

## Esfuerzos principales en 2D

$$(\sigma_1)_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$(\sigma_2)_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



# Tensiones y direcciones principales

## 2D

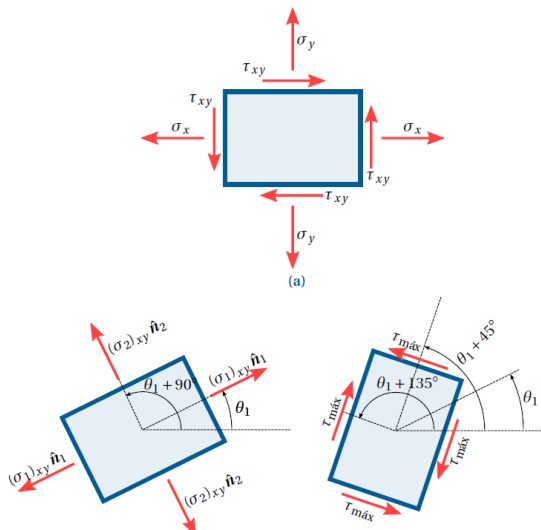
Debemos dar solución a los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_x - (\sigma_1)_{xy}) \alpha_1 + \tau_{xy} \beta_1 &= 0 & (\sigma_x - (\sigma_2)_{xy}) \alpha_2 + \tau_{xy} \beta_2 &= 0 \\
 \tau_{xy} \alpha_1 + (\sigma_y - (\sigma_1)_{xy}) \beta_1 &= 0 & \text{y} \quad \tau_{xy} \alpha_2 + (\sigma_y - (\sigma_2)_{xy}) \beta_2 &= 0 \\
 \alpha_1^2 + \beta_1^2 &= 1 & \alpha_2^2 + \beta_2^2 &= 1
 \end{aligned}$$



# Tensiones y direcciones principales

2D



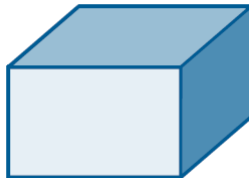
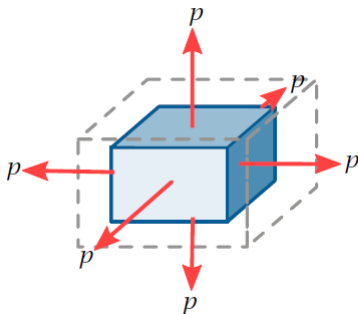


# Tensiones y direcciones principales

2D

¿Cuándo tenemos un discriminante nulo?

$\mathbf{R}/I$ . Estado de esfuerzos hidrostáticos



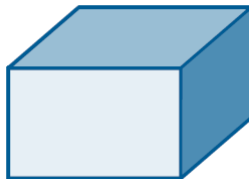
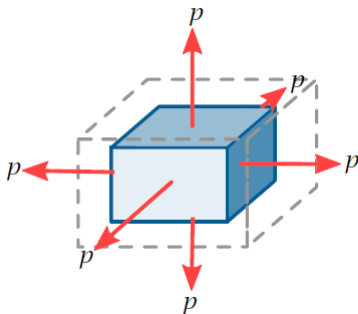


# Tensiones y direcciones principales

2D

¿Cuándo tenemos un discriminante nulo?

$\mathbf{R}/\cdot$ . Estado de esfuerzos hidrostáticos

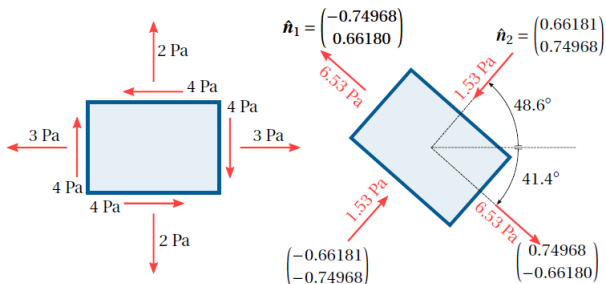




# Tensiones y direcciones principales

2D

## Ejemplo



## Código

- [02\\_08\\_01\\_ejemplo\\_01.ipynb](#)



# Derrotero

- ➊ 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- ➋ 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
  - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
  - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
  - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
  - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- ➌ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
  - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
  - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
  - 2.9.3. La función atan2
  - 2.9.4. Ejemplo
  - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- ➍ 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- ➎ Referencias





# Tensiones y direcciones principales

## 3D

Expandiendo el determinante  $\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \mathbf{I}) = 0$

$$\begin{aligned}
 (\sigma_x - \sigma_n) [(\sigma_y - \sigma_n)(\sigma_z - \sigma_n) - \tau_{yz}^2] \\
 - \tau_{xy} [\tau_{xy}(\sigma_z - \sigma_n) - \tau_{yz}\tau_{xz}] \\
 + \tau_{xz} [\tau_{xy}\tau_{yz} - (\sigma_y - \sigma_n)\tau_{xz}] = 0;
 \end{aligned}$$



# Tensiones y direcciones principales

3D

Agrupando y reduciendo términos:

Ecuación característica de  $\underline{\underline{\sigma}}$  tridimensional

$$-\sigma_n^3 + I_1\sigma_n^2 - I_2\sigma_n + I_3 = 0$$

donde,

$$I_1 := \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})$$

$$I_2 := \frac{1}{2} \left( (\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}))^2 - \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^2) \right)$$

$$I_3 := \det(\underline{\underline{\sigma}}).$$

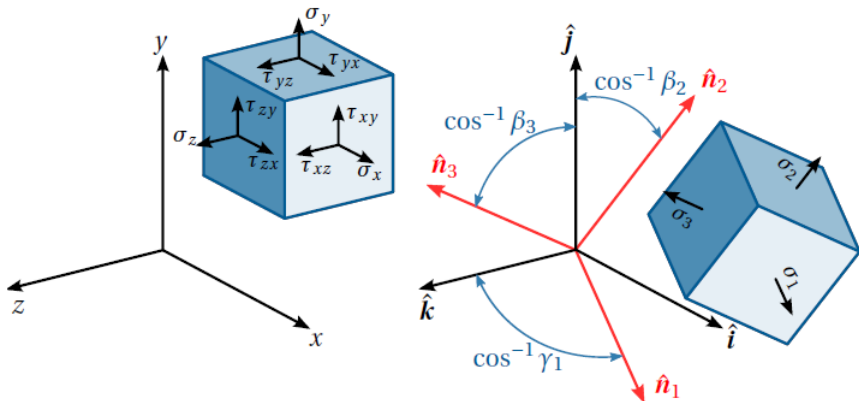
Código

- [02\\_08\\_02.ipynb](#)



# Tensiones y direcciones principales

3D

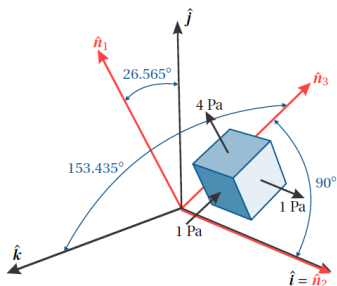
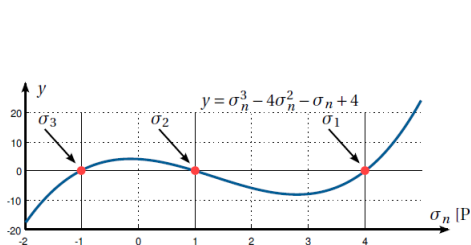




# Tensiones y direcciones principales

3D

## Ejemplo



## Código

- [02\\_08\\_02\\_ejemplos.ipynb](#)



# Derrotero

- ➊ 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- ➋ 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
  - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
  - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
  - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
  - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- ➌ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
  - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
  - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
  - 2.9.3. La función atan2
  - 2.9.4. Ejemplo
  - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- ➍ 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- ➎ Referencias



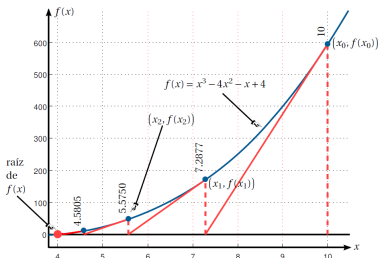
# Método de Newton-Raphson

para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica

## Estudio autónomo

Sería interesante:

- ¿Cómo lo programo en Python o Matlab?
- ¿Ya está implementado en Python o Matlab? ¿Cómo funciona?





# Derrotero

- ➊ 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- ➋ 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
  - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
  - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
  - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
  - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- ➌ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
  - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
  - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
  - 2.9.3. La función atan2
  - 2.9.4. Ejemplo
  - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- ➍ 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- ➎ Referencias



# Ortogonalidad de las direcciones principales

## Estudio autónomo

- Verifique la ortogonalidad de los vectores propios del ejercicio anterior

## Código

- [02\\_08\\_04\\_ejemplo.ipynb](#)





# Derrotero

- 1 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- 2 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
  - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
  - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
  - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
  - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- 3 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
  - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
  - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
  - 2.9.3. La función  $\tan^2$
  - 2.9.4. Ejemplo
  - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- 4 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- 5 Referencias



# Círculo de Mohr

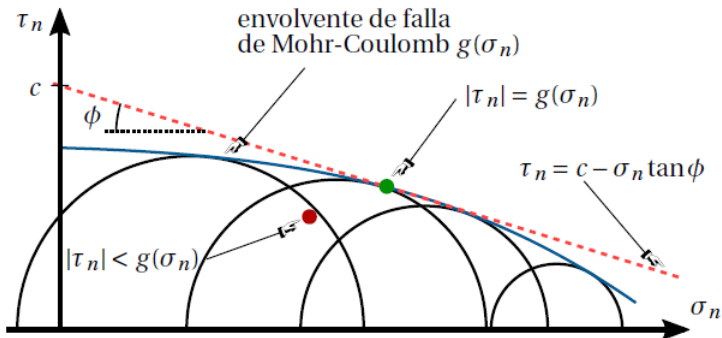
La **circunferencia de Mohr** fue propuesta por el ingeniero civil alemán Otto Mohr (1835 - 1918) en 1882 **con el objeto de representar gráficamente el estado de esfuerzos en un punto.**



# Círculo de Mohr

## Aplicaciones

### Criterio de falla de Mohr-Coulomb



Este criterio es altamente utilizado en el análisis de cimentaciones.



# Derrotero

- ➊ 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- ➋ 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
  - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
  - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
  - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
  - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- ➌ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
  - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
  - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
  - 2.9.3. La función  $\tan^{-1}$
  - 2.9.4. Ejemplo
  - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- ➍ 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- ➎ Referencias



# Círculo de Mohr en dos dimensiones

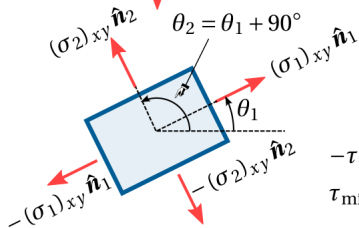
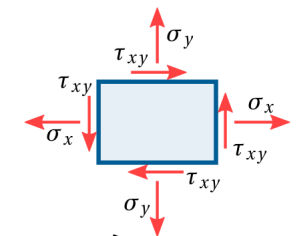
## Estudio autónomo

Estudiar los siguientes videos:

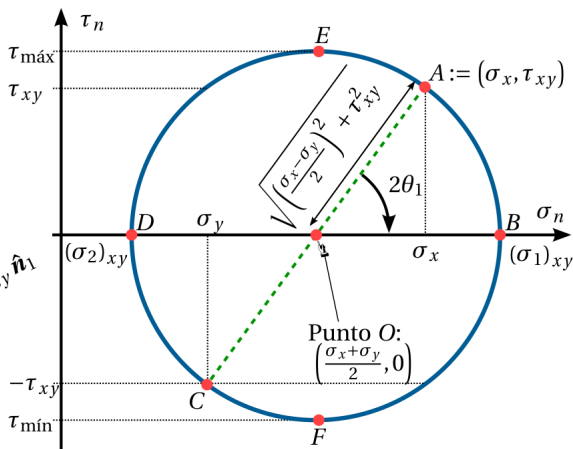
- 02.09 - Círculo de Mohr en 2D (Parte 1/3) - Deducción del círculo de Mohr para tensión plana
- 02.09 - Círculo de Mohr en 2D (Parte 2/3) - Esfuerzos normales y cortantes máximos y mínimos
- 02.09 - Círculo de Mohr en 2D (Parte 3/3) - Deducción del círculo de Mohr para tensión plana



# Círculo de Mohr en dos dimensiones



(a)

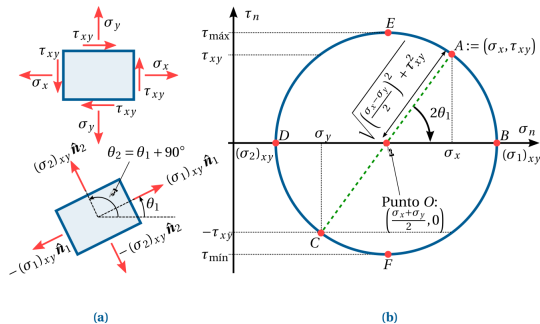


(b)



# Círculo de Mohr en dos dimensiones

## Interpretación física

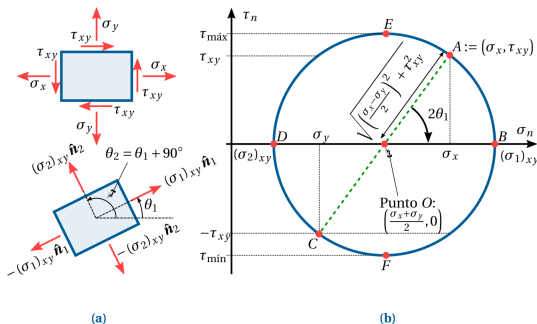


Representa el lugar geométrico de las posibles combinaciones de esfuerzos normales  $\sigma_n$  y cortantes  $\tau_n$  que actúan sobre la superficie inclinada  $\overline{AB}$  a medida que el ángulo  $\theta$  varía entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$ .



# Círculo de Mohr en dos dimensiones

## Interpretación matemática



Curva paramétrica  $(\sigma_n(\theta), \tau_n(\theta))$  que aparecen al variar el parámetro  $\theta$  en el intervalo  $[0^\circ, 180^\circ]$ . Dicha curva empieza a graficarse en el punto de coordenadas  $(\sigma_x, \sigma_y)$  y se traza en sentido horario. La circunferencia resultante tiene centro en  $(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0)$  y radio  $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$





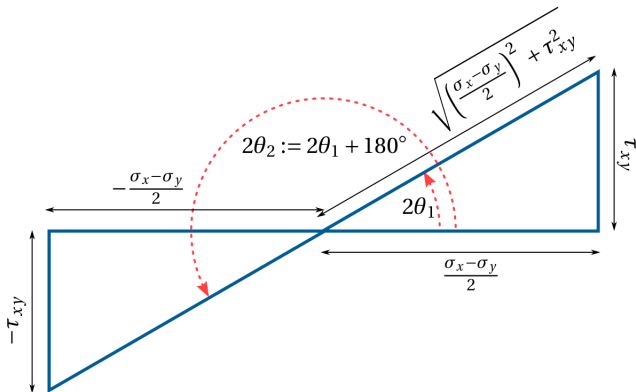
# Círculo de Mohr en dos dimensiones

Nos planteamos dos preguntas:

- ¿Cuál es la inclinación  $\theta$  para la cual se producen los esfuerzos normales  $\sigma_n$  máximos y mínimos sobre el punto en consideración?
- ¿Qué magnitud tienen?



# Círculo de Mohr en dos dimensiones



$$\sin 2\theta_1 = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

$$\cos 2\theta_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sin 2\theta_2 = -\frac{\tau_{xy}}{R}$$

$$\cos 2\theta_2 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}$$



# Círculo de Mohr en dos dimensiones

## Resumen de ecuaciones

- Construcción de la curva paramétrica

$$\sigma_n(\theta) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_n(\theta) = \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta$$

- Direcciones principales

$$\tan 2\theta_1 = \frac{+\tau_{xy}}{+\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} \quad \tan 2\theta_2 = \frac{-\tau_{xy}}{-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}$$

- Esfuerzos principales

$$(\sigma_1)_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$(\sigma_2)_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



# Círculo de Mohr en dos dimensiones

## Resumen de ecuaciones

- Esfuerzos cortantes máximos y mínimos

$$(\tau_{\text{máx}})_{xy} = + \frac{(\sigma_1)_{xy} - (\sigma_2)_{xy}}{2} = + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$(\tau_{\text{mín}})_{xy} = - \frac{(\sigma_1)_{xy} - (\sigma_2)_{xy}}{2} = - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Dirección de los esfuerzos cortantes máximos y mínimos

$$\cot 2\theta_{c1} = \frac{+\tau_{xy}}{-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} \quad \cot 2\theta_{c2} = \frac{-\tau_{xy}}{+\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}$$



# Círculo de Mohr en dos dimensiones

## Relación entre ángulos

### Comentario

Veremos que  $\theta_{c1}$  y  $\theta_{c2}$  se producen a  $45^\circ$  de los planos principales, más explícitamente:

$$\theta_{c1} = \theta_1 - 45^\circ = \theta_2 + 45^\circ$$

$$\theta_{c2} = \theta_1 + 45^\circ = \theta_2 - 45^\circ$$

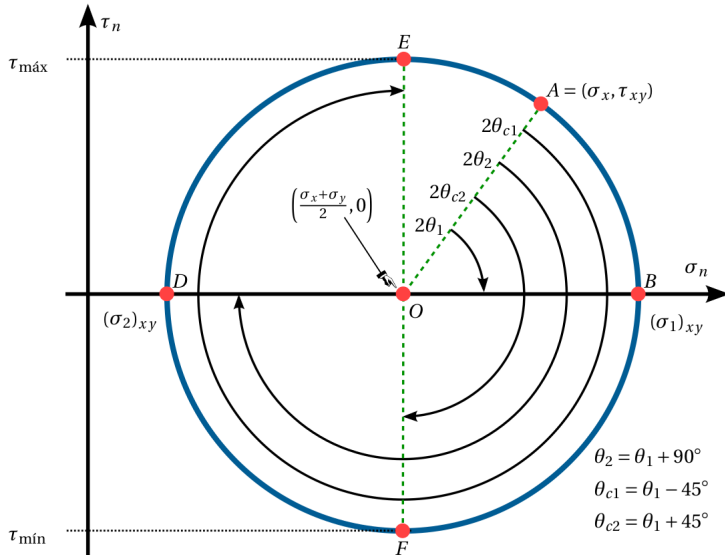


# Derrotero

- ➊ 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- ➋ 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
  - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
  - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
  - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
  - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- ➌ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
  - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
  - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
  - 2.9.3. La función  $\tan^{-1}$
  - 2.9.4. Ejemplo
  - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- ➍ 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- ➎ Referencias



# Gráfica e interpretación del círculo de Mohr





# Derrotero

- ➊ 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- ➋ 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
  - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
  - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
  - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
  - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- ➌ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
  - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
  - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
  - 2.9.3. La función  $\tan^{-1}$
  - 2.9.4. Ejemplo
  - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- ➍ 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- ➎ Referencias





## La función atan2

Es una función  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow (-\pi, \pi]$  que retorna el ángulo correcto en radiante entre un vector  $[x, y]^T$  y el eje  $x$  positivo teniendo en cuenta que para ubicar el cuadrante, se utilizan los signos de los argumentos  $x$  y  $y$ . Está definida por:

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } y \geq 0, x < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{si } y < 0, x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } y > 0, x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } y < 0, x = 0 \\ \text{indefinido} & \text{si } y = 0, x = 0 \end{cases}$$



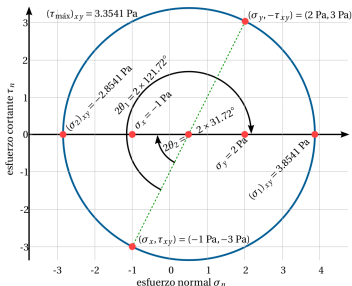
# Derrotero

- 1 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- 2 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
  - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
  - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
  - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
  - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- 3 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
  - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
  - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
  - 2.9.3. La función atan2
  - 2.9.4. Ejemplo
  - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- 4 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- 5 Referencias



# Círculo de Mohr en dos dimensiones

## Ejemplo



Considere un punto sujeto a los esfuerzos  $\sigma_x = 1Pa$ ,  $\sigma_y = 2Pa$  y  $\tau_{xy} = -3Pa$ ; calcule los esfuerzos principales y sus direcciones para el punto en consideración.

## Código

- [02\\_09\\_04\\_ejemplo.ipynb](#)
- [circulo\\_mohr\\_2d.py](#)



# Derrotero

- 1 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- 2 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
  - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
  - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
  - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
  - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- 3 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
  - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
  - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
  - 2.9.3. La función atan2
  - 2.9.4. Ejemplo
  - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- 4 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- 5 Referencias



# Círculo de Mohr en tres dimensiones

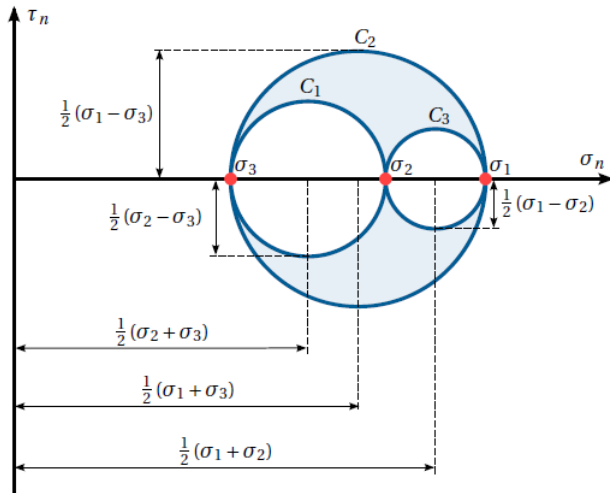
## Estudio autónomo

Estudiar los siguientes videos:

- 02.09 - Círculo de Mohr en 3D (Parte 1/3) - Deducción del círculo de Mohr tridimensional
- 02.09 - Círculo de Mohr en 3D (Parte 2/3) - Ubicando los planos donde actúan los esfuerzos en 3D
- 02.09 - Círculo de Mohr en 3D (Parte 3/3) - ¿Donde actúan los esfuerzos cortantes máximos en 3D?



# Círculo de Mohr en tres dimensiones





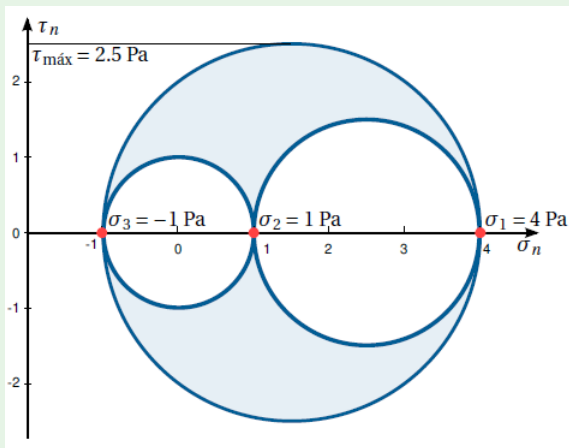
# Círculo de Mohr en tres dimensiones

## Ejemplo 1



# Círculo de Mohr en tres dimensiones

## Ejemplo 2







# Derrotero

- 1 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- 2 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
  - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
  - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
  - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
  - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- 3 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
  - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
  - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
  - 2.9.3. La función  $\tan^{-1}$
  - 2.9.4. Ejemplo
  - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- 4 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- 5 Referencias



# La analogía del bombillo y la caja

## Estudio autónomo

Prestar atención a:

- La analogía del bombillo y la caja :)



# Derrotero

- 1 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- 2 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
  - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
  - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
  - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
  - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- 3 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
  - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
  - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
  - 2.9.3. La función  $\tan^{-1}$
  - 2.9.4. Ejemplo
  - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- 4 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- 5 Referencias



# Referencias

Álvarez, D. A. (2022). *Teoría de la elasticidad*, volume 1. Universidad Nacional de Colombia.



# Links

La imagen muestra una interfaz de YouTube en un navegador. El video principal se titula "02 - Esfuerzos o tensiones" de diegoandresalvarez, con 3870 visualizaciones. El video incluye un diagrama de un elemento diferencial en un estado de tensión. A la derecha, se muestra una lista de videos relacionados:

- 02.01 - Qué es la tensión o el esfuerzo? (1510 visualizaciones)
- 02.02.01 - Análisis de los esfuerzos en un elemento rectangular infinitesimal de espesor  $t$  (1290 visualizaciones)
- 02.02.02 - Análisis de los esfuerzos en un elemento triangular infinitesimal de espesor  $t$  (1210 visualizaciones)
- 02.03.01 - Esfuerzos en un paralelepípedo infinitesimal (1172 visualizaciones)
- 02.03.02 - Análisis de un elemento tetraédrico infinitesimal (1444 visualizaciones)
- 02.09 - Círculo de Mohr en 2D (Parte 1/3) - Deducción del círculo de Mohr para tensión plana (3165 visualizaciones)
- 02.09 - Círculo de Mohr en 2D (Parte 2/3) - Esfuerzos normales y cortantes máximos y mínimos (2343 visualizaciones)

- Lista de reproducción: [02 - Esfuerzos o Tensiones](#)
- Repositorio del curso: [github/medio\\_continuo](https://github.com/mediocontinuo)