

# 06. Formulación de la teoría de la elasticidad en coordenadas cilíndricas

- Introducción -

Michael Heredia Pérez  
[mherediap@unal.edu.co](mailto:mherediap@unal.edu.co)

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales  
Departamento de Ingeniería Civil  
Mecánica de Sólidos

2022b





# Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada **Álvarez (2022)**.





# Derrotero

- 1 ¿Por qué coordenadas cilíndricas?
- 2 6.1. El sistema de coordenadas polares
- 3 6.2. El sistema de coordenadas cilíndricas
- 4 6.3. El gradiente, el laplaciano, la divergencia y el rotacional en coordenadas cilíndricas
- 5 Referencias



# Derrotero

- 1 ¿Por qué coordenadas cilíndricas?
- 2 6.1. El sistema de coordenadas polares
- 3 6.2. El sistema de coordenadas cilíndricas
- 4 6.3. El gradiente, el laplaciano, la divergencia y el rotacional en coordenadas cilíndricas
- 5 Referencias



# Condiciones particulares

En ciertos casos, la solución al problema de caracterizar el sólido  $\Omega$  se vuelve más corta y simple cuando se formula en coordenadas cilíndricas o esféricas, que en coordenadas rectangulares.

Algunos casos:

- Túneles
- Tuberías sometidas a presión
- Arandelas
- Cargas puntuales actuando sobre planos semiinfinitos (cimentaciones)



# Condiciones particulares

En ciertos casos, la solución al problema de caracterizar el sólido  $\Omega$  se vuelve más corta y simple cuando se formula en coordenadas cilíndricas o esféricas, que en coordenadas rectangulares.

Algunos casos:

- Túneles
- Tuberías sometidas a presión
- Arandelas
- Cargas puntuales actuando sobre planos semiinfinitos (cimentaciones)



# Condiciones particulares

En ciertos casos, la solución al problema de caracterizar el sólido  $\Omega$  se vuelve más corta y simple cuando se formula en coordenadas cilíndricas o esféricas, que en coordenadas rectangulares.

Algunos casos:

- Túneles
- Tuberías sometidas a presión
- Arandelas
- Cargas puntuales actuando sobre planos semiinfinitos (cimentaciones)



# Condiciones particulares

En ciertos casos, la solución al problema de caracterizar el sólido  $\Omega$  se vuelve más corta y simple cuando se formula en coordenadas cilíndricas o esféricas, que en coordenadas rectangulares.

Algunos casos:

- Túneles
- Tuberías sometidas a presión
- Arandelas
- Cargas puntuales actuando sobre planos semiinfinitos (cimentaciones)





# Condiciones particulares

En ciertos casos, la solución al problema de caracterizar el sólido  $\Omega$  se vuelve más corta y simple cuando se formula en coordenadas cilíndricas o esféricas, que en coordenadas rectangulares.

Algunos casos:

- Túneles
- Tuberías sometidas a presión
- Arandelas
- Cargas puntuales actuando sobre planos semiinfinitos (cimentaciones)



# Condiciones particulares

En ciertos casos, la solución al problema de caracterizar el sólido  $\Omega$  se vuelve más corta y simple cuando se formula en coordenadas cilíndricas o esféricas, que en coordenadas rectangulares.

Algunos casos:

- Túneles
- Tuberías sometidas a presión
- Arandelas
- Cargas puntuales actuando sobre planos semiinfinitos (cimentaciones)

# Ejemplo: estudio de suelos y pavimentos

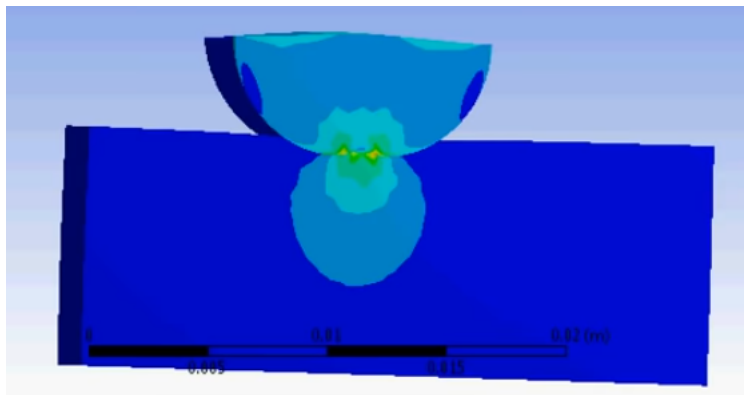


Figura: [https://www.youtube.com/watch?v=zK4Xe\\_9AiKE](https://www.youtube.com/watch?v=zK4Xe_9AiKE)



# Derrotero

- 1 ¿Por qué coordenadas cilíndricas?
- 2 6.1. El sistema de coordenadas polares
- 3 6.2. El sistema de coordenadas cilíndricas
- 4 6.3. El gradiente, el laplaciano, la divergencia y el rotacional en coordenadas cilíndricas
- 5 Referencias



## 6.1. El sistema de coordenadas polares

Sistema bidimensional en el cual cada punto del plano se determina por un ángulo ( $\theta \in [0, 2\pi)$ ) y una distancia ( $r \geq 0$ ).

De polares a rectangulares

$$x(r, \theta) = r \cos \theta \quad y(r, \theta) = r \sin \theta$$

De rectangulares a polares

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta(x, y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \text{ y } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{si } x > 0 \text{ y } y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ y } y = 0 \end{cases}$$



## 6.1. El sistema de coordenadas polares

Sistema bidimensional en el cual cada punto del plano se determina por un ángulo ( $\theta \in [0, 2\pi)$ ) y una distancia ( $r \geq 0$ ).

De polares a rectangulares

$$x(r, \theta) = r \cos \theta \quad y(r, \theta) = r \sin \theta$$

De rectangulares a polares

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta(x, y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \text{ y } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{si } x > 0 \text{ y } y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ y } y = 0 \end{cases}$$



## 6.1. El sistema de coordenadas polares

Sistema bidimensional en el cual cada punto del plano se determina por un ángulo ( $\theta \in [0, 2\pi)$ ) y una distancia ( $r \geq 0$ ).

### De polares a rectangulares

$$x(r, \theta) = r \cos \theta \quad y(r, \theta) = r \sin \theta$$

### De rectangulares a polares

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta(x, y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \text{ y } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{si } x > 0 \text{ y } y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ y } y = 0 \end{cases}$$



## 6.1. El sistema de coordenadas polares

Si una función  $\phi$  está definida en términos de coordenadas polares:

$$(r, \theta) \rightarrow \phi(r, \theta)$$

en virtud de la regla de la cadena es posible encontrar las derivadas de  $\phi$  con respecto a las variables  $x$  y  $y$  del sistema de coordenadas rectangulares, así:

$$\begin{aligned}\phi_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \sin \theta \\ \phi_y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \cos \theta\end{aligned}$$

Derivando nuevamente se obtiene el laplaciano de la función  $\phi$  en términos de coordenadas polares:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}\end{aligned}$$





# Derrotero

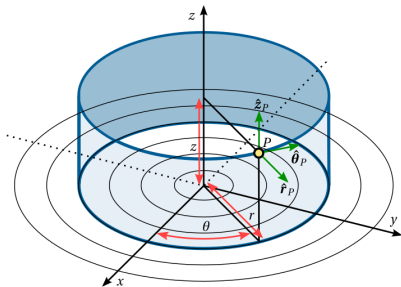
- 1 ¿Por qué coordenadas cilíndricas?
- 2 6.1. El sistema de coordenadas polares
- 3 6.2. El sistema de coordenadas cilíndricas
- 4 6.3. El gradiente, el laplaciano, la divergencia y el rotacional en coordenadas cilíndricas
- 5 Referencias



# Extensión tridimensional del sistema de coordenadas polares

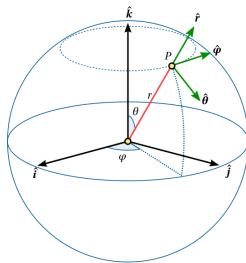
## S.C. Cilíndrico

Añade una coordenada de distancia desde el plano  $xy$  medida en la dirección del eje  $z$  al punto en consideración.



## S.C. Esférico

Define un radio  $r$  y un ángulo *polar*  $\theta$  medido desde el vector  $\hat{k}$  y añade una tercera coordenada que es el ángulo *azimutal*  $\phi$  que se mide a partir del vector  $\hat{i}$ .





## 6.2. El sistema de coordenadas cilíndricas

Podemos definir 3 vectores ortogonales al punto  $P$ .

$$\hat{\mathbf{r}}_p(t, \theta, z) := [\cos \theta, \sin \theta, 0]^T = \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_p(t, \theta, z) := [-\sin \theta, \cos \theta, 0]^T = -\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}}$$

$$\hat{\mathbf{z}}_p(t, \theta, z) := [0, 0, 1]^T = \hat{\mathbf{k}}$$

- Estos vectores indican las direcciones en las que aumentan las coordenadas  $r$ ,  $\theta$  y  $z$ , respectivamente.
- $\hat{\mathbf{r}}_p$ ,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_p$ ,  $\hat{\mathbf{z}}_p$  se pueden entender como campos vectoriales.



## 6.2. El sistema de coordenadas cilíndricas

Podemos tener una matriz de transformación entre el sistema de coordenadas rectangulares ( $\mathbf{r}$ ) y el sistema de coordenadas cilíndricas ( $\mathbf{r}_{cil}$ ):

$$\mathbf{r} = \mathbf{T} \mathbf{r}_{cil}$$

$$\mathbf{T}(r, \theta, z) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_p(r, \theta, z) & \hat{\boldsymbol{\theta}}_p(r, \theta, z) & \hat{\mathbf{z}}_p(r, \theta, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## 6.2. El sistema de coordenadas cilíndricas

Podemos tener una matriz de transformación entre el sistema de coordenadas rectangulares ( $\mathbf{r}$ ) y el sistema de coordenadas cilíndricas ( $\mathbf{r}_{cil}$ ):

$$\mathbf{r} = \mathbf{T} \mathbf{r}_{cil}$$

$$\mathbf{T}(r, \theta, z) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_p(r, \theta, z) & \hat{\boldsymbol{\theta}}_p(r, \theta, z) & \hat{\mathbf{z}}_p(r, \theta, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## 6.2. El sistema de coordenadas cilíndricas

Podemos tener una matriz de transformación entre el sistema de coordenadas rectangulares ( $\mathbf{r}$ ) y el sistema de coordenadas cilíndricas ( $\mathbf{r}_{cil}$ ):

$$\mathbf{r} = \mathbf{T} \mathbf{r}_{cil}$$

$$\mathbf{T}(r, \theta, z) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_p(r, \theta, z) & \hat{\boldsymbol{\theta}}_p(r, \theta, z) & \hat{\mathbf{z}}_p(r, \theta, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Derrotero

- 1 ¿Por qué coordenadas cilíndricas?
- 2 6.1. El sistema de coordenadas polares
- 3 6.2. El sistema de coordenadas cilíndricas
- 4 6.3. El gradiente, el laplaciano, la divergencia y el rotacional en coordenadas cilíndricas
- 5 Referencias



## 6.3.1. El gradiente en coordenadas cilíndricas

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{\mathbf{r}}_p + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}_p + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

- El gradiente de  $\phi$  evaluado en  $\mathbf{x}$  indica la dirección en la cual  $\phi$  es más pendiente en el punto  $\mathbf{x}$ .
- Su norma  $\|\nabla\phi(\mathbf{x})\|$  representa qué tan pendiente es  $\phi$  en ese punto  $\mathbf{x}$  en la dirección del vector  $\nabla\phi(\mathbf{x})$ .





## 6.3.2. El laplaciano en coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

- Es una convención matemática para escribir en forma compacta la suma de las derivadas segundas de  $\phi$  con respecto a cada una de sus variables.



## 6.3.3. La divergencia en coordenadas cilíndricas

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(r, \theta, z)$$

- Mide el grado de divergencia ( $\operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) > 0$ ) o de convergencia ( $\operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) < 0$ ) de los vectores que conforman un campo vectorial en el vecindario de  $(x, y, z)$ .
- (M. Sólidos) la divergencia del campo vectorial de desplazamiento  $\mathbf{u}$  de un sólido en el punto  $(x, y, z)$ , representa la llamada *dilatación cúbica*  $e(x, y, z) := \operatorname{div} \mathbf{u}(x, y, z)$ , que explica "el porcentaje" de cambio de volumen del sólido en dicho punto  $(x, y, z)$ .



# Derrotero

- 1 ¿Por qué coordenadas cilíndricas?
- 2 6.1. El sistema de coordenadas polares
- 3 6.2. El sistema de coordenadas cilíndricas
- 4 6.3. El gradiente, el laplaciano, la divergencia y el rotacional en coordenadas cilíndricas
- 5 Referencias



# Referencias I

Álvarez, D. A. (2022). *Teoría de la elasticidad*. Universidad Nacional de Colombia.