# 05. Ecuaciones diferenciales fundamentales de la teoría de la elasticidad

secciones 5.1 a 5.2

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil
Mecánica de Sólidos

2023a

# Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada (Álvarez, 2022).

# Derrotero

# Derrotero

# Introducción

**Problema**

Dado un cuerpo sólido elástico $\Omega$, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ($\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$)

# Introducción

**Problema**

Dado un cuerpo sólido elástico $\Omega$, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ($\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$)

# Introducción

**Problema**

Dado un cuerpo sólido elástico $\Omega$, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ($\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$)

# Introducción

**Problema**

Dado un cuerpo sólido elástico $\Omega$, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ($\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$)

# Introducción

## Problema

Dado un cuerpo sólido elástico $\Omega$, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ($\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$)

# Ecuaciones de la mecánica del medio contínuo

La variación de los esfuerzos dentro del sólido estará definida por:

- **EDPs de equilibrio**: describen leyes físicas universales como conervación de la masa y de la energía. Aplicables a todo material.
- **EDPs de compatibilidad**: Describen el comportamiento mecánico de materiales particulares.

# Ecuaciones de la mecánica del medio contínuo

La variación de los esfuerzos dentro del sólido estará definida por:

- **EDPs de equilibrio**: describen leyes físicas universales como conervación de la masa y de la energía. Aplicables a todo material.
- **EDPs de compatibilidad**: Describen el comportamiento mecánico de materiales particulares.

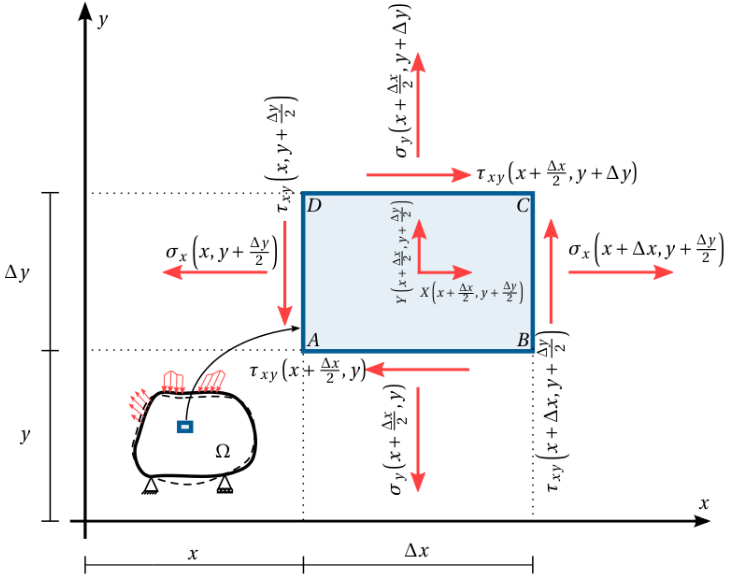
# Ecuaciones de la mecánica del medio contínuo

La variación de los esfuerzos dentro del sólido estará definida por:

- **EDPs de equilibrio**: describen leyes físicas universales como conervación de la masa y de la energía. Aplicables a todo material.
- **EDPs de compatibilidad**: Describen el comportamiento mecánico de materiales particulares.

# Derrotero

# Ecuaciones diferenciales de equilibrio



# Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Para el caso bidimensional, encontramos el equlibrio mediante el siguiente par de ecuaciones:

$$\frac{\partial \sigma_x(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x,y)}{\partial y} + X(x,y) = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x,y)}{\partial y} + Y(x,y) = 0$$

# Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Análogamente, en el caso tridimensional:

$$\frac{\partial \sigma_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial z} + X(x,y,z) = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial z} + Y(x,y,z) = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(x,y,z)}{\partial z} + Z(x,y,z) = 0$$

# Ecuaciones diferenciales de equilibrio

## Ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio (interno)

$$\frac{\partial \sigma_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial z} + X(x,y,z) = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial z} + Y(x,y,z) = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(x,y,z)}{\partial z} + Z(x,y,z) = 0$$

Expresan el equilibrio de fuerzas en las direcciones $x$, $y$ y $z$ en todos los puntos interiores del sólido.

- Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) en 1829, matemático e ingeniero civil.

# Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Cuando la única fuerza másica actuando es el peso propio:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial z} - \rho(x,y,z)g &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(x,y,z)}{\partial z} &= 0
\end{aligned}
$$

# Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$

- En notación vectorial:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$
$$\text{div}\ \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

**Interpretación física**

- Aplicables a cualquier sólido independiente del material constitutivo.
- Los esfuerzos son funciones derivables y continuas con respecto a la posición.
- El problema planteado es estáticamente indeterminado (o hiperestático)

# Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$

- En notación vectorial:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

**Interpretación física**

- Aplicables a cualquier sólido independiente del material constitutivo.
- Los esfuerzos son funciones derivables y continuas con respecto a la posición.
- El problema planteado es estáticamente indeterminado (o hiperestático)

# Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$

- En notación vectorial:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

$$\text{div}\ \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

**Interpretación física**

- Aplicables a cualquier sólido independiente del material constitutivo.
- Los esfuerzos son funciones derivables y continuas con respecto a la posición.
- El problema planteado es estáticamente indeterminado (o hiperestático)

# Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$

- En notación vectorial:

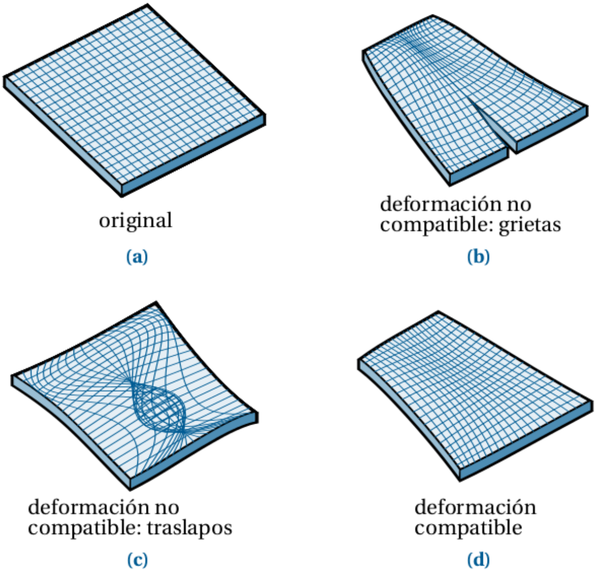
$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$
$$\text{div } \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

## Interpretación física

- Aplicables a cualquier sólido independiente del material constitutivo.
- Los esfuerzos son funciones derivables y continuas con respecto a la posición.
- El problema planteado es estáticamente indeterminado (o hiperestático)

# Derrotero

# ¿Para qué?


original
(a)
deformación no compatible: grietas
(b)
deformación no compatible: traslapos
(c)
deformación compatible
(d)

# Derrotero

# Ecuaciones de compatibilidad en dos dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Operando:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

Reemplazando:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

# Ecuaciones de compatibilidad en dos dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Operando:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

Reemplazando:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

# Ecuaciones de compatibilidad en dos dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Operando:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

Reemplazando:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

# Ecuaciones de compatibilidad en dos dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Operando:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

Reemplazando:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

# Ecuaciones de compatibilidad en dos dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Operando:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

Reemplazando:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

# Ecuaciones de compatibilidad en dos dimensiones expresadas en términos de deformaciones

## Ecuación de compatibilidad bidimensional en términos de deformaciones

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

- Los desplazamientos $u$ y $v$ deben ser funciones continuas y derivables, cuyas primeras dos derivadas parciales mixtas son continuas.
- Únicamente aplicable cuando se presentan deformaciones pequeñas.

# Derrotero

# Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Conociendo:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Sumando estas ecuaciones y organizando términos:

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

# Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Conociendo:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Sumando estas ecuaciones y organizando términos:

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

# Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Intercambiando cíclicamente los índices $x$, $y$, y $z$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} & \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} & \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} & \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)
\end{aligned}
$$

# Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

## Ecuaciones de compatibilidad de Saint-Venant

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad & 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \qquad & 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} \qquad & 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)
\end{aligned}
$$

(mismas anotaciones)

- Adhémar Jean Claude de Saint-Venant (1797-1886) en 1864, matemático e ingeniero mecánico.

# Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Las ecuaciones de Saint-Venant se pueden resumir en una única ecuación usando notación tensorial:

$$\varepsilon_{ij,km} + \varepsilon_{mk,ji} - \varepsilon_{ik,jm} - \varepsilon_{mj,ki} = 0; \quad i, j, k, m = 1, 2, 3$$

Esta única ecuación representa 81 ecuaciones diferenciales parciales, no obstante, debido a la simetría del tensor de deformaciones $\varepsilon_{ij}$, solo las seis ecuaciones anteriores son distintas.

# Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Las ecuaciones anteriores son LD. Se pueden reducir al siguiente sistema de 3 EDPs LI. (Ameen, 2005):

$$
\begin{aligned}
2\frac{\partial^4 \varepsilon_x}{\partial y^2 \partial z^2} &= \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)\\
2\frac{\partial^4 \varepsilon_y}{\partial x^2 \partial z^2} &= \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)\\
2\frac{\partial^4 \varepsilon_z}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)
\end{aligned}
$$

Sin embargo, se emplea la formulación anterior (sistema 6x6) al ser matemáticamente más simple su uso.

# Derrotero

# Ecuaciones de compatibilidad para el caso de tensión plana expresada en términos de esfuerzos

Condición de **tensión plana**: $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Las deformaciones (eq. 4.35):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

Derivando:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{G}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad en dos dimensiones (5.6)

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\sigma_y)\right) \tag{1}$$

# Ecuaciones de compatibilidad para el caso de tensión plana expresada en términos de esfuerzos

Condición de **tensión plana**: $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Las deformaciones (eq. 4.35):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

Derivando:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{G}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad en dos dimensiones (5.6)

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\sigma_y)\right) \tag{1}$$

# Ecuaciones de compatibilidad para el caso de tensión plana expresada en términos de esfuerzos

Condición de **tensión plana**: $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Las deformaciones (eq. 4.35):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

Derivando:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{G}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad en dos dimensiones (5.6)

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\sigma_y)\right) \tag{1}$$

# Ecuaciones de compatibilidad para el caso de tensión plana expresada en términos de esfuerzos

Las ecuaciones diferenciales de equilibrio 2D:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

Derivando, sumando y despejando el término que contiene a $\tau_{xy}$:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \tag{2}$$

# Ecuaciones de compatibilidad para el caso de tensión plana expresada en términos de esfuerzos

Las ecuaciones diferenciales de equilibrio 2D:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

Derivando, sumando y despejando el término que contiene a $\tau_{xy}$:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \tag{2}$$

# Ecuaciones de compatibilidad para el caso de tensión plana expresada en términos de esfuerzos

Igualando (1) y (2), simplificando:

**Ecuación de compatibilidad para el caso de tensión plana**

En términos de esfuerzos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

# Ecuaciones de compatibilidad para el caso de tensión plana expresada en términos de esfuerzos

Igualando (1) y (2), simplificando:

**Ecuación de compatibilidad para el caso de tensión plana**

En términos de esfuerzos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

# Derrotero

# Ecuaciones de compatibilidad para el caso de deformación plana expresada en términos de esfuerzos

Condición de **deformación plana**: $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Las deformaciones (4.38):

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}((1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}((1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

Aplicando derivadas:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x(1-\nu) - \nu\sigma_y)$$
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y(1-\nu) - \nu\sigma_x)$$
$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{G}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

# Ecuaciones de compatibilidad para el caso de deformación plana expresada en términos de esfuerzos

Condición de **deformación plana**: $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Las deformaciones (4.38):

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}((1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}((1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

Aplicando derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x(1-\nu) - \nu\sigma_y) \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y(1-\nu) - \nu\sigma_x) \\
\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{G}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}
\end{aligned}$$

# Ecuaciones de compatibilidad para el caso de deformación plana expresada en términos de esfuerzos

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad en dos dimensiones (5.6):

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{G(1+\nu)}{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x(1-\nu) - \nu\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y(1-\nu) - \nu\sigma_x)\right) \qquad (3)$$

Igualando las ecuaciones (2) y (3)

$$\frac{G(1+\nu)}{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x(1-\nu) - \nu\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y(1-\nu) - \nu\sigma_x)\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

# Ecuaciones de compatibilidad para el caso de deformación plana expresada en términos de esfuerzos

Simplificando:

### Ecuación de compatibilidad para el caso de deformación plana

En términos de esfuerzos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

# Ecuaciones de compatibilidad para el caso de deformación plana expresada en términos de esfuerzos

Simplificando:

**Ecuación de compatibilidad para el caso de deformación plana**

En términos de esfuerzos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=-\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

# Derrotero

# Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

## Ecuación de compatibilidad general para el caso bidimensional

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

$$K_1 = \begin{cases} -(1+\nu) & \text{para el caso de } \textbf{tensión plana} \\ -\dfrac{1}{1-\nu} & \text{para el caso de } \textbf{deformación plana} \end{cases}$$

---

- Aplicable solo a sólidos con materiales elásticos (Ley de Hooke), lineales e isótropos.
- Materiales homogeneos: $E(x, y, z) = \nu(x, y, z) = \text{cte}$.
- Deformaciones pequeñas.

# Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\nabla^2 \sigma_{ii} = K_1 b_{i,i}$$

- En notación vectorial:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \operatorname{div}\boldsymbol{b}$$

donde

$$\begin{cases} \nabla^2 := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & \textbf{operador laplaciano bidimensional} \\ \operatorname{div}\boldsymbol{b} := \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} & \text{divergenia del campo vectorial } \boldsymbol{b} \end{cases}$$

# Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\nabla^2 \sigma_{ii} = K_1 b_{i,i}$$

- En notación vectorial:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \mathrm{div}\boldsymbol{b}$$

donde

$$\begin{cases} \nabla^2 := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & \textbf{operador laplaciano bidimensional} \\ \mathrm{div}\boldsymbol{b} := \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} & \text{divergenia del campo vectorial } \boldsymbol{b} \end{cases}$$

# Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\nabla^2 \sigma_{ii} = K_1 b_{i,i}$$

- En notación vectorial:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \mathrm{div}\boldsymbol{b}$$

donde

$$\begin{cases} \nabla^2 := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & \textbf{operador laplaciano bidimensional} \\ \mathrm{div}\boldsymbol{b} := \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} & \text{divergencia del campo vectorial } \boldsymbol{b} \end{cases}$$

# Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\nabla^2 \sigma_{ii} = K_1 b_{i,i}$$

- En notación vectorial:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \text{div}\boldsymbol{b}$$

donde

$$\begin{cases} \nabla^2 := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & \textbf{operador laplaciano bidimensional} \\ \text{div}\boldsymbol{b} := \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} & \text{divergenia del campo vectorial } \boldsymbol{b} \end{cases}$$

# Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

¿Y si las fuerzas másicas son homogéneas?

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = 0;$$

# Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

## Ecuación de Lévy

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

La distribución de esfuerzos debe ser igual para todas las estructuras en tensión o deformación plana, siempre y cuando se trate de:

- Contornos idénticos.
- Estructuras sometidas al mismo sistema de fuerzas superficiales y másicas, constantes.

- Maurice Lévy (1838-1910), ingeniero y matemático francés

# Fotoeslasticidad

En el método fotoelástico, un material transparente se somete a una luz polarizada y a unas fuerzas; según la llamada *ley de Brewster* o *ley tenso-óptica*, el material responderá mostrando unas franjas del igual color, las cuales se pueden interpretar como curvas de esfuerzo cortante máximo $\tau_{max}$ constante; esto siempre y cuando el esfuerzo fuera del plano sea el esfuerzo intermedio, es decir, $\sigma_2$ en el caso tridimensional. (ver video).

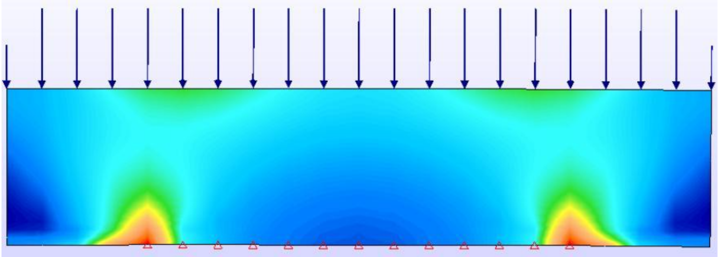


Figura: Estudio de la distribución de esfuerzos sobre un polímero sometido a compresión, utilizando la técnica de fotoelasticidad. Hilda Sofía Soto Lesmes, ver.

# Derrotero

# Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

Recordemos:

- Las ecuaciones (4.3) dadas por la superposición de las deformaciones elásticas:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z))$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))$$

- Las EDPs de equilibrio interno (5.2):

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = 0$$

# Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

Recordemos:

- Las ecuaciones (4.3) dadas por la superposición de las deformaciones elásticas:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z))$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))$$

- Las EDPs de equilibrio interno (5.2):

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = 0$$

# Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

Recordemos:

- Las ecuaciones (4.3) dadas por la superposición de las deformaciones elásticas:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z))$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))$$

- Las EDPs de equilibrio interno (5.2):

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = 0$$

# Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

$$\nabla^2\sigma_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial X}{\partial x}$$

$$\nabla^2\sigma_y + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial Y}{\partial y}$$

$$\nabla^2\sigma_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial Z}{\partial z}$$

$$\nabla^2\tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z} = -\left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y}\right)$$

$$\nabla^2\tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial z} = -\left(\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x}\right)$$

$$\nabla^2\tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y} = -\left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\right)$$

# Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

## Ecuaciones de Michell

$$\nabla^2\sigma_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial X}{\partial x}$$

$$\nabla^2\sigma_y + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial Y}{\partial y}$$

$$\nabla^2\sigma_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial Z}{\partial z}$$

$$\nabla^2\tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z} = -\left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y}\right)$$

$$\nabla^2\tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial z} = -\left(\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x}\right)$$

$$\nabla^2\tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y} = -\left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\right)$$

- John Henry Michell (1863-1940) en 1900, matemático australiano.

# Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\Theta_{,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}b_{k,k} - b_{i,j} - b_{j,i}$$

donde:

- $\Theta := \sigma_{kk} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ es el primer invariante de esfuerzos $I_1$
- $\nabla^2$ es el **operador laplaciano tridimensional**:

$$\nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

**Comentario**

A comparación de las ecuaciones de Saint-Venant (5.7) las de Michell son LI

# Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\Theta_{,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij} b_{k,k} - b_{i,j} - b_{j,i}$$

donde:

- $\Theta := \sigma_{kk} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ es el primer invariante de esfuerzos $I_1$
- $\nabla^2$ es el **operador laplaciano tridimensional**:

$$\nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

**Comentario**

A comparación de las ecuaciones de Saint-Venant (5.7) las de Michell son LI

# Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\Theta_{,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}b_{k,k} - b_{i,j} - b_{j,i}$$

donde:

- $\Theta := \sigma_{kk} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ es el primer invariante de esfuerzos $I_1$
- $\nabla^2$ es el **operador laplaciano tridimensional**:

$$\nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

**Comentario**

A comparación de las ecuaciones de Saint-Venant (5.7) las de Michell son LI

# Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\Theta_{,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}b_{k,k} - b_{i,j} - b_{j,i}$$

donde:

- $\Theta := \sigma_{kk} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ es el primer invariante de esfuerzos $I_1$
- $\nabla^2$ es el **operador laplaciano tridimensional**:

$$\nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

**Comentario**

A comparación de las ecuaciones de Saint-Venant (5.7) las de Michell son LI

# Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

¿Y si las fuerzas másicas son constantes?

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} X(x,y,z) \\ Y(x,y,z) \\ Z(x,y,z) \end{bmatrix} = \text{cte};$$

# Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

## Ecuaciones de Beltrami

$$\nabla^2\sigma_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = 0 \qquad \nabla^2\tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z} = 0$$

$$\nabla^2\sigma_y + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} = 0 \qquad \nabla^2\tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial z} = 0$$

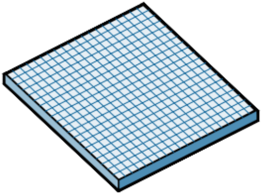
$$\nabla^2\sigma_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} = 0 \qquad \nabla^2\tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y} = 0$$

- Válidas para materiales elásticos, lineales, homogéneos e isótropos (Ley de Hooke).
- Son análogas a $\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$ (caso bidimensional).

- Eugenio Beltrami (1835-1900) en 1892, matemático italiano.

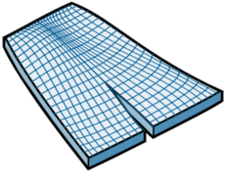
# Derrotero

# Interpretación física de las ecuaciones de compatibilidad



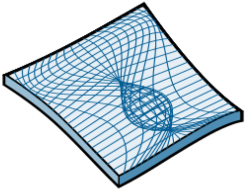
original

**(a)**



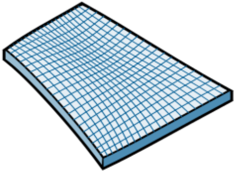
deformación no
compatible: grietas

**(b)**



deformación no
compatible: traslapos

**(c)**



deformación
compatible

**(d)**

# Sobre las ecuaciones de compatibilidad en términos de deformaciones (5.6) y (5.7)

## interpretación

No deben aparecer grietas (discontinuidades) en el campo de deformaciones.

Razones:

- $u$, $v$, $w$ son:
  - Funciones contínuas y derivables.
  - Continuidad $C^3(\Omega)$
- Válidas para materiales con cualquier tipo de comportamiento (elástico, plástico, anisótropo, lineal, no lineal, etc) siempre y cuando las deformaciones de este sean pequeñas.

# Sobre las ecuaciones de compatibilidad en términos de deformaciones (5.6) y (5.7)

## interpretación

No deben aparecer grietas (discontinuidades) en el campo de deformaciones.

Razones:

- $u$, $v$, $w$ son:
  - Funciones contínuas y derivables.
  - Continuidad $C^3(\Omega)$
- Válidas para materiales con cualquier tipo de comportamiento (elástico, plástico, anisótropo, lineal, no lineal, etc) siempre y cuando las deformaciones de este sean pequeñas.

# Sobre las ecuaciones de compatibilidad en términos de deformaciones (5.6) y (5.7)

## interpretación

No deben aparecer grietas (discontinuidades) en el campo de deformaciones.

Razones:

- $u$, $v$, $w$ son:
  - Funciones contínuas y derivables.
  - Continuidad $C^3(\Omega)$
- Válidas para materiales con cualquier tipo de comportamiento (elástico, plástico, anisótropo, lineal, no lineal, etc) siempre y cuando las deformaciones de este sean pequeñas.

# Sobre las ecuaciones de compatibilidad en términos de esfuerzos (5.13) (5.18) (5.17) y (5.19)

## interpretación

Sólo son válidas para materiales con comportamiento elástico, lineal, homogéneo e isótropo siempre y cuando las deformaciones sean pequeñas.

Razón:

- En su deducción se empleó la Ley de Hooke.

# Sobre las ecuaciones de compatibilidad en términos de esfuerzos (5.13) (5.18) (5.17) y (5.19)

## interpretación

Sólo son válidas para materiales con comportamiento elástico, lineal, homogéneo e isótropo siempre y cuando las deformaciones sean pequeñas.

Razón:

- En su deducción se empleó la Ley de Hooke.

# En general: los traslapos

## interpretación

- El hecho de que el sólido no se traslapará en sus deformaciones está implícitamente dicho por las ecuaciones de compatibilidad al imponer las relaciones entre las segundas derivadas de los desplazamientos $u$, $v$ y $w$.
- El propósito principal de las ecuaciones de compatibilidad es imponer restricciones en las deformaciones, garantizando así que los desplazamientos $u$, $v$ y $w$ tengan un valor único.

# Derrotero

# Ejercicio

## Ejemplo

Considere una condición de tensión plana, en la cual $\varepsilon_x(x,y) = a(x^2+y^2)$ y $\gamma_{x,y}(x,y) = 2xy$, donde $a$ es una constante. Encuentre la deformación longitudinal $\varepsilon_y(x,y)$ correspondiente que sea físicamente válida, asumiendo una condición en la cual las fuerzas másicas se consideran nulas y que el material es elástico, lineal, homogéneo e isótropo.

## Código

- 05_02_07_ejemplo.py

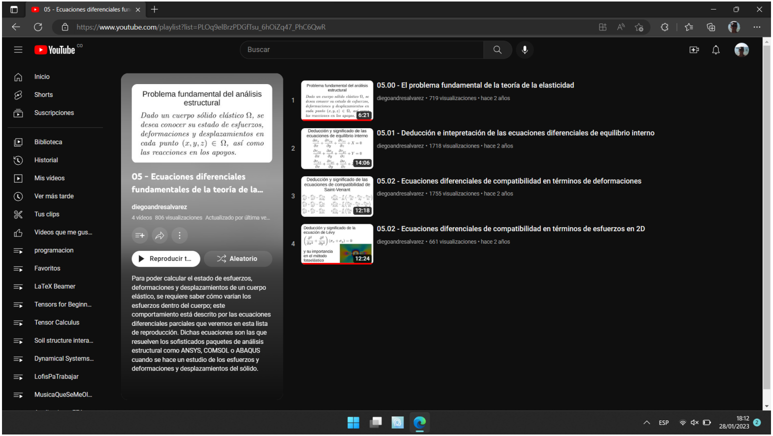
# Derrotero

# Referencias

Ameen, M. (2005). *Computational Elasticity: Theory of Elasticity and Finite and Boundary Element Methods*. Alpha Science International.

Álvarez, D. A. (2022). *Teoría de la elasticidad*, volume 1. Universidad Nacional de Colombia.

# Links




- Lista de resproducción: 05 - Ecuaciones diferenciales fundamentales de la teoría de la ...
- Repositorio del curso: github/medio_continuo