

# 01. Repaso

## Conceptos que deben tener claros

Michael Heredia Pérez  
mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales  
Departamento de Ingeniería Civil  
Mecánica de Sólidos

2023a



# Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada [Álvarez, 2022].



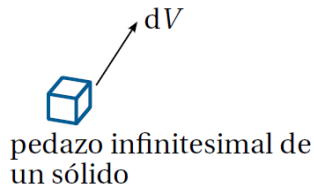
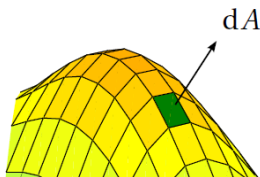
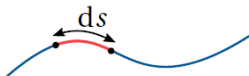
# Derrotero

- 1 Conceptos básicos
- 2 Esfuerzos en un punto
- 3 Desplazamientos y deformaciones en un punto
- 4 Relaciones entre esfuerzos y deformaciones
- 5 Referencias

# Derrotero

- 1 Conceptos básicos
- 2 Esfuerzos en un punto
- 3 Desplazamientos y deformaciones en un punto
- 4 Relaciones entre esfuerzos y deformaciones
- 5 Referencias

# Diferenciales de primer, segundo y tercer orden



# Fuerzas que actúan sobre un sólido

## Fuerzas másicas

*(body forces)*

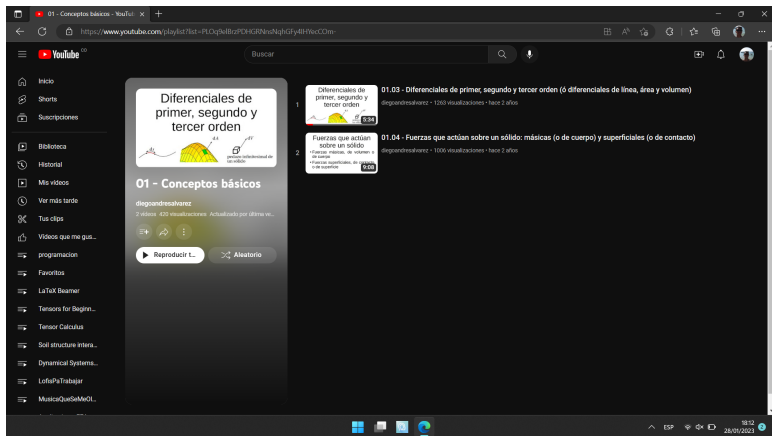
$$\mathbf{b}(x, y, z) := [X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)]^T$$

## Fuerzas superficiales

*(surface forces)*

$$\mathbf{f}(x, y, z) := [\bar{X}(x, y, z), \bar{Y}(x, y, z), \bar{Z}(x, y, z)]^T$$

# Videos de YouTube



- Lista de reproducción: **01 - Conceptos básicos**
- Diapositivas del 2022b (resumen del capítulo): **01. Conceptos fundamentales**

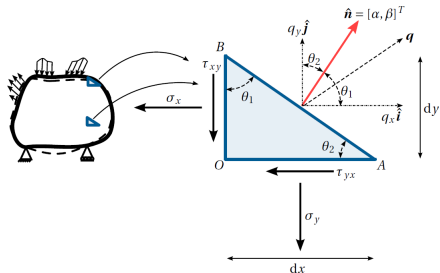
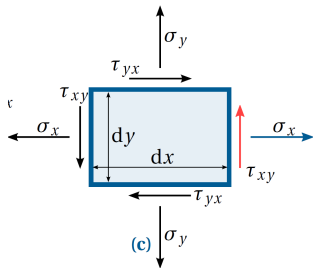
# Derrotero

- 1 Conceptos básicos
- 2 Esfuerzos en un punto
- 3 Desplazamientos y deformaciones en un punto
- 4 Relaciones entre esfuerzos y deformaciones
- 5 Referencias



## Fórmula de Cauchy bidimensional

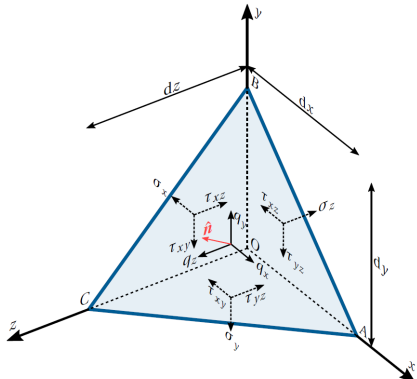
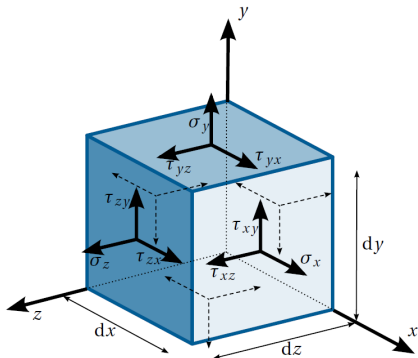
$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$



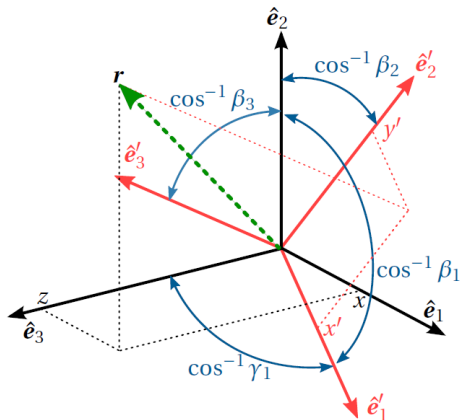
# Esfuerzos en 3D

## Fórmula de Cauchy tridimensional

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$



# Cambio de base



- Sistema de coordenadas **globales**:  $(x_i, \hat{e}_i)$
- Sistema de coordenadas **locales**:  $(x'_i, \hat{e}'_i)$

# Matriz de esfuerzos en otro sistema coordinado

Del sistema global al local

Incómodo al cómodo

$$\underline{\underline{\sigma'}} = T^T \underline{\underline{\sigma}} T$$

Del sistema local al global

Cómodo al incómodo

$$\underline{\underline{\sigma}} = T \underline{\underline{\sigma'}} T^T$$

# Esfuerzos y direcciones principales

Se encuentran al obtener los valores y vectores propios de la matriz de esfuerzos:

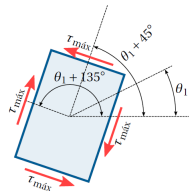
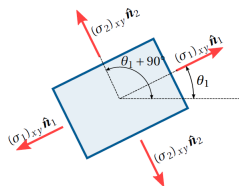
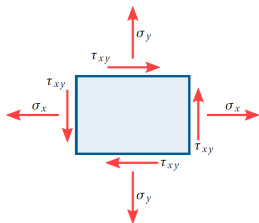
$$\underline{\underline{\sigma}} \hat{\mathbf{n}} = \sigma_n \hat{\mathbf{n}}$$

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \mathbf{I}) = 0$$

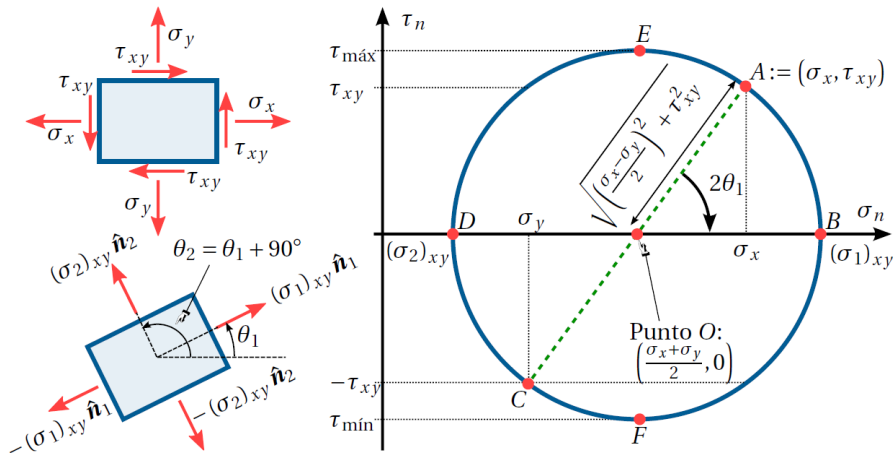
# Esfuerzos y direcciones principales 2D

$$(\sigma_1)_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$(\sigma_2)_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



# Círculo de Mohr bidimensional



# Círculo de Mohr bidimensional

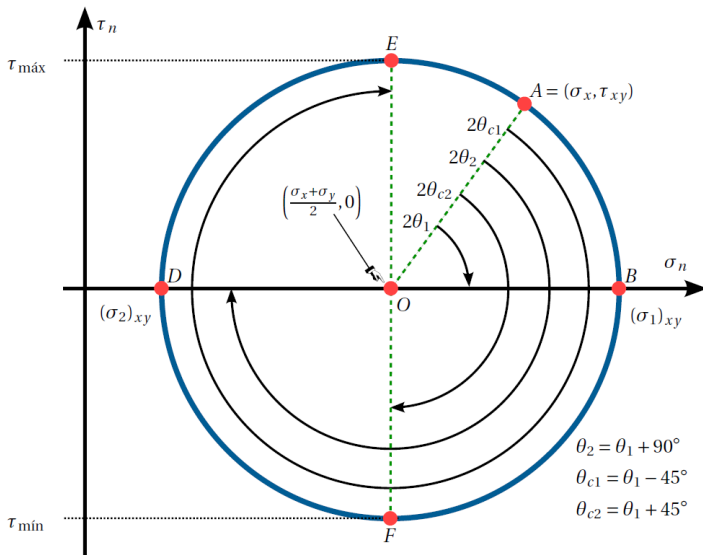
Se construye con:

$$\sigma_n(\theta) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

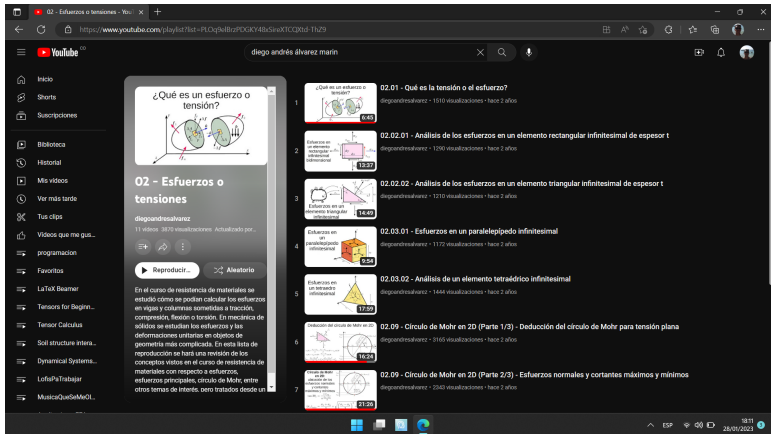
$$\tau_n(\theta) = \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta$$



# Círculo de Mohr bidimensional



# Videos de YouTube

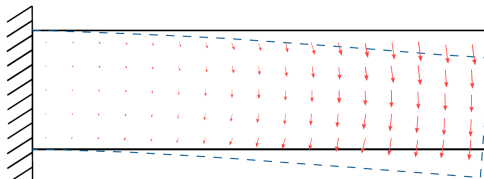
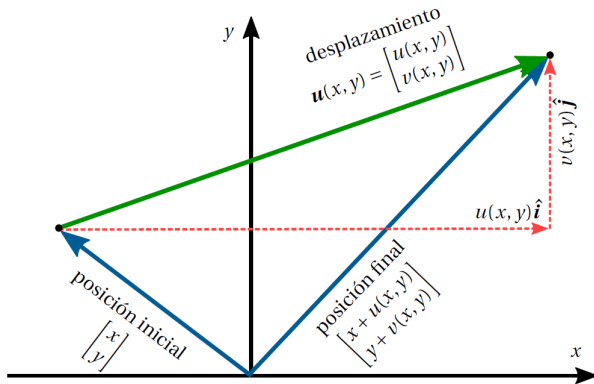


- Lista de reproducción: 02 - Esfuerzos o Tensiones
- Diapositivas del 2022b (resumen del capítulo): 02. Estudio de los esfuerzos en un punto

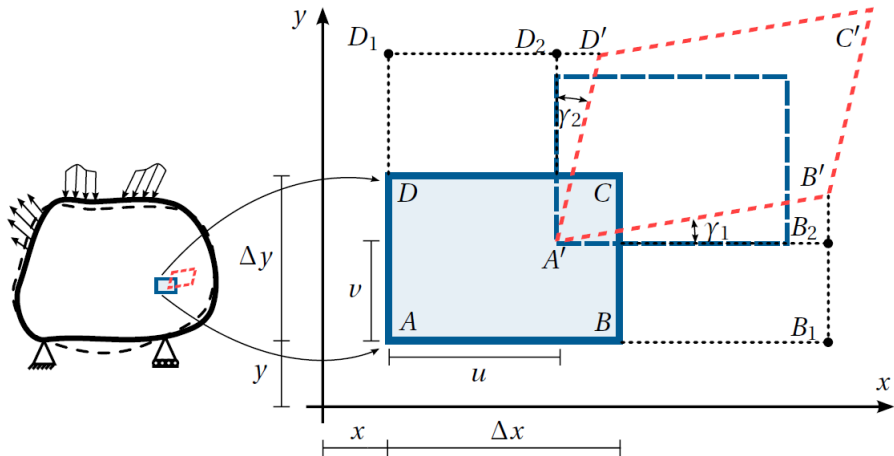
# Derrotero

- 1 Conceptos básicos
- 2 Esfuerzos en un punto
- 3 Desplazamientos y deformaciones en un punto**
- 4 Relaciones entre esfuerzos y deformaciones
- 5 Referencias

# Campo vectorial de desplazamientos



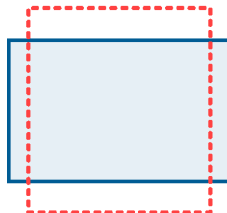
# Deformaciones



# Deformaciones longitudinales



$\varepsilon_x > 0$  (estiramiento en dirección  $x$ )  
 $\varepsilon_y < 0$  (contracción en dirección  $y$ )



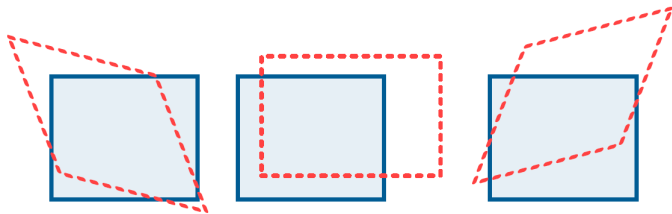
$\varepsilon_x < 0$  (contracción en dirección  $x$ )  
 $\varepsilon_y > 0$  (estiramiento en dirección  $y$ )

$$\varepsilon_x(x, y, z) := \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y(x, y, z) := \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z(x, y, z) := \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z}$$

# Deformaciones angulares



(a)  $\gamma_{xy} < 0$

(b)  $\gamma_{xy} = 0$

(c)  $\gamma_{xy} > 0$

$$\gamma_{xy}(x, y, z) := \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz}(x, y, z) := \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x}$$

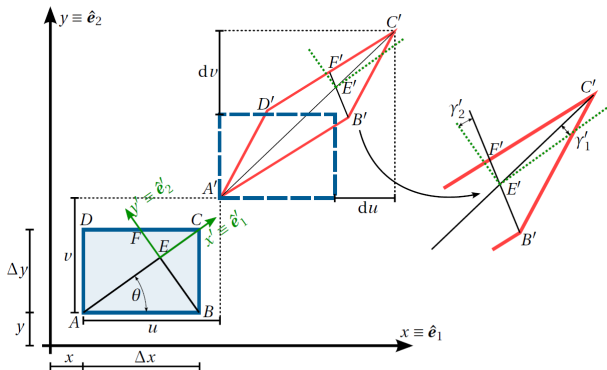
$$\gamma_{yz}(x, y, z) := \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y}$$

# Deformaciones angulares: matemáticas vs ingenieriles

$$\underbrace{\varepsilon_{xy}(x, y)}_{\text{Def. matemáticas}} := \underbrace{\frac{\gamma_{xy}(x, y)}{2}}_{\text{Def. ingenieriles}}$$



# Deformaciones en otras direcciones



$$\varepsilon'_x(\theta) = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta$$

$$\varepsilon_{x'y'}(\theta) = \varepsilon_{xy} \cos 2\theta - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta$$

# Deformaciones en otras direcciones

- En términos de deformaciones matemáticas:

$$\underline{\underline{\epsilon}}' = \mathbf{T}_{\sigma} \underline{\underline{\epsilon}}$$

- En términos de deformaciones ingenieriles:

$$\underline{\underline{\epsilon}}' = \mathbf{T}_{\epsilon} \underline{\underline{\epsilon}}$$

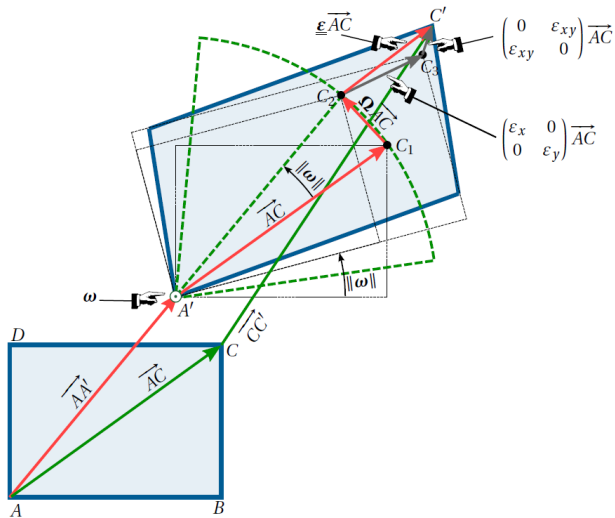
Con la relación

$$\mathbf{T}_{\sigma}^{-1} = \mathbf{T}_{\epsilon}^T$$

y

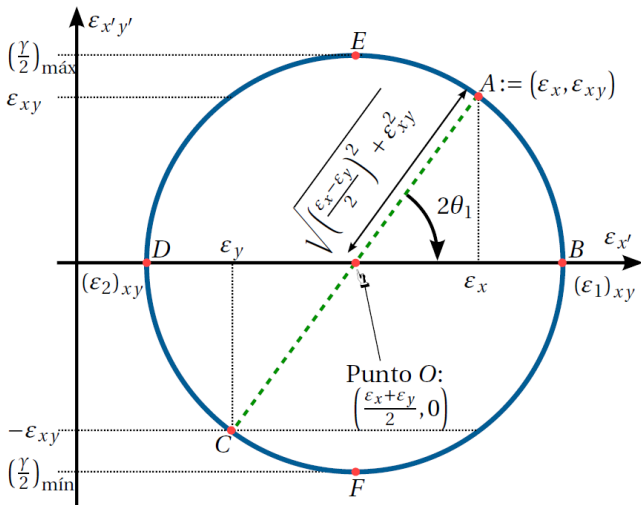
$$\underline{\underline{\epsilon}} = \mathbf{T}_{\underline{\underline{\epsilon}}'} \mathbf{T}^T$$

# Rotación

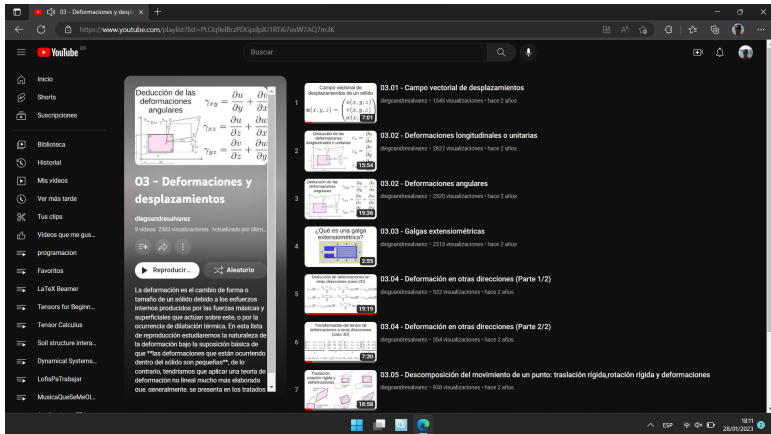


# Deformaciones principales

Círculo de Mohr para deformaciones.



# Videos de YouTube

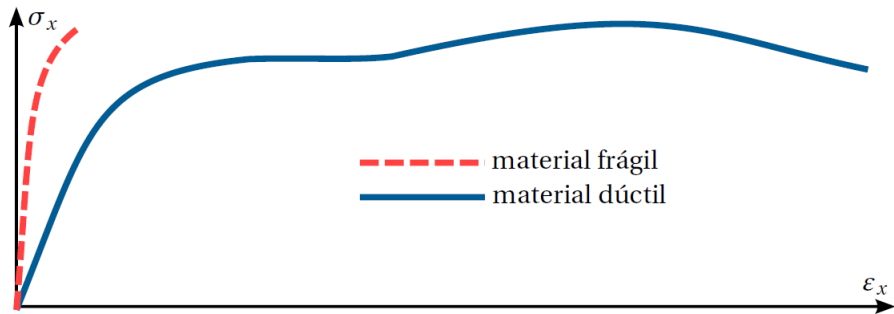


- Lista de reproducción: **03 - Deformaciones y desplazamientos**
- Diapositivas del 2022b (resumen del capítulo): **03. Estudio de los desplazamientos y deformaciones en un punto**

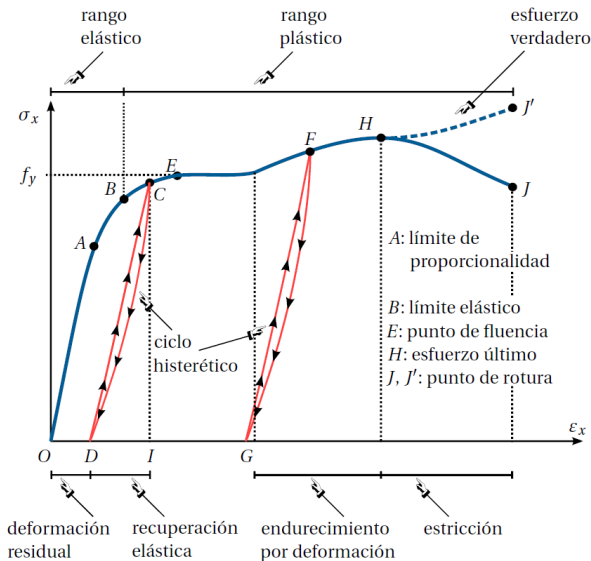
# Derrotero

- 1 Conceptos básicos
- 2 Esfuerzos en un punto
- 3 Desplazamientos y deformaciones en un punto
- 4 Relaciones entre esfuerzos y deformaciones
- 5 Referencias

# Materiales frágiles y materiales dúctiles



# Comportamiento de los materiales dúctiles





# Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos

# Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos

# Dilatación cúbica

# Teorema de la divergencia

# Módulo de compresibilidad

- No hay :(
- Diapositivas del 2022b (resumen del capítulo): [04. Relaciones entre los esfuerzos y las deformaciones](#)

# Derrotero

- 1 Conceptos básicos
- 2 Esfuerzos en un punto
- 3 Desplazamientos y deformaciones en un punto
- 4 Relaciones entre esfuerzos y deformaciones
- 5 Referencias



Álvarez, D. A. (2022).  
*Teoría de la elasticidad*.  
Universidad Nacional de Colombia.



# Enlaces de interés

Repositorio de GitHub:

[github.com/michaelherediaperez/elasticidad\\_un](https://github.com/michaelherediaperez/elasticidad_un)