05. Ecuaciones diferenciales fundamentales de la teoría de la elasticidad

parte c: secciones 5.8 a 5.13

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil
Mecánica de Sólidos

2022b

Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada [Álvarez, 2022].

Derrotero

Derrotero

5.8. Función de tensión de Airy

Uso

Se utiliza en mecánica de sólidos para deducir analíticamente muchas condiciones de esfuerzo presentes en sólidos con ciertas geometrías *bidimensionales*. No existen las funciones de tensión de Airy para el caso tridimensional

Método

Se asume una función de tensión ϕ que depende de unos coeficientes desconocidos y que satisfagan un operador llamado *el biarmónico*; luego, se estima el campo vectorial de desfuerzos, deformaciones y desplazamientos y a partir de las condiciones de frontera, se estima el valor de los coeficientes desconocidos.

5.8. Función de tensión de Airy

Uso

Se utiliza en mecánica de sólidos para deducir analíticamente muchas condiciones de esfuerzo presentes en sólidos con ciertas geometrías *bidimensionales*. No existen las funciones de tensión de Airy para el caso tridimensional

Método

Se asume una función de tensión ϕ que depende de unos coeficientes desconocidos y que satisfagan un operador llamado *el biarmónico*; luego, se estima el campo vectorial de desfuerzos, deformaciones y desplazamientos y a partir de las condiciones de frontera, se estima el valor de los coeficientes desconocidos.

5.8. Función de tensión de Airy

Uso

Se utiliza en mecánica de sólidos para deducir analíticamente muchas condiciones de esfuerzo presentes en sólidos con ciertas geometrías *bidimensionales*. No existen las funciones de tensión de Airy para el caso tridimensional

Método

Se asume una función de tensión ϕ que depende de unos coeficientes desconocidos y que satisfagan un operador llamado *el biarmónico*; luego, se estima el campo vectorial de desfuerzos, deformaciones y desplazamientos y a partir de las condiciones de frontera, se estima el valor de los coeficientes desconocidos.

5.8. Función de tensión de Airy

Uso

Se utiliza en mecánica de sólidos para deducir analíticamente muchas condiciones de esfuerzo presentes en sólidos con ciertas geometrías *bidimensionales*. No existen las funciones de tensión de Airy para el caso tridimensional

Método

Se asume una función de tensión ϕ que depende de unos coeficientes desconocidos y que satisfagan un operador llamado *el biarmónico*; luego, se estima el campo vectorial de desfuerzos, deformaciones y desplazamientos y a partir de las condiciones de frontera, se estima el valor de los coeficientes desconocidos.

5.8. Función de tensión de Airy

Sea $V(x, y)$ una función tal que:

$$X(x, y) = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial x}$$
$$Y(x, y) = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial y}$$

y hágase

$$\sigma_x(x, y) = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} + V(x, y)$$
$$\sigma_y(x, y) = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} + V(x, y)$$
$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x \partial y}$$

$$X(x,y) = -\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}$$

$$Y(x,y) = -\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}$$

$$\sigma_x(x,y) = \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial y^2} + V(x,y)$$

$$\sigma_y(x,y) = \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x^2} + V(x,y)$$

$$\tau_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x \partial y}$$

- $\boldsymbol{b} = -\nabla V$ donde $\boldsymbol{b} = [X, Y]^T$
- V pertenece a un tipo especial de funciones conocidas como **funciones potenciales escalares**, las cuales sirven para representar un valor físicomo como la derivada de V.
- ϕ se conoce como **la función de tensión de Airy** (*Airy stress function*).

- George Bidell Airy (1801-1892) en 1862, matemático y astrónomo inglés.

5.8. Función de tensión de Airy

$$X(x,y) = -\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}$$
$$Y(x,y) = -\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}$$

$$\sigma_x(x,y) = \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial y^2} + V(x,y)$$
$$\sigma_y(x,y) = \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x^2} + V(x,y)$$
$$\tau_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x \partial y}$$

- $\boldsymbol{b} = -\nabla V$donde $\boldsymbol{b} = [X, Y]^T$
- V pertenece a un tipo especial de funciones conocidas como **funciones potenciales escalares**, las cuales sirven para representar un valor físicomo como la derivada de V.
- ϕ se conoce como **la función de tensión de Airy** (*Airy stress function*).

- George Bidell Airy (1801-1892) en 1862, matemático y astrónomo inglés.

5.8. Función de tensión de Airy

Recordemos:

- Las ecuaciones diferenciales de equilibrio (5.1)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

- La ecuación de compatibilidad general (5.13)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Tarea

Si reemplazamos las ecuaciones (5.36) y (5.37) en las ecuaciones diferenciales de equilibrio (5.1), veremos que la función de tensión de Airy satisface dichas ecuaciones (es decir, obtendremos $0 = 0$).

5.8. Función de tensión de Airy

Recordemos:

- Las ecuaciones diferenciales de equilibrio (5.1)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

- La ecuación de compatibilidad general (5.13)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Tarea

Si reemplazamos las ecuaciones (5.36) y (5.37) en las ecuaciones diferenciales de equilibrio (5.1), veremos que la función de tensión de Airy satisface dichas ecuaciones (es decir, obtendremos $0 = 0$).

5.8. Función de tensión de Airy

Recordemos:

- Las ecuaciones diferenciales de equilibrio (5.1)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

- La ecuación de compatibilidad general (5.13)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Tarea

Si reemplazamos las ecuaciones (5.36) y (5.37) en las ecuaciones diferenciales de equilibrio (5.1), veremos que la función de tensión de Airy satisface dichas ecuaciones (es decir, obtendremos $0 = 0$).

5.8. Función de tensión de Airy

Recordemos:

- Las ecuaciones diferenciales de equilibrio (5.1)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

- La ecuación de compatibilidad general (5.13)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Tarea

Si reemplazamos las ecuaciones (5.36) y (5.37) en las ecuaciones diferenciales de equilibrio (5.1), veremos que la función de tensión de Airy satisface dichas ecuaciones (es decir, obtendremos $0 = 0$).

5.8. Función de tensión de Airy

Reemplazamos (5.36), (5.37a) y (5.37b) en la ecuación de compatibilidad (5.13) aplicando derivadas, llegamos a:

$$\underbrace{\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4}}_{\nabla^4 \phi} = K_2 \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}_{\nabla^2 V}$$

donde

$$K_2 := -2 - K_1 = \begin{cases} \nu - 1 & \text{para el caso de } \textbf{tensión plana} \\ -\dfrac{1-2\nu}{1-\nu} & \text{para el caso de } \textbf{deformación plana} \end{cases}$$

En notación tensorial:

$$\phi_{,iiii} + 2\phi_{,ijij} + \phi_{,jjjj} = K_2(V_{,ii} + V_{,jj})$$

5.8. Función de tensión de Airy

Reemplazamos (5.36), (5.37a) y (5.37b) en la ecuación de compatibilidad (5.13) aplicando derivadas, llegamos a:

$$\underbrace{\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4}}_{\nabla^4 \phi} = K_2 \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}_{\nabla^2 V}$$

donde

$$K_2 \coloneqq -2 - K_1 = \begin{cases} \nu - 1 & \text{para el caso de } \textbf{tensión plana} \\ -\dfrac{1-2\nu}{1-\nu} & \text{para el caso de } \textbf{deformación plana} \end{cases}$$

En notación tensorial:

$$\phi_{,iiii} + 2\phi_{,ijij} + \phi_{,jjjj} = K_2(V_{,ii} + V_{,jj})$$

Reemplazamos (5.36), (5.37a) y (5.37b) en la ecuación de compatibilidad (5.13) aplicando derivadas, llegamos a:

$$\underbrace{\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4}}_{\nabla^4 \phi} = K_2 \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}_{\nabla^2 V}$$

donde

$$K_2 \coloneqq -2 - K_1 = \begin{cases} \nu - 1 & \text{para el caso de } \textbf{tensión plana} \\ -\dfrac{1-2\nu}{1-\nu} & \text{para el caso de } \textbf{deformación plana} \end{cases}$$

En notación tensorial:

$$\phi_{,iiii} + 2\phi_{,ijij} + \phi_{,jjjj} = K_2(V_{,ii} + V_{,jj})$$

5.8. Función de tensión de Airy

La ecuación anterior de forma compacta:

$$\nabla^4\phi = K_2\nabla^2 V$$

- Tiene la forma de las **ecuaciones biarmónicas**
- A sus soluciones se les conoce como **funciones biarmónicas**
- $\nabla^4\phi$ se llama **biarmónico** de ϕ
- $\nabla^2 V$ se le llama **laplaciano** de la función V.
- V es una **función potencial**.

$\nabla^4\phi = \nabla^2(\nabla^2)\phi$:

$$\underbrace{\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}}_{\nabla^4\phi} = \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)}_{\nabla^2(\nabla^2\phi)}$$

5.8. Función de tensión de Airy

La ecuación anterior de forma compacta:

$$\nabla^4\phi = K_2\nabla^2 V$$

- Tiene la forma de las **ecuaciones biarmónicas**
- A sus soluciones se les conoce como **funciones biarmónicas**
- $\nabla^4\phi$ se llama **biarmónico** de ϕ
- $\nabla^2 V$ se le llama **laplaciano** de la función V.
- V es una **función potencial**.

$\nabla^4\phi = \nabla^2(\nabla^2)\phi$:

$$\underbrace{\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}}_{\nabla^4\phi} = \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)}_{\nabla^2(\nabla^2\phi)}$$

La ecuación anterior de forma compacta:

$$\nabla^4\phi = K_2\nabla^2 V$$

- Tiene la forma de las **ecuaciones biarmónicas**
- A sus soluciones se les conoce como **funciones biarmónicas**
- $\nabla^4\phi$ se llama **biarmónico** de ϕ
- $\nabla^2 V$ se le llama **laplaciano** de la función V.
- V es una **función potencial**.

$\nabla^4\phi = \nabla^2(\nabla^2)\phi$:

$$\underbrace{\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}}_{\nabla^4\phi} = \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)}_{\nabla^2(\nabla^2\phi)}$$

La ecuación anterior de forma compacta:

$$\nabla^4\phi = K_2\nabla^2 V$$

- Tiene la forma de las **ecuaciones biarmónicas**
- A sus soluciones se les conoce como **funciones biarmónicas**
- $\nabla^4\phi$ se llama **biarmónico** de ϕ
- $\nabla^2 V$ se le llama **laplaciano** de la función V.
- V es una **función potencial**.

$\nabla^4\phi = \nabla^2(\nabla^2)\phi$:

$$\underbrace{\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}}_{\nabla^4\phi} = \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)}_{\nabla^2(\nabla^2\phi)}$$

5.8. Función de tensión de Airy

¿Y si las fuerzas másicas son constantes?

Ecuación biarmónica

$$\nabla^4 \phi = 0$$

La distribución de tensiones es la misma para el estado de tensión plana y para el estado de deformación plana.

Cuando la fuerza másica resultante se reduce al peso propio tenemos que la función potencial V es

$$V = \rho g y$$

y por lo tanto,

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\rho g,$$

Las ecuaciones (5.37) se reducen a

$$\sigma_x = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \rho g y \qquad \sigma_y = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \rho g y \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

¿Y si las fuerzas másicas son constantes?

Ecuación biarmónica

$$\nabla^4\phi = 0$$

La distribución de tensiones es la misma para el estado de tensión plana y para el estado de deformación plana.

Cuando la fuerza másica resultante se reduce al peso propio tenemos que la función potencial V es

$$V = \rho g y$$

y por lo tanto,

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\rho g,$$

Las ecuaciones (5.37) se reducen a

$$\sigma_x = -\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \rho g y \qquad \sigma_y = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \rho g y \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y}$$

5.8. Función de tensión de Airy

¿Y si las fuerzas másicas son constantes?

Ecuación biarmónica

$$\nabla^4 \phi = 0$$

La distribución de tensiones es la misma para el estado de tensión plana y para el estado de deformación plana.

Cuando la fuerza másica resultante se reduce al peso propio tenemos que la función potencial V es

$$V = \rho g y$$

y por lo tanto,

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\rho g,$$

Las ecuaciones (5.37) se reducen a

$$\sigma_x = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \rho g y \qquad \sigma_y = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \rho g y \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

5.8. Función de tensión de Airy

¿Y si las fuerzas másicas son constantes?

Ecuación biarmónica

$$\nabla^4 \phi = 0$$

La distribución de tensiones es la misma para el estado de tensión plana y para el estado de deformación plana.

Cuando la fuerza másica resultante se reduce al peso propio tenemos que la función potencial V es

$$V = \rho g y$$

y por lo tanto,

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\rho g,$$

Las ecuaciones (5.37) se reducen a

$$\sigma_x = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \rho g y \qquad \sigma_y = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \rho g y \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

5.8. Función de tensión de Airy

Uso

Se utiliza en mecánica de sólidos para deducir analíticamente muchas condiciones de esfuerzo presentes en sólidos con ciertas geometrías *bidimensionales*. No existen las funciones de tensión de Airy para el caso tridimensional

Método

Se asume una función de tensión ϕ que depende de unos coeficientes desconocidos y que satisfagan el biarmónico; luego, se estima el campo vectorial de desfuerzos, deformaciones y desplazamientos y a partir de las condiciones de frontera, se estima el valor de los coeficientes desconocidos.

5.8. Función de tensión de Airy

Uso

Se utiliza en mecánica de sólidos para deducir analíticamente muchas condiciones de esfuerzo presentes en sólidos con ciertas geometrías *bidimensionales*. No existen las funciones de tensión de Airy para el caso tridimensional

Método

Se asume una función de tensión ϕ que depende de unos coeficientes desconocidos y que satisfagan el biarmónico; luego, se estima el campo vectorial de desfuerzos, deformaciones y desplazamientos y a partir de las condiciones de frontera, se estima el valor de los coeficientes desconocidos.

5.8. Función de tensión de Airy

Uso

Se utiliza en mecánica de sólidos para deducir analíticamente muchas condiciones de esfuerzo presentes en sólidos con ciertas geometrías *bidimensionales*. No existen las funciones de tensión de Airy para el caso tridimensional

Método

Se asume una función de tensión ϕ que depende de unos coeficientes desconocidos y que satisfagan el biarmónico; luego, se estima el campo vectorial de desfuerzos, deformaciones y desplazamientos y a partir de las condiciones de frontera, se estima el valor de los coeficientes desconocidos.

5.8. Función de tensión de Airy

Uso

Se utiliza en mecánica de sólidos para deducir analíticamente muchas condiciones de esfuerzo presentes en sólidos con ciertas geometrías *bidimensionales*. No existen las funciones de tensión de Airy para el caso tridimensional

Método

Se asume una función de tensión ϕ que depende de unos coeficientes desconocidos y que satisfagan el biarmónico; luego, se estima el campo vectorial de desfuerzos, deformaciones y desplazamientos y a partir de las condiciones de frontera, se estima el valor de los coeficientes desconocidos.

Derrotero

Ejemplo 1

Consideremos la viga mostrada en la figura 4.18, la cual soporta sobre su cara superior una carga uniformemente distribuida de magnitud q. De dicha viga, se desean calcular analíticamente los esfuerzos σ_x, σ_y y τ_{xy} que actúan sobre ella utilizando la función de tensión de Airy.

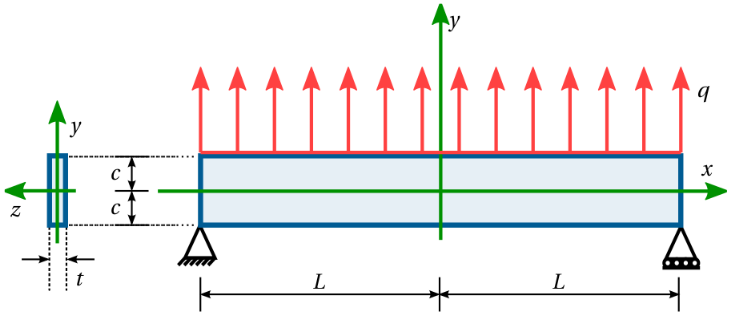

Figura: (4.18) Viga referida en el ejemplo de la Sección 4.9

Ejemplo 2

Para un sólido con forma de L invertida y condiciones de frontera dadas, se desean calcular analíticamente los esfuerzos σ_x, σ_y y τ_{xy} que actúan sobre ella utilizando la función de tensión de Airy.

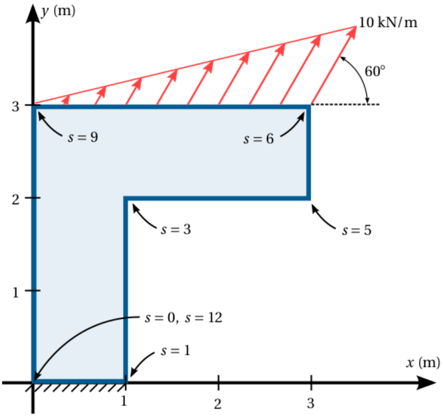

Figura: (7.31) Estructura analizada en la sección 7.8. Observe que a medida que se avanza en sentido antihorario, el parámetro s aumenta.

Derrotero

5.8.1. Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional

Derrotero

5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

Derrotero

5.10. Unicidad de la solución

5.11. Principio de superposición

Derrotero

5.12. Principio de Saint-Venant

Derrotero

5.13. Resumen

Derrotero

Referencias I

Álvarez, D. A. (2022).
Teoría de la elasticidad.
Universidad Nacional de Colombia.