

## 02. Estudio de los esfuerzos en un punto

secciones 2.5 a 2.6

Michael Heredia Pérez

[mherediap@unal.edu.co](mailto:mherediap@unal.edu.co)

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales  
Departamento de Ingeniería Civil  
Mecánica Tensorial

2023a





# Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada (Álvarez, 2022).





# Derrotero

- ① 2.5. Cambio de base
- ② 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas
  - 2.6.1. Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional
  - 2.6.2. Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional
- ③ Referencias

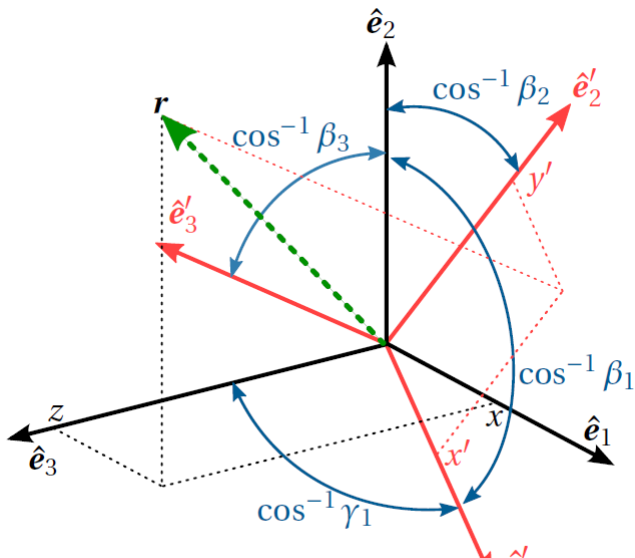


# Derrotero

- ① 2.5. Cambio de base
- ② 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas
  - 2.6.1. Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional
  - 2.6.2. Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional
- ③ Referencias

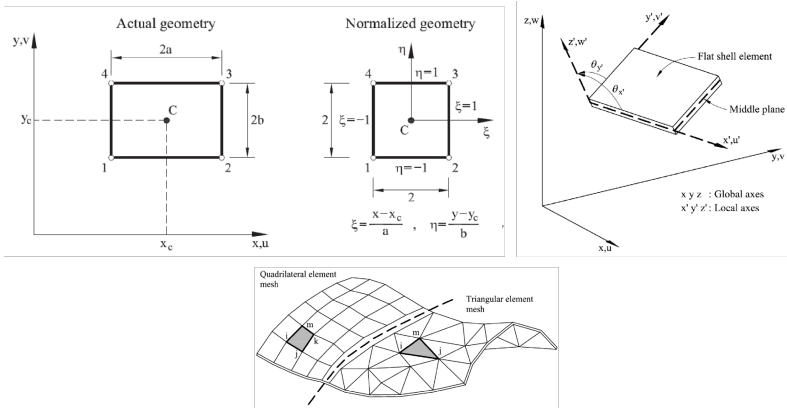


# Cambio de base





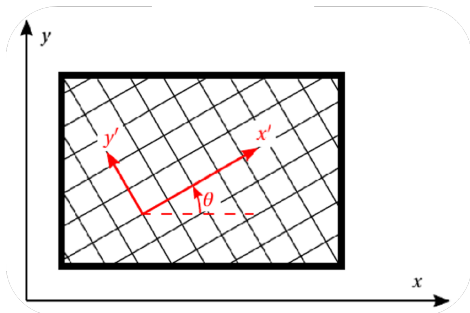
# ¿... dónde veo esto?



En una malla de elementos finitos, cada elemento se estudia en un sistema coordenado local  $(x', y')$  o  $(\xi, \eta)$ .



## ¿... dónde veo esto?

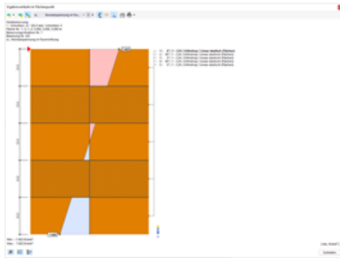


Los ejes de ortotropía de un sólido no siempre estarán en el mismo sentido de los ejes globales, así que se representan en otro sistema de coordenadas locales.



# ¿... dónde veo esto?

## Nuevas características en RFEM 6 y RSTAB 9



- ▲ Distribución normal de tensiones en un panel de madera contralaminada (CLT)

### Cálculo de superficies de madera ortótropa y madera contralaminada (CLT)

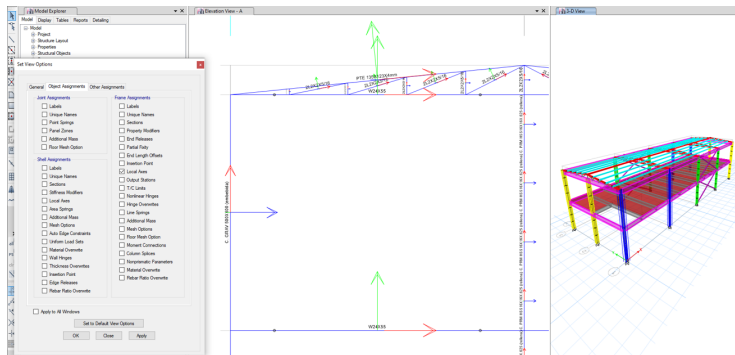
¿Trabaja con madera? Entonces tenemos buenas noticias. En el complemento Cálculo de madera para RFEM 6, ahora puede diseñar tanto barras como superficies según el Eurocódigo, como madera contralaminada (CLT), madera laminada encolada, madera de coníferas, transformados de madera, etc.

→ **Más información**





# ¿... dónde veo esto?



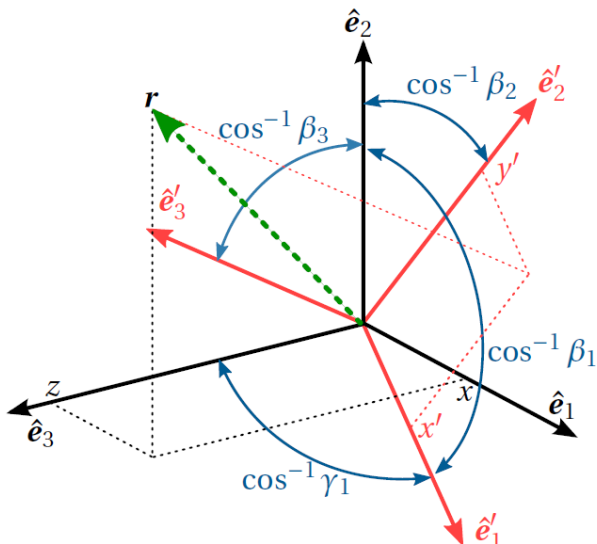
En ETABS, al igual que en todos los softwares de ingeniería estructural y mecánica, los elementos son simplificados y estudiados dentro de su propio sistema de coordenadas. Se activa la opción *Local Axes* (ejes locales) para ver sus ejes, estos están codificados por colores según su documentación.



# Cambio de base

$(x_i, \hat{e}_i)$   
Sistema de  
coordenadas  
**globales**

$(x'_i, \hat{e}'_i)$   
Sistema de  
coordenadas  
**locales**

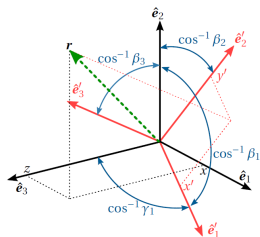




# Cambio de base

Componentes:

$$\begin{array}{lll}
 \alpha_1 = \hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_1 & \beta_1 = \hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_2 & \gamma_1 = \hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_3 \\
 \alpha_2 = \hat{e}'_2 \cdot \hat{e}_1 & \beta_2 = \hat{e}'_2 \cdot \hat{e}_2 & \gamma_2 = \hat{e}'_2 \cdot \hat{e}_3 \\
 \alpha_3 = \hat{e}'_3 \cdot \hat{e}_1 & \beta_3 = \hat{e}'_3 \cdot \hat{e}_2 & \gamma_3 = \hat{e}'_3 \cdot \hat{e}_3
 \end{array}$$



Representación vectorial:

$$\mathbf{r} = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3 = x'\hat{e}'_1 + y'\hat{e}'_2 + z'\hat{e}'_3$$

Haciendo el producto punto  $\langle [\text{eq 2.9}], \hat{e}_i \rangle$ ,  $i = 1, 2, 3$

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z'$$

$$y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z'$$

$$z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'$$

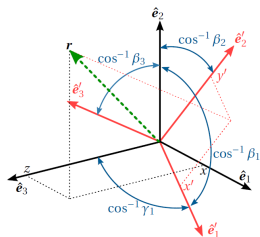


# Cambio de base

Obteniendo:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\mathbf{r}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}} \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{\mathbf{r}'}$$

$$\mathbf{T} = [\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3]$$



- $\mathbf{r}$ : vector de coordenadas globales del punto  $P$
- $\mathbf{r}'$ : vector de coordenadas locales del punto  $P$
- $\mathbf{T}$ : matriz de transformación



# Cambio de base

$\langle [\text{eq 2.9}], \hat{e}_i \rangle, 1 = 1, 2, 3$

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z'$$

$$y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z'$$

$$z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'$$

$\langle [\text{eq 2.9}], \hat{e}'_i \rangle, 1 = 1, 2, 3$

$$x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z$$

$$y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z$$

$$z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\mathbf{r}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}} \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{\mathbf{r}'}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{\mathbf{r}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\mathbf{r}}$$

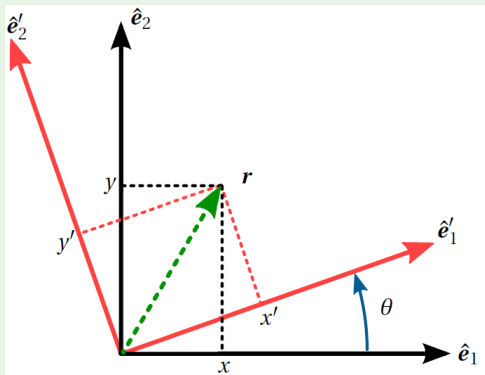
Se deduce que la matriz  $\mathbf{T}$  es **ortogonal**, ya que  $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$



# Cambio de base

## Ejemplo

Formular una expresión matemática para la rotación de la siguiente figura





# Derrotero

## 1 2.5. Cambio de base

## 2 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas

2.6.1. Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional

2.6.2. Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional

## 3 Referencias



# Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas

Fórmulas de transformación de la matriz de esfuerzos entre los sistemas de coordenadas  $\hat{e}_i$  y  $\hat{e}'_i$ .

Del sistema global al local

Incómodo al cómodo

$$\underline{\underline{\sigma'}} = \mathbf{T}^T \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{T}$$

Del sistema local al global

Cómodo al incómodo

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{T} \underline{\underline{\sigma'}} \mathbf{T}^T$$

Expandiendo la primera eq.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} & \tau_{y'z'} & \sigma_{z'} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma'}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}^T}^T \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}}$$





## Comentario sobre el uso de la programación

El libro guía de clase tiene códigos escritos en MAXIMA para el desarrollo de varias demostraciones simbólicas y cálculos numéricos de ahora en adelante. A su vez, estos estarán traducidos a lenguaje Python en el [repositorio del curso](#).





## A.5. Notación tensorial de Voigt

### repaso del apéndice

#### Woldemar Voigt

Esta notación se emplea para representar un tensor simétrico como uno de orden menor.

#### Ejemplo

La matriz de esfuerzos de Cauchy:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Se puede expresar como un vector de dimensión 6:

$$\underline{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}]^T \equiv [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6]^T$$



# Derrotero

- ① 2.5. Cambio de base
- ② 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas
  - 2.6.1. Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional
  - 2.6.2. Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional
- ③ Referencias



# Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional

## Código

02\_06\_01\_cambio\_de\_base.ipynb

$$\sigma'_x = 2\gamma_1\beta_1\tau_{yz} + 2\gamma_1\alpha_1\tau_{xz} + 2\alpha_1\beta_1\tau_{xy} + \gamma_1^2\sigma_z + \beta_1^2\sigma_y + \alpha_1^2\sigma_x$$

$$\sigma'_y = 2\gamma_2\beta_2\tau_{yz} + 2\gamma_2\alpha_2\tau_{xz} + 2\alpha_2\beta_2\tau_{xy} + \gamma_2^2\sigma_z + \beta_2^2\sigma_y + \alpha_2^2\sigma_x$$

$$\sigma'_z = 2\gamma_3\beta_3\tau_{yz} + 2\gamma_3\alpha_3\tau_{xz} + 2\alpha_3\beta_3\tau_{xy} + \gamma_3^2\sigma_z + \beta_3^2\sigma_y + \alpha_3^2\sigma_x$$

$$\tau'_{y'z'} = (\gamma_2\beta_3 + \beta_2\gamma_3)\tau_{yz} + (\gamma_2\alpha_3 + \alpha_2\gamma_3)\tau_{xz} + (\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3)\tau_{xy} + \gamma_2\gamma_3\sigma_z + \beta_2\beta_3\sigma_y + \alpha_2\alpha_3\sigma_x$$

$$\tau'_{x'z'} = (\gamma_1\beta_3 + \beta_1\gamma_3)\tau_{yz} + (\gamma_1\alpha_3 + \alpha_1\gamma_3)\tau_{xz} + (\alpha_1\beta_3 + \beta_1\alpha_3)\tau_{xy} + \gamma_1\gamma_3\sigma_z + \beta_1\beta_3\sigma_y + \alpha_1\alpha_3\sigma_x$$

$$\tau'_{x'y'} = (\gamma_1\beta_2 + \beta_1\gamma_2)\tau_{yz} + (\gamma_1\alpha_2 + \alpha_2\gamma_1)\tau_{xz} + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)\tau_{xy} + \gamma_1\gamma_2\sigma_z + \beta_1\beta_2\sigma_y + \alpha_1\alpha_2\sigma_x$$



# Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional

Código

02\_06\_01\_cambio\_de\_base.ipynb

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \sigma_{z'} \\ \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & 2\gamma_1\beta_1 & 2\gamma_1\alpha_1 & 2\alpha_1\beta_1 \\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & 2\gamma_2\beta_2 & 2\gamma_2\alpha_2 & 2\alpha_2\beta_2 \\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & 2\gamma_3\beta_3 & 2\gamma_3\alpha_3 & 2\alpha_3\beta_3 \\ \alpha_2\alpha_3 & \beta_2\beta_3 & \gamma_2\gamma_3 & \gamma_2\beta_3 + \beta_2\gamma_3 & \gamma_2\alpha_3 + \alpha_2\gamma_3 & \alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3 \\ \alpha_1\alpha_3 & \beta_1\beta_3 & \gamma_1\gamma_3 & \gamma_1\beta_3 + \beta_1\gamma_3 & \gamma_1\alpha_3 + \alpha_1\gamma_3 & \alpha_1\beta_3 + \beta_1\alpha_3 \\ \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & \gamma_1\beta_2 + \beta_1\gamma_2 & \gamma_1\alpha_2 + \alpha_1\gamma_2 & \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 \end{pmatrix}}_{T_\sigma} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$



# Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional

- Escritura alterna

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x'} &= \hat{e}'_1{}^T \underline{\underline{\sigma}} \hat{e}'_1 & \tau_{y'z'} &= \hat{e}'_2{}^T \underline{\underline{\sigma}} \hat{e}'_3 = \hat{e}'_3{}^T \underline{\underline{\sigma}} \hat{e}'_2 \\
 \sigma_{y'} &= \hat{e}'_2{}^T \underline{\underline{\sigma}} \hat{e}'_2 & \tau_{y'z'} &= \hat{e}'_1{}^T \underline{\underline{\sigma}} \hat{e}'_3 = \hat{e}'_3{}^T \underline{\underline{\sigma}} \hat{e}'_1 \\
 \sigma_{x'} &= \hat{e}'_3{}^T \underline{\underline{\sigma}} \hat{e}'_3 & \tau_{y'z'} &= \hat{e}'_1{}^T \underline{\underline{\sigma}} \hat{e}'_2 = \hat{e}'_2{}^T \underline{\underline{\sigma}} \hat{e}'_1
 \end{aligned}$$



## Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional

Como la dirección de los vectores  $\hat{e}'_1$ ,  $\hat{e}'_2$  y  $\hat{e}'_3$  es arbitraria, siempre y cuando estos sean vectores mutuamente ortogonales, de las ecuaciones anteriores se sigue que:

- el esfuerzo normal a un plano cuyo vector normal unitario es  $\hat{n}$  está dada por:

$$\begin{aligned}\sigma_{\hat{n}} &= \hat{n}^T \underline{\underline{\sigma}} \hat{n} \\ &= \sigma_x \alpha^2 + \sigma_y \beta^2 + \sigma_z \gamma^2 + 2\tau_{xy} \alpha \beta + 2\tau_{yz} \beta \gamma + 2\tau_{xz} \alpha \gamma\end{aligned}$$

- el esfuerzo cortante en la dirección del vector  $\hat{m}$  sobre un plano cuyo vector normal unitario es  $\hat{n}$  es:

$$\tau_{\hat{n}\hat{m}} = \hat{m}^T \underline{\underline{\sigma}} \hat{n}$$



# Derrotero

- ① 2.5. Cambio de base
- ② 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas
  - 2.6.1. Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional
  - 2.6.2. Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional
- ③ Referencias





# Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional

## Código

02\_06\_02\_sigma\_bidimensional.ipynb

$$\begin{aligned}\sigma_{x'}(\theta) &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_{y'}(\theta) &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_{x'y'}(\theta) &= \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta \\ \sigma_{z'}(\theta) &= \tau_{x'z'}(\theta) = \tau_{y'z'}(\theta) = 0\end{aligned}$$



# Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional

Código

02\_06\_02\_sigma\_bidimensional.ipynb

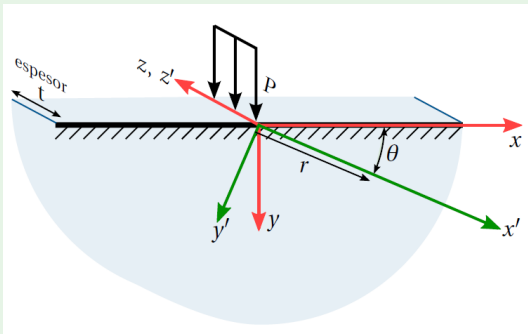
$$\begin{pmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}_{\sigma, 2D}} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$



# Ejemplo: el problema de Flamant

Código

02\_06\_02\_ejemplo\_01.ipynb





# Derrotero

## ① 2.5. Cambio de base

## ② 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas

2.6.1. Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional

2.6.2. Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional

## ③ Referencias



# Referencias

Álvarez, D. A. (2022). *Teoría de la elasticidad*, volume 1. Universidad Nacional de Colombia.



# Links

02 - Esfuerzos o tensiones

diegoandresalvarez

11 videos • 3870 visualizaciones • Actualizado por...

Reproducir... Aleatorio

En el curso de resistencia de materiales se estudió cómo se podían calcular los esfuerzos en vigas y columnas sometidas a tracción, compresión, flexión o torsión. En mecánica de sólidos se estudian los esfuerzos y las deformaciones unitarias en objetos de geometría más complicada. En esta lista de reproducción se hará una revisión de los conceptos vistos en el curso de resistencia de materiales con respecto a esfuerzos, esfuerzos principales, círculo de Mohr, entre otros temas de interés, pero tratados desde un...

1. ¿Qué es un esfuerzo o tensión? 0:45
2. Esfuerzos en un elemento rectangular infinitesimal de espesor t 12:37
3. Esfuerzos en un elemento triangular infinitesimal de espesor t 14:49
4. Esfuerzos en un paralelepípedo infinitesimal 9:54
5. Esfuerzos en un tetraedro infinitesimal 17:39
6. Análisis de tensiones de Mohr en 2D 16:34
7. Análisis de tensiones de Mohr en 3D 21:39
8. 02.01 - Qué es la tensión o el esfuerzo? diegoandresalvarez • 1510 visualizaciones • hace 2 años
9. 02.02.01 - Análisis de los esfuerzos en un elemento rectangular infinitesimal de espesor t diegoandresalvarez • 1290 visualizaciones • hace 2 años
10. 02.02.02 - Análisis de los esfuerzos en un elemento triangular infinitesimal de espesor t diegoandresalvarez • 1210 visualizaciones • hace 2 años
11. 02.03.01 - Esfuerzos en un paralelepípedo infinitesimal diegoandresalvarez • 1172 visualizaciones • hace 2 años
12. 02.03.02 - Análisis de un elemento tetraédrico infinitesimal diegoandresalvarez • 1444 visualizaciones • hace 2 años
13. 02.09 - Círculo de Mohr en 2D (Parte 1/3) - Deducción del círculo de Mohr para tensión plana diegoandresalvarez • 3165 visualizaciones • hace 2 años
14. 02.09 - Círculo de Mohr en 2D (Parte 2/3) - Esfuerzos normales y cortantes máximos y mínimos diegoandresalvarez • 2343 visualizaciones • hace 2 años

- Lista de reproducción: [02 - Esfuerzos o Tensiones](#)
- Repositorio del curso: [github/medio\\_continuo](#)