02. Estudio de los esfuerzos en un punto

secciones 2.5 a 2.6

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil
Mecánica Tensorial

2023a

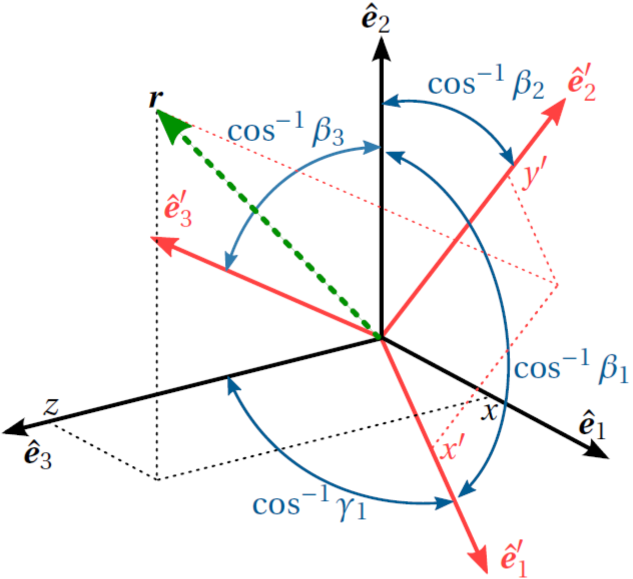
Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada (Álvarez, 2022).

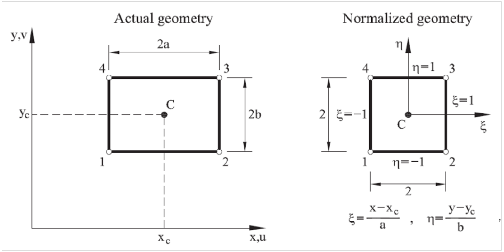
Derrotero

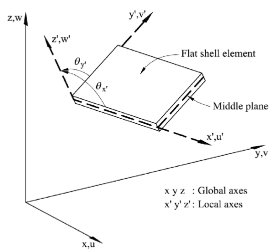
Derrotero

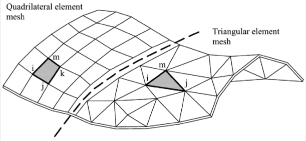
Cambio de base



¿... dónde veo esto?

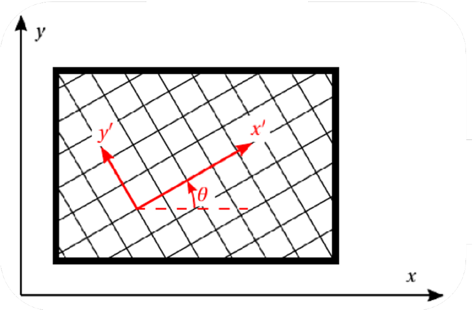






En una malla de elementos finitos, cada elemento se estudia en un sistema coordenado local (x', y') o (ξ, η).

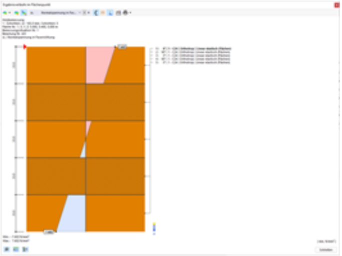
¿... dónde veo esto?



Los ejes de ortotropía de un sólido no siempre estarán en el mismo sentido de los ejes globales, así que se representan en otro sistema de coordenadas locales.

¿... dónde veo esto?

Nuevas características en RFEM 6 y RSTAB 9



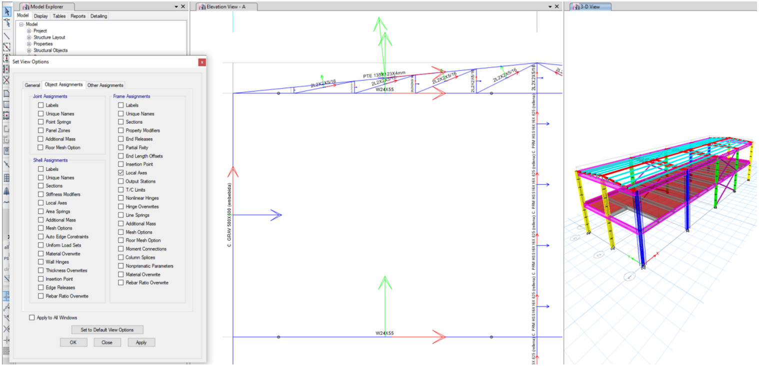
Distribución normal de tensiones en un panel de madera contralaminada (CLT)

Cálculo de superficies de madera ortótropa y madera contralaminada (CLT)

¿Trabaja con madera? Entonces tenemos buenas noticias. En el complemento Cálculo de madera para RFEM 6, ahora puede diseñar tanto barras como superficies según el Eurocódigo, como madera contralaminada (CLT), madera laminada encolada, madera de coníferas, transformados de madera, etc.

→ **Más información**

¿... dónde veo esto?



En ETABS, al igual que en todos los softwares de ingeniería estructural y mecánica, los elementos son simplificados y estudiados dentro de su propio sistema de coordenadas. Se activa la opción *Local Axes* (ejes locales) para ver sus ejes, estos están codificados por colores según su documentación.

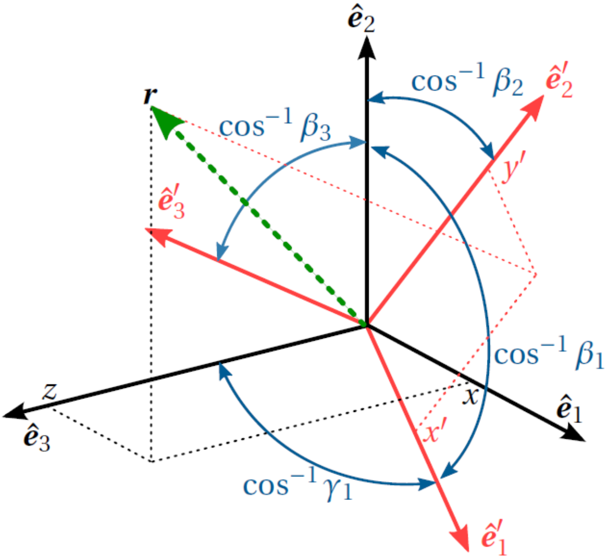
Cambio de base

$$(x_i, \hat{\boldsymbol{e}}_i)$$

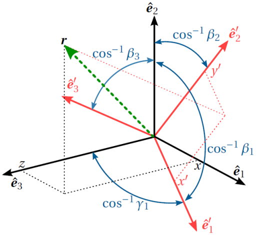
Sistema de coordenadas **globales**

$$(x'_i, \hat{\boldsymbol{e}}'_i)$$

Sistema de coordenadas **locales**



Cambio de base



Componentes:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \hat{\boldsymbol{e}}'_1 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_1 & \beta_1 &= \hat{\boldsymbol{e}}'_1 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_2 & \gamma_1 &= \hat{\boldsymbol{e}}'_1 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_3 \\ \alpha_2 &= \hat{\boldsymbol{e}}'_2 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_1 & \beta_2 &= \hat{\boldsymbol{e}}'_2 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_2 & \gamma_2 &= \hat{\boldsymbol{e}}'_2 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_3 \\ \alpha_3 &= \hat{\boldsymbol{e}}'_3 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_1 & \beta_3 &= \hat{\boldsymbol{e}}'_3 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_2 & \gamma_3 &= \hat{\boldsymbol{e}}'_3 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_3 \end{aligned}$$

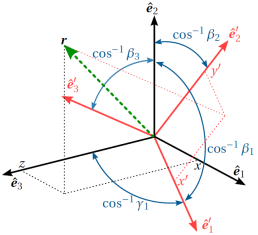
Representación vectorial:

$$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{e}}_1 + y\hat{\boldsymbol{e}}_2 + z\hat{\boldsymbol{e}}_3 = x'\hat{\boldsymbol{e}}'_1 + y'\hat{\boldsymbol{e}}'_2 + z'\hat{\boldsymbol{e}}'_3$$

Haciendo el producto punto $\langle [\text{eq } 2.9], \hat{\boldsymbol{e}}_i \rangle$, $1 = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{aligned}$$

Cambio de base



Obteniendo:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{r}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{T}} \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{r}'}$$

$$\boldsymbol{T} = [\hat{\boldsymbol{e}}'_1, \hat{\boldsymbol{e}}'_2, \hat{\boldsymbol{e}}'_3]$$

- $\boldsymbol{r}$: vector de coordenadas globales del punto P
- $\boldsymbol{r}'$: vector de coordenadas locales del punto P
- $\boldsymbol{T}$: matriz de transformación

Cambio de base

$\langle [\text{eq } 2.9], \hat{\boldsymbol{e}}_i \rangle$, $1 = 1, 2, 3$

$\langle [\text{eq } 2.9], \hat{\boldsymbol{e}}'_i \rangle$, $1 = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{r}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{T}} \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{r'}}$$

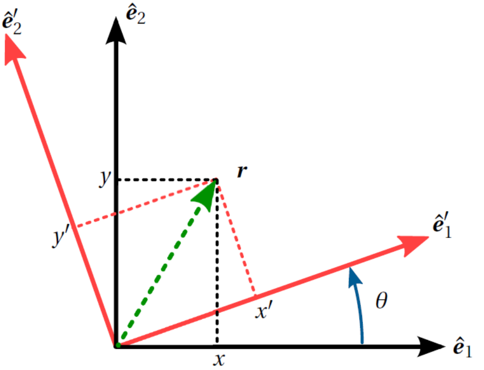
$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{r'}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{T^T}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{r}}$$

Se deduce que la matriz T es **ortogonal**, ya que $T^{-1} = T^T$

Cambio de base

Ejemplo

Formular una expresión matemática para la rotación de la siguiente figura



Derrotero

Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas

Fórmulas de transformación de la matriz de esfuerzos entre los sistemas de coordenadas $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ y $\hat{\boldsymbol{e}}'_i$.

Del sistema global al local

Incómodo al cómodo

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}' = \boldsymbol{T}^T \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \boldsymbol{T}$$

Del sistema local al global

Cómodo al incómodo

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \boldsymbol{T} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}' \boldsymbol{T}^T$$

Expandiendo la primera eq.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} & \tau_{y'z'} & \sigma_{z'} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}^T}_{\boldsymbol{T}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{T}}$$

Comentario sobre el uso de la programación

El libro guía de clase tiene códigos escritos en MAXIMA para el desarrollo de varias demostraciones simbólicas y cálculos numéricos de ahora en adelante. A su vez, estos estarán traducidos a lenguaje Python en el repositorio del curso.

A.5. Notación tensorial de Voigt

repaso del apéndice

Woldemar Voigt

Esta notación se emplea para representar un tensor simétrico como uno de orden menor.

Ejemplo

La matriz de esfuerzos de Cauchy:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Se puede expresar como un vector de dimensión 6:

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}]^T \equiv [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6]^T$$

Derrotero

Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional

Código

02_06_01_cambio_de_base.ipynb

$$
\begin{aligned}
\sigma'_x =& 2\gamma_1\beta_1\tau_{yz} + 2\gamma_1\alpha_1\tau_{xz} + 2\alpha_1\beta_1\tau_{xy} + \gamma_1^2\sigma_z + \beta_1^2\sigma_y + \alpha_1^2\sigma_x \\
\sigma'_y =& 2\gamma_2\beta_2\tau_{yz} + 2\gamma_2\alpha_2\tau_{xz} + 2\alpha_2\beta_2\tau_{xy} + \gamma_2^2\sigma_z + \beta_2^2\sigma_y + \alpha_2^2\sigma_x \\
\sigma'_z =& 2\gamma_3\beta_3\tau_{yz} + 2\gamma_3\alpha_3\tau_{xz} + 2\alpha_3\beta_3\tau_{xy} + \gamma_3^2\sigma_z + \beta_3^2\sigma_y + \alpha_3^2\sigma_x \\
\tau'_{y'z'} =& (\gamma_2\beta_3 + \beta_2\gamma_3)\tau_{yz} + (\gamma_2\alpha_3 + \alpha_2\gamma_3)\tau_{xz} + (\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3)\tau_{xy} + \\
& \gamma_2\gamma_3\sigma_z + \beta_2\beta_3\sigma_y + \alpha_2\alpha_3\sigma_x \\
\tau'_{x'z'} =& (\gamma_1\beta_3 + \beta_1\gamma_3)\tau_{yz} + (\gamma_1\alpha_3 + \alpha_1\gamma_3)\tau_{xz} + (\alpha_1\beta_3 + \beta_1\alpha_3)\tau_{xy} + \\
& \gamma_1\gamma_3\sigma_z + \beta_1\beta_3\sigma_y + \alpha_1\alpha_3\sigma_x \\
\tau'_{x'y'} =& (\gamma_1\beta_2 + \beta_1\gamma_2)\tau_{yz} + (\gamma_1\alpha_2 + \alpha_2\gamma_1)\tau_{xz} + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)\tau_{xy} + \\
& \gamma_1\gamma_2\sigma_z + \beta_1\beta_2\sigma_y + \alpha_1\alpha_2\sigma_x
\end{aligned}
$$

Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional

Código

02_06_01_cambio_de_base.ipynb

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \sigma_{z'} \\ \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & 2\gamma_1\beta_1 & 2\gamma_1\alpha_1 & 2\alpha_1\beta_1 \\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & 2\gamma_2\beta_2 & 2\gamma_2\alpha_2 & 2\alpha_2\beta_2 \\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & 2\gamma_3\beta_3 & 2\gamma_3\alpha_3 & 2\alpha_3\beta_3 \\ \alpha_2\alpha_3 & \beta_2\beta_3 & \gamma_2\gamma_3 & \gamma_2\beta_3 + \beta_2\gamma_3 & \gamma_2\alpha_3 + \alpha_2\gamma_3 & \alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3 \\ \alpha_1\alpha_3 & \beta_1\beta_3 & \gamma_1\gamma_3 & \gamma_1\beta_3 + \beta_1\gamma_3 & \gamma_1\alpha_3 + \alpha_1\gamma_3 & \alpha_1\beta_3 + \beta_1\alpha_3 \\ \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & \gamma_1\beta_2 + \beta_1\gamma_2 & \gamma_1\alpha_2 + \alpha_1\gamma_2 & \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{T_\sigma}} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional

- Escritura alterna

$$
\begin{aligned}
\sigma_{x'} &= \hat{\boldsymbol{e}'}_1^T \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \hat{\boldsymbol{e}'}_1 & \tau_{y'z'} &= \hat{\boldsymbol{e}'}_2^T \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \hat{\boldsymbol{e}'}_3 = \hat{\boldsymbol{e}'}_3^T \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \hat{\boldsymbol{e}'}_2 \\
\sigma_{y'} &= \hat{\boldsymbol{e}'}_2^T \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \hat{\boldsymbol{e}'}_2 & \tau_{y'z'} &= \hat{\boldsymbol{e}'}_1^T \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \hat{\boldsymbol{e}'}_3 = \hat{\boldsymbol{e}'}_3^T \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \hat{\boldsymbol{e}'}_1 \\
\sigma_{x'} &= \hat{\boldsymbol{e}'}_3^T \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \hat{\boldsymbol{e}'}_3 & \tau_{y'z'} &= \hat{\boldsymbol{e}'}_1^T \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \hat{\boldsymbol{e}'}_2 = \hat{\boldsymbol{e}'}_2^T \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \hat{\boldsymbol{e}'}_1
\end{aligned}
$$

Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional

Como la dirección de los vectores $\hat{\boldsymbol{e}}'_1$, $\hat{\boldsymbol{e}}'_2$ y $\hat{\boldsymbol{e}}'_3$ es arbitraria, siempre y cuando estos sean vectores mutuamente ortogonales, de las ecuaciones anteriores se sigue que:

- el esfuerzo normal a un plano cuyo vector normal unitario es $\hat{\boldsymbol{n}}$ está dada por:

$$\begin{aligned}\sigma_{\hat{\boldsymbol{n}}} &= \hat{\boldsymbol{n}}^T \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \hat{\boldsymbol{n}} \\ &= \sigma_x \alpha^2 + \sigma_y \beta^2 + \sigma_z \gamma^2 + 2\tau_{xy}\alpha\beta + 2\tau_{yz}\beta\gamma + 2\tau_{xz}\alpha\gamma\end{aligned}$$

- el esfuerzo cortante en la dirección del vector $\hat{\boldsymbol{m}}$ sobre un plano cuto vector normal unitario es $\hat{\boldsymbol{n}}$ es:

$$\tau_{\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{m}}} = \hat{\boldsymbol{m}}^T \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \hat{\boldsymbol{n}}$$

Derrotero

Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional

Código

02_06_02_sigma_bidimensional.ipynb

$$
\begin{aligned}
\sigma_{x'}(\theta) &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \\
\sigma_{y'}(\theta) &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \\
\tau_{x'y'}(\theta) &= \tau_{xy}\cos 2\theta - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} sin 2\theta \\
\sigma_{z'}(\theta) &= \tau_{x'z'}(\theta) = \tau_{y'z'}(\theta) = 0
\end{aligned}
$$

Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional

Código

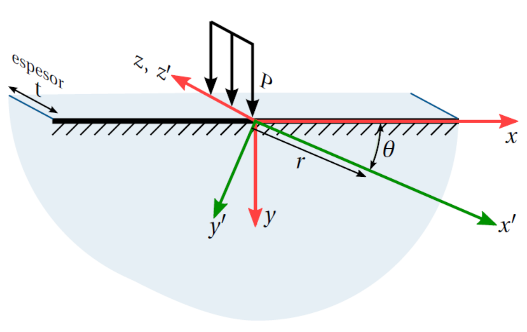
02_06_02_sigma_bidimensional.ipynb

$$\begin{pmatrix}\sigma_{x'}\\ \sigma_{y'}\\ \tau_{x'y'}\end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix}\cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta\\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta\\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\sigma},2D}} \begin{pmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{pmatrix}$$

Ejemplo: el problema de Flamant

Código

02_06_02_ejemplo_01.ipynb

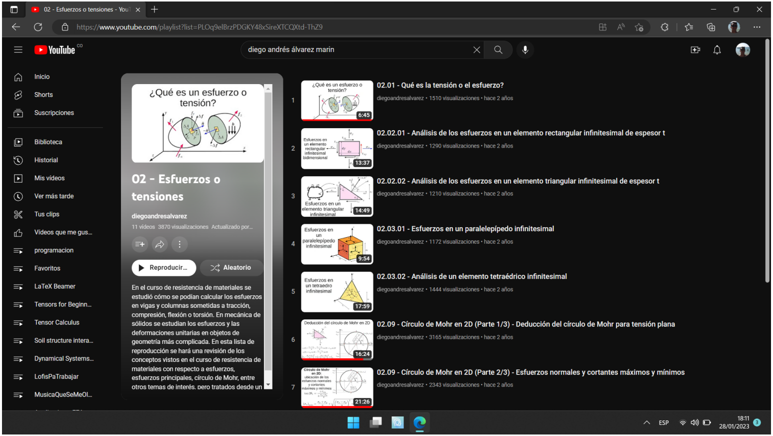


Derrotero

Referencias

Álvarez, D. A. (2022). *Teoría de la elasticidad*, volume 1. Universidad Nacional de Colombia.

Links



- Lista de resproducción: 02 - Esfuerzos o Tensiones
- Repositorio del curso: github/medio_continuo