

05. Ecuaciones diferenciales fundamentales de la teoría de la elasticidad

Ejemplo de aplicación

Michael H.P.
mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil
Mecánica de sólidos

2023a





El problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω , se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Debemos encontrar:

Esfuerzos

- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$
- $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$

Deformaciones

- $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$
- $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$

Desplazamientos

- u, v, w



El problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω , se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Debemos encontrar:

Esfuerzos

- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$
- $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$

Deformaciones

- $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$
- $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$

Desplazamientos

- u, v, w



El problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω , se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Debemos encontrar:

Esfuerzos

- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$
- $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$

Deformaciones

- $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$
- $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$

Desplazamientos

- u, v, w



El problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω , se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Debemos encontrar:

Esfuerzos

- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$
- $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$

Deformaciones

- $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$
- $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$

Desplazamientos

- u, v, w



El problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω , se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Debemos encontrar:

Esfuerzos

- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$
- $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$

Deformaciones

- $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$
- $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$

Desplazamientos

- u, v, w



Recordemos

Formulación basada en esfuerzos

EDPs de compatibilidad (6)

$$\begin{aligned}\nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial X}{\partial x} \\ \nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial Z}{\partial z} \\ \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} &= -\left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} \right) \\ \nabla^2 \tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} &= -\left(\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \\ \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} &= -\left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

Formulación basada en desplazamientos

EDPs de Cauchy-Navier (3)

$$\begin{aligned}(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u + X &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \nabla^2 v + Y &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G \nabla^2 w + Z &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda e + 2G \epsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda e + 2G \epsilon_y \\ \sigma_z &= \lambda e + 2G \epsilon_z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= G \gamma_{xz} \\ \tau_{yz} &= G \gamma_{yz}\end{aligned}$$

Ecuaciones de Lamé
(Ley de Hooke)

$$\begin{aligned}\epsilon_x(x, y, z) &:= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x,y,z)} \\ \epsilon_y(x, y, z) &:= \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{(x,y,z)} \\ \epsilon_z(x, y, z) &:= \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{(x,y,z)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy}(x, y, z) &:= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x,y,z)} \\ \gamma_{xz}(x, y, z) &:= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{(x,y,z)} \\ \gamma_{yz}(x, y, z) &:= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{(x,y,z)}\end{aligned}$$

Deformaciones

$$\begin{aligned}u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z)\end{aligned}$$

Desplazamientos



Diferentes situaciones

Podemos encontrarnos con dos situaciones:

- ① Cargas moderadas
- ② Cargas destructivas



Diferentes situaciones

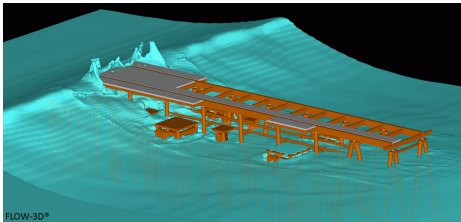
Podemos encontrarnos con dos situaciones:

- ① Cargas moderadas
- ② Cargas destructivas



Cargas moderadas

Comportamiento lineal



- Maquinarias
- Tránsito peatonal
- Tránsito vehicular
- Oleaje
- Vientos

Figura: Modelo de estación marítima



Cargas destructivas

Comportamiento no lineal



- Terremotos y sismos
- Explosiones
- Huracanes
- Ciclones

Figura: Terremoto de Kobe, 1995

Instrumentación

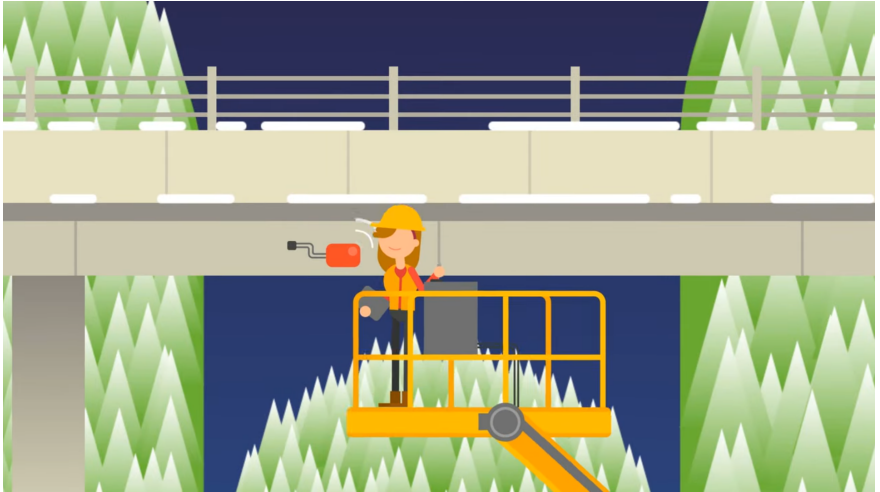


Figura: Video: [What is structural monitoring?](#)

Instrumentación

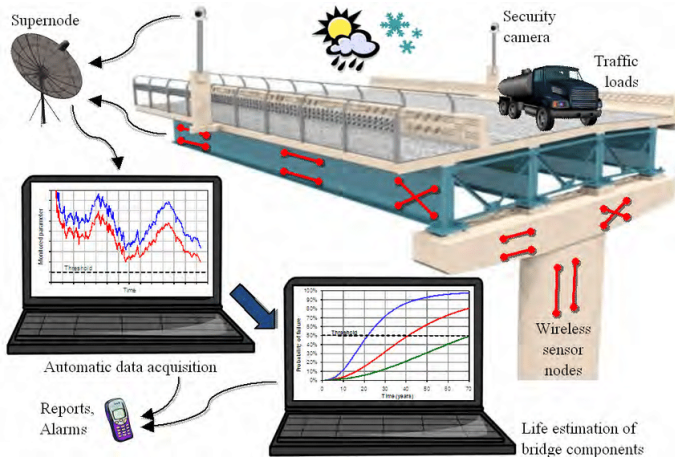


Figura: Tomado de: [Concept of structural health monitoring of bridge structures.](#)

Ejemplo

INVIAS decidió instrumentar un puente para medir sus deformaciones debidas a la acción del tránsito vehicular; sin embargo, no pagó el software del proveedor sino que programó el suyo propio (software A). Un ingeniero no conforme programó otro (software B). Luego de analizar los datos de la instrumentación, el software A arroja las siguientes funciones de deformación:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

mientras que el software B arroja estas:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

donde k es una constante muy pequeña. Respecto a este problema, responda:

- 1 ¿Cómo podemos decidir cuál programa está en lo correcto? Explique, demuestre y concluya.



Solución

¿Qué nos está pidiendo el problema?

R//. Verificar la compatibilidad de las ecuaciones que definen las deformaciones.

Veamos que ambos softwares indican un comportamiento simplificado a deformación plana:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

El tránsito vehicular puede ser una carga moderada: análisis lineal.

Debemos emplear las ecuaciones de compatibilidad bidimensionales en términos de deformaciones:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$



Solución

¿Qué nos está pidiendo el problema?

R//. Verificar la compatibilidad de las ecuaciones que definen las deformaciones.

Veamos que ambos softwares indican un comportamiento simplificado a deformación plana:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

El tránsito vehicular puede ser una carga moderada: análisis lineal.

Debemos emplear las ecuaciones de compatibilidad bidimensionales en términos de deformaciones:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$



Solución

¿Qué nos está pidiendo el problema?

R//. Verificar la compatibilidad de las ecuaciones que definen las deformaciones.

Veamos que ambos softwares indican un comportamiento simplificado a deformación plana:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

El tránsito vehicular puede ser una carga moderada: análisis lineal.

Debemos emplear las ecuaciones de compatibilidad bidimensionales en términos de deformaciones:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$



Solución

¿Qué nos está pidiendo el problema?

R//. Verificar la compatibilidad de las ecuaciones que definen las deformaciones.

Veamos que ambos softwares indican un comportamiento simplificado a deformación plana:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

El tránsito vehicular puede ser una carga moderada: análisis lineal.

Debemos emplear las ecuaciones de compatibilidad bidimensionales en términos de deformaciones:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$



Solución

¿Qué nos está pidiendo el problema?

R//. Verificar la compatibilidad de las ecuaciones que definen las deformaciones.

Veamos que ambos softwares indican un comportamiento simplificado a deformación plana:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

El tránsito vehicular puede ser una carga moderada: análisis lineal.

Debemos emplear las ecuaciones de compatibilidad bidimensionales en términos de deformaciones:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$



Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$



Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$



Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$



Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$



Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$



Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$



Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$



Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$



Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$



Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$



Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$



Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$



Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$



Solución

Las deformaciones medidas por el **software A** no son compatibles, pues

$$0 = 2kx + 2ky$$



Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy \right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$



Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy \right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$



Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy \right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$



Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy \right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$



Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy \right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$



Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy \right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$



Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy \right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$



Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy \right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$



Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy \right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$



Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy \right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$



Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy \right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$



Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy \right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$



Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy \right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$



Solución

Las deformaciones medidas por el **software B** si son compatibles, pues

$$2k = 2k$$



Solución

¿Cuál software mide adecuadamente las deformaciones?

R//. El software B.



Solución

¿Cuál software mide adecuadamente las deformaciones?
R//. El software B.