05. Ecuaciones diferenciales fundamentales de la teoría de la elasticidad

secciones 5.3 a 5.7

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil
Mecánica de sólidos

2023a

Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada (Álvarez, 2022).

Derrotero

Derrotero

Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera describen, por ejemplo, la forma como está soportado el sólido o las cargas superficiales aplicadas, y esto se modela matemáticamente definiendo ya sea los desplazamientos o los esfuerzos en los puntos del contorno del sólido.

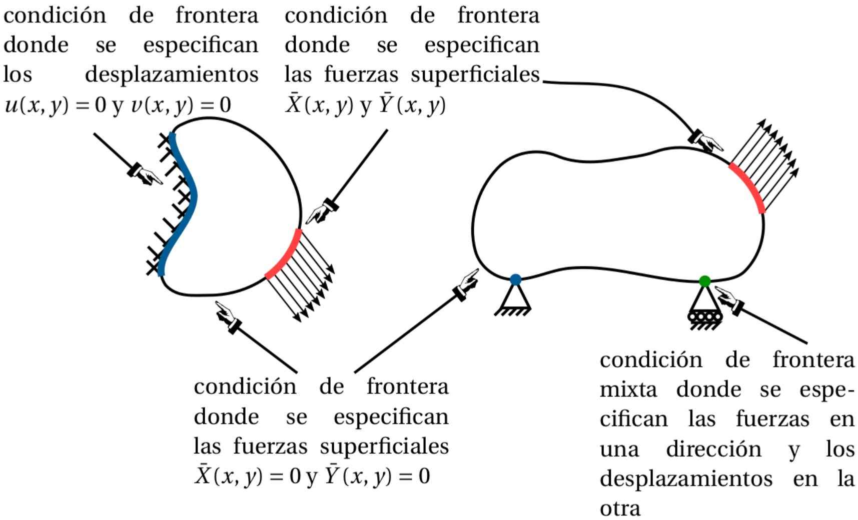
Condición de frontera esencial

(de desplazamiento o cinemática) se especifican los desplazamientos.

Condición de frontera natural

(de fuerza o esfuerzo) describe los esfuerzos en el contorno del sólido.

Condiciones de frontera



Derrotero

Condiciones de equilibrio en la frontera

- ¿Qué pasa en la frontera del sólido?
- ¿De qué forma las fuerzas superficiales se convierten en esfuerzos en el interior del sólido?

Derrotero

Nota sobre la nomenclatura

Tengamos en cuenta que:

- Estamos utilizando las funciones X, Y y Z para representar las funciones $\Omega \to \mathbb{R}$ que describen la variación de las fuerzas másicas por unidad de volumen en el interior del sólido Ω.
- Estamos empleando los símbolos $\bar{X}$, $\bar{Y}$ y $\bar{Z}$ para representar las funciones $\delta\Omega \to \mathbb{R}$ que describen la variación de las fuerzas superficiales por unidad de área en el contorno $\delta\Omega$ del sólido Ω.
- $\boldsymbol{x} := [x, y, z]^T$ representa la posición en el espacio referida a los tres ejes coordenados.
- dS representará un diferencial de superficie (S mayúscula), mientras que ds representa un diferencial de longitud de arco, asociado al parámetro de longitud de arco (s minúscula).

Nota sobre la nomenclatura

Tengamos en cuenta que:

- Estamos utilizando las funciones X, Y y Z para representar las funciones $\Omega \to \mathbb{R}$ que describen la variación de las fuerzas másicas por unidad de volumen en el interior del sólido Ω.
- Estamos empleando los símbolos $\bar{X}$, $\bar{Y}$ y $\bar{Z}$ para representar las funciones $\delta\Omega \to \mathbb{R}$ que describen la variación de las fuerzas superficiales por unidad de área en el contorno $\delta\Omega$ del sólido Ω.
- $\boldsymbol{x} := [x, y, z]^T$ representa la posición en el espacio referida a los tres ejes coordenados.
- dS representará un diferencial de superficie (S mayúscula), mientras que ds representa un diferencial de longitud de arco, asociado al parámetro de longitud de arco (s minúscula).

Nota sobre la nomenclatura

Tengamos en cuenta que:

- Estamos utilizando las funciones X, Y y Z para representar las funciones $\Omega \to \mathbb{R}$ que describen la variación de las fuerzas másicas por unidad de volumen en el interior del sólido Ω.
- Estamos empleando los símbolos $\bar{X}$, $\bar{Y}$ y $\bar{Z}$ para representar las funciones $\delta\Omega \to \mathbb{R}$ que describen la variación de las fuerzas superficiales por unidad de área en el contorno $\delta\Omega$ del sólido Ω.
- $\boldsymbol{x} := [x, y, z]^T$ representa la posición en el espacio referida a los tres ejes coordenados.
- dS representará un diferencial de superficie (S mayúscula), mientras que ds representa un diferencial de longitud de arco, asociado al parámetro de longitud de arco (s minúscula).

Nota sobre la nomenclatura

Tengamos en cuenta que:

- Estamos utilizando las funciones X, Y y Z para representar las funciones $\Omega \to \mathbb{R}$ que describen la variación de las fuerzas másicas por unidad de volumen en el interior del sólido Ω.
- Estamos empleando los símbolos $\bar{X}$, $\bar{Y}$ y $\bar{Z}$ para representar las funciones $\delta\Omega \to \mathbb{R}$ que describen la variación de las fuerzas superficiales por unidad de área en el contorno $\delta\Omega$ del sólido Ω.
- $\boldsymbol{x} := [x, y, z]^T$ representa la posición en el espacio referida a los tres ejes coordenados.
- dS representará un diferencial de superficie (S mayúscula), mientras que ds representa un diferencial de longitud de arco, asociado al parámetro de longitud de arco (s minúscula).

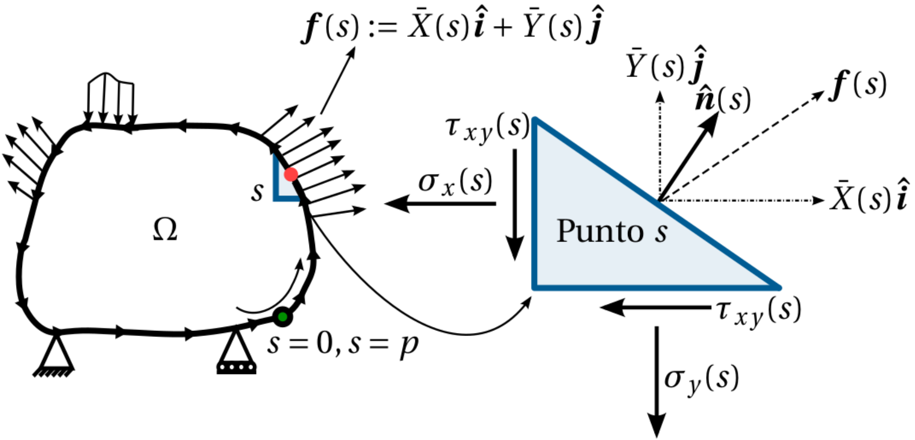
Nota sobre la nomenclatura

Tengamos en cuenta que:

- Estamos utilizando las funciones X, Y y Z para representar las funciones $\Omega \to \mathbb{R}$ que describen la variación de las fuerzas másicas por unidad de volumen en el interior del sólido Ω.
- Estamos empleando los símbolos $\bar{X}$, $\bar{Y}$ y $\bar{Z}$ para representar las funciones $\delta\Omega \to \mathbb{R}$ que describen la variación de las fuerzas superficiales por unidad de área en el contorno $\delta\Omega$ del sólido Ω.
- $\boldsymbol{x} := [x, y, z]^T$ representa la posición en el espacio referida a los tres ejes coordenados.
- dS representará un diferencial de superficie (S mayúscula), mientras que ds representa un diferencial de longitud de arco, asociado al parámetro de longitud de arco (s minúscula).

Derrotero

Análisis en dos dimensiones



Análisis en dos dimensiones

Partiendo de la ecuación de Cauchy (2.3) que nos permite analizar no solo los esfuerzos en el interior del sólido, sino también las condiciones en la frontera:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{n}}}$$

Parametrizando y relacionando con las fuerzas superficiales $\boldsymbol{f}$:

Ecuaciones de equilibrio externo bidimensionales

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{X}(s) \\ \bar{Y}(s) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{f}(s)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x(s) & \tau_{xy}(s) \\ \tau_{xy}(s) & \sigma_y(s) \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha(s) \\ \beta(s) \end{pmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{n}}(s)}$$

Se relacionan las cargas superficiales con la forma de la frontera y los esfuerzos en el interior del sólido para un punto $s \in \delta\Omega$

Análisis en dos dimensiones

Partiendo de la ecuación de Cauchy (2.3) que nos permite analizar no solo los esfuerzos en el interior del sólido, sino también las condiciones en la frontera:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{n}}}$$

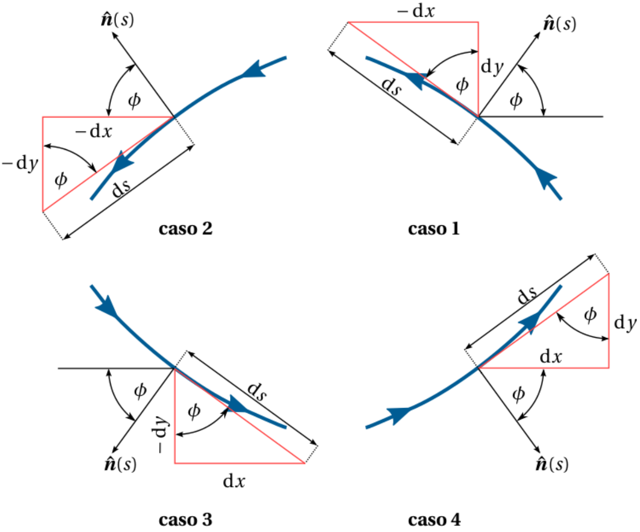
Parametrizando y relacionando con las fuerzas superficiales $\boldsymbol{f}$:

Ecuaciones de equilibrio externo bidimensionales

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{X}(s) \\ \bar{Y}(s) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{f}(s)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x(s) & \tau_{xy}(s) \\ \tau_{xy}(s) & \sigma_y(s) \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha(s) \\ \beta(s) \end{pmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{n}}(s)}$$

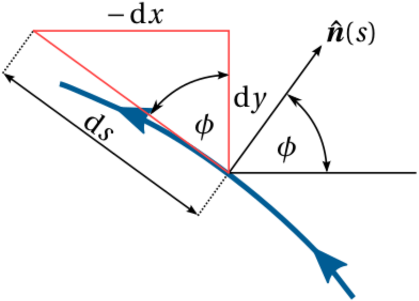
Se relacionan las cargas superficiales con la forma de la frontera y los esfuerzos en el interior del sólido para un punto $s \in \delta\Omega$

Análisis en dos dimensiones



Análisis en dos dimensiones

Caso 1: (*i cuadrante*)



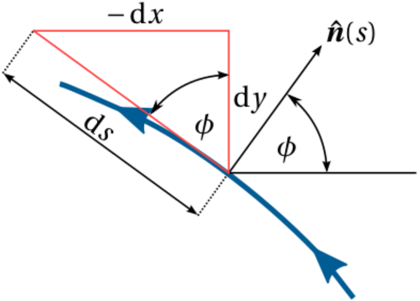
$\hat{\boldsymbol{n}} := \left[\cos\phi, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\right]^T$, por lo tanto:

$$\alpha = \cos\phi = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin\phi = -\frac{dx}{ds}$$

Análisis en dos dimensiones

Caso 1: (*i cuadrante*)



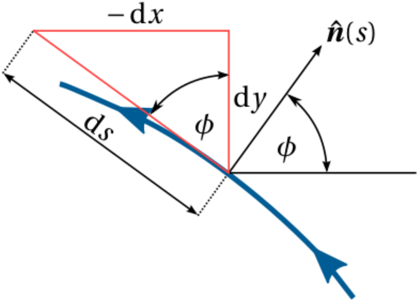
$\hat{\boldsymbol{n}} := \left[\cos\phi, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\right]^T$, por lo tanto:

$$\alpha = \cos\phi = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin\phi = -\frac{dx}{ds}$$

Análisis en dos dimensiones

Caso 1: (*i cuadrante*)

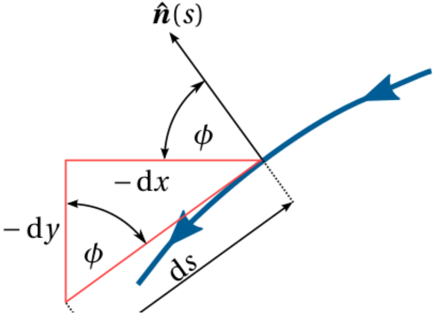


$\hat{\boldsymbol{n}} := \left[\cos\phi, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\right]^T$, por lo tanto:

$$\alpha = \cos\phi = \frac{dy}{ds}$$
$$\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin\phi = -\frac{dx}{ds}$$

Análisis en dos dimensiones

Caso 2: (*ii cuadrante*)



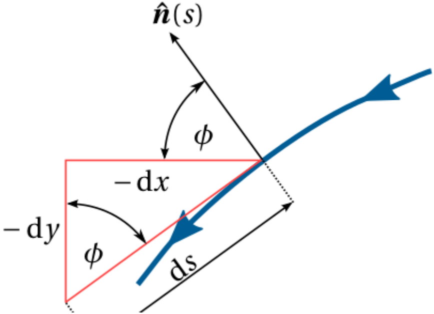
$\hat{\boldsymbol{n}} := \left[\cos(\pi - \phi), \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\right]^T$, por lo tanto:

$$\alpha = \cos(\pi - \phi) = -\cos\phi = \frac{-dy}{-ds} = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin\phi = -\frac{dx}{ds}$$

Análisis en dos dimensiones

Caso 2: (*ii cuadrante*)



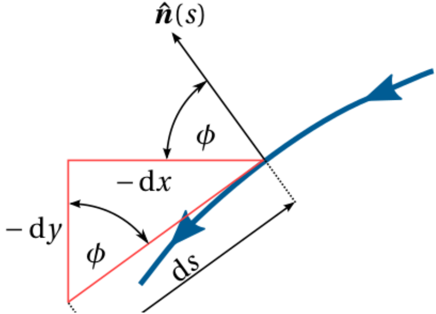
$\hat{\boldsymbol{n}} := \left[\cos(\pi-\phi), \cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)\right]^T$, por lo tanto:

$$\alpha = \cos(\pi-\phi) = -\cos\phi = \frac{-dy}{-ds} = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right) = \sin\phi = -\frac{dx}{ds}$$

Análisis en dos dimensiones

Caso 2: (*ii cuadrante*)



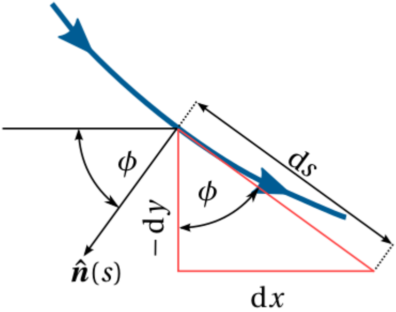
$\hat{\boldsymbol{n}} := \left[\cos(\pi - \phi), \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\right]^T$, por lo tanto:

$$\alpha = \cos(\pi - \phi) = -\cos\phi = \frac{-dy}{-ds} = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin\phi = -\frac{dx}{ds}$$

Análisis en dos dimensiones

Caso 3: (*iii cuadrante*)



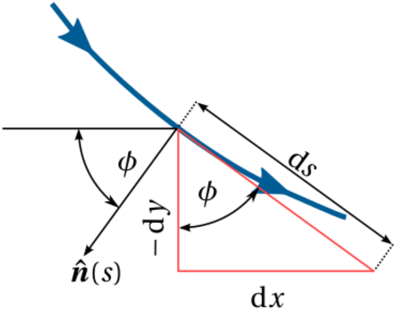
$\hat{\boldsymbol{n}} := \left[\cos(\pi + \phi), \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)\right]^T$, por lo tanto:

$$\alpha = \cos(\pi + \phi) = -\cos\phi = \frac{-dy}{ds} = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = -\sin\phi = -\frac{dx}{ds}$$

Análisis en dos dimensiones

Caso 3: (*iii cuadrante*)



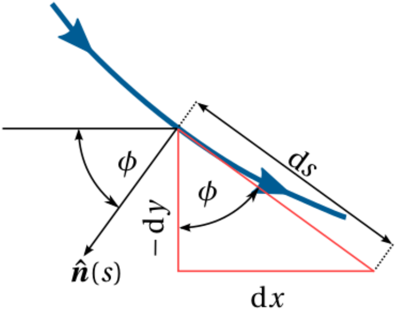
$\hat{\boldsymbol{n}} := \left[\cos(\pi+\phi), \cos\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)\right]^T$, por lo tanto:

$$\alpha = \cos(\pi+\phi) = -\cos\phi = \frac{-dy}{ds} = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right) = -\sin\phi = -\frac{dx}{ds}$$

Análisis en dos dimensiones

Caso 3: (*iii cuadrante*)



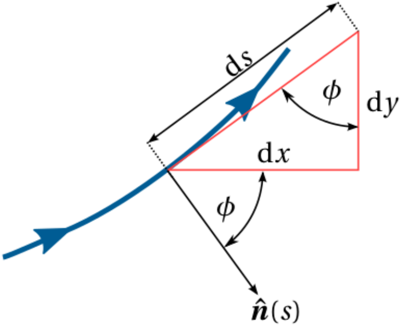
$\hat{\boldsymbol{n}} := \left[\cos(\pi+\phi), \cos\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)\right]^T$, por lo tanto:

$$\alpha = \cos(\pi+\phi) = -\cos\phi = \frac{-dy}{ds} = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right) = -\sin\phi = -\frac{dx}{ds}$$

Análisis en dos dimensiones

Caso 4: (*iv cuadrante*)



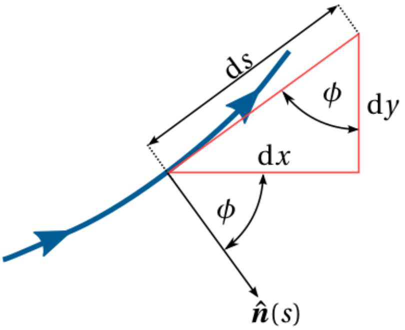
$\hat{\boldsymbol{n}} := \left[\cos(2\pi - \phi), \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \phi\right)\right]^T$, por lo tanto:

$$\alpha = \cos(2\pi - \phi) = \cos\phi = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \phi\right) = -\sin\phi = -\frac{dx}{ds}$$

Análisis en dos dimensiones

Caso 4: (*iv cuadrante*)



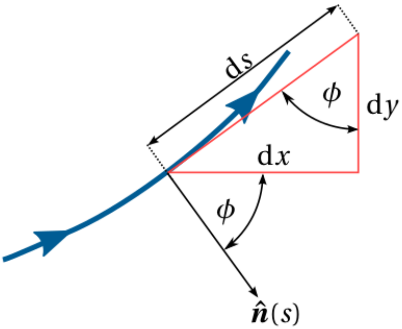
$\hat{\boldsymbol{n}} := \left[\cos(2\pi - \phi), \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \phi\right)\right]^T$, por lo tanto:

$$\alpha = \cos(2\pi - \phi) = \cos\phi = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \phi\right) = -\sin\phi = -\frac{dx}{ds}$$

Análisis en dos dimensiones

Caso 4: (*iv cuadrante*)



$\hat{\boldsymbol{n}} := \left[\cos(2\pi - \phi), \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \phi\right)\right]^T$, por lo tanto:

$$\alpha = \cos(2\pi - \phi) = \cos\phi = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \phi\right) = -\sin\phi = -\frac{dx}{ds}$$

Análisis en dos dimensiones

Vector normal y unitario al contorno (bidimensional)

$$\hat{\boldsymbol{n}} := \left[\frac{dy(s)}{ds}, -\frac{dx(s)}{ds}\right]$$

- $\forall (x(s), y(s)) \in \delta\Omega$
- se deduce que las componentes del vector $\hat{\boldsymbol{n}}$ están relacionadas con la geometría del sólido
- Esta ecuación es válida únicamente cuando la curva $(x(s), y(s))$ esté parametrizada con respecto a la longitud de arco

Derrotero

Análisis en tres dimensiones

Haciendo un análisis similar al propuesto para el caso bidimensional:

Ecuaciones de equilibrio externo tridimensionales

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{X}(\boldsymbol{x}) \\ \bar{Y}(\boldsymbol{x}) \\ \bar{Z}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{f}(x,y,z)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x(\boldsymbol{x}) & \tau_{xy}(\boldsymbol{x}) & \tau_{xz}(\boldsymbol{x}) \\ \tau_{xy}(\boldsymbol{x}) & \sigma_y(\boldsymbol{x}) & \tau_{yz}(\boldsymbol{x}) \\ \tau_{xz}(\boldsymbol{x}) & \tau_{yz}(\boldsymbol{x}) & \sigma_z(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(\boldsymbol{x})} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha(\boldsymbol{x}) \\ \beta(\boldsymbol{x}) \\ \gamma(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})}$$

- $\forall(x, y, z) \in \delta\Omega$
- Relaciona las cargas superficiales con la geometría de las fronteras del sólido y con los esfuerzos internos.
- En tres dimensiones no es posible describir la frontera como una curva paramétrica.

Derrotero

Equilibrio estático

Un cuerpo se encuentra en **equilibrio estático** cuando:

$$\boldsymbol{f}_{masicas} + \boldsymbol{f}_{superficiales} = 0 \qquad \boldsymbol{m}_{masicas} + \boldsymbol{m}_{superficiales} = 0;$$

Acciones producidas por las **fuerzas másicas**:

$$\boldsymbol{f}_{masicas} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) dV \qquad \boldsymbol{m}_{masicas} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) dV;$$

Acciones producidas por las **fuerzas superficiales**:

$$\boldsymbol{f}_{superficiales} = \oiint_{\delta\Omega} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) dS \qquad \boldsymbol{m}_{superficiales} = \oiint_{\delta\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) dS.$$

Equilibrio estático

Un cuerpo se encuentra en **equilibrio estático** cuando:

$$\boldsymbol{f}_{masicas} + \boldsymbol{f}_{superficiales} = 0 \qquad \boldsymbol{m}_{masicas} + \boldsymbol{m}_{superficiales} = 0;$$

Acciones producidas por las **fuerzas másicas**:

$$\boldsymbol{f}_{masicas} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) dV \qquad \boldsymbol{m}_{masicas} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) dV;$$

Acciones producidas por las **fuerzas superficiales**:

$$\boldsymbol{f}_{superficiales} = \oiint_{\delta\Omega} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) dS \qquad \boldsymbol{m}_{superficiales} = \oiint_{\delta\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) dS.$$

Equilibrio estático

Un cuerpo se encuentra en **equilibrio estático** cuando:

$$\boldsymbol{f}_{masicas} + \boldsymbol{f}_{superficiales} = 0 \qquad \boldsymbol{m}_{masicas} + \boldsymbol{m}_{superficiales} = 0;$$

Acciones producidas por las **fuerzas másicas**:

$$\boldsymbol{f}_{masicas} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) dV \qquad \boldsymbol{m}_{masicas} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) dV;$$

Acciones producidas por las **fuerzas superficiales**:

$$\boldsymbol{f}_{superficiales} = \oiint_{\delta\Omega} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) dS \qquad \boldsymbol{m}_{superficiales} = \oiint_{\delta\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) dS.$$

Equilibrio estático

Un cuerpo se encuentra en **equilibrio estático** cuando:

$$\boldsymbol{f}_{masicas} + \boldsymbol{f}_{superficiales} = 0 \qquad \boldsymbol{m}_{masicas} + \boldsymbol{m}_{superficiales} = 0;$$

Acciones producidas por las **fuerzas másicas**:

$$\boldsymbol{f}_{masicas} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) dV \qquad \boldsymbol{m}_{masicas} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) dV;$$

Acciones producidas por las **fuerzas superficiales**:

$$\boldsymbol{f}_{superficiales} = \oiint_{\delta\Omega} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) dS \qquad \boldsymbol{m}_{superficiales} = \oiint_{\delta\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) dS.$$

Equilibrio estático

Un cuerpo se encuentra en **equilibrio estático** cuando:

$$\boldsymbol{f}_{masicas} + \boldsymbol{f}_{superficiales} = 0 \qquad \boldsymbol{m}_{masicas} + \boldsymbol{m}_{superficiales} = 0;$$

Acciones producidas por las **fuerzas másicas**:

$$\boldsymbol{f}_{masicas} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) dV \qquad \boldsymbol{m}_{masicas} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) dV;$$

Acciones producidas por las **fuerzas superficiales**:

$$\boldsymbol{f}_{superficiales} = \oiint_{\delta\Omega} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) dS \qquad \boldsymbol{m}_{superficiales} = \oiint_{\delta\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) dS.$$

Equilibrio estático

Un cuerpo se encuentra en **equilibrio estático** cuando:

$$\boldsymbol{f}_{masicas} + \boldsymbol{f}_{superficiales} = 0 \qquad \boldsymbol{m}_{masicas} + \boldsymbol{m}_{superficiales} = 0;$$

Acciones producidas por las **fuerzas másicas**:

$$\boldsymbol{f}_{masicas} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) dV \qquad \boldsymbol{m}_{masicas} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) dV;$$

Acciones producidas por las **fuerzas superficiales**:

$$\boldsymbol{f}_{superficiales} = \oint\!\!\oint_{\delta\Omega} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) dS \qquad \boldsymbol{m}_{superficiales} = \oint\!\!\oint_{\delta\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) dS.$$

Equilibrio estático

En conclusión, como tenemos equilibrio estático, resulta que:

$$\iiint_{\Omega} \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})dV + \oiint_{\delta\Omega} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})dS = 0$$

$$\iiint_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})dV + \oiint_{\delta\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})dS = 0$$

Tenga en cuenta que las integrales $\oiint$ son integrales de contorno, que se efectúan sobre toda la "piel"de Ω, es decir, sobre $\delta\Omega$.

Particularización para el caso bidimensional

Equilibrio estático

La ecuación (5.26a) (equilibrio de fuerzas):

$$\iint_{\Omega} X(\boldsymbol{x}) dA + \oint_{\delta\Omega} \bar{X}(\boldsymbol{s}) ds = 0$$
$$\iint_{\Omega} Y(\boldsymbol{x}) dA + \oint_{\delta\Omega} \bar{Y}(\boldsymbol{s}) ds = 0$$

La ecuación (5.26b) (equilibrio de momentos):

$$\iint_{\Omega} (xY(\boldsymbol{x}) - yX(\boldsymbol{x}))\, dA + \oint_{\delta\Omega} \big(x(s)\bar{Y}(s) - y(s)\bar{X}(s)\big)\, ds = 0$$

Particularización para el caso bidimensional

Equilibrio estático

La ecuación (5.26a) (equilibrio de fuerzas):

$$\iint_{\Omega} X(\boldsymbol{x})dA + \oint_{\delta\Omega} \bar{X}(\boldsymbol{s})ds = 0$$
$$\iint_{\Omega} Y(\boldsymbol{x})dA + \oint_{\delta\Omega} \bar{Y}(\boldsymbol{s})ds = 0$$

La ecuación (5.26b) (equilibrio de momentos):

$$\iint_{\Omega} \left(xY(\boldsymbol{x}) - yX(\boldsymbol{x})\right) dA + \oint_{\delta\Omega} \big(x(s)\bar{Y}(s) - y(s)\bar{X}(s)\big)\, ds = 0$$

Particularización para el caso bidimensional

Equilibrio estático

La ecuación (5.26a) (equilibrio de fuerzas):

$$\iint_{\Omega} X(\boldsymbol{x})dA + \oint_{\delta\Omega} \bar{X}(\boldsymbol{s})ds = 0$$
$$\iint_{\Omega} Y(\boldsymbol{x})dA + \oint_{\delta\Omega} \bar{Y}(\boldsymbol{s})ds = 0$$

La ecuación (5.26b) (equilibrio de momentos):

$$\iint_{\Omega} \left(xY(\boldsymbol{x}) - yX(\boldsymbol{x})\right) dA + \oint_{\delta\Omega} \big(x(s)\bar{Y}(s) - y(s)\bar{X}(s)\big)\, ds = 0$$

Ecuaciones integrales de equilibrio

Equilibrio estático

Ecuaciones integrales de equilibrio (postulado de Cauchy)

Sea un sólido Ω el cual está sujeto a unas fuerzas másicas y de superficie representadas por los campos vectoriales $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{f}$, respectivamente. Entonces cada subdominio V de un sólido Ω, es decir, cada $V \subseteq \Omega$ satisface las siguientes ecuaciones de equilibrio

$$\iiint_V \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})dV + \oiint_{\delta V} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})dS = 0$$

$$\iiint_V \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})dV + \oiint_{\delta V} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})dS = 0$$

- $\boldsymbol{x} := [x, y, z]^T \in V$
- Tienen como dominio $V \subseteq \Omega$ (5.29), por lo que son ecuaciones más generales que las vistas anteriormente (5.26).

Derrotero

5.6. Un enfoque alternativo para deducir las ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio

Recordemos las EDPs de equilibrio:

$$\mathrm{div}\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = 0$$

Primer enfoque

Al hacer sumatorias de fuerzas en un elemento diferencial de sólido.

Recordemos la primera EDPs de equilibrio tridimensional:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

Segundo enfoque

Cualquier subconjunto V del sólido Ω está en equilibrio de fuerzas, tal y como lo dicen las **ecuaciones integrales de equilibrio** (5.29)

5.6. Un enfoque alternativo para deducir las ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio

Recordemos las EDPs de equilibrio:

$$\text{div}\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = 0$$

Primer enfoque

Al hacer sumatorias de fuerzas en un elemento diferencial de sólido.

Recordemos la primera EDPs de equilibrio tridimensional:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

Segundo enfoque

Cualquier subconjunto V del sólido Ω está en equilibrio de fuerzas, tal y como lo dicen las **ecuaciones integrales de equilibrio** (5.29)

5.6. Un enfoque alternativo para deducir las ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio

Recordemos las EDPs de equilibrio:

$$\text{div}\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = 0$$

Primer enfoque

Al hacer sumatorias de fuerzas en un elemento diferencial de sólido.

Recordemos la primera EDPs de equilibrio tridimensional:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

Segundo enfoque

Cualquier subconjunto V del sólido Ω está en equilibrio de fuerzas, tal y como lo dicen las **ecuaciones integrales de equilibrio** (5.29)

5.6. Un enfoque alternativo para deducir las ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio

Recordemos las EDPs de equilibrio:

$$\text{div}\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = 0$$

Primer enfoque

Al hacer sumatorias de fuerzas en un elemento diferencial de sólido.

Recordemos la primera EDPs de equilibrio tridimensional:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

Segundo enfoque

Cualquier subconjunto V del sólido Ω está en equilibrio de fuerzas, tal y como lo dicen las **ecuaciones integrales de equilibrio** (5.29)

Un enfoque alternativo para deducir las ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio

Procedimiento:

$$\iiint_V \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})dV + \oiint_{\delta V} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})dS = 0$$

Tomando la primera ecuación integral

$$\iiint_V X(\boldsymbol{x})dV + \oiint_{\delta V} \begin{bmatrix} \sigma_x(\boldsymbol{x}) \\ \tau_{xy}(\boldsymbol{x}) \\ \tau_{xz}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})dS = 0$$

Aplicando el teorema de la divergencia

$$\iiint_V X(\boldsymbol{x})dV + \iiint_V \operatorname{div}\left([\sigma_x(\boldsymbol{x}), \tau_{xy}(\boldsymbol{x}), \tau_{xz}(\boldsymbol{x})]^T\right) dV = 0$$

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X\right) dV = 0$$

Un enfoque alternativo para deducir las ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio

Como esta ecuación es válida para todo $V \subseteq \Omega$ (es decir, cualquier parte V del sólido Ω puede ser escogida), entonces deducimos que el integrando es cero (0), y por lo tanto:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

Pregunta de control 12, sección 5.15

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función que se integra sobre una región V y supongamos que su integral vale cero para todo $V \subseteq \Omega$, es decir, $\int_V f(x)dx = 0 \; \forall \; V \subseteq \Omega$; esto implica que $f(x) = 0 \; \forall \; x \in \Omega$

Un enfoque alternativo para deducir las ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio

Como esta ecuación es válida para todo $V \subseteq \Omega$ (es decir, cualquier parte V del sólido Ω puede ser escogida), entonces deducimos que el integrando es cero (0), y por lo tanto:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

Pregunta de control 12, sección 5.15

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función que se integra sobre una región V y supongamos que su integral vale cero para todo $V \subseteq \Omega$, es decir, $\int_V f(x) dx = 0 \; \forall \; V \subseteq \Omega$; esto implica que $f(x) = 0 \; \forall \; x \in \Omega$

Derrotero

Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones

Caso bidimensional

$$\varepsilon_x(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \to \partial u(x,y) = \varepsilon_x(x,y)\partial x \quad \to u(x,y) = \int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)$$

$$\varepsilon_y(x,y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \to \partial v(x,y) = \varepsilon_y(x,y)\partial x \quad \to v(x,y) = \int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)$$

Reemplazando en $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\gamma_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)\right)$$

Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones

Caso bidimensional

$$\varepsilon_x(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \rightarrow \partial u(x,y) = \varepsilon_x(x,y)\partial x \quad \rightarrow u(x,y) = \int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)$$

$$\varepsilon_y(x,y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \rightarrow \partial v(x,y) = \varepsilon_y(x,y)\partial x \quad \rightarrow v(x,y) = \int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)$$

Reemplazando en $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\gamma_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)\right)$$

Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones

Caso bidimensional

$$\varepsilon_x(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \rightarrow \partial u(x,y) = \varepsilon_x(x,y)\partial x \quad \rightarrow u(x,y) = \int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)$$

$$\varepsilon_y(x,y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \rightarrow \partial v(x,y) = \varepsilon_y(x,y)\partial x \quad \rightarrow v(x,y) = \int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)$$

Reemplazando en $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\gamma_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)\right)$$

Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones

Caso bidimensional

$$\varepsilon_x(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \rightarrow \partial u(x,y) = \varepsilon_x(x,y)\partial x \quad \rightarrow u(x,y) = \int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)$$

$$\varepsilon_y(x,y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \rightarrow \partial v(x,y) = \varepsilon_y(x,y)\partial x \quad \rightarrow v(x,y) = \int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)$$

Reemplazando en $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\gamma_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)\right)$$

Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones

Caso bidimensional

$$\varepsilon_x(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \rightarrow \partial u(x,y) = \varepsilon_x(x,y)\partial x \quad \rightarrow u(x,y) = \int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)$$
$$\varepsilon_y(x,y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \rightarrow \partial v(x,y) = \varepsilon_y(x,y)\partial x \quad \rightarrow v(x,y) = \int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)$$

Reemplazando en $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\gamma_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)\right)$$

Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones

Caso bidimensional

$$\varepsilon_x(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \rightarrow \partial u(x,y) = \varepsilon_x(x,y)\partial x \quad \rightarrow u(x,y) = \int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)$$

$$\varepsilon_y(x,y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \rightarrow \partial v(x,y) = \varepsilon_y(x,y)\partial x \quad \rightarrow v(x,y) = \int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)$$

Reemplazando en $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\gamma_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)\right)$$

Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones

Caso bidimensional

$$\varepsilon_x(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \rightarrow \partial u(x,y) = \varepsilon_x(x,y)\partial x \quad \rightarrow u(x,y) = \int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)$$

$$\varepsilon_y(x,y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \rightarrow \partial v(x,y) = \varepsilon_y(x,y)\partial x \quad \rightarrow v(x,y) = \int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)$$

Reemplazando en $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\gamma_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)\right)$$

Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones

Caso bidimensional

Organizando términos:

$$\frac{df(y)}{dy}+\frac{dg(x)}{dx}=\gamma_{xy}(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int \varepsilon_x(x',y)dx'\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\int \varepsilon_y(x,y')dy'\right).$$

El desplazamiento depende de dos funciones $f(y)$ y $g(x)$; encontrarlas requiere de cierta pericia en el cálculo de la solución, ya que estas dos funciones contienen términos asociados a los desplazamientos y rotaciones rígidas del sólido.

Ejemplo:

encontrando los desplazamientos asociados al desplazamiento y la rotación rígida

Ni el desplazamiento ni la rotación rígida producen deformaciones longitudinales o angulares en el sólido, es decir:

$$\varepsilon_x(x,y) = \varepsilon_{x,y} = \gamma_{xy}(x,y) = 0 \ \forall \ (x,y) \in \Omega$$

Obtenemos que los desplazamientos vendrán dados por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ obtenemos } u(x,y) = c_1 + f(y) \tag{1}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ obtenemos } v(x,y) = c_2 + g(x) \tag{2}$$

Reemplazando en $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$, resulta:

$$\gamma_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(c_1 + f(y)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(c_2 + g(x)\right) = \frac{df(y)}{dy} + \frac{dg(x)}{dx} = 0$$

Ejemplo:

encontrando los desplazamientos asociados al desplazamiento y la rotación rígida

La ecuación anterior se puede descomponer en dos ecuaciones diferenciales a saber:

$$\frac{df(y)}{dy} + \omega_0 = 0 \qquad \frac{dg(x)}{dx} - \omega_0 = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones:

$$f(y) = -\omega_0 y + d_1 \qquad g(x) = \omega_0 x + d_2$$

Reemplazando en (eq 5.32)

$$u(x, y) = c_1 + d_1 - \omega_0 y \qquad v(x, y) = c_2 + d_2 + \omega_0 x$$

Haciendo $u_0 = c_1 + d_1$ y $v_0 = c_2 + d_2$ obtenemos:

Ejemplo:

encontrando los desplazamientos asociados al desplazamiento y la rotación rígida

Los desplazamientos asociados a la rotación y al desplazamiento rígido en las direcciones x y y están dados, respectivamente, por:

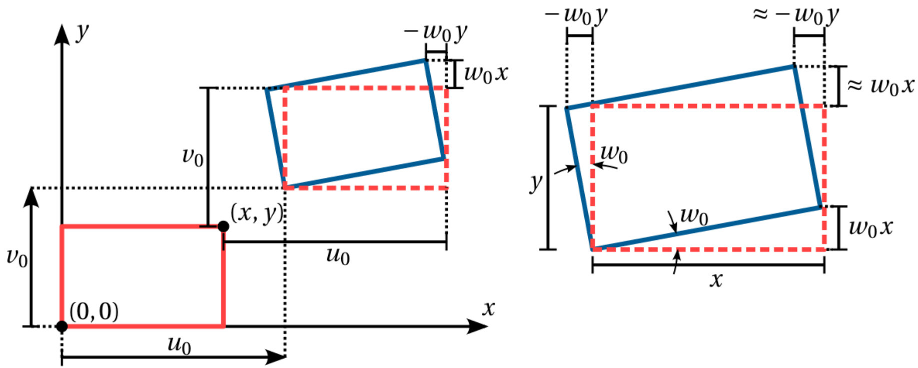
$$u(x,y) = u_0 - \omega_0 y \qquad v(x,y) = v_0 + \omega_0 x;$$

Donde:

- u_0, v_0 representan el desplazamiento rígido en las direcciones x y y, respectivamente.
- ω_0 representa, para ángulos pequeños, el ángulo de rotación rígida del sólido en radianes.

Ejemplo:

encontrando los desplazamientos asociados al desplazamiento y la rotación rígida



Derrotero

Referencias I

Álvarez, D. A. (2022). *Teoría de la elasticidad*, volume 1. Universidad Nacional de Colombia.

Links

- Repositorio del curso: github/medio_continuo