



Mecánica de Sólidos

4.9. Interpretación de los gráficos de colores de esfuerzos y deformaciones

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Docente Ocasional
Ingeniero Civil
Esp. en Estructuras
Maestrando en Estructuras – Investigación

Advertencia

Estas presentaciones son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada.



4.9. Interpretación de los gráficos de colores de esfuerzos y deformaciones

4.9.1. Interpretación de los gráficos s_x , s_y y t_{xy}

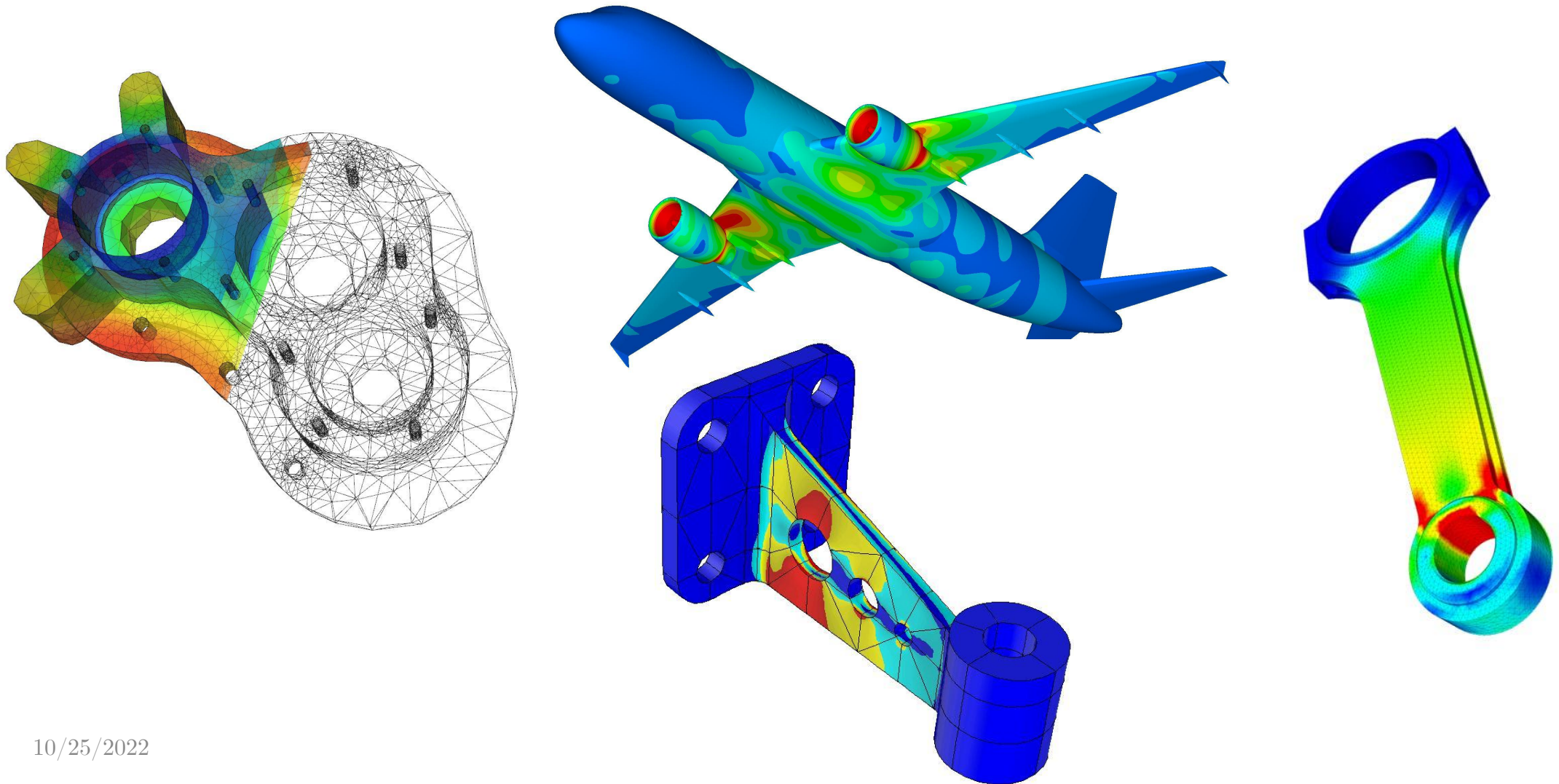
4.9.2. Interpretación de los gráficos de las deformaciones e_x , e_y , e_z , g_{xy}

4.9.3. Interpretación de los gráficos de los esfuerzos principales y esfuerzo cortante máximo

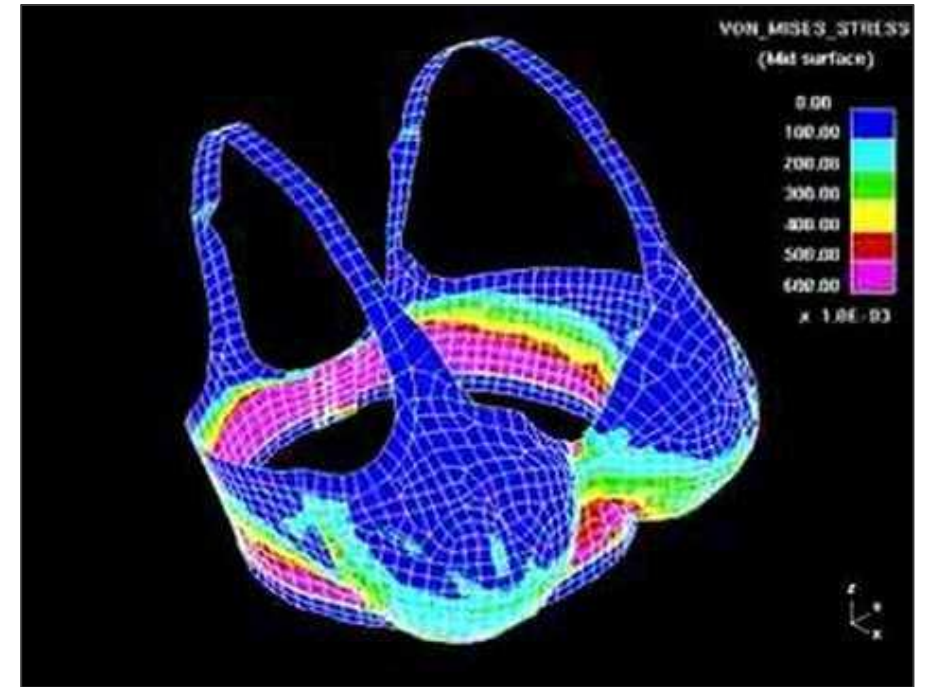
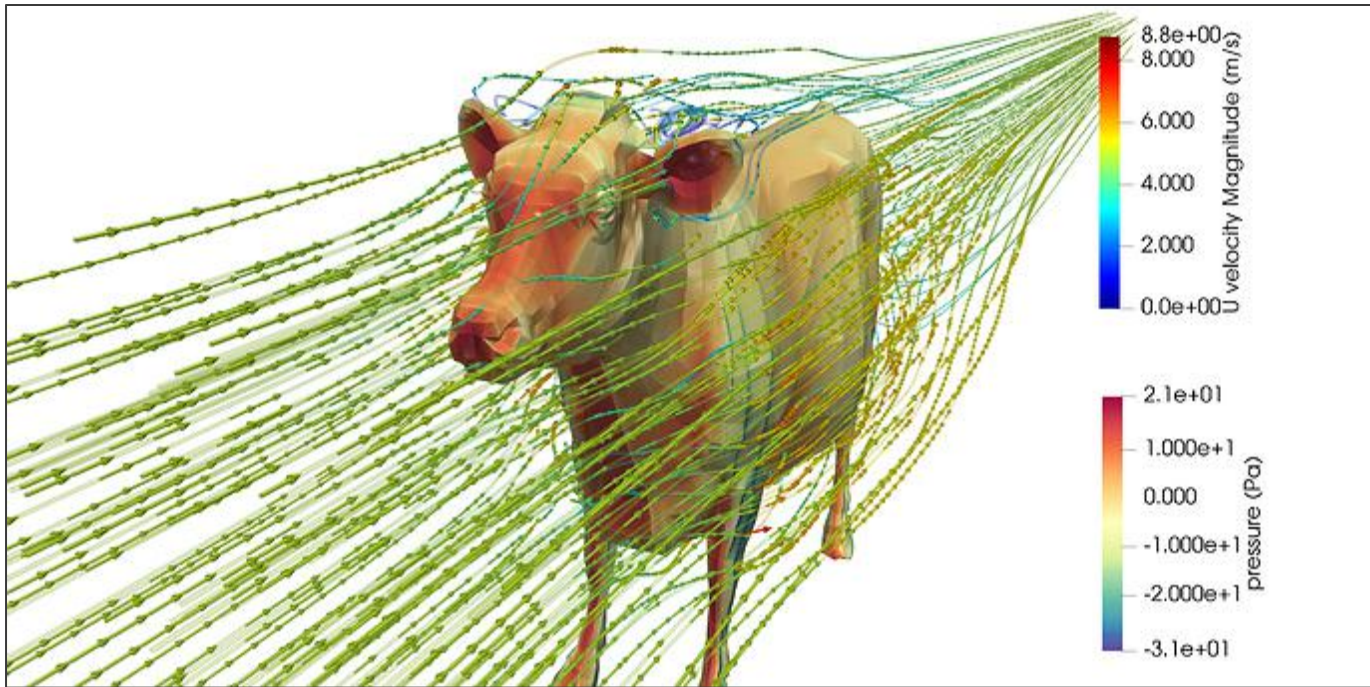
4.9.4. Relación de los diagramas de colores de una viga con sus diagramas de cortante y momento

4.9.5. Disposición de los flejes si la viga estuviera hecha con concreto reforzado

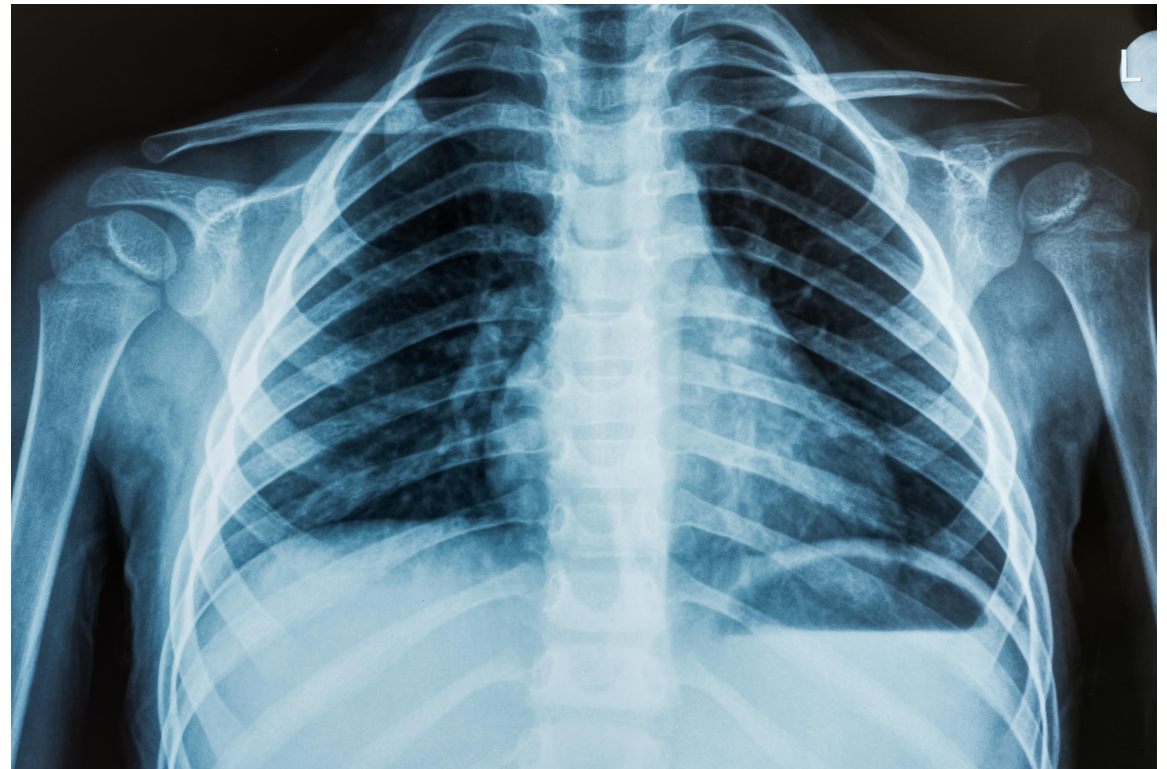
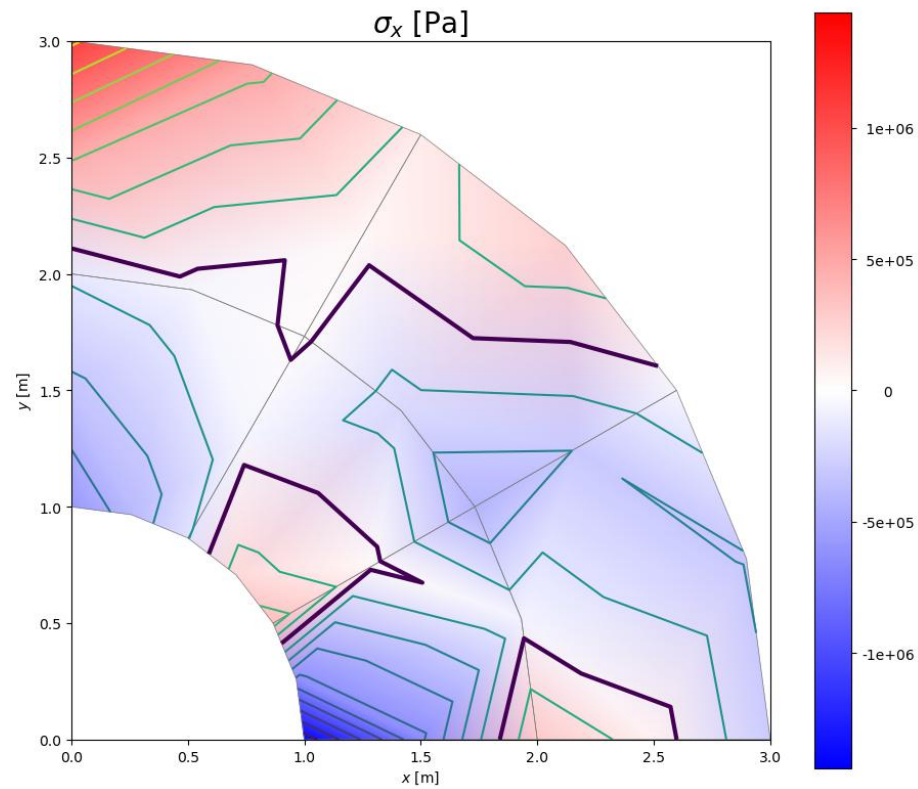
Resultados del software de EF



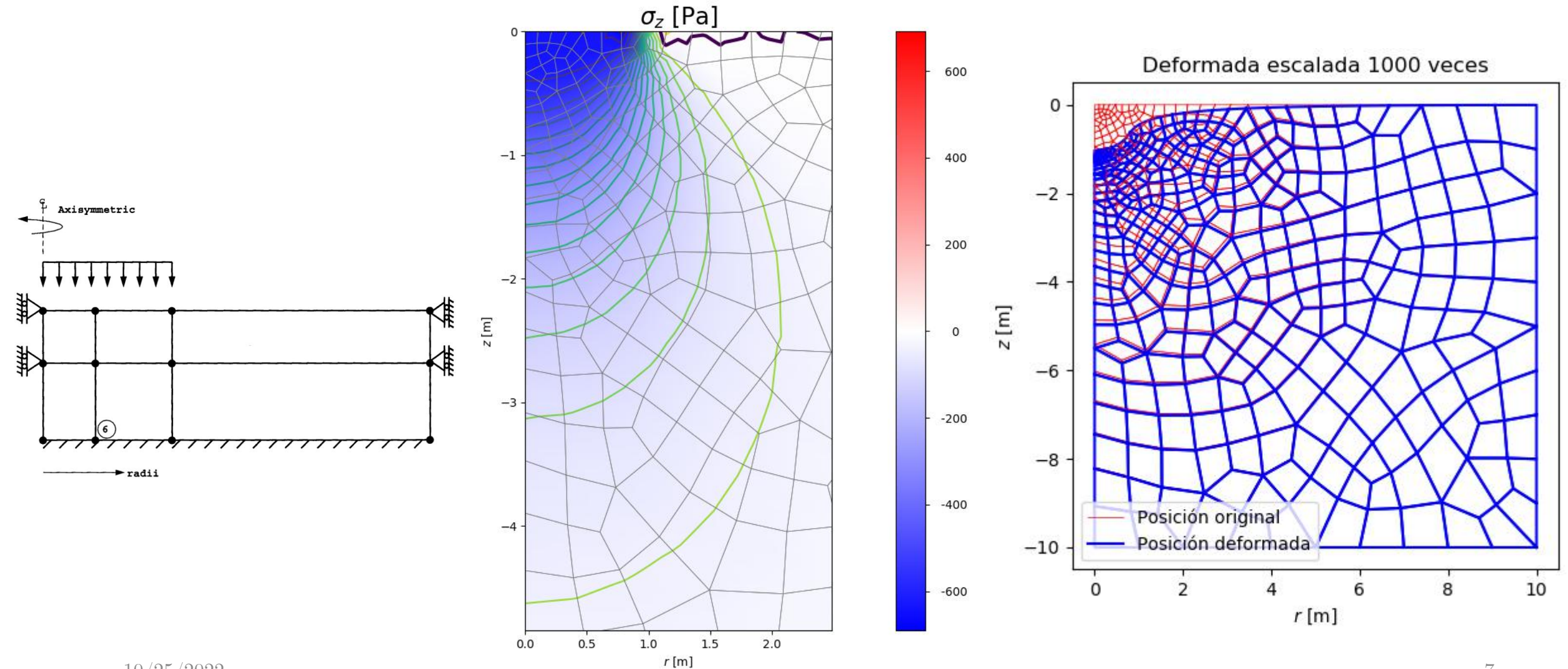
Modelos poco comunes



Los gráficos son radiografías de las estructuras



¿Cómo relaciono esfuerzos y deformaciones?



4.9. Interpretación de los gráficos de esfuerzos y deformaciones

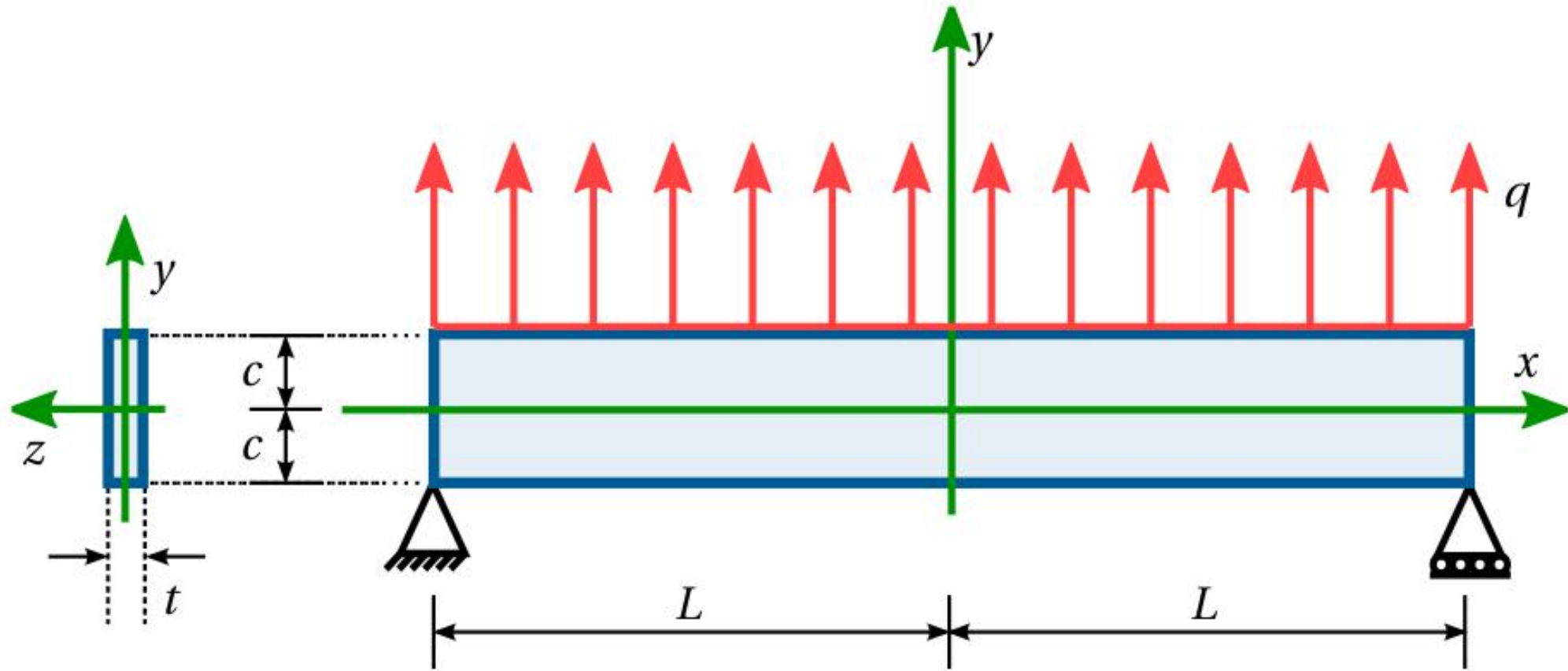


Figura 4.18: *Viga referida en el ejemplo de la Sección 4.9.*

4.9. Interpretación de los gráficos de esfuerzos y deformaciones

- Condiciones de frontera:

$$\begin{array}{ll} \tau_{xy}(x, y = \pm c, z) = 0 & (\tau_{xy} = 0 \text{ en el borde superior e inferior de la viga}) \\ \sigma_y(x, y = -c, z) = 0 & (\text{el borde inferior no soporta cargas}) \\ \sigma_y(x, y = +c, z) = \frac{q}{t} & (\text{el borde superior soporta la carga distribuida}) \end{array}$$

- Fuerza cortante V y momento flector M en los extremos:

$$\begin{aligned} V(\pm L) &= - \int_{-c}^c \int_0^t \tau_{xy}(\pm L, y, z) \, dz \, dy = \pm qL \\ M(\pm L) &= - \int_{-c}^c \int_0^t \sigma_x(\pm L, y, z) y \, dz \, dy = 0; \end{aligned}$$

- Fuerza axial en toda su longitud:

$$f_{\text{axial}}(x) = \int_{-c}^c \int_0^t \sigma_x(x, y, z) \, dz \, dy = 0$$

4.9. Interpretación de los gráficos de esfuerzos y deformaciones

- Esfuerzos en el interior de la viga:

$$\sigma_x(x, y, z) = -\frac{q}{2I} \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 + \frac{2}{5} c^2 y - L^2 y \right)$$

$$\sigma_y(x, y, z) = -\frac{q}{2I} \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y - \frac{2}{3} c^3 \right)$$

$$\sigma_z(x, y, z) = 0$$

$$\tau_{xy}(x, y, z) = -\frac{q}{2I} (c^2 - y^2) x$$

$$\tau_{xz}(x, y, z) = 0$$

$$\tau_{yz}(x, y, z) = 0.$$

Los esfuerzos son independientes de la profundidad en z .

Análisis

https://github.com/michaelherediaperez/mecanica_de_solidos_un/blob/main/codigos/cap_04/04_09_graficos_colores.ipynb

4.9. Gráficos de esfuerzos y deformaciones

Quién

Fecha

Qué hizo

Michael Heredia Pérez, mherediap@unal.edu.co Octubre 22, 2022 Conversión de código de MATLAB a Python

```
In [1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.axes_grid1 import make_axes_locatable # Sólo para el tamaño de la colorbar
```

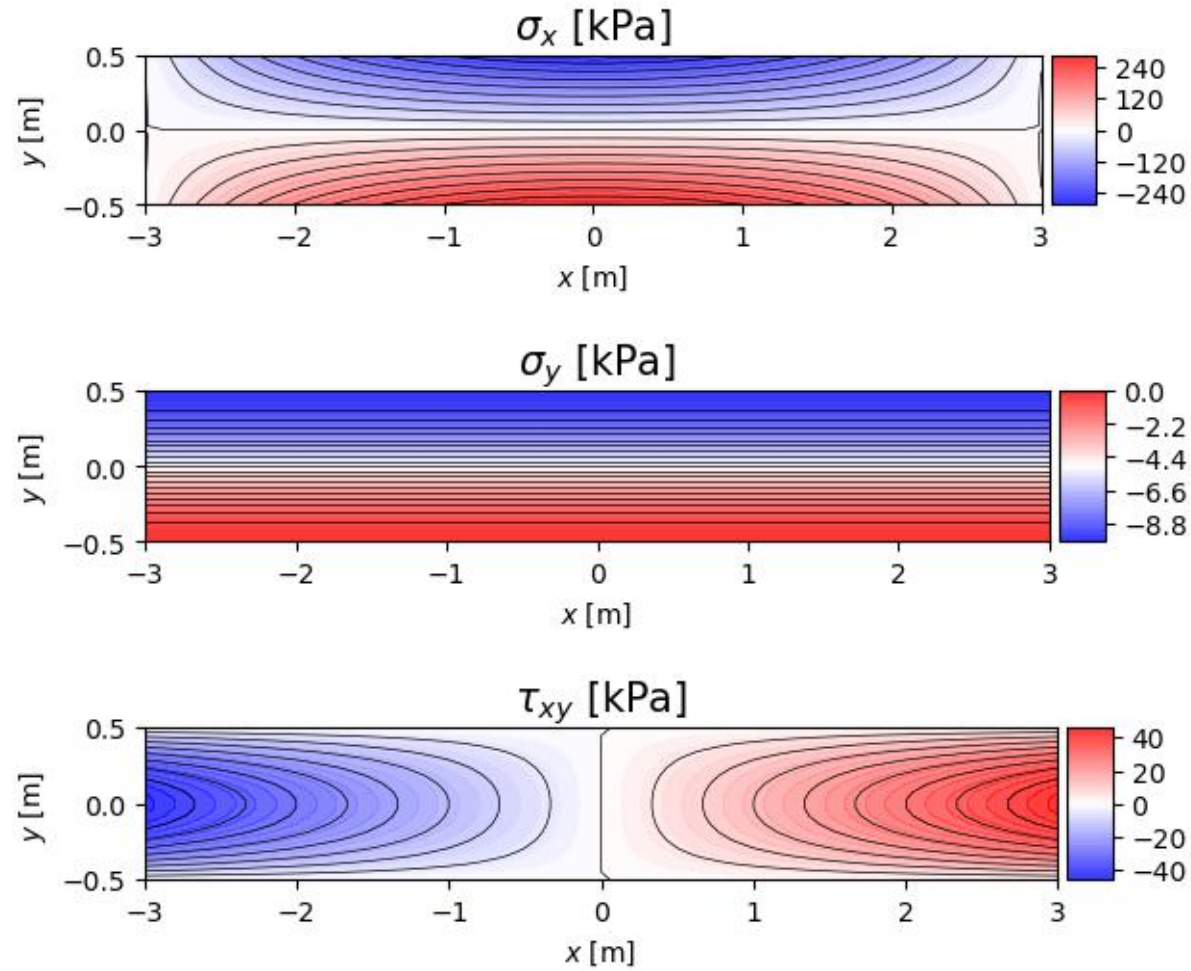
Se harán varias gráficas con la misma configuración o similar, así que se crea una función para automatizar el proceso. La escala de colores utilizada (*colormap* en inglés) es `bwr`.

```
In [2]: from cmath import isclose

def plot_esf_def(variable, titulo, angulo = None):
    """
    Función para graficar los esfuerzos y las deformaciones. Usar:

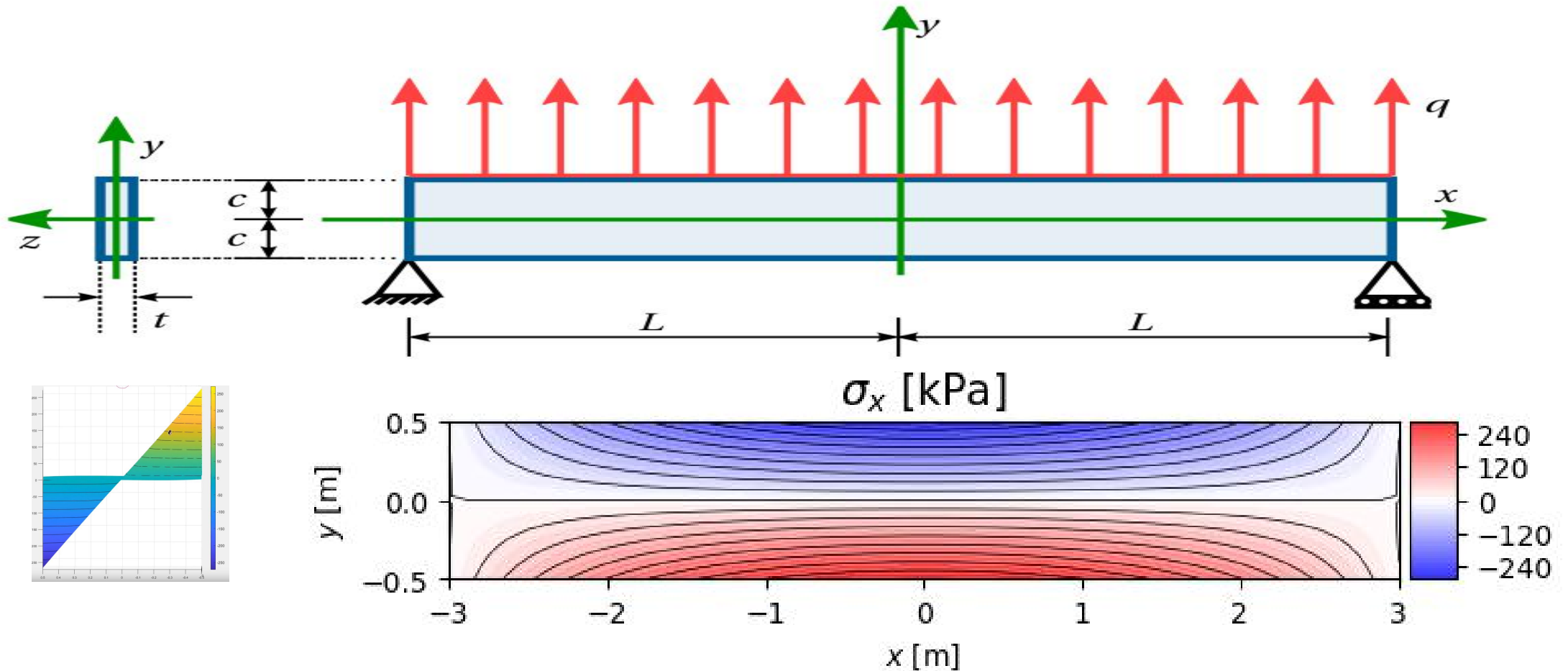
    Variables:
        var      : es la variable que se quiere graficar.
        titulo   : título del gráfico.
        angulo   : (opcional) inclinaciones para los esf. ppls s1, s2 y tmax.
    """
    global x, y
```

4.9.1. Interpretación de los gráficos de esfuerzos σ_x , σ_y , τ_{xy}



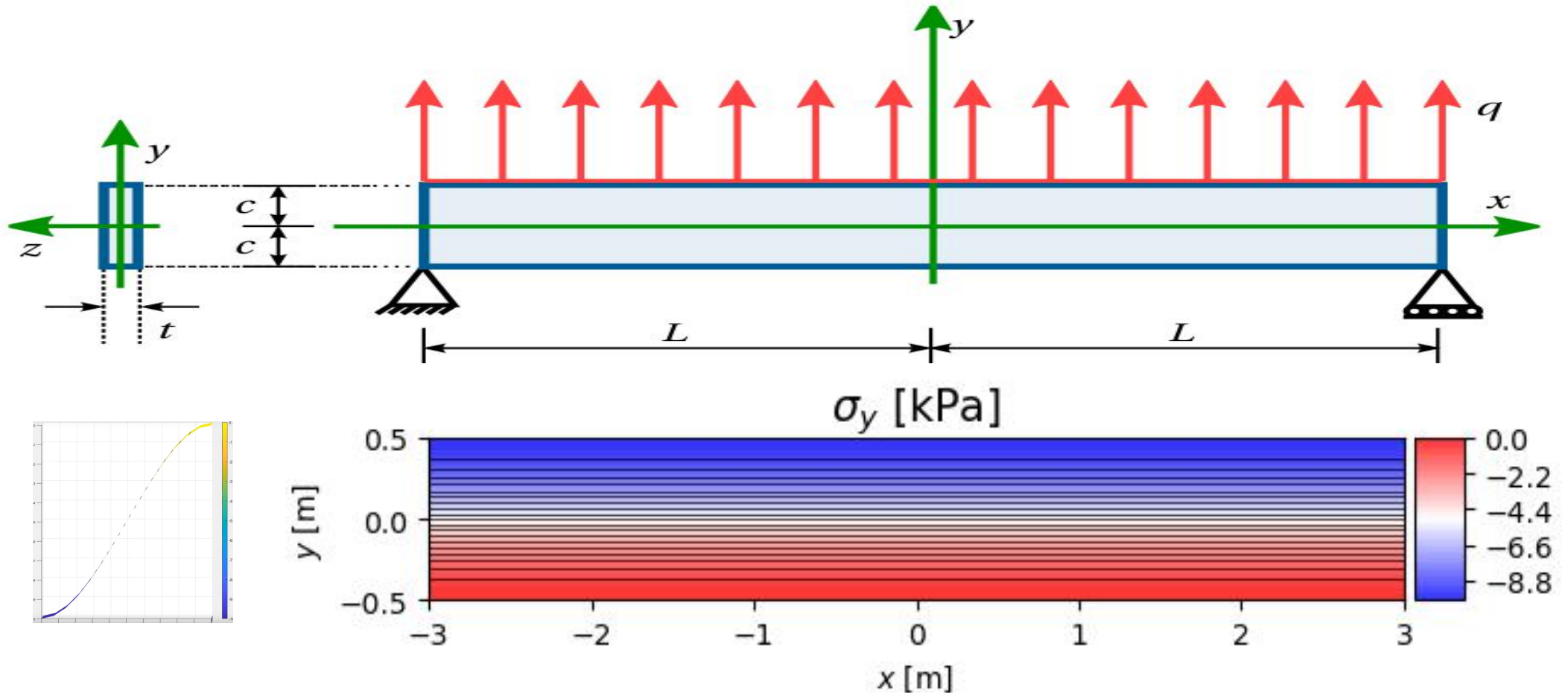
4.9.1. Interpretación de los gráficos de esfuerzos σ_x , σ_y , τ_{xy}

Esfuerzo normal en x , σ_x



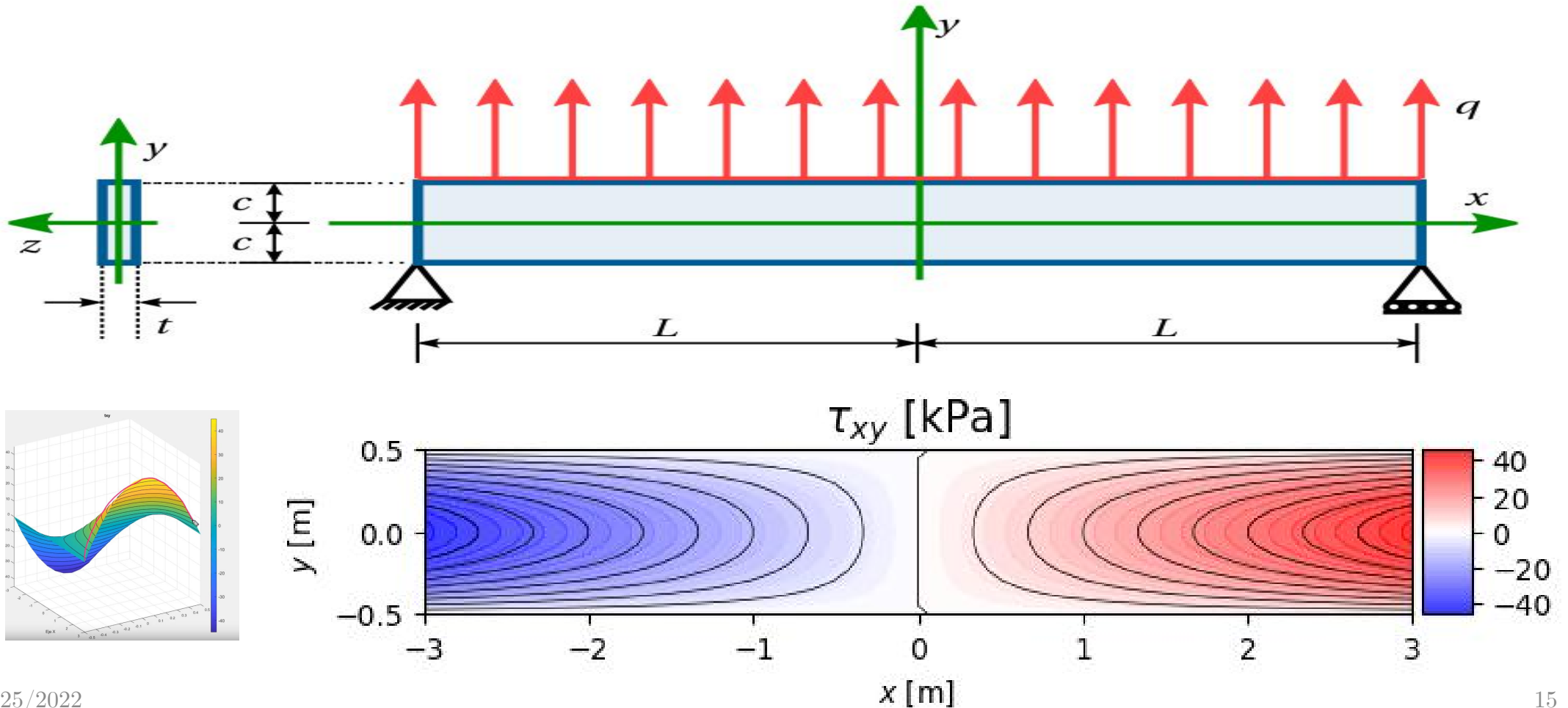
4.9.1. Interpretación de los gráficos de esfuerzos σ_x , σ_y , τ_{xy}

Esfuerzo normal en y, σ_y

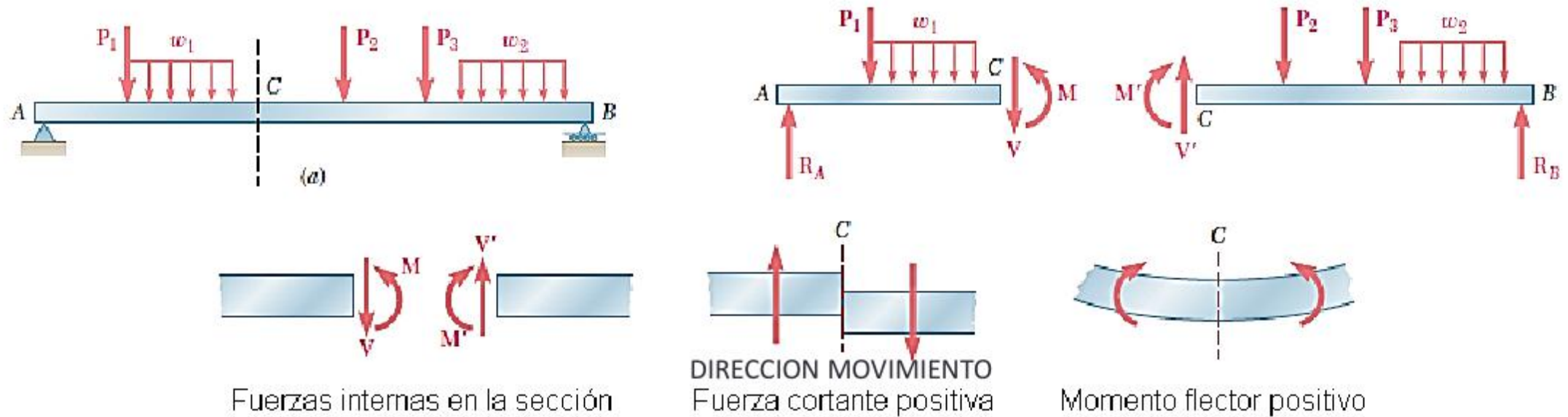


4.9.1. Interpretación de los gráficos de esfuerzos σ_x , σ_y , τ_{xy}

Esfuerzo cortante en xy , τ_{xy}



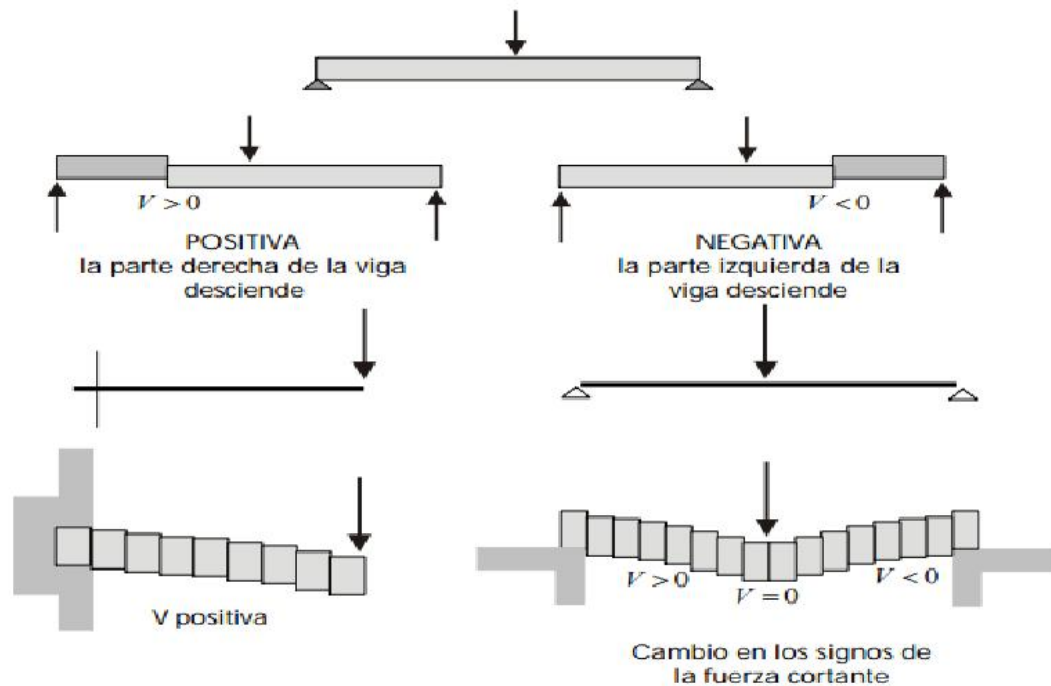
Convención de signos en vigas



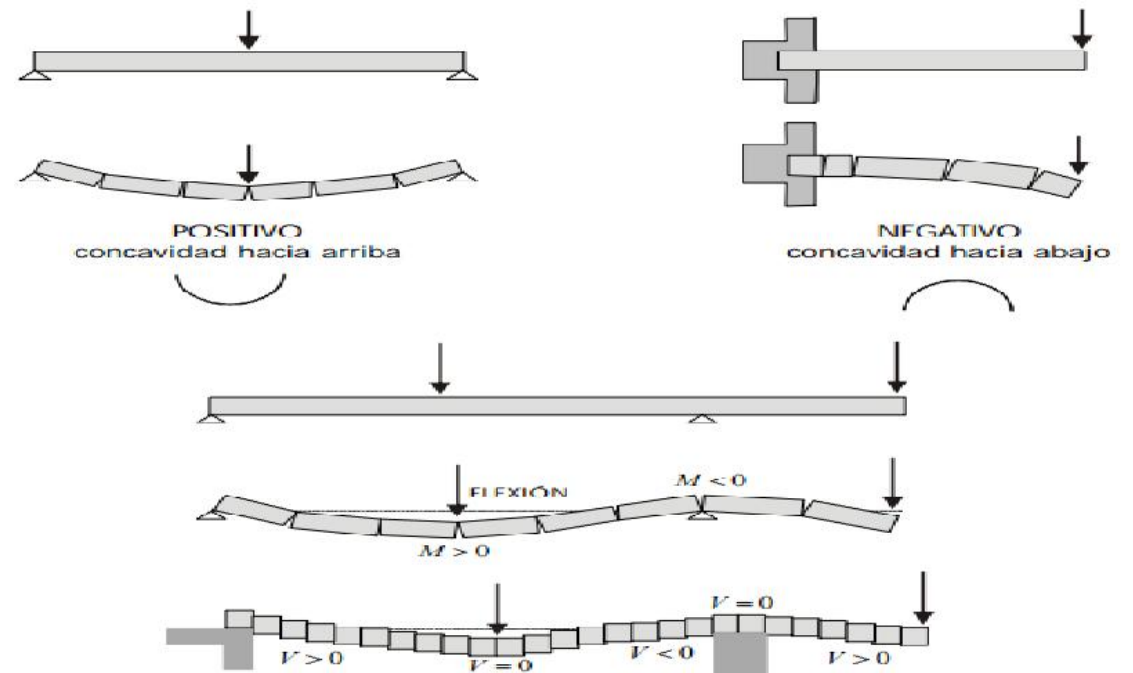
Curso de Estática; [Herrera, 2018]
[Hibbeler R.C.(2012) Structural Analysis]

Convención de signos en vigas

- Significado físico del signo de la fuerza cortante:



- Significado físico del signo del momento flector:



Distribuciones en la sección transversal

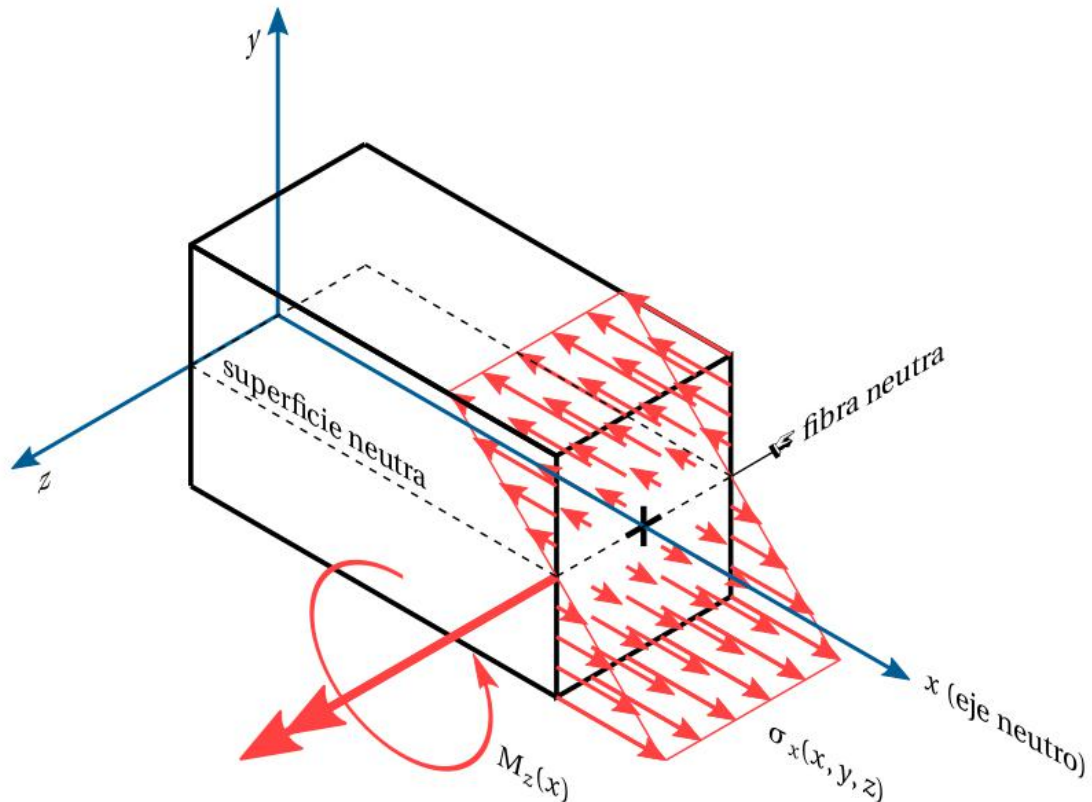


Figura 9.7: Un momento de flexión positivo es aquel que produce tracción en la fibra inferior de la viga. Este momento es generado por los esfuerzos σ_x que varían de forma lineal con respecto al eje y . Observe que $M_z(x) = M(x)$ puede entenderse como la magnitud de un momento formado por los esfuerzos σ_x alrededor del eje z de acuerdo con la regla de la mano derecha en la sección transversal ubicada en la posición x .

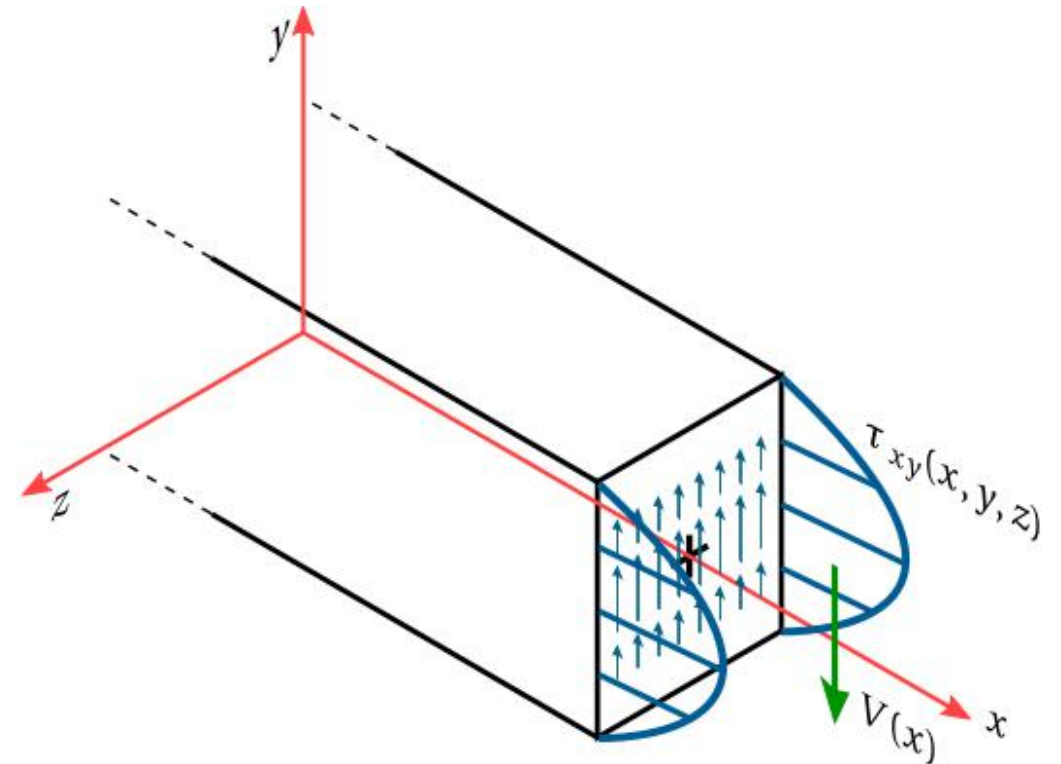


Figura 9.10: La fuerza cortante es la resultante de sumar las contribuciones de fuerzas generadas por los esfuerzos cortantes τ_{xy} mostrados (ver ecuación (9.15)); estos esfuerzos, en el caso de una viga de sección rectangular, varían de forma parabólica con respecto al eje y . La fuerza cortante es positiva cuando la resultante de los esfuerzos cortantes τ_{xy} mostrados apunta en la dirección contraria al eje y , de acuerdo con la convención de signos establecida en la Figura 9.8.

4.9.4. Relación de los diagramas de colores de una viga con sus diagramas de cortante y momento

https://github.com/michaelherediaperez/mecanica_de_solidos_un/blob/main/codigos/cap_04/04_09_04.ipynb

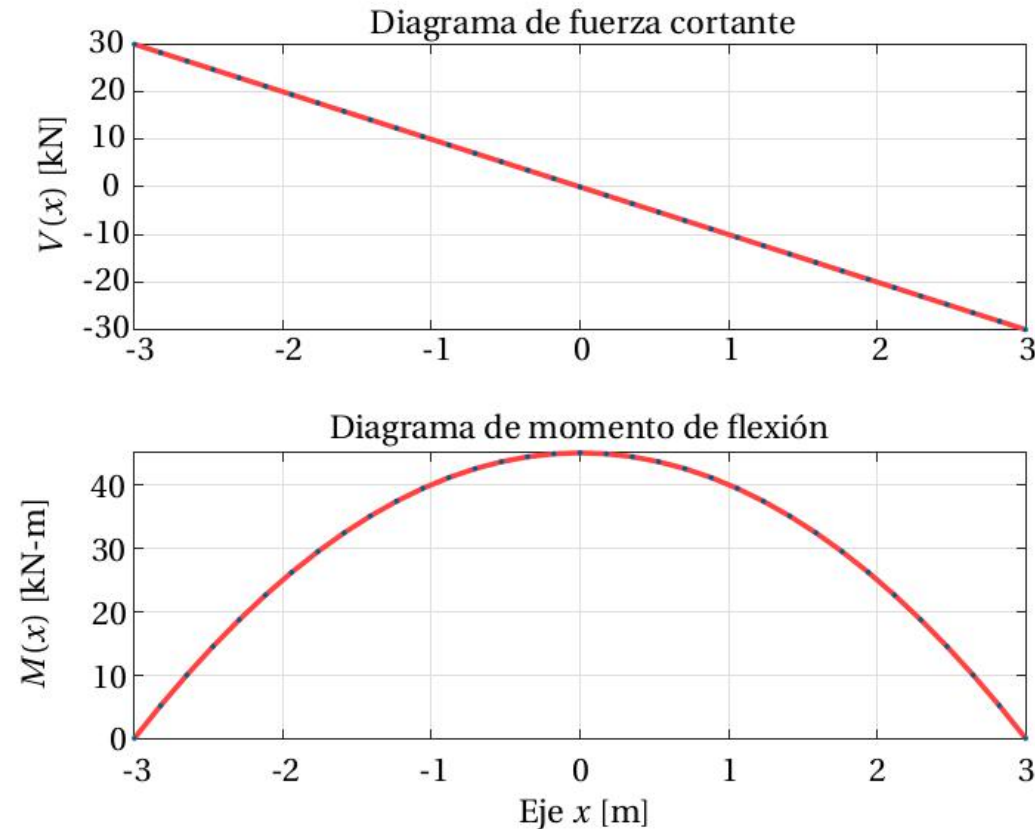


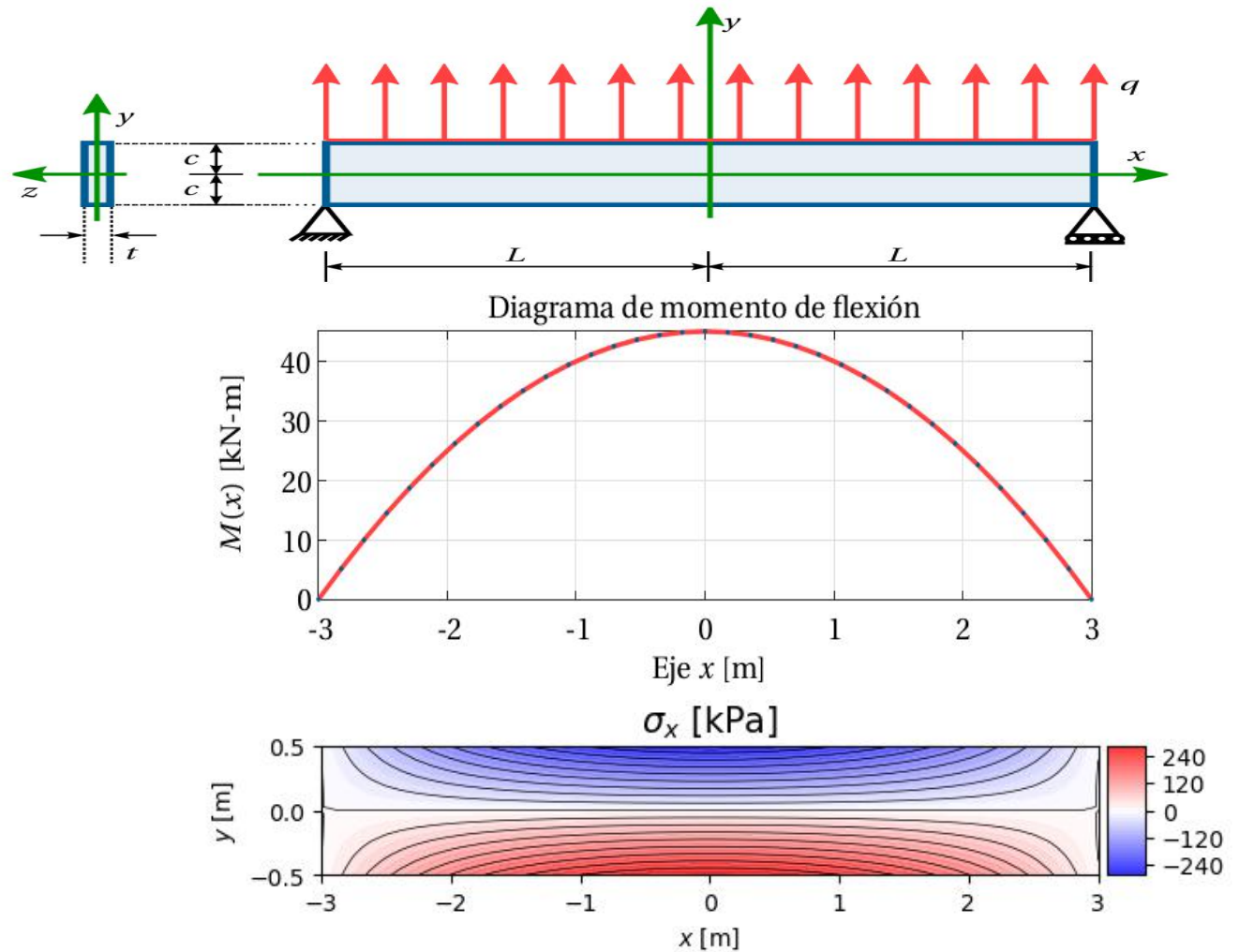
Figura 4.25: Diagrama de fuerzas cortantes V y momentos de flexión M en la viga analizada en la Sección 4.9. Recuerde que la carga aplicada es $q = -10 \text{ kN/m}$.

4.9.4. Relación de los diagramas de colores de una viga con sus diagramas de cortante y momento

- $M(x)$ y σ_x

$$M(x) = - \int_{-c}^c \int_0^t y \sigma_x(x, y, z) dz dy$$

$$M(x) = -\frac{q}{2} (L^2 - x^2)$$



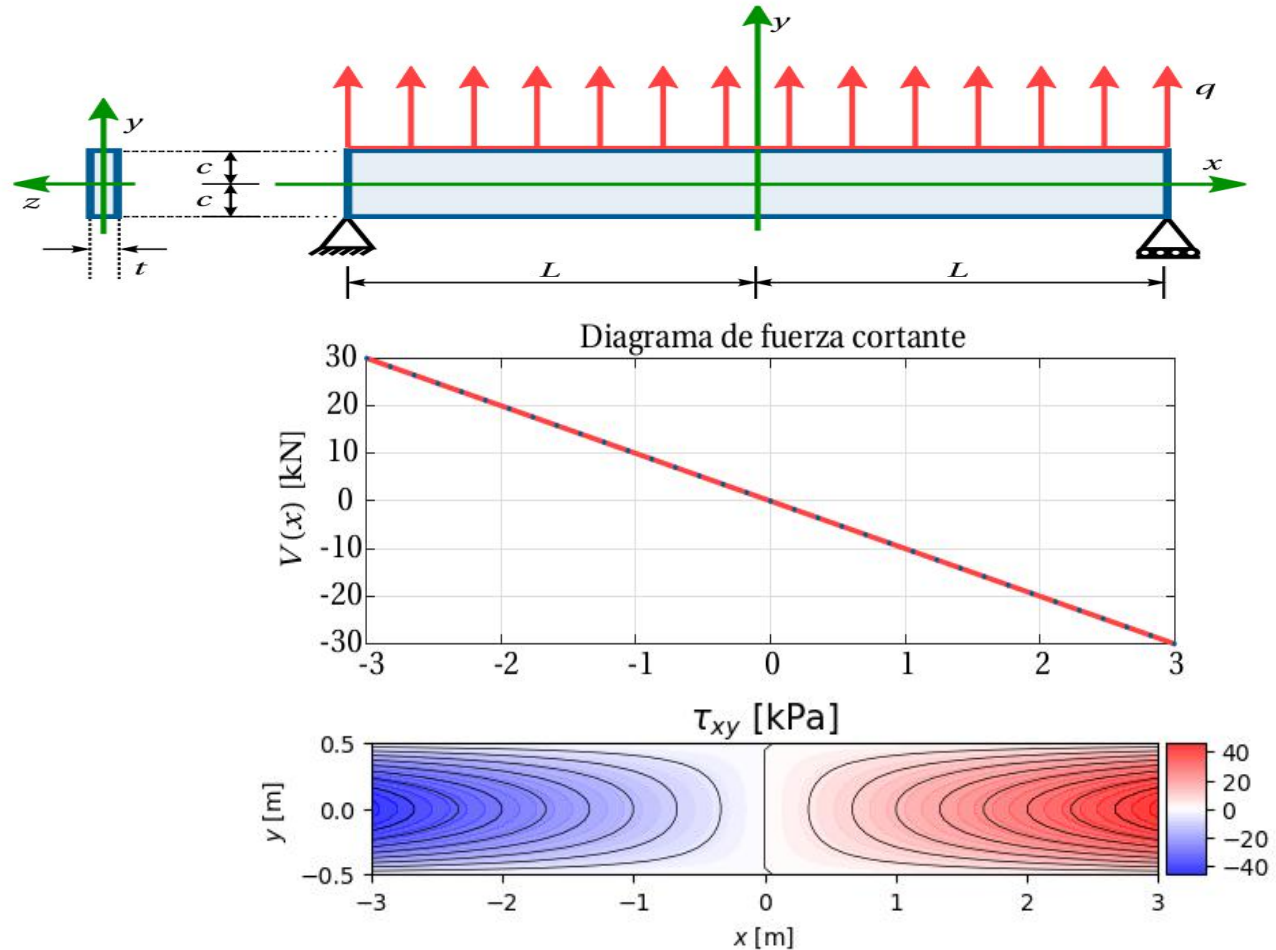
4.9.4. Relación de los diagramas de colores de una viga con sus diagramas de cortante y momento

- $V(x)$ y τ_{xy}

$$V(x) = - \int_{-c}^c \int_0^t \tau_{xy}(x, y, z) dz dy$$

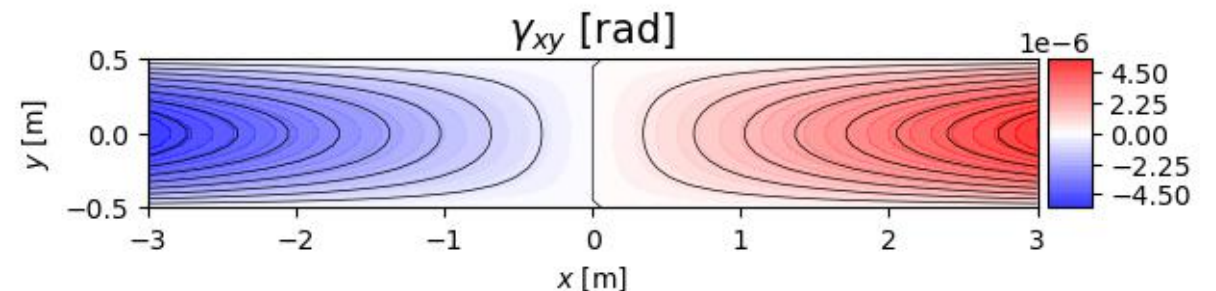
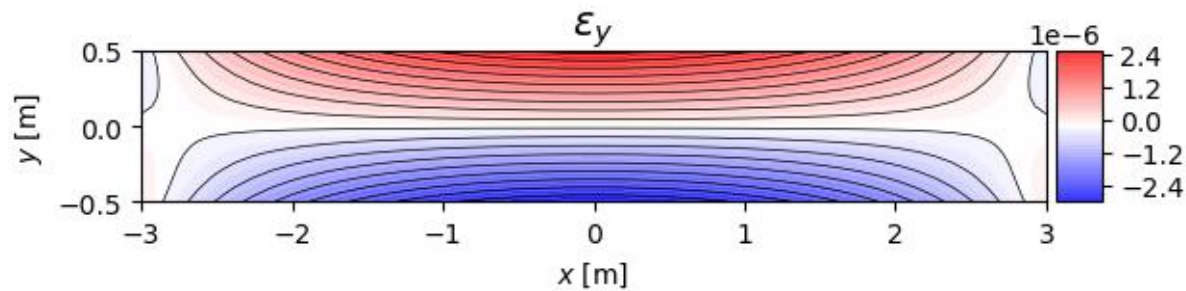
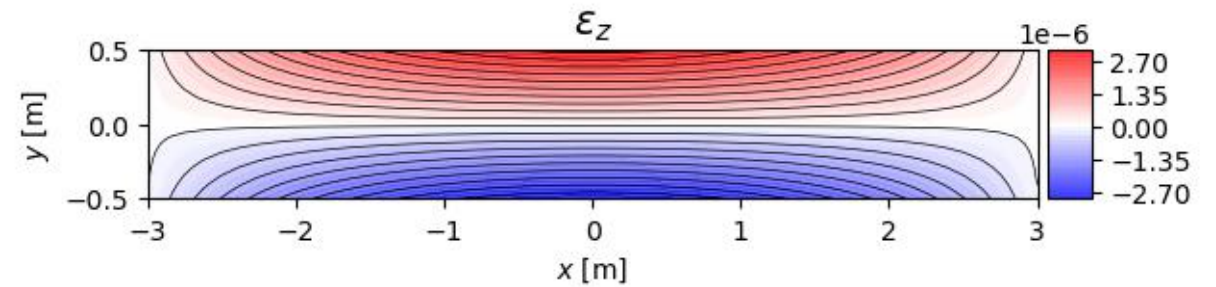
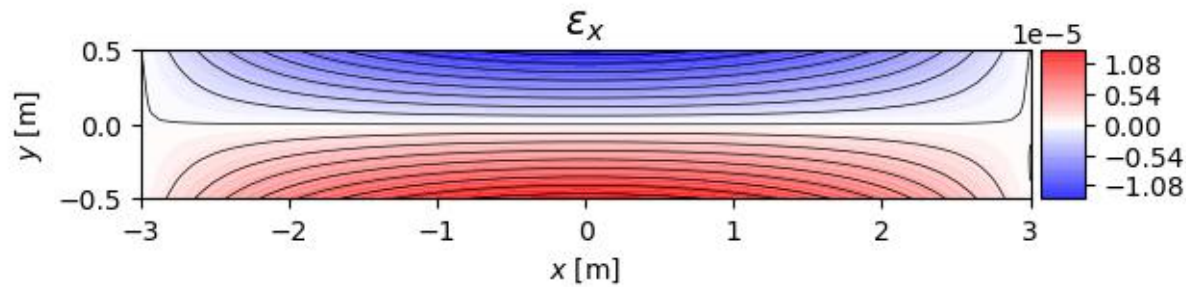
↓

$$V(x) = qx$$



4.9.2. Interpretación de los gráficos de las deformaciones

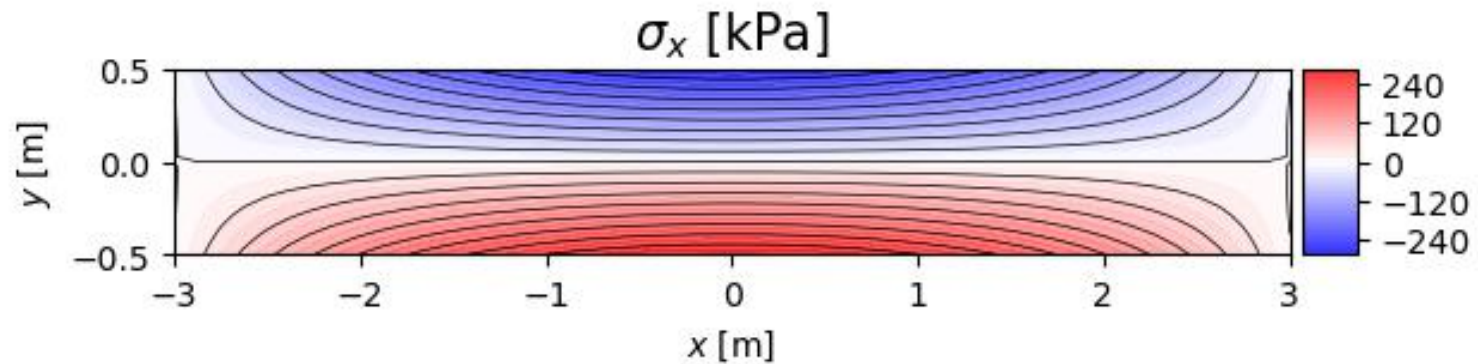
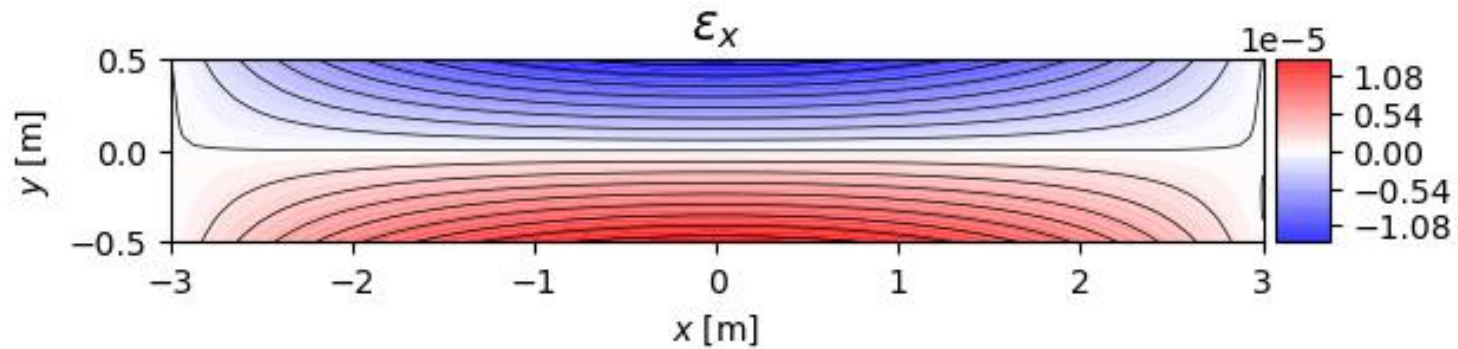
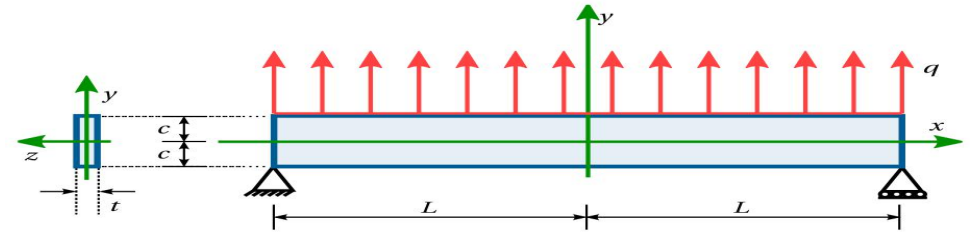
ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , γ_{xy}



4.9.2. Interpretación de los gráficos de las deformaciones

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}$

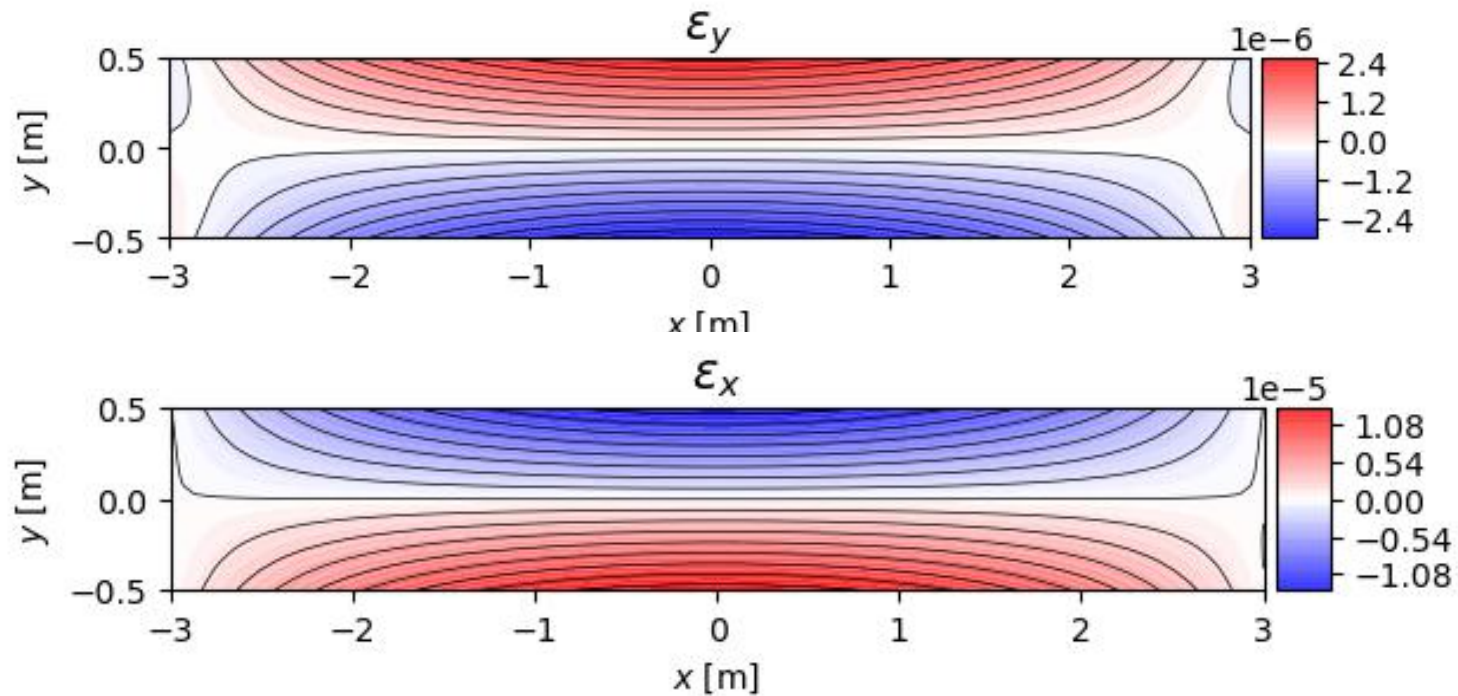
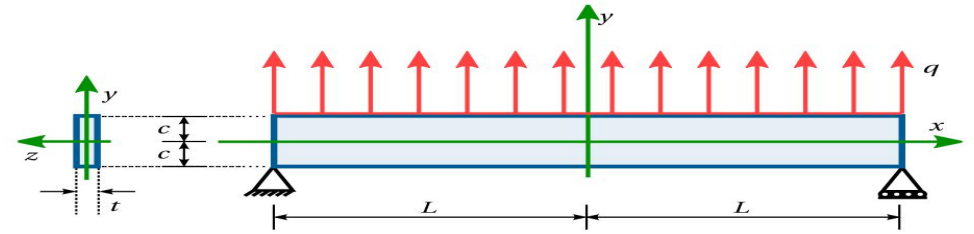
Deformación longitudinal en x, ϵ_x



4.9.2. Interpretación de los gráficos de las deformaciones

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}$

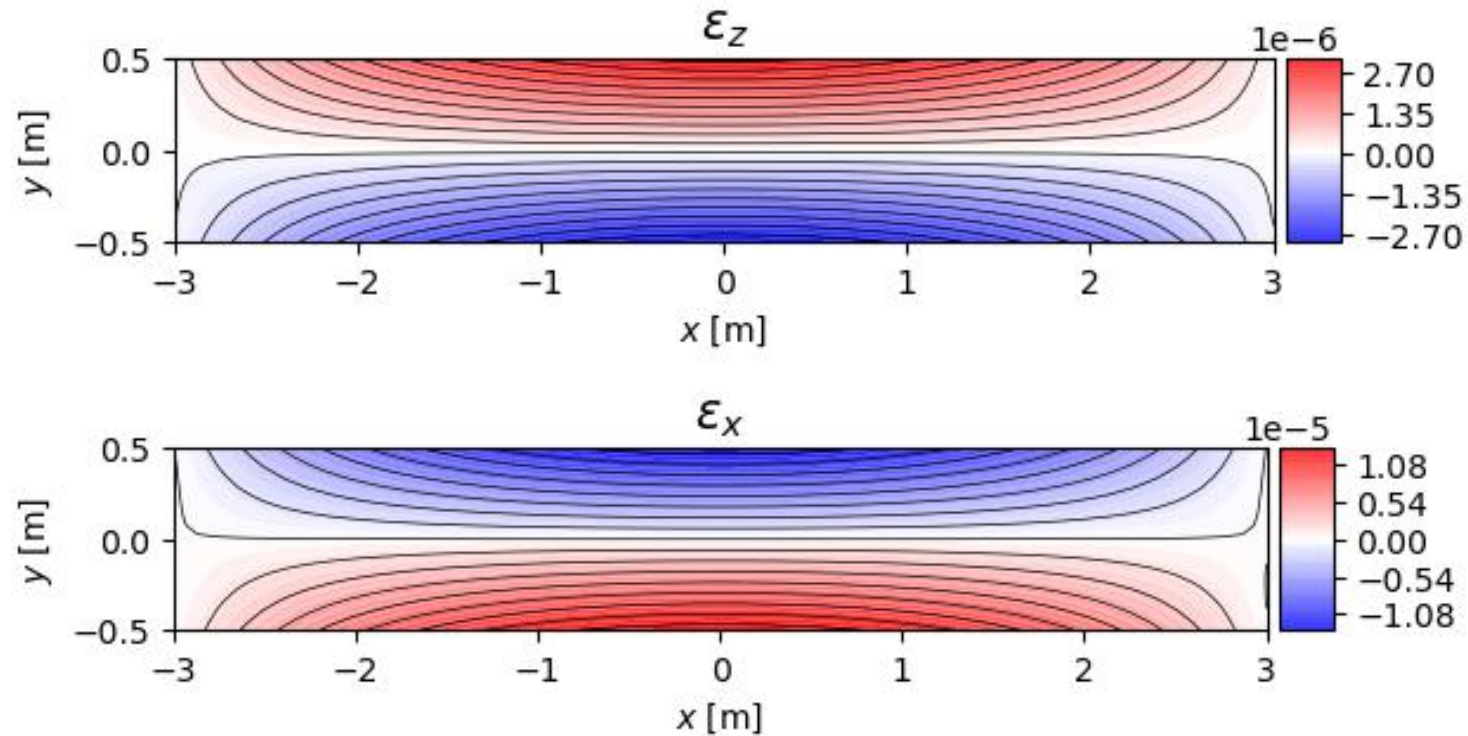
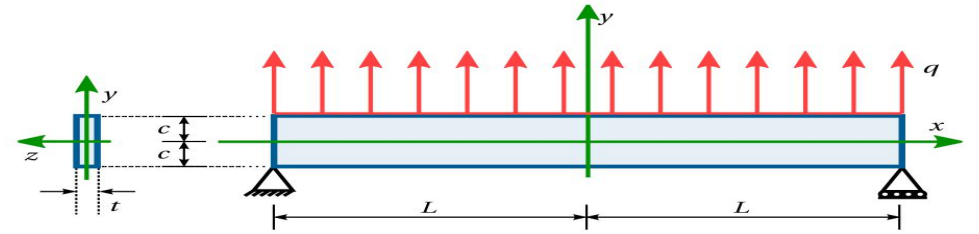
Deformación longitudinal en y, ϵ_y



4.9.2. Interpretación de los gráficos de las deformaciones

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}$

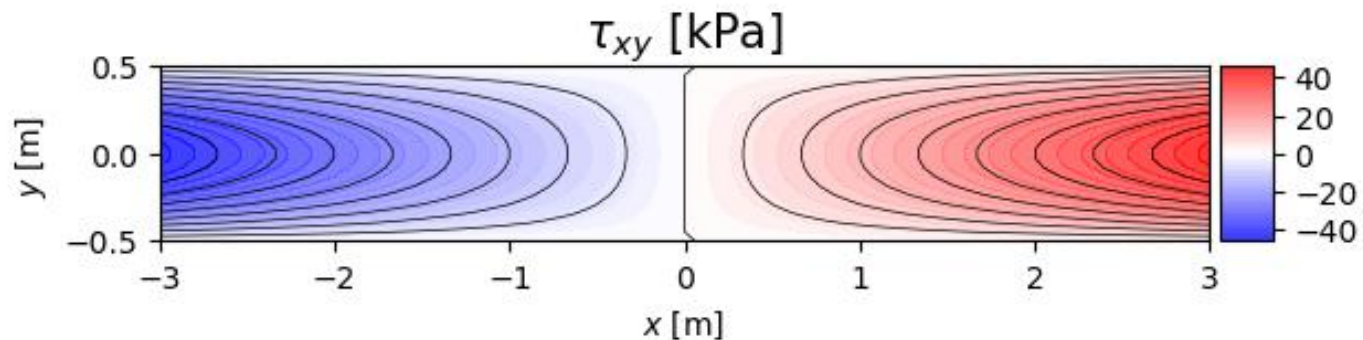
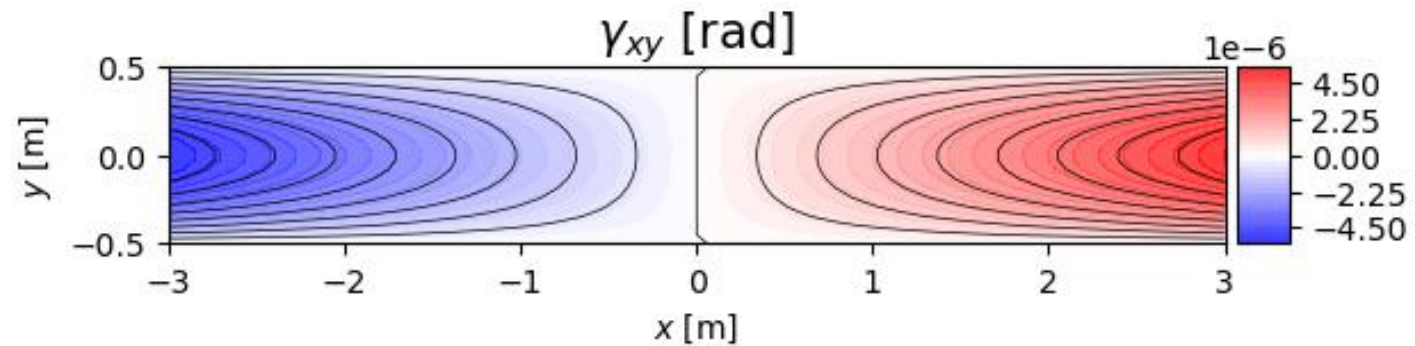
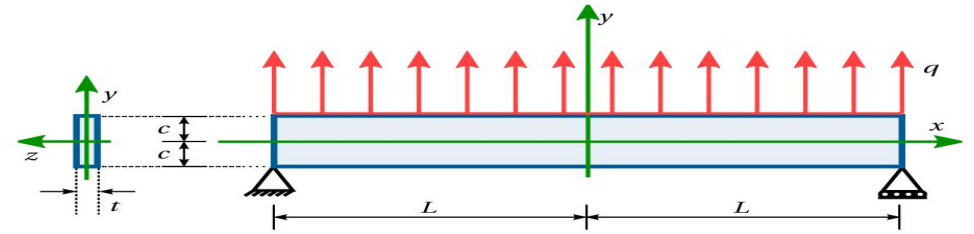
Deformación longitudinal en z, ϵ_z



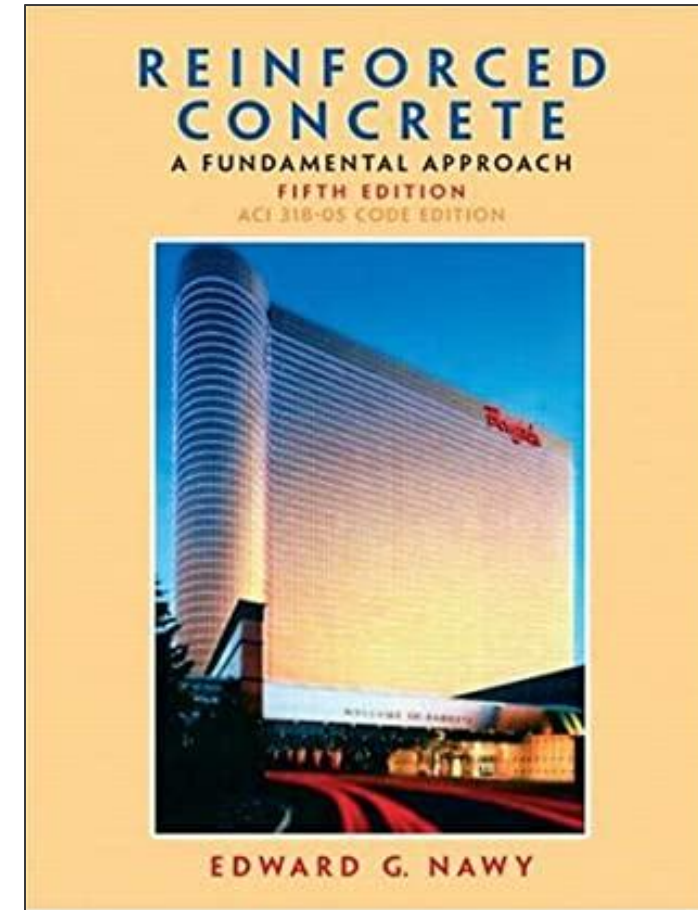
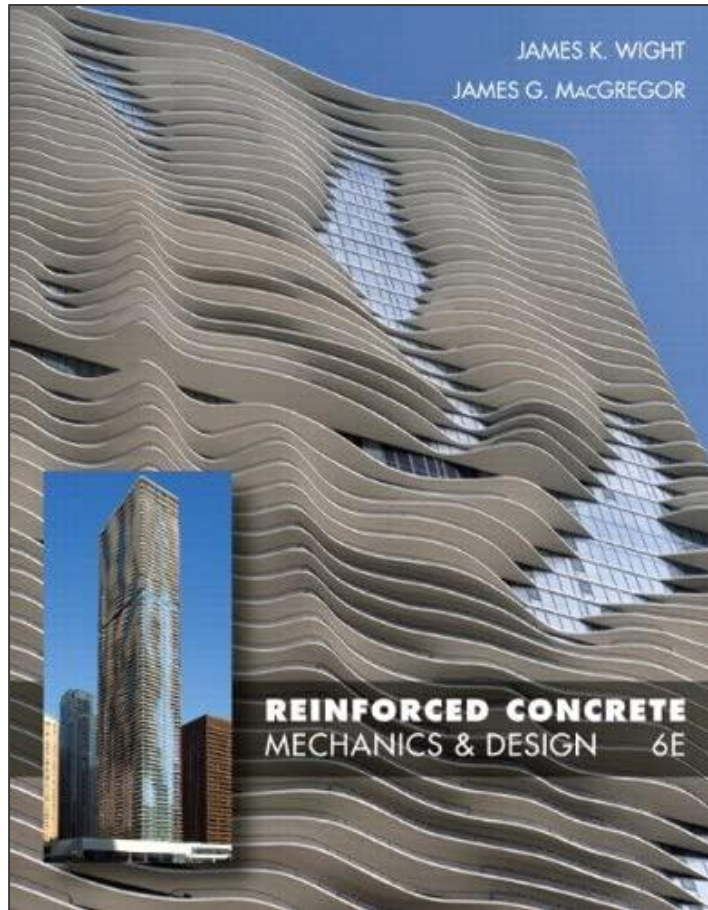
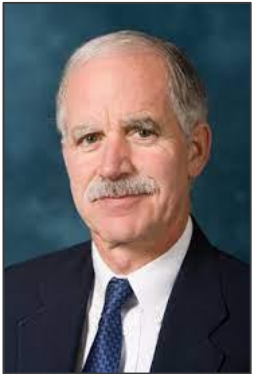
4.9.2. Interpretación de los gráficos de las deformaciones

ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , γ_{xy}

Deformación angular en xy, γ_{xy}



Comentarios sobre el concreto



Comentarios sobre el concreto: compresión (compression)

Wight & MacGregor: capítulo 3

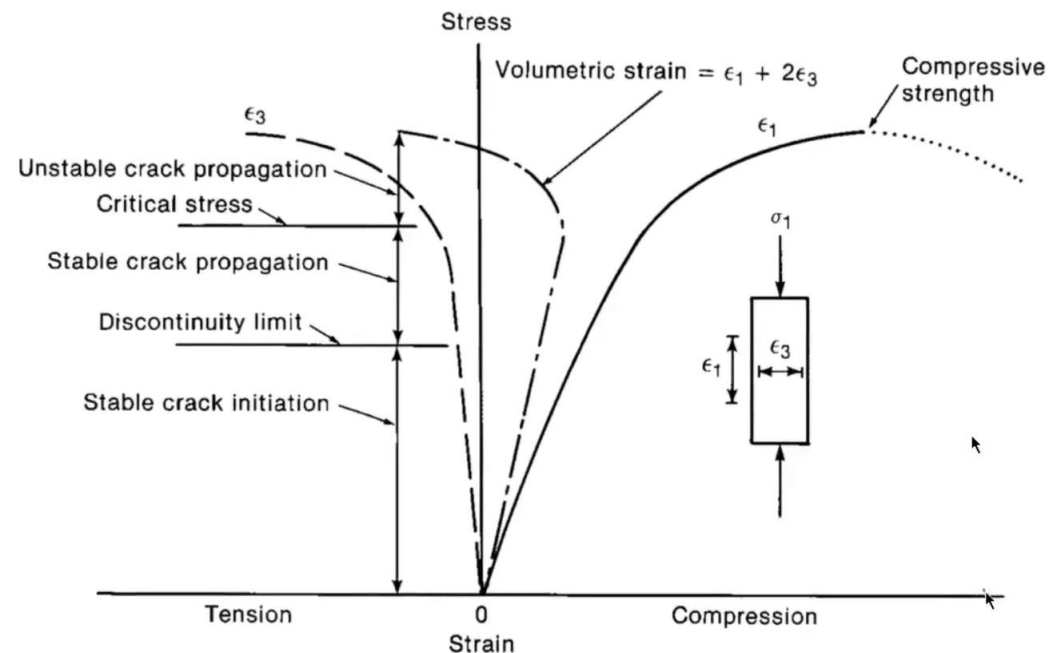
[...] “Brittle materials tend to develop tensile fractures perpendicular to the direction of the largest tensile strain”

[...] “Thus, when concrete is subjected to uniaxial compressive loading, cracks tend to develop parallel to the maximum compressive stress”

Comentarios sobre el concreto: compresión (compression)

Wight & MacGregor: capítulo 3

[...] “The stress-strain curve remains linear up to 30% of the compressive strength of the concrete”



Comentarios sobre el concreto: tracción (tensile)

Wight & MacGregor:

[...] “The tensile strength of concrete falls between 8 and 15 percent of the compressive strength”

Nawy

[...] “The tensile strength of concrete is relatively low. A good approximation for the tensile strength f_{ct} is $0.10f'_c < f_{ct} < 0.20 f'_c$ ”

[...] “is is difficult to measure tensile strength due to gripping”

Comentarios sobre el concreto: cortante (shear)

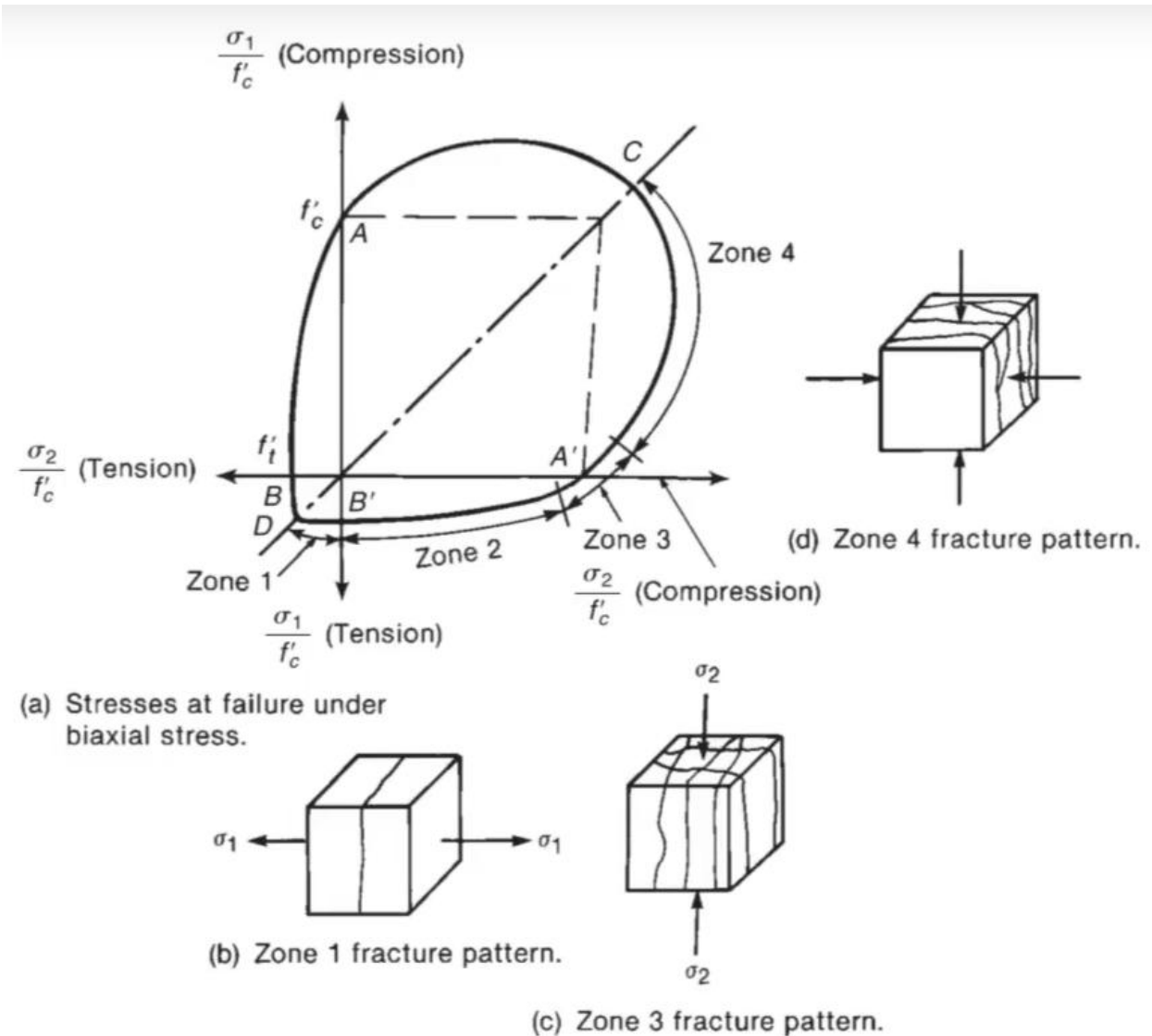
Nawy

[...] “Varying from 20% of the compressive strength in normal loading to a considerably higher percentage of up to 85% of the compressive strength in cases where direct shear exist in combination with compression”

Comentarios sobre el concreto: biaxial

Wight & MacGregor:

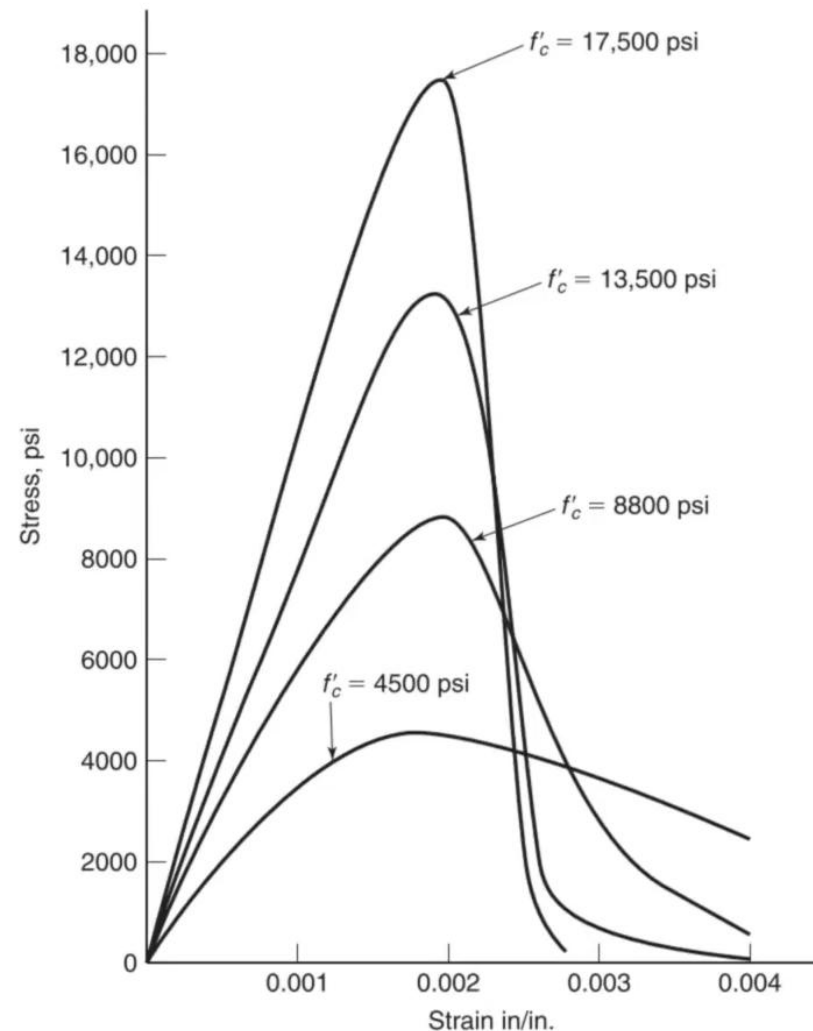
Fig. 3-12
Strength and modes of failure
of unreinforced concrete sub-
jected to biaxial stresses.
(From [3-32].)



Comentarios sobre el concreto: $f'_c \text{ max}$

Wight & MacGregor:

Fig. 3-18
Typical concrete stress-strain
curves in compression.
[Plotted using Eqs. (3-20)
to (3-26).]



Criterio de falla de Mohr-Coulomb:

Wight & MacGregor:

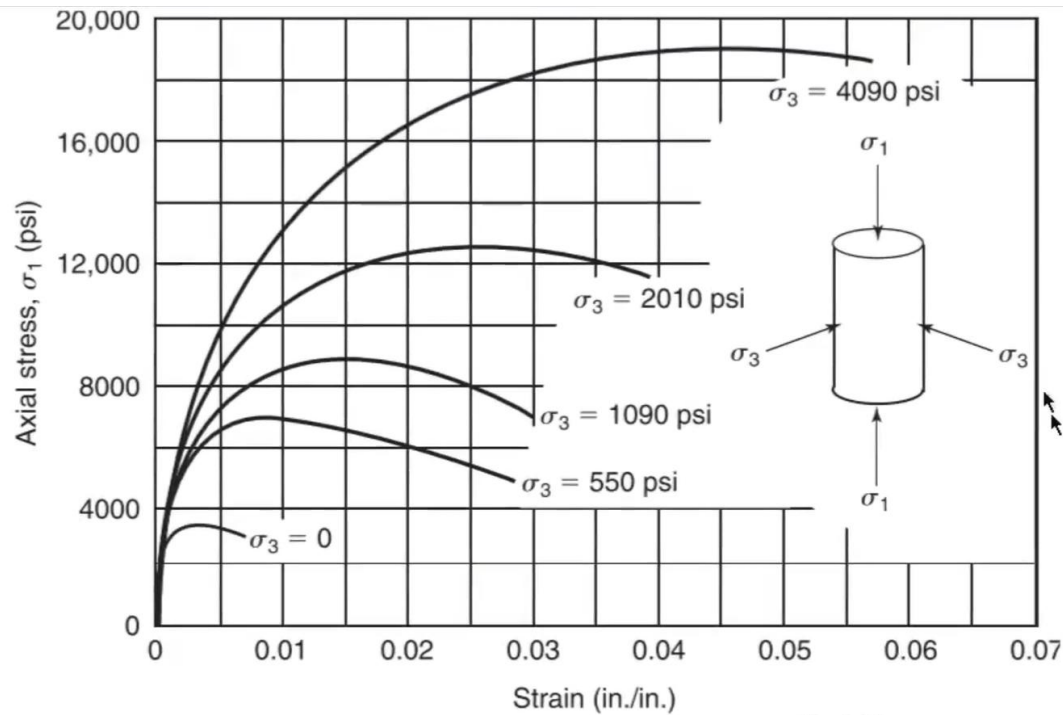


Fig. 3-15
Axial stress-strain curves
from triaxial compression
tests on concrete cylinders;
unconfined compressive
strength $f'_c = 3600$ psi.
(From [3-3].)

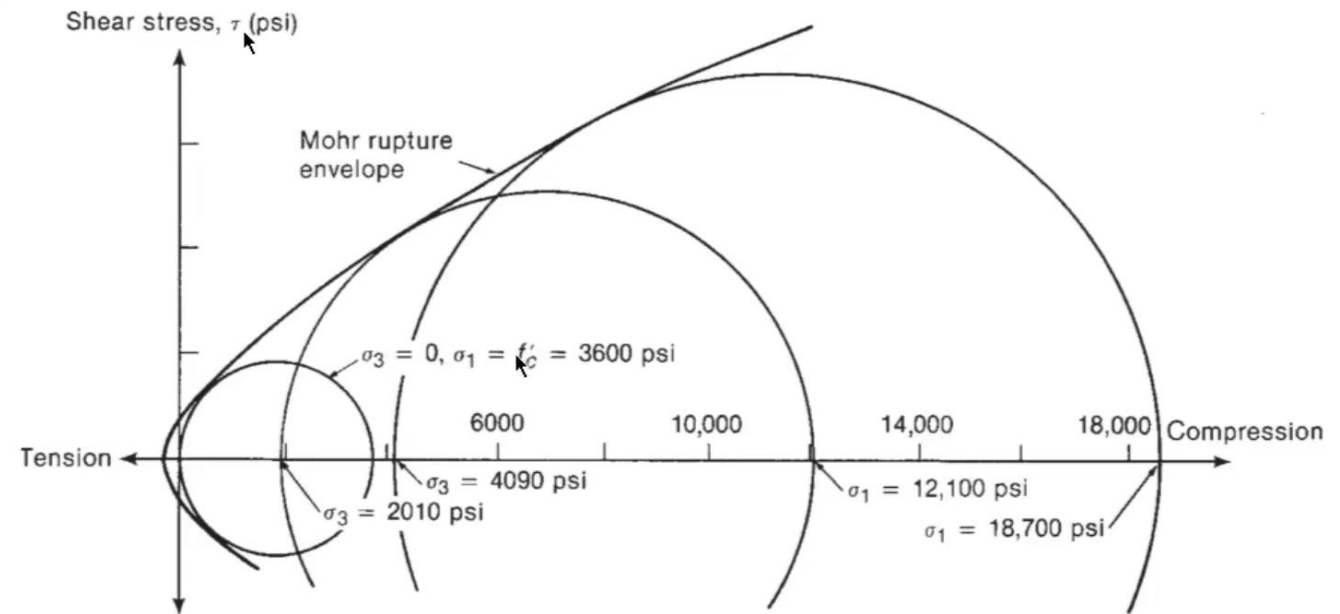
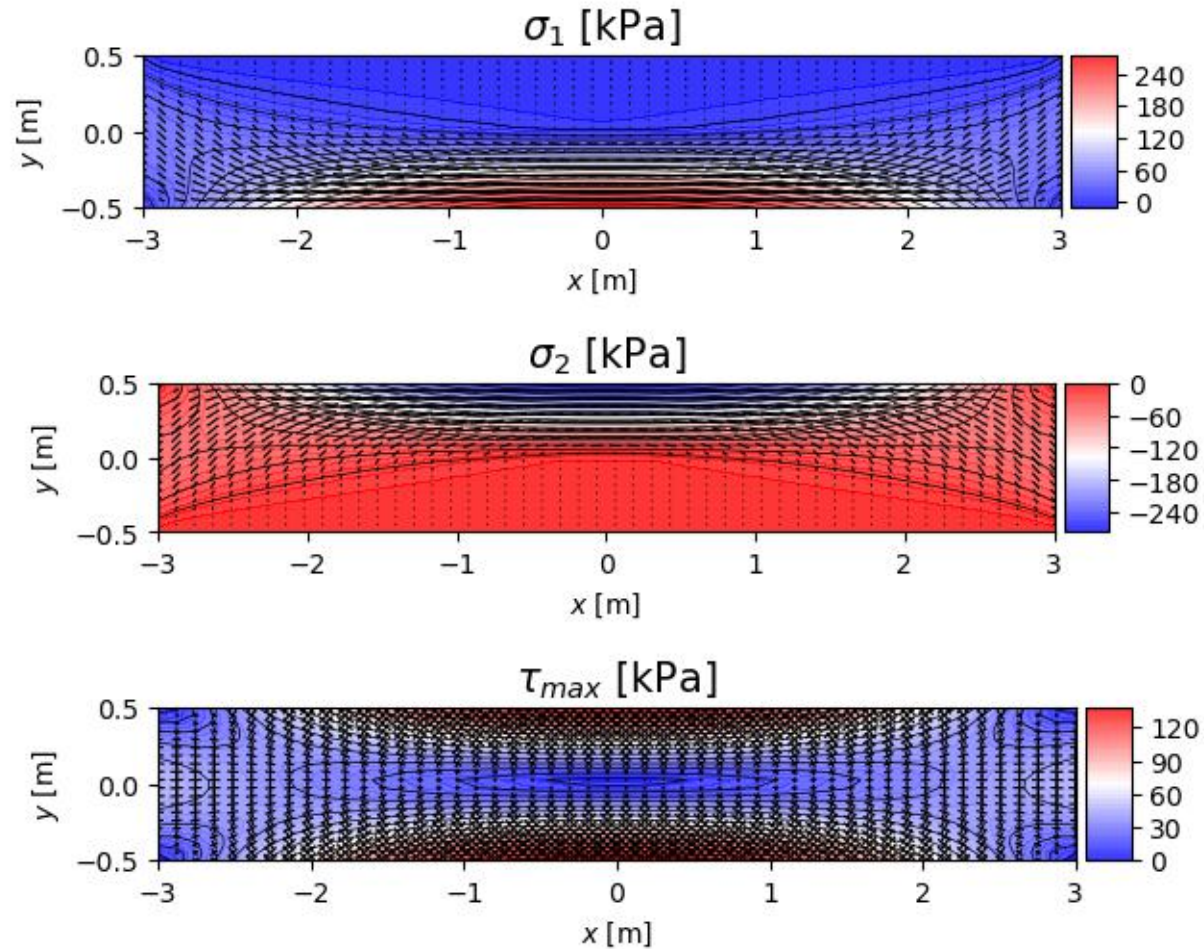


Fig. 3-16
Mohr rupture envelope for
concrete tests from Fig. 3-15.

4.9.3. Interpretación de los gráficos de los esfuerzos principales y esfuerzo cortante máximo



4.9.3. Interpretación de los gráficos de los esfuerzos principales y esfuerzo cortante máximo

Esfuerzos principales $(\sigma_1)_{xy}$ y $(\sigma_2)_{xy}$

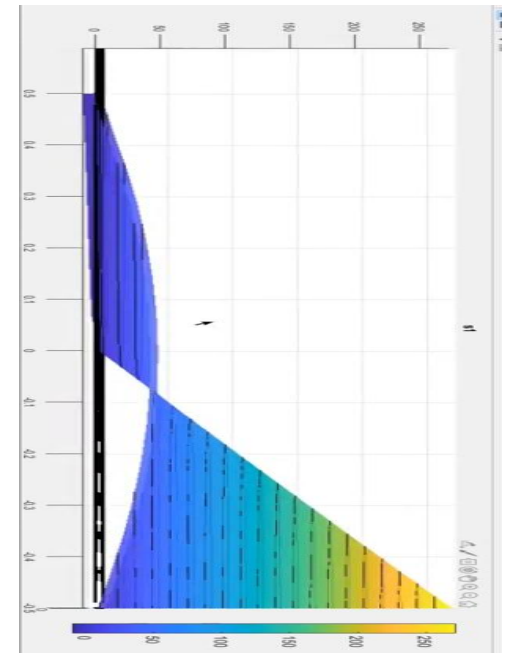
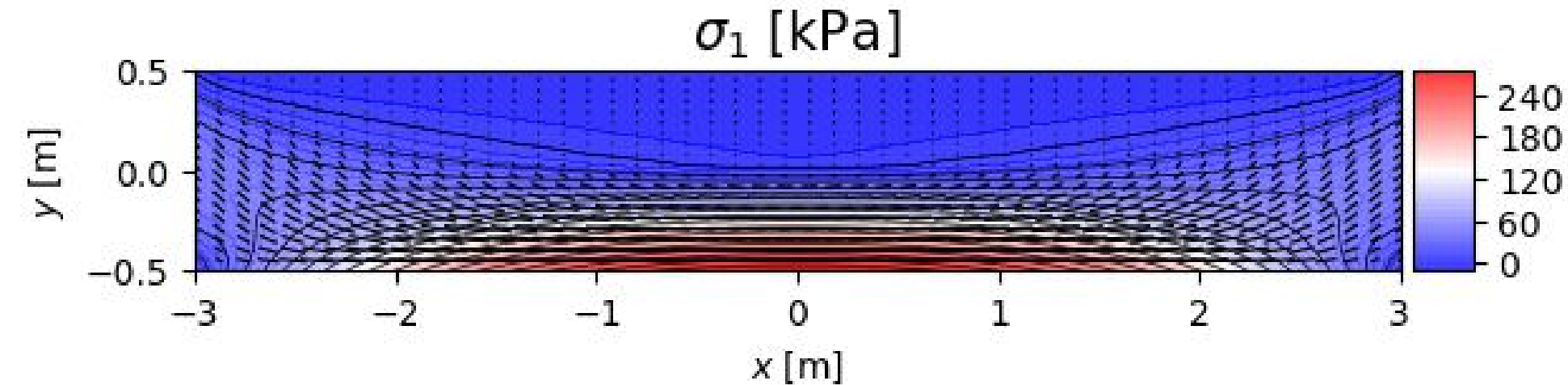
$$\begin{aligned}(\sigma_1)_{xy} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} & \tan 2\theta_1 &= \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} \\(\sigma_2)_{xy} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} & \tan 2\theta_2 &= \frac{-2\tau_{xy}}{-(\sigma_x - \sigma_y)}\end{aligned}$$

4.9.3. Interpretación de los gráficos de los esfuerzos principales y esfuerzo cortante máximo

- Esfuerzo principal $(\sigma_1)_{xy}$

$$(\sigma_1)_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

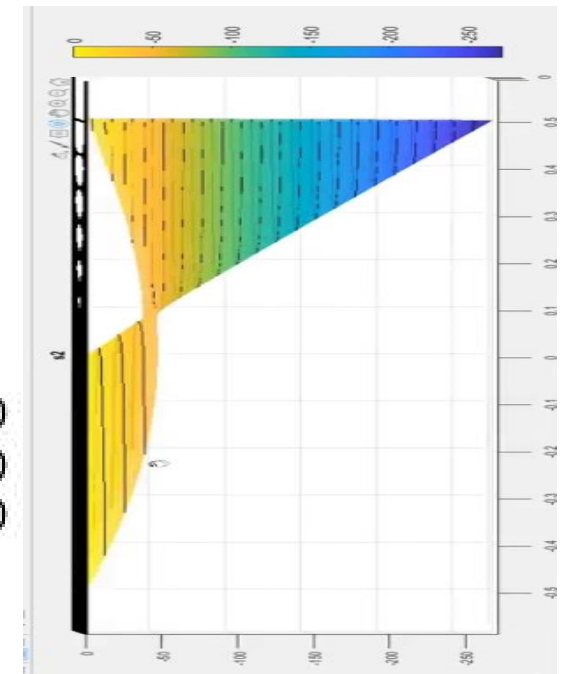
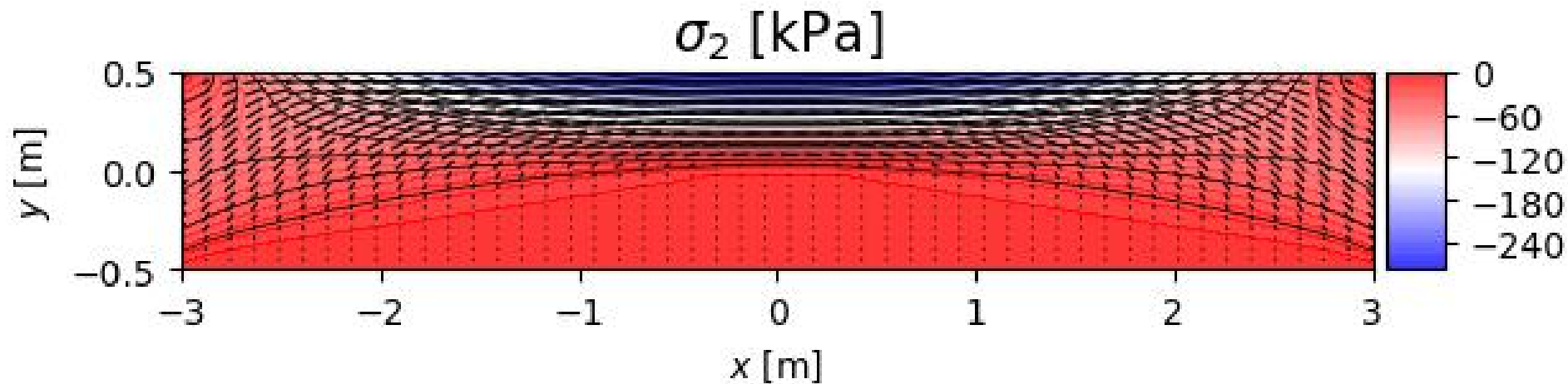
$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$



4.9.3. Interpretación de los gráficos de los esfuerzos principales y esfuerzo cortante máximo

- Esfuerzo principal $(\sigma_2)_{xy}$

$$(\sigma_2)_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \tan 2\theta_2 = \frac{-2\tau_{xy}}{-(\sigma_x - \sigma_y)}$$



4.9.3. Interpretación de los gráficos de los esfuerzos principales y esfuerzo cortante máximo

- Trayectorias de esfuerzos

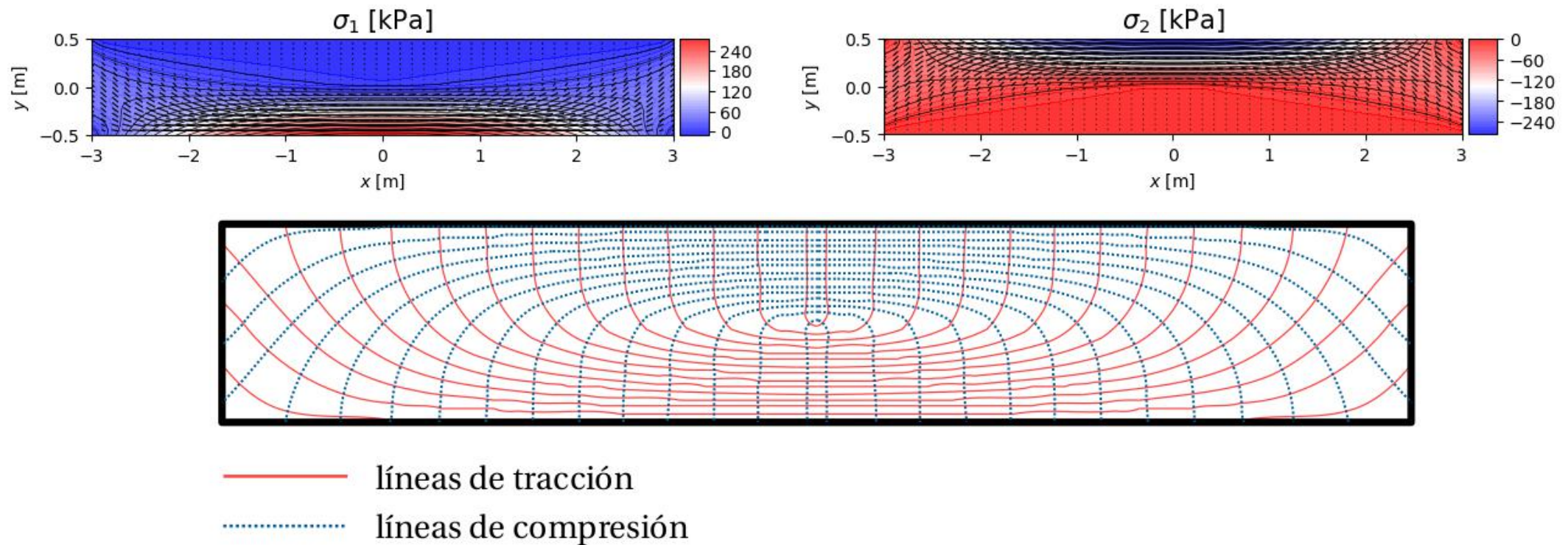
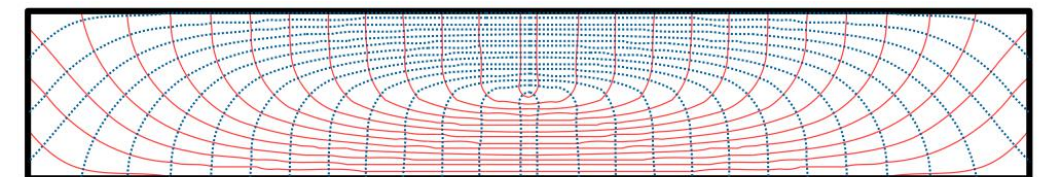
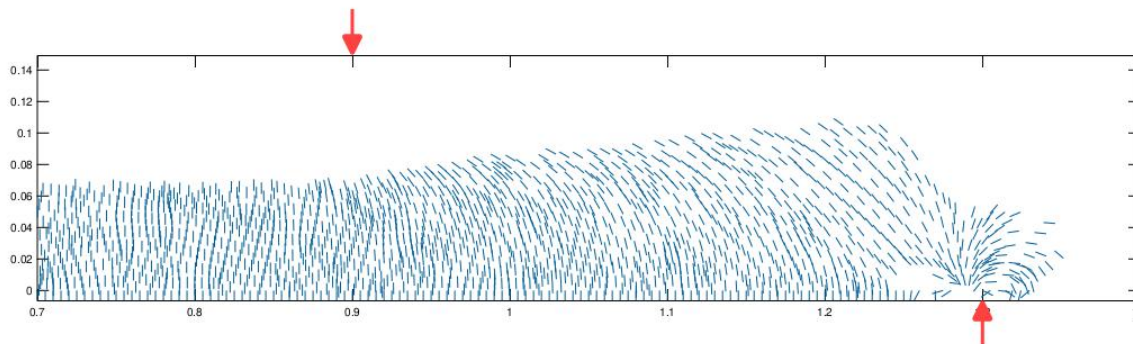


Figura 4.22: Líneas de tracción y de compresión en la viga analizada en la Sección 4.9. A estas líneas se les conoce también como las trayectorias de los esfuerzos. Observe que las líneas de tracción y de compresión son mutuamente ortogonales.

4.9.3. Interpretación de los gráficos de los esfuerzos principales y esfuerzo cortante máximo



Figura 4.24: Grietas en una viga de concreto reforzado de 140 cm de longitud, 15 cm de altura y 10 cm de ancho. La viga aquí mostrada es una doblemente reforzada (acero longitudinal superior e inferior); adicionalmente, tiene flejes en los tercios extremos, es decir, el tercio central de la luz no tiene flejes. Los apoyos están separados 120 cm y las cargas puntuales, las cuales son de igual magnitud, se aplicaron a 40 cm de los apoyos. La foto superior muestra el patrón de agrietamiento de dicha viga; la foto intermedia es un acercamiento de la mitad derecha; la figura inferior muestra el ángulo de inclinación θ_2 para aquellas posiciones en las cuales el esfuerzo $(\sigma_1)_{xy}$ es mayor que la resistencia a tracción del concreto f_t , es decir, $(\sigma_1)_{xy} > f_t$; dicho patrón de agrietamiento se calculó mediante un programa de elementos finitos, asumiendo que el material de la viga tiene un comportamiento lineal elástico. Observe que el patrón de agrietamiento de la viga coincide, en gran medida, con aquel dado por las inclinaciones θ_2 . Estas fotografías fueron tomadas por el autor en el Laboratorio de Estructuras de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales; los ensayos fueron realizados por el profesor Juan Pablo Herrera Castaño y sus alumnos en el curso Diseño de Estructuras de Concreto I.



— líneas de tracción
- - - líneas de compresión

Figura 4.22: Líneas de tracción y de compresión en la viga analizada en la Sección 4.9. A estas líneas se les conoce también como las **trayectorias de los esfuerzos**. Observe que las líneas de tracción y de compresión son mutuamente ortogonales.

4.9.3. Interpretación de los gráficos de los esfuerzos principales y esfuerzo cortante máximo

- Posición del refuerzo

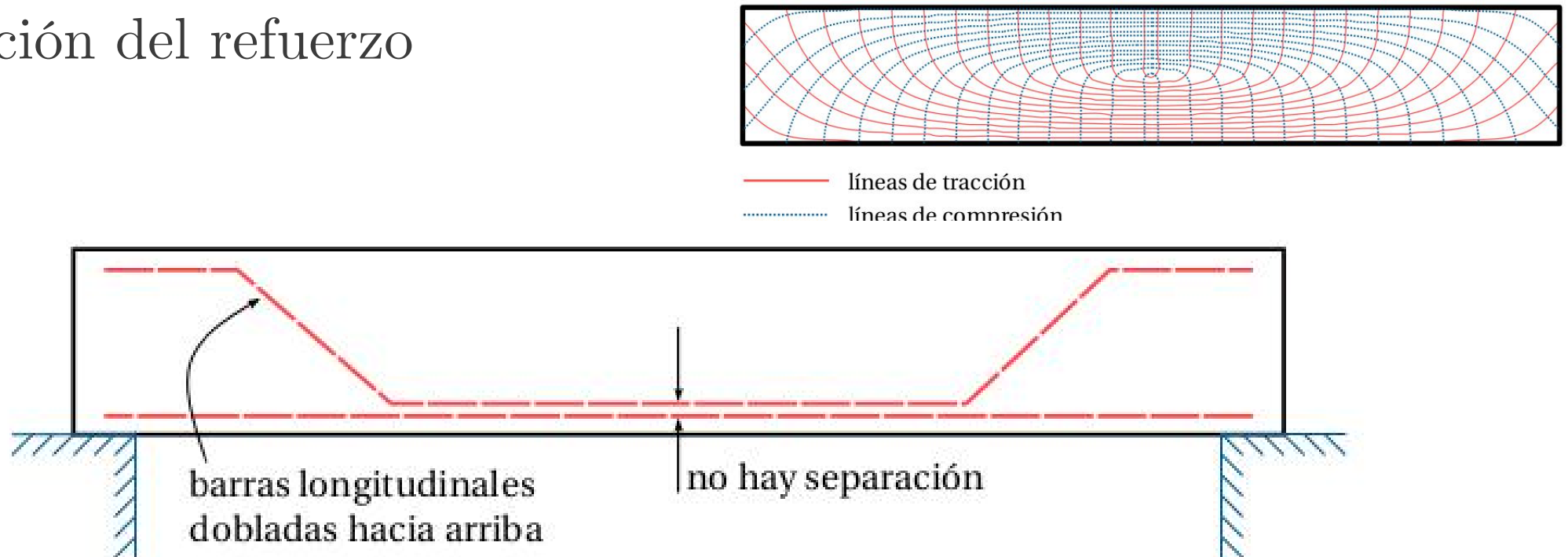
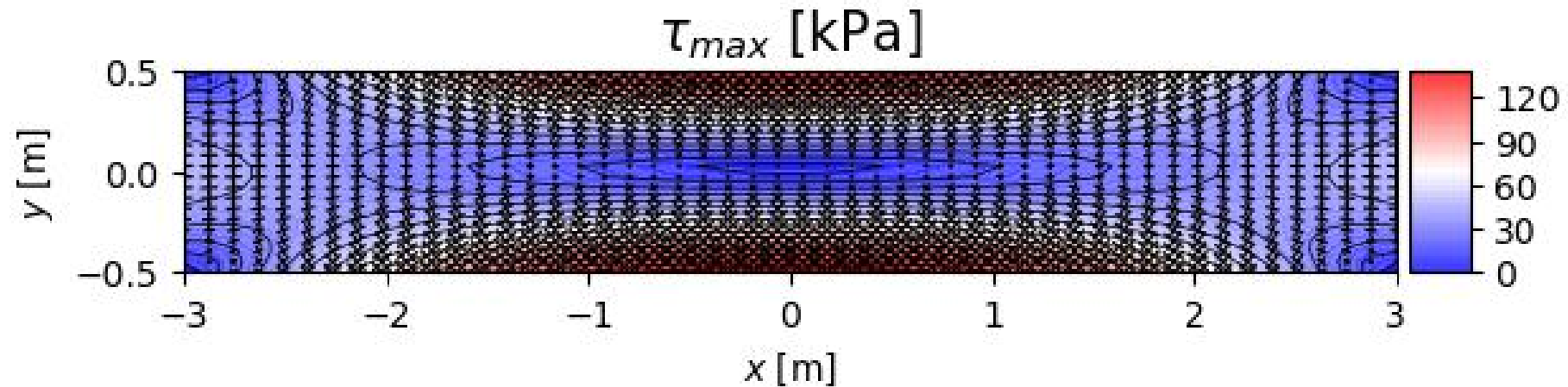


Figura 4.23: El refuerzo para resistir los esfuerzos cortantes también puede proveerse al doblar una parte del refuerzo longitudinal de modo que siga las trayectorias de tensión en aquellas partes donde no se necesita el refuerzo longitudinal para resistir los esfuerzos de tensión a flexión. De todos modos, la mayoría de diseñadores usan, por facilidad constructiva, siempre los convencionales flejes verticales para resistir las fallas por tensión diagonal.

4.9.3. Interpretación de los gráficos de los esfuerzos principales y esfuerzo cortante máximo

- Esfuerzo cortante máximo $(\tau_{max})_{xy}$



Asociado con el esfuerzo de falla de Tresca

$$\tau_{Tresca} = \frac{\tau_{max}}{2}$$

Influencia de τ_{xy} en $(\sigma_1)_{xy}$

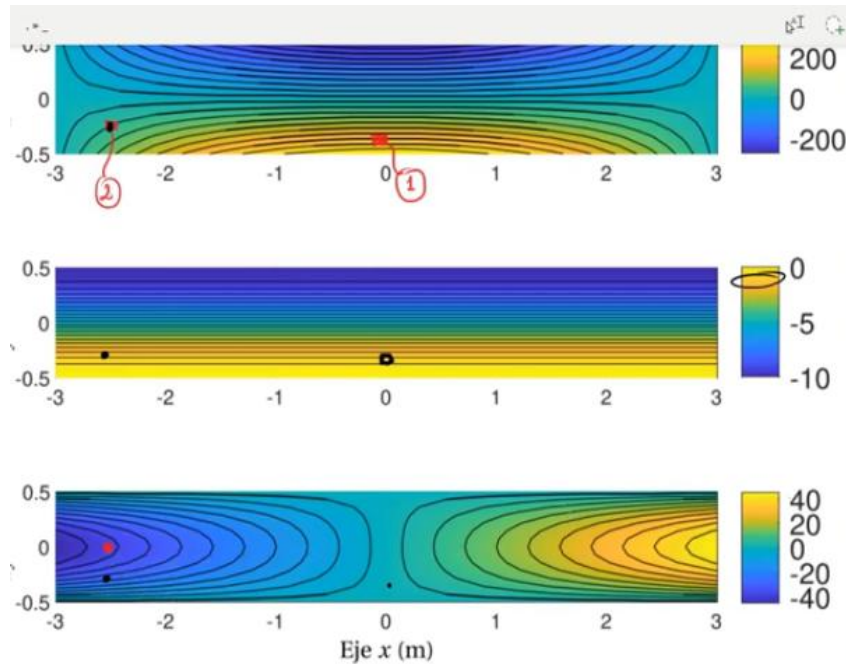
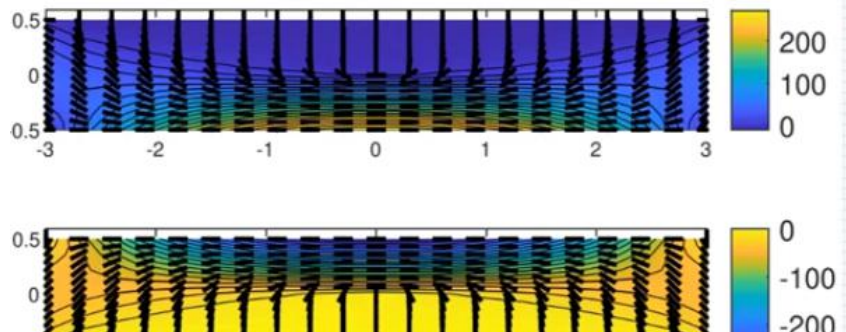


Figura 4.14: Esfuerzos σ_x , σ_y y τ_{xy} de la viga analizada en la Sección 4.8.



$$(\sigma_1)_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

① $(x, y) = (0, -0.4)$

$\sigma_x = 216.16 \text{ Pa}$

$\sigma_y = -0.28 \text{ Pa}$

$\tau_{xy} = 0 \text{ Pa}$

$$(\sigma_1)_{xy} = \frac{216.16 + (-0.28)}{2} + \sqrt{\left(\frac{216.16 - (-0.28)}{2}\right)^2 + 0^2} = 216.16 \text{ Pa}$$

② $(x, y) = (-2.5, 0)$

$\sigma_x = 40.38 \text{ Pa}$

$\sigma_y = -1.56 \text{ Pa}$

$\tau_{xy} = -28.13 \text{ Pa}$

$$(\sigma_1)_{xy} = \frac{(40.38) + (-1.56)}{2} + \sqrt{\left(\frac{40.38 - (-1.56)}{2}\right)^2 + (-28.13)^2} = 54.49 \text{ Pa}$$

$$= 19.41 + \sqrt{439.74 + 791.29} = 54.49 \text{ Pa}$$

$= 19.41 + 20.97$

$= 40.38 \text{ Pa}$

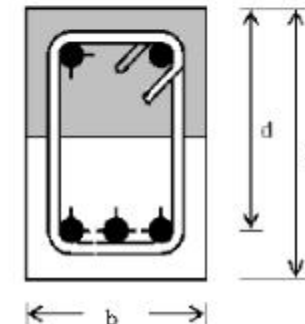
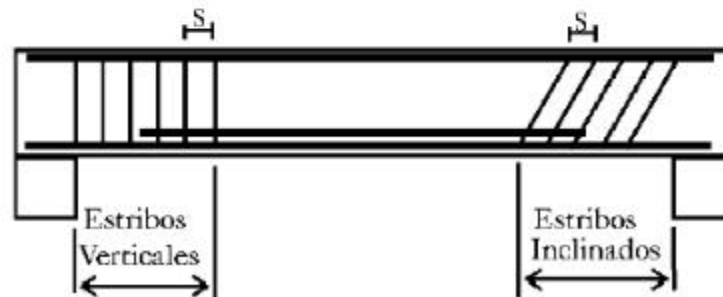
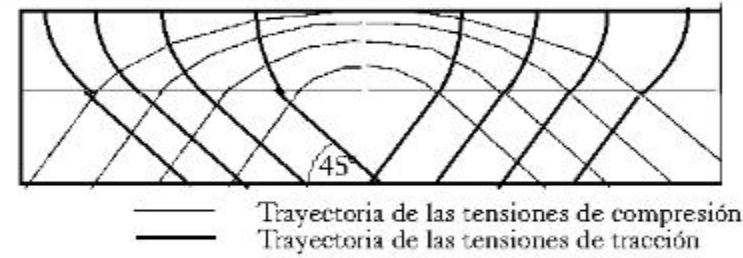
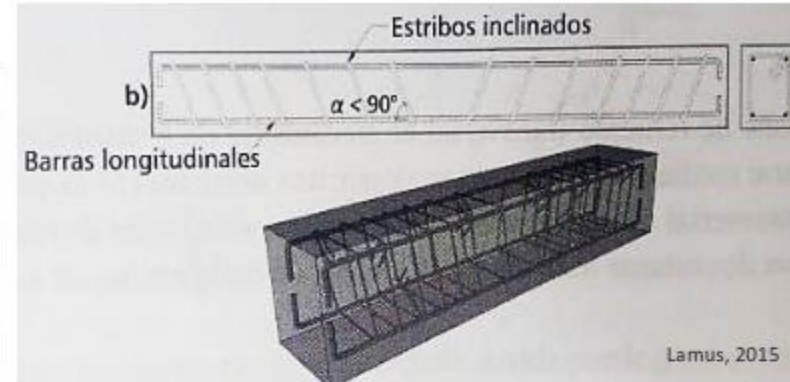
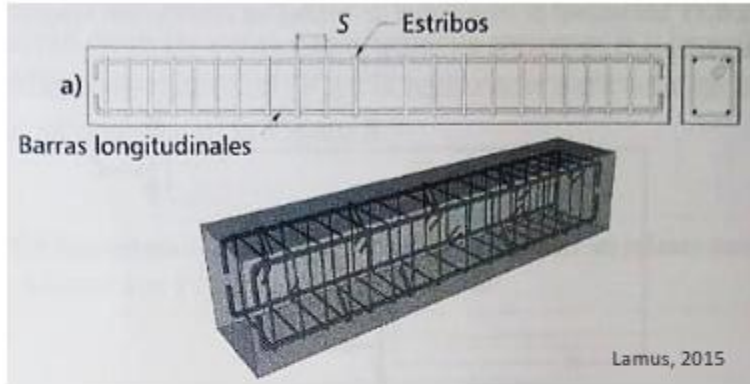
$x = [0 \ -2.5]; y = [-0.4, -0.25];$

```
sx =
216.1600  40.3750
>> sy
sy =
-0.2800  -1.5625
>> txy
txy =
0  -28.1250
```

```
s1 =
216.1600  54.4876
```

Disposición de los flejes si la viga estuviera hecha con concreto reforzado

ESTRIBOS: Verticales e inclinados



Flejes según la zona de amenaza sísmica

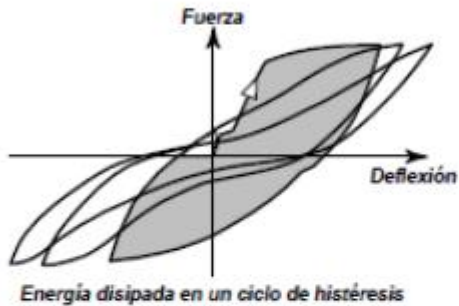
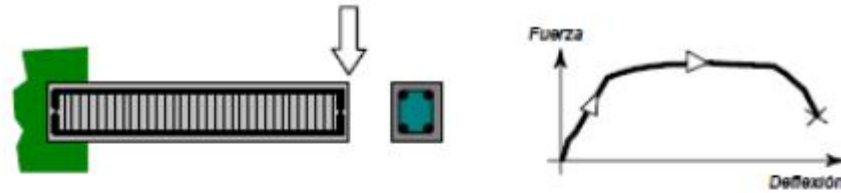
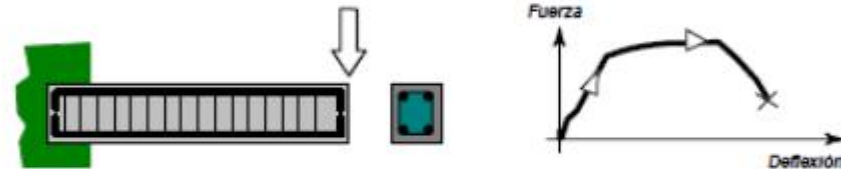


Figura 6 - Capacidad de disipación de energía en el rango inelástico

DES CAPACIDAD ESPECIAL DE DISIPACION DE ENERGIA



DMO CAPACIDAD MODERADA DE DISIPACION DE ENERGIA



DMI CAPACIDAD MINIMA DE DISIPACION DE ENERGIA

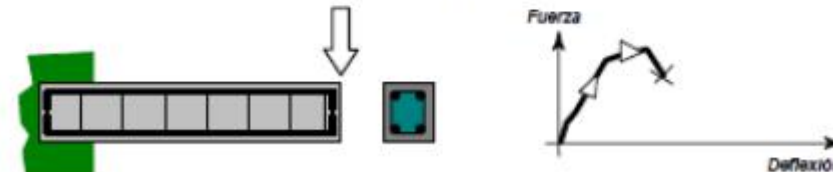


Figura 7 - Definición de la capacidad de disipación de energía en el rango inelástico

Referencias

- Álvarez Diego A. (2022) - *Notas de clase del curso mecánica de sólidos*. En preparación. (main.pdf)