

Criterios de falla para materiales dúctiles y frágiles

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil
Mecánica de Sólidos

2025a



Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada.



Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaedricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distorsión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

Derrotero

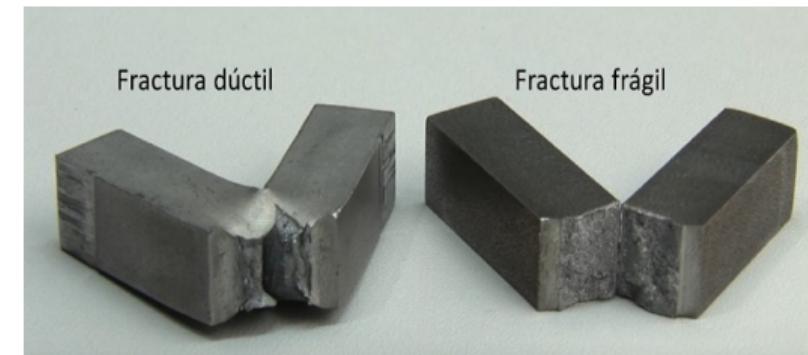
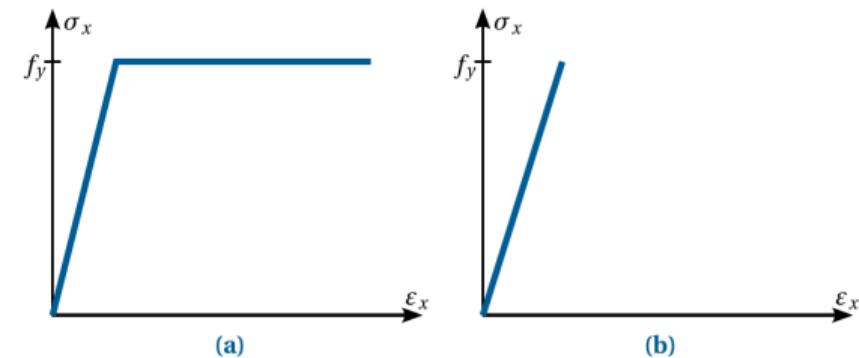
● Introducción

- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaédricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distorsión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

Introducción

A tener en cuenta:

- Nos interesa conocer la combinación de esfuerzos que harán fallar un material.
- Esto dependerá el tipo de material y de la configuración de las cargas.
- Hay cientos de teorías de falla, y ninguna es óptima en todos los casos. La más básica es el caso de una barra de acero uniaxialmente cargada: $\sigma_x \geq f_y$.



Introducción

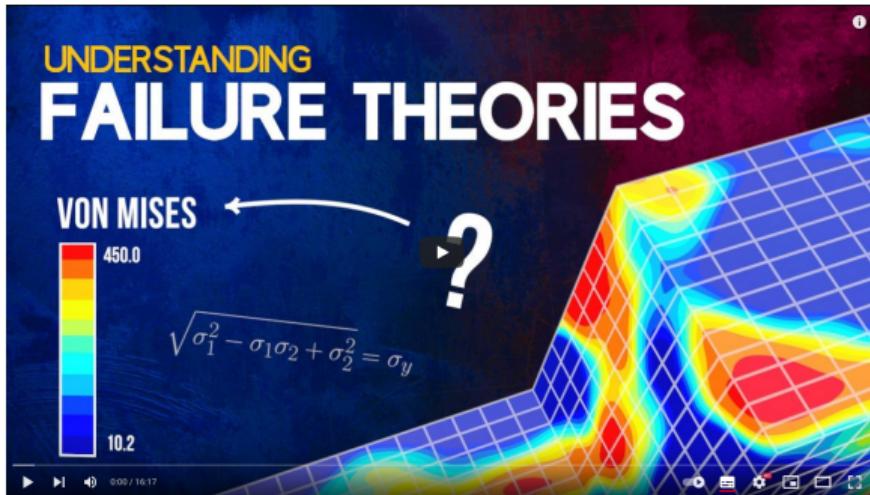


Figure: Video: *Understanding Failure Theories (Tresca, von Mises etc...)*

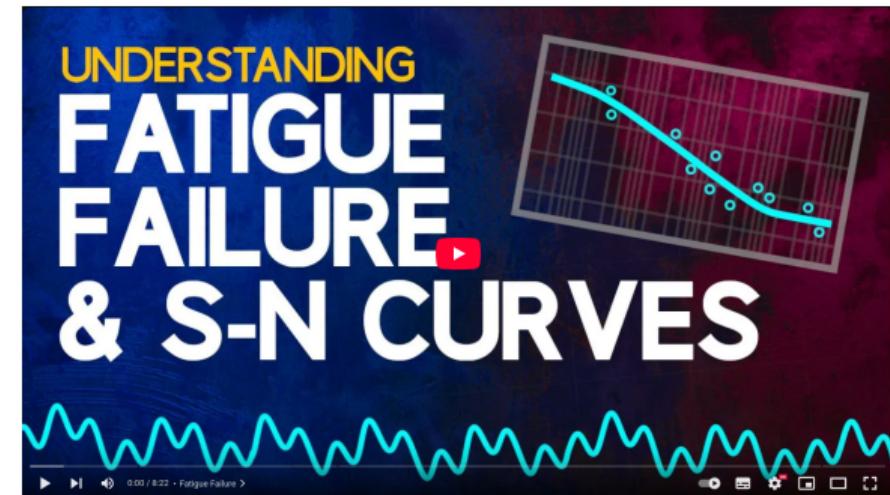


Figure: Video: *Understanding Fatigue Failure and S-N Curves*

Derrotero

- Introducción
- **16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores**
- 16.2. Esfuerzos octaedricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distorsión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores

Repasando los invariantes de esfuerzos | Cálculo del círculo de Mohr tridimensional

Expandiendo el determinante $\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \mathbf{I}) = 0$

$$\begin{aligned} & (\sigma_x - \sigma_n) [(\sigma_y - \sigma_n)(\sigma_z - \sigma_n) - \tau_{yz}^2] \\ & - \tau_{xy} [\tau_{xy}(\sigma_z - \sigma_n) - \tau_{yz}\tau_{xz}] \\ & + \tau_{xz} [\tau_{xy}\tau_{yz} - (\sigma_y - \sigma_n)\tau_{xz}] = 0; \end{aligned}$$

La ecuación característica:

$$-\sigma_n^3 + I_1\sigma_n^2 - I_2\sigma_n + I_3 = 0$$

De donde sacamos los **Invariantes de Esfuerzos**: Los invariantes son independientes de la base utilizada para describir el tensor.

$$\Theta := I_1 = \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})$$

$$I_2 = \frac{1}{2}((\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}))^2 - \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^2))$$

$$I_3 = \det(\underline{\underline{\sigma}})$$

Los invariantes son útiles cuando se necesita crear descripciones del comportamiento de los materiales, ya que, por ejemplo, un material isótropo no sabe qué sistema de coordenadas se ha usado para describir su comportamiento.

Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores

Definimos dos esfuerzos nuevos que nos ayudarán a entender el comportamiento del tensor de esfuerzos tridimensional:

Esfuerzo medio o hidrostático

$$\sigma_M := \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{I_1}{3}$$

Esfuerzos desviadores

$$s_x := \sigma_x - \sigma_M$$

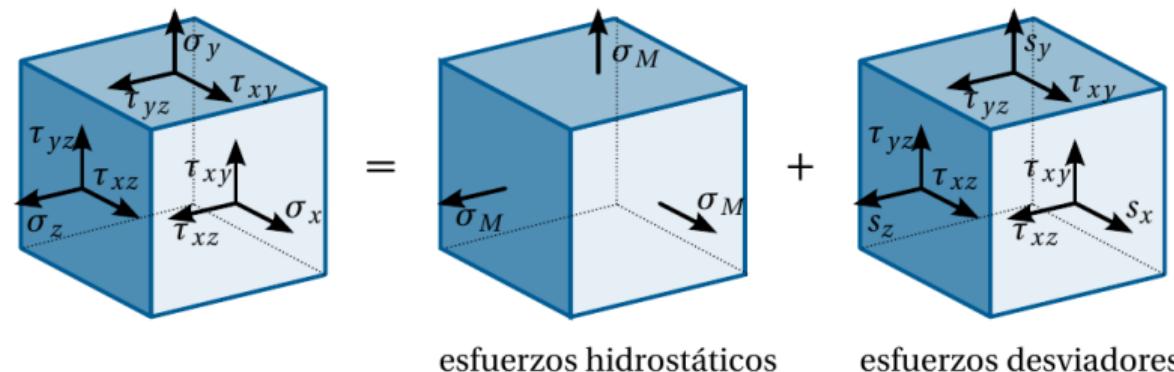
$$s_y := \sigma_y - \sigma_M$$

$$s_z := \sigma_z - \sigma_M$$

Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores

El tensor de esfuerzos $\underline{\underline{\sigma}}$ puede descomponerse en un **tensor de esfuerzos hidrostáticos** y un **tensor de esfuerzos desviadores**, en la base $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_M & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_M & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_M \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}_{\text{hidr}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} s_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & s_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & s_z \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}_{\text{desv}}}$$



Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores

El tensor de esfuerzos $\underline{\underline{\sigma}}$ puede descomponerse en un **tensor de esfuerzos hidrostáticos** y un **tensor de esfuerzos desviadores**, en la base **en la base $\{\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3\}$** :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_M & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_M & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_M \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}_{\text{hidr}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma'}}_{\text{desv}}}$$

Tenemos los siguientes resultados:

- Los esfuerzos desviadores principales:

$$s_1 = \sigma_1 - \sigma_M$$

$$s_2 = \sigma_2 - \sigma_M$$

$$s_3 = \sigma_3 - \sigma_M$$

- $\underline{\underline{\sigma}}_{\text{hidr}} = \sigma_M \mathbf{I}$.
- $\sigma_M = K e$, recordando que:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

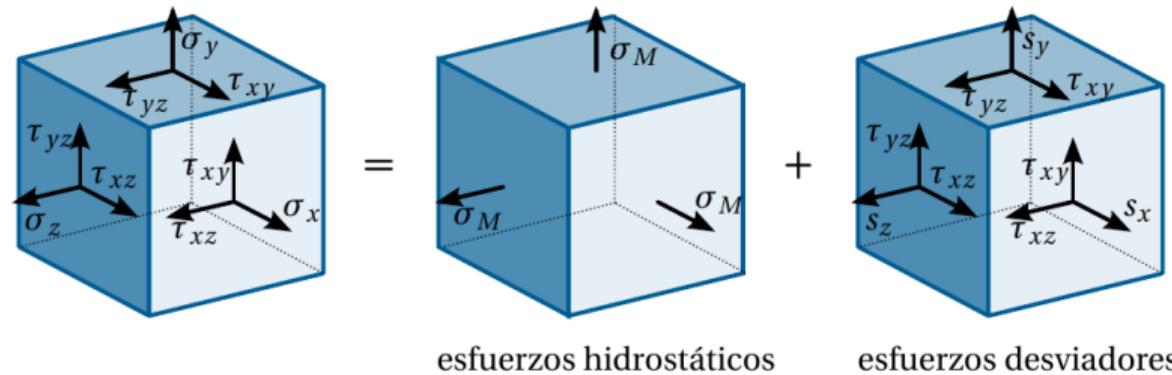
$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

- $\underline{\underline{\sigma}}_{\text{hidr}}$ describe los cambios de volumen en el material.

Esfuerzos medios y desviadores

Acción de los esfuerzos medios y desviadores



Esfuerzos hidrostáticos: *dilatan el sólido*

- Son responsables del cambio de volumen.
- Estiran o contraen el sólido con igual intensidad en todas las direcciones.

Esfuerzos desviadores: *distorsionan el sólido*

- No producen cambio de volumen.
- Son responsables de la distorsión del sólido:
 - Lo pueden estirar o contraer más en una dirección que en otra.
 - Lo pueden deformar angularmente.

Esfuerzos desviadores

Verificando que no alteran el volumen

Código: 16_01_02_verificacion_cambio_volumen.ipynb

```
/* Se define el esfuerzo hidrostático, ecuación (16.2) */
sM : (sigmax + sigmay + sigmaz)/3$

/* Se definen los esfuerzos desviadores, ecuación (16.3) */
sx : sigmax - sM$
sy : sigmay - sM$
sz : sigmaz - sM$

/* Se calculan las deformaciones asociadas al esf. desviador, ec. (4.3) */
ex : (1/E)*(sx - nu*(sy + sz))$
ey : (1/E)*(sy - nu*(sx + sz))$
ez : (1/E)*(sz - nu*(sx + sy))$

/* Se calcula la dilatación cúbica asociada al esf. desviador, ec. (4.27) */
e : expand(ex + ey + ez); /* imprime θ */
```

Tarea

Demostrar que el tensor $\underline{\underline{\sigma}}_{\text{desv}}$ tiene los mismos vectores propios que $\underline{\underline{\sigma}}$ y sus valores propios están dados por:

$$s_1 = \sigma_1 - \sigma_M$$

$$s_2 = \sigma_2 - \sigma_M$$

$$s_3 = \sigma_3 - \sigma_M$$

Invariantes de los tensores de esfuerzos medios y desviadores

Las ecuaciones características de los tensores de esfuerzos medios y desviadores son:

$$\det \left(\underline{\underline{\sigma}}_{\text{hidr}} - \sigma_n \mathbf{I} \right) = -\sigma_n^3 + \tilde{I}_1 \sigma_n^2 - \tilde{I}_2 \sigma_n + \tilde{I}_3 = 0$$
$$\det \left(\underline{\underline{\sigma}}_{\text{desv}} - s_n \mathbf{I} \right) = -\sigma_n^3 + J_1 \sigma_n^2 + J_2 \sigma_n + J_3 = 0$$

Código: [16_01_03_invariantes.ipynb](#)

Invariantes de los tensores de esfuerzos medios y desviadores

Invariantes de esfuerzos medios:

$$\tilde{I}_1 := I_1 = 3\sigma_M = \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \quad \tilde{I}_2 := \frac{I_1^2}{3} = 3\sigma_M^2 \quad \tilde{I}_3 := \frac{I_1^3}{27} = \sigma_M^3.$$

Invariantes de esfuerzos desviadores:

$$J_1 := s_1 + s_2 + s_3 \quad J_2 := \frac{1}{2} \left\| [s_1, s_2, s_3]^T \right\|^2 \quad J_3 := s_1 s_2 s_3.$$

Código: [16_01_invariantes.ipynb](#)

Invariantes de los tensores de esfuerzos medios y desviadores

Expresiones asociadas a los invariantes J_2 y J_3

$$\begin{aligned}
 J_2 &:= \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2}{6} + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \\
 &= \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{6} \\
 &= \frac{I_1^2}{3} - I_2 \\
 &= \frac{1}{2} \left[\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^2) - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}_{\text{desv}}^2) \\
 &= \frac{1}{2} \left\| \underline{\underline{\sigma}}_{\text{desv}} \right\|_F^2 \\
 &= -s_1 s_2 - s_2 s_3 - s_1 s_3 \\
 &= \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \\
 &= \frac{1}{2} \left\| [s_1, s_2, s_3]^T \right\|^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_3 &:= \frac{(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)}{27} \\
 &= I_3 - \frac{1}{3} I_1 I_2 + \frac{2}{27} I_1^3 \\
 &= \det \begin{pmatrix} \underline{\underline{\sigma}} \\ \equiv_{\text{desv}} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}_{\text{desv}}^3) \\
 &= s_1 s_2 s_3.
 \end{aligned}$$

Aclaración: El signo de J_2 en la ecuación característica

Es una elección de convención para la definición de J_2 , no un cambio en la física subyacente. La consistencia es clave.

La convención "estándar" y su implicación

Si definiéramos J_2 usando el polinomio característico usual:

$$-\sigma_n^3 + J_1\sigma_n^2 - \textcolor{red}{J}_2\sigma_n + J_3 = 0$$

Esto implicaría que J_2 (calculado como $s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1$) sería ≤ 0 .

- De hecho, $J_2 = -\frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \leq 0$.

En los criterios de falla, J_2 (o una cantidad relacionada) aparece frecuentemente dentro de raíces cuadradas.

- Con la convención estándar, veríamos expresiones como $\sqrt{-kJ_2}$ (donde $k > 0$).
- Aunque matemáticamente $-kJ_2 \geq 0$ (y la raíz es real), esto puede causar confusión al lector, sugiriendo erróneamente un número imaginario.

Nuestra Elección: Simplificar y Evitar Confusión

Para mayor claridad y para que las expresiones sean más intuitivas, adoptamos un polinomio característico donde el término de J_2 es positivo:

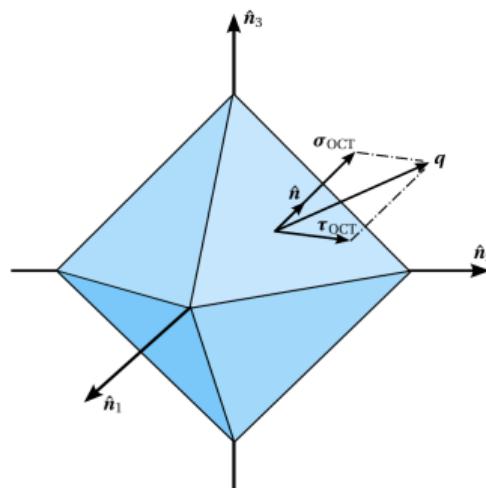
$$-\sigma_n^3 + J_1\sigma_n^2 + \textcolor{red}{J}_2\sigma_n + J_3 = 0 \quad (\text{Ec. 16.5 del texto})$$

- Con esta definición, J_2 (calculado, por ejemplo, como $\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \circ \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)$) es **siempre** ≥ 0 .
- Esto permite usar expresiones más directas como $\sqrt{kJ_2}$ en las formulaciones de falla, eliminando el signo negativo "alarmante" dentro de la raíz.

Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- **16.2. Esfuerzos octaédricos**
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distorsión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

Esfuerzos octaédricos



En la base dada por $\{\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3\}$:

- Tensor de esfuerzos: $\underline{\underline{\sigma}} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.
- Definimos planos con vectores unitarios normales según sus cosenos directores:

$$\alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\beta = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

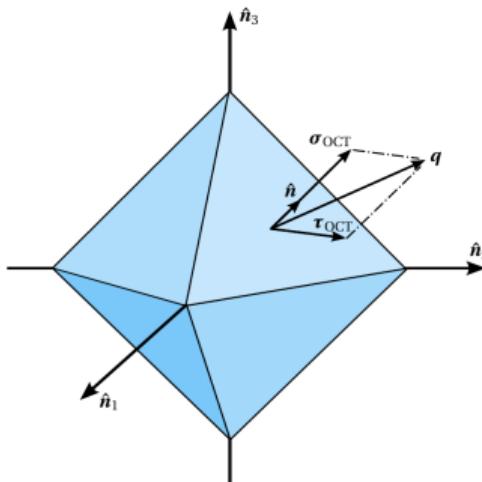
$$\gamma = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- Estos **planos octaédricos** son planos cuyas normales forman ángulos iguales con los ejes principales de esfuerzo.
- Evaluamos la ecuación de Cauchy en estos planos:

$$\mathbf{q} = \frac{\sqrt{3}}{3} [\pm \sigma_1, \pm \sigma_2, \pm \sigma_3]^T.$$

Esfuerzos octaédricos

- Descomponemos σ en sus componentes normales (σ_n) y tangenciales (σ_s), como:



$$\sigma_{OCT} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3} = \sigma_M$$

$$\begin{aligned} |\tau_{OCT}| &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{2I_1^2 - 6I_2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3} J_2} \end{aligned}$$

- Definimos los esfuerzos octaédricos normal y cortante como:

$$|\sigma_{OCT}| = \|\sigma_n\|$$

$$|\tau_{OCT}| = \|\sigma_s\|.$$

Código: [16_02_esfuerzos_octaedricos.ipynb](#)

Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaédricos
- **16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica**
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distrosión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

Introducción a la superficie de fluencia

$$\begin{cases} f(\sigma) < k & \text{respuesta elástica del material} \\ f(\sigma) = k & \text{fluencia,} \end{cases}$$

En la base dada por las direcciones principales:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = k,$$

Ejemplos:

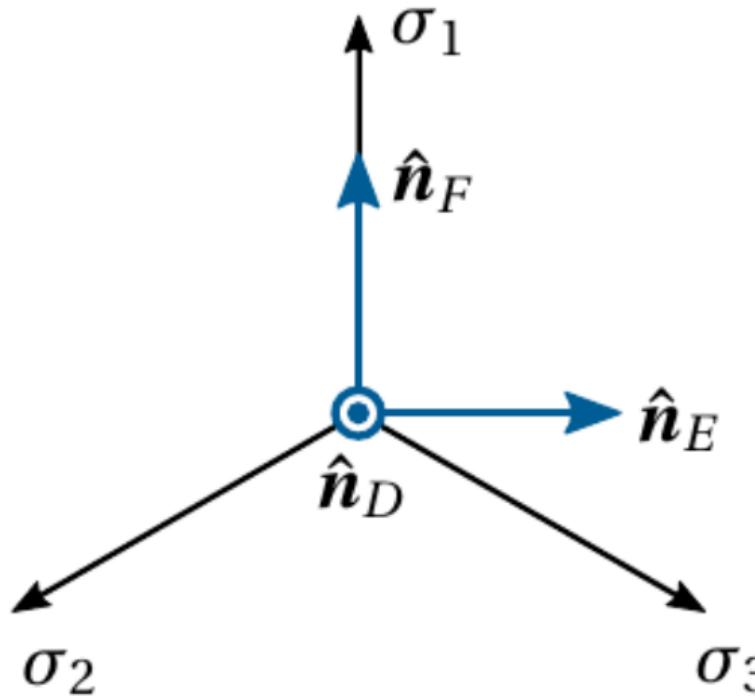
- Criterio de von Mises:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} \quad y \quad k = f_y$$

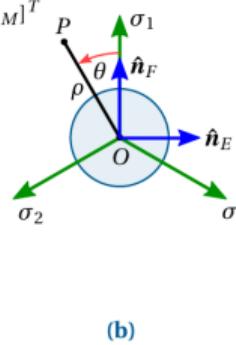
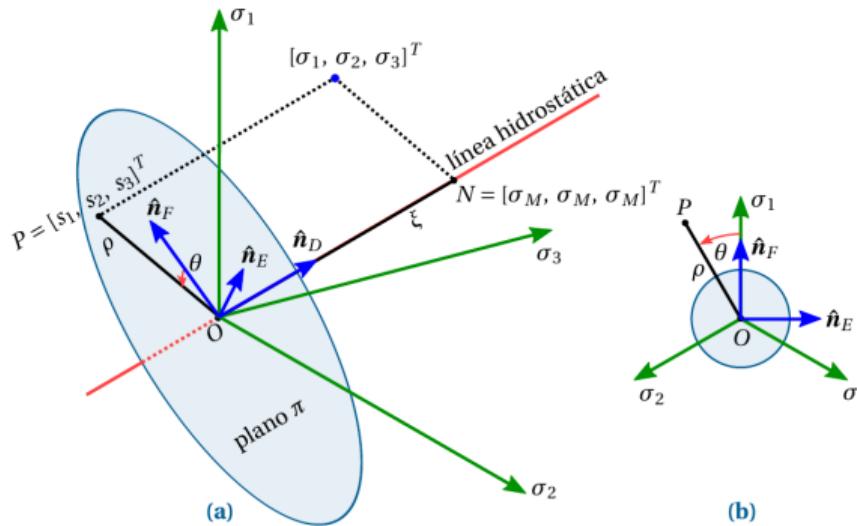
- Criterio de Tresca:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{2} \quad y \quad k = \frac{f_y}{2}.$$

8989 Definir el título 8989



El sistema de coordenadas cilíndricas de Haigh-Westergaard



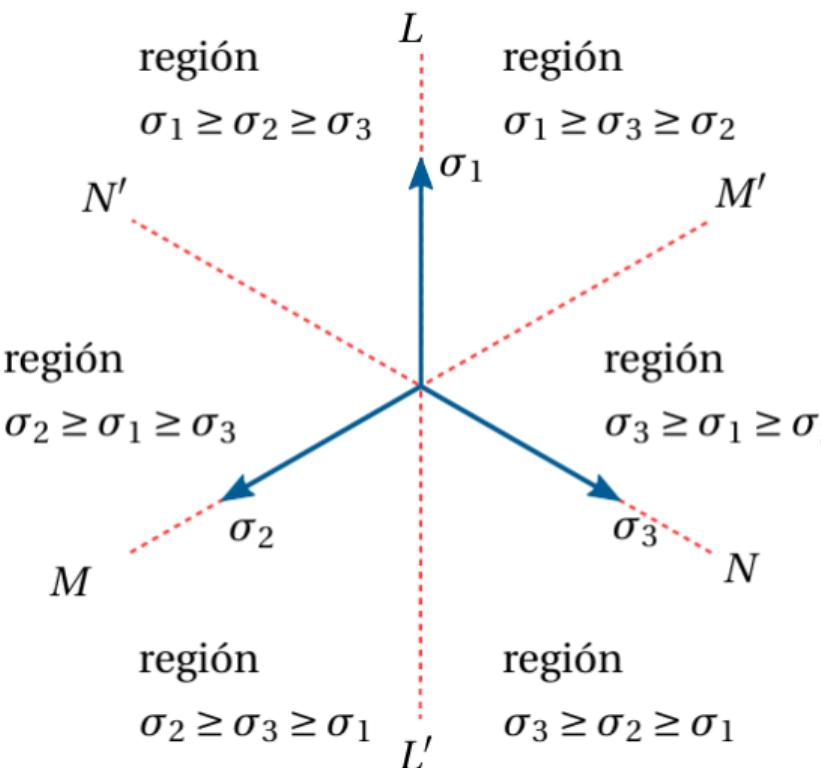
El sistema de coordenadas cilíndricas de Haigh-Westergaard

Entendiendo las coordenadas, con ayuda de Google Gemini 2.5 Pro

Tabla: Coordenadas Cilíndricas de Haigh-Westergaard (ξ, ρ, θ)

Coordenada	Significado Matemático	Significado Físico	Consideraciones Adicionales
ξ (Xi)	Coordenada axial. Proyección del vector de esfuerzos principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ sobre la línea hidrostática ($\text{dirección } \hat{n}_D \propto [1, 1, 1]^T$). Distancia (con signo) desde el origen a lo largo de esta linea.	Medida de la componente hidrostática del estado de esfuerzos. Directamente proporcional al esfuerzo medio, $\sigma_M = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$. Indica la "presión" o "tracción" media a la que está sometido el punto.	$\xi = \frac{J_1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\sigma_M$. Puede ser positiva o negativa. La fluencia de muchos metales dúctiles es en gran medida independiente de ξ .
ρ (Rho)	Coordenada radial. Magnitud del vector de esfuerzos desviadores principales $[s_1, s_2, s_3]^T$. Distancia desde la linea hidrostática hasta el punto de esfuerzo $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, medida en el plano π (perpendicular a \hat{n}_D).	Medida de la intensidad de la componente desviadora (distorsionante) del estado de esfuerzos. Representa la "magnitud" del esfuerzo que causa cambio de forma sin cambio de volumen (en materiales incompresibles plásticamente).	$\rho = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = \sqrt{2J_2}$. Es igual al esfuerzo de von Mises (σ_{vM}). Es proporcional al esfuerzo cortante octaédrico (τ_{OCT}), $\rho = \sqrt{3}\tau_{OCT}$. $\rho \geq 0$. Si $\rho = 0$, el estado es puramente hidrostático.
θ (Theta)	Coordenada angular (Ángulo de Lode). Ángulo medido en el plano π (plano desviador) desde un eje de referencia fijo (e.g., proyección del eje σ_1 o el eje \hat{n}_F) hasta la proyección del vector de esfuerzos desviadores.	Describe la "naturaleza", "tipo" o "modo" del estado de esfuerzo desviador. Diferentes valores de θ indican diferentes relaciones relativas entre los esfuerzos desviadores principales s_1, s_2, s_3 .	Se relaciona con los invariantes J_2 y J_3 del tensor desviador: $\cos(3\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_1}{J_2^{1/2}}$. Debido a la simetría en materiales isótropos, usualmente se considera en el rango $[0^\circ, 60^\circ]$. La forma de la sección transversal de la superficie de fluencia en el plano π depende de θ .

Simetría del espacio de esfuerzos principales



Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaedricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- **16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales**
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distorsión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

Estudio de Percy Williams Bridgman

(1882 - 1961) Premio nobel de física 1946 | Ensayo con presiones de más de 10GPa en aleaciones dúctiles e isótropas

Observaciones:

- La presión hidrostática no produce una deformación permanente en el sólido, incluso bajo altas presiones y en régimen plástico; en otras palabras, la deformación presentada debido a dicha presión es completamente elástica.
- La presión hidrostática tiene un efecto despreciable en el esfuerzo de fluencia; esto sucede incluso con presiones hidrostáticas 10 veces mayores que el esfuerzo de fluencia.
- La deformación plástica en los metales es prácticamente independiente del esfuerzo hidrostático σ_M .
- La curva esfuerzo-deformación no se modifica por la acción de la presión hidrostática, excepto cuando está sometido a presiones extremadamente altas.
- A elevadas presiones hidrostáticas, que llegan incluso a los 3100 MPa, la ductilidad aumenta a medida que incrementa la presión hidrostática.
- En el régimen plástico (incluso bajo grandes deformaciones), y una vez retiradas las cargas, el material cambia de forma (se distorsiona), pero no de volumen.



Figure: P. W. Bridgman

Estudio de Percy Williams Bridgman

(1882 - 1961) Premio nobel de física 1946 | Ensayo con presiones de más de 10GPa en aleaciones dúctiles e isótropas



Conclusiones:

- El tensor de esfuerzos medios σ_{hidr} no tiene mayor influencia en el comportamiento plástico de los materiales.
- Se espera que los esfuerzos desviadores tengan gran influencia en el comportamiento plástico de los materiales sometidos a un estado de esfuerzos tridimensional.

Figure: P. W. Bridgman

Estudio de Percy Williams Bridgman

(1882 - 1961) Premio nobel de física 1946 | Ensayo con presiones de más de 10GPa en aleaciones dúctiles e isótropas



Figure: P. W. Bridgman

Limitantes:

- Observaciones anteriores no son válidas para algunos metales y materiales frágiles como el concreto o la roca.
- Estos se vuelven dúctiles bajo la acción de grandes presiones hidrostáticas.
- Aportes de Theodore von Kármán:
 - Con presiones de hasta 600 MPa, algunas rocas (concreto y arenisca) cambian su comportamiento de frágil a dúctil, y su enfurecimiento aumentaba.
 - Importante en geología y mecánica de rocas.



Figure: T. von Kármán

Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaédricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- **16.5. Energía de dilatación y energía de distrosión**
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

Energía de dilatación y energía de distorsión

- La **energía potencial elástica** es al energía almacenada en un objeto cuando se le aplica una fuerza que provoca su deformación. Recuerde por ejemplo una cauchera.
- Definimos la energía potencial elástica por unidad de volumen como:

$$\widetilde{W}_{\text{elást}} = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z)] + \frac{1}{2G} [\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2];$$

teniendo en cuenta:

- Para un material lineal, elástico e isótropo, y asumiendo deformaciones pequeñas.
- Físicamente: “densidad de energía potencial elástica”.
- Podemos descomponer dicha energía en la energía de dilatación $\widetilde{W}_{\text{dila}}$ y la energía de distorsión $\widetilde{W}_{\text{dist}}$.

$$\widetilde{W}_{\text{elást}} = \widetilde{W}_{\text{dila}} + \widetilde{W}_{\text{dist}}.$$

Energía de dilatación y energía de distorsión

- La **energía potencial elástica** es al energía almacenada en un objeto cuando se le aplica una fuerza que provoca su deformación. Recuerde por ejemplo una cauchera.
- Definimos la energía potencial elástica por unidad de volumen como:

$$\widetilde{W}_{\text{elást}} = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z)] + \frac{1}{2G} [\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2];$$

teniendo en cuenta:

- Para un material lineal, elástico e isótropo, y asumiendo deformaciones pequeñas.
- Físicamente: “densidad de energía potencial elástica”.
- Podemos descomponer dicha energía en la energía de dilatación $\widetilde{W}_{\text{dila}}$ y la energía de distorsión $\widetilde{W}_{\text{dist}}$.

$$\widetilde{W}_{\text{elást}} = \widetilde{W}_{\text{dila}} + \widetilde{W}_{\text{dist}}.$$

Energía de dilatación y energía de distorsión

- La **energía potencial elástica** es al energía almacenada en un objeto cuando se le aplica una fuerza que provoca su deformación. Recuerde por ejemplo una cauchera.
- Definimos la energía potencial elástica por unidad de volumen como:

$$\widetilde{W}_{\text{elást}} = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z)] + \frac{1}{2G} [\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2];$$

teniendo en cuenta:

- Para un material lineal, elástico e isótropo, y asumiendo deformaciones pequeñas.
- Físicamente: “densidad de energía potencial elástica”.
- Podemos descomponer dicha energía en la energía de dilatación $\widetilde{W}_{\text{dila}}$ y la energía de distorsión $\widetilde{W}_{\text{dist}}$.

$$\widetilde{W}_{\text{elást}} = \widetilde{W}_{\text{dila}} + \widetilde{W}_{\text{dist}}.$$

Energía de dilatación y energía de distorsión

- La **energía potencial elástica** es al energía almacenada en un objeto cuando se le aplica una fuerza que provoca su deformación. Recuerde por ejemplo una cauchera.
- Definimos la energía potencial elástica por unidad de volumen como:

$$\widetilde{W}_{\text{elást}} = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z)] + \frac{1}{2G} [\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2];$$

teniendo en cuenta:

- Para un material lineal, elástico e isótropo, y asumiendo deformaciones pequeñas.
- Físicamente: “densidad de energía potencial elástica”.
- Podemos descomponer dicha energía en la energía de dilatación $\widetilde{W}_{\text{dila}}$ y la energía de distorsión $\widetilde{W}_{\text{dist}}$.

$$\widetilde{W}_{\text{elást}} = \widetilde{W}_{\text{dila}} + \widetilde{W}_{\text{dist}}.$$

Energía de dilatación y energía de distorsión

Trabajando en el sistema dado por $\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3$.

Energía de dilatación

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_{\text{dila}} &= \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \\ &= \frac{3(1-2\nu)}{2E} I_1^2\end{aligned}$$

- Trabajo invertido en comprimir o expandir el material, de modo que este cambie de volumen.
- El cuadrado del invariante I_1 representa a la energía de dilatación que produce cambios de volumen en el material.

Energía de distorsión

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_{\text{dist}} &= \frac{1+\nu}{3E} \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \\ &= \frac{1+\nu}{E} J_2.\end{aligned}$$

- Sirve para predecir la combinación de esfuerzos que produzca fluencia en el material.
- J_2 directamente relacionado con la energía de distorsión que causa cambio de forma en el material sin cambio de volumen.

Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaédricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distrosión
- **16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles**
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

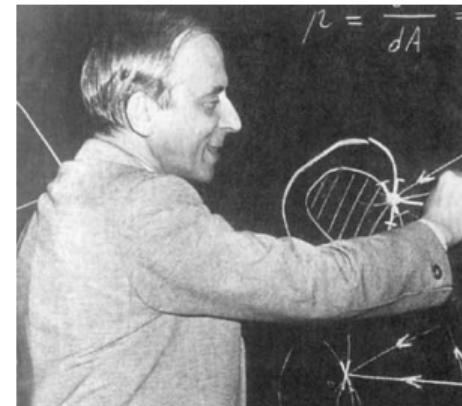
Criterio de fluencia de von Mises

Criterio de von Mises

Criterio de la energía máxima de distorsión, criterio de Huber-Hencky-von Mises



(a) Tytus Maksymilian Huber (1872–1950)



(b) Richard Edler von Mises (1883–1953)



(c) Heinrich Hencky (1885–1951)

- Usado *principalmente* en materiales dúctiles.
- Para determinar si un material isótropo entrará en fluencia cuando está sujeto a condiciones de carga tridimensional.

Criterio de von Mises

Formulación y desarrollo

Descripción:

- El material entrará en fluencia cuando la energía asociada a los esfuerzos desviadores alcanza el valor crítico k' :

$$\widetilde{W}_{\text{dist}} = \frac{1+\nu}{3E} \underbrace{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}}_{\sigma_{VM}^2} = k'.$$

- k' a partir de la energía de distorsión por unidad de volumen asociada a la fluencia de una barra.

$$\widetilde{W}_{\text{dist}} = \frac{1+\nu}{3E} f_y^2.$$

- El material entrará en fluencia cuando el llamado esfuerzo de fluencia de von mises σ_{VM} alcance el esfuerzo de fluencia f_y del material.

Criterio de von Mises

Equivalencias matemáticas

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{VM}} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3} \\ &= \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2)}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2} \|\underline{\underline{\sigma}}_{\text{desv}}\|_F} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2} \rho} \\ &= \sqrt{3J_2} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \tau_{\text{OCT}},\end{aligned}$$

Criterio de von Mises

Observaciones al criterio y consideraciones prácticas

Superficie de fluencia de von Mises

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} = f_y.$$

Observaciones:

1. Se debe verificar que el máximo esfuerzo de von Mises σ_{VM} no supere el esfuerzo de fluencia f_y del material dividido un factor de seguridad.
2. Criterio válido para materiales lineales, elástico e isótropos, y asumiendo deformaciones pequeñas.
3. σ_{VM} es un valor no negativo, aunque en algunos softwares puede variar esta consideración.
4. σ_{VM} no es un esfuerzo físico, no debe compararse directamente con otros.
5. Es un valor teórico que permite contrastar un estado de tensiones tridimensional con resultados unidimensionales.
6. Los esfuerzos de von Mises están en función de las diferencias entre los esfuerzos principales y no de su valor individual; por lo tanto, si se varían en la misma cantidad los esfuerzos principales, el esfuerzo de von Mises permanecerá constante; solo se varían los esfuerzos hidrostáticos.

Criterio de von Mises

Observaciones al criterio y consideraciones prácticas

Superficie de fluencia de von Mises

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} = f_y.$$

Observaciones:

1. Se debe verificar que el máximo esfuerzo de von Mises σ_{VM} no supere el esfuerzo de fluencia f_y del material dividido un factor de seguridad.
2. Criterio válido para materiales lineales, elástico e isótropos, y asumiendo deformaciones pequeñas.
3. σ_{VM} es un valor no negativo, aunque en algunos softwares puede variar esta consideración.
4. σ_{VM} no es un esfuerzo físico, no debe compararse directamente con otros.
5. Es un valor teórico que permite contrastar un estado de tensiones tridimensional con resultados unidimensionales.
6. Los esfuerzos de von Mises están en función de las diferencias entre los esfuerzos principales y no de su valor individual; por lo tanto, si se varían en la misma cantidad los esfuerzos principales, el esfuerzo de von Mises permanecerá constante; solo se varían los esfuerzos hidrostáticos.

Criterio de von Mises

Observaciones al criterio y consideraciones prácticas

Superficie de fluencia de von Mises

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} = f_y.$$

Observaciones:

1. Se debe verificar que el máximo esfuerzo de von Mises σ_{VM} no supere el esfuerzo de fluencia f_y del material dividido un factor de seguridad.
2. Criterio válido para materiales lineales, elástico e isótropos, y asumiendo deformaciones pequeñas.
3. σ_{VM} es un valor no negativo, aunque en algunos softwares puede variar esta consideración.
4. σ_{VM} no es un esfuerzo físico, no debe compararse directamente con otros.
5. Es un valor teórico que permite contrastar un estado de tensiones tridimensional con resultados unidimensionales.
6. Los esfuerzos de von Mises están en función de las diferencias entre los esfuerzos principales y no de su valor individual; por lo tanto, si se varían en la misma cantidad los esfuerzos principales, el esfuerzo de von Mises permanecerá constante; solo se varían los esfuerzos hidrostáticos.

Criterio de von Mises

Observaciones al criterio y consideraciones prácticas

Superficie de fluencia de von Mises

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} = f_y.$$

Observaciones:

1. Se debe verificar que el máximo esfuerzo de von Mises σ_{VM} no supere el esfuerzo de fluencia f_y del material dividido un factor de seguridad.
2. Criterio válido para materiales lineales, elástico e isótropos, y asumiendo deformaciones pequeñas.
3. σ_{VM} es un valor no negativo, aunque en algunos softwares puede variar esta consideración.
4. σ_{VM} no es un esfuerzo físico, no debe compararse directamente con otros.
5. Es un valor teórico que permite contrastar un estado de tensiones tridimensional con resultados unidimensionales.
6. Los esfuerzos de von Mises están en función de las diferencias entre los esfuerzos principales y no de su valor individual; por lo tanto, si se varían en la misma cantidad los esfuerzos principales, el esfuerzo de von Mises permanecerá constante; solo se varían los esfuerzos hidrostáticos.

Criterio de von Mises

Observaciones al criterio y consideraciones prácticas

Superficie de fluencia de von Mises

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} = f_y.$$

Observaciones:

1. Se debe verificar que el máximo esfuerzo de von Mises σ_{VM} no supere el esfuerzo de fluencia f_y del material dividido un factor de seguridad.
2. Criterio válido para materiales lineales, elástico e isótropos, y asumiendo deformaciones pequeñas.
3. σ_{VM} es un valor no negativo, aunque en algunos softwares puede variar esta consideración.
4. σ_{VM} no es un esfuerzo físico, no debe compararse directamente con otros.
5. Es un valor teórico que permite contrastar un estado de tensiones tridimensional con resultados unidimensionales.
6. Los esfuerzos de von Mises están en función de las diferencias entre los esfuerzos principales y no de su valor individual; por lo tanto, si se varían en la misma cantidad los esfuerzos principales, el esfuerzo de von Mises permanecerá constante; solo se varían los esfuerzos hidrostáticos.

Criterio de von Mises

Observaciones al criterio y consideraciones prácticas

Superficie de fluencia de von Mises

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} = f_y.$$

Observaciones:

1. Se debe verificar que el máximo esfuerzo de von Mises σ_{VM} no supere el esfuerzo de fluencia f_y del material dividido un factor de seguridad.
2. Criterio válido para materiales lineales, elástico e isótropos, y asumiendo deformaciones pequeñas.
3. σ_{VM} es un valor no negativo, aunque en algunos softwares puede variar esta consideración.
4. σ_{VM} no es un esfuerzo físico, no debe compararse directamente con otros.
5. Es un valor teórico que permite contrastar un estado de tensiones tridimensional con resultados unidimensionales.
6. Los esfuerzos de von Mises están en función de las diferencias entre los esfuerzos principales y no de su valor individual; por lo tanto, si se varían en la misma cantidad los esfuerzos principales, el esfuerzo de von Mises permanecerá constante; solo se varían los esfuerzos hidrostáticos.

Criterio de von Mises

Observaciones al criterio y consideraciones prácticas

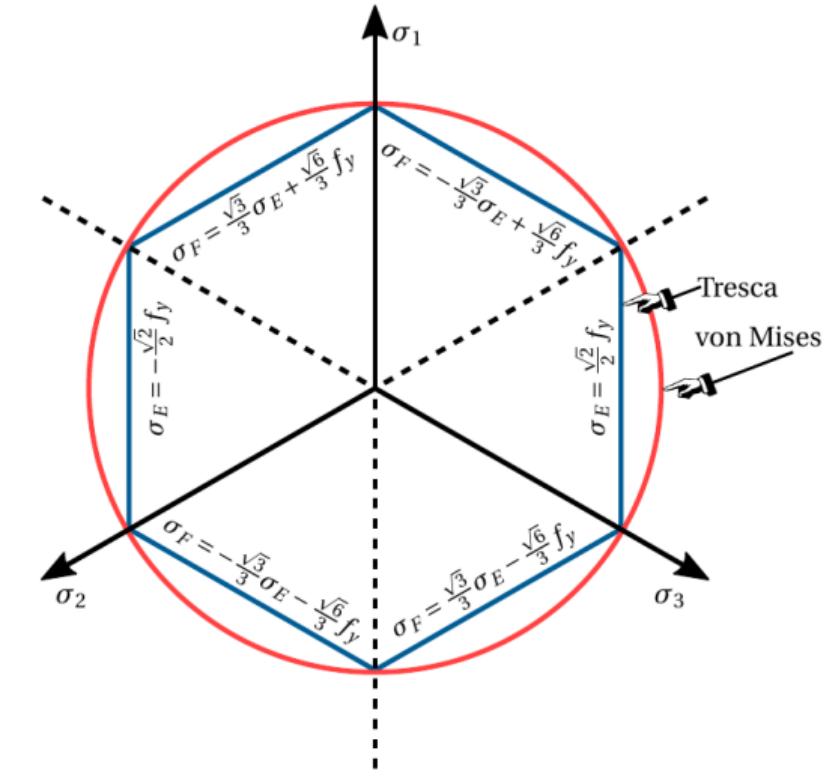
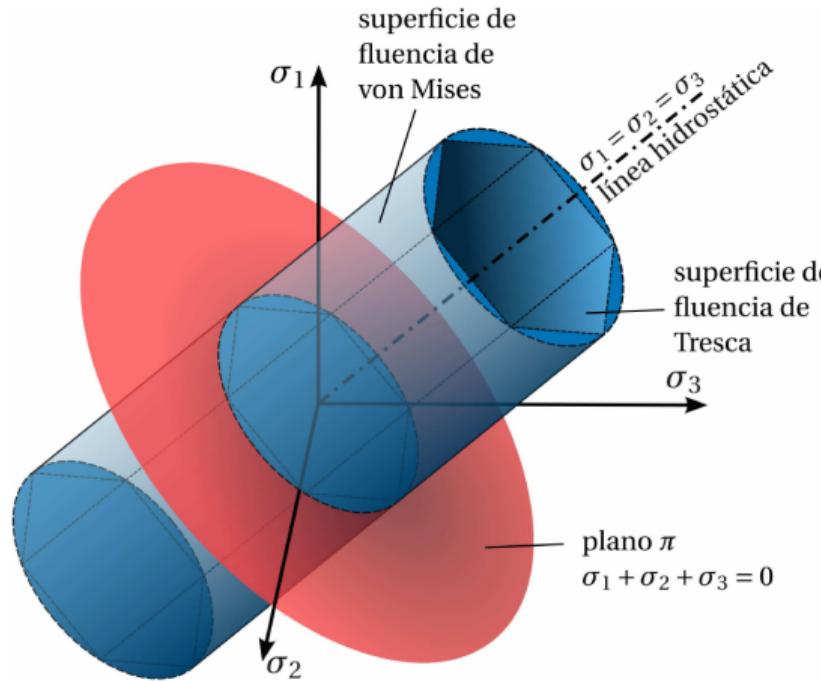
Superficie de fluencia de von Mises

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} = f_y.$$

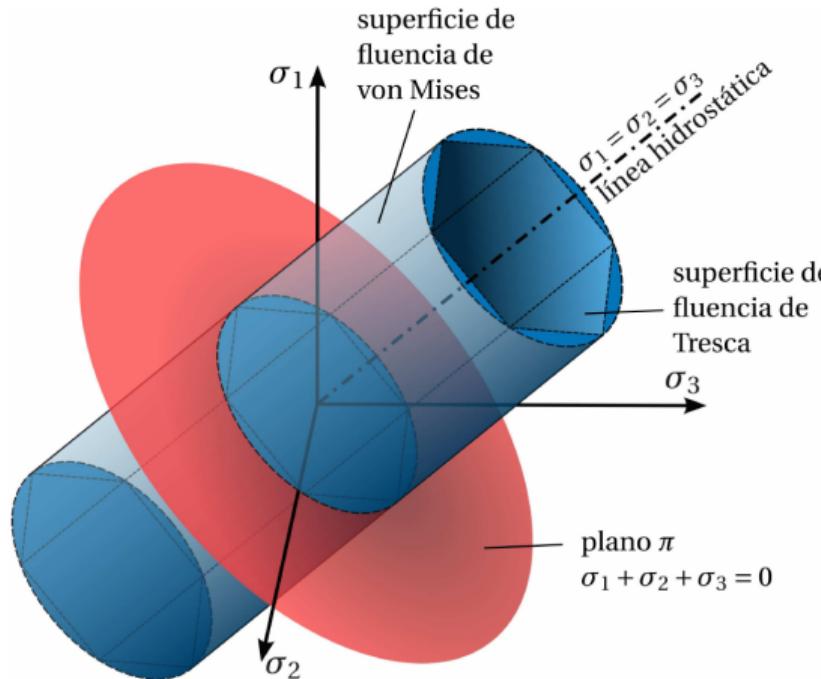
Observaciones:

1. Se debe verificar que el máximo esfuerzo de von Mises σ_{VM} no supere el esfuerzo de fluencia f_y del material dividido un factor de seguridad.
2. Criterio válido para materiales lineales, elástico e isótropos, y asumiendo deformaciones pequeñas.
3. σ_{VM} es un valor no negativo, aunque en algunos softwares puede variar esta consideración.
4. σ_{VM} no es un esfuerzo físico, no debe compararse directamente con otros.
5. Es un valor teórico que permite contrastar un estado de tensiones tridimensional con resultados unidimensionales.
6. Los esfuerzos de von Mises están en función de las diferencias entre los esfuerzos principales y no de su valor individual; por lo tanto, si se varían en la misma cantidad los esfuerzos principales, el esfuerzo de von Mises permanecerá constante; solo se varían los esfuerzos hidrostáticos.

Graficando el criterio de fluencia de von Mises



Graficando el criterio de fluencia de von Mises



Recordar cuando definimos ρ :

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{\sigma_E^2 + \sigma_F^2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \underbrace{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3}}_{=\sigma_{VM}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{VM} = \sqrt{2J_2} \\ &= \sqrt{3}\tau_{OCT} = \|\underline{\sigma}_{desv}\|_F = \left\| [s_1, s_2, s_3]^T \right\|.\end{aligned}$$

Reemplazando allí la ecuación de la superficie de fluencia, encontramos que

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\frac{3}{2}}\rho.$$

Criterio de fluencia de Tresca

Criterio de Tresca

Criterio del máximo esfuerzo cortante | Formulación y desarrollo



Figure: Henri Tresca (1814–1885)

- Asume que la fluencia comienza cuando el esfuerzo cortante máximo alcanza un valor crítico k'' .

$$\tau_{\max} = k''$$

- Ya que calculamos $\tau_{\max} = \frac{f_y}{2} = k''$, llegamos a:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \tau_{\max} = \frac{\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{2} = \frac{f_y}{2}.$$

donde evidenciamos que abandonamos la convención $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

- Definimos el esfuerzo de Tresca como:

$$\begin{aligned}\sigma_T &= 2\tau_{\max} \\ &= \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \\ &= \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|);\end{aligned}$$

Criterio de Tresca

Observaciones al criterio y consideraciones prácticas

Superficie de fluencia de Tresca

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \tau_{\max} = \frac{\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{2} = \frac{f_y}{2}.$$

Observaciones:

1. Análogo al esfuerzo de von Mises, ya que también es un avlor que se compara contra f_y .
2. σ_T no es un esfuerzo físico, no debe compararse directamente con otros.
3. Es un valor teórico que permite contrastar un estado de tensiones tridimensional con resultados unidimensionales.

Comparativas:

1. En metales, el criterio de von Mises predice un poco mejor los resultados experimentales que el criterio de Tresca; sin embargo, sus diferencias son mínimas.
2. El criterio de Tresca tiende a proporcionar resultados más seguros o prudentes que el criterio de von Mises.

Criterio de Tresca

Observaciones al criterio y consideraciones prácticas

Superficie de fluencia de Tresca

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \tau_{\max} = \frac{\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{2} = \frac{f_y}{2}.$$

Observaciones:

1. Análogo al esfuerzo de von Mises, ya que también es un avlor que se compara contra f_y .
2. σ_T no es un esfuerzo físico, no debe compararse directamente con otros.
3. Es un valor teórico que permite contrastar un estado de tensiones tridimensional con resultados unidimensionales.

Comparativas:

1. En metales, el criterio de von Mises predice un poco mejor los resultados experimentales que el criterio de Tresca; sin embargo, sus diferencias son mínimas.
2. El criterio de Tresca tiende a proporcionar resultados más seguros o prudentes que el criterio de von Mises.

Criterio de Tresca

Observaciones al criterio y consideraciones prácticas

Superficie de fluencia de Tresca

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \tau_{\max} = \frac{\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{2} = \frac{f_y}{2}.$$

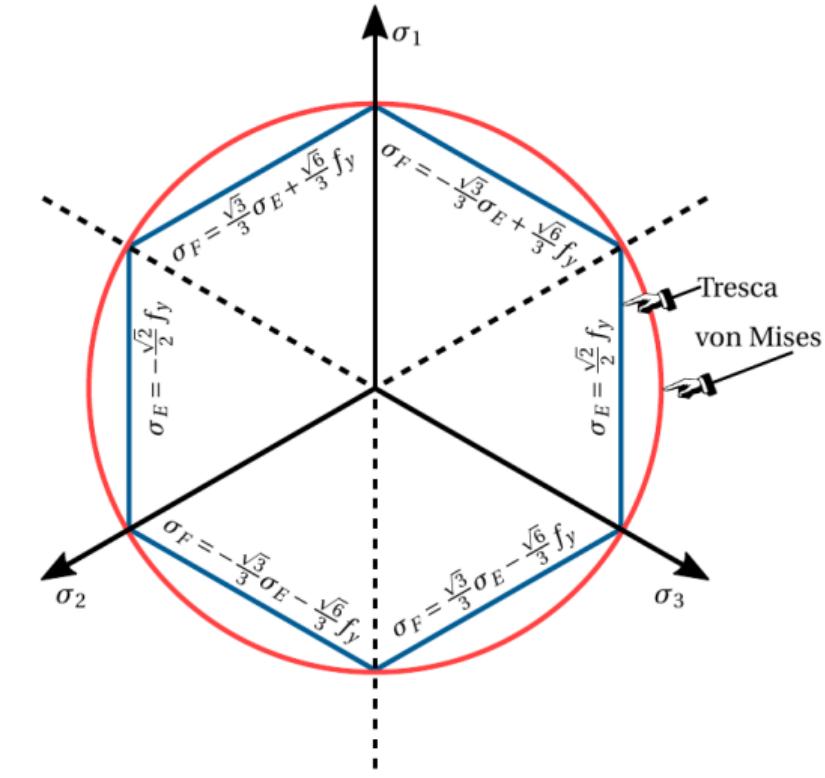
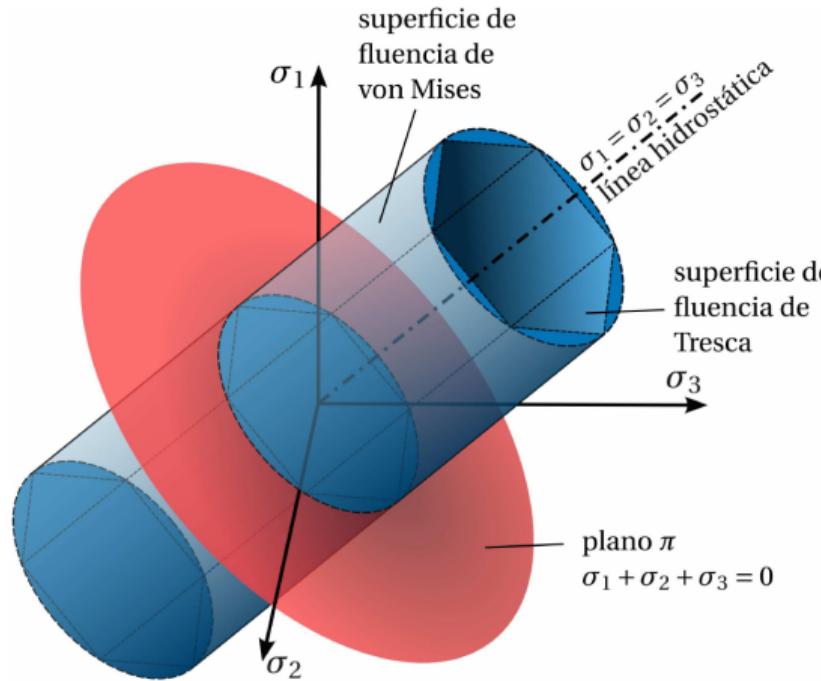
Observaciones:

1. Análogo al esfuerzo de von Mises, ya que también es un avlor que se compara contra f_y .
2. σ_T no es un esfuerzo físico, no debe compararse directamente con otros.
3. Es un valor teórico que permite contrastar un estado de tensiones tridimensional con resultados unidimensionales.

Comparativas:

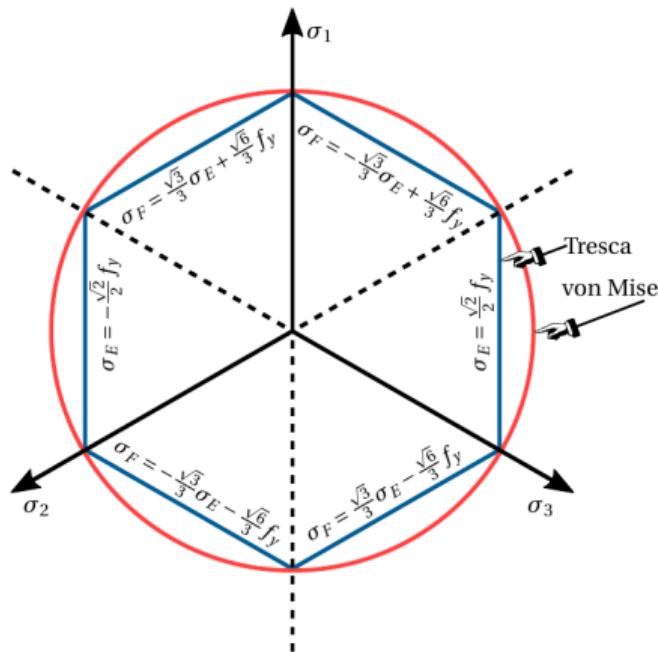
1. En metales, el criterio de von Mises predice un poco mejor los resultados experimentales que el criterio de Tresca; sin embargo, sus diferencias son mínimas.
2. El criterio de Tresca tiende a proporcionar resultados más seguros o prudentes que el criterio de von Mises.

Graficando el criterio de fluencia de Tresca



Graficando el criterio de fluencia de Tresca

Forma 1: Obteniendo las ecuaciones de los planos que conforman el prisma

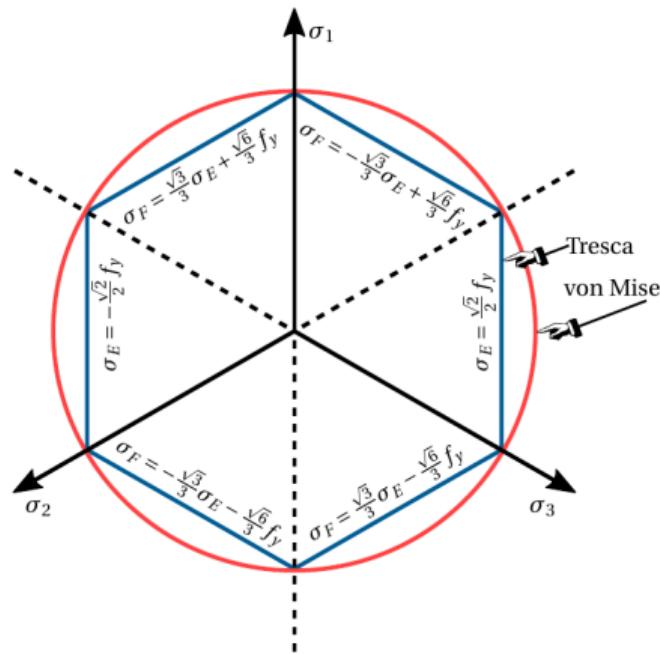


Obtenemos las ecuaciones de los planos en función de los esfuerzos principales o de la base $\{\hat{n}_D, \hat{n}_E, \hat{n}_F\}$ en cada región del plano desviador:

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$	$\sigma_1 - \sigma_3 = f_y$	$\sigma_F = \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_E + \frac{\sqrt{6}}{3} f_y$
$\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2$	$\sigma_1 - \sigma_2 = f_y$	$\sigma_F = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_E + \frac{\sqrt{6}}{3} f_y$
$\sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3$	$\sigma_2 - \sigma_3 = f_y$	$\sigma_E = -\frac{\sqrt{2}}{2} f_y$
$\sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_1$	$\sigma_2 - \sigma_1 = f_y$	$\sigma_F = \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_E - \frac{\sqrt{6}}{3} f_y$
$\sigma_3 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2$	$\sigma_3 - \sigma_2 = f_y$	$\sigma_E = \frac{\sqrt{2}}{2} f_y$
$\sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1$	$\sigma_3 - \sigma_1 = f_y$	$\sigma_F = \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_E - \frac{\sqrt{6}}{3} f_y$

Graficando el criterio de fluencia de Tresca

Forma 2: Formulación matemática alternativa con diferencias numéricas

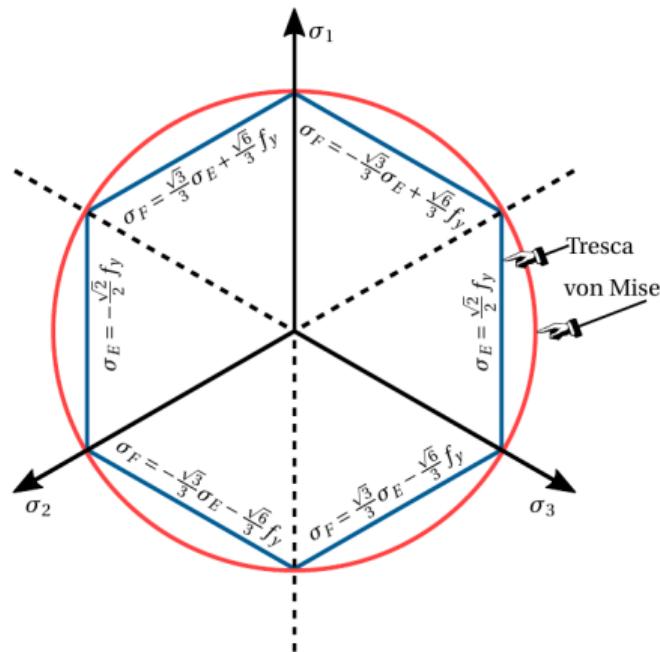


A partir de las formulaciones y simetrías en el espacio de los esfuerzos principales:

$$\begin{aligned}
 f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= \dots \\
 &= ((\sigma_1 - \sigma_3)^2 - f_y^2) ((\sigma_2 - \sigma_3)^2 - f_y^2) ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 - f_y^2) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Graficando el criterio de fluencia de Tresca

Forma 3: En el sistema de coordenadas cilíndricas de Haigh-Westergaard



Recordando, en el sistema de coordenadas cilíndricas de H-W:

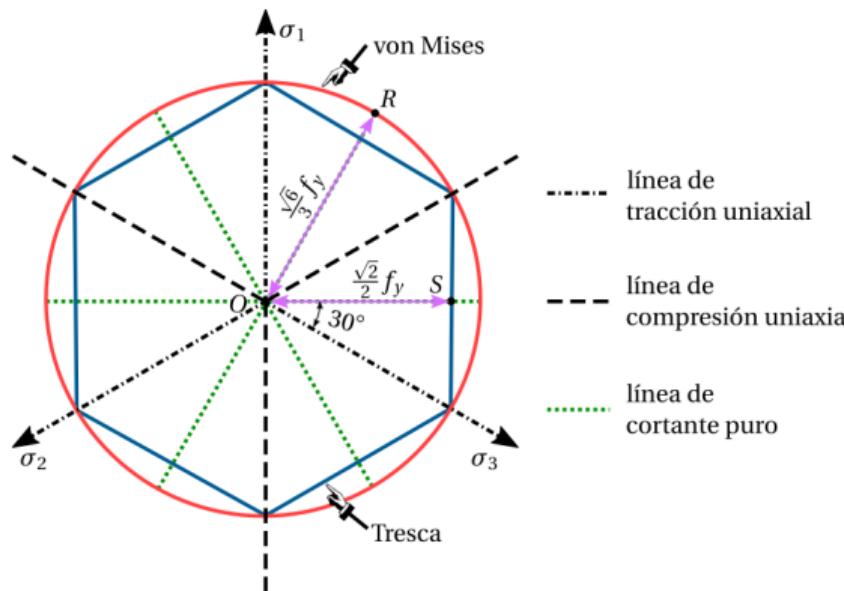
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \xi \\ \xi \\ \xi \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}} \rho \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \cos(\theta - 120^\circ) \\ \cos(\theta + 120^\circ) \end{bmatrix}.$$

Tenemos que $\sigma_1 - \sigma_3 = f_y$ en la región $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, se puede expresar como

$$f(\rho, \theta, \xi) = \sqrt{\frac{1}{2}} \rho \sin(\theta + 60^\circ) = \frac{f_y}{2}.$$

Entendiendo las gráficas de los criterios de von Mises y Tresca

Entendiendo las gráficas de los criterios de von Mises y Tresca



Línea de tracción uniaxial

Ocurre cuando un material está sometido a un esfuerzo de tracción en una sola dirección, y los esfuerzos en las otras dos direcciones perpendiculares son cero.

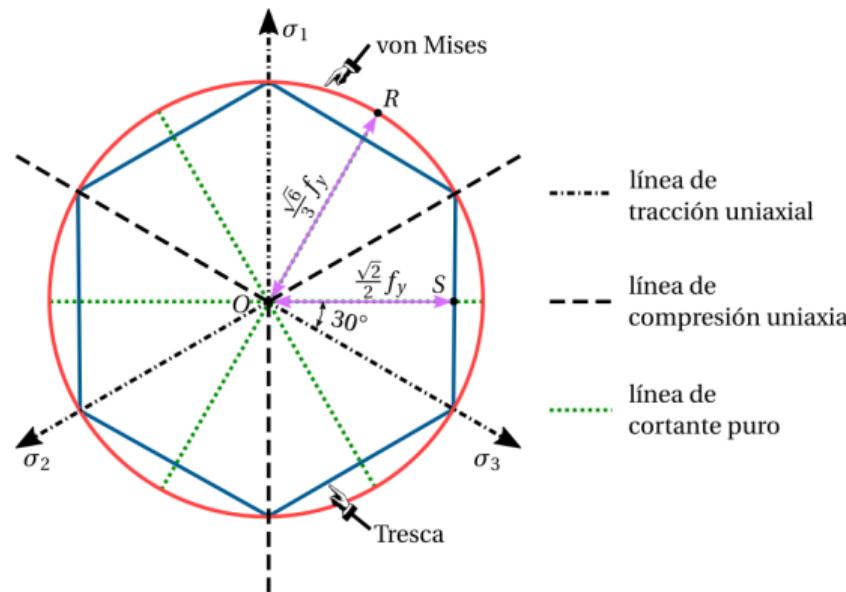
Línea de compresión uniaxial

Ocurre cuando un material está sometido a un esfuerzo de compresión en una sola dirección, y los esfuerzos en las otras dos direcciones perpendiculares son cero.

Línea de cortante puro

Ocurre cuando los esfuerzos normales son cero y solo hay un esfuerzo cortante actuando, o cuando los esfuerzos principales son de la forma $(\tau, 0, -\tau)$.

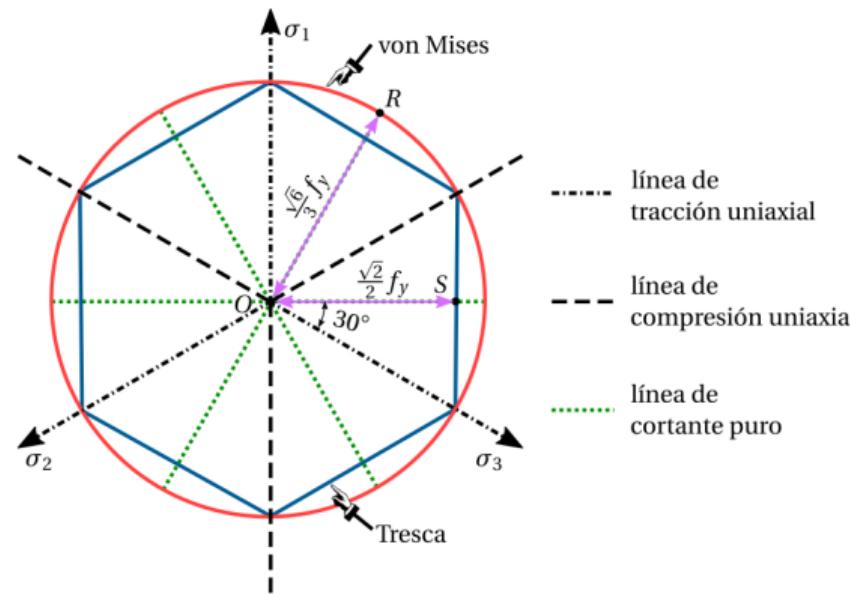
Entendiendo las gráficas de los criterios de von Mises y Tresca



- Los vértices están asociados a ensayos de compresión o tracción uniaxial, por lo que ambos criterios predicen el mismo esfuerzo de fluencia.
- La diferencia entre estimaciones es máxima cuando se analiza el cortante puro:

$$(OR - OS)/OS = \frac{\sqrt{6}/3 - \sqrt{2}/2}{\sqrt{6}/3} = 15.5\%.$$

Entendiendo las gráficas de los criterios de von Mises y Tresca



- Tres condiciones de cortantes puros:

$$\begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix};$$

con esfuerzos principales τ , 0 y $-\tau$.

Entendiendo las gráficas de los criterios de von Mises y Tresca

- Evaluando las posibles permutaciones de los esfuerzos principales y reemplazando en las ecuaciones de la base $\{\hat{n}_D, \hat{n}_E, \hat{n}_F\}$:

$$\sigma_1 = \tau; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -\tau \quad \sigma_E = -\frac{\tau}{\sqrt{2}}; \sigma_F = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\tau \quad \sigma_F = -\sqrt{3}\sigma_E$$

$$\sigma_1 = \tau; \sigma_3 = 0; \sigma_2 = -\tau \quad \sigma_E = +\frac{\tau}{\sqrt{2}}; \sigma_F = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\tau \quad \sigma_F = \sqrt{3}\sigma_E$$

$$\sigma_2 = \tau; \sigma_1 = 0; \sigma_3 = -\tau \quad \sigma_E = -\sqrt{2}\tau; \sigma_F = 0 \quad \sigma_F = 0$$

$$\sigma_2 = \tau; \sigma_3 = 0; \sigma_1 = -\tau \quad \sigma_E = -\frac{\tau}{\sqrt{2}}; \sigma_F = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\tau \quad \sigma_F = \sqrt{3}\sigma_E$$

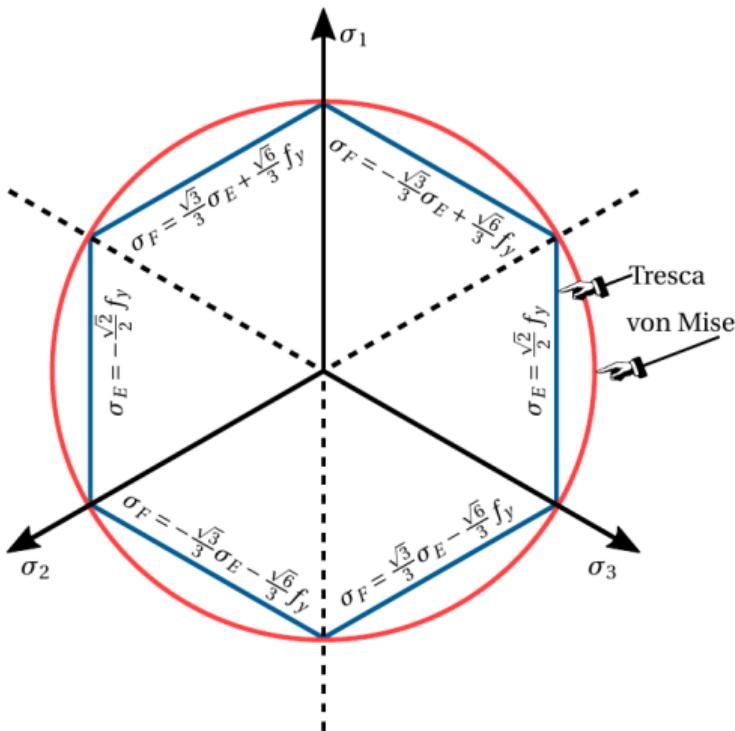
$$\sigma_3 = \tau; \sigma_1 = 0; \sigma_2 = -\tau \quad \sigma_E = +\sqrt{2}\tau; \sigma_F = 0 \quad \sigma_F = 0$$

$$\sigma_3 = \tau; \sigma_2 = 0; \sigma_1 = -\tau \quad \sigma_E = +\frac{\tau}{\sqrt{2}}; \sigma_F = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\tau \quad \sigma_F = -\sqrt{3}\sigma_E$$

Comparando ambos criterios: von Mises y Tresca

Comparando ambos criterios: von Mises y Tresca

Podemos ver estas comparaciones en al grafica de ambas superficies intersectadas con el plano desviador



1. El material se mantiene en el rango elástico cuando los tres esfuerzos principales son aproximadamente iguales, sin importar cuanto sea la compresión o el estiramiento aplicado.
2. Cuando uno de los esfuerzos principales se vuelve mucho más grande o pequeño, en comparación con los otros, el material entra en fluencia.
3. La superficie de fluencia para metales es independiente de $I_1 = 3\sigma_M$: la deformación plástica es prácticamente independiente del esfuerzo hidrostático.

Comparando ambos criterios: von Mises y Tresca (en tensión plana)

Resultados de autores y estudios de Taylor y Quinney (1932) en tubos de pared delgada de cobre, aluminio y acero

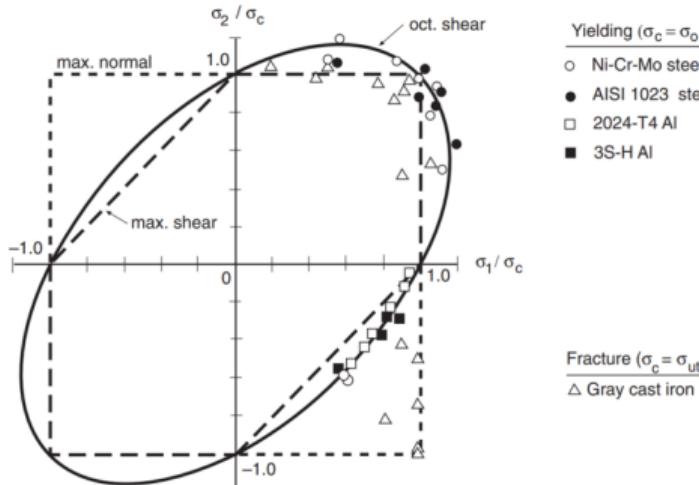
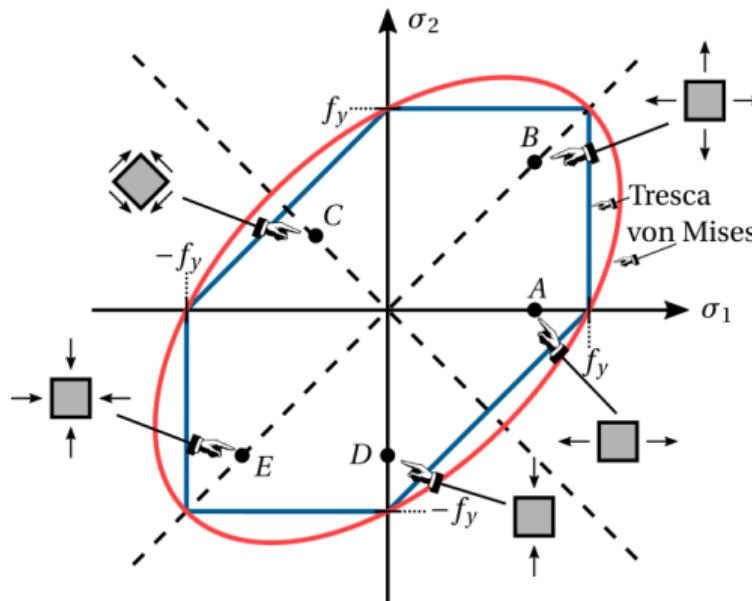


Figure 7.11 Plane stress failure loci for three criteria. These are compared with biaxial yield data for ductile steels and aluminum alloys, and also with biaxial fracture data for gray cast iron. (The steel data are from [Lessells 40] and [Davis 45], the aluminum data from [Naghdi 58] and [Marin 40], and the cast iron data from [Coffin 50] and [Grassi 49].)

1. La teoría de von Mises predice mejor el inicio de fluencia en dichos materiales que al teoría de Tresca.
2. El ajuste depende mucho del tipo de material. No se debería descartar un criterio a menos que se tengan datos experimentales para comprobarlo.
3. El tipo de criterio a utilizar depende del tipo de material empleado de qué tan conservadores sean los cálculos.

Superficie de fluencia de Tresca y von Mises en el caso de tensión plana

En el caso de deformación plana, es más complejo, porque $\varepsilon_3 = 0$, $\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2)$



- Criterio de von Mises:

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2}{2}} = f_y.$$

- Criterio de Tresca:

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{\max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2|, |\sigma_1|)}{2} = \frac{f_y}{2}.$$

Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaédricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distrosión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- **16.7. Criterios de falla en materiales frágiles**
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaédricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distorsión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- **16.8. Graficando las superficies de fluencia**
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaédricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distorsión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- **16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos**

