

## 02. Estudio de los esfuerzos en un punto

secciones 2.7 a 2.10

Michael Heredia Pérez  
[mherediap@unal.edu.co](mailto:mherediap@unal.edu.co)

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales  
Departamento de Ingeniería Civil  
Mecánica Tensorial

2023a



## Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada ([Álvarez, 2022](#)).



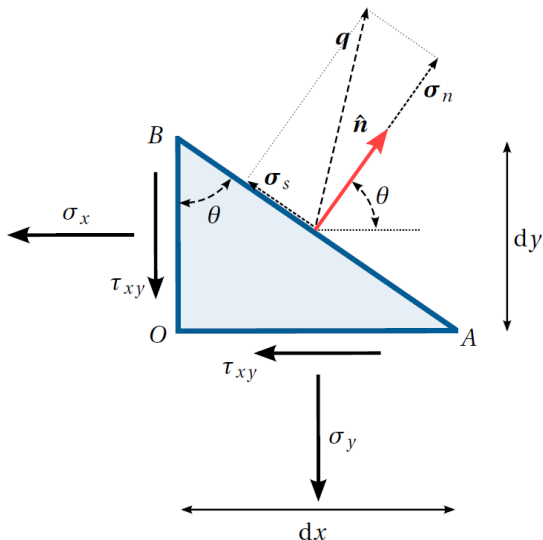
# Derrotero

- ① 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- ② 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
  - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
  - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
  - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
  - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- ③ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
  - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
  - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
  - 2.9.3. La función  $\tan^{-1}$
  - 2.9.4. Ejemplo
  - 2.9.7. Ejemplo
- ④ 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- ⑤ Referencias

# Derrotero

- ➊ 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- ➋ 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
  - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
  - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
  - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
  - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- ➌ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
  - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
  - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
  - 2.9.3. La función  $\tan^2$
  - 2.9.4. Ejemplo
  - 2.9.7. Ejemplo
- ➍ 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- ➎ Referencias

# Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano



Entendamos el vector del esfuerzo normal  $\sigma_n$  como la proyección del vector de esfuerzos  $\mathbf{q}$  sobre el vector normal al plano  $\hat{\mathbf{n}}$ :

$$\sigma_n = \text{Proy } \mathbf{q} / \hat{\mathbf{n}} = \frac{\langle \mathbf{q}, \hat{\mathbf{n}} \rangle}{\langle \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle} \hat{\mathbf{n}}$$

# Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano

en 3D

- El valor del esfuerzo normal:

$$\sigma_n = \sigma_x \alpha^2 + \sigma_y \beta^2 + \sigma_z \gamma^2 + 2\tau_{xz} \alpha \gamma + 2\tau_{yz} \beta \gamma + 2\tau_{xy} \alpha \beta$$

- El valor del esfuerzo tangencial o cortante:

$$\tau_n^2 = (\sigma_x \alpha + \tau_{xy} \beta + \tau_{xz} \gamma)^2 + (\tau_{xy} \alpha + \sigma_y \beta + \tau_{yz} \gamma)^2 + (\tau_{xz} \alpha + \tau_{yz} \beta + \sigma_z \gamma)^2 - \sigma_n^2$$

## Código

- [02\\_07.ipynb](#)

# Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano en 2D

$$\sigma'_x \rightarrow \sigma_n \quad \tau_{x'y'} \rightarrow \tau_n$$

- El valor del esfuerzo normal:

$$\begin{aligned}\sigma_n(\theta) &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy}\end{aligned}$$

- El valor del esfuerzo tangencial o cortante:

$$\tau_n(\theta) = \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta$$

# Derrotero

- ① 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- ② 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
  - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
  - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
  - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
  - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- ③ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
  - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
  - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
  - 2.9.3. La función atan2
  - 2.9.4. Ejemplo
  - 2.9.7. Ejemplo
- ④ 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- ⑤ Referencias



# Derrotero

- ➊ 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- ➋ 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
  - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
  - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
  - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
  - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- ➌ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
  - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
  - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
  - 2.9.3. La función atan2
  - 2.9.4. Ejemplo
  - 2.9.7. Ejemplo
- ➍ 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- ➎ Referencias

# Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones

## Esfuerzos principales en 2D

$$(\sigma_1)_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
$$(\sigma_2)_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

# Tensiones y direcciones principales

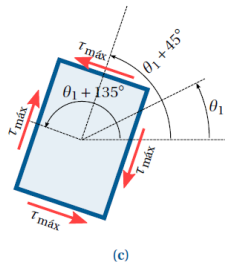
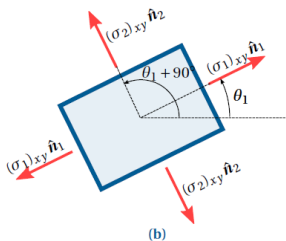
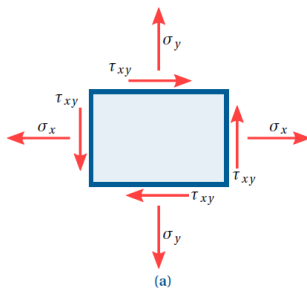
## 2D

Debemos dar solución a los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_x - (\sigma_1)_{xy}) \alpha_1 + \tau_{xy} \beta_1 &= 0 & (\sigma_x - (\sigma_2)_{xy}) \alpha_2 + \tau_{xy} \beta_2 &= 0 \\
 \tau_{xy} \alpha_1 + (\sigma_y - (\sigma_1)_{xy}) \beta_1 &= 0 & \text{y} \quad \tau_{xy} \alpha_2 + (\sigma_y - (\sigma_2)_{xy}) \beta_2 &= 0 \\
 \alpha_1^2 + \beta_1^2 &= 1 & \alpha_2^2 + \beta_2^2 &= 1
 \end{aligned}$$

# Tensiones y direcciones principales

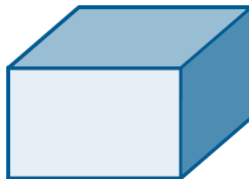
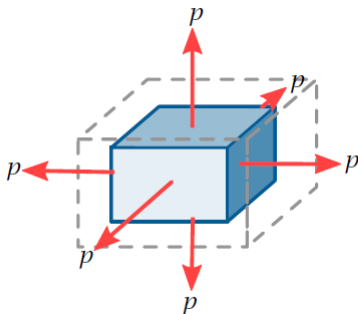
2D



# Tensiones y direcciones principales

2D

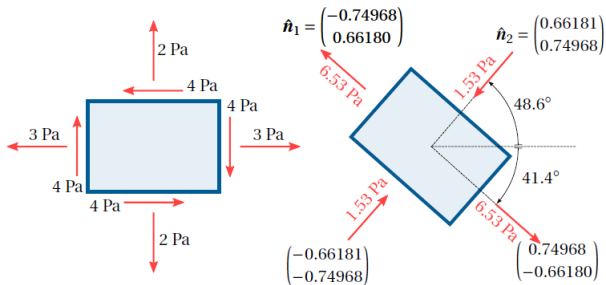
¿Cuándo tenemos un discriminante nulo?



# Tensiones y direcciones principales

2D

## Ejemplo



## Código

- [02\\_08\\_01\\_ejemplo\\_01.ipynb](#)

# Derrotero

- ➊ 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- ➋ 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
  - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
  - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
  - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
  - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- ➌ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
  - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
  - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
  - 2.9.3. La función  $\tan^2$
  - 2.9.4. Ejemplo
  - 2.9.7. Ejemplo
- ➍ 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- ➎ Referencias

# Tensiones y direcciones principales

## 3D

Expandiendo el determinante  $\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \mathbf{I}) = 0$

$$\begin{aligned}
 (\sigma_x - \sigma_n) [(\sigma_y - \sigma_n)(\sigma_z - \sigma_n) - \tau_{yz}^2] \\
 - \tau_{xy} [\tau_{xy}(\sigma_z - \sigma_n) - \tau_{yz}\tau_{xz}] \\
 + \tau_{xz} [\tau_{xy}\tau_{yz} - (\sigma_y - \sigma_n)\tau_{xz}] = 0;
 \end{aligned}$$



# Tensiones y direcciones principales

3D

Agrupando y reduciendo términos:

Ecuación característica de  $\underline{\underline{\sigma}}$  tridimensional

$$-\sigma_n^3 + I_1\sigma_n^2 - I_2\sigma_n + I_3 = 0$$

donde,

$$\Theta := I_1 := \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})$$

$$I_2 := \frac{1}{2} \left( (\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}))^2 - \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^2) \right)$$

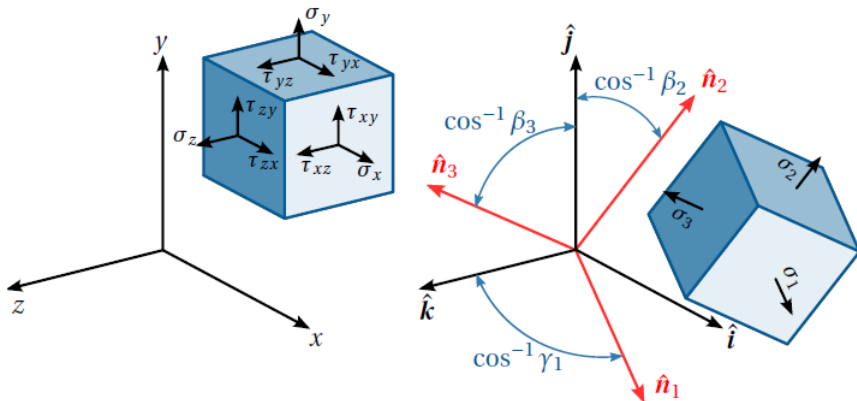
$$I_3 := \det(\underline{\underline{\sigma}}).$$

Código

- [02\\_08\\_02.ipynb](#)

# Tensiones y direcciones principales

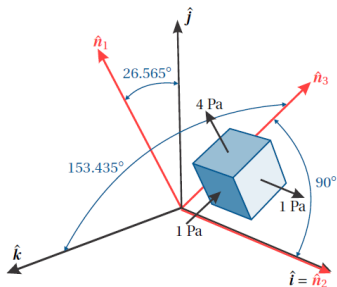
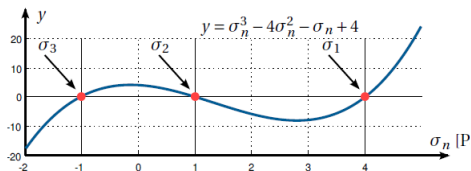
3D



# Tensiones y direcciones principales

3D

## Ejemplo



## Código

- `02_08_02_ejemplos.ipynb`

# Derrotero

- ➊ 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- ➋ 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
  - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
  - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
  - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
  - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- ➌ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
  - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
  - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
  - 2.9.3. La función atan2
  - 2.9.4. Ejemplo
  - 2.9.7. Ejemplo
- ➍ 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- ➎ Referencias

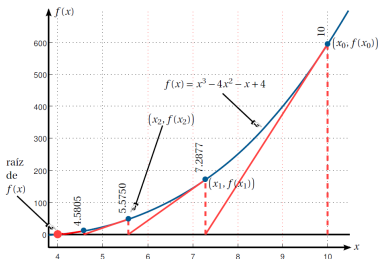
# Método de Newton-Raphson

para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica

## Estudio autónomo

Sería interesante:

- ¿Cómo lo programo en Python o Matlab?
- ¿Ya está implementado en Python o Matlab? ¿Cómo funciona?



# Derrotero

## ① 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano

## ② 2.8. Esfuerzos y direcciones principales

2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones

2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones

2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica

2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales

## ③ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales

2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones

2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr

2.9.3. La función atan2

2.9.4. Ejemplo

2.9.7. Ejemplo

## ④ 2.10. La analogía del bombillo y la caja

## ⑤ Referencias

# Ortogonalidad de las direcciones principales

## Estudio autónomo

- Verifique la ortogonalidad de los vectores propios del ejercicio anterior

## Código

- `02_08_04_ejemplo.ipynb`

# Derrotero

- ① 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- ② 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
  - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
  - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
  - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
  - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- ③ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
  - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
  - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
  - 2.9.3. La función  $\tan^2$
  - 2.9.4. Ejemplo
  - 2.9.7. Ejemplo
- ④ 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- ⑤ Referencias



# Círculo de Mohr

## Estudio autónomo

Prestar atención a:

- Significado físico y matemático.
- Construcción e interpretación de los ángulos.
- Aplicación de la función `atan2`

## Código

- `02_09_04_ejemplo.ipynb`
- `circulo_mohr_2d.py`

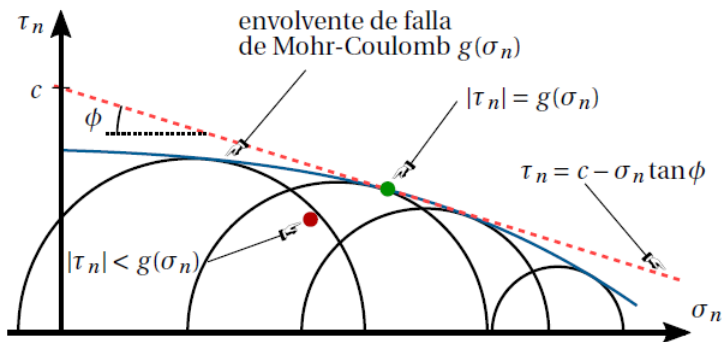
# Círculo de Mohr

La **circunferencia de Mohr** fue propuesta por el ingeniero civil alemán Otto Mohr (1835 - 1918) en 1882 **con el objeto de representar gráficamente el estado de esfuerzos en un punto.**

# Aplicaciones

## Círculo de Mohr

### Criterio de falla de Mohr-Coulomb

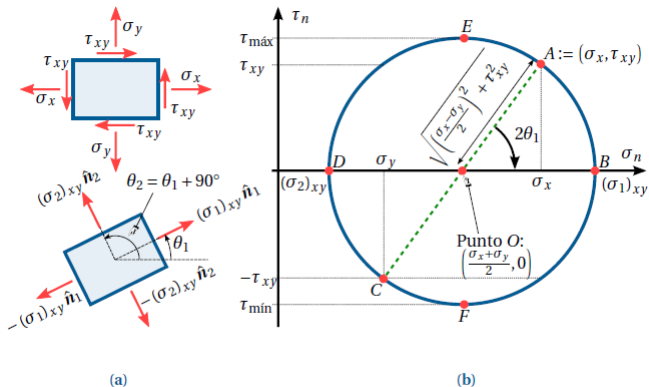


Este criterio es altamente utilizado en el análisis de cimentaciones.

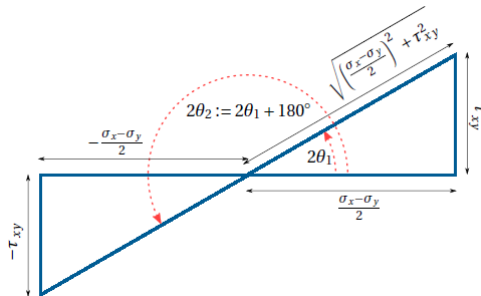
# Derrotero

- ➊ 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- ➋ 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
  - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
  - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
  - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
  - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- ➌ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
  - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
  - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
  - 2.9.3. La función  $\tan^2$
  - 2.9.4. Ejemplo
  - 2.9.7. Ejemplo
- ➍ 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- ➎ Referencias

# Círculo de Mohr en dos dimensiones



# Círculo de Mohr en dos dimensiones



# Derrotero

## ① 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano

## ② 2.8. Esfuerzos y direcciones principales

2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones

2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones

2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica

2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales

## ③ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales

2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones

2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr

2.9.3. La función  $\tan^2$

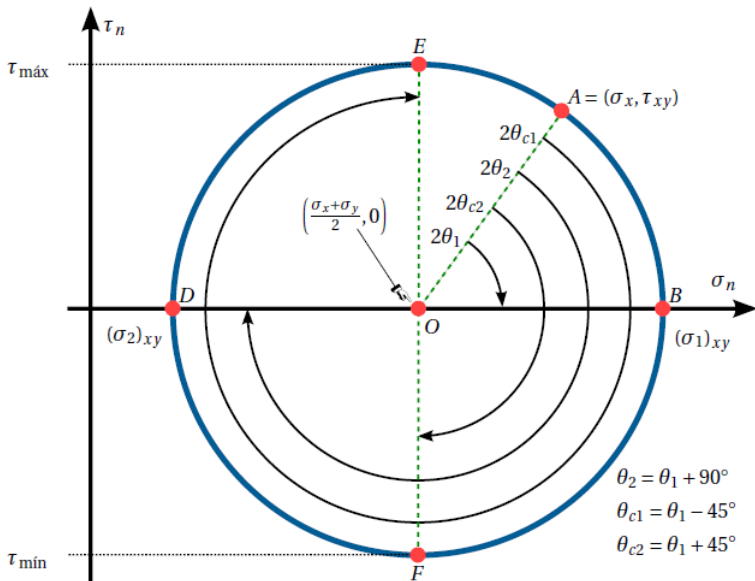
2.9.4. Ejemplo

2.9.7. Ejemplo

## ④ 2.10. La analogía del bombillo y la caja

## ⑤ Referencias

# Gráfica e interpretación del círculo de Mohr





# Derrotero

## ① 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano

## ② 2.8. Esfuerzos y direcciones principales

2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones

2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones

2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica

2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales

## ③ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales

2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones

2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr

2.9.3. La función  $\tan^{-1}$

2.9.4. Ejemplo

2.9.7. Ejemplo

## ④ 2.10. La analogía del bombillo y la caja

## ⑤ Referencias

# Derrotero

## ① 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano

## ② 2.8. Esfuerzos y direcciones principales

2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones

2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones

2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica

2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales

## ③ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales

2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones

2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr

2.9.3. La función  $\tan^2$

2.9.4. Ejemplo

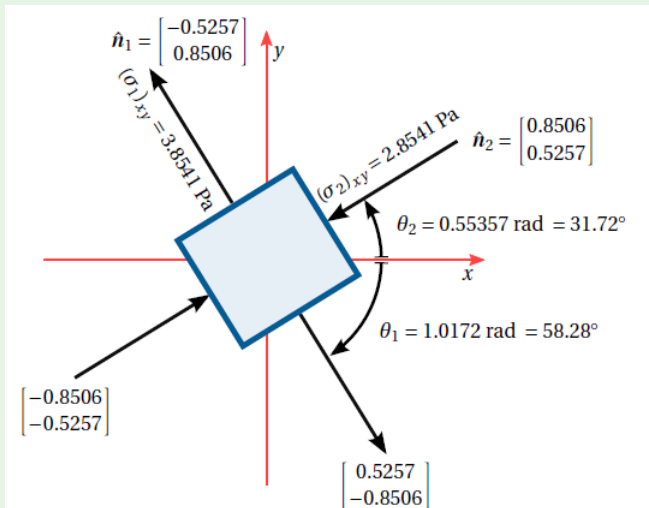
2.9.7. Ejemplo

## ④ 2.10. La analogía del bombillo y la caja

## ⑤ Referencias

# Círculo de Mohr en dos dimensiones

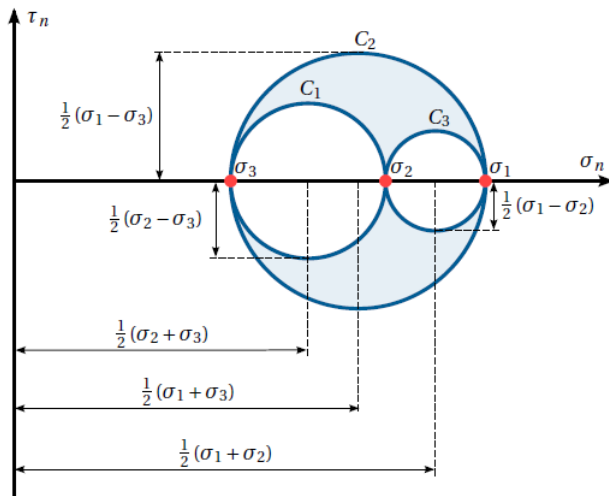
## Ejemplo



# Derrotero

- ➊ 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- ➋ 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
  - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
  - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
  - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
  - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- ➌ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
  - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
  - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
  - 2.9.3. La función  $\tan^2$
  - 2.9.4. Ejemplo
  - 2.9.7. Ejemplo
- ➍ 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- ➎ Referencias

# Círculo de Mohr en tres dimensiones

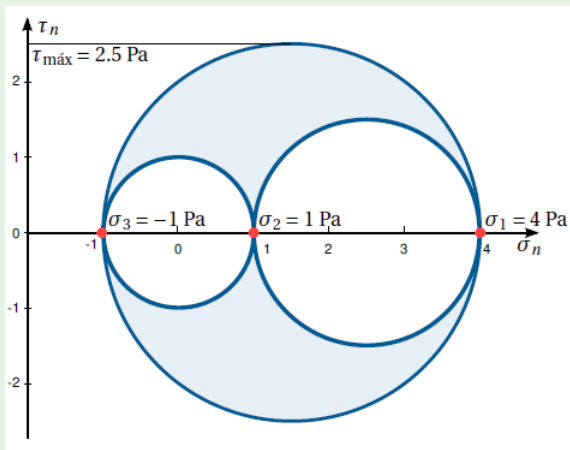


# Círculo de Mohr en tres dimensiones

## Ejemplo 1

# Círculo de Mohr en tres dimensiones

## Ejemplo 2



# Derrotero

- ① 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- ② 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
  - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
  - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
  - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
  - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- ③ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
  - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
  - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
  - 2.9.3. La función  $\tan^2$
  - 2.9.4. Ejemplo
  - 2.9.7. Ejemplo
- ④ 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- ⑤ Referencias



# La analogía del bombillo y la caja

## Estudio autónomo

Prestar atención a:

- La analogía del bombillo y la caja :)

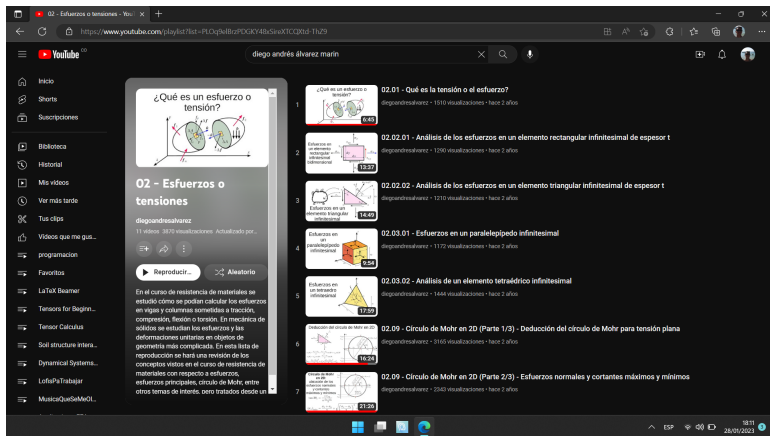
# Derrotero

- ① 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- ② 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
  - 2.8.1. Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones
  - 2.8.2. Tensiones y direcciones principales en tres dimensiones
  - 2.8.3. Método de Newton-Raphson para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica
  - 2.8.4. Ortogonalidad de las direcciones principales
- ③ 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
  - 2.9.1. Círculo de Mohr en dos dimensiones
  - 2.9.2. Gráfica e interpretación del círculo de Mohr
  - 2.9.3. La función  $\tan^2$
  - 2.9.4. Ejemplo
  - 2.9.7. Ejemplo
- ④ 2.10. La analogía del bombillo y la caja
- ⑤ Referencias

# Referencias

Álvarez, D. A. (2022). *Teoría de la elasticidad*, volume 1. Universidad Nacional de Colombia.

# Links



- Lista de reproducción: [02 - Esfuerzos o Tensiones](#)
- Repositorio del curso: [github/medio\\_continuo](https://github.com/medio_continuo)