Mecánica de Sólidos

02. Estudio de los esfuerzos en un punto

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Docente Ocasional
Ingeniero Civil
Esp. en Estructuras
Maestrando en Estructuras – Investigación

2022b

Derrotero

Respositorio del curso: github.com/michaelherediaperez/mecanica_de_solidos_un

Advertencia

Estas presentaciones son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, el estudiante no debe tomarlas como material de estudio y debe dirigirse a la literatura recomendada.

2.1. Tensiones o esfuerzos

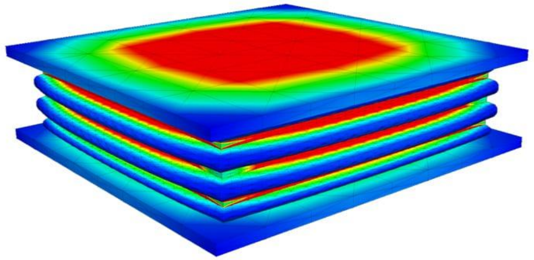
- Intensidad de una fuerza por unidad de área en el entorno de un punto material sobre una superficie real o imaginaria de un medio continuo.
- Las fuerzas internas son una reacción a las fuerzas externas aplicadas.

Augustin-Lois Cauchy (1789-1857)

2.1. Tensiones o esfuerzos

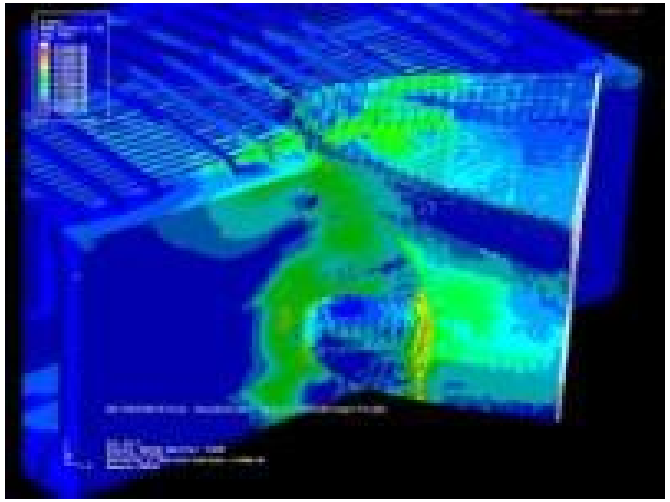
Suposición ⟶ El sólido deformado es continuo ⟶ Distribución de esfuerzos representada como una función continua por partes

- Dominio (x, y, z)



Modelo estático de neopreno zunchado: simscale.com

- Dominio (x, y, z, t)



Colisión modelada en abaqus: youtube.com/video

2.1. Tensiones o esfuerzos

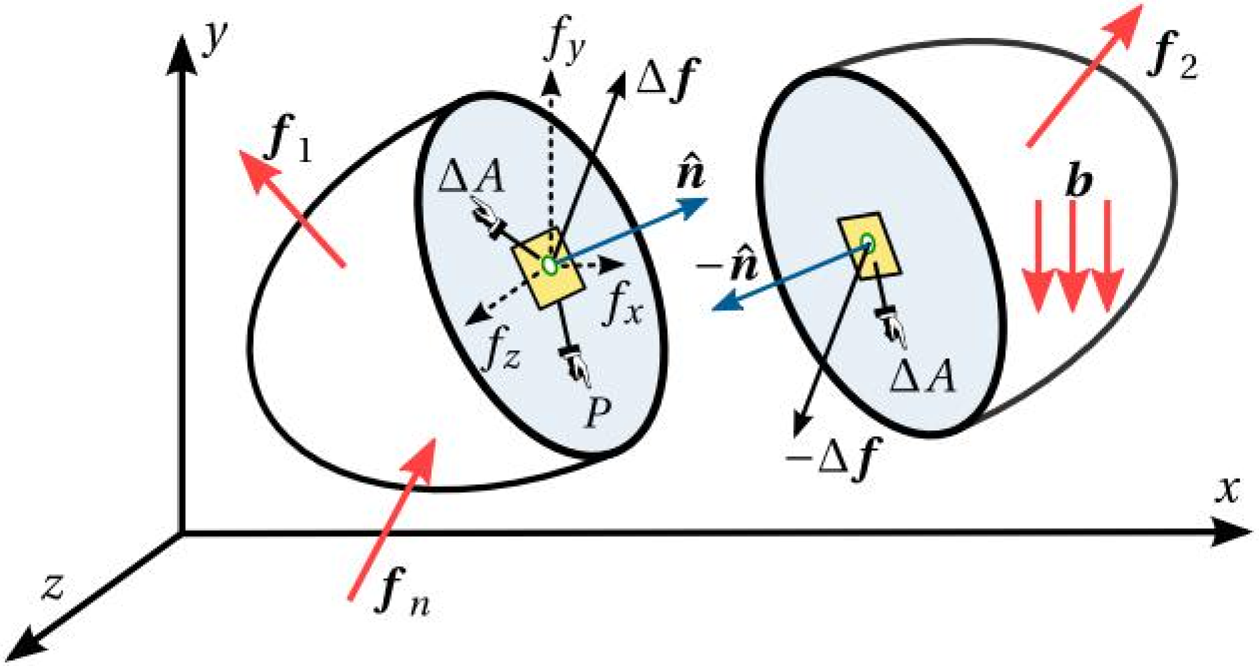


Figura 2.1: *Fuerzas superficiales* $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n$, *másicas* $\boldsymbol{b}$, *e internas que actúan sobre un sólido. El vector* $\Delta\boldsymbol{f} := [f_x, f_y, f_z]^T$ *representa la resultante de la fuerza interna que actúa sobre el área* ΔA*, la cual contiene el punto* P *y se encuentra ubicada sobre el plano con normal* $\hat{\boldsymbol{n}}$ *que pasa por el punto* P.

2.1. Tensiones o esfuerzos

El esfuezo: $\boldsymbol{q}(x,y,z) = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{f}}{\Delta A}$ (aquí ΔA tiene normal $\hat{\boldsymbol{n}}$).

$$\boxed{\boldsymbol{q}(x,y,z) = \boldsymbol{\sigma}_n(x,y,z) + \boldsymbol{\sigma}_s(x,y,z).}$$

- Vector de esfuerzo normal
  Fuerzas de compresión y tracción

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}_n(x,y,z) = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{f}_n}{\Delta A},}$$

- Vector de esfuerzo tangencial
  Fuerzas de corte

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}_s(x,y,z) = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{f}_s}{\Delta A}}$$

2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional

2.2.1. Análisis de un elemento infinitesimal rectangular

2.2.2. Análisis de un elemento infinitesimal triangular

2.2.1. Análisis de un elemento infinitesimal rectangular

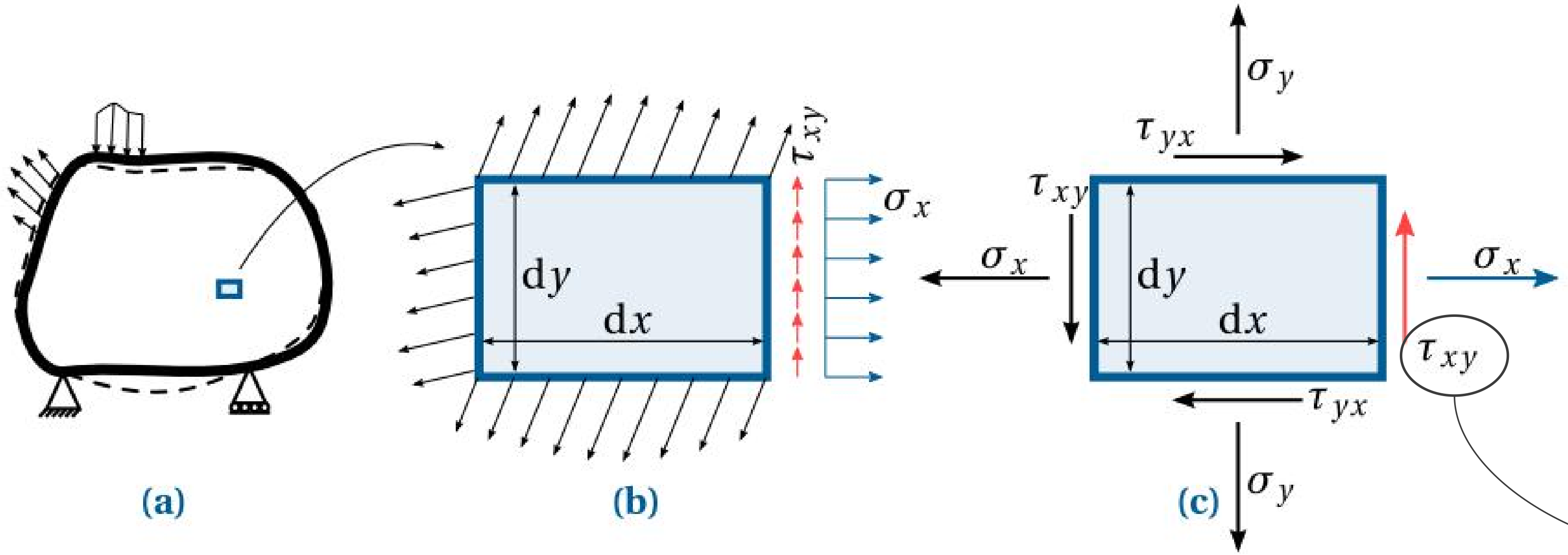


Figura 2.2: *Análisis de esfuerzos en un elemento infinitesimal rectangular de espesor t (no mostrado) localizado sobre el plano xy. El gráfico muestra la convención positiva de los esfuerzos. Del sólido mostrado en (a) extraemos un pedazo infinitesimal rectangular mostrado en (b). En (b) podemos ver los esfuerzos actuando sobre dicho rectángulo. Los esfuerzos sobre este rectángulo se pueden descomponer en esfuerzos normales y cortantes que se ilustran en (c) con una sola flecha para simplificar la representación gráfica.*

Un esfuerzo cortante τ_{ij} que actúa sobre una superficie ortogonal al eje i y tiene la misma dirección que el eje j

2.2.2. Análisis de un elemento infinitesimal triangular

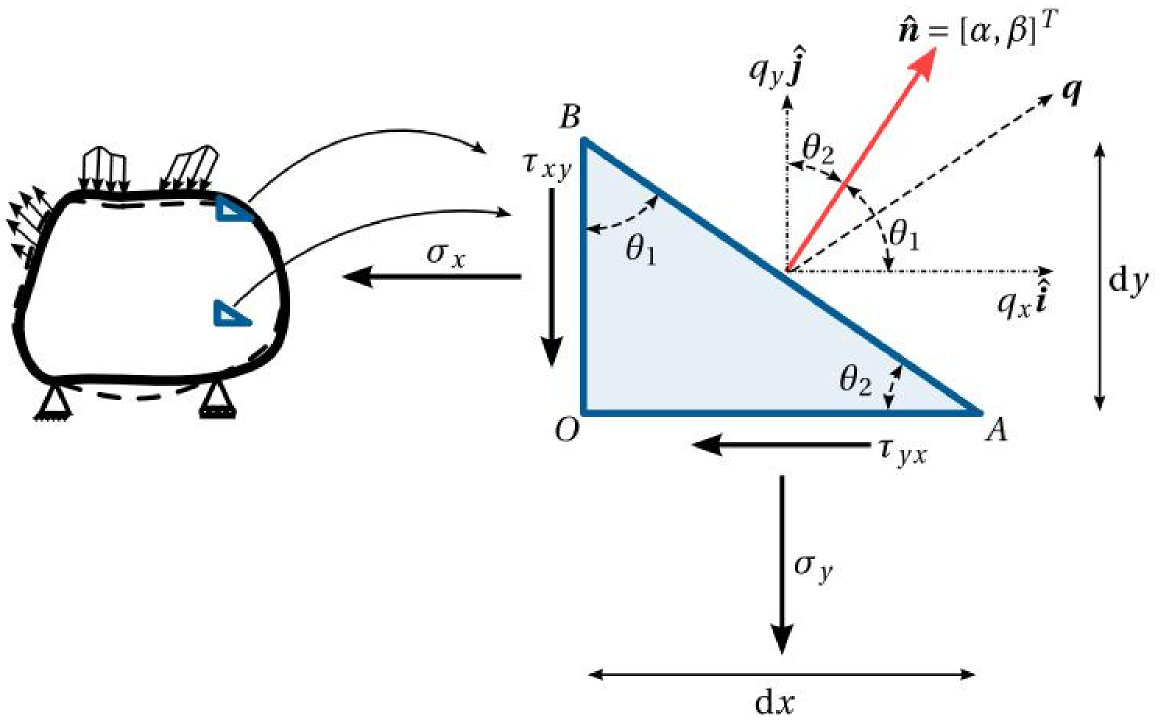


Figura 2.3: *Análisis de esfuerzos en un elemento triangular de espesor t (no mostrado) localizado sobre el plano xy. Dicho elemento se podría considerar como uno ubicado en el borde del sólido o interior a él. En el último caso, la superficie $\overline{AB}$ puede considerarse como análoga a la superficie rectangular ΔA mostrada en la Figura 2.1; desde este punto de vista, el vector* $\boldsymbol{q}$ *puede entenderse como un vector de esfuerzos internos o como un vector de fuerzas superficiales; todo depende del contexto.*

Fórmula de Cauchy bidimensional

$$\underbrace{\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{n}}}.$$

Matriz de tensiones de Cauchy (bidimensional)

Vector de esfuerzos

Vector normal unitario a la superficie $\overline{AB}$

Estos arreglos son función del punto P$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$

2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional

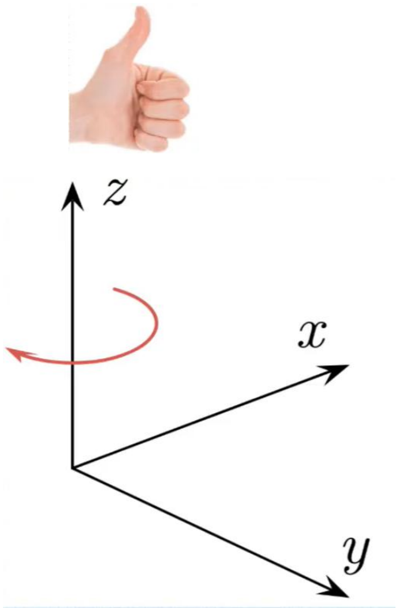
2.3.1. Análisis de un paralelepípedo infinitesimal

2.3.2. Análisis de un elemento tetraédrico infinitesimal

Un pequeño comentario sobre el Sistema coordenado en tres dimensiones

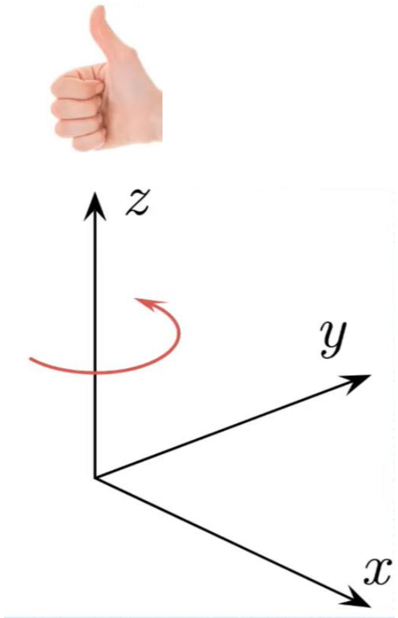
Sistema coordenado de la mano **izquierda**

Usualmente usado en mecánica de suelos



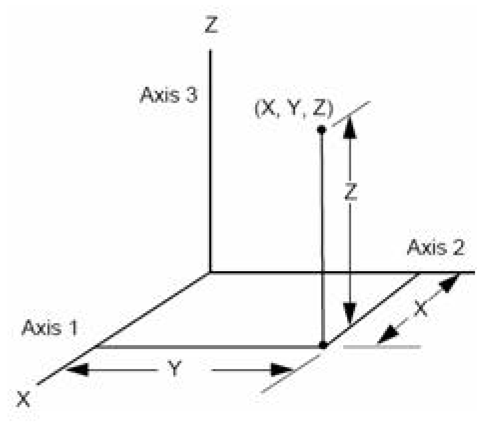
Sistema coordenado de la mano **derecha**

Usualmente usado en mecánica de sólidos y elementos finitos



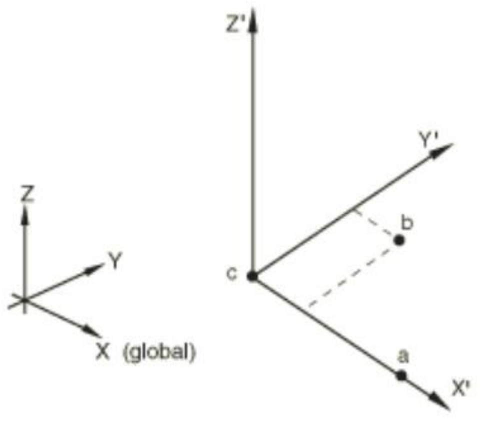
La consecuencia de usar un sistema de coordenadas u otro es que las fórmulas que se deducen con diferente sistemas de coordenadas pueden diferir en los signos de las fórmulas.

¿... dónde veo esto?



Manual de usuario
MIDAS GTS

MIDAS GTS traduce Sistema de Análisis Geotécnico... y trabaja el Sistema coordenado de la mano derecha!



Manual de usuario
ABAQUS

	Global co-ordinate system
Function	Definition of co-ordinates Definition of directions Interpretation of results -
Type	Right-handed Cartesian
Axes	X, Y, Z
Symbol	
Symbol color	Fixed 3 colors, X = green Y = red Z = blue

Manual de usuario
FEM DESIGN

ABAQUS y FEM DESIGN son software enfocados en el área estructural y mecánica, y también trabajan el Sistema coordenado de la mano derecha

NO es información trivial, de ser así no se molestarían en ponerlo en los manuales de usuario del programa.

Otro ejemplo: la fuerza cortante en función de la carga distribuida en vigas:

$$¿\ \frac{dV}{dx} = w \quad \text{o} \quad \frac{dV}{dx} = -w\ ?$$

2.3.1. Análisis de un paralelepípedo infinitesimal

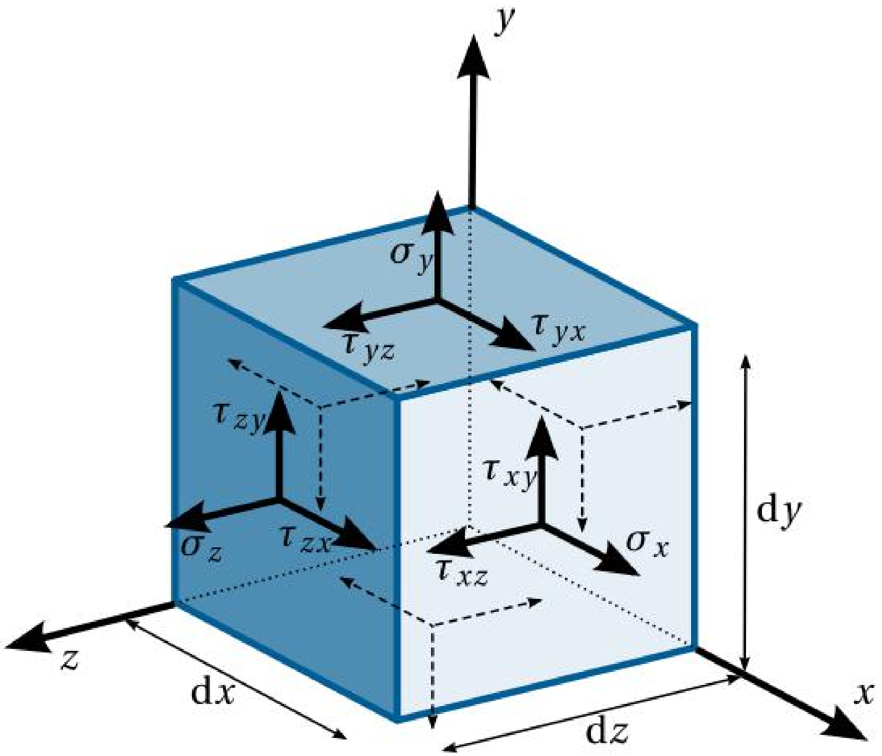


Figura 2.4: *Componentes de esfuerzos en 3D. El gráfico muestra el sentido positivo de los esfuerzos. Recuerde que τ_{xz} representa al esfuerzo cortante que actúa sobre una superficie ortogonal al eje x y que apunta en dirección del eje z. Observe adicionalmente que los esfuerzos están referidos a un sistema de coordenadas de la mano derecha (ver Apéndice A.19).*

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz} \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Las caras visibles se consideran las caras positivas, ya que están en el lado positive de los ejes $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, y $\boldsymbol{z}$.

2.3.2. Análisis de un elemento tetraédrico infinitesimal

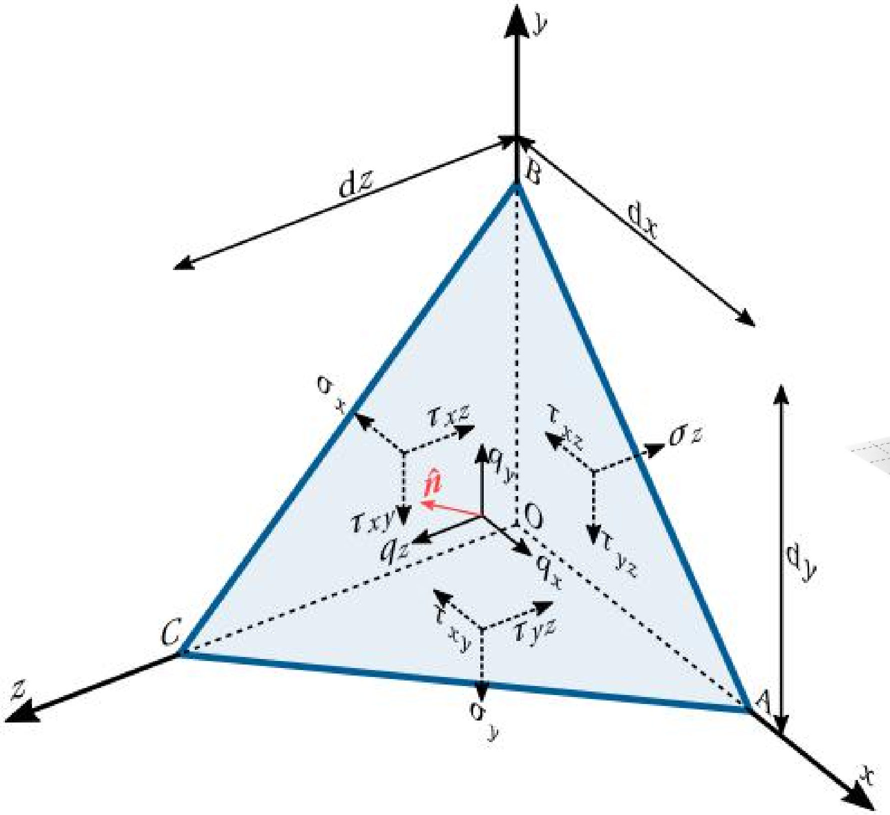
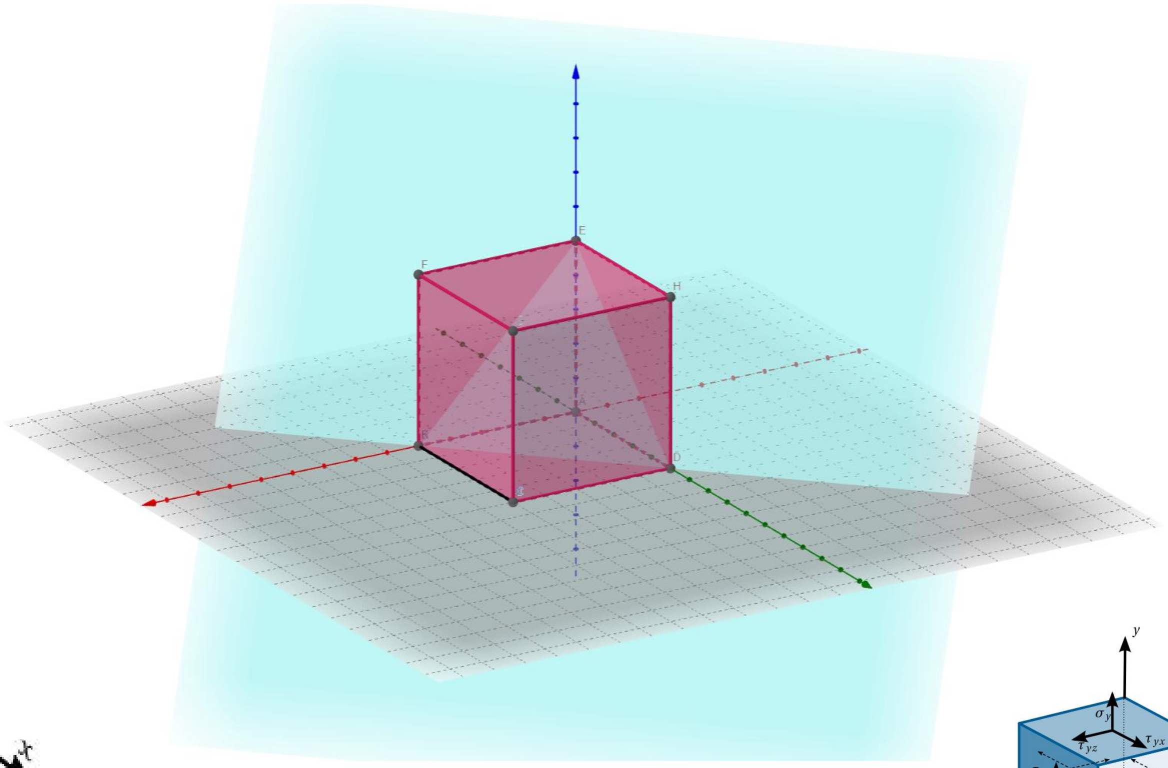
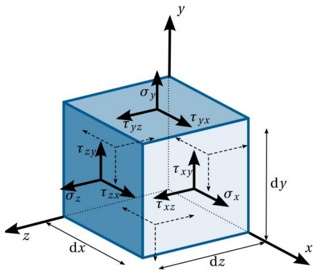


Figura 2.5: *Componentes de esfuerzos en 3D al analizar un elemento tetraédrico infinitesimal. Observe que los esfuerzos mostrados con las flechas punteadas están ubicados sobre las caras negativas del tetraedro, mientas que los esfuerzos q_x, q_y y q_z actúan sobre la superficie $\overline{ABC}$, el cual tiene vector normal $\hat{\boldsymbol{n}}$.*





2.3.2. Análisis de un elemento tetraédrico infinitesimal

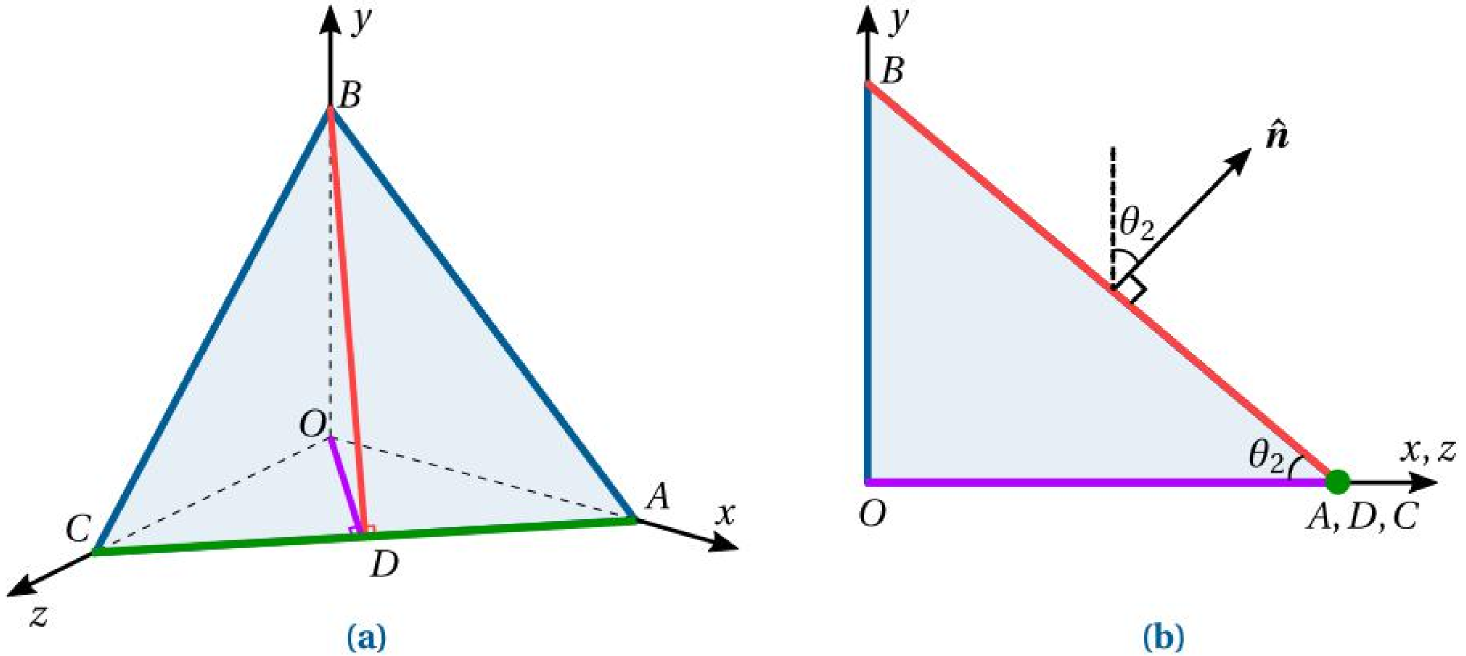
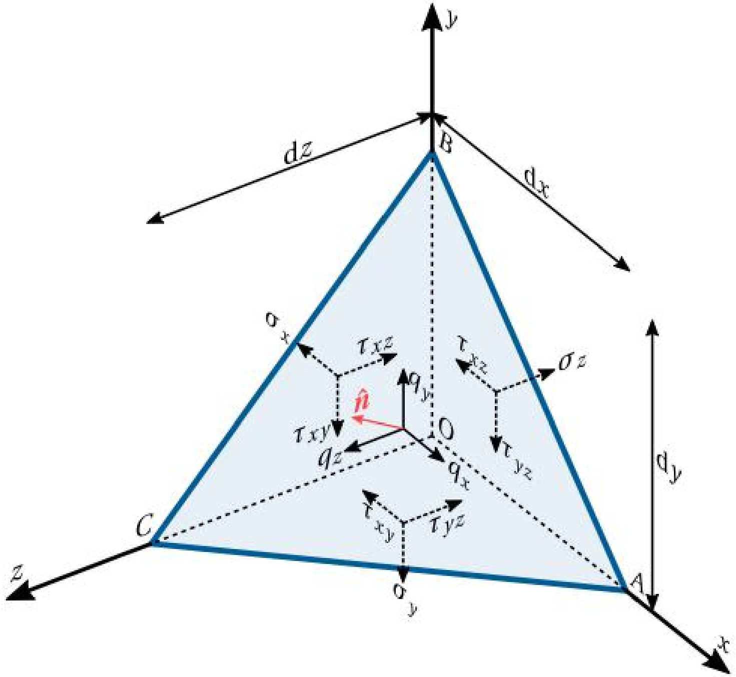


Figura 2.6: *Relación entre los triángulos $\overline{ABC}$ y $\overline{ACO}$. En el gráfico (a) se observa que las líneas $\overline{DO}$ y $\overline{BD}$ son las alturas de los triángulos $\overline{ACO}$ y $\overline{ABC}$, respectivamente; adicionalmente, ambas líneas son ortogonales a la línea $\overline{AC}$. En el gráfico (b) podemos encontrar una vista de la figura (a) en la cual el plano $\overline{ABC}$ se ve como la línea $\overline{BD}$ y la línea $\overline{AC}$ se ve como el punto verde* ▬ *mostrado. En este mismo gráfico se observa claramente que el ángulo que hace el eje y con el vector $\hat{\boldsymbol{n}}$ es θ_2.*



2.3.2. Análisis de un elemento tetraédrico infinitesimal

Fórmula de Cauchy tridimensional

$$\underbrace{\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{n}}}.$$

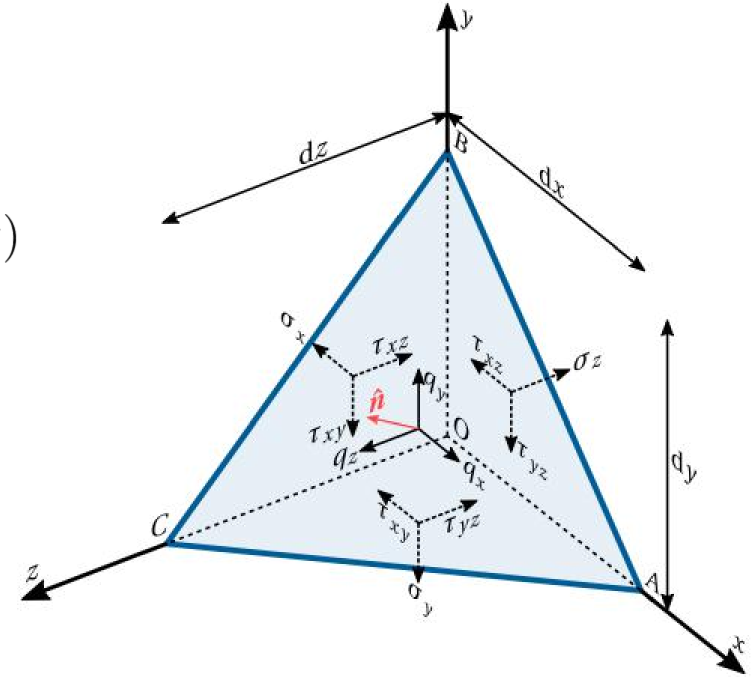
Matriz (simétrica) de tensiones de Cauchy (tridimensional) o tensor de esfuerzos

Vector de esfuerzos

Vector unitario ortogonal al plano $\overline{ABC}$

Estos arreglos son función del punto P($\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$,$\boldsymbol{z}$)

$$\underline{q}(x,y,z) = \underline{\underline{\sigma}}(x,y,z)\underline{\hat{n}}(x,y,z)$$



Dato curioso

Fórmula de Cauchy tridimensional

$$\underbrace{\begin{pmatrix} q_x\\ q_y\\ q_z\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} \underbrace{\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{n}}}.$$

Vector de esfuerzos

Matriz (simétrica) de tensiones de Cauchy (tridimensional) o tensor de esfuerzos

Vector unitario orthogonal al plano $\overline{ABC}$

Observe que la matriz $\underline{\sigma}(x, y, z)$ es en este caso **simétrica**. No obstante, es importante anotar que Fung, Tong, y Chen (2017, página 64) dicen que, según el matemático y científico escocés James Clerk Maxwell (1831 – 1879), **esta matriz no es simétrica en el caso de un imán en un campo magnético y en el caso de un material dieléctrico en un campo eléctrico con diferentes planos de polarización**, ya que en ambas situaciones, cuando se tienen esfuerzos cortantes muy pequeños y campos electromagnéticos muy intensos, aparecen sobre el cuerpo del sólido “momentos másicos” que evitan que la matriz $\underline{\sigma}(x, y, z)$ sea simétrica.

2.4. Notación tensorial

(Esta sección será de estudio autónomo)

Prestar atención a:

- Notación de la matriz de esfuerzos de Cauchy, ahora ***tensor de esfuerzos***.
- ¿Qué es el convenio de sumatoria de Einstein?
- La función ***Kronecker delta.***
- Notación de la multiplicación de matrices.

2.4. Notación tensorial

La función **Kronecker delta** o **delta de Kronecker** (*no confundir con la función impulso unitario o delta de Dirac*).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j, \\ 0, & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

Ejemplo:

La condición de ortogonalidad de dos vectores a partir del producto escalar.

$$\langle \mathbf{a_i}, \mathbf{a_j} \rangle = \mathbf{a_i} \cdot \mathbf{a_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j, \\ 0, & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

2.5. Cambio de base

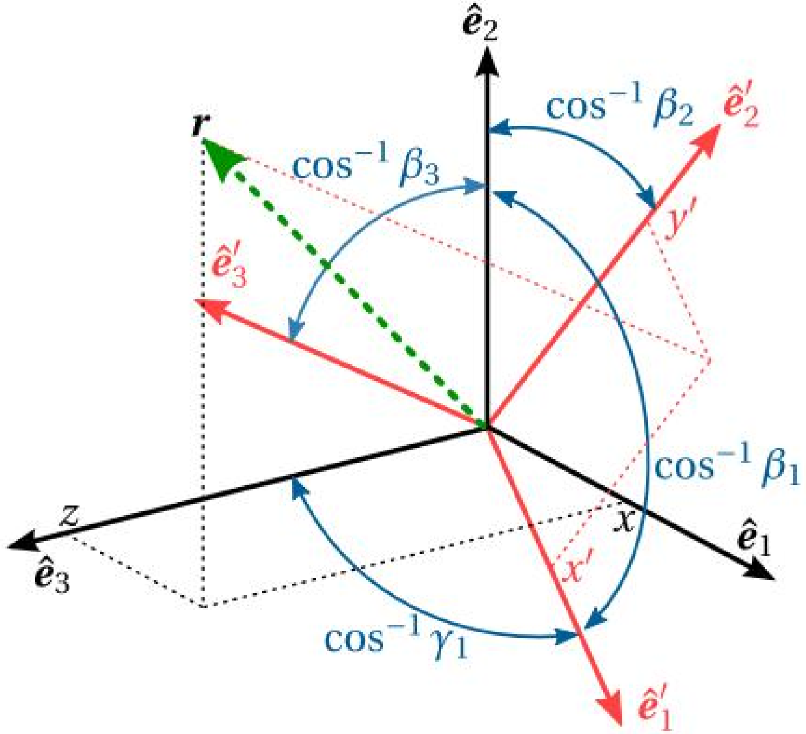
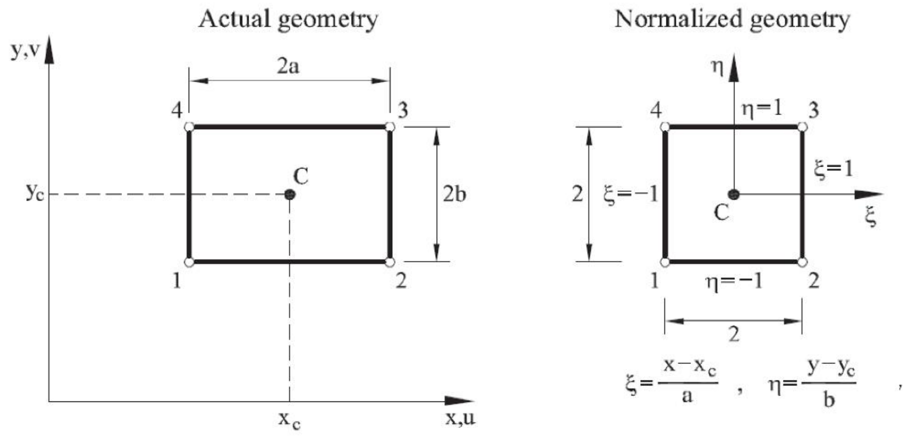
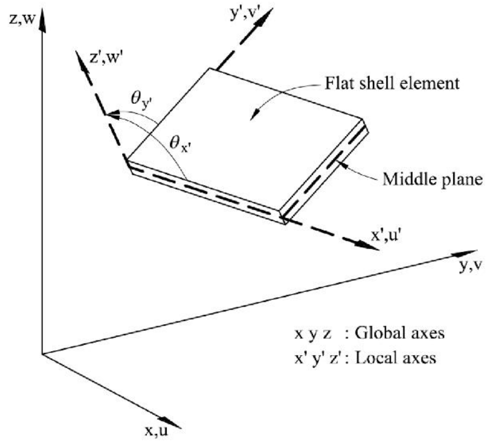
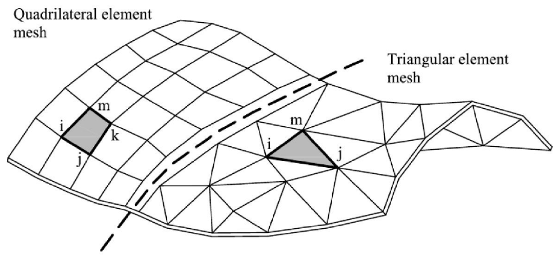


Figura 2.7: *Dos bases ortonormales especificadas por los vectores* $\hat{\boldsymbol{e}}_1$, $\hat{\boldsymbol{e}}_2$, $\hat{\boldsymbol{e}}_3$ *y* $\hat{\boldsymbol{e}}_1'$, $\hat{\boldsymbol{e}}_2'$ *y* $\hat{\boldsymbol{e}}_3'$. *Tenga en cuenta que* $\alpha_i = \cos(\measuredangle(\hat{\boldsymbol{e}}_i', \hat{\boldsymbol{e}}_1))$, $\beta_i = \cos(\measuredangle(\hat{\boldsymbol{e}}_i', \hat{\boldsymbol{e}}_2))$ *y* $\gamma_i = \cos(\measuredangle(\hat{\boldsymbol{e}}_i', \hat{\boldsymbol{e}}_3))$, *para* $i = 1, 2, 3$.

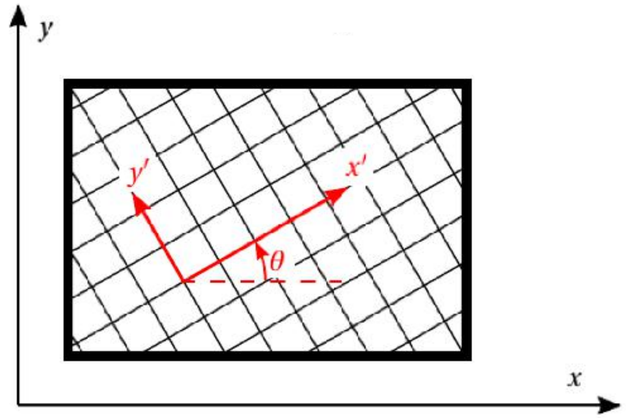
¿... dónde veo esto?







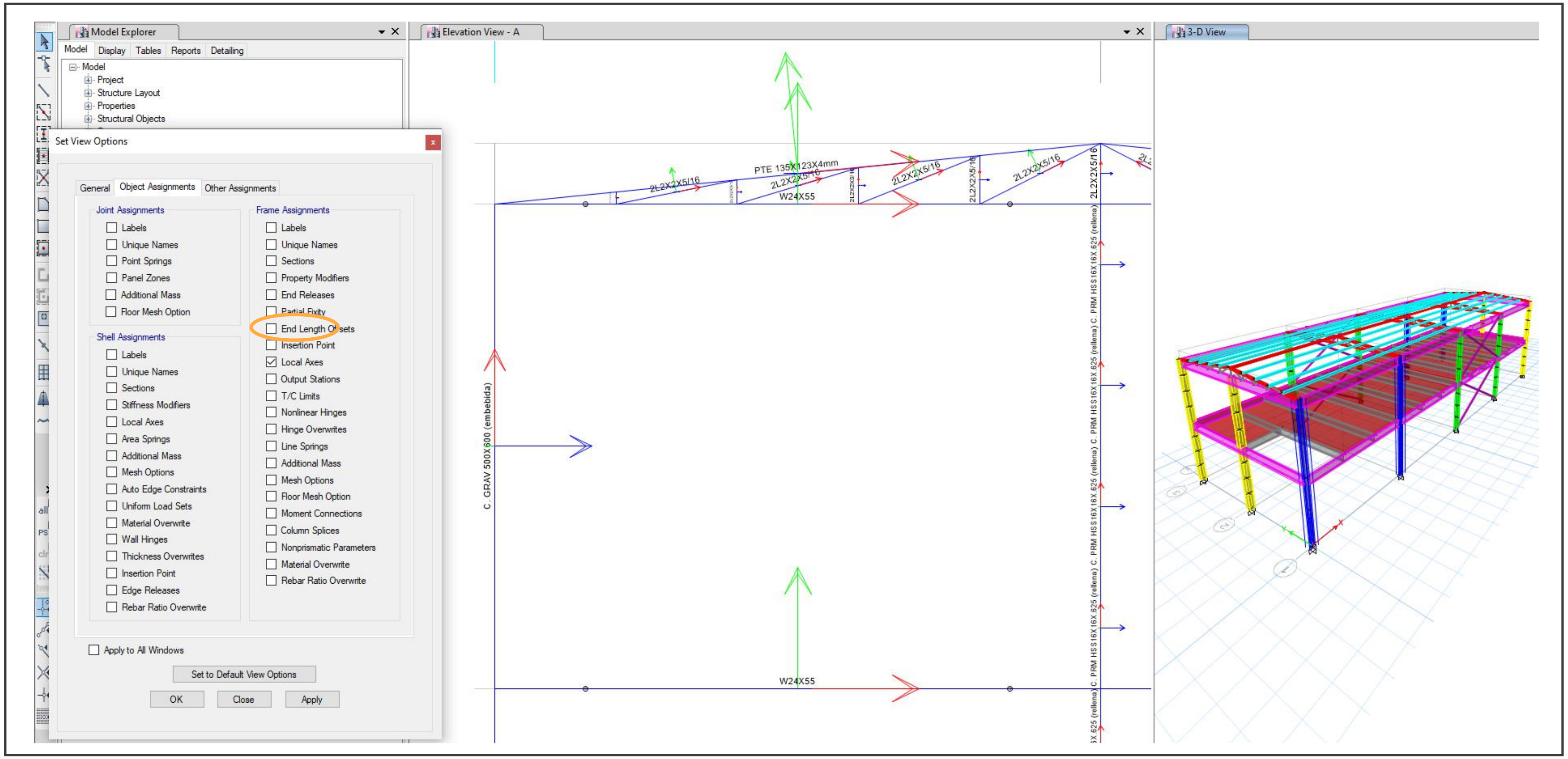
En una malla de elementos finitos, cada elemento se estudia en un Sistema coordenado local (***x'***, ***y'***) o (ξ, η).



Los ejes de ortotropía de un sólido no siempre estarán en el mismo sentido de los ejes globales, así que se representan en otro Sistema de coordenadas locales.

Se aplican cambios de base siempre que sea más cómodo rectificar la geometría, girar un elemento o simplificar el cálculo

¿... dónde veo esto?



En ETABS, al igual que en todos los softwares de ingeniería estructural y mecánica, los elementos son simplificados y estudiados dentro de su propio sistema de coordenadas. Se activa la opción *Local Axes* (ejes locales) para ver sus ejes, estos están codificados por colores según el manual de referencia.

2.5. Cambio de base

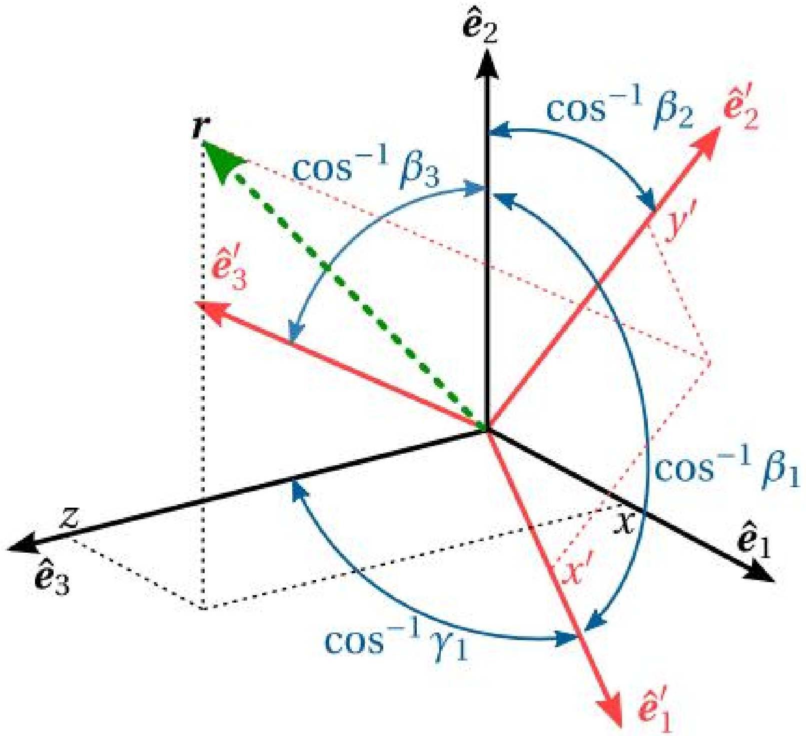
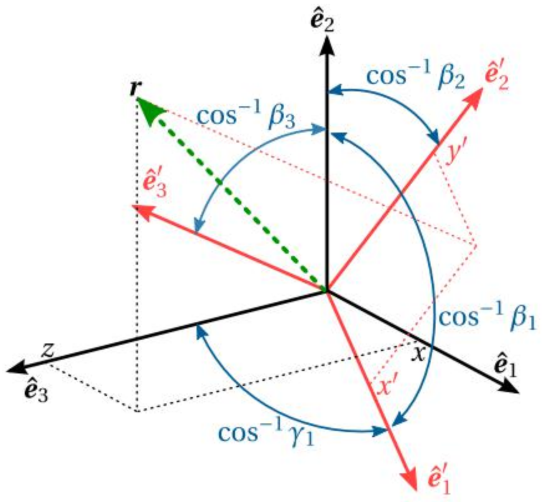


Figura 2.7: *Dos bases ortonormales especificadas por los vectores* $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$, $\hat{\mathbf{e}}_3$ *y* $\hat{\mathbf{e}}'_1$, $\hat{\mathbf{e}}'_2$ *y* $\hat{\mathbf{e}}'_3$. *Tenga en cuenta que* $\alpha_i = \cos(\measuredangle(\hat{\mathbf{e}}'_i, \hat{\mathbf{e}}_1))$, $\beta_i = \cos(\measuredangle(\hat{\mathbf{e}}'_i, \hat{\mathbf{e}}_2))$ *y* $\gamma_i = \cos(\measuredangle(\hat{\mathbf{e}}'_i, \hat{\mathbf{e}}_3))$, *para* $i = 1, 2, 3$.

2.5. Cambio de base



$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \hat{\boldsymbol{e}}'_1 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_1 & \beta_1 &= \hat{\boldsymbol{e}}'_1 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_2 & \gamma_1 &= \hat{\boldsymbol{e}}'_1 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_3 \\
\alpha_2 &= \hat{\boldsymbol{e}}'_2 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_1 & \beta_2 &= \hat{\boldsymbol{e}}'_2 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_2 & \gamma_2 &= \hat{\boldsymbol{e}}'_2 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_3 \\
\alpha_3 &= \hat{\boldsymbol{e}}'_3 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_1 & \beta_3 &= \hat{\boldsymbol{e}}'_3 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_2 & \gamma_3 &= \hat{\boldsymbol{e}}'_3 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_3.
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{e}}_1 + y\hat{\boldsymbol{e}}_2 + z\hat{\boldsymbol{e}}_3 = x'\hat{\boldsymbol{e}}'_1 + y'\hat{\boldsymbol{e}}'_2 + z'\hat{\boldsymbol{e}}'_3.$$

eq 2.9

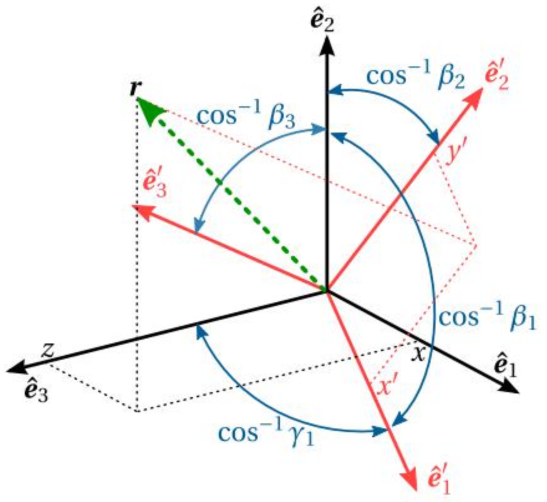
$\langle [\text{eq } 2.9], \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{i} \rangle, i = 1, 2, 3$

$$
\begin{aligned}
x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' \\
y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' \\
z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{r}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{T}} \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{r}'};}$$

$$\boldsymbol{T} = [\hat{\boldsymbol{e}}'_1, \quad \hat{\boldsymbol{e}}'_2, \quad \hat{\boldsymbol{e}}'_3].$$

2.5. Cambio de base



$\left\langle [\text{eq } 2.9], \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}} \right\rangle, i = 1, 2, 3$

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z'$$
$$y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z'$$
$$z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'$$

$$\boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{r}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{T}} \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{r}'};}$$

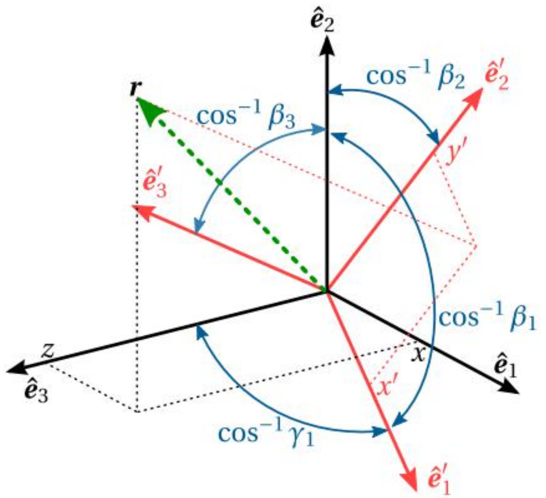
$\left\langle [\text{eq } 2.9], \hat{\mathbf{e'}}_{\mathbf{i}} \right\rangle, i = 1, 2, 3$

$$x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z$$
$$y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z$$
$$z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z$$

$$\boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{r}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{T}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{r}};}$$

Se deduce que la matriz T es **ortogonal,** ya que $T^{-1} = T^{T}$

2.5. Cambio de base



$(x_i, \mathbf{e_i})$

Sistema de coordenadas **globales**

$(x_i', \mathbf{e_i'})$

Sistema de coordenadas **locales**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{r}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{T}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{r}};$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{r}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{T}} \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{r}'};$$

r: vector de coordenadas globales del punto P

T: matriz de transformación $\longrightarrow$ $\det(\boldsymbol{T}) = \pm 1$

r': vector de coordenadas locales del punto P

2.5. Cambio de base

Ejemplo:

Formular una expresión matemática para la rotación de la figura 2.8.

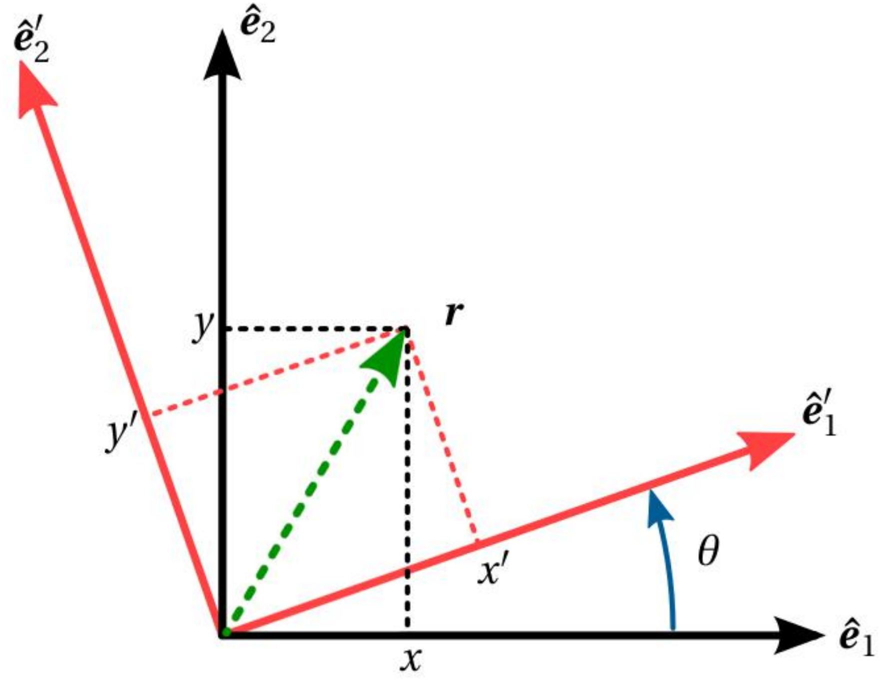


Figura 2.8: *Cambio de base al rotar los ejes en el plano bidimensional.*

2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas

2.6.1. Particularización de la matriz de tensiones al caso tridimensional.

2.6.2. Particularización de la matriz de tensiones al caso bidimensional.

2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas

Fórmulas de transformación de la matriz de esfuerzos entre los sistemas de coordenadas $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ y $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$:

- Del Sistema global al local
  Incómodo al cómodo

$$\boxed{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}' = \boldsymbol{T}^T \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \boldsymbol{T}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} & \tau_{y'z'} & \sigma_{z'} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}^T}_{\boldsymbol{T}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{T}}$$

- Del Sistema local al global
  Cómodo al incómodo

$$\boxed{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \boldsymbol{T} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}' \boldsymbol{T}^T,}$$

Comentario sobre el uso de la programación

El libro guía de clase tiene códigos escritos en MAXIMA para el desarrollo de varias demostraciones simbólicas y cálculos numéricos de ahora en adelante. A su vez, estos estarán traducidos a lenguaje Python en el repositorio del curso.

2.6.1. Particularización de la matriz de tensiones al caso tridimensional

[mecanica_de_solidos_un/02_06_01.ipynb at main · michaelherediaperez/mecanica_de_solidos_un (github.com)]

$$\sigma_{x'} = 2\gamma_1\beta_1\tau_{yz} + 2\gamma_1\alpha_1\tau_{xz} + 2\alpha_1\beta_1\tau_{xy} + \gamma_1^2\sigma_z + \beta_1^2\sigma_y + \alpha_1^2\sigma_x$$
$$\sigma_{y'} = 2\gamma_2\beta_2\tau_{yz} + 2\gamma_2\alpha_2\tau_{xz} + 2\alpha_2\beta_2\tau_{xy} + \gamma_2^2\sigma_z + \beta_2^2\sigma_y + \alpha_2^2\sigma_x$$
$$\sigma_{z'} = 2\gamma_3\beta_3\tau_{yz} + 2\gamma_3\alpha_3\tau_{xz} + 2\alpha_3\beta_3\tau_{xy} + \gamma_3^2\sigma_z + \beta_3^2\sigma_y + \alpha_3^2\sigma_x$$
$$\tau_{y'z'} = (\gamma_2\beta_3 + \beta_2\gamma_3)\tau_{yz} + (\gamma_2\alpha_3 + \alpha_2\gamma_3)\tau_{xz} + (\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3)\tau_{xy} + \gamma_2\gamma_3\sigma_z + \beta_2\beta_3\sigma_y + \alpha_2\alpha_3\sigma_x$$
$$\tau_{x'z'} = (\gamma_1\beta_3 + \beta_1\gamma_3)\tau_{yz} + (\gamma_1\alpha_3 + \alpha_1\gamma_3)\tau_{xz} + (\alpha_1\beta_3 + \beta_1\alpha_3)\tau_{xy} + \gamma_1\gamma_3\sigma_z + \beta_1\beta_3\sigma_y + \alpha_1\alpha_3\sigma_x$$
$$\tau_{x'y'} = (\gamma_1\beta_2 + \beta_1\gamma_2)\tau_{yz} + (\gamma_1\alpha_2 + \alpha_1\gamma_2)\tau_{xz} + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)\tau_{xy} + \gamma_1\gamma_2\sigma_z + \beta_1\beta_2\sigma_y + \alpha_1\alpha_2\sigma_x.$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}\sigma_{x'}\\ \sigma_{y'}\\ \sigma_{z'}\\ \tau_{y'z'}\\ \tau_{x'z'}\\ \tau_{x'y'}\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & 2\gamma_1\beta_1 & 2\gamma_1\alpha_1 & 2\alpha_1\beta_1\\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & 2\gamma_2\beta_2 & 2\gamma_2\alpha_2 & 2\alpha_2\beta_2\\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & 2\gamma_3\beta_3 & 2\gamma_3\alpha_3 & 2\alpha_3\beta_3\\ \alpha_2\alpha_3 & \beta_2\beta_3 & \gamma_2\gamma_3 & \gamma_2\beta_3+\beta_2\gamma_3 & \gamma_2\alpha_3+\alpha_2\gamma_3 & \alpha_2\beta_3+\beta_2\alpha_3\\ \alpha_1\alpha_3 & \beta_1\beta_3 & \gamma_1\gamma_3 & \gamma_1\beta_3+\beta_1\gamma_3 & \gamma_1\alpha_3+\alpha_1\gamma_3 & \alpha_1\beta_3+\beta_1\alpha_3\\ \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & \gamma_1\beta_2+\beta_1\gamma_2 & \gamma_1\alpha_2+\alpha_1\gamma_2 & \alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{T_\sigma}} \begin{pmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{yz}\\ \tau_{xz}\\ \tau_{xy}\end{pmatrix}$$

$$\sigma_{\hat{\boldsymbol{n}}} = \hat{\boldsymbol{n}}^T \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}\,\hat{\boldsymbol{n}} = \sigma_x\alpha^2 + \sigma_y\beta^2 + \sigma_z\gamma^2 + 2\tau_{xy}\alpha\beta + 2\tau_{yz}\beta\gamma + 2\tau_{xz}\alpha\gamma, \longrightarrow$$

Esfuerzo normal a un plano cuyo vector normal es $\hat{\boldsymbol{n}}$

$$\tau_{\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{m}}} = \hat{\boldsymbol{m}}^T \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}\,\hat{\boldsymbol{n}}; \longrightarrow$$

Esfuerzo cortante en la dirección $\hat{\boldsymbol{m}}$ sobre un plano cuyo vector normal es $\hat{\boldsymbol{n}}$

2.6.2. Particularización de la matriz de tensiones al caso bidimensional

mecanica_de_solidos_un/02_06_02.ipynb at main · michaelherediaperez/mecanica_de_solidos_un (github.com)

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\sigma},\mathrm{2D}}} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_{x'}(\theta) &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \\ \sigma_{y'}(\theta) &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \\ \tau_{x'y'}(\theta) &= \tau_{xy}\cos 2\theta - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta \\ \sigma_{z'}(\theta) &= \tau_{x'z'}(\theta) = \tau_{y'z'}(\theta) = 0 \end{aligned}}$$

$\longrightarrow$ ¿ $\sigma'_y(\theta) = \sigma'_x(\theta + 90°)$?

Ejemplo

[mecanica_de_solidos_un/02_06_02_ejemplo_01.ipynb at main · michaelherediaperez/mecanica_de_solidos_un (github.com)]()

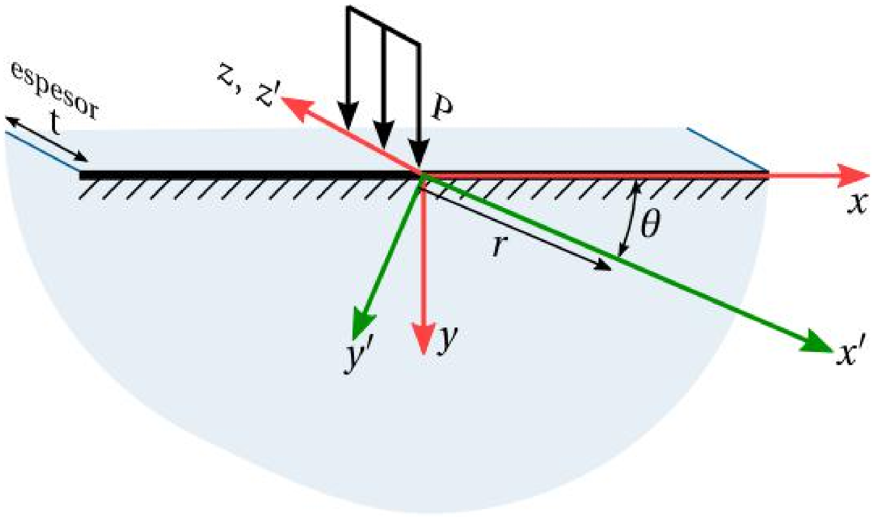


Figura 2.9: *Problema de Flamant: plano de espesor t sometido a una carga lineal. La carga P mostrada se expresa en unidades de fuerza sobre unidad de longitud, ya que es una carga longitudinal.*

2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano

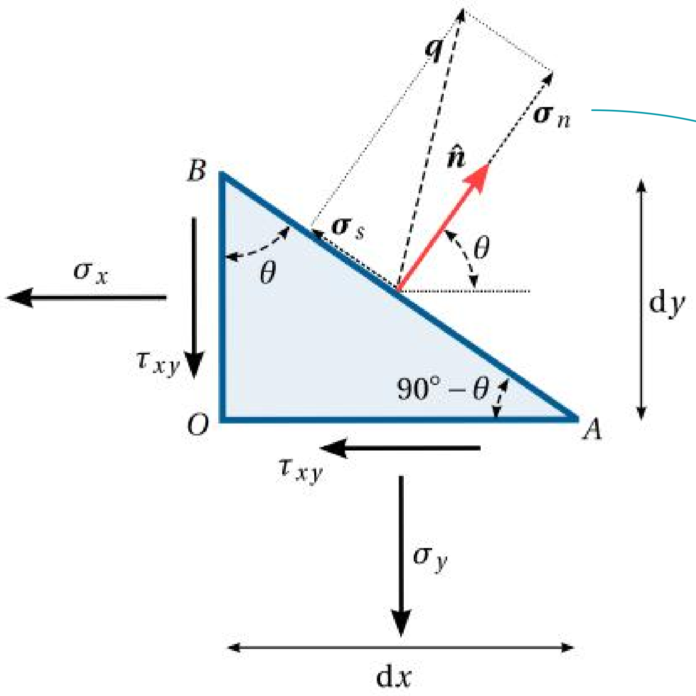


Figura 2.10: *El esfuerzo* $\boldsymbol{q}$ *se puede descomponer en dos vectores ortogonales, un esfuerzo normal* $\boldsymbol{\sigma}_n$ *que es colineal con el vector* $\hat{\boldsymbol{n}}$ *y un esfuerzo cortante* $\boldsymbol{\sigma}_s$ *que yace en el plano* $\overline{AB}$; *de este modo,* $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\sigma}_s$. *Por simplicidad en la representación gráfica, aquí se dibuja el caso bidimensional. Observe que la inclinación del plano está descrita por su vector normal* $\hat{\boldsymbol{n}}$, *el cual tiene una inclinación* θ *con respecto al eje* x.

El vector del esfuerzo normal $\boldsymbol{\sigma_n}$ es la proyección del vector de esfuerzos $\boldsymbol{q}$ sobre el vector normal al plano $\widehat{\boldsymbol{n}}$.

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \text{Proy}\, \boldsymbol{q} / \hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{q}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{\|\hat{\boldsymbol{n}}\|^2}\hat{\boldsymbol{n}}$$

[mecanica_de_solidos_un/02_07.ipynb at main · michaelherediaperez/mecanica_de_solidos_un (github.com)]

2.8. Esfuerzos y direcciones principales

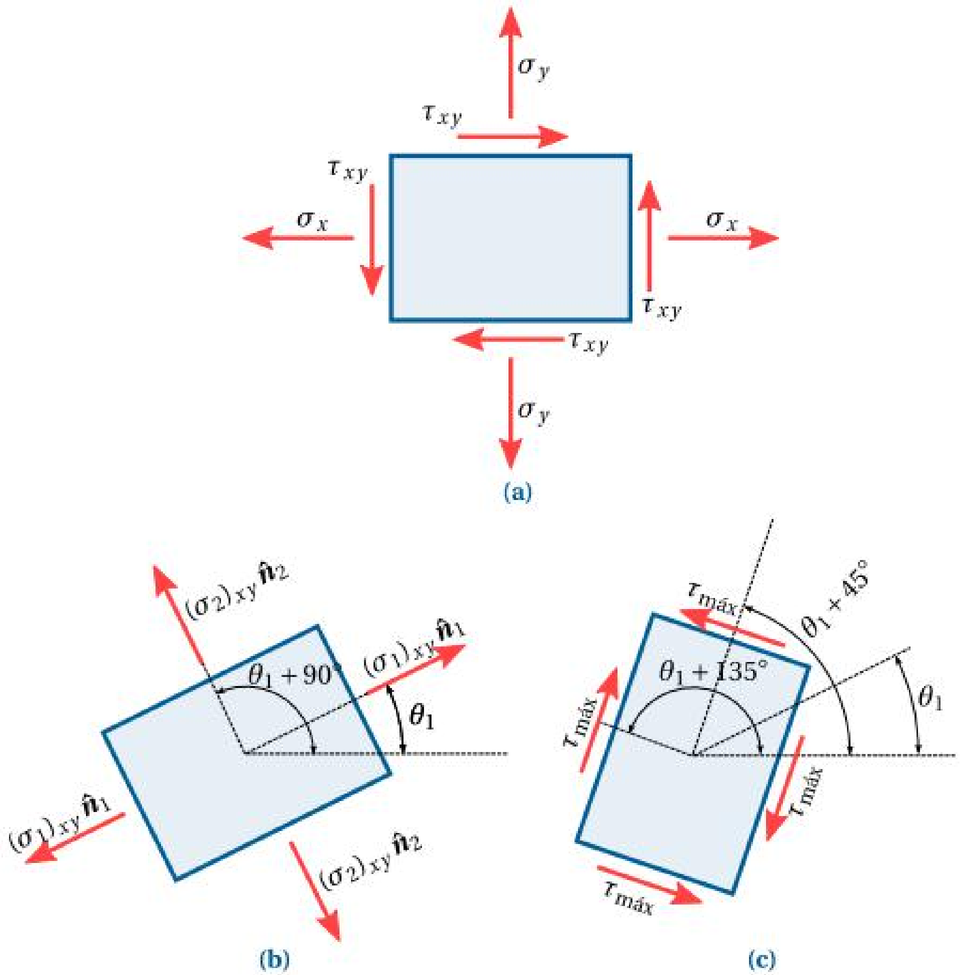
2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones.

2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones.

2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica.

2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales.

2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones



$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}$$

$$(\sigma_1)_{xy} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2}$$

$$(\sigma_2)_{xy} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2};$$

Figura 2.11: *El sistema de esfuerzos aplicados en el sólido mostrado en la figura (a) es equivalente al sistema de esfuerzos aplicados en (b); en otras palabras, los esfuerzos σ_x, σ_y y τ_{xy} se pueden reemplazar por $(\sigma_1)_{xy}$ y $(\sigma_2)_{xy}$, actuando en las direcciones $\hat{\boldsymbol{n}}_1$ y $\hat{\boldsymbol{n}}_2$, respectivamente, y eliminando, de este modo, la acción del esfuerzo cortante aplicado sobre las caras del sólido. El gráfico (c) muestra la inclinación para la cual se producen los esfuerzos cortantes máximos, lo cual se explicará en la Sección 2.9.1.*

Ejemplo

[mecanica_de_solidos_un/02_08_01_ejemplo_01.ipynb at main · michaelherediaperez/mecanica_de_solidos_un (github.com)]

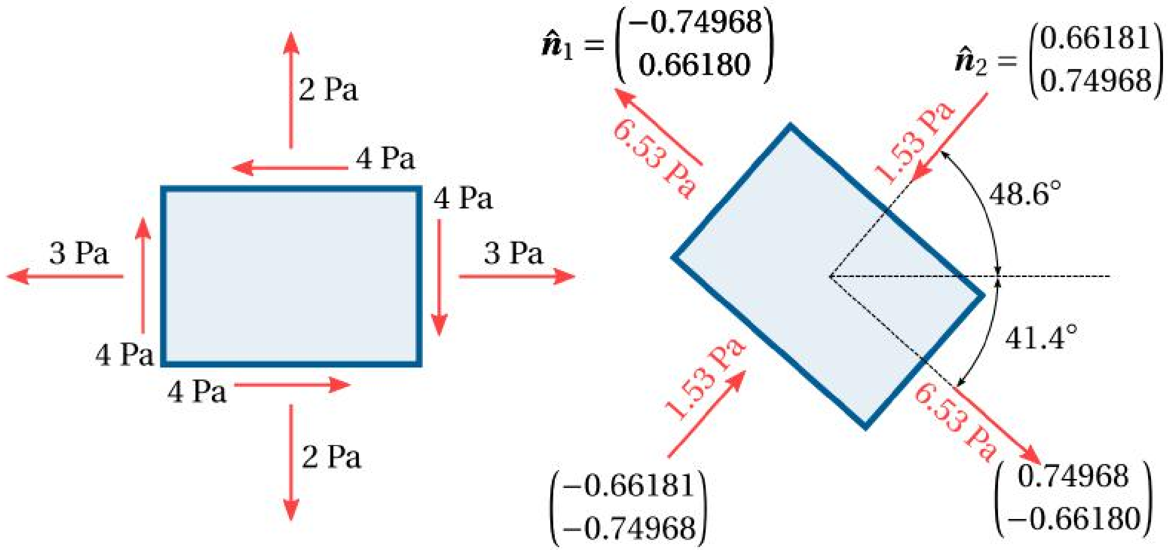


Figura 2.12: *Sólido mostrado en el ejemplo de la página 42; los esfuerzos principales correspondientes a $\sigma_x = 3$ Pa, $\sigma_y = 2$ Pa, y $\tau_{xy} = -4$ Pa son $(\sigma_1)_{xy} = 6.53$ Pa y $(\sigma_2)_{xy} = -1.53$ Pa, los cuales están aplicados en las direcciones $\hat{\boldsymbol{n}}_1 = [-0.74968, 0.66180]^T$ y $\hat{\boldsymbol{n}}_2 = [0.66181, 0.74968]^T$. Los ángulos 41.4° y 48.6° se calculan, respectivamente, como los arcocosenos de 0.74968 y 0.66181.*

2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones

[mecanica_de_solidos_un/02_08_02.ipynb at main · michaelherediaperez/mecanica_de_solidos_un (github.com)]

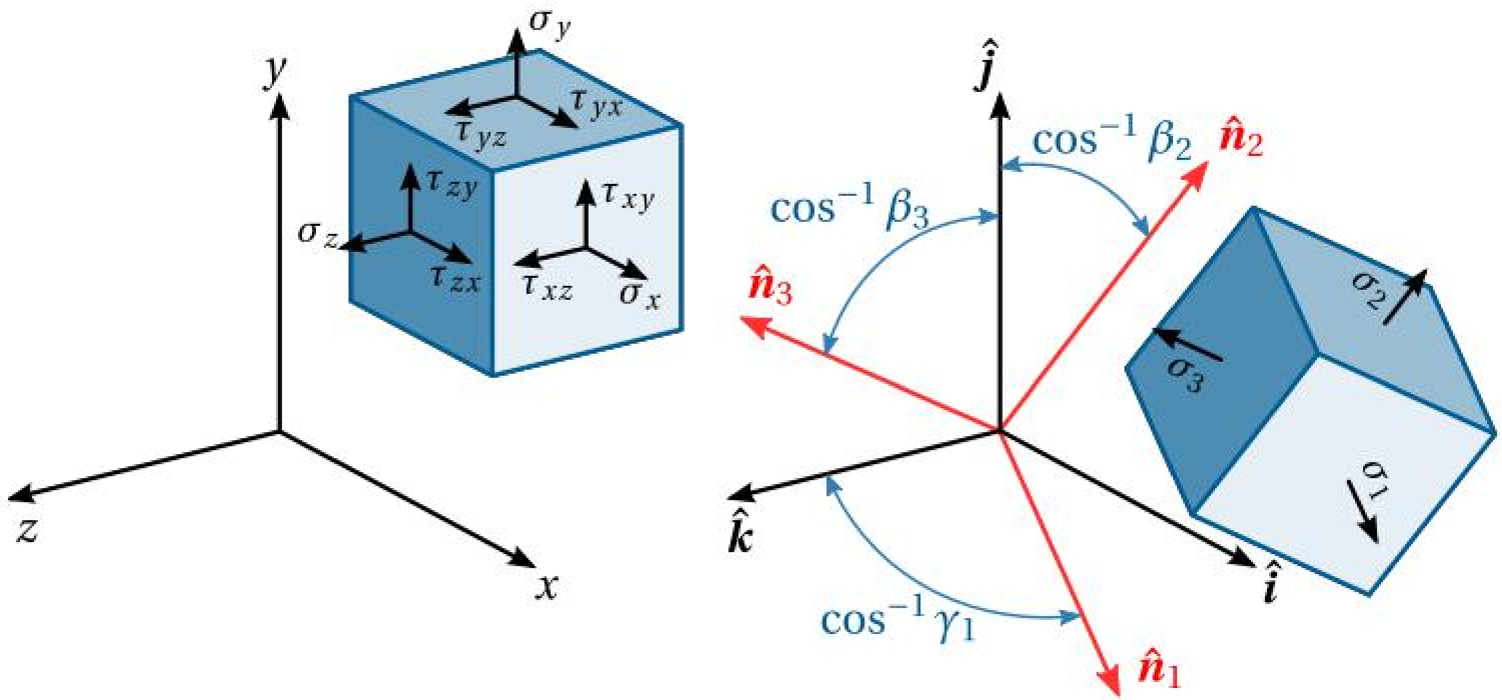


Figura 2.13: *Ubicación espacial de los esfuerzos y direcciones principales en tres dimensiones.*

Ejemplo

[mecanica_de_solidos_un/02_08_02_ejemplos_vf.ipynb at main · michaelherediaperez/mecanica_de_solidos_un (github.com)]

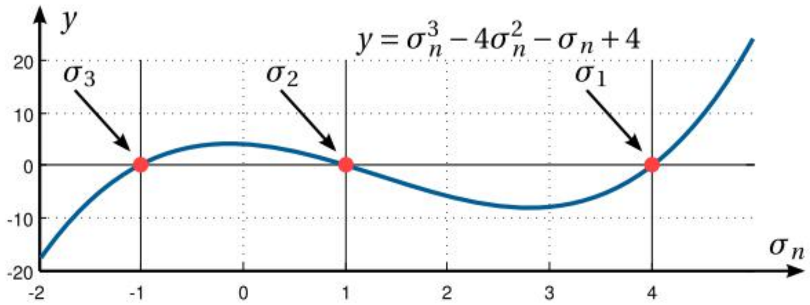


Figura 2.14: *Polinomio característico (2.51); La intersección del polinomio con el eje de las abscisas son sus raíces:* $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = 1$ *y* $\sigma_3 = -1$.

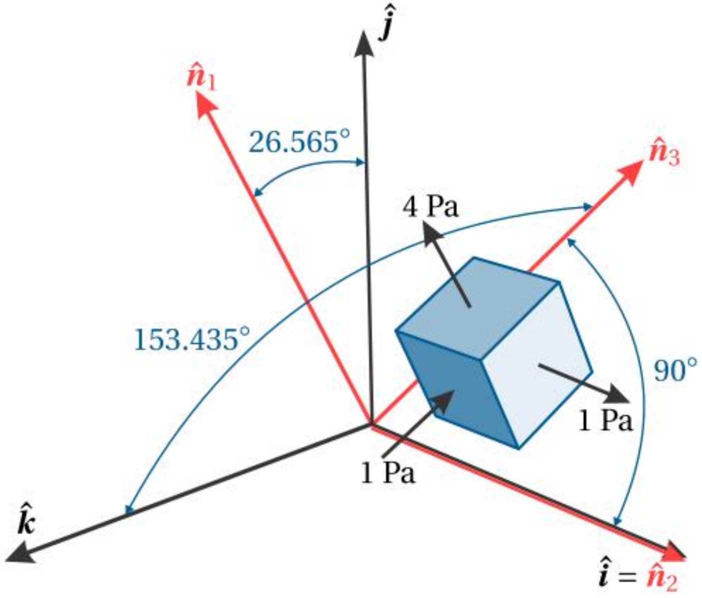


Figura 2.15: *Direcciones principales del ejemplo analizado en la página 49. Observe que en este caso, el vector* $\hat{\boldsymbol{n}}_2$ *y el vector* $\hat{\boldsymbol{i}}$ *coinciden.*

2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica

(Esta sección será de estudio autónomo)

Sería interesante:

- ¿Cómo lo programo en Python o Matlab?

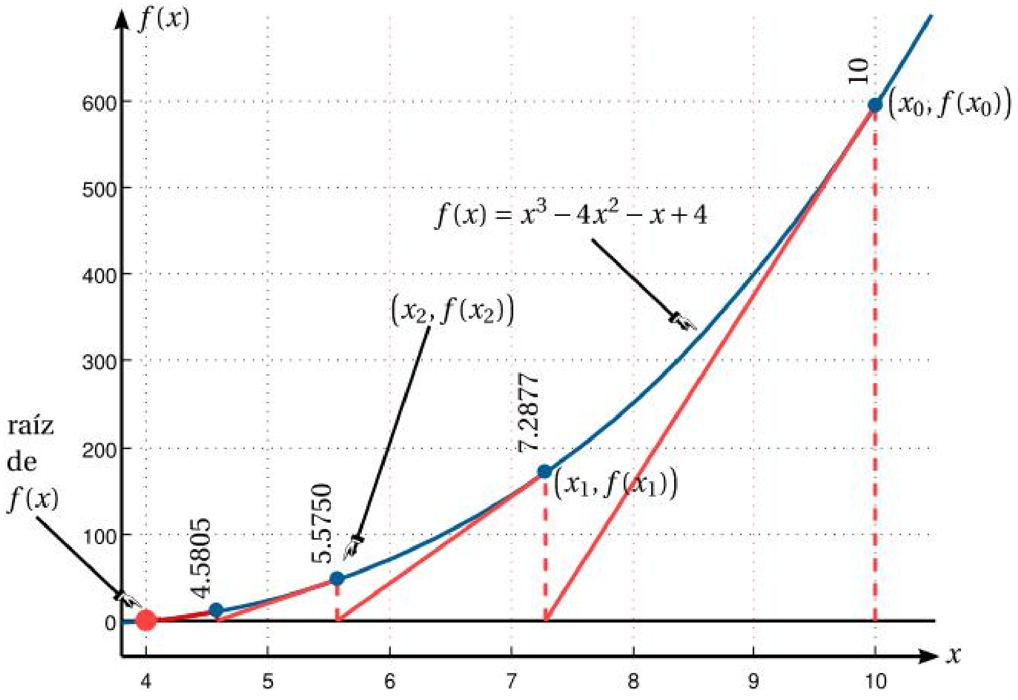


Figura 2.16: *Explicación gráfica del método de Newton-Raphson en la determinación de la raíz $x = 4$ del polinomio $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$. A partir del punto $x = 10$, se traza una recta con la misma pendiente que la función $f(x)$ evaluada en el punto 10 y que pasa por el punto $(10, f(10))$. La recta cruza el eje de las abscisas en $x = 7.2877$. Dicho procedimiento se repite iterativamente, llegando a los puntos 5.5750, 4.5805, 4.1220, 4.0072, hasta alcanzar rápidamente la raíz $x = 4.0$.*

2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales

(verificar la ortogonalidad de los vectores propios del ejercicio anterior)

[mecanica_de_solidos_un/02_08_04_ejemplo_vvf.ipynb at main · michaelherediaperez/mecanica_de_solidos_un (github.com)]

2.9. Círculo de Mohr en problemas bi- y tridimensionales

(Esta sección será de estudio autónomo)

Es de gran importancia, para el caso bidimensional y tridimensional, entender tanto el significado matemático como físico, la manera en que se grafica y se construyen las curvas paramétricas, y la aplicación de la función **atan2**.

Estudiar también los videos de YouTube (ver referencias al final).

2.10. La analogía del bombillo y la caja

(Esta sección será de estudio autónomo)

Prestar atención a:

- La analogía del bombillo y la caja :)

Referencias

- Álvarez Diego A. (2022) - *Notas de clase del curso mecánica de sólidos*. En preparación. (main.pdf)
- Algunas de las secciones de este capítulo están explicadas en los videos de YouTube que aparecen en la siguiente lista de reproducción: https://youtube.com/playlist?list=PLOq9elBrzPDGKY48xSireXTCQXtd-ThZ9