05. Ecuaciones diferenciales fundamentales de la teoría de la elasticidad

Ejemplo de aplicación

Michael H.P.
mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil
Mecánica de sólidos

2023a

El problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Debemos encontrar:

Esfuerzos

- σ_x, σ_y, σ_z
- τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}

Deformaciones

- ε_x, ε_y, ε_z
- γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}

Desplazamientos

- u, v, w

El problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Debemos encontrar:

Esfuerzos

- σ_x, σ_y, σ_z
- τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}

Deformaciones

- ε_x, ε_y, ε_z
- γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}

Desplazamientos

- u, v, w

El problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Debemos encontrar:

Esfuerzos

- σ_x, σ_y, σ_z
- τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}

Deformaciones

- ε_x, ε_y, ε_z
- γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}

Desplazamientos

- u, v, w

El problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Debemos encontrar:

Esfuerzos

- σ_x, σ_y, σ_z
- τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}

Deformaciones

- ε_x, ε_y, ε_z
- γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}

Desplazamientos

- u, v, w

El problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Debemos encontrar:

Esfuerzos

- σ_x, σ_y, σ_z
- τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}

Deformaciones

- ε_x, ε_y, ε_z
- γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}

Desplazamientos

- u, v, w

Recordemos

Formulación basada en esfuerzos

EDPs de compatibilidad (6)

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\sigma_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial X}{\partial x}\\
\nabla^2\sigma_y + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial Y}{\partial y}\\
\nabla^2\sigma_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial Z}{\partial z}\\
\nabla^2\tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z} &= -\left(\frac{\partial Y}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial y}\right)\\
\nabla^2\tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial z} &= -\left(\frac{\partial X}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\\
\nabla^2\tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y} &= -\left(\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial x}\right)
\end{aligned}
$$

Formulación basada en desplazamientos

EDPs de Cauchy-Navier (3)

$$
\begin{aligned}
(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial x} + G\nabla^2 u + X &= 0\\
(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial y} + G\nabla^2 v + Y &= 0\\
(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial z} + G\nabla^2 w + Z &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \lambda e + 2G\varepsilon_x & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}\\
\sigma_y &= \lambda e + 2G\varepsilon_y & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz}\\
\sigma_z &= \lambda e + 2G\varepsilon_z & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}
\end{aligned}
$$

Ecuaciones de Lamé (Ley de Hooke)

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x(x,y,z) &:= \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x,y,z)} & \gamma_{xy}(x,y,z) &:= \left.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x,y,z)}\\
\varepsilon_y(x,y,z) &:= \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x,y,z)} & \gamma_{xz}(x,y,z) &:= \left.\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{(x,y,z)}\\
\varepsilon_z(x,y,z) &:= \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{(x,y,z)} & \gamma_{yz}(x,y,z) &:= \left.\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{(x,y,z)}
\end{aligned}
$$

Deformaciones

$$
u(x,y,z)\quad v(x,y,z)\quad w(x,y,z)
$$

Desplazamientos

Diferentes situaciones

Podemos encontrarnos con dos situaciones:

1. Cargas moderadas
2. Cargas destructivas

Diferentes situaciones

Podemos encontrarnos con dos situaciones:

1. Cargas moderadas
2. Cargas destructivas

Cargas moderadas

Comportamiento lineal

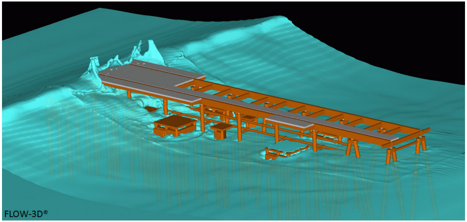

Figura: Modelo de estación marítima

- Maquinarias
- Tránsito peatonal
- Tránsito vehicular
- Oleaje
- Vientos

Cargas destructuvas

Comportamiento no lineal

Figura: Terremoto de Kobe, 1995

- Terremotos y sismos
- Explosiones
- Huracanes
- Ciclones

Instrumentación

Figura: Video: What is structural monitoring?

Intrumentación

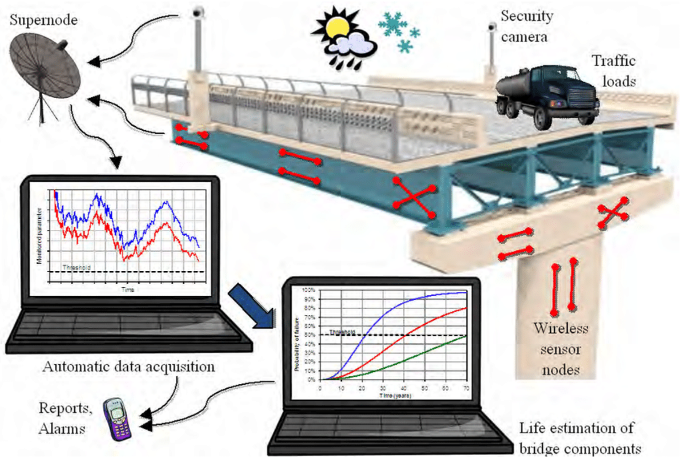

Figura: Tomado de: Concept of structural health monitoring of bridge structures.

Ejemplo

INVIAS decidió instrumentar un puente para medir sus deformaciones debidas a la acción del tránsito vehicular; sin embargo, no pagó el software del proveedor sino que programó el suyo propio (software A). Un ingeniero no conforme programó otro (software B). Luego de analizar los datos de la instrumentación, el software A arroja las siguientes funciones de deformación:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2 y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

mientras que el software B arroja estas:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

donde k es una constante muy pequeña. Respecto a este problema, responda:

1. ¿Cómo podemos decidir cuál programa está en lo correcto? Explique, demuestre y concluya.

Solución

¿Qué nos está pidiendo el problema?

R//. Verificar la compatibilidad de las ecuaciones que definen las deformaciones.

Veamos que ambos softwares indican un comportamiento simplificado a deformación plana:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

El tránsito vehicular puede ser una carga moderada: análisis lineal.

Debemos emplear las ecuaciones de compatibilidad bidimensionales en términos de deformaciones:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

Solución

¿Qué nos está pidiendo el problema?
R//. Verificar la compatibilidad de las ecuaciones que definen las deformaciones.

Veamos que ambos softwares indican un comportamiento simplificado a deformación plana:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

El tránsito vehicular puede ser una carga moderada: análisis lineal.

Debemos emplear las ecuaciones de compatibilidad bidimensionales en términos de deformaciones:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

Solución

¿Qué nos está pidiendo el problema?
R//. Verificar la compatibilidad de las ecuaciones que definen las deformaciones.

Veamos que ambos softwares indican un comportamiento simplificado a deformación plana:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

El tránsito vehicular puede ser una carga moderada: análisis lineal.

Debemos emplear las ecuaciones de compatibilidad bidimensionales en términos de deformaciones:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

Solución

¿Qué nos está pidiendo el problema?
R//. Verificar la compatibilidad de las ecuaciones que definen las deformaciones.

Veamos que ambos softwares indican un comportamiento simplificado a deformación plana:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

El tránsito vehicular puede ser una carga moderada: análisis lineal.

Debemos emplear las ecuaciones de compatibilidad bidimensionales en términos de deformaciones:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

Solución

¿Qué nos está pidiendo el problema?
R//. Verificar la compatibilidad de las ecuaciones que definen las deformaciones.

Veamos que ambos softwares indican un comportamiento simplificado a deformación plana:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

El tránsito vehicular puede ser una carga moderada: análisis lineal.

Debemos emplear las ecuaciones de compatibilidad bidimensionales en términos de deformaciones:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2 y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2 y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}2kx - y\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Las deformaciones medidas por el **software A** no son compatibles, pues

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy\right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy\right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy\right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy\right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy\right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy\right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy\right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy\right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy\right) = 2k$$
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy\right) = 2k$$
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy\right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy\right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy\right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

Solución

Las deformaciones medidas por el **software B** si son compatibles, pues

$$2k = 2k$$

Solución

¿Cuál software mide adecuadamente las deformaciones?

R//. El software B.

Solución

¿Cuál software mide adecuadamente las deformaciones?
R//. El software B.