

## 02. Estudio de los esfuerzos en un punto

secciones 2.1 a 2.4

Michael Heredia Pérez

[mherediap@unal.edu.co](mailto:mherediap@unal.edu.co)

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales  
Departamento de Ingeniería Civil  
Mecánica Tensorial

2023a



## Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada ([Álvarez, 2022](#)).



# Derrotero

- ➊ 2.1. Tensiones o esfuerzos
- ➋ 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
  - 2.2.1. Análisis de un elemento infinitesimal rectangular
  - 2.2.2. Análisis de un elemento infinitesimal triangular
- ➌ 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional

Un pequeño comentario sobre el sistema coordinado en tres dimensiones

  - 2.3.1. Análisis de un paralelepípedo infinitesimal
  - 2.3.2. Análisis de un tetraedro infinitesimal
- ➍ 2.4. Notación indicial
- ➎ Referencias

# Derrotero

- ➊ 2.1. Tensiones o esfuerzos
- ➋ 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
  - 2.2.1. Análisis de un elemento infinitesimal rectangular
  - 2.2.2. Análisis de un elemento infinitesimal triangular
- ➌ 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional

Un pequeño comentario sobre el sistema coordinado en tres dimensiones

  - 2.3.1. Análisis de un paralelepípedo infinitesimal
  - 2.3.2. Análisis de un tetraedro infinitesimal
- ➍ 2.4. Notación indicial
- ➎ Referencias

# Tensiones o esfuerzos

- Intensidad de una fuerza por unidad de área en el contorno de un punto material sobre una superficie real o imaginaria de un medio continuo.
- Las fuerzas internas son una reacción a las fuerzas externas aplicadas.

*Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)*

# Tensiones o esfuerzos

- Intensidad de una fuerza por unidad de área en el contorno de un punto material sobre una superficie real o imaginaria de un medio continuo.
- Las fuerzas internas son una reacción a las fuerzas externas aplicadas.

*Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)*

# Tensiones o esfuerzos

- Intensidad de una fuerza por unidad de área en el contorno de un punto material sobre una superficie real o imaginaria de un medio continuo.
- Las fuerzas internas son una reacción a las fuerzas externas aplicadas.

*Augustin-Lois Cauchy (1789-1857)*

# Tensiones o esfuerzos

- El sólido deformado es continuo.
- Hay una distribución de esfuerzos representada como una función continua por partes.

Dominio en  $(x, y, z)$

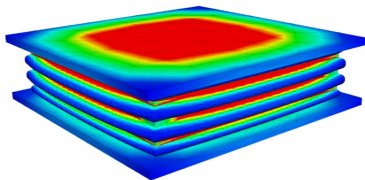


Figura: Modelo estático de neopreno zunchado. [ver post](#).

Dominio en  $(x, y, z, t)$

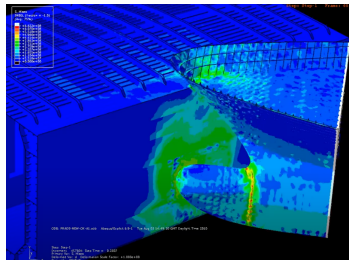
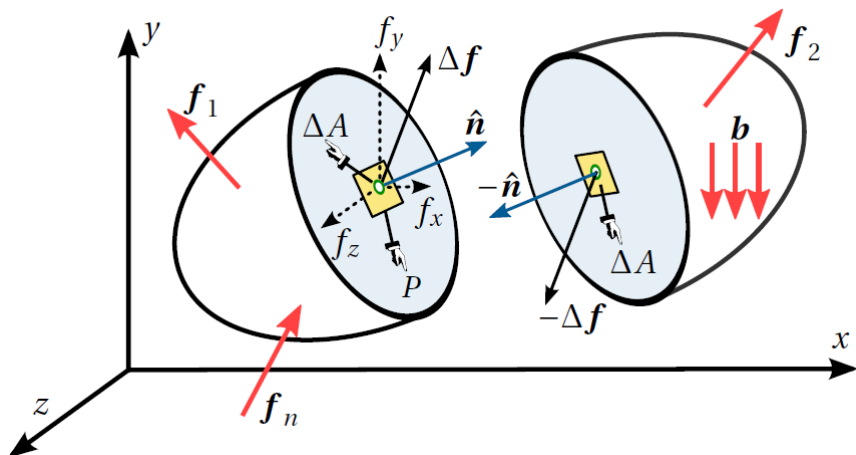


Figura: Software-Ship collision. [ver video](#).



# Tensiones o esfuerzos



# Descomposición del esfuerzo

El esfuerzo:

$$\mathbf{q}(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta A}$$

aquí  $\Delta A$  tiene normal  $\hat{n}$ . Se divide en:

- **Vector de esfuerzo normal**

Fuerzas de compresión y tracción

$$\sigma_n(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}_n}{\Delta A}$$

- **Vector de esfuerzo tangencial**

Fuerzas de cortante

$$\sigma_s(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}_s}{\Delta A}$$

$$\mathbf{q}(x, y, z) = \sigma_n(x, y, z) + \sigma_s(x, y, z)$$

# Derrotero

- 1 2.1. Tensiones o esfuerzos
- 2 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
  - 2.2.1. Análisis de un elemento infinitesimal rectangular
  - 2.2.2. Análisis de un elemento infinitesimal triangular
- 3 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional

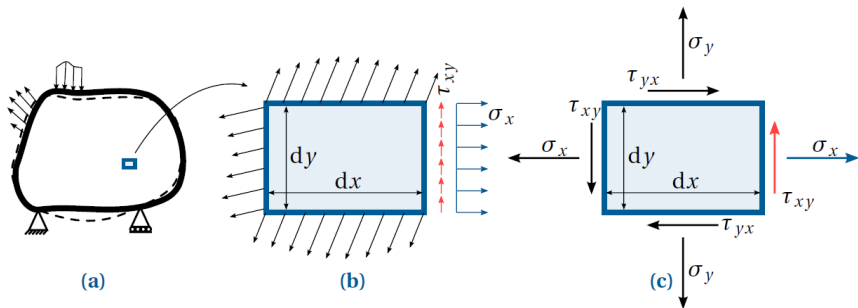
Un pequeño comentario sobre el sistema coordinado en tres dimensiones

  - 2.3.1. Análisis de un paralelepípedo infinitesimal
  - 2.3.2. Análisis de un tetraedro infinitesimal
- 4 2.4. Notación indicial
- 5 Referencias

# Derrotero

- ➊ 2.1. Tensiones o esfuerzos
- ➋ 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
  - 2.2.1. Análisis de un elemento infinitesimal rectangular
  - 2.2.2. Análisis de un elemento infinitesimal triangular
- ➌ 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional
  - Un pequeño comentario sobre el sistema coordinado en tres dimensiones
  - 2.3.1. Análisis de un paralelepípedo infinitesimal
  - 2.3.2. Análisis de un tetraedro infinitesimal
- ➍ 2.4. Notación indicial
- ➎ Referencias

# Análisis de un elemento infinitesimal rectangular

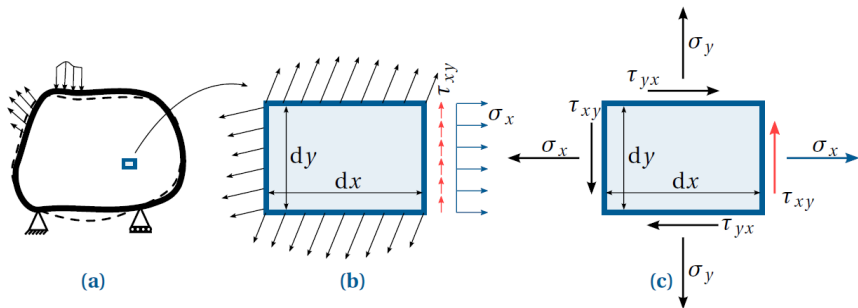


Un esfuerzo cortante  $\tau_{ij}$  que actúa sobre una superficie ortogonal al eje  $i$  y tiene la misma dirección que el eje  $j$ .

Condición de equilibrio estático

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

# Análisis de un elemento infinitesimal rectangular



Un esfuerzo cortante  $\tau_{ij}$  que actúa sobre una superficie ortogonal al eje  $i$  y tiene la misma dirección que el eje  $j$ .

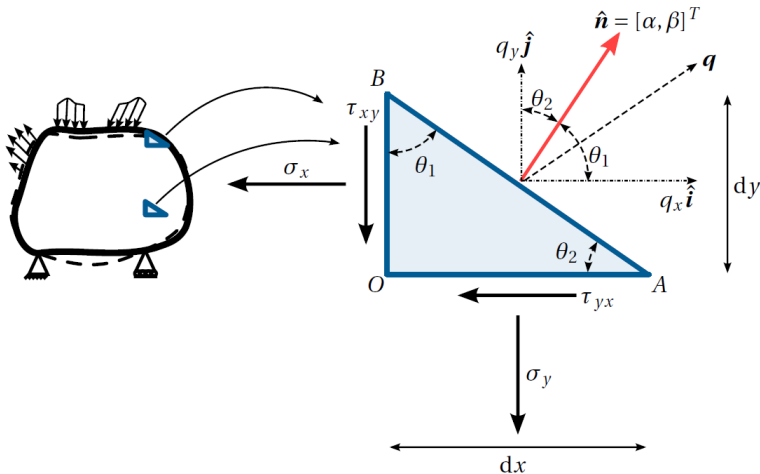
## Condición de equilibrio estático

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

# Derrotero

- ➊ 2.1. Tensiones o esfuerzos
- ➋ 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
  - 2.2.1. Análisis de un elemento infinitesimal rectangular
  - 2.2.2. Análisis de un elemento infinitesimal triangular
- ➌ 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional
  - Un pequeño comentario sobre el sistema coordinado en tres dimensiones
  - 2.3.1. Análisis de un paralelepípedo infinitesimal
  - 2.3.2. Análisis de un tetraedro infinitesimal
- ➍ 2.4. Notación indicial
- ➎ Referencias

# Análisis de un elemento infinitesimal triangular





# Análisis de un elemento infinitesimal triangular

## Fórmula de Cauchy bidimensional

$$\underbrace{\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}}_{\mathbf{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{n}}}$$

- $\mathbf{q}$ : vector de esfuerzos
- $\underline{\underline{\sigma}}$ : *Matriz de tensiones de Cauchy (bidimensional)*
- $\hat{\mathbf{n}}$ : Vector normal unitario a la superficie  $\overline{AB}$

Estos arreglos son función del punto  $P(x, y, z)$ .

# Derrotero

- 1 2.1. Tensiones o esfuerzos
- 2 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
  - 2.2.1. Análisis de un elemento infinitesimal rectangular
  - 2.2.2. Análisis de un elemento infinitesimal triangular
- 3 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional

Un pequeño comentario sobre el sistema coordinado en tres dimensiones

  - 2.3.1. Análisis de un paralelepípedo infinitesimal
  - 2.3.2. Análisis de un tetraedro infinitesimal
- 4 2.4. Notación indicial
- 5 Referencias

# Derrotero

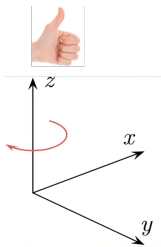
- ➊ 2.1. Tensiones o esfuerzos
- ➋ 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
  - 2.2.1. Análisis de un elemento infinitesimal rectangular
  - 2.2.2. Análisis de un elemento infinitesimal triangular
- ➌ 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional

Un pequeño comentario sobre el sistema coordinado en tres dimensiones

  - 2.3.1. Análisis de un paralelepípedo infinitesimal
  - 2.3.2. Análisis de un tetraedro infinitesimal
- ➍ 2.4. Notación indicial
- ➎ Referencias

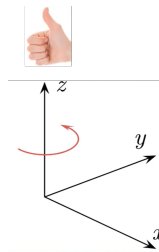
# Un pequeño comentario sobre el sistema coordenado en tres dimensiones

Sistema coordenado de la mano **izquierda**



Usado usualmente en geotécnica y pavimentos

Sistema coordenado de la mano **derecha**

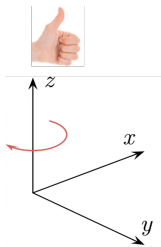


Usado usualmente en estructuras e hidráulica

La consecuencia de usar un sistema de coordenadas u otro es que las fórmulas que se deducen con diferente sistema de coordenadas pueden diferir en los signos de las fórmulas.

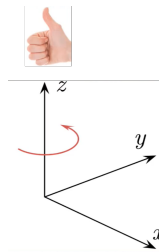
# Un pequeño comentario sobre el sistema coordenado en tres dimensiones

Sistema coordenado de la mano **izquierda**



Usado usualmente en geotécnica y pavimentos

Sistema coordenado de la mano **derecha**

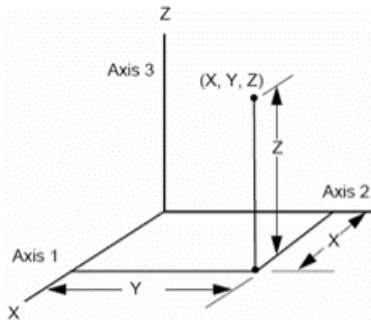


Usado usualmente en estructuras e hidráulica

La consecuencia de usar un sistema de coordenadas u otro es que las fórmulas que se deducen con diferente sistema de coordenadas pueden diferir en los signos de las fórmulas.

# ¿... dónde veo esto?

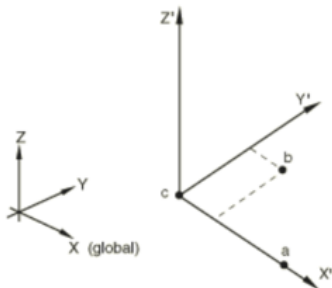
## Manual de MIDAS GTS




MIDAS GTS traduce Sistema de Análisis Geotécnico... y trabaja el sistema coordenado de la mano derecha!

# ¿... dónde veo esto?

## Manual de ABAQUS



## Manual de FEM DESIGN

|              | Global co-ordinate system  |
|--------------|--|
| Function     | Definition of co-ordinates<br>Definition of directions<br>Interpretation of results<br>- |
| Type         | Right-handed Cartesian   |
| Axes         | X, Y, Z  |
| Symbol       |        |
| Symbol color | Fixed 3 colors,<br>X = green<br>Y = red<br>Z = blue                                      |

ABAQUS y FEM DESIGN son softwares enfocados en el área estructural y mecánico, y también trabajan en el sistema coordenado de la mano derecha

## ¿... dónde veo esto?

- NO es información trivial, de ser así no se molestarían en ponerlo en los manuales de usuario del programa.

### Otro ejemplo

La fuerza cortante en función de la carga distribuida en vigas... ¿cómo se define?

$$\frac{dV}{dx} = w \text{ o } \frac{dV}{dx} = -w$$



## ¿... dónde veo esto?

- NO es información trivial, de ser así no se molestarían en ponerlo en los manuales de usuario del programa.

### Otro ejemplo

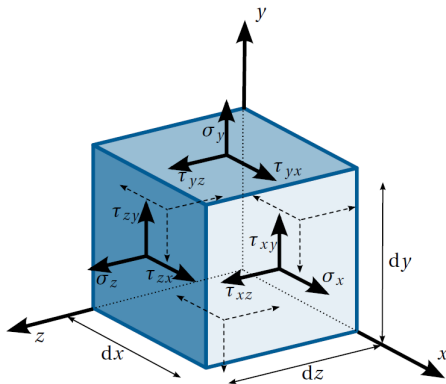
La fuerza cortante en función de la carga distribuida en vigas... ¿cómo se define?

$$\frac{dV}{dx} = w \text{ o } \frac{dV}{dx} = -w$$

# Derrotero

- ➊ 2.1. Tensiones o esfuerzos
- ➋ 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
  - 2.2.1. Análisis de un elemento infinitesimal rectangular
  - 2.2.2. Análisis de un elemento infinitesimal triangular
- ➌ 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional
  - Un pequeño comentario sobre el sistema coordinado en tres dimensiones
  - 2.3.1. Análisis de un paralelepípedo infinitesimal
  - 2.3.2. Análisis de un tetraedro infinitesimal
- ➍ 2.4. Notación indicial
- ➎ Referencias

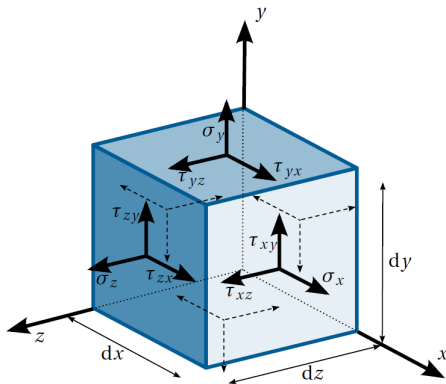
# Análisis de un paralelepípedo infinitesimal



Condición de equilibrio estático

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

# Análisis de un paralelepípedo infinitesimal



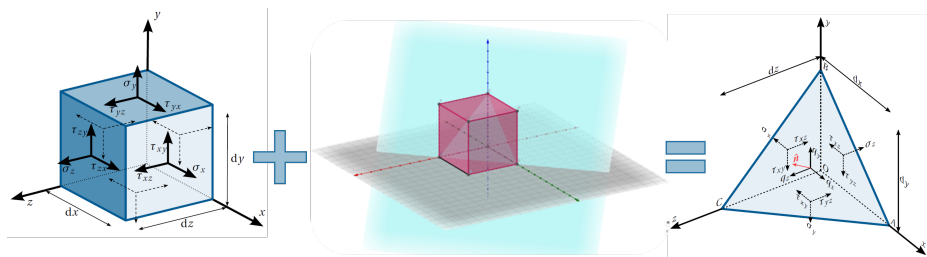
## Condición de equilibrio estático

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

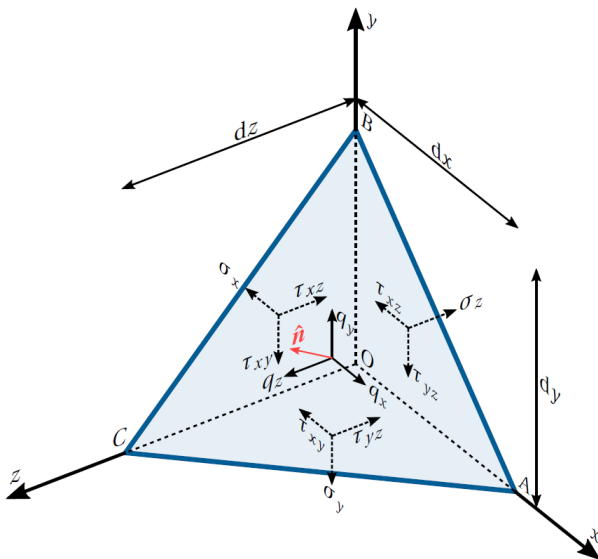
# Derrotero

- ➊ 2.1. Tensiones o esfuerzos
- ➋ 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
  - 2.2.1. Análisis de un elemento infinitesimal rectangular
  - 2.2.2. Análisis de un elemento infinitesimal triangular
- ➌ 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional
  - Un pequeño comentario sobre el sistema coordinado en tres dimensiones
  - 2.3.1. Análisis de un paralelepípedo infinitesimal
  - 2.3.2. Análisis de un tetraedro infinitesimal
- ➍ 2.4. Notación indicial
- ➎ Referencias

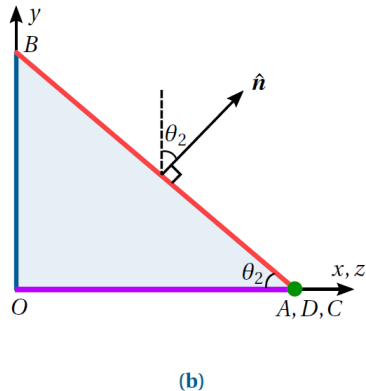
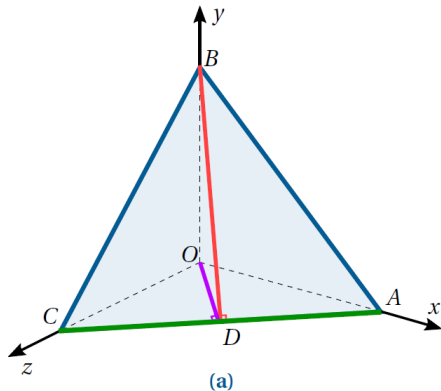
# Análisis de un tetraedro infinitesimal



# Análisis de un tetraedro infinitesimal



# Análisis de un tetraedro infinitesimal





# Análisis de un tetraedro infinitesimal

## Fórmula de Cauchy tridimensional

$$\underbrace{\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}}_{\underline{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}_{\hat{n}}$$

- $\underline{q}$ : vector de esfuerzos
- $\underline{\underline{\sigma}}$ : *Matriz (simétrica) de tensiones de Cauchy (tridimensional) o tensor de esfuerzos*
- $\hat{n}$ : Vector normal unitario a la superficie del plano  $\overline{ABC}$

Estos arreglos son función del punto  $P(x, y, z)$ .

# Dato curioso

## Fórmula de Cauchy tridimensional

$$\underbrace{\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}}_{\underline{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}_{\hat{n}}$$

Observe que la matriz  $\underline{\underline{\sigma}}(x, y, z)$  es en este caso simétrica. No obstante, es importante anotar que **Fung and Tong, 2017** (2017, página 64) dicen que, según el matemático y científico escocés James Clerk Maxwell (1831 - 1879), **esta matriz no es simétrica en el caso de un imán en un campo magnético y en el caso de un material dieléctrico en un campo eléctrico con diferentes planos de polarización**, ya que en ambas situaciones, cuando se tienen esfuerzos cortantes muy pequeños y campos electromagnéticos muy intensos, aparecen sobre el cuerpo del sólido “momentos máscicos” que evitan que la matriz  $\underline{\underline{\sigma}}(x, y, z)$  sea simétrica.

# Derrotero

- ➊ 2.1. Tensiones o esfuerzos
- ➋ 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
  - 2.2.1. Análisis de un elemento infinitesimal rectangular
  - 2.2.2. Análisis de un elemento infinitesimal triangular
- ➌ 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional

Un pequeño comentario sobre el sistema coordinado en tres dimensiones

  - 2.3.1. Análisis de un paralelepípedo infinitesimal
  - 2.3.2. Análisis de un tetraedro infinitesimal
- ➍ 2.4. Notación indicial
- ➎ Referencias

# Notación indicial

## Tema aplazado

Este tema se verá junto con la introducción al cálculo tensorial

# Delta de Kronecker

La función **Kronecker delta** o **delta de Kronecker** (*no confundir con la función impulso unitario o delta de Dirac*).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

## Otro ejemplo

La condición de ortogonalidad de dos vectores a partir del producto escalar

$$\langle a_i, a_j \rangle = a_i \cdot a_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

# Delta de Kronecker

La función **Kronecker delta** o **delta de Kronecker** (*no confundir con la función impulso unitario o delta de Dirac*).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

## Otro ejemplo

La condición de ortogonalidad de dos vectores a partir del producto escalar

$$\langle a_i, a_j \rangle = a_i \cdot a_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

# Derrotero

- 1 2.1. Tensiones o esfuerzos
- 2 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
  - 2.2.1. Análisis de un elemento infinitesimal rectangular
  - 2.2.2. Análisis de un elemento infinitesimal triangular
- 3 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional

Un pequeño comentario sobre el sistema coordinado en tres dimensiones

  - 2.3.1. Análisis de un paralelepípedo infinitesimal
  - 2.3.2. Análisis de un tetraedro infinitesimal
- 4 2.4. Notación indicial
- 5 Referencias

# Referencias

Fung, Y.-c. and Tong, P. (2017). *Classical and computational solid mechanics*, volume 2. World scientific.

Álvarez, D. A. (2022). *Teoría de la elasticidad*, volume 1. Universidad Nacional de Colombia.



# Links

02 - Esfuerzos o tensiones - YouTube

diego andrés álvarez marín

¿Qué es un esfuerzo o tensión?

02 - Esfuerzos o tensiones

diegoandresalvarez

11 videos · 3870 visualizaciones · Actualizado por...

Reproducir... Aleatorio

En el curso de resistencia de materiales se estudió cómo se podían calcular los esfuerzos en vigas y columnas sometidas a tracción, compresión, flexión o torsión. En mecánica de sólidos se estudian los esfuerzos y las deformaciones unitarios en objetos de geometría más complicada. En esta lista de reproducción se hará una revisión de los conceptos vistos en el curso de resistencia de materiales con respecto a esfuerzos, esfuerzos principales, círculo de Mohr, entre otros temas de interés, pero tratados desde un

- 1 ¿Qué es un esfuerzo o tensión? 0:45
- 2 Esfuerzos en un elemento rectangular infinitesimal de espesor t 1:29
- 3 Esfuerzos en un elemento triangular infinitesimal de espesor t 1:49
- 4 Esfuerzos en un paralelepípedo infinitesimal 2:04
- 5 Esfuerzos en un elemento tetraédrico infinitesimal 1:39
- 6 Deducción del círculo de Mohr en 2D 16:34
- 7 Deducción del círculo de Mohr en 2D 21:26

02.01 - Qué es la tensión o el esfuerzo?  
diegoandresalvarez · 1510 visualizaciones · hace 2 años

02.02.01 - Análisis de los esfuerzos en un elemento rectangular infinitesimal de espesor t  
diegoandresalvarez · 1290 visualizaciones · hace 2 años

02.02.02 - Análisis de los esfuerzos en un elemento triangular infinitesimal de espesor t  
diegoandresalvarez · 1210 visualizaciones · hace 2 años

02.03.01 - Esfuerzos en un paralelepípedo infinitesimal  
diegoandresalvarez · 1172 visualizaciones · hace 2 años

02.03.02 - Análisis de un elemento tetraédrico infinitesimal  
diegoandresalvarez · 1444 visualizaciones · hace 2 años

02.09 - Círculo de Mohr en 2D (Parte 1/3) - Deducción del círculo de Mohr para tensión plana  
diegoandresalvarez · 3165 visualizaciones · hace 2 años

02.09 - Círculo de Mohr en 2D (Parte 2/3) - Esfuerzos normales y cortantes máximos y mínimos  
diegoandresalvarez · 2343 visualizaciones · hace 2 años

- Lista de reproducción: 02 - Esfuerzos o Tensiones
- Repositorio del curso: [github/medio\\_continuo](https://github.com/medio_continuo)