

02. Estudio de los esfuerzos en un punto

secciones 2.5 a 2.6

Michael Heredia Pérez

mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil
Mecánica Tensorial

2023a



Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada ([Álvarez, 2022](#)).



Derrotero

- ① 2.5. Cambio de base
- ② 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas
 - 2.6.1. Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional
 - 2.6.2. Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional
- ③ Referencias

Derrotero

1 2.5. Cambio de base

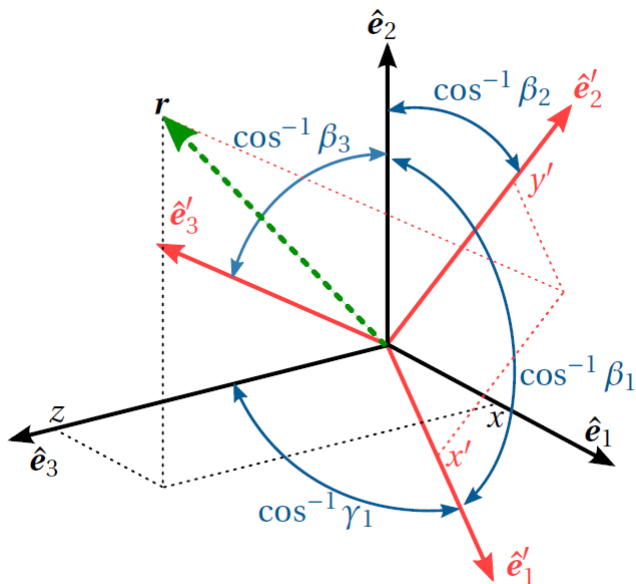
2 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas

2.6.1. Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional

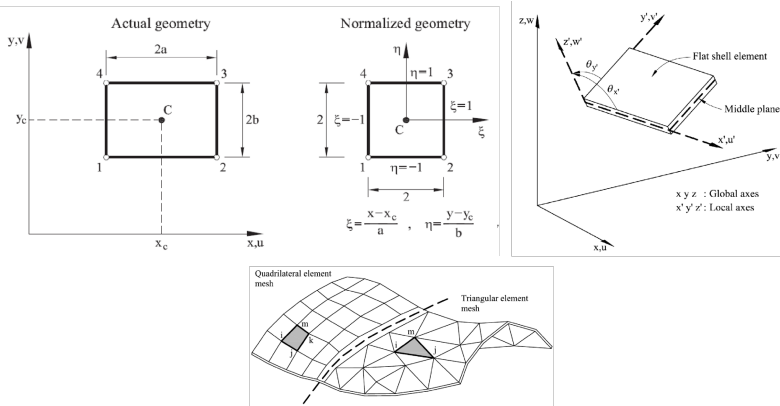
2.6.2. Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional

3 Referencias

Cambio de base

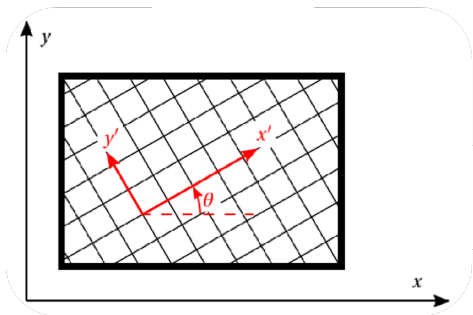


¿... dónde veo esto?



En una malla de elementos finitos, cada elemento se estudia en un sistema coordenado local (x', y') o (ξ, η) .

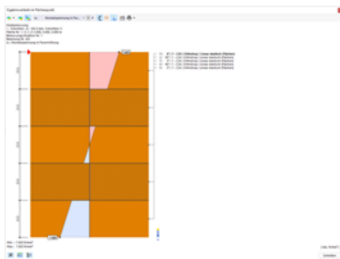
¿... dónde veo esto?



Los ejes de ortotropía de un sólido no siempre estarán en el mismo sentido de los ejes globales, así que se representan en otro sistema de coordenadas locales.

¿... dónde veo esto?

Nuevas características en RFEM 6 y RSTAB 9



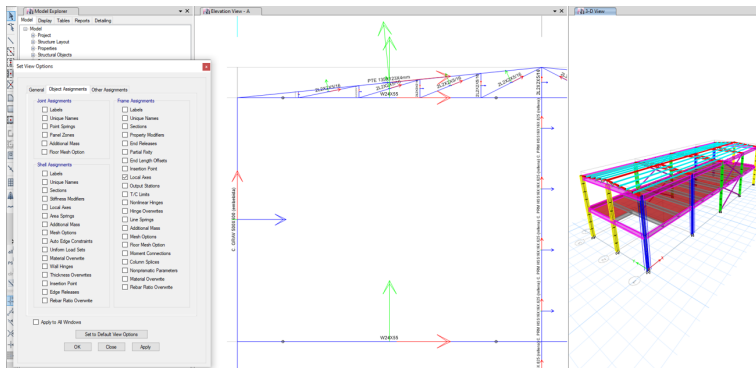
- ▲ Distribución normal de tensiones en un panel de madera contralaminada (CLT)

Cálculo de superficies de madera ortótropa y madera contralaminada (CLT)

¿Trabaja con madera? Entonces tenemos buenas noticias. En el complemento Cálculo de madera para RFEM 6, ahora puede diseñar tanto barras como superficies según el Eurocódigo, como madera contralaminada (CLT), madera laminada encolada, madera de coníferas, transformados de madera, etc.

→ **Más información**

¿... dónde veo esto?



En ETABS, al igual que en todos los softwares de ingeniería estructural y mecánica, los elementos son simplificados y estudiados dentro de su propio sistema de coordenadas. Se activa la opción *Local Axes* (ejes locales) para ver sus ejes, estos están codificados por colores según su documentación.

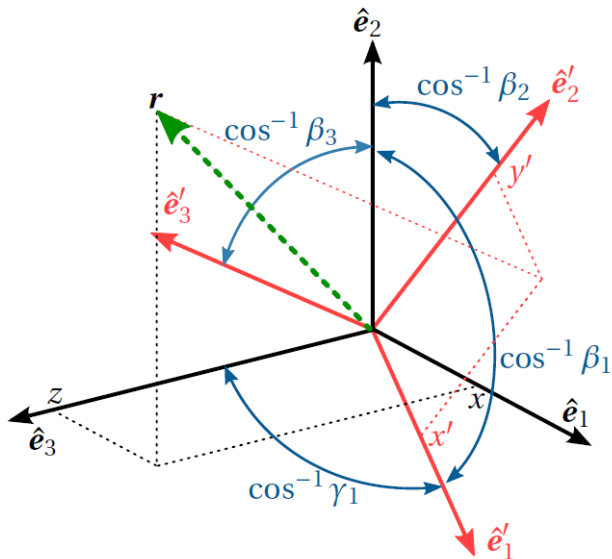
Cambio de base

(x_i, \hat{e}_i)

Sistema de
coordenadas
globales

(x'_i, \hat{e}'_i)

Sistema de
coordenadas
locales



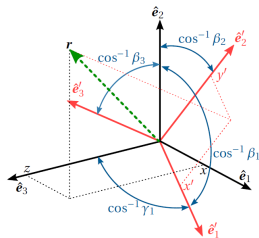
Cambio de base

Componentes:

$$\alpha_1 = \hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_1 \quad \beta_1 = \hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_2 \quad \gamma_1 = \hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_3$$

$$\alpha_2 = \hat{e}'_2 \cdot \hat{e}_1 \quad \beta_2 = \hat{e}'_2 \cdot \hat{e}_2 \quad \gamma_2 = \hat{e}'_2 \cdot \hat{e}_3$$

$$\alpha_3 = \hat{e}'_3 \cdot \hat{e}_1 \quad \beta_3 = \hat{e}'_3 \cdot \hat{e}_2 \quad \gamma_3 = \hat{e}'_3 \cdot \hat{e}_3$$



Representación vectorial:

$$\mathbf{r} = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3 = x'\hat{e}'_1 + y'\hat{e}'_2 + z'\hat{e}'_3$$

Haciendo el producto punto $\langle [\text{eq 2.9}], \hat{e}_i \rangle$, $i = 1, 2, 3$

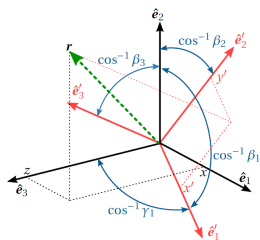
$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z'$$

$$y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z'$$

$$z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'$$

Cambio de base

Obteniendo:



$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\mathbf{r}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}} \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{\mathbf{r}'}$$

$$\mathbf{T} = [\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3]$$

- \mathbf{r} : vector de coordenadas globales del punto P
- \mathbf{r}' : vector de coordenadas locales del punto P
- \mathbf{T} : matriz de transformación

Cambio de base

$$\langle [\text{eq 2.9}], \hat{e}_i \rangle, \quad 1 = 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{aligned}$$

$$\langle [\text{eq 2.9}], \hat{e}'_i \rangle, \quad 1 = 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\mathbf{r}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}} \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{\mathbf{r}'}$$

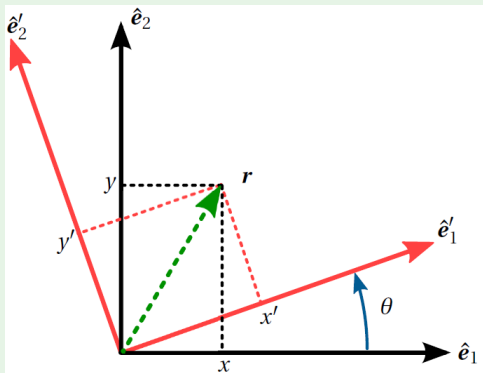
$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{\mathbf{r}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\mathbf{r}}$$

Se deduce que la matriz T es **ortogonal**, ya que $T^{-1} = T^T$

Cambio de base

Ejemplo

Formular una expresión matemática para la rotación de la siguiente figura



Derrotero

① 2.5. Cambio de base

② 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas

2.6.1. Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional

2.6.2. Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional

③ Referencias

Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas

Fórmulas de transformación de la matriz de esfuerzos entre los sistemas de coordenadas \hat{e}_i y \hat{e}'_i .

Del sistema global al local

Incómodo al cómodo

$$\underline{\underline{\sigma'}} = \mathbf{T}^T \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{T}$$

Del sistema local al global

Cómodo al incómodo

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{T} \underline{\underline{\sigma'}} \mathbf{T}^T$$

Expandiendo la primera eq.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} & \tau_{y'z'} & \sigma_{z'} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma'}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}}$$

Comentario sobre el uso de la programación

El libro guía de clase tiene códigos escritos en MAXIMA para el desarrollo de varias demostraciones simbólicas y cálculos numéricos de ahora en adelante. A su vez, estos estarán traducidos a lenguaje Python en el [repositorio del curso](#).



A.5. Notación tensorial de Voigt

repaso del apéndice

Woldemar Voigt

Esta notación se emplea para representar un tensor simétrico como uno de orden menor.

Ejemplo

La matriz de esfuerzos de Cauchy:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Se puede expresar como un vector de dimensión 6:

$$\underline{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}]^T \equiv [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6]^T$$

Derrotero

- ① 2.5. Cambio de base
- ② 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas
 - 2.6.1. Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional
 - 2.6.2. Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional
- ③ Referencias

Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional

Código

02_06_01_cambio_de_base.ipynb

$$\begin{aligned}
 \sigma'_x &= 2\gamma_1\beta_1\tau_{yz} + 2\gamma_1\alpha_1\tau_{xz} + 2\alpha_1\beta_1\tau_{xy} + \gamma_1^2\sigma_z + \beta_1^2\sigma_y + \alpha_1^2\sigma_x \\
 \sigma'_y &= 2\gamma_2\beta_2\tau_{yz} + 2\gamma_2\alpha_2\tau_{xz} + 2\alpha_2\beta_2\tau_{xy} + \gamma_2^2\sigma_z + \beta_2^2\sigma_y + \alpha_2^2\sigma_x \\
 \sigma'_z &= 2\gamma_3\beta_3\tau_{yz} + 2\gamma_3\alpha_3\tau_{xz} + 2\alpha_3\beta_3\tau_{xy} + \gamma_3^2\sigma_z + \beta_3^2\sigma_y + \alpha_3^2\sigma_x \\
 \tau'_{y'z'} &= (\gamma_2\beta_3 + \beta_2\gamma_3)\tau_{yz} + (\gamma_2\alpha_3 + \alpha_2\gamma_3)\tau_{xz} + (\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3)\tau_{xy} + \\
 &\quad \gamma_2\gamma_3\sigma_z + \beta_2\beta_3\sigma_y + \alpha_2\alpha_3\sigma_x \\
 \tau'_{x'z'} &= (\gamma_1\beta_3 + \beta_1\gamma_3)\tau_{yz} + (\gamma_1\alpha_3 + \alpha_1\gamma_3)\tau_{xz} + (\alpha_1\beta_3 + \beta_1\alpha_3)\tau_{xy} + \\
 &\quad \gamma_1\gamma_3\sigma_z + \beta_1\beta_3\sigma_y + \alpha_1\alpha_3\sigma_x \\
 \tau'_{x'y'} &= (\gamma_1\beta_2 + \beta_1\gamma_2)\tau_{yz} + (\gamma_1\alpha_2 + \alpha_2\gamma_1)\tau_{xz} + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)\tau_{xy} + \\
 &\quad \gamma_1\gamma_2\sigma_z + \beta_1\beta_2\sigma_y + \alpha_1\alpha_2\sigma_x
 \end{aligned}$$

Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional

Código

02_06_01_cambio_de_base.ipynb

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \sigma_{z'} \\ \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & 2\gamma_1\beta_1 & 2\gamma_1\alpha_1 & 2\alpha_1\beta_1 \\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & 2\gamma_2\beta_2 & 2\gamma_2\alpha_2 & 2\alpha_2\beta_2 \\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & 2\gamma_3\beta_3 & 2\gamma_3\alpha_3 & 2\alpha_3\beta_3 \\ \alpha_2\alpha_3 & \beta_2\beta_3 & \gamma_2\gamma_3 & \gamma_2\beta_3 + \beta_2\gamma_3 & \gamma_2\alpha_3 + \alpha_2\gamma_3 & \alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3 \\ \alpha_1\alpha_3 & \beta_1\beta_3 & \gamma_1\gamma_3 & \gamma_1\beta_3 + \beta_1\gamma_3 & \gamma_1\alpha_3 + \alpha_1\gamma_3 & \alpha_1\beta_3 + \beta_1\alpha_3 \\ \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & \gamma_1\beta_2 + \beta_1\gamma_2 & \gamma_1\alpha_2 + \alpha_1\gamma_2 & \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 \end{pmatrix}}_{T_\sigma} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional

- Escritura alterna

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x'} &= \hat{e}'_1 \underline{\underline{\sigma}} \hat{e}'_1 & \tau_{y'z'} &= \hat{e}'_2 \underline{\underline{\sigma}} \hat{e}'_3 = \hat{e}'_3 \underline{\underline{\sigma}} \hat{e}'_2 \\
 \sigma_{y'} &= \hat{e}'_2 \underline{\underline{\sigma}} \hat{e}'_2 & \tau_{y'z'} &= \hat{e}'_1 \underline{\underline{\sigma}} \hat{e}'_3 = \hat{e}'_3 \underline{\underline{\sigma}} \hat{e}'_1 \\
 \sigma_{x'} &= \hat{e}'_3 \underline{\underline{\sigma}} \hat{e}'_3 & \tau_{y'z'} &= \hat{e}'_1 \underline{\underline{\sigma}} \hat{e}'_2 = \hat{e}'_2 \underline{\underline{\sigma}} \hat{e}'_1
 \end{aligned}$$

Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional

Como la dirección de los vectores \hat{e}'_1 , \hat{e}'_2 y \hat{e}'_3 es arbitraria, siempre y cuando estos sean vectores mutuamente ortogonales, de las ecuaciones anteriores se sigue que:

- el esfuerzo normal a un plano cuyo vector normal unitario es \hat{n} está dada por:

$$\begin{aligned}\sigma_{\hat{n}} &= \hat{n}^T \underline{\underline{\sigma}} \hat{n} \\ &= \sigma_x \alpha^2 + \sigma_y \beta^2 + \sigma_z \gamma^2 + 2\tau_{xy} \alpha \beta + 2\tau_{yz} \beta \gamma + 2\tau_{xz} \alpha \gamma\end{aligned}$$

- el esfuerzo cortante en la dirección del vector \hat{m} sobre un plano cuyo vector normal unitario es \hat{n} es:

$$\tau_{\hat{n}\hat{m}} = \hat{m}^T \underline{\underline{\sigma}} \hat{n}$$

Derrotero

- ① 2.5. Cambio de base
- ② 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas
 - 2.6.1. Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional
 - 2.6.2. Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional
- ③ Referencias

Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional

Código

[02_06_02_sigma_bidimensional.ipynb](#)

$$\begin{aligned}\sigma_{x'}(\theta) &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_{y'}(\theta) &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_{x'y'}(\theta) &= \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta \\ \sigma_{z'}(\theta) &= \tau_{x'z'}(\theta) = \tau_{y'z'}(\theta) = 0\end{aligned}$$

Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional

Código

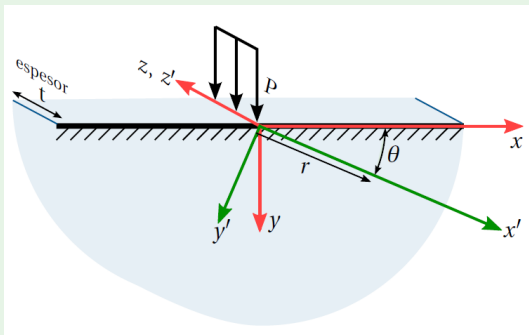
[02_06_02_sigma_bidimensional.ipynb](#)

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}_{\sigma, 2D}} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: el problema de Flamant

Código

02_06_02_ejemplo_01.ipynb



Derrotero

① 2.5. Cambio de base

② 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas

2.6.1. Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional

2.6.2. Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional

③ Referencias

Referencias

Álvarez, D. A. (2022). *Teoría de la elasticidad*, volume 1. Universidad Nacional de Colombia.

Links

02 - Esfuerzos o tensiones - YouTube

diego andrés álvarez marín

¿Qué es un esfuerzo o tensión?

02 - Esfuerzos o tensiones

diegoandresalvarez

11 videos · 3870 visualizaciones · Actualizado por...

Reproducir... Aleatorio

En el curso de resistencia de materiales se estudió cómo se podían calcular los esfuerzos en vigas y columnas sometidas a tracción, compresión, flexión o torsión. En mecánica de sólidos se estudian los esfuerzos y las deformaciones unitarias en objetos de geometría más complicada. En esta lista de reproducción se hará una revisión de los conceptos vistos en el curso de resistencia de materiales con respecto a esfuerzos, esfuerzos principales, círculo de Mohr, entre otros temas de interés, pero tratados desde un

- 1 ¿Qué es un esfuerzo o tensión? 0:45
- 2 02.01 - ¿Qué es la tensión o el esfuerzo? diegoandresalvarez · 1510 visualizaciones · hace 2 años
- 3 02.02.01 - Análisis de los esfuerzos en un elemento rectangular infinitesimal de espesor t diegoandresalvarez · 1290 visualizaciones · hace 2 años
- 4 02.02.02 - Análisis de los esfuerzos en un elemento triangular infinitesimal de espesor t diegoandresalvarez · 1210 visualizaciones · hace 2 años
- 5 02.03.01 - Esfuerzos en un paralelepípedo infinitesimal diegoandresalvarez · 1172 visualizaciones · hace 2 años
- 6 02.03.02 - Análisis de un elemento tetraédrico infinitesimal diegoandresalvarez · 1444 visualizaciones · hace 2 años
- 7 02.09 - Círculo de Mohr en 2D (Parte 1/3) - Deducción del círculo de Mohr para tensión plana diegoandresalvarez · 3165 visualizaciones · hace 2 años
- 8 02.09 - Círculo de Mohr en 2D (Parte 2/3) - Esfuerzos normales y cortantes máximos y mínimos diegoandresalvarez · 2343 visualizaciones · hace 2 años

- Lista de reproducción: [02 - Esfuerzos o Tensiones](#)
- Repositorio del curso: [github/medio_continuo](#)