4100611 - Mecánica de Sólidos

Unidad 4. Formulación en coordenadas polares y cilíndricas

Michael Heredia Pérez
Ing., Esp., MSc.

mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil

2026a

Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada.

Derrotero

- ¿Por qué coordenadas cilíndricas?
- 6.1. El sistema de coordenadas polares
- 6.2. El sistema de coordenadas cilíndricas
- 6.3. El gradiente, el laplaciano, la divergencia y el rotacional en coordenadas cilíndricas
- Material de apoyo

Derrotero

Condiciones particulares

En ciertos casos, la solución al problema de caracterizar el sólido Ω se vuelve más corta y simple cuando se formula en coordenadas cilíndricas o esféricas, que en coordenadas rectangulares.

Algunos casos:

- Túneles
- Tuberías sometidas a presión
- Arandelas
- Cargas puntuales actuando sobre planos semiinfinitos (cimentaciones)

Condiciones particulares

En ciertos casos, la solución al problema de caracterizar el sólido Ω se vuelve más corta y simple cuando se formula en coordenadas cilíndricas o esféricas, que en coordenadas rectangulares.

Algunos casos:

- Túneles
- Tuberías sometidas a presión
- Arandelas
- Cargas puntuales actuando sobre planos semiinfinitos (cimentaciones)

Condiciones particulares

En ciertos casos, la solución al problema de caracterizar el sólido Ω se vuelve más corta y simple cuando se formula en coordenadas cilíndricas o esféricas, que en coordenadas rectangulares.

Algunos casos:

- Túneles
- Tuberías sometidas a presión
- Arandelas
- Cargas puntuales actuando sobre planos semiinfinitos (cimentaciones)

Condiciones particulares

En ciertos casos, la solución al problema de caracterizar el sólido Ω se vuelve más corta y simple cuando se formula en coordenadas cilíndricas o esféricas, que en coordenadas rectangulares.

Algunos casos:

- Túneles
- Tuberías sometidas a presión
- Arandelas
- Cargas puntuales actuando sobre planos semiinfinitos (cimentaciones)

Condiciones particulares

En ciertos casos, la solución al problema de caracterizar el sólido Ω se vuelve más corta y simple cuando se formula en coordenadas cilíndricas o esféricas, que en coordenadas rectangulares.

Algunos casos:

- Túneles
- Tuberías sometidas a presión
- Arandelas
- Cargas puntuales actuando sobre planos semiinfinitos (cimentaciones)

Condiciones particulares

En ciertos casos, la solución al problema de caracterizar el sólido Ω se vuelve más corta y simple cuando se formula en coordenadas cilíndricas o esféricas, que en coordenadas rectangulares.

Algunos casos:

- Túneles
- Tuberías sometidas a presión
- Arandelas
- Cargas puntuales actuando sobre planos semiinfinitos (cimentaciones)

Ejemplo: estudio de suelos y pavimentos

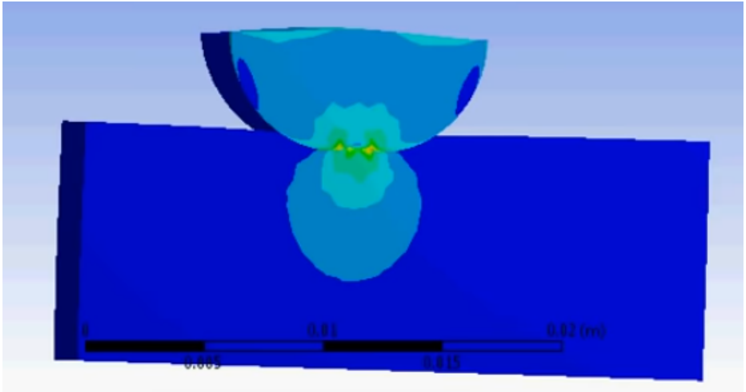


Figure: *https://www.youtube.com/watch?v=zk4Xe_9AiKE*

Derrotero

6.1. El sistema de coordenadas polares

Sistema bidimensional en el cual cada punto del plano se determina por un ángulo ($\theta \in [0, 2\pi)$) y una distancia ($r \geq 0$).

De polares a rectangulares

$$x(r,\theta) = r\cos\theta \qquad y(r,\theta) = r\sin\theta$$

De rectangulares a polares

$$r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \theta(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x>0 \text{y } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+2\pi & \text{si } x>0 \text{y } y<0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi & \text{si } x<0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x=0 \text{y } y>0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{si } x=0 \text{y } y<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \text{y } y=0 \end{cases}$$

6.1. El sistema de coordenadas polares

Sistema bidimensional en el cual cada punto del plano se determina por un ángulo ($\theta \in [0, 2\pi)$) y una distancia ($r \geq 0$).

De polares a rectangulares

$$x(r,\theta) = r\cos\theta \qquad y(r,\theta) = r\sin\theta$$

De rectangulares a polares

$$r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \theta(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \text{y } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{si } x > 0 \text{y } y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{y } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{y } y < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{y } y = 0 \end{cases}$$

6.1. El sistema de coordenadas polares

Sistema bidimensional en el cual cada punto del plano se determina por un ángulo ($\theta \in [0, 2\pi)$) y una distancia ($r \geq 0$).

De polares a rectangulares

$$x(r, \theta) = r\cos\theta \qquad y(r, \theta) = r\sin\theta$$

De rectangulares a polares

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta(x, y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \text{y } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{si } x > 0 \text{y } y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{y } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{y } y < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{y } y = 0 \end{cases}$$

6.1. El sistema de coordenadas polares

Si una función ϕ está definida en términos de coordenadas polares:

$$(r,\theta) \to \phi(r,\theta)$$

en virtud de la regla de la cadena es posible encontrar las derivadas de ϕ con respecto a las varibales x y y del sistema de coordenadas rectangulares, así:

$$\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\sin\theta$$
$$\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial r}\sin\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\cos\theta$$

Derivando nuevamente se obtiene el laplaciano de la función ϕ en términos de coordenadas polares:

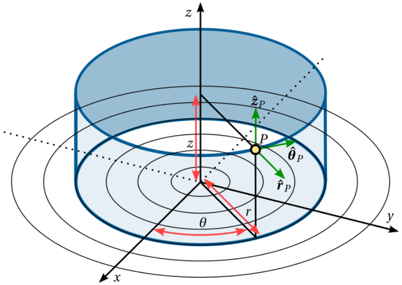
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}\end{aligned}$$

Derrotero

Extensión tridimensional del sistema de coordenadas polares

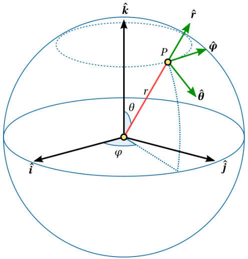
S.C. Cilíndrico

Añade una coordenada de distancia desde el plano xy medida en la dirección del eje z al punto en consideración.



S.C. Esférico

Define un radio r y un ángulo *polar* θ medido desde el vector $\hat{\boldsymbol{k}}$ y añade una tercera coordenada que es el ángulo *azimutal* ϕ que se mide a partir del vector $\hat{\boldsymbol{\imath}}$.



6.2. El sistema de coordenadas cilíndricas

Podemos definir 3 vectores ortogonales al punto P.

$$\hat{\boldsymbol{r}}_p(t,\theta,z) := [\cos\theta, \sin\theta, 0]^T = \cos\theta\hat{\boldsymbol{i}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{j}}$$
$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_p(t,\theta,z) := [-\sin\theta, \cos\theta, 0]^T = -\sin\theta\hat{\boldsymbol{i}} + \cos\theta\hat{\boldsymbol{j}}$$
$$\hat{\boldsymbol{z}}_p(t,\theta,z) := [0, 0, 1]^T = \hat{\boldsymbol{k}}$$

- Estos vectores indican las direcciones en las que aumentan las coordenadas r, θ y z, respectivamente.
- $\hat{\boldsymbol{r}}_p$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_p$, $\hat{\boldsymbol{z}}_p$ se pueden entender como campos vectoriales.

6.2. El sistema de coordenadas cilíndricas

Podemos tener una matriz de transformación entre el sistema de coordenadas rectangulares ($\boldsymbol{r}$) y el sistema de coordenadas cilíndricas ($\boldsymbol{r}_{cil}$):

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{r}_{cil}$$

$$\boldsymbol{T}(r,\theta,z) = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{r}}_p(r,\theta,z) & \hat{\boldsymbol{\theta}}_p(r,\theta,z) & \hat{\boldsymbol{z}}_p(r,\theta,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.2. El sistema de coordenadas cilíndricas

Podemos tener una matriz de transformación entre el sistema de coordenadas rectangulares ($\boldsymbol{r}$) y el sistema de coordenadas cilíndricas ($\boldsymbol{r}_{cil}$):

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{r}_{cil}$$

$$\boldsymbol{T}(r,\theta,z) = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{r}}_p(r,\theta,z) & \hat{\boldsymbol{\theta}}_p(r,\theta,z) & \hat{\boldsymbol{z}}_p(r,\theta,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.2. El sistema de coordenadas cilíndricas

Podemos tener una matriz de transformación entre el sistema de coordenadas rectangulares ($\boldsymbol{r}$) y el sistema de coordenadas cilíndricas ($\boldsymbol{r}_{cil}$):

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{r}_{cil}$$

$$\boldsymbol{T}(r,\theta,z) = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{r}}_p(r,\theta,z) & \hat{\boldsymbol{\theta}}_p(r,\theta,z) & \hat{\boldsymbol{z}}_p(r,\theta,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Derrotero

- ¿Por qué coordenadas cilíndricas?
- 6.1. El sistema de coordenadas polares
- 6.2. El sistema de coordenadas cilíndricas
- 6.3. El gradiente, el laplaciano, la divergencia y el rotacional en coordenadas cilíndricas
- Material de apoyo

6.3.1. El gradiente en coordenadas cilíndricas

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{\boldsymbol{r}}_p + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}_p + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{\boldsymbol{k}}$$

- El gradiente de ϕ evaluado en $\boldsymbol{x}$ indica la dirección en la cual ϕ es más pendiente en el punto $\boldsymbol{x}$.
- Su norma $\|\nabla \phi(\boldsymbol{x})\|$ representa qué tan pendiente es ϕ en ese punto $\boldsymbol{x}$ en la dirección del vector $\nabla \phi(\boldsymbol{x})$.

6.3.2. El laplaciano en coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

- Es una convención matemática para escribir en forma compacta la suma de las derivadas segundas de ϕ con respecto a cada una de sus variables.

6.3.3. La divergencia en coordenadas cilíndricas

$$\text{div}\,\boldsymbol{f}(r, \theta, z)$$

- Mide el grado de divergencia (div $\boldsymbol{f}(x, y, z) > 0$) o de convergencia (div $\boldsymbol{f}(x, y, z) < 0$) de los vectores que conforman un campo vectorial en el vecindario de (x,y,z).
- (M. Sólidos) la divergencia del campo vectorial de desplazamiento $\boldsymbol{u}$ de un sólido en el punto (x, y, z), representa la llamada *dilatación cúbica* $e(x, y, z) :=$ div$\boldsymbol{u}(x, y, z)$, que explica "el porcentaje" de cambio de volumen del sólido en dicho punto (x, y, z).

Derrotero