

02. Estudio de los esfuerzos en un punto

secciones 2.7 a 2.10

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil
Mecánica Tensorial

2023a





Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada (Álvarez, 2022).





Derrotero

- 1 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- 2 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
 - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
 - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
 - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
 - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- 3 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
 - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
 - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
 - 2.9.3. La función \tan^{-1}
 - 2.9.4. Ejemplo
 - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- 4 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- 5 Referencias

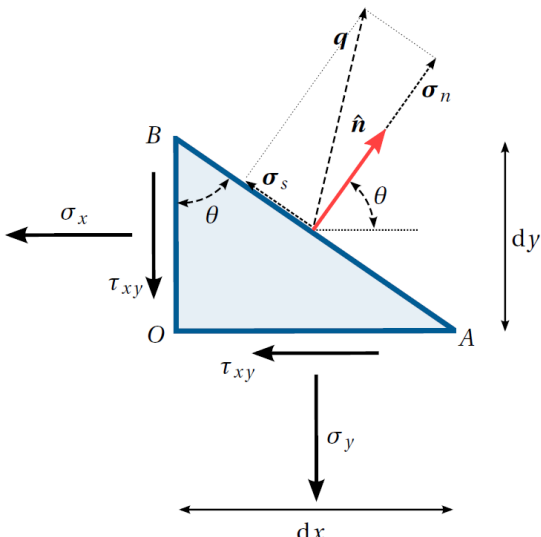


Derrotero

- 1 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- 2 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
 - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
 - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
 - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
 - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- 3 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
 - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
 - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
 - 2.9.3. La función atan2
 - 2.9.4. Ejemplo
 - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- 4 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- 5 Referencias



Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano



Entendamos el vector del esfuerzo normal σ_n como la proyección del vector de esfuerzos \mathbf{q} sobre el vector normal al plano $\hat{\mathbf{n}}$:

$$\sigma_n = \text{Proy } \mathbf{q} / \hat{\mathbf{n}} = \frac{\langle \mathbf{q}, \hat{\mathbf{n}} \rangle}{\langle \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle} \hat{\mathbf{n}}$$



Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano en 3D

- El valor del esfuerzo normal:

$$\sigma_n = \sigma_x \alpha^2 + \sigma_y \beta^2 + \sigma_z \gamma^2 + 2\tau_{xz} \alpha \gamma + 2\tau_{yz} \beta \gamma + 2\tau_{xy} \alpha \beta$$

- El valor del esfuerzo tangencial o cortante:

$$\tau_n^2 = (\sigma_x \alpha + \tau_{xy} \beta + \tau_{xz} \gamma)^2 + (\tau_{xy} \alpha + \sigma_y \beta + \tau_{yz} \gamma)^2 + (\tau_{xz} \alpha + \tau_{yz} \beta + \sigma_z \gamma)^2 - \sigma_n^2$$

Código

- [02_07.ipynb](#)



Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano

en 2D

$$\sigma'_x \rightarrow \sigma_n \quad \tau_{x'y'} \rightarrow \tau_n$$

- El valor del esfuerzo normal:

$$\begin{aligned} \sigma_n(\theta) &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \end{aligned}$$

- El valor del esfuerzo tangencial o cortante:

$$\tau_n(\theta) = \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta$$



Derrotero

- ① 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- ② 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
 - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
 - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
 - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
 - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- ③ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
 - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
 - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
 - 2.9.3. La función atan2
 - 2.9.4. Ejemplo
 - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- ④ 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- ⑤ Referencias



Derrotero

- ➊ 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- ➋ 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
 - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
 - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
 - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
 - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- ➌ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
 - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
 - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
 - 2.9.3. La función atan2
 - 2.9.4. Ejemplo
 - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- ➍ 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- ➎ Referencias



Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones

Esfuerzos principales en 2D

$$(\sigma_1)_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$(\sigma_2)_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



Tensiones y direcciones principales

2D

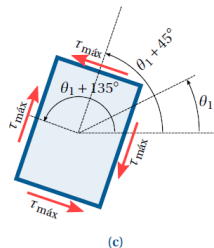
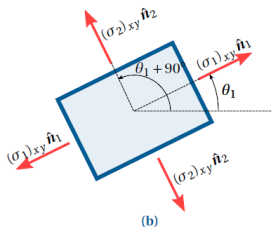
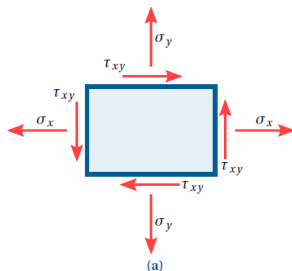
Debemos dar solución a los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_x - (\sigma_1)_{xy}) \alpha_1 + \tau_{xy} \beta_1 &= 0 & (\sigma_x - (\sigma_2)_{xy}) \alpha_2 + \tau_{xy} \beta_2 &= 0 \\
 \tau_{xy} \alpha_1 + (\sigma_y - (\sigma_1)_{xy}) \beta_1 &= 0 & \text{y} \quad \tau_{xy} \alpha_2 + (\sigma_y - (\sigma_2)_{xy}) \beta_2 &= 0 \\
 \alpha_1^2 + \beta_1^2 &= 1 & \alpha_2^2 + \beta_2^2 &= 1
 \end{aligned}$$



Tensiones y direcciones principales

2D



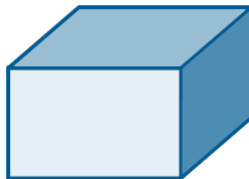
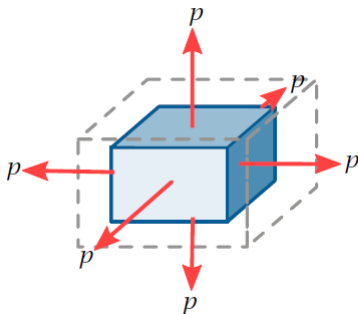


Tensiones y direcciones principales

2D

¿Cuándo tenemos un discriminante nulo?

\mathbf{R}/I . Estado de esfuerzos hidrostáticos



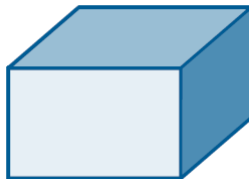
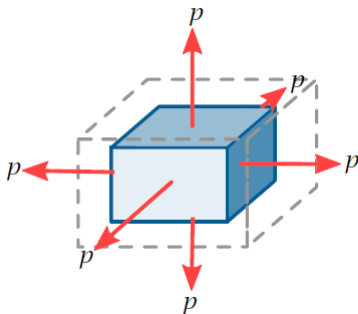


Tensiones y direcciones principales

2D

¿Cuándo tenemos un discriminante nulo?

$\mathbf{R} //$. Estado de esfuerzos hidrostáticos

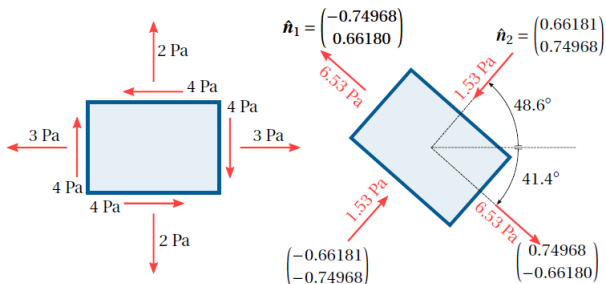




Tensiones y direcciones principales

2D

Ejemplo



Código

- [02_08_01_ejemplo_01.ipynb](#)



Derrotero

- 1 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- 2 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
 - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
 - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
 - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
 - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- 3 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
 - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
 - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
 - 2.9.3. La función \tan^{-1}
 - 2.9.4. Ejemplo
 - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- 4 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- 5 Referencias



Tensiones y direcciones principales

3D

Expandiendo el determinante $\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \mathbf{I}) = 0$

$$\begin{aligned}
 (\sigma_x - \sigma_n) [(\sigma_y - \sigma_n)(\sigma_z - \sigma_n) - \tau_{yz}^2] \\
 - \tau_{xy} [\tau_{xy}(\sigma_z - \sigma_n) - \tau_{yz}\tau_{xz}] \\
 + \tau_{xz} [\tau_{xy}\tau_{yz} - (\sigma_y - \sigma_n)\tau_{xz}] = 0;
 \end{aligned}$$



Tensiones y direcciones principales

3D

Agrupando y reduciendo términos:

Ecuación característica de $\underline{\underline{\sigma}}$ tridimensional

$$-\sigma_n^3 + I_1\sigma_n^2 - I_2\sigma_n + I_3 = 0$$

donde,

$$\Theta := I_1 := \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})$$

$$I_2 := \frac{1}{2} \left((\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}))^2 - \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^2) \right)$$

$$I_3 := \det(\underline{\underline{\sigma}}).$$

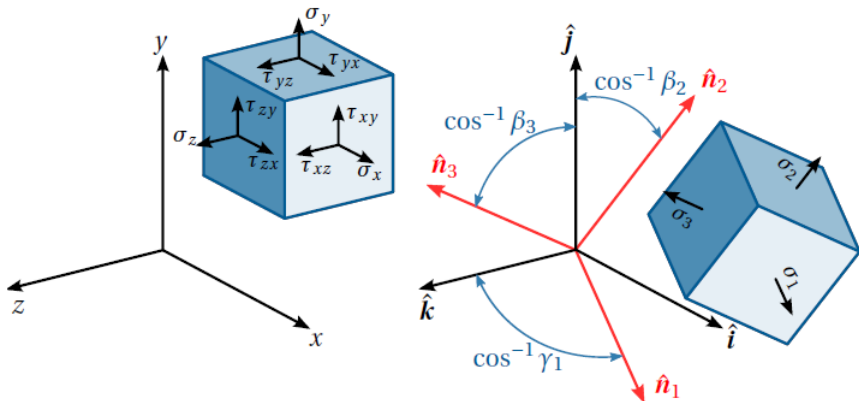
Código

- [02_08_02.ipynb](#)



Tensiones y direcciones principales

3D

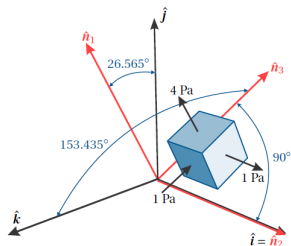
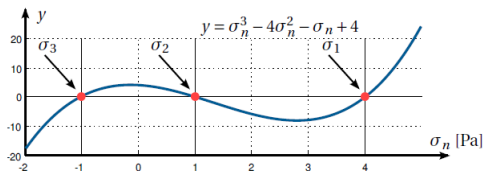




Tensiones y direcciones principales

3D

Ejemplo



Código

- 02_08_02_ejemplos.ipynb



Derrotero

- ➊ 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- ➋ 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
 - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
 - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
 - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
 - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- ➌ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
 - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
 - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
 - 2.9.3. La función \tan^{-1}
 - 2.9.4. Ejemplo
 - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- ➍ 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- ➎ Referencias



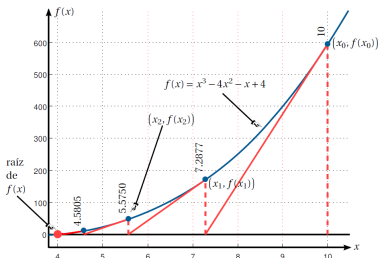
Método de Newton-Raphson

para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica

Estudio autónomo

Sería interesante:

- ¿Cómo lo programo en Python o Matlab?
- ¿Ya está implementado en Python o Matlab? ¿Cómo funciona?





Derrotero

- ➊ 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- ➋ 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
 - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
 - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
 - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
 - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- ➌ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
 - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
 - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
 - 2.9.3. La función \tan^{-1}
 - 2.9.4. Ejemplo
 - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- ➍ 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- ➎ Referencias



Ortogonalidad de las direcciones principales

Estudio autónomo

- Verifique la ortogonalidad de los vectores propios del ejercicio anterior

Código

- [02_08_04_ejemplo.ipynb](#)



Derrotero

- 1 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- 2 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
 - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
 - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
 - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
 - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- 3 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
 - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
 - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
 - 2.9.3. La función \tan^2
 - 2.9.4. Ejemplo
 - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- 4 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- 5 Referencias



Círculo de Mohr

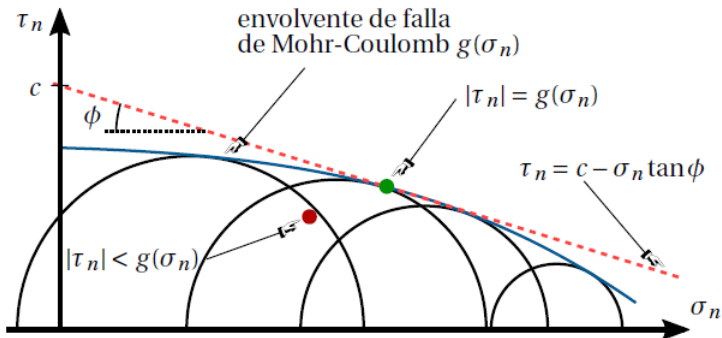
La **circunferencia de Mohr** fue propuesta por el ingeniero civil alemán Otto Mohr (1835 - 1918) en 1882 **con el objeto de representar gráficamente el estado de esfuerzos en un punto.**



Círculo de Mohr

Aplicaciones

Criterio de falla de Mohr-Coulomb



Este criterio es altamente utilizado en el análisis de cimentaciones.



Derrotero

- ➊ 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- ➋ 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
 - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
 - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
 - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
 - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- ➌ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
 - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
 - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
 - 2.9.3. La función \tan^{-1}
 - 2.9.4. Ejemplo
 - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- ➍ 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- ➎ Referencias



Círculo de Mohr en dos dimensiones

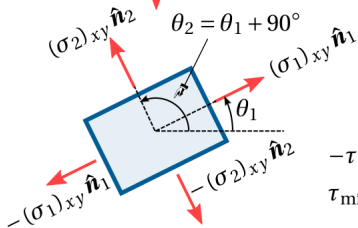
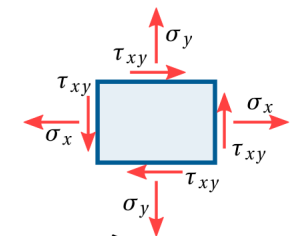
Estudio autónomo

Estudiar los siguientes videos:

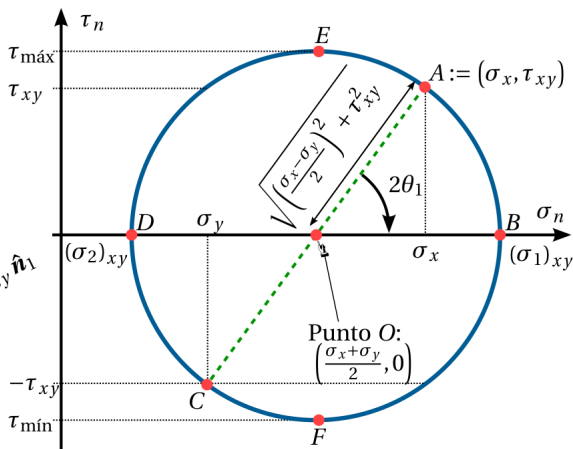
- 02.09 - Círculo de Mohr en 2D (Parte 1/3) - Deducción del círculo de Mohr para tensión plana
- 02.09 - Círculo de Mohr en 2D (Parte 2/3) - Esfuerzos normales y cortantes máximos y mínimos
- 02.09 - Círculo de Mohr en 2D (Parte 3/3) - Deducción del círculo de Mohr para tensión plana



Círculo de Mohr en dos dimensiones



(a)

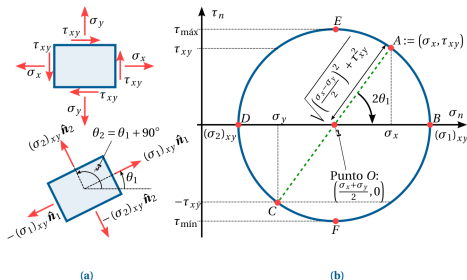


(b)



Círculo de Mohr en dos dimensiones

Interpretación física

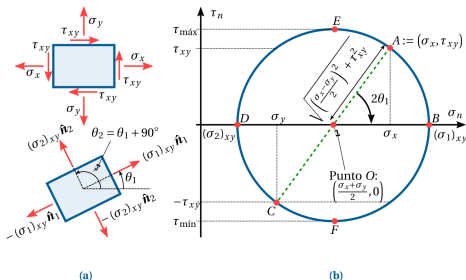


Representa el lugar geométrico de las posibles combinaciones de esfuerzos normales σ_n y cortantes τ_n que actúan sobre la superficie inclinada \overline{AB} a medida que el ángulo θ varía entre 0° y 180° .



Círculo de Mohr en dos dimensiones

Interpretación matemática



Curva paramétrica $(\sigma_n(\theta), \tau_n(\theta))$ que aparecen al variar el parámetro θ en el intervalo $[0^\circ, 180^\circ)$. Dicha curva empieza a graficarse en el punto de coordenadas (σ_x, σ_y) y se traza en sentido horario. La circunferencia resultante

tiene centro en $(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0)$ y radio $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$



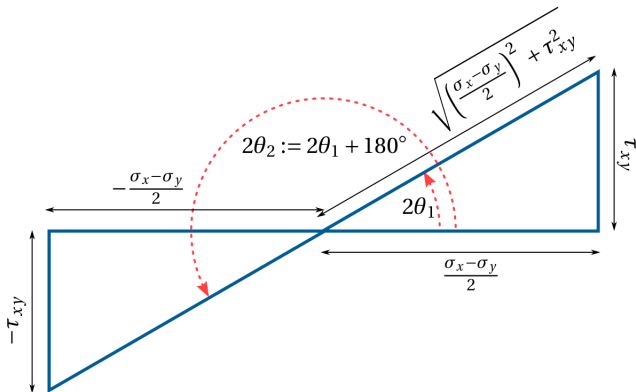
Círculo de Mohr en dos dimensiones

Nos planteamos dos preguntas:

- ¿Cuál es la inclinación θ para la cual se producen los esfuerzos normales σ_n máximos y mínimos sobre el punto en consideración?
- ¿Qué magnitud tienen?



Círculo de Mohr en dos dimensiones



$$\sin 2\theta_1 = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

$$\cos 2\theta_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sin 2\theta_2 = -\frac{\tau_{xy}}{R}$$

$$\cos 2\theta_2 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}$$



Círculo de Mohr en dos dimensiones

Resumen de ecuaciones

- Construcción de la curva paramétrica

$$\sigma_n(\theta) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_n(\theta) = \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta$$

- Direcciones principales

$$\tan 2\theta_1 = \frac{+\tau_{xy}}{+\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} \quad \tan 2\theta_2 = \frac{-\tau_{xy}}{-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}$$

- Esfuerzos principales

$$(\sigma_1)_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$(\sigma_2)_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



Círculo de Mohr en dos dimensiones

Resumen de ecuaciones

- Esfuerzos cortantes máximos y mínimos

$$(\tau_{\text{máx}})_{xy} = + \frac{(\sigma_1)_{xy} - (\sigma_2)_{xy}}{2} = + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$(\tau_{\text{mín}})_{xy} = - \frac{(\sigma_1)_{xy} - (\sigma_2)_{xy}}{2} = - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Dirección de los esfuerzos cortantes máximos y mínimos

$$\cot 2\theta_{c1} = \frac{+\tau_{xy}}{-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} \quad \cot 2\theta_{c2} = \frac{-\tau_{xy}}{+\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}$$



Círculo de Mohr en dos dimensiones

Relación entre ángulos

Comentario

Veremos que θ_{c1} y θ_{c2} se producen a 45° de los planos principales, más explícitamente:

$$\theta_{c1} = \theta_1 - 45^\circ = \theta_2 + 45^\circ$$

$$\theta_{c2} = \theta_1 + 45^\circ = \theta_2 - 45^\circ$$

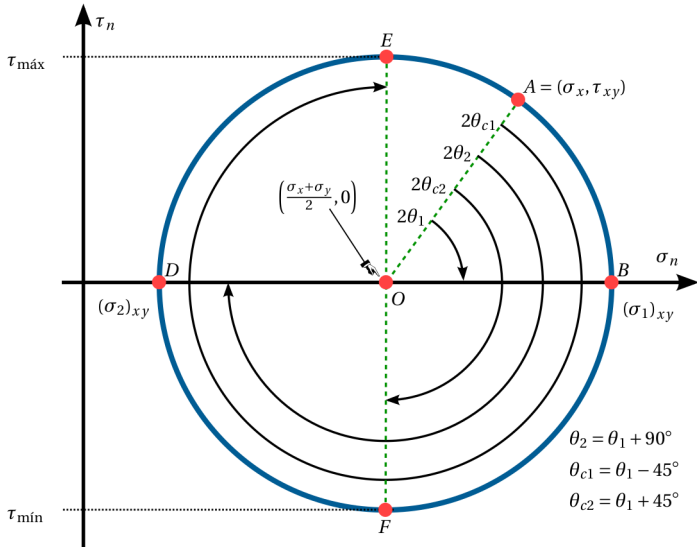


Derrotero

- ➊ 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- ➋ 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
 - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
 - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
 - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
 - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- ➌ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
 - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
 - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
 - 2.9.3. La función \tan^{-1}
 - 2.9.4. Ejemplo
 - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- ➍ 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- ➎ Referencias



Gráfica e interpretación del círculo de Mohr





Derrotero

- ➊ 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- ➋ 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
 - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
 - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
 - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
 - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- ➌ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
 - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
 - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
 - 2.9.3. La función \tan^{-1}
 - 2.9.4. Ejemplo
 - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- ➍ 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- ➎ Referencias



La función atan2

Es una función $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow (-\pi, \pi]$ que retorna el ángulo correcto en radiante entre un vector $[x, y]^T$ y el eje x positivo teniendo en cuenta que para ubicar el cuadrante, se utilizan los signos de los argumentos x y y . Está definida por:

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } y \geq 0, x < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{si } y < 0, x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } y > 0, x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } y < 0, x = 0 \\ \text{indefinido} & \text{si } y = 0, x = 0 \end{cases}$$



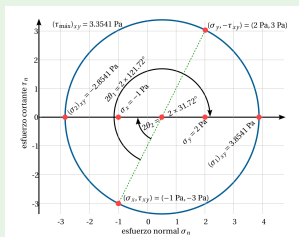
Derrotero

- 1 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- 2 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
 - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
 - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
 - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
 - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- 3 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
 - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
 - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
 - 2.9.3. La función \tan^{-1}
 - 2.9.4. Ejemplo
 - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- 4 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- 5 Referencias



Círculo de Mohr en dos dimensiones

Ejemplo



Considere un punto sujeto a los esfuerzos $\sigma_x = 1Pa$, $\sigma_y = 2Pa$ y $\tau_{xy} = -3Pa$; calcule los esfuerzos principales y sus direcciones para el punto en consideración.

Código

- [02_09_04_ejemplo.ipynb](#)
- [circulo_mohr_2d.py](#)



Derrotero

- ➊ 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- ➋ 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
 - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
 - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
 - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
 - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- ➌ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
 - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
 - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
 - 2.9.3. La función \tan^{-1}
 - 2.9.4. Ejemplo
 - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- ➍ 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- ➎ Referencias



Círculo de Mohr en tres dimensiones

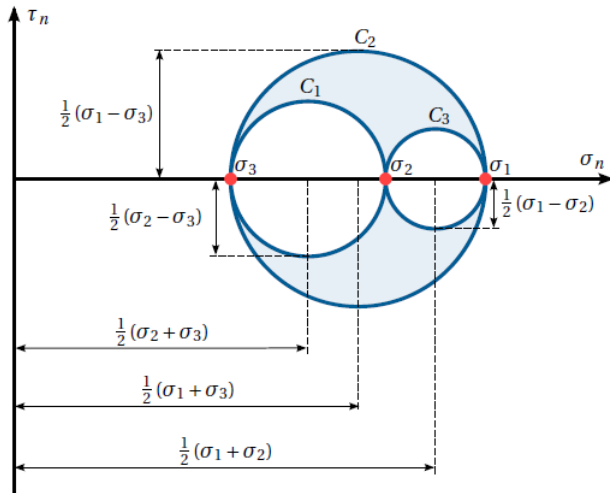
Estudio autónomo

Estudiar los siguientes videos:

- 02.09 - Círculo de Mohr en 3D (Parte 1/3) - Deducción del círculo de Mohr tridimensional
- 02.09 - Círculo de Mohr en 3D (Parte 2/3) - Ubicando los planos donde actúan los esfuerzos en 3D
- 02.09 - Círculo de Mohr en 3D (Parte 3/3) - ¿Donde actúan los esfuerzos cortantes máximos en 3D?



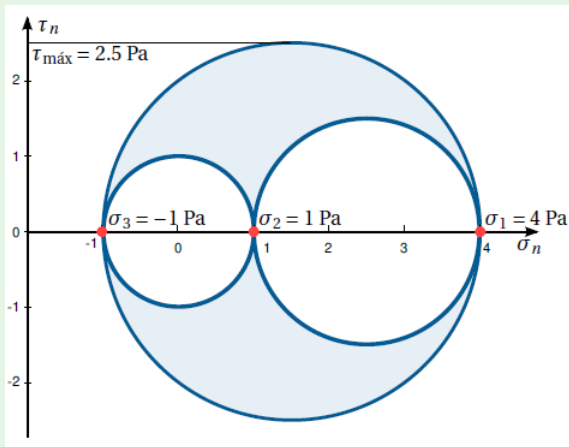
Círculo de Mohr en tres dimensiones





Círculo de Mohr en tres dimensiones

Ejemplo 2





Derrotero

- 1 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- 2 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
 - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
 - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
 - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
 - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- 3 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
 - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
 - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
 - 2.9.3. La función \tan^{-1}
 - 2.9.4. Ejemplo
 - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- 4 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- 5 Referencias



La analogía del bombillo y la caja

Estudio autónomo

Prestar atención a:

- La analogía del bombillo y la caja :)



Derrotero

- 1 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- 2 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
 - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
 - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
 - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
 - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- 3 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
 - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
 - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
 - 2.9.3. La función \tan^{-1}
 - 2.9.4. Ejemplo
 - 2.9.7. Círculo de Mohr en tres dimensiones
- 4 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- 5 Referencias



Referencias

Álvarez, D. A. (2022). *Teoría de la elasticidad*, volume 1. Universidad Nacional de Colombia.



Links

- Lista de reproducción: [02 - Esfuerzos o Tensiones](#)
- Repositorio del curso: [github/medio_continuo](#)