

Criterios de falla para materiales dúctiles y frágiles

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil
Mecánica de Sólidos

2025a



Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada.



Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaedricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distorsión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

Derrotero

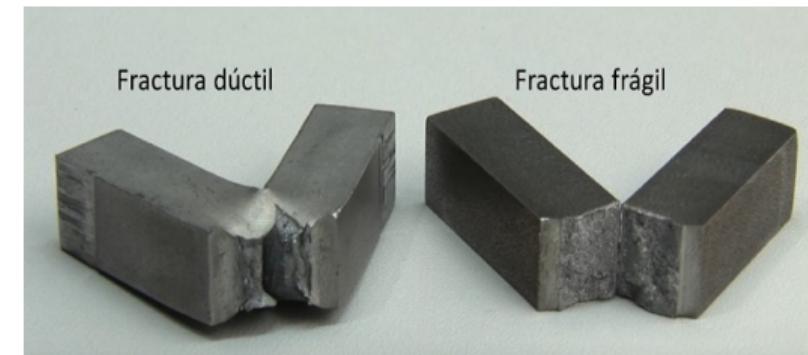
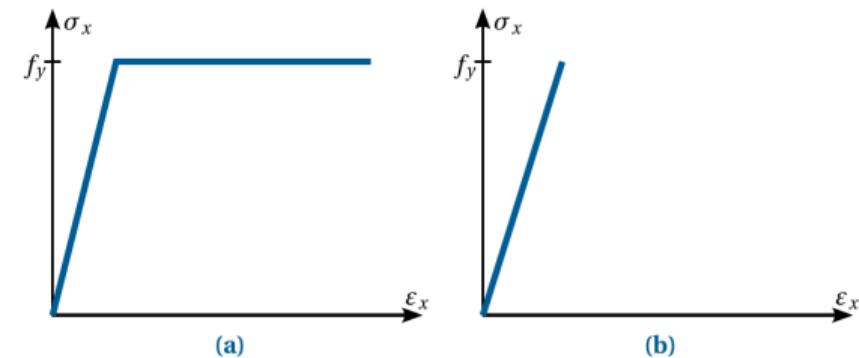
● Introducción

- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaédricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distorsión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

Introducción

A tener en cuenta:

- Nos interesa conocer la combinación de esfuerzos que harán fallar un material.
- Esto dependerá el tipo de material y de la configuración de las cargas.
- Hay cientos de teorías de falla, y ninguna es óptima en todos los casos. La más básica es el caso de una barra de acero uniaxialmente cargada: $\sigma_x \geq f_y$.



Introducción

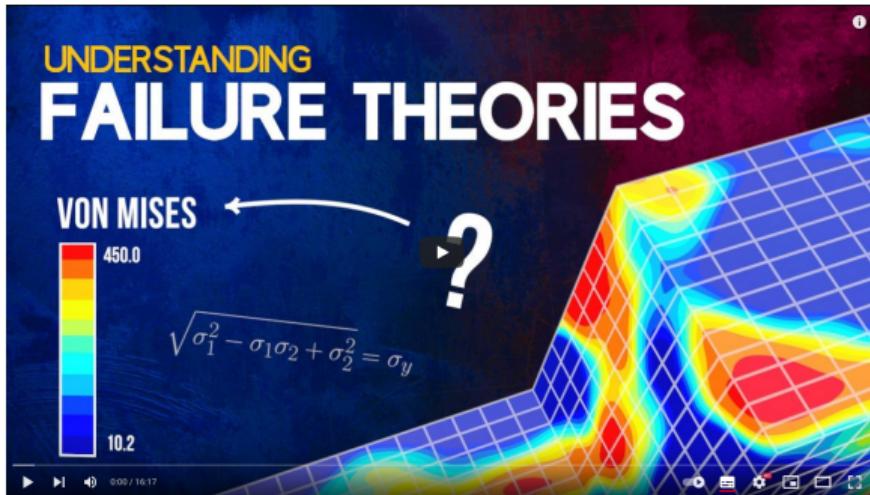


Figure: Video: *Understanding Failure Theories (Tresca, von Mises etc...)*

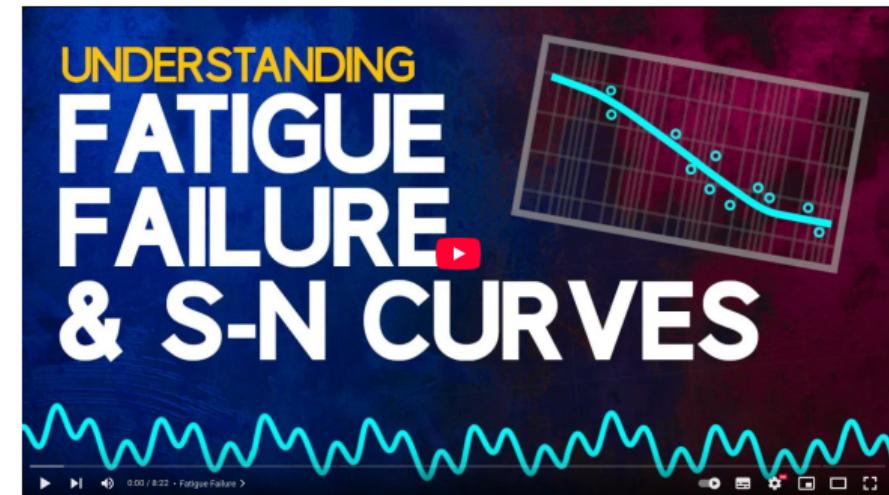


Figure: Video: *Understanding Fatigue Failure and S-N Curves*

Derrotero

- Introducción
- **16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores**
- 16.2. Esfuerzos octaedricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distorsión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores

Repasando los invariantes de esfuerzos | Cálculo del círculo de Mohr tridimensional

Expandiendo el determinante $\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \mathbf{I}) = 0$

$$\begin{aligned} & (\sigma_x - \sigma_n) [(\sigma_y - \sigma_n)(\sigma_z - \sigma_n) - \tau_{yz}^2] \\ & - \tau_{xy} [\tau_{xy}(\sigma_z - \sigma_n) - \tau_{yz}\tau_{xz}] \\ & + \tau_{xz} [\tau_{xy}\tau_{yz} - (\sigma_y - \sigma_n)\tau_{xz}] = 0; \end{aligned}$$

La ecuación característica:

$$-\sigma_n^3 + I_1\sigma_n^2 - I_2\sigma_n + I_3 = 0$$

De donde sacamos los **Invariantes de Esfuerzos**: Los invariantes son independientes de la base utilizada para describir el tensor.

$$\Theta := I_1 = \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})$$

$$I_2 = \frac{1}{2}((\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}))^2 - \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^2))$$

$$I_3 = \det(\underline{\underline{\sigma}})$$

Los invariantes son útiles cuando se necesita crear descripciones del comportamiento de los materiales, ya que, por ejemplo, un material isótropo no sabe qué sistema de coordenadas se ha usado para describir su comportamiento.

Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores

Definimos dos esfuerzos nuevos que nos ayudarán a entender el comportamiento del tensor de esfuerzos tridimensional:

Esfuerzo medio o hidrostático

$$\sigma_M := \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{I_1}{3}$$

Esfuerzos desviadores

$$s_x := \sigma_x - \sigma_M$$

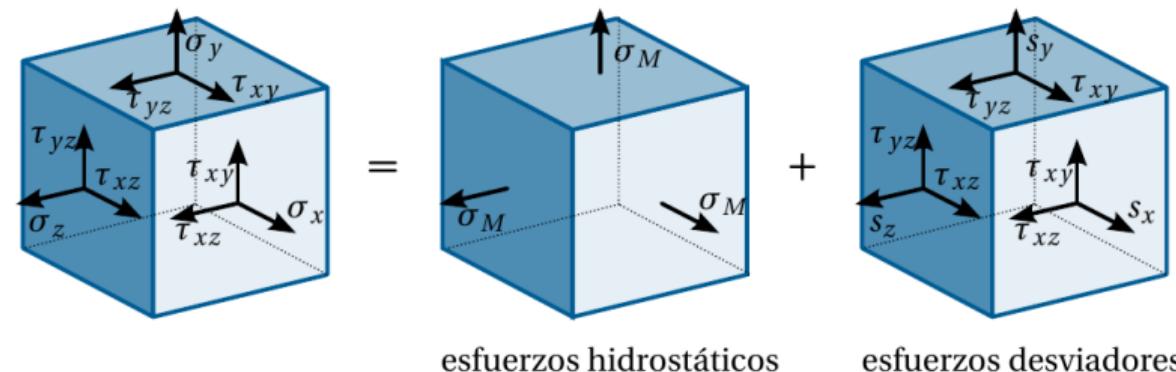
$$s_y := \sigma_y - \sigma_M$$

$$s_z := \sigma_z - \sigma_M$$

Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores

El tensor de esfuerzos $\underline{\underline{\sigma}}$ puede descomponerse en un **tensor de esfuerzos hidrostáticos** y un **tensor de esfuerzos desviadores**, en la base $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_M & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_M & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_M \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}_{\text{hidr}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} s_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & s_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & s_z \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}_{\text{desv}}}$$



Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores

El tensor de esfuerzos $\underline{\underline{\sigma}}$ puede descomponerse en un **tensor de esfuerzos hidrostáticos** y un **tensor de esfuerzos desviadores**, en la base **en la base $\{\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3\}$** :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_M & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_M & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_M \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}_{\text{hidr}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma'}}_{\text{desv}}}$$

Tenemos los siguientes resultados:

- Los esfuerzos desviadores principales:

$$s_1 = \sigma_1 - \sigma_M$$

$$s_2 = \sigma_2 - \sigma_M$$

$$s_3 = \sigma_3 - \sigma_M$$

- $\underline{\underline{\sigma}}_{\text{hidr}} = \sigma_M \mathbf{I}$.
- $\sigma_M = K e$, recordando que:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

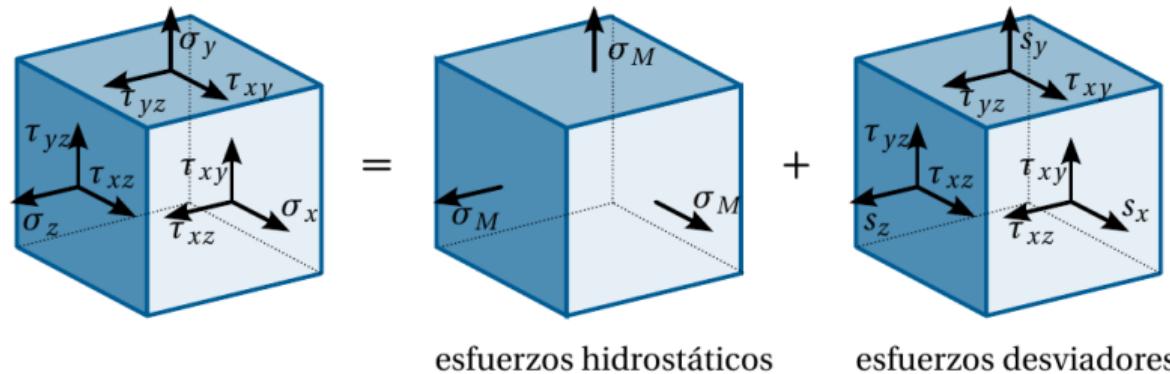
$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

- $\underline{\underline{\sigma}}_{\text{hidr}}$ describe los cambios de volumen en el material.

Esfuerzos medios y desviadores

Acción de los esfuerzos medios y desviadores



Esfuerzos hidrostáticos: *dilatan el sólido*

- Son responsables del cambio de volumen.
- Estiran o contraen el sólido con igual intensidad en todas las direcciones.

Esfuerzos desviadores: *distorsionan el sólido*

- No producen cambio de volumen.
- Son responsables de la distorsión del sólido:
 - Lo pueden estirar o contraer más en una dirección que en otra.
 - Lo pueden deformar angularmente.

Esfuerzos desviadores

Verificando que no alteran el volumen

Código: 16_01_02_verificacion_cambio_volumen.ipynb

```
/* Se define el esfuerzo hidrostático, ecuación (16.2) */
sM : (sigmax + sigmay + sigmaz)/3$

/* Se definen los esfuerzos desviadores, ecuación (16.3) */
sx : sigmax - sM$
sy : sigmay - sM$
sz : sigmaz - sM$

/* Se calculan las deformaciones asociadas al esf. desviador, ec. (4.3) */
ex : (1/E)*(sx - nu*(sy + sz))$
ey : (1/E)*(sy - nu*(sx + sz))$
ez : (1/E)*(sz - nu*(sx + sy))$

/* Se calcula la dilatación cúbica asociada al esf. desviador, ec. (4.27) */
e : expand(ex + ey + ez); /* imprime θ */
```

Tarea

Demostrar que el tensor $\underline{\underline{\sigma}}_{\text{desv}}$ tiene los mismos vectores propios que $\underline{\underline{\sigma}}$ y sus valores propios están dados por:

$$s_1 = \sigma_1 - \sigma_M$$

$$s_2 = \sigma_2 - \sigma_M$$

$$s_3 = \sigma_3 - \sigma_M$$

Invariantes de los tensores de esfuerzos medios y desviadores

Las ecuaciones características de los tensores de esfuerzos medios y desviadores son:

$$\det \left(\underline{\underline{\sigma}}_{\text{hidr}} - \sigma_n \mathbf{I} \right) = -\sigma_n^3 + \tilde{I}_1 \sigma_n^2 - \tilde{I}_2 \sigma_n + \tilde{I}_3 = 0$$
$$\det \left(\underline{\underline{\sigma}}_{\text{desv}} - s_n \mathbf{I} \right) = -\sigma_n^3 + J_1 \sigma_n^2 + J_2 \sigma_n + J_3 = 0$$

Código: [16_01_03_invariantes.ipynb](#)

Invariantes de los tensores de esfuerzos medios y desviadores

Invariantes de esfuerzos medios:

$$\tilde{I}_1 := I_1 = 3\sigma_M = \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \quad \tilde{I}_2 := \frac{I_1^2}{3} = 3\sigma_M^2 \quad \tilde{I}_3 := \frac{I_1^3}{27} = \sigma_M^3.$$

Invariantes de esfuerzos desviadores:

$$J_1 := s_1 + s_2 + s_3 \quad J_2 := \frac{1}{2} \left\| [s_1, s_2, s_3]^T \right\|^2 \quad J_3 := s_1 s_2 s_3.$$

Código:

https://github.com/diegoandresalvarez/solidos/blob/master/codigo/16_teorias_falla/16.01_invariantes.ipynb

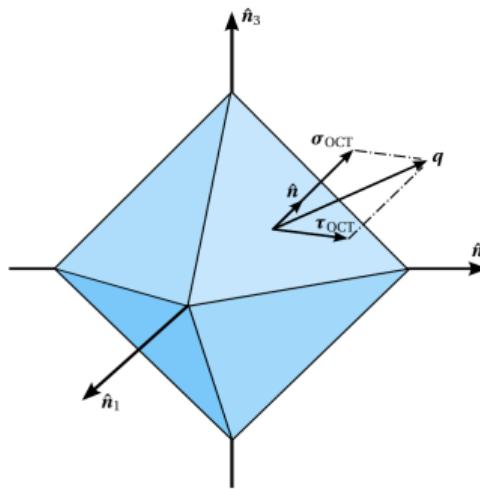
Desarrollo de los invariantes de los esfuerzos desviadores J_2 y J_3

$$\begin{aligned}
 J_2 &:= \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2}{6} + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 & J_3 &:= \frac{(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)}{27} \\
 &= \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{6} & &= I_3 - \frac{1}{3}I_1I_2 + \frac{2}{27}I_1^3 \\
 &= \frac{I_1^2}{3} - I_2 & &= \det\left(\underline{\underline{\sigma}}_{\text{desv}}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^2) - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})^2 \right] & &= \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}_{\text{desv}}^3) \\
 &= \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}_{\text{desv}}^2) & &= s_1s_2s_3. \\
 &= \frac{1}{2} \left\| \underline{\underline{\sigma}}_{\text{desv}} \right\|_F^2 \\
 &= -s_1s_2 - s_2s_3 - s_1s_3 \\
 &= \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \\
 &= \frac{1}{2} \left\| [s_1, s_2, s_3]^T \right\|^2
 \end{aligned}$$

Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- **16.2. Esfuerzos octaédricos**
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distorsión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

Esfuerzos octaédricos



En un sistema dado por $\{\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3\}$:

- Tensor de esfuerzos: $\underline{\underline{\sigma}} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.
- Orientación de los planos octaédricos, dados por:

$$\alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \beta = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \gamma = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

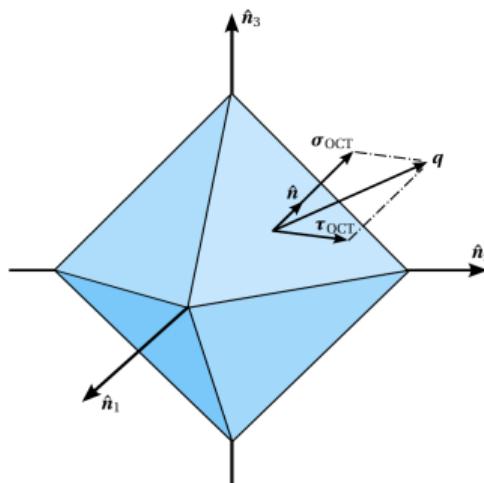
- La formulación de Cauchy:

$$\mathbf{q} = \frac{\sqrt{3}}{3} [\pm \sigma_1, \pm \sigma_2, \pm \sigma_3]^T.$$

Esfuerzos octaédricos

En un sistema dado por $\{\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3\}$:

- Descomponemos \mathbf{q} en sus componentes normales (σ_n) y tangenciales (σ_s), como:



$$\sigma_{\text{OCT}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3} = \sigma_M$$

$$\begin{aligned} |\tau_{\text{OCT}}| &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{2I_1^2 - 6I_2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3} J_2} \end{aligned}$$

- Definimos los esfuerzos octaédricos normal y cortante como:

$$|\sigma_{\text{OCT}}| = \|\boldsymbol{\sigma}_n\|$$

$$|\tau_{\text{OCT}}| = \|\boldsymbol{\sigma}_s\|.$$

Código: falta.ipynb

Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaédricos
- **16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica**
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distorsión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

Introducción a la superficie de fluencia

El sistema de coordenadas cilíndricas de Haigh-Westergaard

Simetría del espacio de esfuerzos principales

Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaedricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- **16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales**
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distorsión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

Estudio de Percy Williams Bridgman

(1882 - 1961) Premio nobel de física 1946

Observaciones:

- La presión hidrostática no produce una deformación permanente en el sólido, incluso bajo altas presiones y en régimen plástico; en otras palabras, la deformación presentada debido a dicha presión es completamente elástica.
- La presión hidrostática tiene un efecto despreciable en el esfuerzo de fluencia; esto sucede incluso con presiones hidrostáticas 10 veces mayores que el esfuerzo de fluencia.
- La deformación plástica en los metales es prácticamente independiente del esfuerzo hidrostático σ_M .
- La curva esfuerzo-deformación no se modifica por la acción de la presión hidrostática, excepto cuando está sometido a presiones extremadamente altas.
- A elevadas presiones hidrostáticas, que llegan incluso a los 3100 MPa, la ductilidad aumenta a medida que incrementa la presión hidrostática.
- En el régimen plástico (incluso bajo grandes deformaciones), y una vez retiradas las cargas, el material cambia de forma (se distorsiona), pero no de volumen.



Estudio de Percy Williams Bridgman

(1882 - 1961) Premio nobel de física 1946



Conclusiones:

- El tensor de esfuerzos medios σ_{hidr} no tiene mayor influencia en el comportamiento plástico de los materiales.
- Se espera que los esfuerzos desviadores tengan gran influencia en el comportamiento plástico de los materiales sometidos a un estado de esfuerzos tridimensional.

Figure: P. W. Bridgman

Estudio de Percy Williams Bridgman

(1882 - 1961) Premio nobel de física 1946



Figure: P. W. Bridgman

Limitantes:

- Observaciones anteriores no son válidas para algunos metales y materiales frágiles como el concreto o la roca.
- Estos se vuelven dúctiles bajo la acción de grandes presiones hidrostáticas.
- Aportes de Theodore von Kármán:
 - Con presiones de hasta 600 MPa, algunas rocas (concreto y arenisca) cambian su comportamiento de frágil a dúctil, y su enfurecimiento aumentaba.
 - Importante en geología y mecánica de rocas.

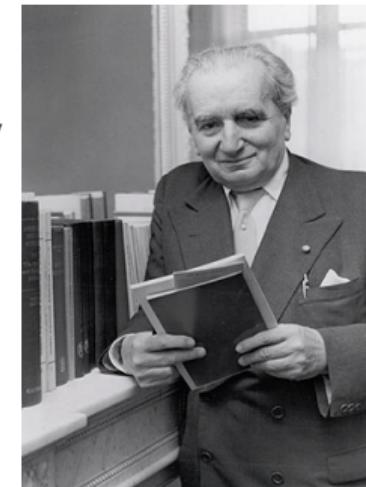


Figure: T. von Kármán

Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaédricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- **16.5. Energía de dilatación y energía de distrosión**
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaédricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distrosión
- **16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles**
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaédricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distorsión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- **16.7. Criterios de falla en materiales frágiles**
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaédricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distorsión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- **16.8. Graficando las superficies de fluencia**
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaédricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distorsión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- **16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos**

