Mecánica de Sólidos

# 04. Relaciones entre los esfuerzos y las deformaciones

---

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Docente Ocasional
Ingeniero Civil
Esp. en Estructuras
Maestrando en Estructuras – Investigación

2022b

# Derrotero

4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles

4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles

4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson

4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortótropos*

4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica

4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia

4.7. Módulo de expansion volumétrica o modulo de compresibilidad

4.8. Particularización de tres a dos dimensiones

4.9. Interpretación de los gráficos de colores de esfuerzos y deformaciones

4.10. Modificación de la ley de Hooke para tener en cuenta los efectos térmicos en el caso de materiales isótropos*

***Respositorio del curso:*** *github.com/michaelherediaperez/mecanica_de_solidos_un*

# Advertencia

Estas presentaciones son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, el estudiante no debe tomarlas como material de estudio y debe dirigirse a la literatura recomendada.

# Anotaciones

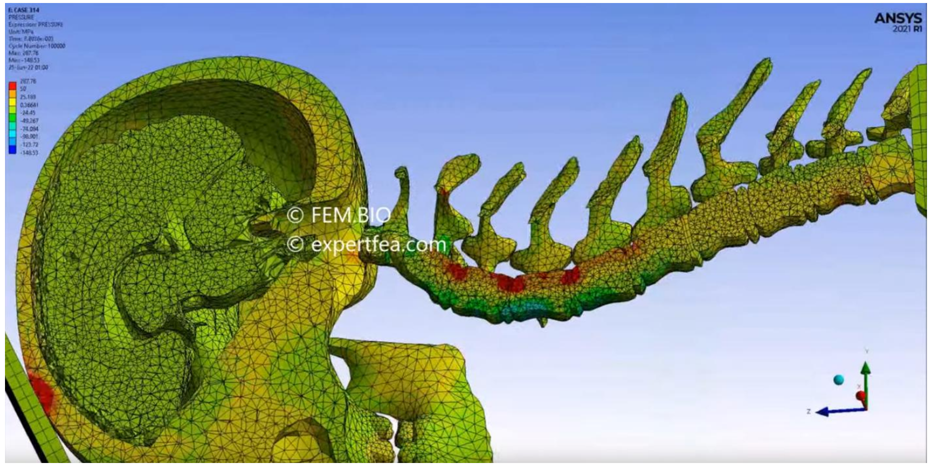
Las ecuaciones deducidas en los capítulos 2 y 3 solo tienen en cuenta factores geométricos y se ha aplicado equilibrio estático, por lo tanto son independientes del material.

La deformación de un sólido con esfuerzos aplicados depende de:

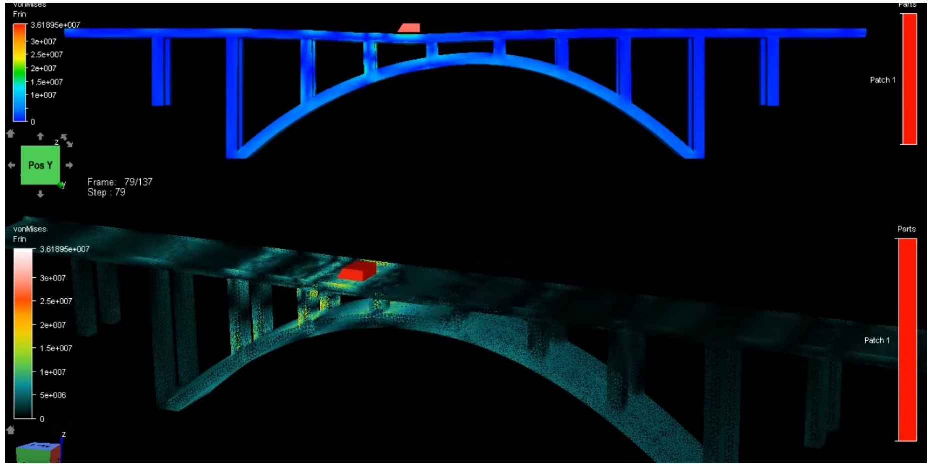
- velocidad de aplicación de estos
- historia de carga
- temperatura
- propiedades del material

# Modelos constitutivos

Modelos matemáticos que relacionan los esfuerzos y las deformaciones, teniendo en cuenta las variables anteriores
(velocidad, hisotria de carga, temperatura y propiedades del material)




Simulation of Compression Shock of Skull with Brain Missing Meninges - ANSYS Explicit Dynamics
https://www.youtube.com/watch?v=IE-O3UCfwOs




Linear Elasticity Problem using FEM (Bridge model)
https://www.youtube.com/watch?v=IgfWjCvCSuk

# Modelos constitutivos

Analizaremos el modelo constitutivo de los llamados sólidos con comportamiento "*elástico lineal*", **asumiendo que la velocidad de aplicación de la carga en el ensayo de carga-desplazamiento, no tiene ningún efecto en dicha relación elástica lineal.**

# 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles

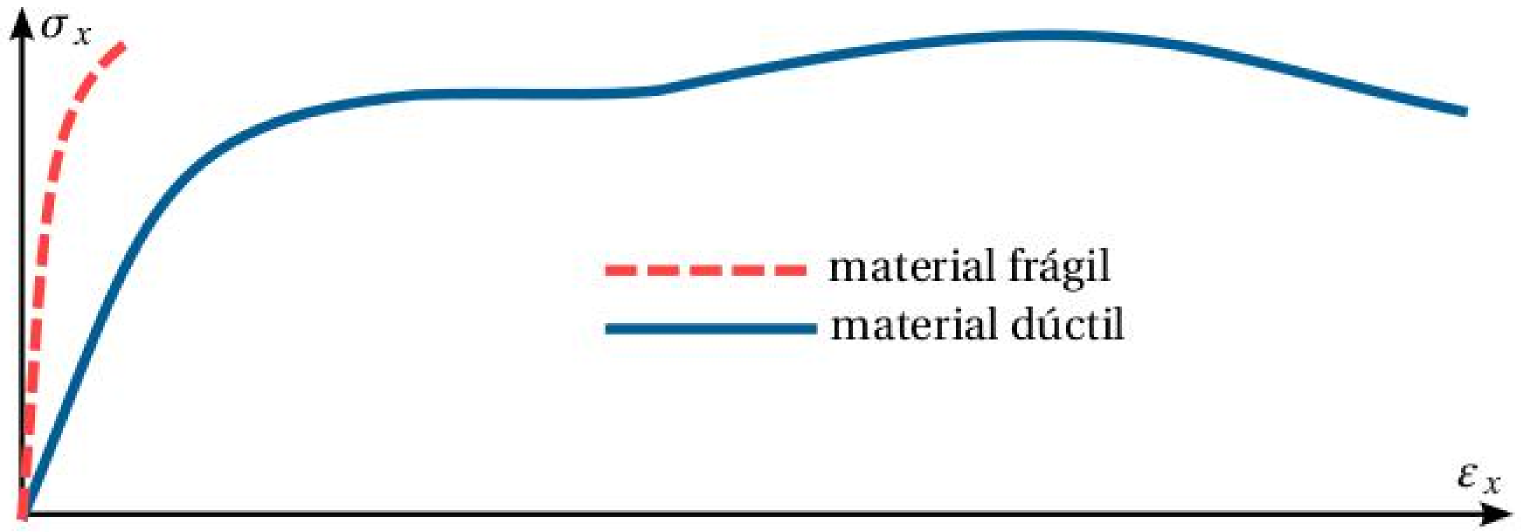



**Figura 4.1:** *Curvas esfuerzo-deformación para materiales dúctiles y frágiles. Mientras que un material dúctil presenta grandes deformaciones antes de romperse, un material frágil presenta pequeñas deformaciones antes de la falla.*

# Curvas esfuerzo-deformación

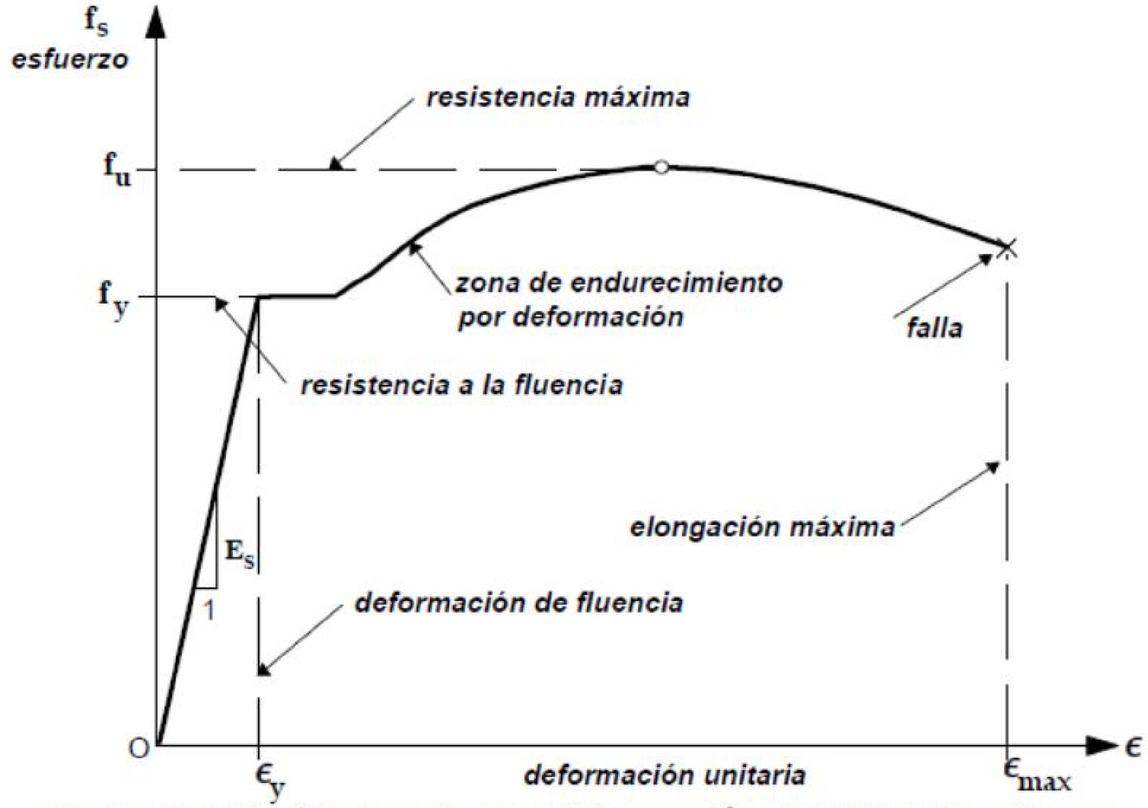



**Figura 6-2(a) - Curva esfuerzo-deformación del acero de refuerzo**

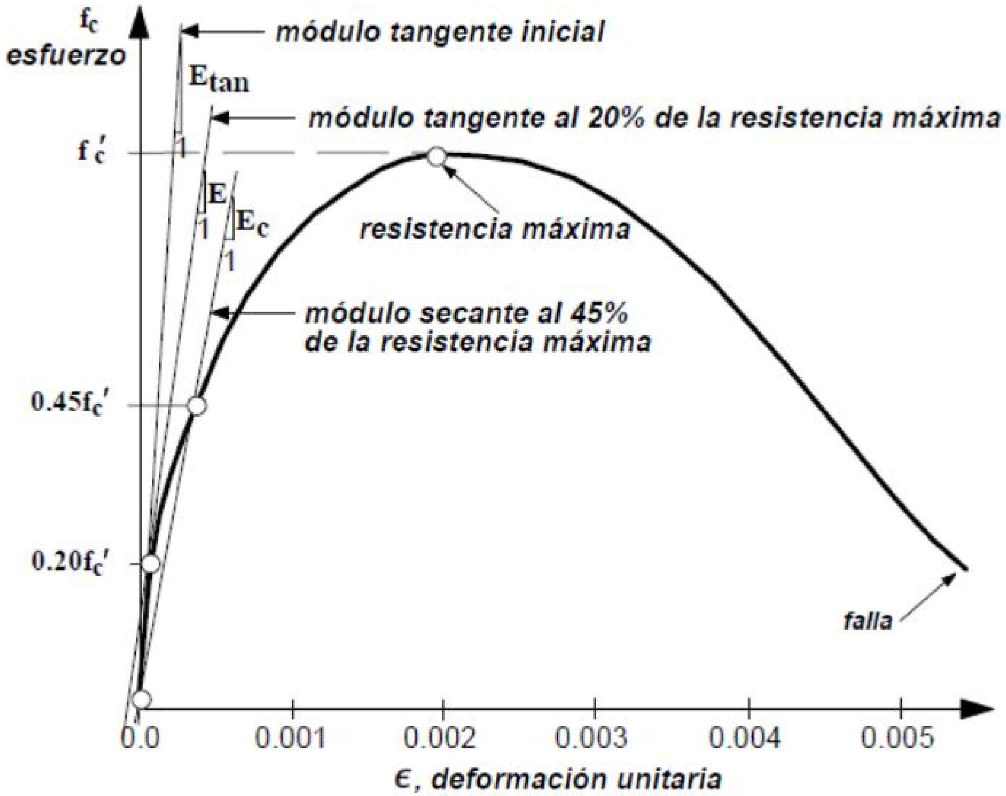
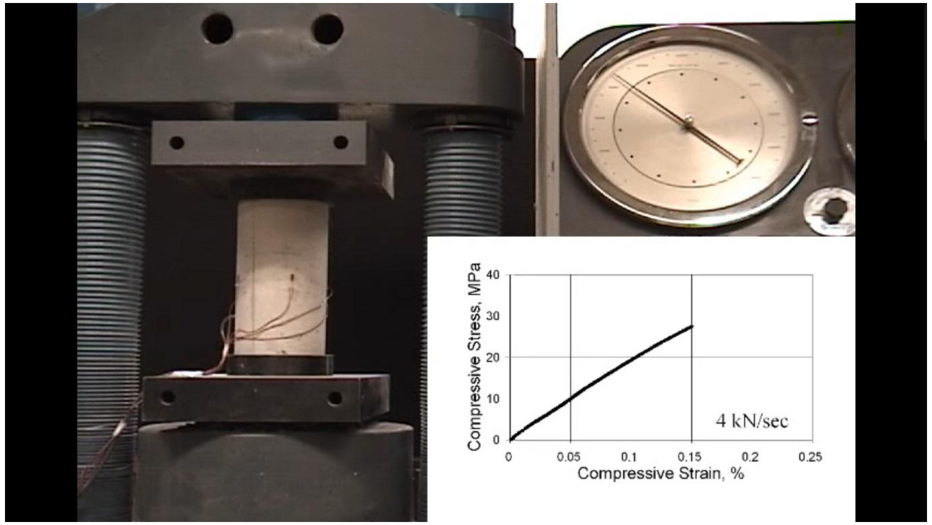



**Figura 6-2(b) - Curva esfuerzo-deformación del concreto no confinado**

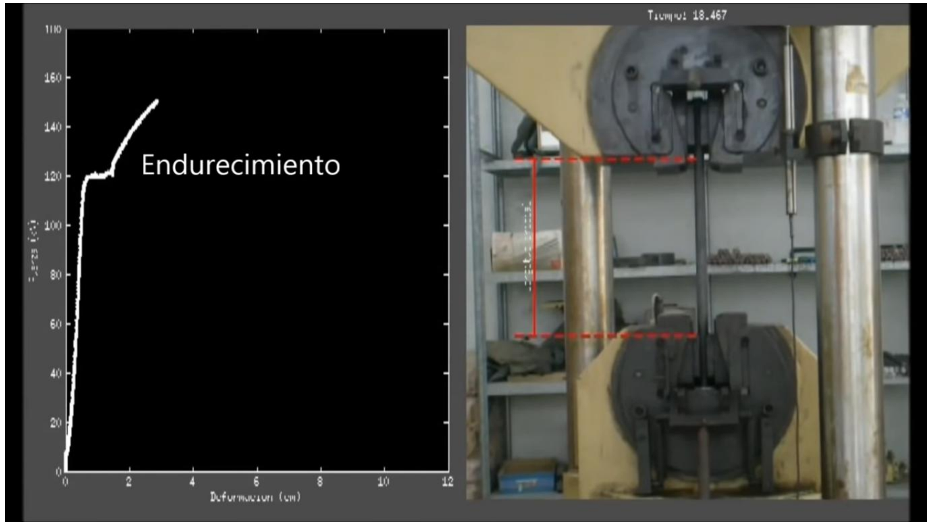
*No comparar escalas

García Reyes, 1998. *Dinámica Estructural Aplicada al Diseño Sísmico*

# Curvas esfuerzo-deformación



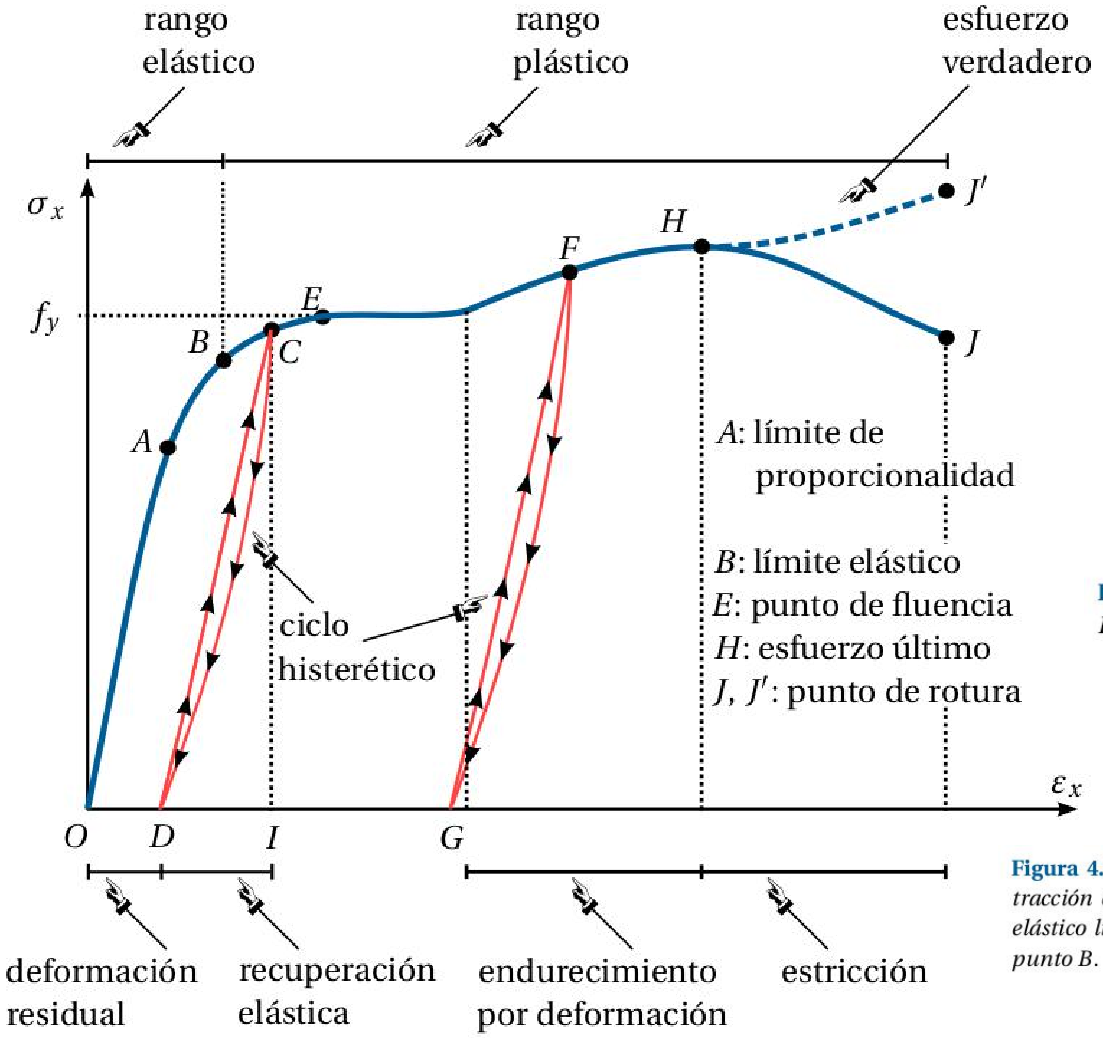

Compression testing of concrete
https://www.youtube.com/watch?v=dtvm7YNsSU0




Ensayo de tracción, resistencia de materiales
https://www.youtube.com/watch?v=jKi2ID9zYik

*No comparar escalas
García Reyes, 1998. *Dinámica Estructural Aplicada al Diseño Sísmico*

# 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles



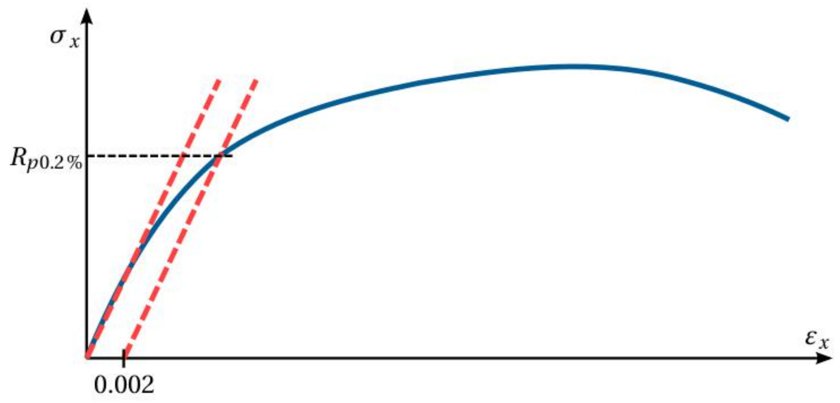
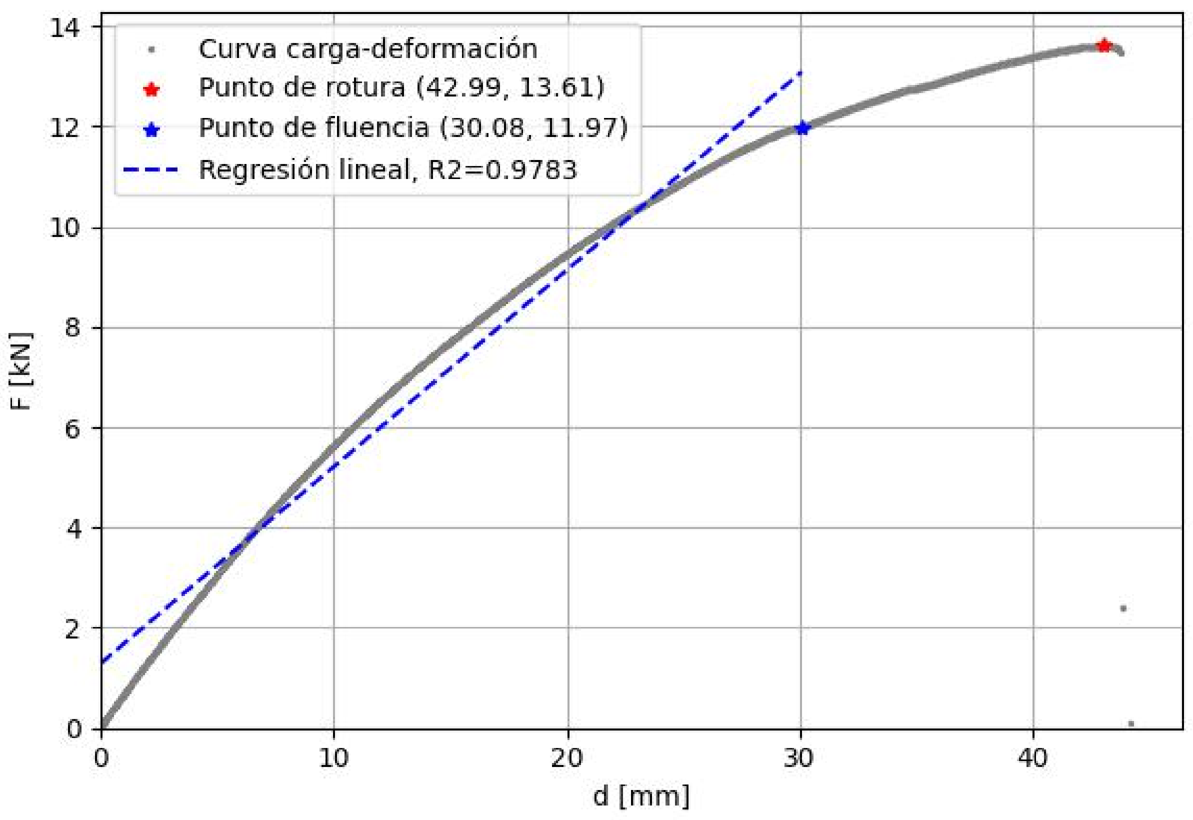




**Figura 4.3:** *Determinación del esfuerzo de fluencia mediante el método de la compensación. Este método se emplea en materiales cuyo punto de fluencia no está claramente definido.*

**Figura 4.2:** *Ejemplo típico de la curva esfuerzo-deformación para un esfuerzo uniaxial de tracción en un material dúctil con comportamiento elasto-plástico: el comportamiento es elástico lineal para pequeñas deformaciones (tramo OA) y presenta plasticidad a partir del punto B.*

# 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles




Ensayo de madera plástica

Método de la compensación o corregimiento ASTM A370

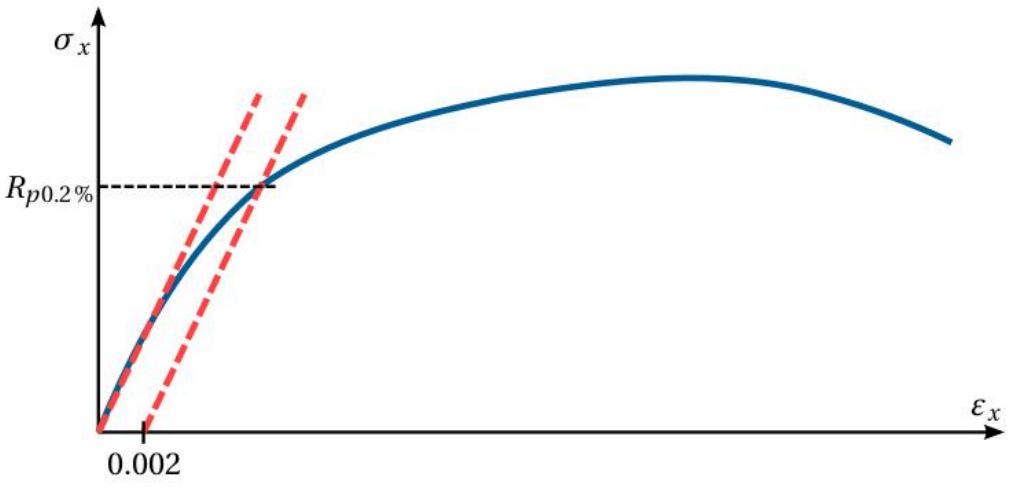
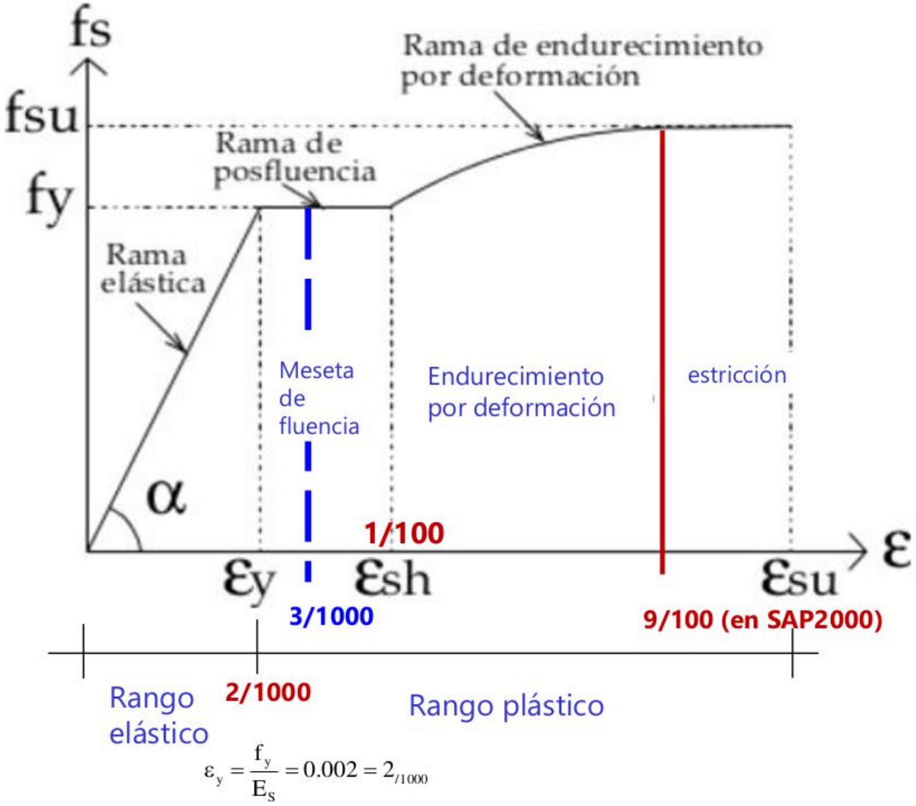
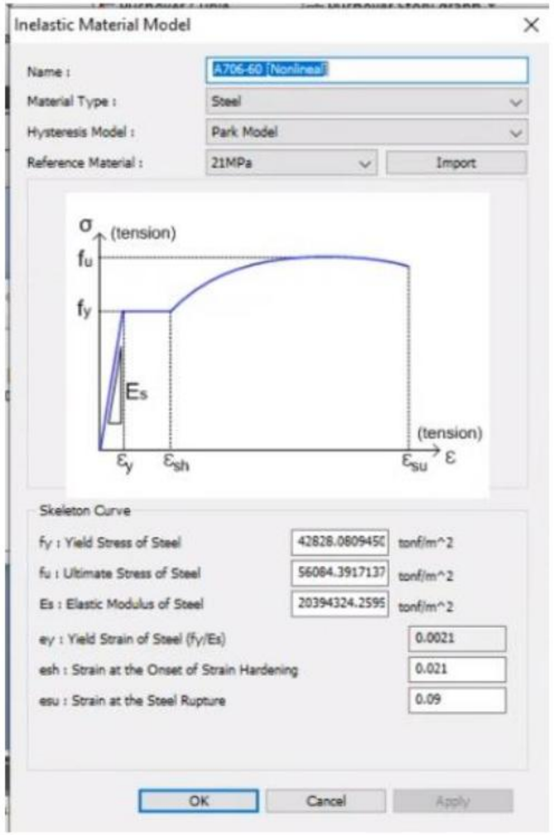


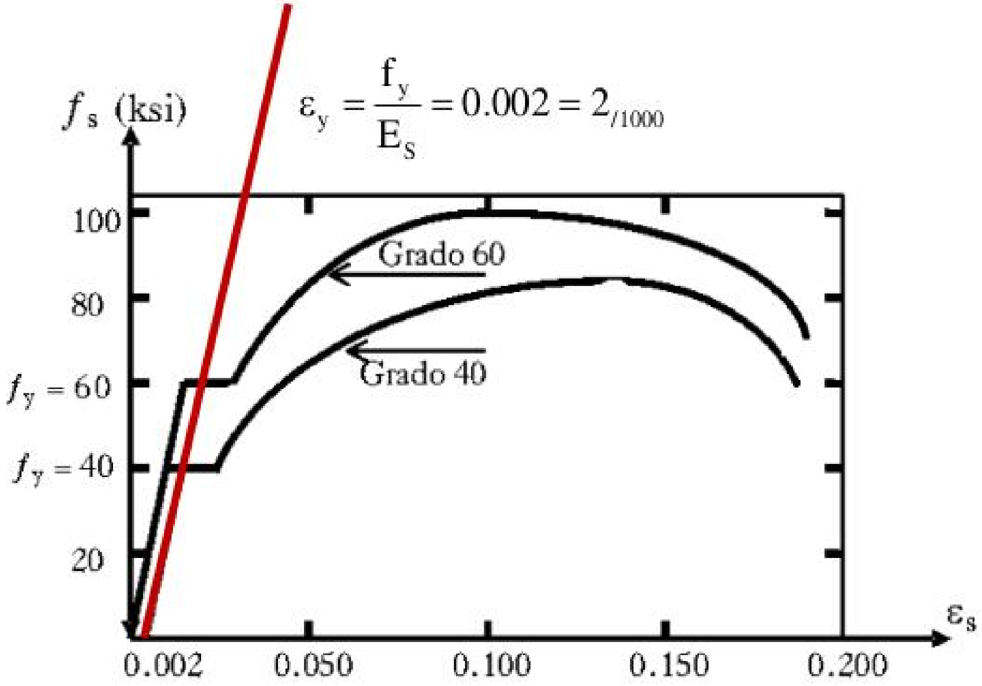

**Figura 4.3:** *Determinación del esfuerzo de fluencia mediante el método de la compensación. Este método se emplea en materiales cuyo punto de fluencia no está claramente definido.*

# Comportamiento del acero




Curso de Diseño Sísmico de Concreto Reforzado; [Bedoya, 2022]




Módulo de elasticidad del acero estructural; [Rochel, 2007]

# Comportamiento del concreto reforzado

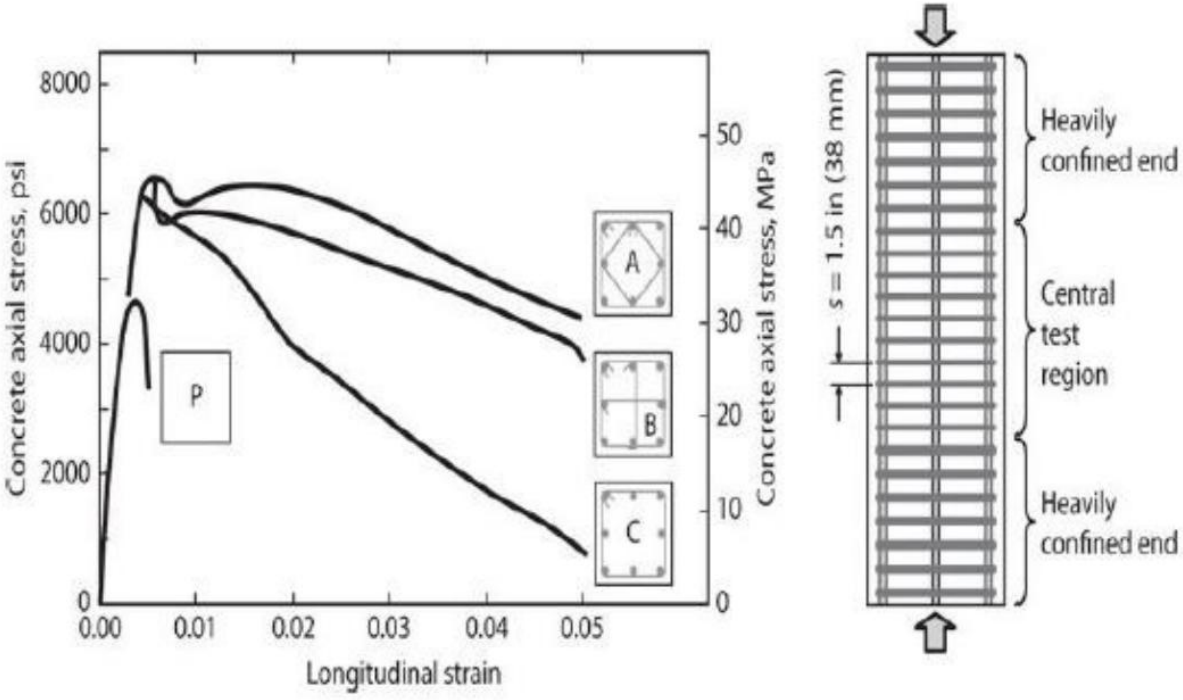



**FIGURE 4.1** Stress–strain response of plain concrete (P) and three confined concrete cross sections. (*After Moehle and Cavanagh, 1985, used with permission from ASCE.*)

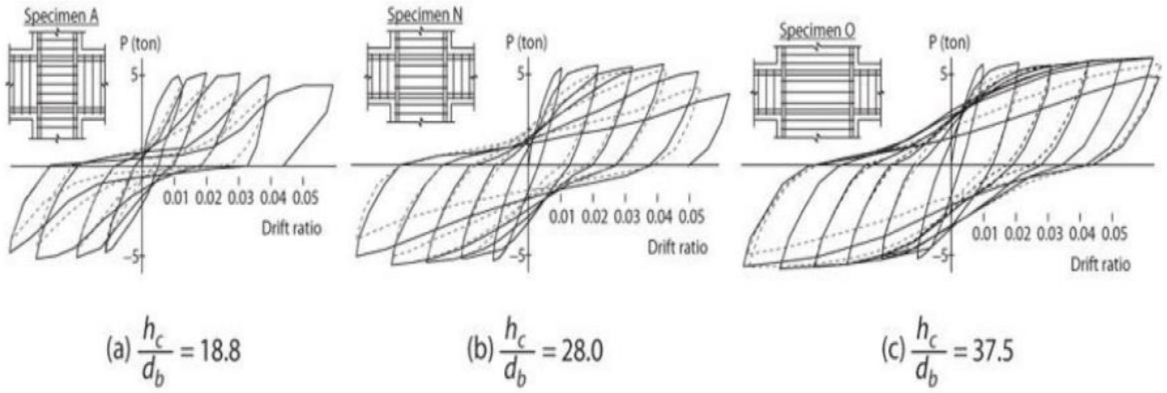
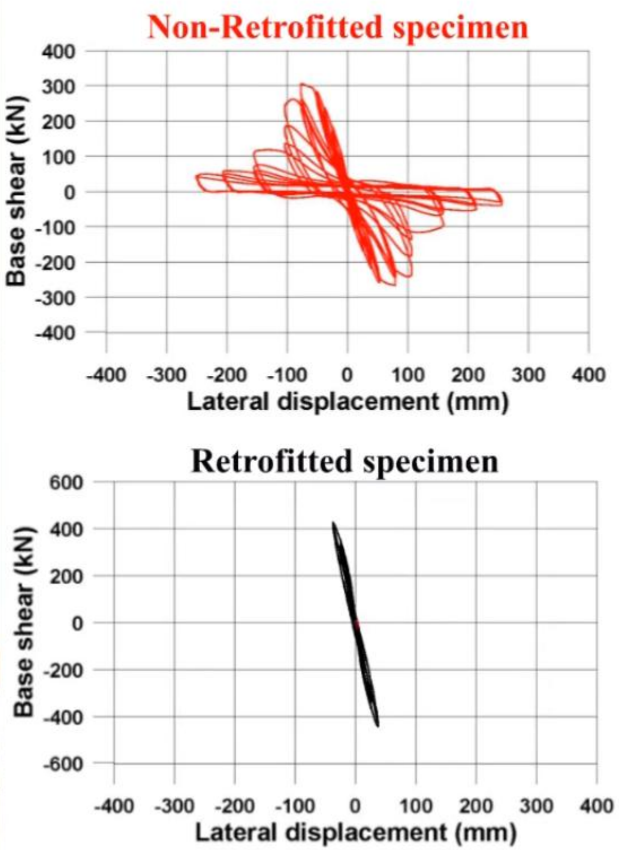



**FIGURE 9.20** Column shear versus story displacement for interior beam-column joints with different values of $h_C/d_b$. (*After Kaku and Asakusa, 1991, Courtesy of American Concrete Institute.*)

Curso de Diseño Sísmico de Concreto Reforzado; [Bedoya, 2022]

# Ciclo de histéresis (*hysteresis loop*)


Hysteretic behaviour of non-retrofitted and retrofitted bridge piers reinforced by UHPFRC
https://www.youtube.com/watch?v=gyu0WEDdWM0

# Ciclo de histéresis (*hysteresis loop*)

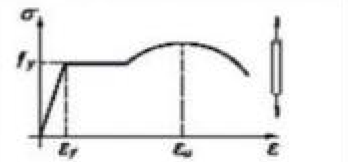
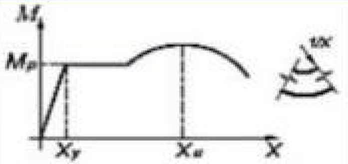
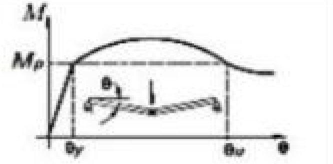
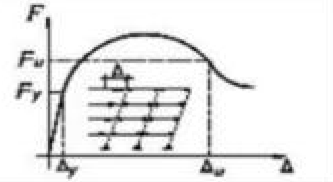
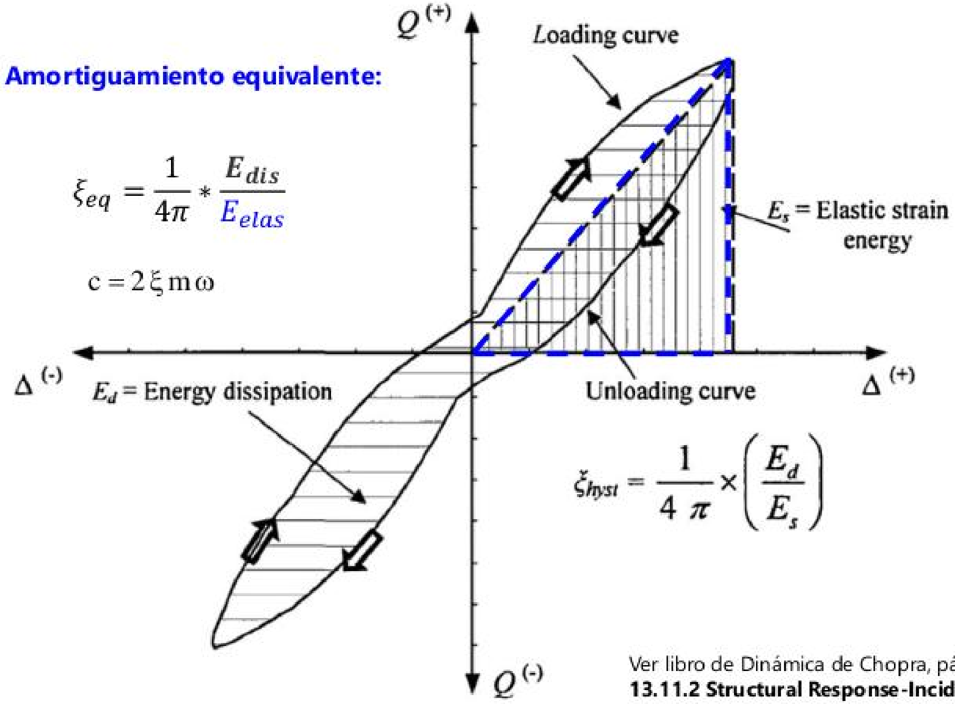
| TIPO DE DUCTILIDAD | REPRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA | DEFINICIÓN |
|---|---|---|
| DUCTILIDAD DEL MATERIAL (AXIAL) |  | $\mu_\varepsilon = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_y}$ |
| DUCTILIDAD DE LA SECCIÓN (CURVATURA) |  | $\mu_\chi = \frac{\chi_u}{\chi_y}$ |
| DUCTILIDAD DEL MIEMBRO (ROTACIÓN) |  | $\mu_\theta = \frac{\theta_u}{\theta_y}$ |
| DUCTILIDAD DE LA ESTRUCTURA (DESPLAZAMIENTO) |  | $\mu_\Delta = \frac{\Delta_u}{\Delta_y}$ |

**Figura 7.** Tipos de ductilidad, adaptado de ATC-40 [9], 19

**Amortiguamiento equivalente:**

$$\xi_{eq} = \frac{1}{4\pi} * \frac{E_{dis}}{E_{elas}}$$

$$c = 2\xi m\omega$$

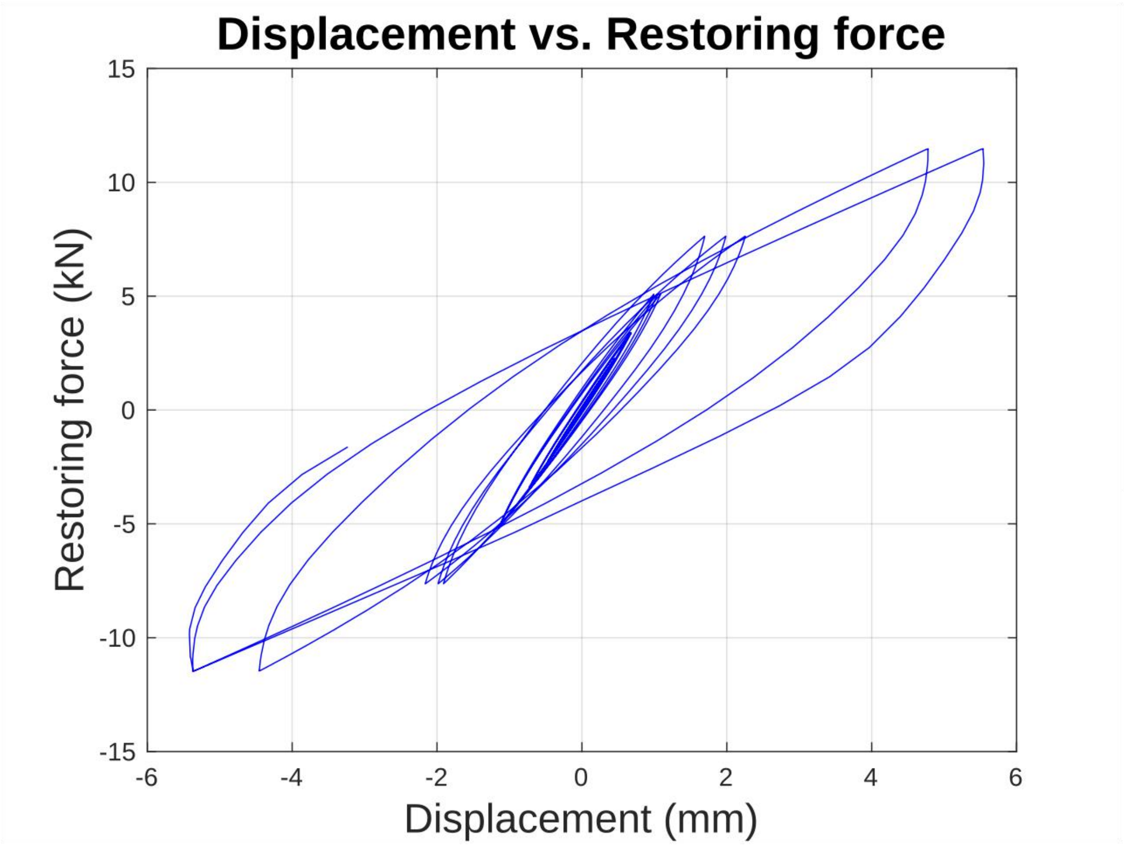


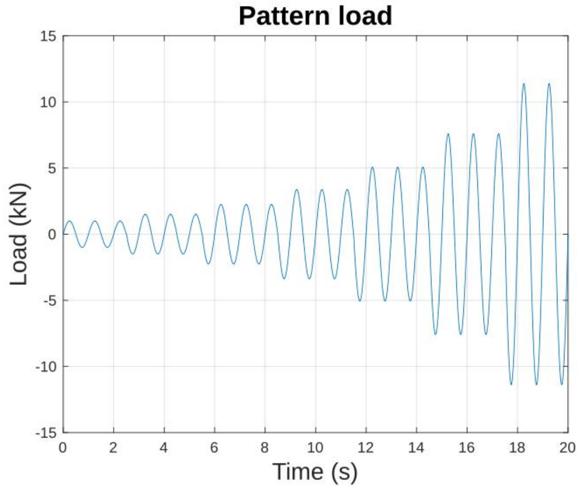

$$\xi_{hyst} = \frac{1}{4\pi} \times \left(\frac{E_d}{E_s}\right)$$

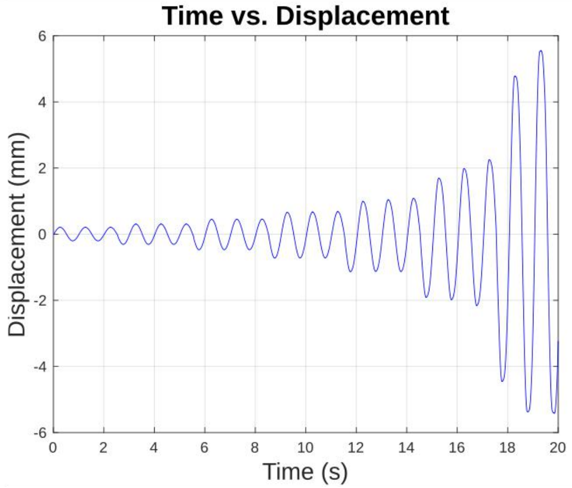
Ver libro de Dinámica de Chopra, pág. 102.
**13.11.2 Structural Response-Incident Angle Relation**
Pagina 599 leer para el análisis espectral tridimensional

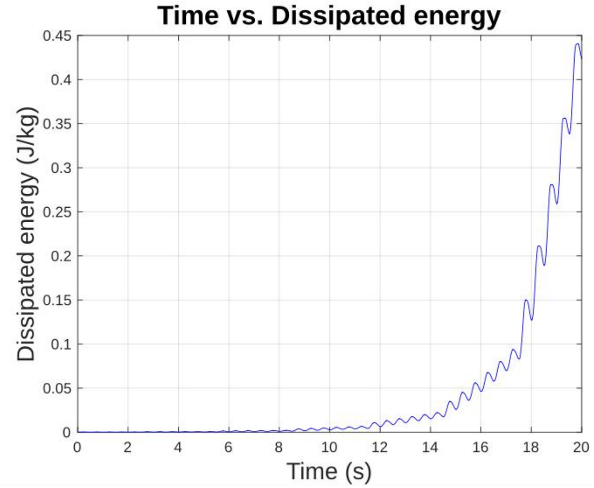
Ver **Cyclic Behavior**; Manual Analisys Reference Etabs pág. 108 pdf

# Ciclo de histéresis (*hysteresis loop*)



# 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson

4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales en las direcciones $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$

4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales

4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos

4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos

4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortótropos

# 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson

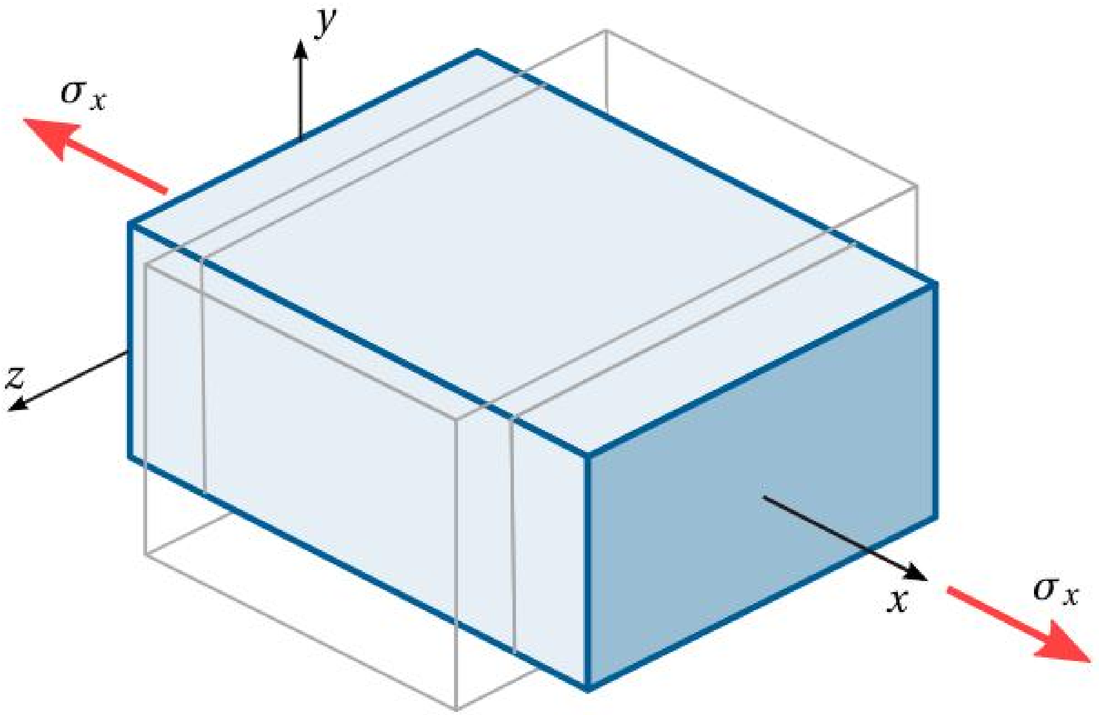



**Figura 4.4:** *Forma deformada de un diferencial de sólido sometido a la contracción lateral que se produce por el efecto de Poisson: si sobre el cuerpo de la figura se aplica una fuerza de tracción en dirección x, se produce un alargamiento relativo (deformación longitudinal) $\varepsilon_x$ en esa dirección y un acortamiento, encogimiento o contracción relativa $\varepsilon_y$ y $\varepsilon_z$ en las dos direcciones transversales.*

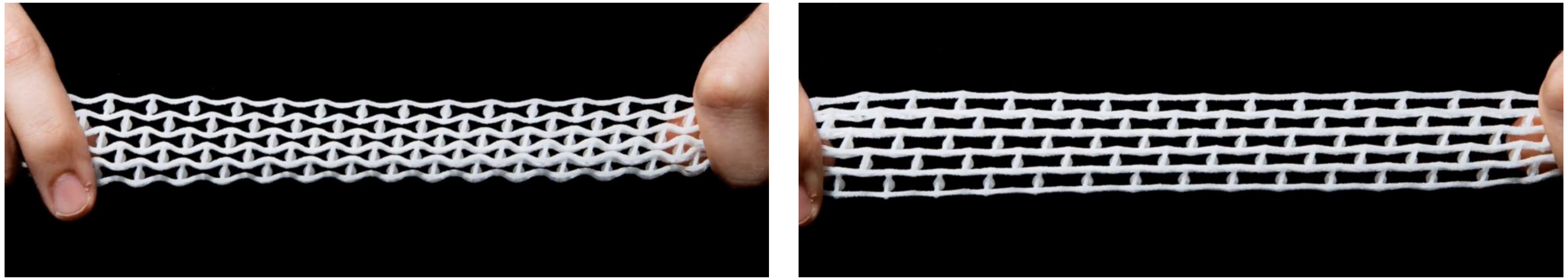
# 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x \rightarrow \varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E} \\ \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x \rightarrow \varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E} \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \nu = -\frac{\varepsilon_{transversal}}{\varepsilon_{longitudinal}}$$

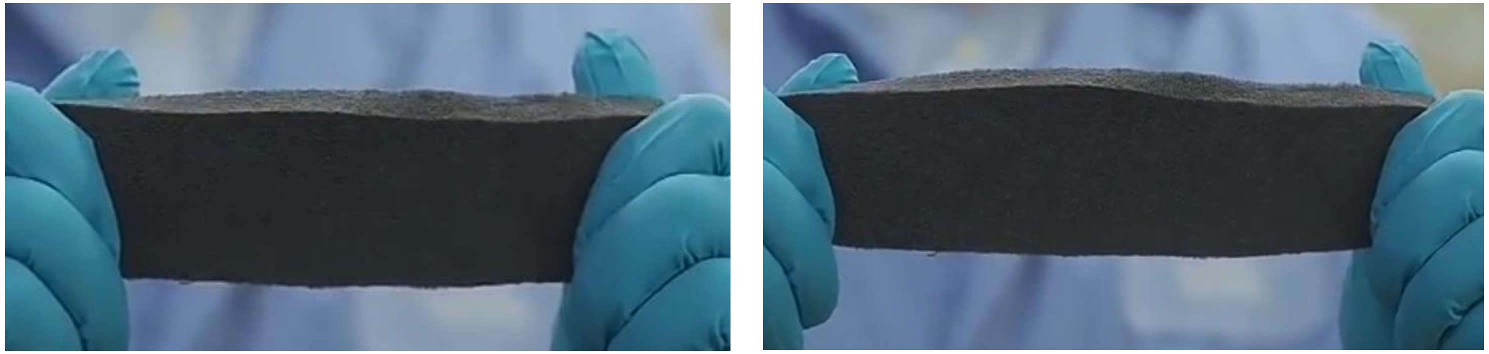
**Tabla 4.1:** *Módulos de Young y coeficientes de Poisson para diferentes materiales.*

| Material | Módulo de Young (GPa) $E$ | Coeficiente de Poisson $\nu$ |
|---|---|---|
| Acero | 200 | 0.27 – 0.30 |
| Arcilla saturada | 4 – 20 | 0.40 – 0.499 |
| Caucho | 0.01 – 0.1 | ≈ 0.499 |
| Concreto | 21.5 – 39 | 0.20 |
| Corcho | 0.032 | ≈ 0 |
| Material augético | | negativo |
| Nanotubos de carbono | 1000 – 5000 | -0.2 – 0.06 |

# Materiales augéticos



Auxetic MetaMaterials: https://www.youtube.com/watch?v=mKKC4dejJnU



Material Conexion Bilbao, espuma augética: https://www.facebook.com/watch/?v=708393856186455

# 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson

### Módulo de Young E

- Thomas Young (1773-1829), científico y egiptólogo.
- Indica qué tan rígido es un material, es decir, cuál es la oposición que ofrece al ser estirado/contraido.
- Disminuye con el aumento de la temperatura.

### Coeficiente de Poisson ν

- Siméon Denis Poisson (1781-1840), matemático y físico.
- Expresa una relación entre las deformaciones transversales y longitudinales.
- Varían con las variaciones de la temperatura

$f_y$ también disminuye con el aumento de la temperatura.

## 4.3.1. Deformaciones de un sólido sometido a esfuerzos normales en las direcciones $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$

**Tabla 4.2:** *Deformaciones longitudinales producidas por los diferentes esfuerzos. Dichas deformaciones longitudinales se suman en cada dirección (esto es, en cada fila) por virtud del principio de superposición, tal y como se indica en la Figura 4.5, para producir la deformación elástica total.*

| deformación longitudinal | producida por $\sigma_x$ | producida por $\sigma_y$ | producida por $\sigma_z$ | producida conjuntamente por $\sigma_x$, $\sigma_y$ y $\sigma_z$ |
|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon_x$ | $\frac{\sigma_x}{E}$ | $-\nu\frac{\sigma_y}{E}$ | $-\nu\frac{\sigma_z}{E}$ | $\frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right)$ |
| $\varepsilon_y$ | $-\nu\frac{\sigma_x}{E}$ | $\frac{\sigma_y}{E}$ | $-\nu\frac{\sigma_z}{E}$ | $\frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right)$ |
| $\varepsilon_z$ | $-\nu\frac{\sigma_x}{E}$ | $-\nu\frac{\sigma_y}{E}$ | $\frac{\sigma_z}{E}$ | $\frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right)$ |

## 4.3.1. Deformaciones de un sólido sometido a esfuerzos normales en las direcciones $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$

**Principio de superposición:** dice que para un sistema lineal, la respuesta neta, para una posición y tiempo dados, causada por dos o más estímulos, es la suma de las respuestas que causan cada uno de los estímulos individualmente.

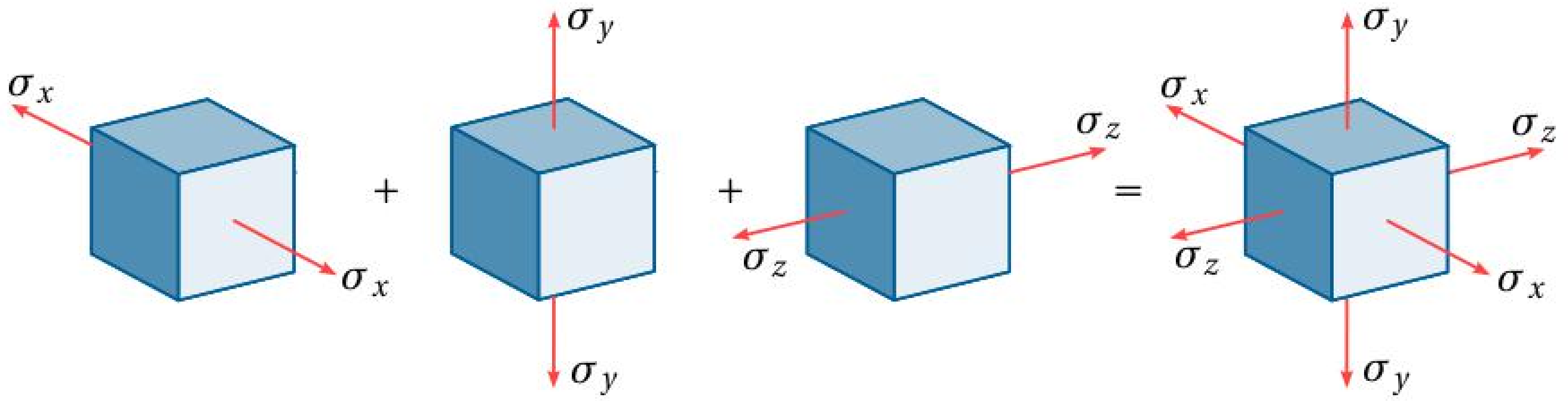



**Figura 4.5:** *Al utilizar el principio de superposición, se asume implícitamente que la acción conjunta de los esfuerzos en un sólido tridimensional se puede analizar como la suma de los efectos producidos individualmente por cada uno de los esfuerzos aplicados en las direcciones x, y y z sobre el sólido en consideración.*

# 4.3.1. Deformaciones de un sólido sometido a esfuerzos normales en las direcciones $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$

Legitimidad del prinicipio de superposición

- Deformaciones y desplazamientos pequeños.
- Los desplazamientos no afectan sustancialmente la acción de las fuerzas externas.

Se utiliza la configuración original del elemento, no la configuración deformada al aplicar cargas secuancialmente

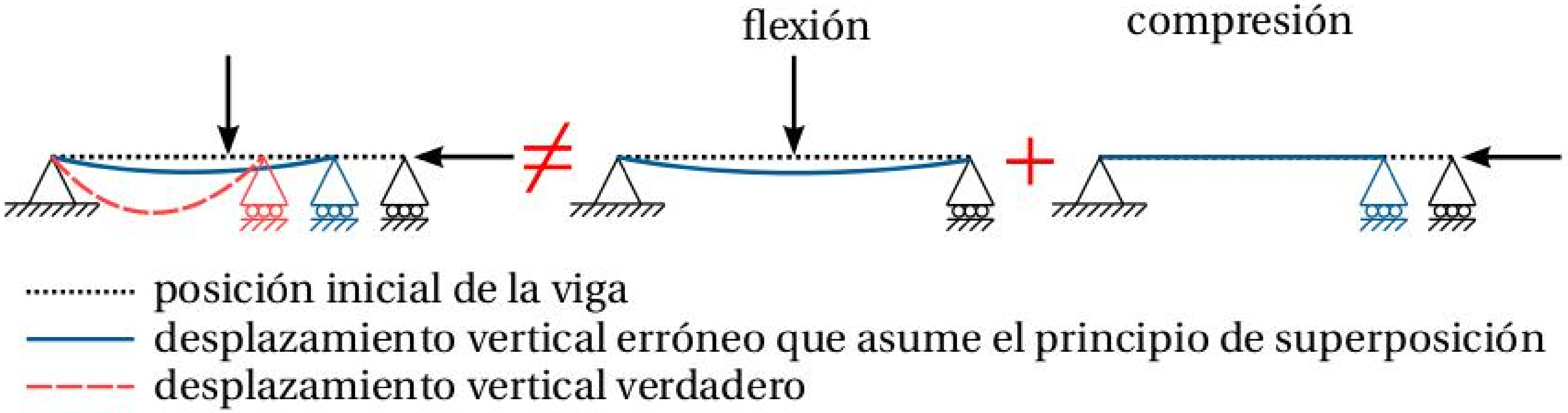



**Figura 4.6:** *Barra esbelta sometida a flexo-compresión. El principio de superposición asumiría erróneamente que la barra no se pandea, por lo que estimaría unos desplazamientos verticales inferiores a los verdaderos. En realidad la carga vertical incrementa aún más el pandeo de la barra inducida por la carga axial. Por esta razón, no es posible utilizar el principio de superposición en elementos esbeltos sometidos a flexo-compresión.*

## 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales

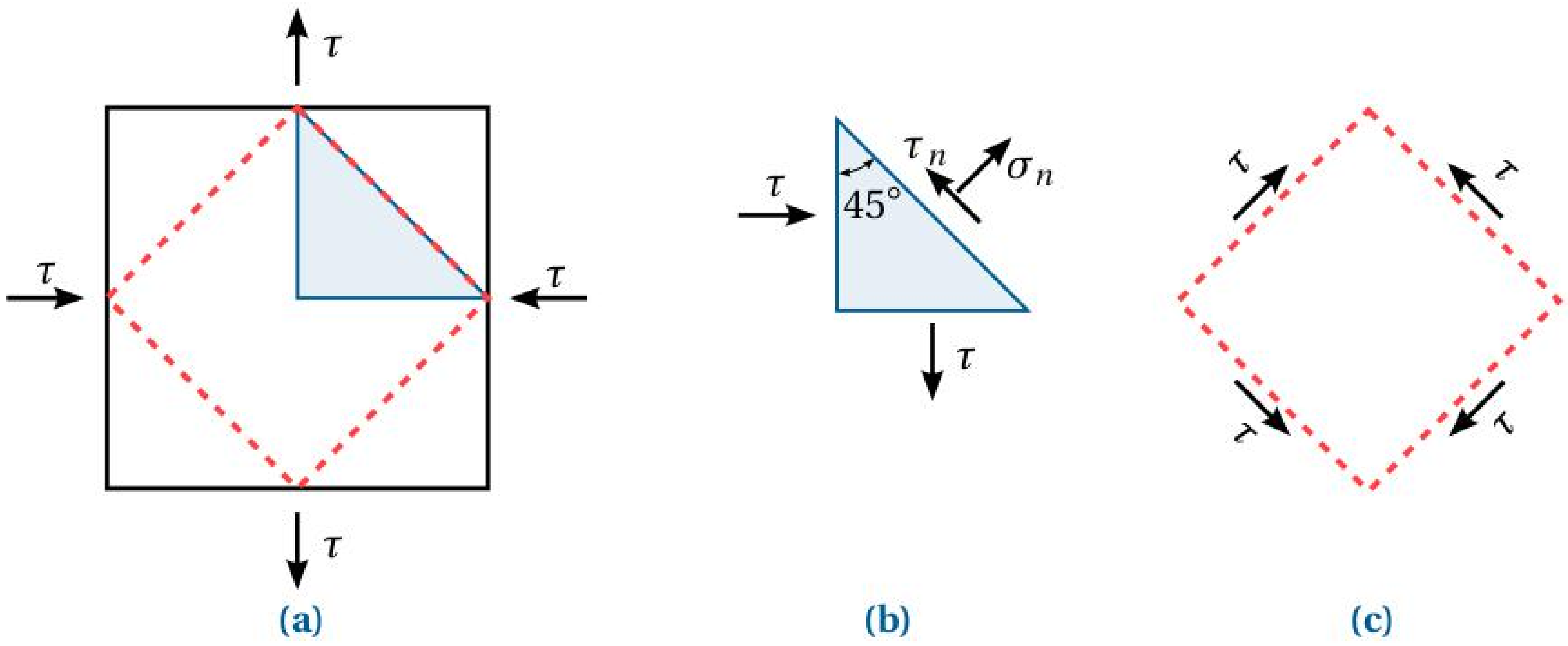
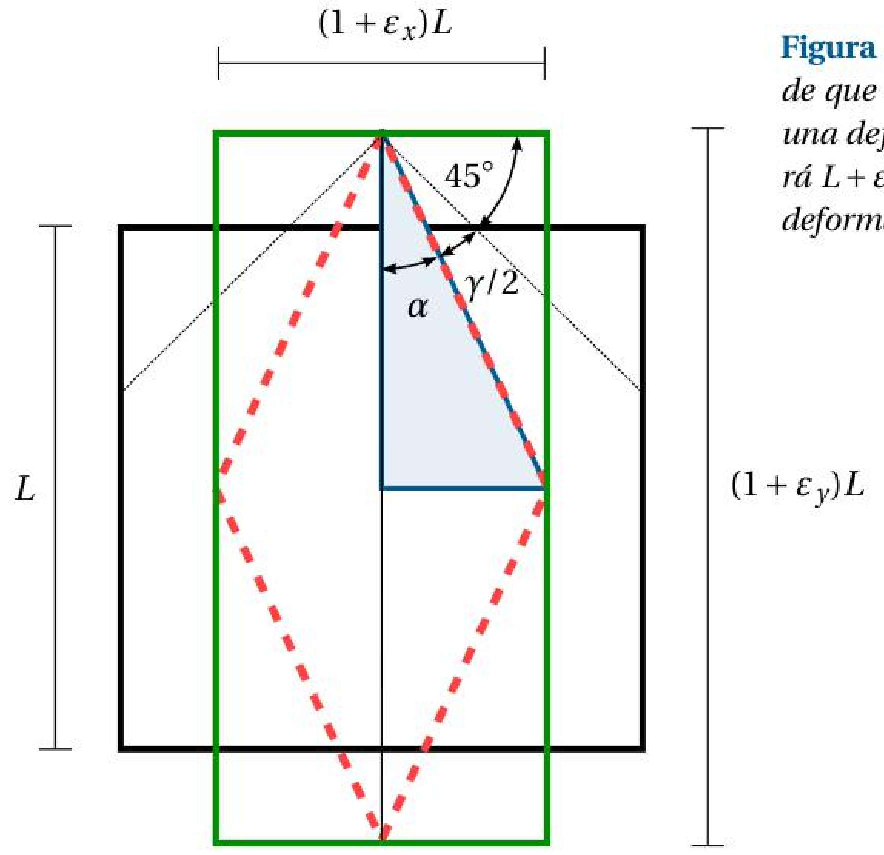
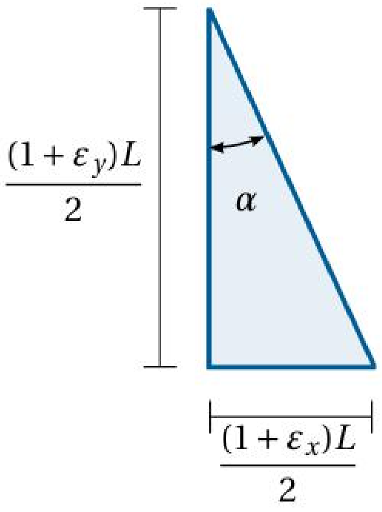



**Figura 4.7:** *Esfuerzos aplicados sobre el cuadrado considerado en la Sección 4.3.2. El cuadrado negro mostrado en la Figura (a) tiene un lado de longitud L.*

# 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales




**(a)**




**(b)**

**Figura 4.8:** *Cambios de forma del cuadrado negro considerado en la Sección 4.3.2. Recuerde que si la longitud inicial de una barra es $L$ y esta se somete a una carga que le imprime una deformación longitudinal $\varepsilon$, el estiramiento $\Delta L$ de la barra será $\varepsilon L$ y su longitud final será $L+\varepsilon L=(1+\varepsilon)L$; esta analogía se puede utilizar para verificar las dimensiones del sólido deformado.*

https://github.com/michaelherediaperez/mecanica_de_solidos_un/blob/main/codigos/cap_04/04_03_02.ipynb

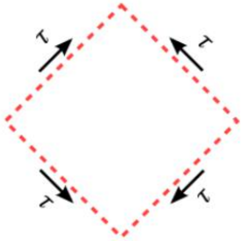
$$\boxed{G := \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

$\nu > -1$

# 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales

Un elemento sólido que esté hecho de un material **elástico** e **isótropo:**

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \qquad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}.$$



Para **un material con comportamiento lineal, elástico, e isótropo**, las deformaciones longitudinales no están afectadas por las deformaciones angulares y no existe un efecto de Poisson para el esfuerzo cortante.

# 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \qquad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}.$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right)$$

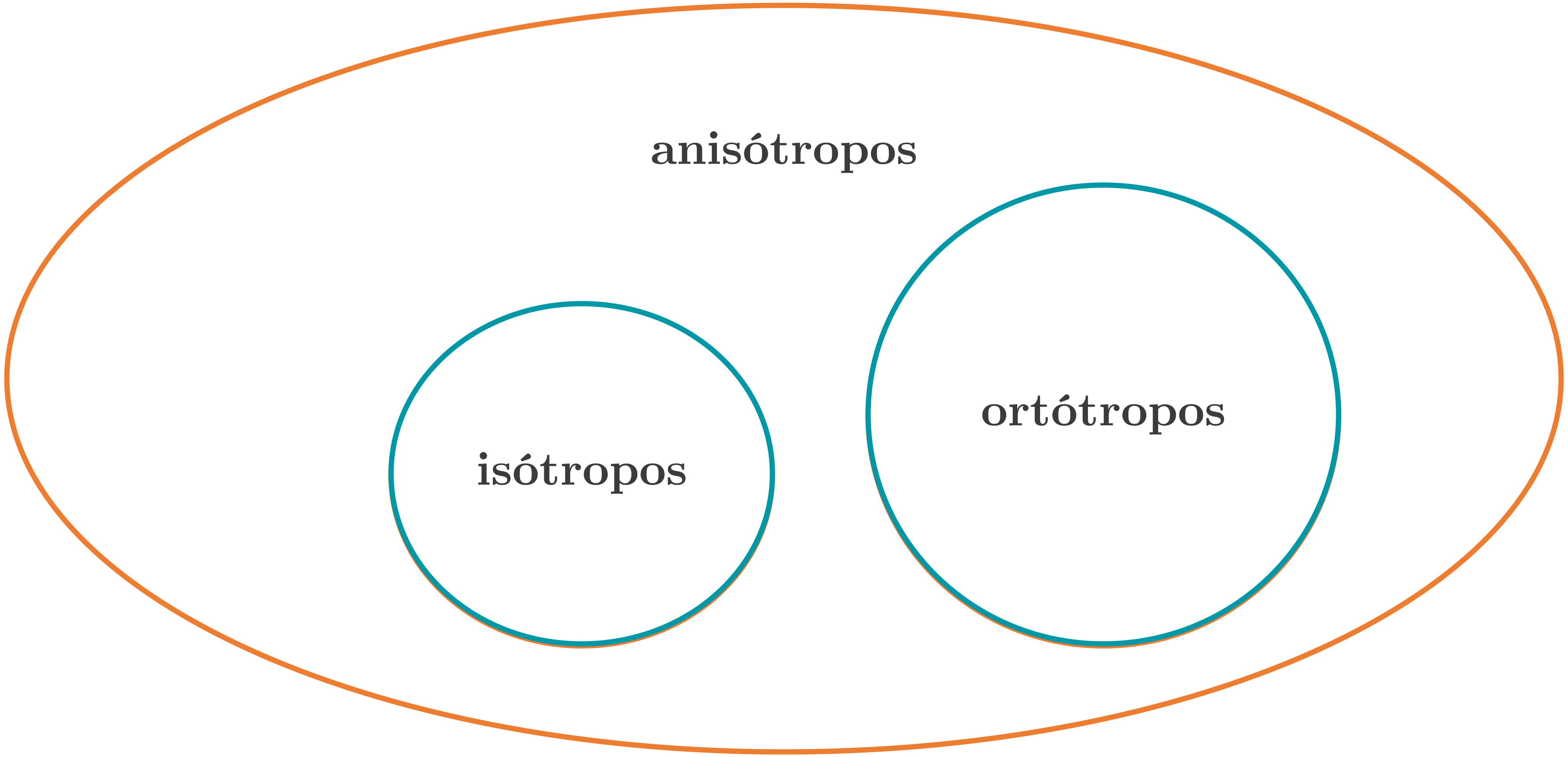
en notación tensorial

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}\right]$$

Ejemplo, $\varepsilon_y$

$$\begin{aligned}\varepsilon_y = \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{22} - \nu\delta_{22}\sum_{k=1}^{3}\sigma_{kk}\right]\\ &= \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)\right]\\ &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right].\end{aligned}$$

# Materiales isótropos, anisótropos y ortótropos



# Materiales isótropos, anisótropos y ortótropos

**Isótropos**

- Acero
- Aluminio
- Concreto

Se observa que sus propiedades mecánicas son un promedio de aquellas en todas las posibles orientaciones de las partículas individuales

**Anisótropos**

- Maderas
- Tejido humano
- Fibras de carbono
- Placas metálicas roladas

- Estructura interna a partir de fibras alineadas o cuyo proceso de elaboración induce alteraciones en las estructuras atómicas (cristales).

**Ortótropos**

- Maderas
- Reforzados con fibras
- Algunos cristales
- Metales laminados

# 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos

**Isótropo:** propiedades mecánicas iguales en todas las direcciones del análisis

Deformaciones longitudinales y angulares son independientes

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \qquad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}.$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right)$$

Despejando los esfuerzos

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2G\varepsilon_{ij}$$

$$\sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x$$
$$\sigma_y = \lambda e + 2G\varepsilon_y$$
$$\sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z$$
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$
$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$
$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}.$$

Ecuaciones de Lamé

$$\lambda := \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Constante de Lamé

Père de Gabriel Jean Baptiste Lamé (1795-1870), matemático

# 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos

https://github.com/michaelherediaperez/mecanica_de_solidos_un/blob/main/codigos/cap_04/04_03_03.ipynb

$$
\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}
= \frac{E}{1+\nu}
\begin{pmatrix}
\frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}
$$

***D***: **matriz constitutiva** o **matriz de constantes elásticas**, para un material isotrópico

$$
\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda \operatorname{tr}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \boldsymbol{I} + 2G\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}
$$

Relación entre la **matriz de tensiones** y la de **deformaciones matemáticas**

# 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos

**Anisótropo:** propiedades mecánicas diferentes según la dirección del análisis

Material anisótropo, lineal y elástico

$$\sigma_x = d_{1111}\varepsilon_x + d_{1122}\varepsilon_y + d_{1133}\varepsilon_z + d_{1123}\gamma_{yz} + d_{1113}\gamma_{xz} + d_{1112}\gamma_{xy}$$
$$= d_{1111}\varepsilon_x + d_{1122}\varepsilon_y + d_{1133}\varepsilon_z + 2d_{1123}\varepsilon_{yz} + 2d_{1113}\varepsilon_{xz} + 2d_{1112}\varepsilon_{xy},$$

combinación lineal de las 6 componentes de deformación

$d_{ijkl}$ independiente de $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ cuando el material es homogéneo

$$\underbrace{\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}}_{\text{Notación de Voigt}}$$

$$\sigma_{ij} = d_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

$$\boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\begin{pmatrix} d_{1111} & d_{1122} & d_{1133} & d_{1123} & d_{1113} & d_{1112} \\ d_{2211} & d_{2222} & d_{2233} & d_{2223} & d_{2213} & d_{2212} \\ d_{3311} & d_{3322} & d_{3333} & d_{3323} & d_{3313} & d_{3312} \\ d_{2311} & d_{2322} & d_{2333} & d_{2323} & d_{2313} & d_{2312} \\ d_{1311} & d_{1322} & d_{1333} & d_{1323} & d_{1313} & d_{1312} \\ d_{1211} & d_{1222} & d_{1233} & d_{1223} & d_{1213} & d_{1212} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{D}} \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}}$$

# 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos

Aquí el orden de los elementos del esfuerzo cortante y de la deformación angular es el que comúnmente se asume en mecánica de sólidos. Su elección no es arbitraria, sino que está dada bajo el criterio de que $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$ y que $\sigma_{ij} = \sigma_k$ para $i, j, k = 1, 2, \ldots, 6$ de tal modo que $i + j + k = 9$. Por ejemplo, si $i = 2$ y $j = 3$, entonces $k = 4$. Esto explica el porqué de la relación $\tau_{yz} = \sigma_{23} = \sigma_4$.

$$\underbrace{\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}}_{\text{Notación de Voigt}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\begin{pmatrix} d_{1111} & d_{1122} & d_{1133} & d_{1123} & d_{1113} & d_{1112} \\ d_{2211} & d_{2222} & d_{2233} & d_{2223} & d_{2213} & d_{2212} \\ d_{3311} & d_{3322} & d_{3333} & d_{3323} & d_{3313} & d_{3312} \\ d_{2311} & d_{2322} & d_{2333} & d_{2323} & d_{2313} & d_{2312} \\ d_{1311} & d_{1322} & d_{1333} & d_{1323} & d_{1313} & d_{1312} \\ d_{1211} & d_{1222} & d_{1233} & d_{1223} & d_{1213} & d_{1212} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{D}} \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

# A.5. Notación tensorial de Voigt

Woldemar Voigt

Ejemplo:

La matriz de esfuerzos de Cauchy:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Se puede expresar como un vector de dimensión 6:

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}\right]^T \equiv \left[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\right]^T$$

# 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos

$$\sigma_{ij} = \underbrace{d_{ijkl}}\varepsilon_{kl}$$

$\boldsymbol{d_{ijkl}}$ es un tensor de orden 4 ($3^4 = 81$) con propiedades de simetría

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{d_{ijkl} = d_{jikl}} \;,\; \boldsymbol{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}} \\ \boldsymbol{d_{ijkl} = d_{ijlk}} \;,\; \boldsymbol{\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}} \end{array}\right.$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\begin{pmatrix} d_{1111} & d_{1122} & d_{1133} & d_{1123} & d_{1113} & d_{1112} \\ d_{2211} & d_{2222} & d_{2233} & d_{2223} & d_{2213} & d_{2212} \\ d_{3311} & d_{3322} & d_{3333} & d_{3323} & d_{3313} & d_{3312} \\ d_{2311} & d_{2322} & d_{2333} & d_{2323} & d_{2313} & d_{2312} \\ d_{1311} & d_{1322} & d_{1333} & d_{1323} & d_{1313} & d_{1312} \\ d_{1211} & d_{1222} & d_{1233} & d_{1223} & d_{1213} & d_{1212} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{D}} \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$\boldsymbol{D}$ es una matriz ($6^2 = 36$) **definida positiva** y **simétrica:** $\boldsymbol{d_{ijkl} = d_{klij}}$

(Solecki y Connant, 2003)

$\boldsymbol{D^{-1} = S}$ es la **matriz de conformidad**

$$\boldsymbol{\varepsilon = S\sigma}$$

Tenga en cuenta que aunque un material puede ser anisótropo en una escala de medida, se puede considerar isótropo en otra escala, en general, mayor. Ejemplo: el concreto

***D*: matriz constitutiva** o **matriz de constantes elásticas**, para un material anisotrópico (caso más general)

# Repaso: Matriz definida positiva

Se dice que una matriz $\boldsymbol{K}$ es definida positiva si:

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i K_{ij} x_j > 0$$

Para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

Alternativamente, una matriz es definida positiva si todos sus valores propios son números reales positivos. Toda matriz definida positiva $\boldsymbol{K}$ es invertible, su inversa $\boldsymbol{K}^{-1}$ existe.

# Explicación de las componentes:

De las 81 componentes del tensor $d_{ijkl}$ (o de las 36 componentes de la matriz $\mathbf{D}$) se requieren únicamente 21 constantes para describir un material anisótropo lineal elástico en términos generales (los términos en la diagonal y encima de la diagonal de la matriz $\mathbf{D}$)

Para materiales isótropos, solo se necesitan dos constantes a saber: Módulo de Young $E$ y coeficiente de Poisson $\nu$.

Generalmente, los materiales anisótropos presentan ciertos ejes de simetría, por lo que las constantes se reducen de 21 a un número entre 2 y 21.

# 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortótropos

**ortótropo:** propiedades mecánicas diferentes en tres direcciones mutuamente ortogonales alineadas con la estructural del material.

- Sin interacción entre $\boldsymbol{\varepsilon}$ y $\boldsymbol{\gamma}$, ni entre $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\tau}$.
- En el caso tridimensional, requieren de 9 constantes elásticas:

$E_x,\ E_y,\ E_z$ → $E_i$ módulo de elasticidad a lo largo del eje $i$.

$\nu_{yz},\ \nu_{xz},\ \nu_{xy}$ → $\nu_{ij}$ coeficiente de Poisson que corresponde a la contracción en la dirección $\boldsymbol{j}$ cuando se aplica un estiramiento en la dirección $\boldsymbol{i}$.

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_{\text{transversal}}}{\varepsilon_{\text{longitudinal}}} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}$$

$G_{yz},\ G_{xz},\ G_{xy}$ → $G_{ij}$ módulo de cortante en el plano $ij$.

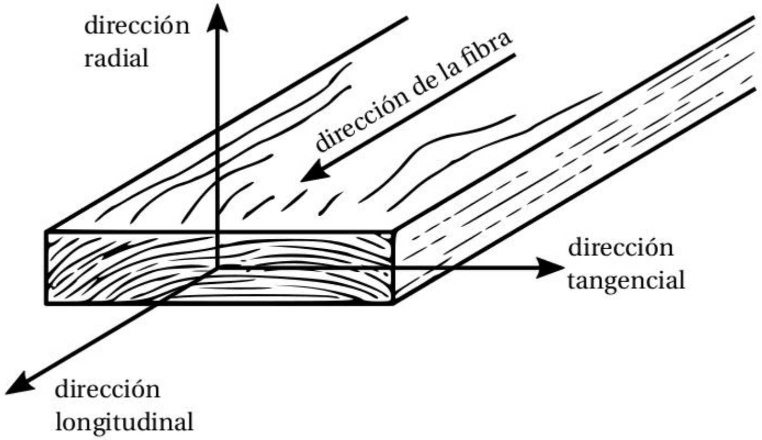



**Figura 4.9:** *Direcciones de ortotropía de la madera. Las propiedades mecánicas de la madera se pueden describir con respecto a las direcciones longitudinales (paralela a la fibra), radiales (normal al crecimiento de los anillos) y tangenciales (a los anillos).*

# 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortótropos

Deformaciones longitudinales y angulares son independientes

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E_x}\sigma_x - \dfrac{\nu_{yx}}{E_y}\sigma_y - \dfrac{\nu_{zx}}{E_z}\sigma_z \\ \varepsilon_y = -\dfrac{\nu_{xy}}{E_x}\sigma_x + \dfrac{1}{E_y}\sigma_y - \dfrac{\nu_{zy}}{E_z}\sigma_z \\ \varepsilon_z = -\dfrac{\nu_{xz}}{E_x}\sigma_x - \dfrac{\nu_{yz}}{E_y}\sigma_y + \dfrac{1}{E_z}\sigma_z \\ \gamma_{yz} = \dfrac{1}{G_{yz}}\tau_{yz} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{1}{G_{xy}}\tau_{xy}. \\ \gamma_{xz} = \dfrac{1}{G_{xz}}\tau_{xz} \end{cases}$$

Ley de Hooke generalizada para materiales ortótropos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{S}} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}}$$

$$\nu_{yx} = \frac{E_y}{E_x}\nu_{xy} \quad \nu_{zx} = \frac{E_z}{E_x}\nu_{xz} \quad \nu_{zy} = \frac{E_z}{E_y}\nu_{yz}.$$

Simetría

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1-\nu_{yz}\nu_{zy}}{E_yE_z\Delta} & \frac{\nu_{yz}\nu_{zx}+\nu_{yx}}{E_yE_z\Delta} & \frac{\nu_{yx}\nu_{zy}+\nu_{zx}}{E_yE_z\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{xz}\nu_{zy}+\nu_{xy}}{E_xE_z\Delta} & \frac{1-\nu_{xz}\nu_{zx}}{E_xE_z\Delta} & \frac{\nu_{zy}+\nu_{xy}\nu_{zx}}{E_xE_z\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{xy}\nu_{yz}+\nu_{xz}}{E_xE_y\Delta} & \frac{\nu_{yz}+\nu_{xz}\nu_{yx}}{E_xE_y\Delta} & \frac{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}{E_xE_y\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{yz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xy} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{D}} \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{yz}\nu_{zy} - \nu_{xz}\nu_{zx} - \nu_{xy}\nu_{yx} - 2\nu_{yx}\nu_{zy}\nu_{xz}}{E_xE_yE_z}$$

Matriz constitutiva de un material ortótropo

## 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortótropos

A partir de que D y S deben ser definidas positivas, y con el objetivo de satisfacer ciertas restricciones termodinámicas, Lempriere (1968) demostró que las constantes asociadas a un material ortótropo deben satisfacer las siguientes desigualdades:

$$
\begin{array}{ccc}
E_x > 0, & E_y > 0, & E_z > 0, \\
G_{yz} > 0, & G_{xz} > 0, & G_{xy} > 0, \\
1 - \nu_{yz}\nu_{zy} > 0, & 1 - \nu_{xz}\nu_{zx} > 0, & 1 - \nu_{xy}\nu_{yx} > 0, \\
|\nu_{zy}| < \sqrt{\dfrac{E_z}{E_y}}, & |\nu_{yz}| < \sqrt{\dfrac{E_y}{E_z}}, & |\nu_{zx}| < \sqrt{\dfrac{E_z}{E_x}}, \\
|\nu_{xz}| < \sqrt{\dfrac{E_x}{E_z}}, & |\nu_{yx}| < \sqrt{\dfrac{E_y}{E_x}}, & |\nu_{xy}| < \sqrt{\dfrac{E_x}{E_y}}
\end{array}
$$

y

$$
\Delta > 0, \qquad \nu_{yx}\nu_{zy}\nu_{xz} < \frac{1 - \nu_{yx}^2 \frac{E_x}{E_y} - \nu_{zy}^2 \frac{E_y}{E_z} - \nu_{xz}^2 \frac{E_z}{E_x}}{2} < \frac{1}{2}.
$$

## 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortótropos

En ocasiones las direcciones de ortotropía están alineadas con respecto a un sistema de coordenadas locales $x'$, $y'$ y $z'$, por lo que la ley de Hooke, en este caso, se podría expresar como $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{D}'\boldsymbol{\varepsilon}'$. Utilizando las matrices de transformación $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\sigma}}$ y $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (ver las ecuaciones (2.23) y (3.18), respectivamente) tenemos que $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{D}'\boldsymbol{\varepsilon}'$ se puede escribir como $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}'\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\varepsilon}$, es decir, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\varepsilon}$ y por virtud de la ecuación (3.19), esto es $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1} = \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{T}$, resulta que:

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{T}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{\varepsilon}; \tag{4.26}$$

la ecuación $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{T}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ nos permite convertir la matriz constitutiva $\boldsymbol{D}'$ definida para las coordenadas locales $x'$, $y'$ y $z'$ a una matriz constitutiva $\boldsymbol{D}$ expresada en función de las coordenadas globales $x$, $y$ y $z$.

# Recuerde:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \sigma_{z'} \\ \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & 2\gamma_1\,\beta_1 & 2\gamma_1\,\alpha_1 & 2\alpha_1\,\beta_1 \\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & 2\gamma_2\,\beta_2 & 2\gamma_2\,\alpha_2 & 2\alpha_2\,\beta_2 \\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & 2\gamma_3\,\beta_3 & 2\gamma_3\,\alpha_3 & 2\alpha_3\,\beta_3 \\ \alpha_2\,\alpha_3 & \beta_2\,\beta_3 & \gamma_2\,\gamma_3 & \gamma_2\,\beta_3+\beta_2\,\gamma_3 & \gamma_2\,\alpha_3+\alpha_2\,\gamma_3 & \alpha_2\,\beta_3+\beta_2\,\alpha_3 \\ \alpha_1\,\alpha_3 & \beta_1\,\beta_3 & \gamma_1\,\gamma_3 & \gamma_1\,\beta_3+\beta_1\,\gamma_3 & \gamma_1\,\alpha_3+\alpha_1\,\gamma_3 & \alpha_1\,\beta_3+\beta_1\,\alpha_3 \\ \alpha_1\,\alpha_2 & \beta_1\,\beta_2 & \gamma_1\,\gamma_2 & \gamma_1\,\beta_2+\beta_1\,\gamma_2 & \gamma_1\,\alpha_2+\alpha_1\,\gamma_2 & \alpha_1\,\beta_2+\beta_1\,\alpha_2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{T_\sigma}} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{z'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{x'y'} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & \gamma_1\,\beta_1 & \gamma_1\,\alpha_1 & \alpha_1\,\beta_1 \\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & \gamma_2\,\beta_2 & \gamma_2\,\alpha_2 & \alpha_2\,\beta_2 \\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & \gamma_3\,\beta_3 & \gamma_3\,\alpha_3 & \alpha_3\,\beta_3 \\ 2\alpha_2\,\alpha_3 & 2\beta_2\,\beta_3 & 2\gamma_2\,\gamma_3 & \gamma_2\,\beta_3+\beta_2\,\gamma_3 & \gamma_2\,\alpha_3+\alpha_2\,\gamma_3 & \alpha_2\,\beta_3+\beta_2\,\alpha_3 \\ 2\alpha_1\,\alpha_3 & 2\beta_1\,\beta_3 & 2\gamma_1\,\gamma_3 & \gamma_1\,\beta_3+\beta_1\,\gamma_3 & \gamma_1\,\alpha_3+\alpha_1\,\gamma_3 & \alpha_1\,\beta_3+\beta_1\,\alpha_3 \\ 2\alpha_1\,\alpha_2 & 2\beta_1\,\beta_2 & 2\gamma_1\,\gamma_2 & \gamma_1\,\beta_2+\beta_1\,\gamma_2 & \gamma_1\,\alpha_2+\alpha_1\,\gamma_2 & \alpha_1\,\beta_2+\beta_1\,\alpha_2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{T_\varepsilon}} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}.$$

# 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y ...

(Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortótropos)

(Esta sección será de estudio autónomo)

Se concluye que ambas direcciones principales coinciden en el caso de tener un material **elástico lineal**, **isótropo** u **ortótropo**.

# 4.5. Cambios de volumen y la dilatación cúbica

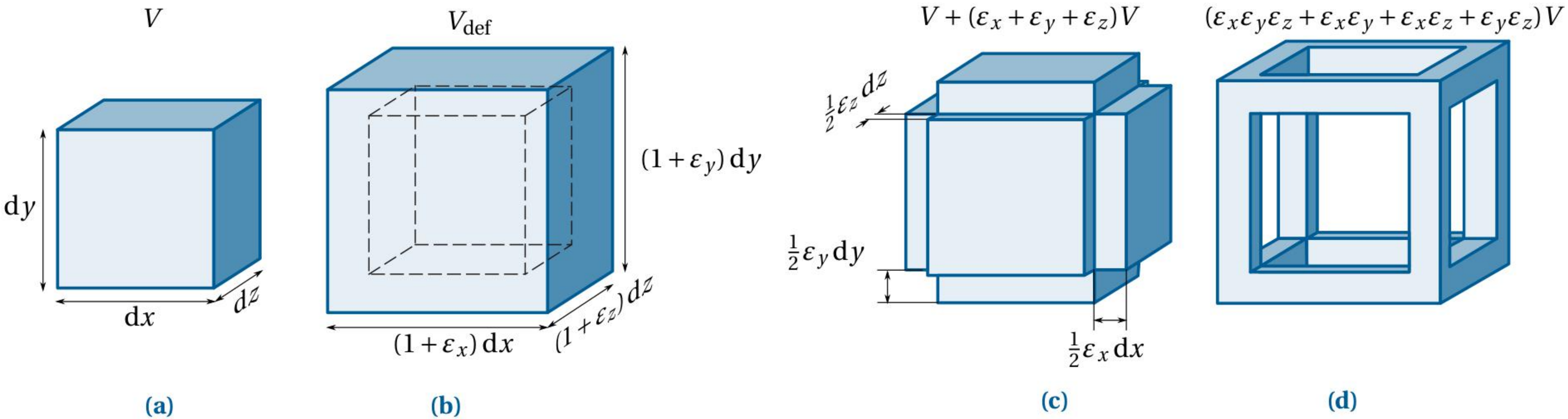



**Figura 4.10:** *En (a) y (b) podemos observar, respectivamente, un cubo antes y después de la deformación con sus respectivos volúmenes; el volumen del cubo sin deformar y ya deformado es, respectivamente, $V$ y $V_{def}$. La figura (c) muestra una aproximación del volumen deformado del sólido, en el cual se ha supuesto que el cambio de volumen ha sido estimado mediante la ecuación (4.30) y, en consecuencia, su volumen es $V+(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)V$; en (d) se ilustra el error incurrido al aproximar el volumen mediante (4.30); este error tiene una magnitud de $(\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_x\varepsilon_z+\varepsilon_x\varepsilon_y)V$.*

# 4.5. Cambios de volumen y la dilatación cúbica

Dilatación cúbica o deformación volumétrica

cambio de volumen por unidad de volumen

$$\boxed{e := \frac{V_{\text{def}} - V}{V} \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,}$$

$$\downarrow$$

$$e(x, y, z) = \operatorname{div} \boldsymbol{u}(x, y, z) = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z}$$

la divergencia mide el grado con el cual un campo vectrorial se expande o se contrae alrededor de un punto $(x,\ y,\ z)$

# 4.5. Cambios de volumen y la dilatación cúbica

Se ha demostrado matemáticamente que:

1. Los cambios de volumen en el sólido son producidos por los esfuerzos normales.
2. Un elemento sometido solo a fuerzas cortantes no cambia de volumen.
3. Si el elemento está sometido a esfuerzos normales y cortantes, su cambio de volumen se puede aproximar mediante $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

# 4.5. Cambios de volumen y la dilatación cúbica

El cambio de volumen en todo el sólido $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\begin{aligned}\Delta V &\approx \iiint_{\Omega} e(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \iiint_{\Omega} \big(\varepsilon_x(x,y,z)+\varepsilon_y(x,y,z)+\varepsilon_z(x,y,z)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

# 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia

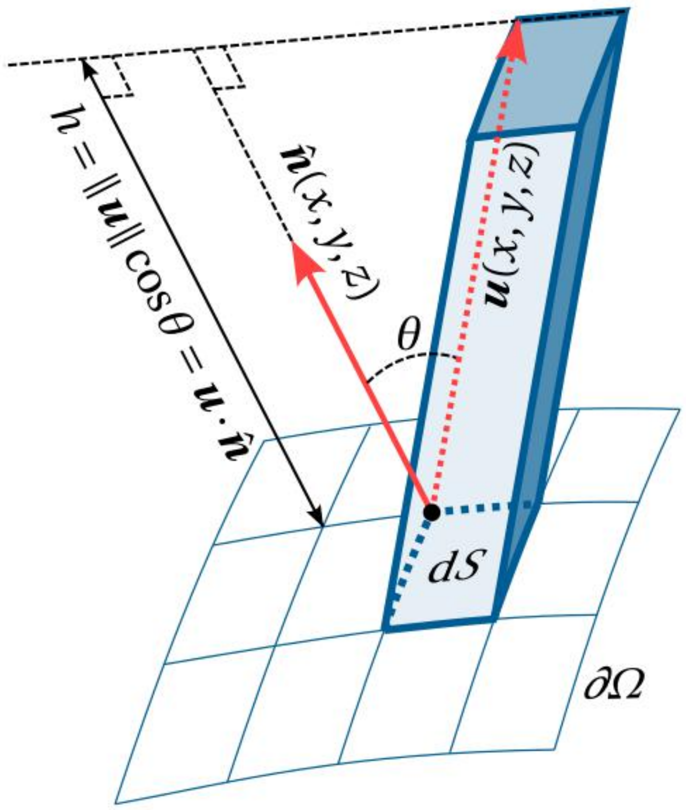



**Figura 4.11:** *Cuando el sólido cambia de volumen, su forma también varía. De hecho uno puede observar un flujo de material a través del contorno imaginario del sólido antes de la deformación. Ese material desplazado se cuantifica en unidades de volumen.*

# 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia

Teorema de la divergencia, de Gauss o de Ostrogradsky

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{u}(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \oiint_{\partial\Omega} \boldsymbol{u}(x,y,z)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}(x,y,z)\,\mathrm{d}S;$$

- Joseph-Lois Lagrande (1736-1813) en 1762, matemático y astrónomo.
- Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) en 1813, matemático y físico.
- Mikhail Vasilyevich Ostrogradsky (1801-1862 en 1826, matemático y físico.

Nos permite calcular el cambio de volumen de un material ya sea como la suma de los pequeños cambios de volumen de cada uno de los diferenciales dV que lo conforman o mediante el flujo del material a través del contorno del sólido.

1D $\equiv$ integración por partes, 2D $\equiv$ teorema de Green

# 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad

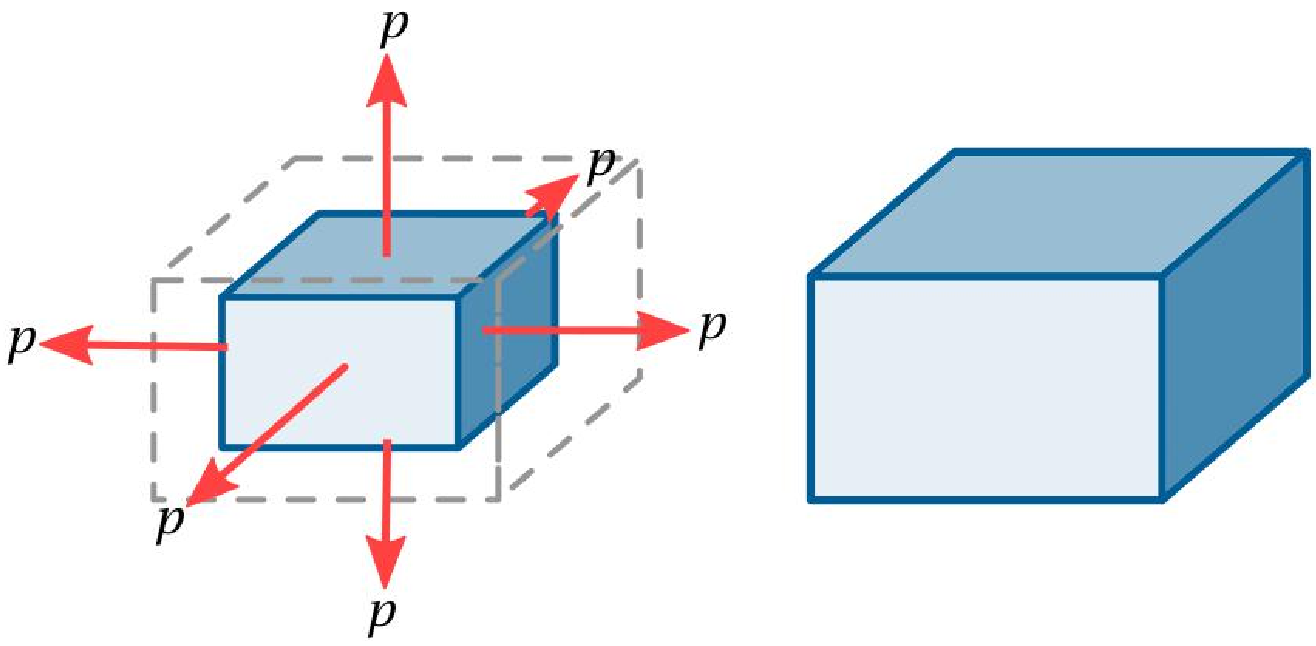



**Figura 4.12:** *Configuración de esfuerzos hidrostáticos. Sobre todas las caras del sólido actúa un esfuerzo p; por lo tanto,* $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$.

# 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad

Es una propiedad del material que determina su incompresibilidad y es una medida de la capacidad de una sustancia de soportar cambios de volumen cuando se somete a esfuerzos normales en todas las direcciones.

$$\boxed{K := \frac{E}{3(1-2\nu)}}$$

$\nu < 0.5$

- Entre más tienda $\nu$ a 0.5, más incompresible es el sólido.
- Un suelo saturado tiene un n cercano a 0.5

# 4.8. Particularización de tres a dos dimensiones

4.8.1. Tensión plana

4.8.2. Deformación plana

4.8.3. Relación entre los esfuerzos principales obtenidos en el análisis bidimensional y tridimensional

# 4.8. Particularización de tres a dos dimensiones

Existen 3 casos de particularización:

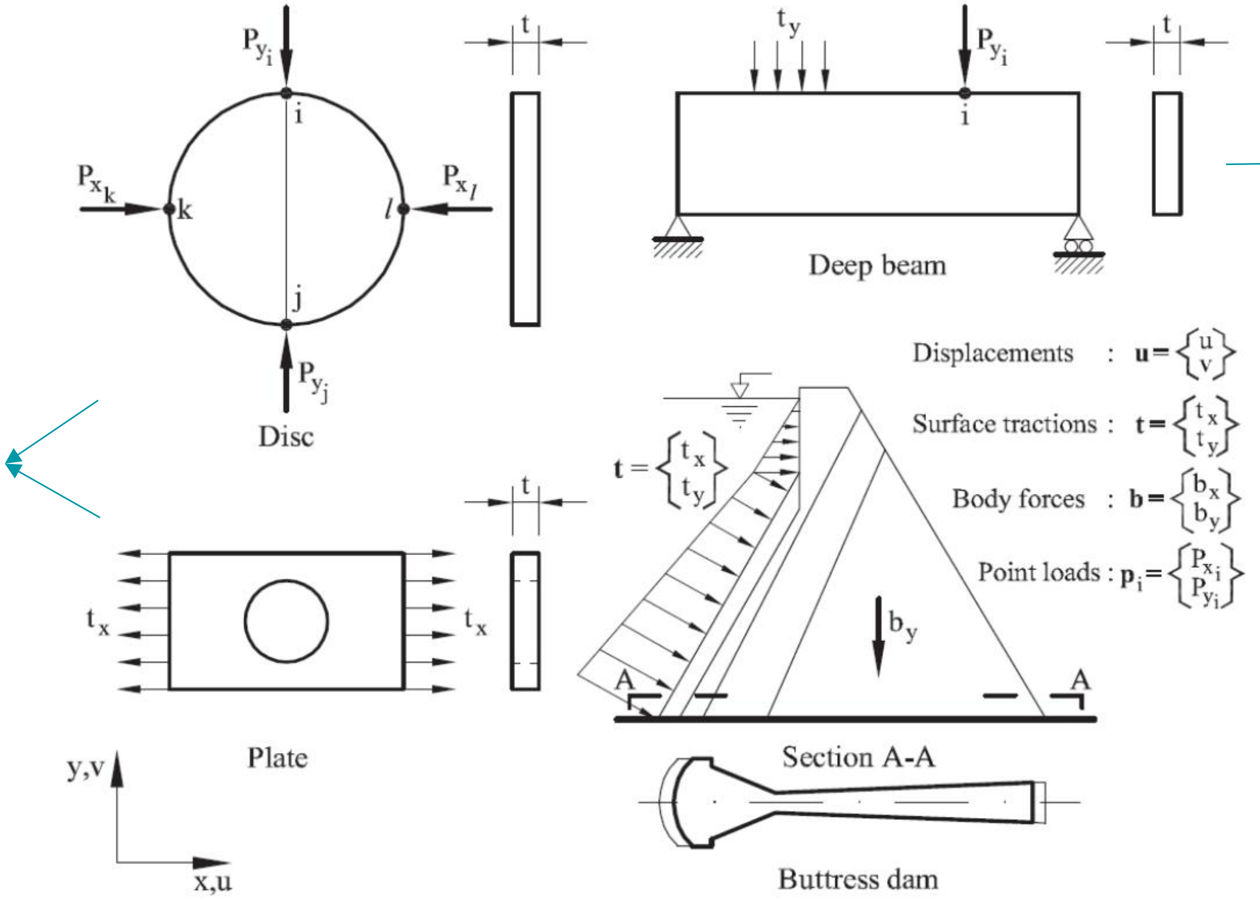
1. Tensión plana.
2. Deformación plana.
3. Caso axisimétrico. (capítulo 6)

Casos de elasticidad plana

# 4.8.1. Tensión plana

En elementos estructurales en los cuales **una dimensión es muy pequeña comparada con las otras dos**, es decir, cuando un elemento es muy delgado.

una placa delgada




viga delgada de gran altura

muro cargado en sus bordes

## 4.8.1. Tensión plana

Existe cuando uno de los tres esfuerzos principales ($\sigma_1$, $\sigma_2$ o $\sigma_3$) es cero, usualmente en elementos delgados.

Supondremos que:

- El elemento no tiene cargas aplicadas en la dirección $z$ ni sobre la superficie ortogonal al eje $z$.
- Las cargas están aplicadas en el contorno del cuerpo, ortogonal al eje $z$, distribuidas uniformemente en su espesor.

$$\boxed{\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.}$$

## 4.8.1. Tensión plana

tensión plana

$\sigma_z = 0$

$\tau_{xz} = 0$

$\tau_{yz} = 0$

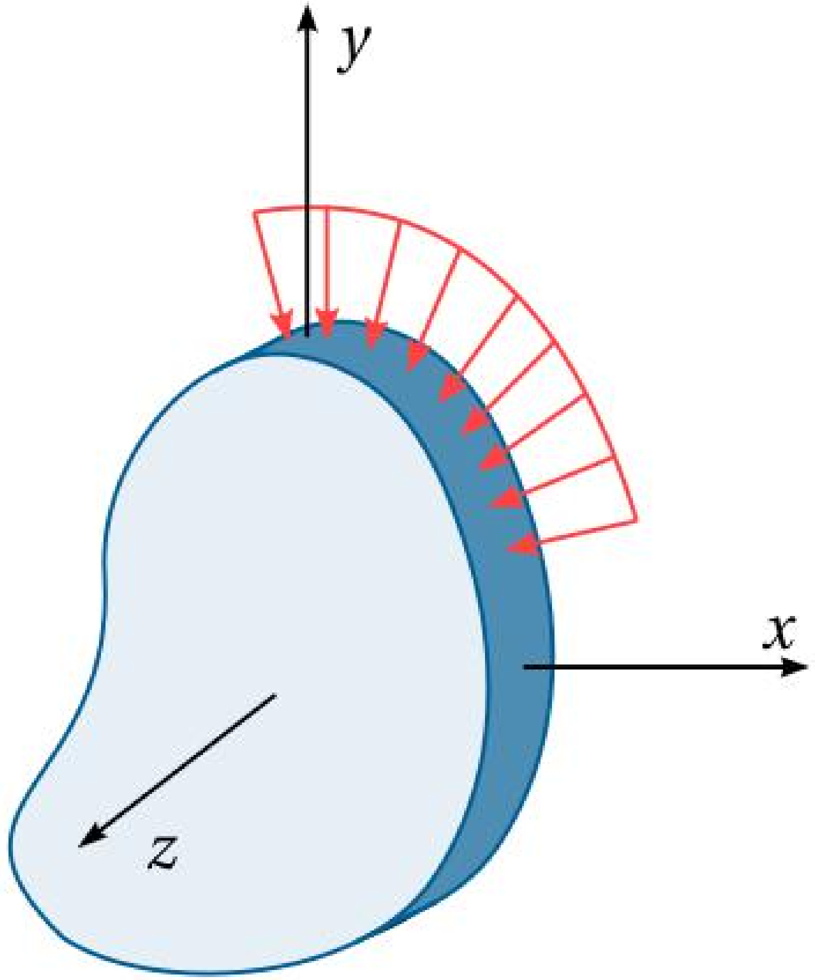



**Figura 4.13:** *Elemento en estado de tensión plana.*

# 4.8.1. Tensión plana, caso ortótropo

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E_x}\sigma_x - \dfrac{\nu_{yx}}{E_y}\sigma_y - \dfrac{\nu_{zx}}{E_z}\sigma_z \\ \varepsilon_y = -\dfrac{\nu_{xy}}{E_x}\sigma_x + \dfrac{1}{E_y}\sigma_y - \dfrac{\nu_{zy}}{E_z}\sigma_z \\ \varepsilon_z = -\dfrac{\nu_{xz}}{E_x}\sigma_x - \dfrac{\nu_{yz}}{E_y}\sigma_y + \dfrac{1}{E_z}\sigma_z \\ \gamma_{yz} = \dfrac{1}{G_{yz}}\tau_{yz} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{1}{G_{xy}}\tau_{xy}. \\ \gamma_{xz} = \dfrac{1}{G_{xz}}\tau_{xz} \end{cases}$$

Ley de Hooke generalizada para materiales ortótropos

$$\nu_{yx} = \frac{E_y}{E_x}\nu_{xy}$$
$$\nu_{zx} = \frac{E_z}{E_x}\nu_{xz}$$
$$\nu_{zy} = \frac{E_z}{E_y}\nu_{yz}.$$

Simetrías de la matriz **S**

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_x}(\sigma_x - \nu_{xy}\sigma_y)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E_y}(\sigma_y - \nu_{yx}\sigma_x)$$
$$\varepsilon_z = -\frac{\nu_{xz}}{E_x}\sigma_x - \frac{\nu_{yz}}{E_y}\sigma_y$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G_{xy}}\tau_{xy}$$
$$\gamma_{yz} = 0$$
$$\gamma_{xz} = 0.$$

Simplificando las condiciones de tensión plana

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}(\varepsilon_x + \nu_{yx}\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}(\varepsilon_y + \nu_{xy}\varepsilon_x) \\ \sigma_z &= 0 \\ \tau_{xy} &= G_{xy}\gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= 0 \\ \tau_{yz} &= 0 \end{aligned}}$$

Ley de Hooke generalizada para un material ortótropo **en el caso de tensión plana**

## 4.8.1. Tensión plana, caso ortótropo

Representación matricial

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} \begin{pmatrix} E_x & E_x\nu_{yx} & 0 \\ E_y\nu_{xy} & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_{xy}\nu_{yx})\,G_{xy} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{D}_{\mathrm{TP}}} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Si las direcciones de los ejes de ortotropía $x'$, $y'$ están inclinadas un ángulo $\theta$ con respecto a los ejes globales $x$, $y$ de la estructura, tal y como se ilustra en la Figura 4.14, la matriz constitutiva para el material ortótropo en coordenadas globales $\boldsymbol{D}_{\mathrm{TP}}$ se obtiene de forma similar a la ecuación (4.26), siendo en este caso:

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{TP}} = \boldsymbol{T}^{T}_{\boldsymbol{\varepsilon},2\mathrm{D}} \boldsymbol{D}'_{\mathrm{TP}} \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\varepsilon},2\mathrm{D}}$$

con $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\varepsilon},2\mathrm{D}}$ dada por la ecuación (3.25). Se deja como ejercicio al lector completar los detalles de esta formulación.

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\boldsymbol{T}^{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{D}' \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{\varepsilon}; \qquad (4.26)$$

Recuerde

## 4.8.1. Tensión plana, caso ortótropo

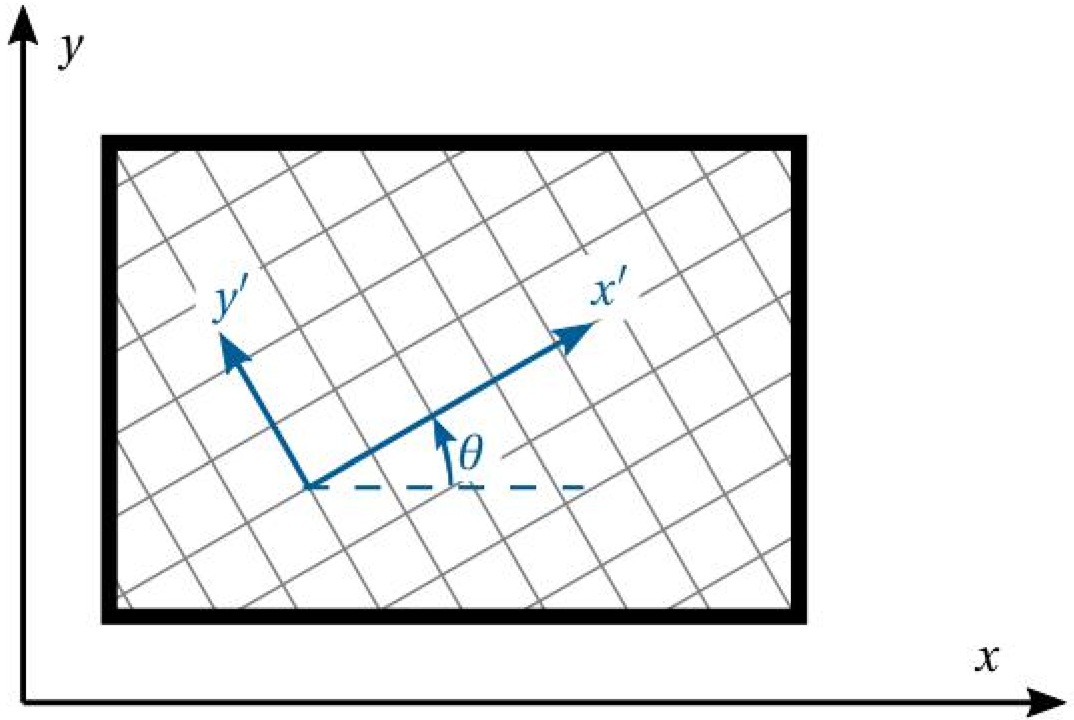



**Figura 4.14:** *Placa sometida a un estado de tensión plana y que está hecha de un material ortótropo cuyos ejes de ortotropía $x'$, $y'$ están a un ángulo $\theta$ de los ejes globales $x$, $y$. Este caso es usual cuando se emplean láminas de madera contrachapada (plywood en inglés).*

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{TP}} = \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\varepsilon},2\mathrm{D}}^{T} \boldsymbol{D}'_{\mathrm{TP}} \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\varepsilon},2\mathrm{D}}$$

# 4.8.1. Tensión plana, caso isótropo

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \qquad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}.$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right)$$

Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right)$$
$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$
$$\gamma_{yz} = 0$$
$$\gamma_{xz} = 0.$$

Simplificando las condiciones de tensión plana

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right)$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right)$$
$$\sigma_z = 0$$
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$
$$\tau_{xz} = 0$$
$$\tau_{yz} = 0$$

Ley de Hooke generalizada para un material isótropo **en el caso de tensión plana**

# 4.8.1. Tensión plana, caso isótropo

Representación matricial

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Las matrices de esfuerzos y deformaciones simplificadas al caso de tensión plana

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

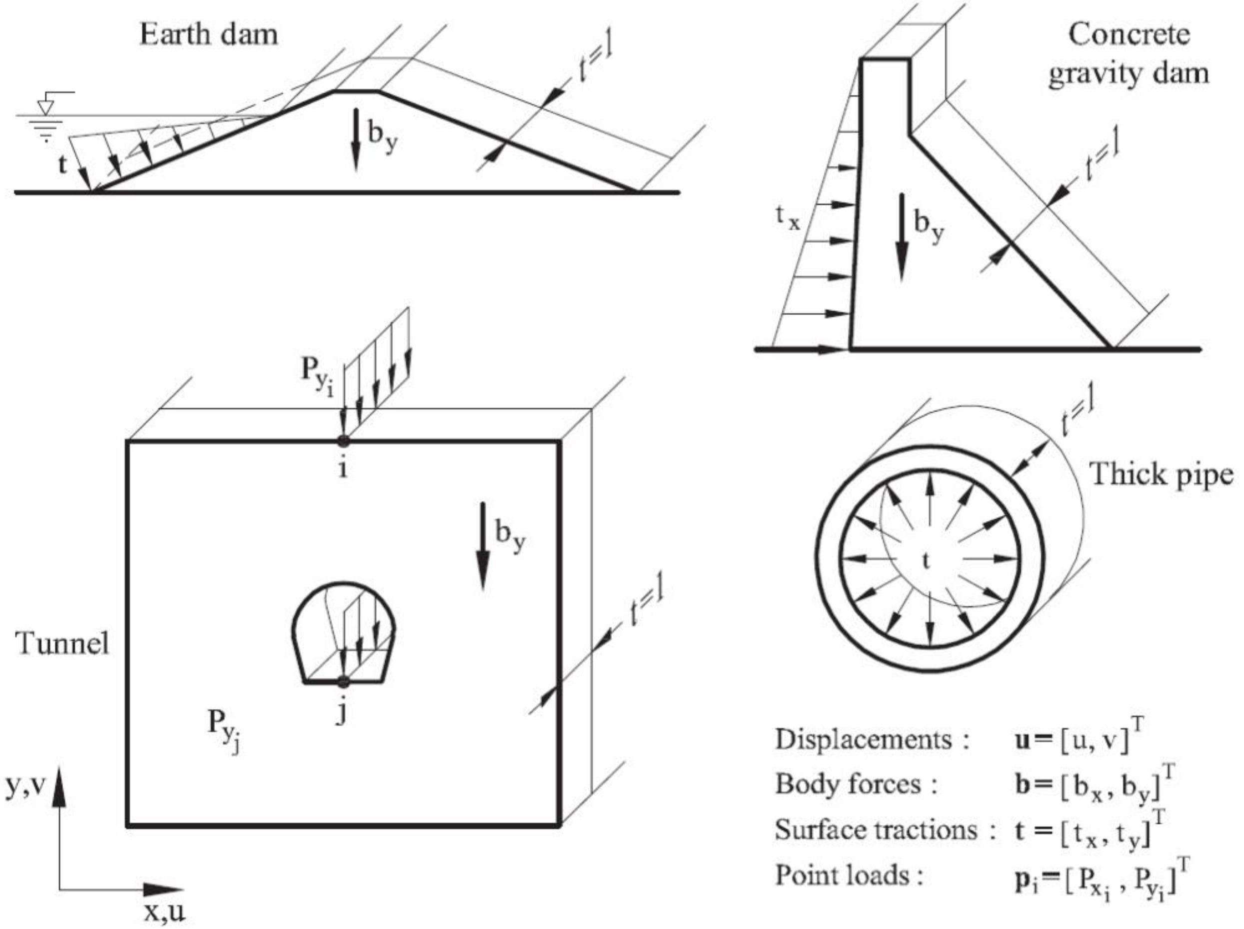
$$\det \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = 0$$

# 4.8.2. Deformación plana

En elementos estructurales en los cuales **una dimensión es mucho más grande** que las otras dos.

una preza
(carga hidrostática ortogonal al eje)

un tunel




un muro de contención

una tubería larga

## 4.8.2. Deformación plana

Supondremos que:

- Dadas las condiciones geométricas, la deformación en la dirección de la dimensión más larga no se puede efectuar.
- El sólido es cargado mediante fuerzas perpendiculares a la dirección longitudinal; independientes en $z$.
- Basta analizar una rebanada la cual se supone confinada entre dos planos rígidos y lisos, de modo que el desplazamiento en la dirección axial no sea posible.

$$\boxed{\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.}$$

## 4.8.2. Deformación plana

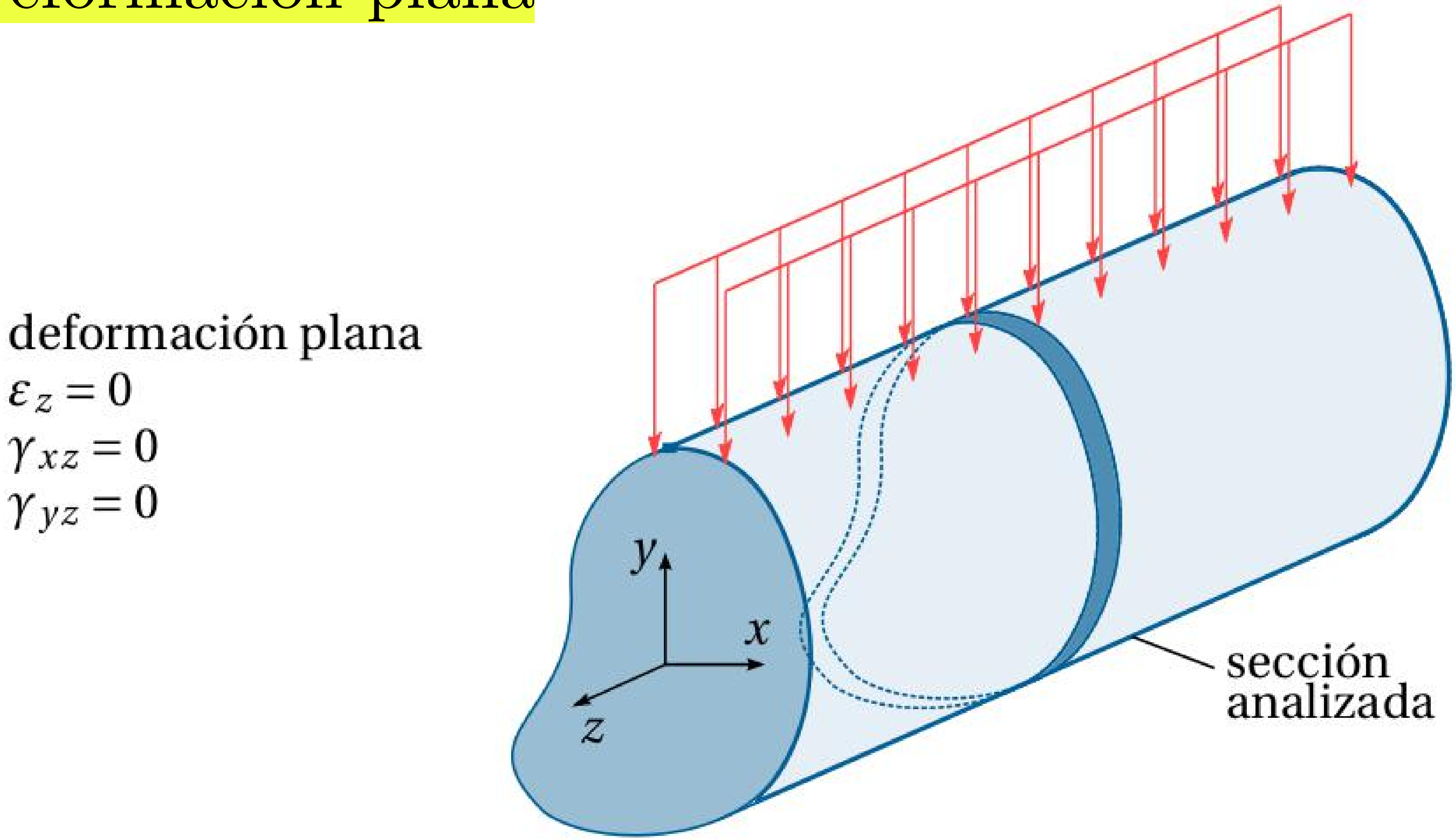



**Figura 4.15:** *Elemento en estado de deformación plana.*

# 4.8.2. Deformación plana, caso isotrópico

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \qquad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}.$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right)$$

Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}\left((1-\nu)\,\sigma_x - \nu\sigma_y\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}\left((1-\nu)\,\sigma_y - \nu\sigma_x\right)$$
$$\varepsilon_z = 0$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$
$$\gamma_{yz} = 0$$
$$\gamma_{xz} = 0$$

Simplificando las condiciones de deformción plana

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)\,(1-2\nu)}\left((1-\nu)\,\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right)$$
$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)\,(1-2\nu)}\left(\nu\varepsilon_x + (1-\nu)\,\varepsilon_y\right)$$
$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)\,(1-2\nu)}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)$$
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$
$$\tau_{xz} = 0$$
$$\tau_{yz} = 0$$

Ley de Hooke generalizada para un material isótropo **en el caso de deformación plana**

# 4.8.2. Deformación plana, caso isótropo

Representación matricial

$$\begin{pmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0\\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0\\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{pmatrix}$$

Las matrices de esfuerzos y deformaciones simplificadas al caso de tensión plana

$$\underline{\underline{\sigma}}=\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & 0\\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0\\ 0 & 0 & \sigma_z\end{pmatrix}\qquad \underline{\underline{\varepsilon}}=\begin{pmatrix}\varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & 0\\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\sigma_z=\nu(\sigma_x+\sigma_y)\qquad \det\underline{\underline{\varepsilon}}=0$$

## 4.8.3. Relación entre los esfuerzos principales obtenidos en el análisis bidimensional y tridimensional

- Para el caso de deformación plana:

$$\sigma_1 = \text{máx}\left((\sigma_1)_{xy},\ (\sigma_2)_{xy},\ \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right)$$
$$\sigma_2 = \text{mediana}\left((\sigma_1)_{xy},\ (\sigma_2)_{xy},\ \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right)$$
$$\sigma_3 = \text{mín}\left((\sigma_1)_{xy},\ (\sigma_2)_{xy},\ \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right)$$
$$\tau_{\text{máx}} = \text{máx}\left(\frac{\left|(\sigma_1)_{xy} - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right|}{2},\ \frac{\left|(\sigma_2)_{xy} - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right|}{2},\ \frac{\left|(\sigma_1)_{xy} - (\sigma_2)_{xy}\right|}{2}\right).$$

- Para el caso de tensión plana:

$$\sigma_1 = \text{máx}\left((\sigma_1)_{xy}, (\sigma_2)_{xy},\ 0\right)$$
$$\sigma_2 = \text{mediana}\left((\sigma_1)_{xy}, (\sigma_2)_{xy},\ 0\right)$$
$$\sigma_3 = \text{mín}\left((\sigma_1)_{xy}, (\sigma_2)_{xy},\ 0\right)$$
$$\tau_{\text{máx}} = \text{máx}\left(\frac{\left|(\sigma_1)_{xy}\right|}{2},\ \frac{\left|(\sigma_2)_{xy}\right|}{2},\ \frac{\left|(\sigma_1)_{xy} - (\sigma_2)_{xy}\right|}{2}\right).$$

# 4.9. Interpretación de los gráficos de colores de esfuerzos y deformaciones

Ver la diapositiva 04b_InterpretacionDeGraficos.pdf

# 4.10. Modificación de la ley de Hooke para tener en cuenta los efectos térmicos en el caso de materiales isótropos

# 4.10. Modificación de la ley de Hooke para tener en cuenta los efectos ...

(Modificación de la ley de Hooke para tener en cuenta los efectos térmicos en el caso de materiales isótropos)

(Esta sección será de estudio autónomo)

# Referencias


- Álvarez Diego A. (2022) - *Notas de clase del curso mecánica de sólidos.* En preparación. (main.pdf)