05. Ecuaciones diferenciales fundamentales de la teoría de la elasticidad

parte c: secciones 5.8 a 5.13

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil
Mecánica de Sólidos

2022b

Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada [Álvarez, 2022].

Derrotero

Derrotero

5.8. Función de tensión de Airy

Uso

Se utiliza en mecánica de sólidos para deducir analíticamente muchas condiciones de esfuerzo presentes en sólidos con ciertas geometrías *bidimensionales*. No existen las funciones de tensión de Airy para el caso tridimensional

Método

Se asume una función de tensión ϕ que depende de unos coeficientes desconocidos y que satisfagan un operador llamado *el biarmónico*; luego, se estima el campo vectorial de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos y a partir de las condiciones de frontera, se estima el valor de los coeficientes desconocidos.

5.8. Función de tensión de Airy

Uso

Se utiliza en mecánica de sólidos para deducir analíticamente muchas condiciones de esfuerzo presentes en sólidos con ciertas geometrías *bidimensionales*. No existen las funciones de tensión de Airy para el caso tridimensional

Método

Se asume una función de tensión ϕ que depende de unos coeficientes desconocidos y que satisfagan un operador llamado *el biarmónico*; luego, se estima el campo vectorial de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos y a partir de las condiciones de frontera, se estima el valor de los coeficientes desconocidos.

5.8. Función de tensión de Airy

Uso

Se utiliza en mecánica de sólidos para deducir analíticamente muchas condiciones de esfuerzo presentes en sólidos con ciertas geometrías *bidimensionales*. No existen las funciones de tensión de Airy para el caso tridimensional

Método

Se asume una función de tensión ϕ que depende de unos coeficientes desconocidos y que satisfagan un operador llamado *el biarmónico*; luego, se estima el campo vectorial de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos y a partir de las condiciones de frontera, se estima el valor de los coeficientes desconocidos.

5.8. Función de tensión de Airy

Uso

Se utiliza en mecánica de sólidos para deducir analíticamente muchas condiciones de esfuerzo presentes en sólidos con ciertas geometrías *bidimensionales*. No existen las funciones de tensión de Airy para el caso tridimensional

Método

Se asume una función de tensión ϕ que depende de unos coeficientes desconocidos y que satisfagan un operador llamado *el biarmónico*; luego, se estima el campo vectorial de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos y a partir de las condiciones de frontera, se estima el valor de los coeficientes desconocidos.

5.8. Función de tensión de Airy

Sea $V(x, y)$ una función tal que:

$$X(x, y) = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial x}$$
$$Y(x, y) = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial y}$$

y hágase

$$\sigma_x(x, y) = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} + V(x, y)$$
$$\sigma_y(x, y) = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} + V(x, y)$$
$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x \partial y}$$

5.8. Función de tensión de Airy

$$X(x,y) = -\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}$$
$$Y(x,y) = -\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}$$

$$\sigma_x(x,y) = \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial y^2} + V(x,y)$$
$$\sigma_y(x,y) = \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x^2} + V(x,y)$$
$$\tau_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x \partial y}$$

- $\boldsymbol{b} = -\nabla V$ donde $\boldsymbol{b} = [X, Y]^T$
- V pertenece a un tipo especial de funciones conocidas como **funciones potenciales escalares**.
- ϕ se conoce como **la función de tensión de Airy** (*Airy stress function*).

- George Bidell Airy (1801-1892) en 1862, matemático y astrónomo inglés.

5.8. Función de tensión de Airy

$$X(x,y) = -\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}$$

$$Y(x,y) = -\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}$$

$$\sigma_x(x,y) = \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial y^2} + V(x,y)$$

$$\sigma_y(x,y) = \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x^2} + V(x,y)$$

$$\tau_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x \partial y}$$

- $\boldsymbol{b} = -\nabla V$ donde $\boldsymbol{b} = [X, Y]^T$
- V pertenece a un tipo especial de funciones conocidas como **funciones potenciales escalares**.
- ϕ se conoce como **la función de tensión de Airy** (*Airy stress function*).

- George Bidell Airy (1801-1892) en 1862, matemático y astrónomo inglés.

5.8. Función de tensión de Airy

Recordemos:

- Las ecuaciones diferenciales de equilibrio (5.1)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

- La ecuación de compatibilidad general (5.13)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Tarea

Si reemplazamos las ecuaciones (5.36) y (5.37) en las ecuaciones diferenciales de equilibrio (5.1), veremos que la función de tensión de Airy satisface dichas ecuaciones (es decir, obtendremos $0 = 0$).

5.8. Función de tensión de Airy

Recordemos:

- Las ecuaciones diferenciales de equilibrio (5.1)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

- La ecuación de compatibilidad general (5.13)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Tarea

Si reemplazamos las ecuaciones (5.36) y (5.37) en las ecuaciones diferenciales de equilibrio (5.1), veremos que la función de tensión de Airy satisface dichas ecuaciones (es decir, obtendremos $0 = 0$).

Recordemos:

- Las ecuaciones diferenciales de equilibrio (5.1)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

- La ecuación de compatibilidad general (5.13)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Tarea

Si reemplazamos las ecuaciones (5.36) y (5.37) en las ecuaciones diferenciales de equilibrio (5.1), veremos que la función de tensión de Airy satisface dichas ecuaciones (es decir, obtendremos $0 = 0$).

5.8. Función de tensión de Airy

Recordemos:

- Las ecuaciones diferenciales de equilibrio (5.1)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

- La ecuación de compatibilidad general (5.13)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

Tarea

Si reemplazamos las ecuaciones (5.36) y (5.37) en las ecuaciones diferenciales de equilibrio (5.1), veremos que la función de tensión de Airy satisface dichas ecuaciones (es decir, obtendremos $0 = 0$).

5.8. Función de tensión de Airy

Calculamos derivadas:

- Para $\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + V$:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

- Para $\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V$:

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

- Para las fuerzas másicas $X = -\frac{\partial V}{\partial x}$ y $Y = -\frac{\partial V}{\partial y}$:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

5.8. Función de tensión de Airy

Calculamos derivadas:

- Para $\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + V$:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

- Para $\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V$:

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

- Para las fuerzas másicas $X = -\frac{\partial V}{\partial x}$ y $Y = -\frac{\partial V}{\partial y}$:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

Calculamos derivadas:

- Para $\sigma_x = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + V$:

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

- Para $\sigma_y = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + V$:

$$\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} = \frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

- Para las fuerzas másicas $X = -\frac{\partial V}{\partial x}$ y $Y = -\frac{\partial V}{\partial y}$:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

5.8. Función de tensión de Airy

Calculamos derivadas:

- Para $\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + V$:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

- Para $\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V$:

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

- Para las fuerzas másicas $X = -\frac{\partial V}{\partial x}$ y $Y = -\frac{\partial V}{\partial y}$:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

Reemplazamos (5.36), (5.37a) y (5.37b) en la ecuación de compatibilidad (5.13) aplicando derivadas, llegamos a:

$$\underbrace{\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4}}_{\nabla^4 \phi} = K_2 \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}_{\nabla^2 V}$$

donde

$$K_2 := -2 - K_1 = \begin{cases} \nu - 1 & \text{para el caso de } \textbf{tensión plana} \\ -\dfrac{1-2\nu}{1-\nu} & \text{para el caso de } \textbf{deformación plana} \end{cases}$$

En notación tensorial:

$$\phi_{,1111} + 2\phi_{,1212} + \phi_{,2222} = K_2(V_{,11} + V_{,22})$$

5.8. Función de tensión de Airy

Reemplazamos (5.36), (5.37a) y (5.37b) en la ecuación de compatibilidad (5.13) aplicando derivadas, llegamos a:

$$\underbrace{\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4}}_{\nabla^4 \phi} = K_2 \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}_{\nabla^2 V}$$

donde

$$K_2 := -2 - K_1 = \begin{cases} \nu - 1 & \text{para el caso de } \textbf{tensión plana} \\ -\dfrac{1-2\nu}{1-\nu} & \text{para el caso de } \textbf{deformación plana} \end{cases}$$

En notación tensorial:

$$\phi_{,1111} + 2\phi_{,1212} + \phi_{,2222} = K_2(V_{,11} + V_{,22})$$

Reemplazamos (5.36), (5.37a) y (5.37b) en la ecuación de compatibilidad (5.13) aplicando derivadas, llegamos a:

$$\underbrace{\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}}_{\nabla^4\phi} = K_2\,\underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}_{\nabla^2 V}$$

donde

$$K_2 := -2 - K_1 = \begin{cases} \nu - 1 & \text{para el caso de } \textbf{tensión plana} \\ -\dfrac{1-2\nu}{1-\nu} & \text{para el caso de } \textbf{deformación plana} \end{cases}$$

En notación tensorial:

$$\phi_{,1111} + 2\phi_{,1212} + \phi_{,2222} = K_2(V_{,11} + V_{,22})$$

La ecuación anterior de forma compacta:

$$\nabla^4\phi = K_2\nabla^2 V$$

- Tiene la forma de las **ecuaciones biarmónicas**
- A sus soluciones se les conoce como **funciones biarmónicas**
- $\nabla^4\phi$ se llama **biarmónico** de ϕ
- $\nabla^2 V$ se le llama **laplaciano** de la función V.
- V es una **función potencial**.

$\nabla^4\phi = \nabla^2(\nabla^2)\phi$:

$$\underbrace{\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}}_{\nabla^4\phi} = \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)}_{\nabla^2(\nabla^2\phi)}$$

5.8. Función de tensión de Airy

La ecuación anterior de forma compacta:

$$\nabla^4\phi = K_2\nabla^2 V$$

- Tiene la forma de las **ecuaciones biarmónicas**
- A sus soluciones se les conoce como **funciones biarmónicas**
- $\nabla^4\phi$ se llama **biarmónico** de ϕ
- $\nabla^2 V$ se le llama **laplaciano** de la función V.
- V es una **función potencial**.

$\nabla^4\phi = \nabla^2(\nabla^2)\phi$:

$$\underbrace{\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}}_{\nabla^4\phi} = \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)}_{\nabla^2(\nabla^2\phi)}$$

5.8. Función de tensión de Airy

La ecuación anterior de forma compacta:

$$\nabla^4 \phi = K_2 \nabla^2 V$$

- Tiene la forma de las **ecuaciones biarmónicas**
- A sus soluciones se les conoce como **funciones biarmónicas**
- $\nabla^4 \phi$ se llama **biarmónico** de ϕ
- $\nabla^2 V$ se le llama **laplaciano** de la función V.
- V es una **función potencial**.

$\nabla^4 \phi = \nabla^2 (\nabla^2) \phi$:

$$\underbrace{\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4}}_{\nabla^4 \phi} = \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)}_{\nabla^2 (\nabla^2 \phi)}$$

5.8. Función de tensión de Airy

La ecuación anterior de forma compacta:

$$\nabla^4\phi = K_2\nabla^2 V$$

- Tiene la forma de las **ecuaciones biarmónicas**
- A sus soluciones se les conoce como **funciones biarmónicas**
- $\nabla^4\phi$ se llama **biarmónico** de ϕ
- $\nabla^2 V$ se le llama **laplaciano** de la función V.
- V es una **función potencial**.

$\nabla^4\phi = \nabla^2(\nabla^2)\phi$:

$$\underbrace{\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}}_{\nabla^4\phi} = \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)}_{\nabla^2(\nabla^2\phi)}$$

¿Y si las fuerzas másicas son constantes?

$$\nabla^4 \phi = 0$$

La distribución de tensiones es la misma para el estado de tensión plana y para el estado de deformación plana.

Cuando la fuerza másica resultante se reduce al peso propio tenemos que la función potencial V es

$$V = \rho g y$$

y por lo tanto,

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\rho g,$$

Las ecuaciones (5.37) se reducen a

$$\sigma_x = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \rho g y \qquad \sigma_y = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \rho g y \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

5.8. Función de tensión de Airy

¿Y si las fuerzas másicas son constantes?

$$\nabla^4 \phi = 0$$

La distribución de tensiones es la misma para el estado de tensión plana y para el estado de deformación plana.

Cuando la fuerza másica resultante se reduce al peso propio tenemos que la función potencial V es

$$V = \rho g y$$

y por lo tanto,

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\rho g,$$

Las ecuaciones (5.37) se reducen a

$$\sigma_x = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \rho g y \qquad \sigma_y = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \rho g y \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

¿Y si las fuerzas másicas son constantes?

$$\nabla^4\phi = 0$$

La distribución de tensiones es la misma para el estado de tensión plana y para el estado de deformación plana.

Cuando la fuerza másica resultante se reduce al peso propio tenemos que la función potencial V es

$$V = \rho g y$$

y por lo tanto,

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\rho g,$$

Las ecuaciones (5.37) se reducen a

$$\sigma_x = -\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \rho g y \qquad \sigma_y = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \rho g y \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y}$$

5.8. Función de tensión de Airy

¿Y si las fuerzas másicas son constantes?

$$\nabla^4 \phi = 0$$

La distribución de tensiones es la misma para el estado de tensión plana y para el estado de deformación plana.

Cuando la fuerza másica resultante se reduce al peso propio tenemos que la función potencial V es

$$V = \rho g y$$

y por lo tanto,

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\rho g,$$

Las ecuaciones (5.37) se reducen a

$$\sigma_x = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \rho g y \qquad \sigma_y = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \rho g y \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

5.8. Función de tensión de Airy

Uso

Se utiliza en mecánica de sólidos para deducir analíticamente muchas condiciones de esfuerzo presentes en sólidos con ciertas geometrías *bidimensionales*. No existen las funciones de tensión de Airy para el caso tridimensional

Método

Se asume una función de tensión ϕ que depende de unos coeficientes desconocidos y que satisfagan el biarmónico; luego, se estima el campo vectorial de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos y a partir de las condiciones de frontera, se estima el valor de los coeficientes desconocidos.

5.8. Función de tensión de Airy

Uso

Se utiliza en mecánica de sólidos para deducir analíticamente muchas condiciones de esfuerzo presentes en sólidos con ciertas geometrías *bidimensionales*. No existen las funciones de tensión de Airy para el caso tridimensional

Método

Se asume una función de tensión ϕ que depende de unos coeficientes desconocidos y que satisfagan el biarmónico; luego, se estima el campo vectorial de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos y a partir de las condiciones de frontera, se estima el valor de los coeficientes desconocidos.

5.8. Función de tensión de Airy

Uso

Se utiliza en mecánica de sólidos para deducir analíticamente muchas condiciones de esfuerzo presentes en sólidos con ciertas geometrías *bidimensionales*. No existen las funciones de tensión de Airy para el caso tridimensional

Método

Se asume una función de tensión ϕ que depende de unos coeficientes desconocidos y que satisfagan el biarmónico; luego, se estima el campo vectorial de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos y a partir de las condiciones de frontera, se estima el valor de los coeficientes desconocidos.

5.8. Función de tensión de Airy

Uso

Se utiliza en mecánica de sólidos para deducir analíticamente muchas condiciones de esfuerzo presentes en sólidos con ciertas geometrías *bidimensionales*. No existen las funciones de tensión de Airy para el caso tridimensional

Método

Se asume una función de tensión ϕ que depende de unos coeficientes desconocidos y que satisfagan el biarmónico; luego, se estima el campo vectorial de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos y a partir de las condiciones de frontera, se estima el valor de los coeficientes desconocidos.

Derrotero

Ejemplo 1

Consideremos la viga mostrada en la figura 4.18, la cual soporta sobre su cara superior una carga uniformemente distribuida de magnitud q. De dicha viga, se desean calcular analíticamente los esfuerzos σ_x, σ_y y τ_{xy} que actúan sobre ella utilizando la función de tensión de Airy.

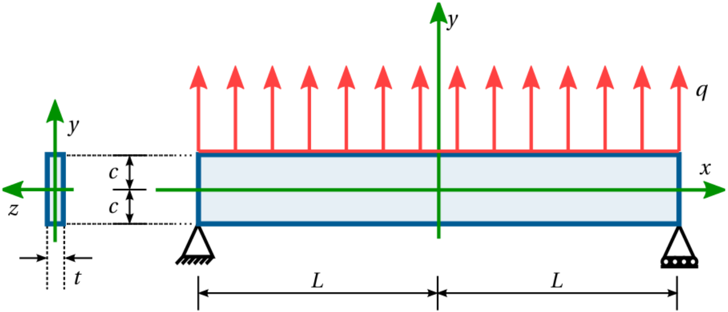

Figura: (4.18) Viga referida en el ejemplo de la Sección 4.9

Ejemplo 2

Para un sólido con forma de L invertida y condiciones de frontera dadas, se desean calcular analíticamente los esfuerzos σ_x, σ_y y τ_{xy} que actúan sobre ella utilizando la función de tensión de Airy.

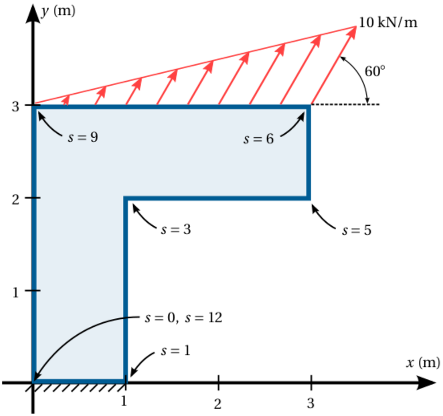

Figura: (7.31) Estructura analizada en la sección 7.8. Observe que a medida que se avanza en sentido antihorario, el parámetro s aumenta.

Derrotero

5.8.1. Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional

- Parametrización de las fuerzas superficiales:

$$\bar{X}(s) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + V(s)\frac{dy(s)}{ds} \qquad \bar{Y}(s) = -\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + V(s)\frac{dx(s)}{ds}\right)$$

- Variación de la función de tensión de Airy (5.50):

$$\frac{\partial \phi\left(x(s), y(s)\right)}{\partial y} = \int \left(\bar{X}(s) - V(s)\alpha(s)\right) ds + C_1$$
$$\frac{\partial \phi\left(x(s), y(s)\right)}{\partial x} = -\int \left(\bar{Y}(s) - V(s)\beta(s)\right) ds + C_2$$

5.8.1. Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional

- Parametrización de las fuerzas superficiales:

$$\bar{X}(s) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + V(s)\frac{dy(s)}{ds} \qquad \bar{Y}(s) = -\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + V(s)\frac{dx(s)}{ds}\right)$$

- Variación de la función de tensión de Airy (5.50):

$$\frac{\partial \phi\left(x(s), y(s)\right)}{\partial y} = \int \left(\bar{X}(s) - V(s)\alpha(s)\right) ds + C_1$$

$$\frac{\partial \phi\left(x(s), y(s)\right)}{\partial x} = -\int \left(\bar{Y}(s) - V(s)\beta(s)\right) ds + C_2$$

5.8.1. Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional

- Parametrización de las fuerzas superficiales:

$$\bar{X}(s) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + V(s)\frac{dy(s)}{ds} \qquad \bar{Y}(s) = -\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + V(s)\frac{dx(s)}{ds}\right)$$

- Variación de la función de tensión de Airy (5.50):

$$\frac{\partial \phi\left(x(s), y(s)\right)}{\partial y} = \int \left(\bar{X}(s) - V(s)\alpha(s)\right) ds + C_1$$
$$\frac{\partial \phi\left(x(s), y(s)\right)}{\partial x} = -\int \left(\bar{Y}(s) - V(s)\beta(s)\right) ds + C_2$$

5.8.1. Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional

- Haciendo $V = 0$ con el objeto de no considerar los esfuerzos producidos por las fuerzas másicas, resulta (5.53):

$$\phi\left(x(s), y(s)\right) = x(s)\frac{\partial \phi}{\partial x} + y(s)\frac{\partial \phi}{\partial y} - \int \left(y(s)\bar{X}(s) - x(s)\bar{Y}(s)\right) ds + C$$

5.8.1. Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional

- Haciendo $V = 0$ con el objeto de no considerar los esfuerzos producidos por las fuerzas másicas, resulta (5.53):

$$\phi\left(x(s), y(s)\right) = x(s)\frac{\partial \phi}{\partial x} + y(s)\frac{\partial \phi}{\partial y} - \int \big(y(s)\bar{X}(s) - x(s)\bar{Y}(s)\big)\, ds + C$$

Conclusión

Determinar la distribución de tensiones

El problema para determinar la distribución de tensiones en un problema bidimensional, cuando no se tiene en cuenta la fuerza másica y se utiliza el enfoque de Airy, se reduce a encontrar la función ϕ que cumple en todo punto interior al contorno, la ecuación (5.46, $\nabla^4\phi = 0$), sujeto a las condiciones de frontera (5.50) y (5.53)

Conclusión

Determinar la distribución de tensiones

El problema para determinar la distribución de tensiones en un problema bidimensional, cuando no se tiene en cuenta la fuerza másica y se utiliza el enfoque de Airy, se reduce a encontrar la función ϕ que cumple en todo punto interior al contorno, la ecuación (5.46, $\nabla^4\phi = 0$), sujeto a las condiciones de frontera (5.50) y (5.53)

Derrotero

Motivación

Las EDPs de equilibrio junto con las EDPs de compatibilidad nos permitieron calcular el esfuerzo y la deformación en todos los puntos del sólido. Sin embargo, si queremos calcular directamente los desplazamientos de las diferentes partículas de nuestro sólido, se requiere resolver el problema de un modo alternativo, utilizando las llamadas *ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier*

- Claude Louis Hneri Navier (1785 - 1836), matemático, físico e ingeniero civil francés.

5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

Motivación

Las EDPs de equilibrio junto con las EDPs de compatibilidad nos permitieron calcular el esfuerzo y la deformación en todos los puntos del sólido. Sin embargo, si queremos calcular directamente los desplazamientos de las diferentes partículas de nuestro sólido, se requiere resolver el problema de un modo alternativo, utilizando las llamadas *ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier*

- Claude Louis Hneri Navier (1785 - 1836), matemático, físico e ingeniero civil francés.

Recordemos las EDPs de equilibrio

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial z} + X(x,y,z) = 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial z} + Y(x,y,z) = 0 \\
\frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(x,y,z)}{\partial z} + Z(x,y,z) = 0
\end{aligned}
$$

La **ley de Hooke** (4.14) reemplazando las deformaciones longitudinales (3.12) y angualres (3.14) por su significado correspondiente:

$$\sigma_x = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2G\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \tau_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_y = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2G\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \tau_{xz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_z = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2G\frac{\partial w}{\partial z} \qquad \tau_{yz} = G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

Reemplazando en la primera EDPs de equilibrio:

$$(\lambda + G)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + X = 0$$

Siguiendo el mismo procedimiento en la dirección y y en la dirección z, deducimos:

$$(\lambda + G)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + G\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + Y = 0$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + G\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + Z = 0$$

Estas son las llamadas ecuaciones de Cauchy-Navier

Reemplazando en la primera EDPs de equilibrio:

$$(\lambda + G)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + X = 0$$

Siguiendo el mismo procedimiento en la dirección y y en la dirección z, deducimos:

$$(\lambda + G)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + G\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + Y = 0$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + G\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + Z = 0$$

Estas son las llamadas ecuaciones de Cauchy-Navier

5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

Reemplazando en la primera EDPs de equilibrio:

$$(\lambda + G)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + X = 0$$

Siguiendo el mismo procedimiento en la dirección y y en la dirección z, deducimos:

$$(\lambda + G)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + G\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + Y = 0$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + G\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + Z = 0$$

Estas son las llamadas ecuaciones de Cauchy-Navier

Reemplazando en la primera EDPs de equilibrio:

$$(\lambda + G)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + X = 0$$

Siguiendo el mismo procedimiento en la dirección y y en la dirección z, deducimos:

$$(\lambda + G)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + G\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + Y = 0$$
$$(\lambda + G)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + G\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + Z = 0$$

Estas son las llamadas ecuaciones de Cauchy-Navier

5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

Dos notaciones:

- Notación vectorial

$$(\lambda + G)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + G\nabla^2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

- Notación tensorial

$$(\lambda + G)u_{j,ij} + Gu_{i,jj} + b_i = 0$$

Dos notaciones:

- Notación vectorial

$$(\lambda + G)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + G\nabla^2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

- Notación tensorial

$$(\lambda + G)u_{j,ij} + Gu_{i,jj} + b_i = 0$$

5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

Dos notaciones:

- Notación vectorial

$$(\lambda + G)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + G\nabla^2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

- Notación tensorial

$$(\lambda + G)u_{j,ij} + Gu_{i,jj} + b_i = 0$$

5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

Ecuaciones de Cauchy-Navier

$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial x} + G\nabla^2 u + X = 0$$
$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial y} + G\nabla^2 v + Y = 0$$
$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial z} + G\nabla^2 w + Z = 0$$

- Estas ecuaciones son solamente válidas para sólidos hechos con materiales elásticos, lineales, isótropos y homogéneos.

- En notación vectorial

$$(\lambda + G)\nabla e + G\nabla^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

Ecuaciones de Cauchy-Navier

$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial x} + G\nabla^2 u + X = 0$$
$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial y} + G\nabla^2 v + Y = 0$$
$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial z} + G\nabla^2 w + Z = 0$$

- Estas ecuaciones son solamente válidas para sólidos hechos con materiales elásticos, lineales, isótropos y homogéneos.

- En notación vectorial

$$(\lambda + G)\nabla e + G\nabla^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

Ecuaciones de Cauchy-Navier

$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial x} + G\nabla^2 u + X = 0$$
$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial y} + G\nabla^2 v + Y = 0$$
$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial z} + G\nabla^2 w + Z = 0$$

- Estas ecuaciones son solamente válidas para sólidos hechos con materiales elásticos, lineales, isótropos y homogéneos.

- En notación vectorial

$$(\lambda + G)\nabla e + G\nabla^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

La solución de las ecuaciones de Navier requiere también plantear unas condiciones de frontera:

- Especificar las deformaciones o los desplazamientos.
- Especificar los esfuerzos en términos de los desplazamientos (ley de Hooke)

$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\begin{bmatrix} \lambda e & 0 & 0 \\ 0 & \lambda e & 0 \\ 0 & 0 & \lambda e \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \right)}_{\underline{\underline{\sigma}}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

- Especificar condiciones mixtas.

Las ecuaciones de Navier (5.57) junto con las condiciones en la frontera definen completamente las tres componentes del desplazamiento u, v y w.

5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

La solución de las ecuaciones de Navier requiere también plantear unas condiciones de frontera:

- Especificar las deformaciones o los desplazamientos.
- Especificar los esfuerzos en términos de los desplazamientos (ley de Hooke)

$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\begin{bmatrix} \lambda e & 0 & 0 \\ 0 & \lambda e & 0 \\ 0 & 0 & \lambda e \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \right)}_{\underline{\underline{\sigma}}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

- Especificar condiciones mixtas.

Las ecuaciones de Navier (5.57) junto con las condiciones en la frontera definen completamente las tres componentes del desplazamiento u, v y w.

5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

La solución de las ecuaciones de Navier requiere también plantear unas condiciones de frontera:

- Especificar las deformaciones o los desplazamientos.
- Especificar los esfuerzos en términos de los desplazamientos (ley de Hooke)

$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\begin{bmatrix} \lambda e & 0 & 0 \\ 0 & \lambda e & 0 \\ 0 & 0 & \lambda e \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \right)}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

- Especificar condiciones mixtas.

Las ecuaciones de Navier (5.57) junto con las condiciones en la frontera definen completamente las tres componentes del desplazamiento u, v y w.

5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

La solución de las ecuaciones de Navier requiere también plantear unas condiciones de frontera:

- Especificar las deformaciones o los desplazamientos.
- Especificar los esfuerzos en términos de los desplazamientos (ley de Hooke)

$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\begin{bmatrix} \lambda e & 0 & 0 \\ 0 & \lambda e & 0 \\ 0 & 0 & \lambda e \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \right)}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

- Especificar condiciones mixtas.

Las ecuaciones de Navier (5.57) junto con las condiciones en la frontera definen completamente las tres componentes del desplazamiento u, v y w.

5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

La solución de las ecuaciones de Navier requiere también plantear unas condiciones de frontera:

- Especificar las deformaciones o los desplazamientos.
- Especificar los esfuerzos en términos de los desplazamientos (ley de Hooke)

$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\begin{bmatrix} \lambda e & 0 & 0 \\ 0 & \lambda e & 0 \\ 0 & 0 & \lambda e \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \right)}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

- Especificar condiciones mixtas.

Las ecuaciones de Navier (5.57) junto con las condiciones en la frontera definen completamente las tres componentes del desplazamiento u, v y w.

Particularización de las ecuaciones de Cauchy-Navier al caso bidimensional

Deformación plana

$$G\nabla^2 u + (\lambda + G)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + X = 0$$

$$G\nabla^2 v + (\lambda + G)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + Y = 0$$

Tensión plana

$$G\nabla^2 u + \frac{E}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + X = 0$$

$$G\nabla^2 v + \frac{E}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + Y = 0$$

Particularización de las ecuaciones de Cauchy-Navier al caso bidimensional

Deformación plana

$$G\nabla^2 u + (\lambda + G)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + X = 0$$
$$G\nabla^2 v + (\lambda + G)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + Y = 0$$

Tensión plana

$$G\nabla^2 u + \frac{E}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + X = 0$$
$$G\nabla^2 v + \frac{E}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + Y = 0$$

Particularización de las ecuaciones de Cauchy-Navier al caso bidimensional

Deformación plana

$$G\nabla^2 u + (\lambda + G)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + X = 0$$
$$G\nabla^2 v + (\lambda + G)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + Y = 0$$

Tensión plana

$$G\nabla^2 u + \frac{E}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + X = 0$$
$$G\nabla^2 v + \frac{E}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + Y = 0$$

Derrotero

5.10. Unicidad de la solución

Planteamiento de Kirchhoff

Si una solución existe, esta es *única* en términos de esfuerzos y deformaciones, y los desplazamientos son únicos dentro de los límites impuestos por un movimiento rígido arbitrario, es decir, **dos soluciones al mismo problema no pueden existir excepto para soluciones que únicamente difieren en rotaciones y traslaciones rígidas**. Ver (Timoshenko y Goodier (1970, sección 86)).

- Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) físico alemán.

La unicidad y existencia de la solución no se garantiza en sólidos hechos de materiales con comportamiento no lineal, plástico o sujetos a grandes deformaciones

5.10. Unicidad de la solución

Planteamiento de Kirchhoff

Si una solución existe, esta es *única* en términos de esfuerzos y deformaciones, y los desplazamientos son únicos dentro de los límites impuestos por un movimiento rígido arbitrario, es decir, **dos soluciones al mismo problema no pueden existir excepto para soluciones que únicamente difieren en rotaciones y traslaciones rígidas**. Ver (Timoshenko y Goodier (1970, sección 86)).

- Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) físico alemán.

La unicidad y existencia de la solución no se garantiza en sólidos hechos de materiales con comportamiento no lineal, plástico o sujetos a grandes deformaciones

5.10. Unicidad de la solución

Planteamiento de Kirchhoff

Si una solución existe, esta es *única* en términos de esfuerzos y deformaciones, y los desplazamientos son únicos dentro de los límites impuestos por un movimiento rígido arbitrario, es decir, **dos soluciones al mismo problema no pueden existir excepto para soluciones que únicamente difieren en rotaciones y traslaciones rígidas**. Ver (Timoshenko y Goodier (1970, sección 86)).

- Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) físico alemán.

La unicidad y existencia de la solución no se garantiza en sólidos hechos de materiales con comportamiento no lineal, plástico o sujetos a grandes deformaciones

Planteamiento de Kirchhoff

Si una solución existe, esta es *única* en términos de esfuerzos y deformaciones, y los desplazamientos son únicos dentro de los límites impuestos por un movimiento rígido arbitrario, es decir, **dos soluciones al mismo problema no pueden existir excepto para soluciones que únicamente difieren en rotaciones y traslaciones rígidas**. Ver (Timoshenko y Goodier (1970, sección 86)).

- Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) físico alemán.

La unicidad y existencia de la solución no se garantiza en sólidos hechos de materiales con comportamiento no lineal, plástico o sujetos a grandes deformaciones

Derrotero

5.11. Principio de superposición

Los esfuerzos, deformaciones y desplazamientos de un sólido en equilibrio sujeto a un conjunto de configuraciones de carga se pueden analizar como la suma de las soluciones que correspondan a cada una de dichas configuraciones, asumiendo que cada una de ellas se aplica independientemente

Podemos entender este problema desde las ecuaciones ecuaciones (5.57) y (5.58):

$$(\lambda + G)\nabla e + G\nabla^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\begin{bmatrix} \lambda e & 0 & 0 \\ 0 & \lambda e & 0 \\ 0 & 0 & \lambda e \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \right)}_{\underline{\underline{\sigma}}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Observe que la naturaleza lineal de las ecuaciones clásicas de la elasticidad es lo que establece el Principio de superposición.

5.11. Principio de superposición

Los esfuerzos, deformaciones y desplazamientos de un sólido en equilibrio sujeto a un conjunto de configuraciones de carga se pueden analizar como la suma de las soluciones que correspondan a cada una de dichas configuraciones, asumiendo que cada una de ellas se aplica independientemente

Podemos entender este problema desde las ecuaciones ecuaciones (5.57) y (5.58):

$$(\lambda + G)\nabla e + G\nabla^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\begin{bmatrix} \lambda e & 0 & 0 \\ 0 & \lambda e & 0 \\ 0 & 0 & \lambda e \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \right)}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Observe que la naturaleza lineal de las ecuaciones clásicas de la elasticidad es lo que establece el Principio de superposición.

Los esfuerzos, deformaciones y desplazamientos de un sólido en equilibrio sujeto a un conjunto de configuraciones de carga se pueden analizar como la suma de las soluciones que correspondan a cada una de dichas configuraciones, asumiendo que cada una de ellas se aplica independientemente

Podemos entender este problema desde las ecuaciones ecuaciones (5.57) y (5.58):

$$(\lambda + G)\nabla e + G\nabla^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\begin{bmatrix} \lambda e & 0 & 0 \\ 0 & \lambda e & 0 \\ 0 & 0 & \lambda e \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \right)}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Observe que la naturaleza lineal de las ecuaciones clásicas de la elasticidad es lo que establece el Principio de superposición.

5.11. Principio de superposición

Aplicabilidad

El principio no es aplicable cuando se analiza un sólido cuyo material tiene un comportamiento no lineal o cuando los cambios de posición y forma de la estructrura al aplicar la configuración de fuerzas 1 se tenga que considerar antes de aplicar el sistema de fuerzas 2

4 condiciones necesarias:

1. El sólido debe ser elástico y, bajo las acciones exteriores, el material no se agrieta ni se traslapa.
2. Las acciones exteriores producen en el sólido pequeños desplazamientos, deformaciones y giros. Esto se conoce como *principio de rigidez relativa*: se desprecia el cambio de geometría del sólido durante la deformación.
3. El material se debe regir por la ley de Hooke (es decir, debe haber una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones).
4. Las deformaciones son recuperables. Existe un estado de referencia del sólido, normalmente el estado original sin deformar, al cual vuelve el sólido al retirar las acciones exteriores.

4 condiciones necesarias:

1. El sólido debe ser elástico y, bajo las acciones exteriores, el material no se agrieta ni se traslapa.
2. Las acciones exteriores producen en el sólido pequeños desplazamientos, deformaciones y giros. Esto se conoce como *principio de rigidez relativa*: se desprecia el cambio de geometría del sólido durante la deformación.
3. El material se debe regir por la ley de Hooke (es decir, debe haber una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones).
4. Las deformaciones son recuperables. Existe un estado de referencia del sólido, normalmente el estado original sin deformar, al cual vuelve el sólido al retirar las acciones exteriores.

4 condiciones necesarias:

1. El sólido debe ser elástico y, bajo las acciones exteriores, el material no se agrieta ni se traslapa.
2. Las acciones exteriores producen en el sólido pequeños desplazamientos, deformaciones y giros. Esto se conoce como *principio de rigidez relativa*: se desprecia el cambio de geometría del sólido durante la deformación.
3. El material se debe regir por la ley de Hooke (es decir, debe haber una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones).
4. Las deformaciones son recuperables. Existe un estado de referencia del sólido, normalmente el estado original sin deformar, al cual vuelve el sólido al retirar las acciones exteriores.

4 condiciones necesarias:

1. El sólido debe ser elástico y, bajo las acciones exteriores, el material no se agrieta ni se traslapa.
2. Las acciones exteriores producen en el sólido pequeños desplazamientos, deformaciones y giros. Esto se conoce como *principio de rigidez relativa*: se desprecia el cambio de geometría del sólido durante la deformación.
3. El material se debe regir por la ley de Hooke (es decir, debe haber una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones).
4. Las deformaciones son recuperables. Existe un estado de referencia del sólido, normalmente el estado original sin deformar, al cual vuelve el sólido al retirar las acciones exteriores.

5.11. Principio de superposición

4 condiciones necesarias:

1. El sólido debe ser elástico y, bajo las acciones exteriores, el material no se agrieta ni se traslapa.
2. Las acciones exteriores producen en el sólido pequeños desplazamientos, deformaciones y giros. Esto se conoce como *principio de rigidez relativa*: se desprecia el cambio de geometría del sólido durante la deformación.
3. El material se debe regir por la ley de Hooke (es decir, debe haber una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones).
4. Las deformaciones son recuperables. Existe un estado de referencia del sólido, normalmente el estado original sin deformar, al cual vuelve el sólido al retirar las acciones exteriores.

Dos soluciones para el mismo sólido, con la misma geometría, pero con diferentes condiciones de frontera se pueden adicionar para obtener la solución al problema en el que ambos conjuntos de condiciones de frontera se están aplicando simultáneamente.

Derrotero

5.12. Principio de Saint-Venant

"Suponga que las fuerzas que actúan sobre un pequeño elemento de la superficie de un cuerpo elástico son reemplazadas por otro sistema de fuerzas actuando sobre la misma porción de superficie y que es estáticamente equivalente al anterior. Entonces, aunque esta distribución de fuerzas produce cambios sustanciales en los esfuerzos de forma local, esta distribución de fuerzas tiene un efecto despreciable en los esfuerzos que son producidos a distancias mayores comparadas con las dimensiones lineales de la superficie en la cual las fuerzas fueron cambiadas."

- Adhemar Jean Caluse Barré de Saint-Venant (1797-1886), ingeniero mecánico y matemático francés.

5.12. Principio de Saint-Venant

"Suponga que las fuerzas que actúan sobre un pequeño elemento de la superficie de un cuerpo elástico son reemplazadas por otro sistema de fuerzas actuando sobre la misma porción de superficie y que es estáticamente equivalente al anterior. Entonces, aunque esta distribución de fuerzas produce cambios sustanciales en los esfuerzos de forma local, esta distribución de fuerzas tiene un efecto despreciable en los esfuerzos que son producidos a distancias mayores comparadas con las dimensiones lineales de la superficie en la cual las fuerzas fueron cambiadas."

- Adhemar Jean Caluse Barré de Saint-Venant (1797-1886), ingeniero mecánico y matemático francés.

5.12. Principio de Saint-Venant

"Suponga que las fuerzas que actúan sobre un pequeño elemento de la superficie de un cuerpo elástico son reemplazadas por otro sistema de fuerzas actuando sobre la misma porción de superficie y que es estáticamente equivalente al anterior. Entonces, aunque esta distribución de fuerzas produce cambios sustanciales en los esfuerzos de forma local, esta distribución de fuerzas tiene un efecto despreciable en los esfuerzos que son producidos a distancias mayores comparadas con las dimensiones lineales de la superficie en la cual las fuerzas fueron cambiadas."

- Adhemar Jean Caluse Barré de Saint-Venant (1797-1886), ingeniero mecánico y matemático francés.

5.12. Principio de Saint-Venant

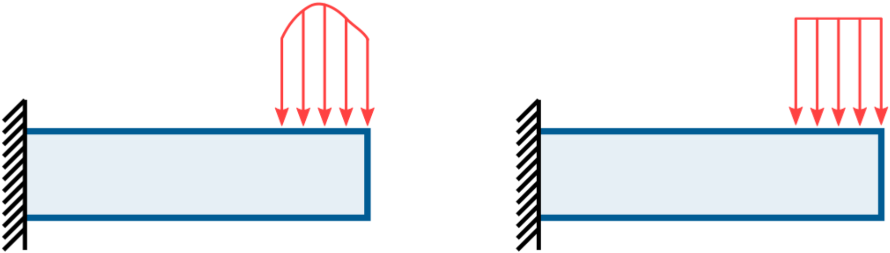

Figura: (5.7) El principio de Saint-Venant establece que es posible reemplazar complicadas distribuciones de carga en la frontera o condiciones de frontera complicadas por otras estáticamente equivalentes que sean mucho más fáciles de anipular, siempre y cuando, la frontera sea geométricamente corta. Los esfuerzos serán diferentes localmente, pero lejos del punto de aplicación de la carga, los esfuerzos serán similares para ambas geometrías.

5.12. Principio de Saint-Venant

Figura: (5.8) Al sólido mostrado en la parte superior se le aplicó en su borde derecho una carga distribuida de magnitud p, mientras que al inferior se le aplicó en la quitna parte de su lado derecho un esfuerzo equivalente, de magnitud $5p$. Observe la distribución de los esfuerzos cortantes máximos τ_{max} en ambos casos. Si bien, localmente, cerca a las cargas hay diferencias en la distribución de los esfuerzos, lejos del punto de aplicación de las cargas la distribución de esfuerzos es prácticamente igual; esto evidencia el principio de Saint-Venant.

Derrotero

Referencias I

Álvarez, D. A. (2022).
Teoría de la elasticidad.
Universidad Nacional de Colombia.