

Estudio de los esfuerzos en un punto

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil
Mecánica Tensorial

2025a



Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada.



Derrotero

- 2.1. Tensiones o esfuerzos
- 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
 - 2.2.1. Análisis de un elemento infinitesimal rectangular
 - 2.2.2. Análisis de un elemento infinitesimal triangular
- 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional
 - Un pequeño comentario sobre el sistema coordenado en tres dimensiones
 - 2.3.1. Análisis de un paralelepípedo infinitesimal
 - 2.3.2. Análisis de un tetraedro infinitesimal
- 2.4. Notación indicial
- 2.5. Cambio de base
- 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas
 - 2.6.1. Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional
 - 2.6.2. Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional

Derrotero

- 2.1. Tensiones o esfuerzos
- 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
 - 2.2.1. Análisis de un elemento infinitesimal rectangular
 - 2.2.2. Análisis de un elemento infinitesimal triangular
- 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional
 - Un pequeño comentario sobre el sistema coordenado en tres dimensiones
 - 2.3.1. Análisis de un paralelepípedo infinitesimal
 - 2.3.2. Análisis de un tetraedro infinitesimal
- 2.4. Notación indicial
- 2.5. Cambio de base
- 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas
 - 2.6.1. Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional
 - 2.6.2. Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional

Tensiones o esfuerzos

- Intensidad de una fuerza por unidad de área en el contorno de un punto material sobre una superficie real o imaginaria de un medio continuo.
- Las fuerzas internas son una reacción a las fuerzas externas aplicadas.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Tensiones o esfuerzos

- Intensidad de una fuerza por unidad de área en el contorno de un punto material sobre una superficie real o imaginaria de un medio continuo.
- Las fuerzas internas son una reacción a las fuerzas externas aplicadas.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Tensiones o esfuerzos

- Intensidad de una fuerza por unidad de área en el contorno de un punto material sobre una superficie real o imaginaria de un medio continuo.
- Las fuerzas internas son una reacción a las fuerzas externas aplicadas.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Tensiones o esfuerzos

- El sólido deformado es continuo.
- Hay una distribución de esfuerzos representada como una función continua por partes.

Dominio en (x, y, z)

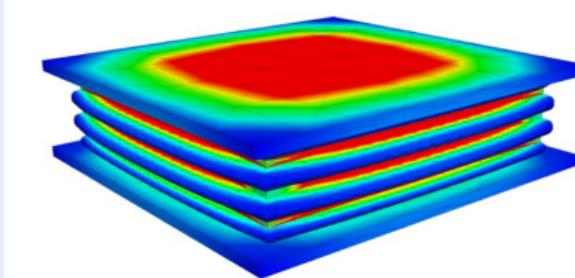


Figure: *Modelo estático de neopreno zunchado.* [ver post.](#)

Dominio en (x, y, z, t)

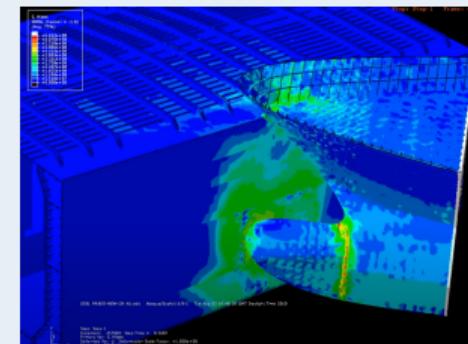
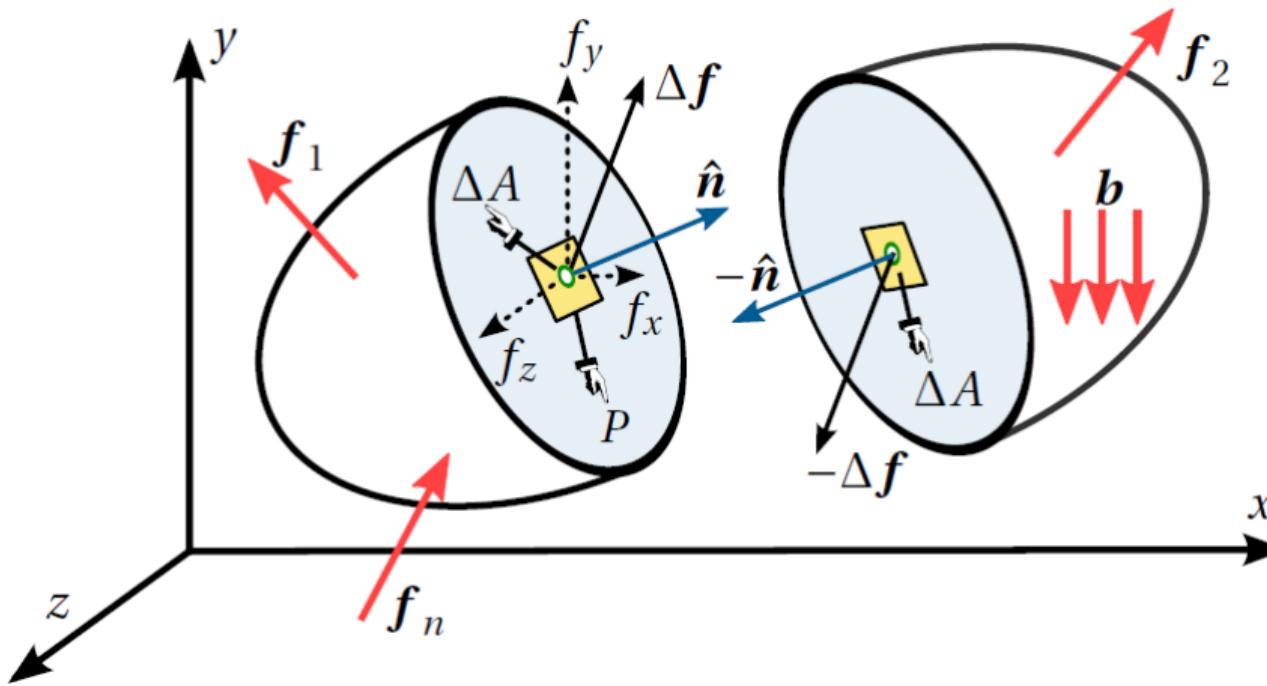
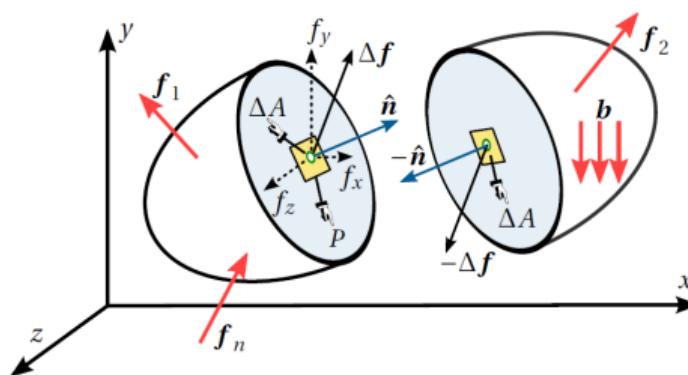


Figure: *Software-Ship collision.* [ver video.](#)

Tensiones o esfuerzos



Tensiones o esfuerzos



Principio de esfuerzos de Cauchy

A medida que la superficie se vuelve muy pequeña y tiende al punto \$P\$ la tensión o esfuerzo (denotada por \$q\$) en el punto \$(x, y, z)\$ asociado con el plano normal \$\hat{n}\$ es

$$q(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta A}$$

Descomposición del esfuerzo

El esfuerzo:

$$\mathbf{q}(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta A}$$

aquí ΔA tiene normal $\hat{\mathbf{n}}$. Se divide en:

- **Vector de esfuerzo normal**

Fuerzas de compresión y tracción

$$\sigma_n(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f_n}{\Delta A}$$

- **Vector de esfuerzo tangencial**

Fuerzas de cortante

$$\sigma_s(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f_s}{\Delta A}$$

$$\mathbf{q}(x, y, z) = \sigma_n(x, y, z) + \sigma_s(x, y, z)$$

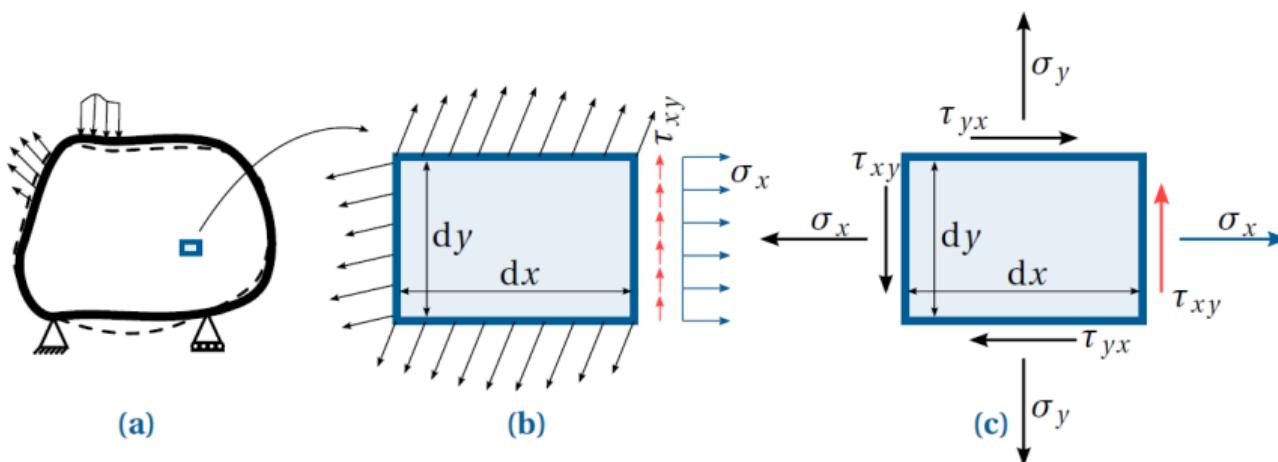
Derrotero

- 2.1. Tensiones o esfuerzos
- 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
 - 2.2.1. Análisis de un elemento infinitesimal rectangular
 - 2.2.2. Análisis de un elemento infinitesimal triangular
- 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional
 - Un pequeño comentario sobre el sistema coordenado en tres dimensiones
 - 2.3.1. Análisis de un paralelepípedo infinitesimal
 - 2.3.2. Análisis de un tetraedro infinitesimal
- 2.4. Notación indicial
- 2.5. Cambio de base
- 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas
 - 2.6.1. Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional
 - 2.6.2. Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional

Derrotero

- 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
 - 2.2.1. Análisis de un elemento infinitesimal rectangular
 - 2.2.2. Análisis de un elemento infinitesimal triangular

Análisis de un elemento infinitesimal rectangular

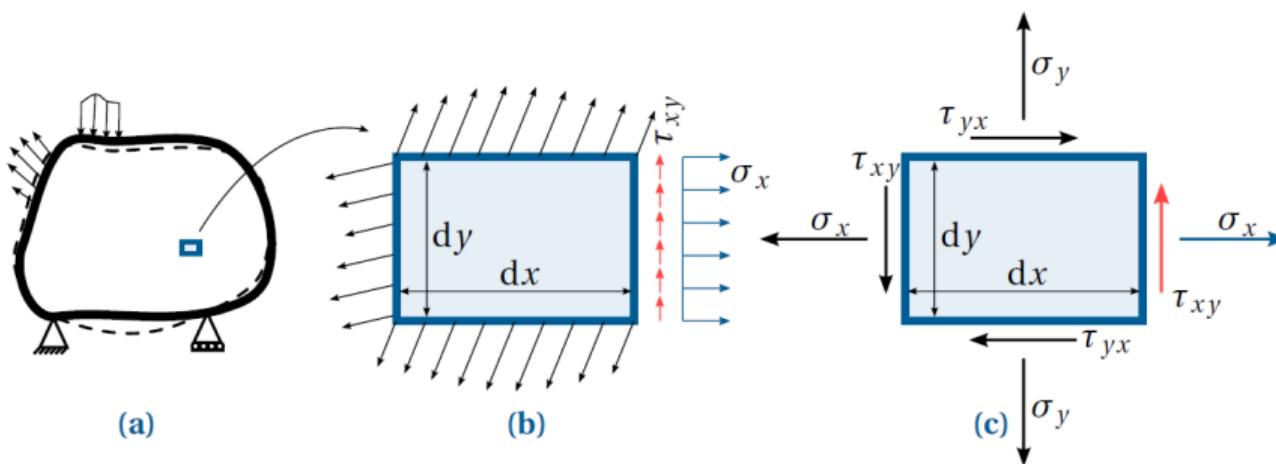


Un esfuerzo cortante τ_{ij} que actúa sobre una superficie ortogonal al eje i y tiene la misma dirección que el eje j .

Condición de equilibrio estático

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Análisis de un elemento infinitesimal rectangular



Un esfuerzo cortante τ_{ij} que actúa sobre una superficie ortogonal al eje i y tiene la misma dirección que el eje j .

Condición de equilibrio estático

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Análisis de un elemento infinitesimal rectangular

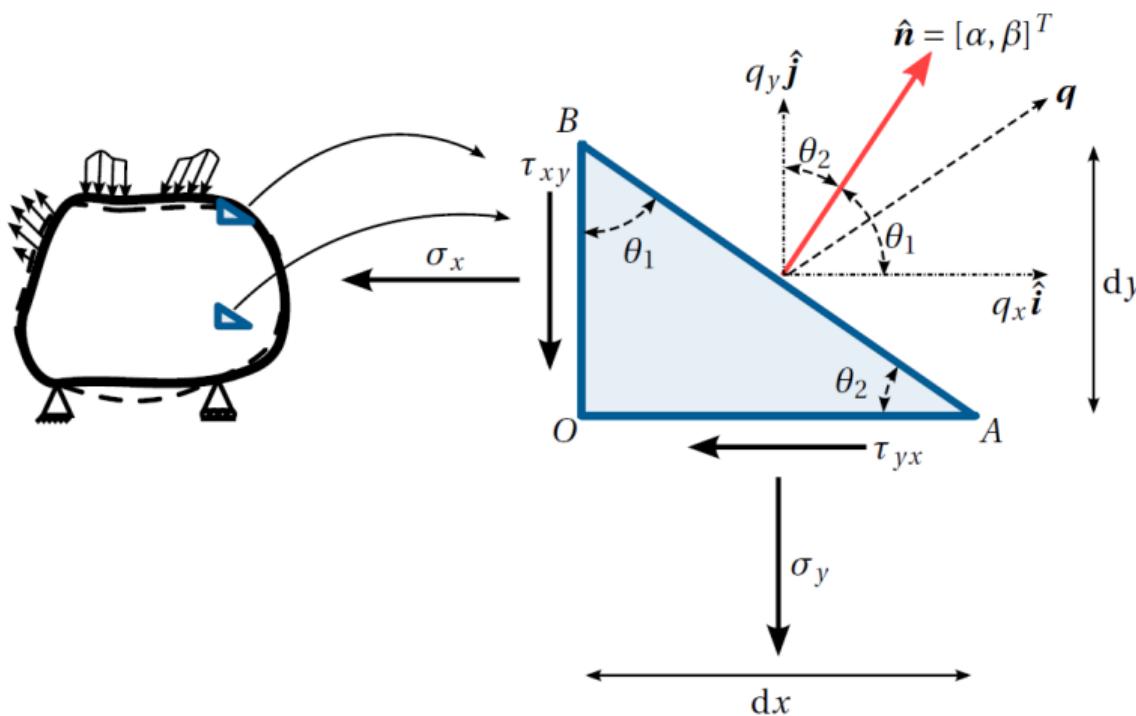
Tarea

Verificar que las fuerzas másicas son extremadamente pequeñas en comparación con las fuerzas de superficie.
(elemento infinitesimal rectangular)

Derrotero

- 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
 - 2.2.1. Análisis de un elemento infinitesimal rectangular
 - 2.2.2. Análisis de un elemento infinitesimal triangular

Análisis de un elemento infinitesimal triangular



Análisis de un elemento infinitesimal triangular

Fórmula de Cauchy bidimensional

$$\underbrace{\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}}_q = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\hat{n}}$$

- \underline{q} : vector de esfuerzos
- $\underline{\underline{\sigma}}$: *Matriz de tensiones de Cauchy (bidimensional)*
- \hat{n} : Vector normal unitario a la superficie \overline{AB}

Estos arreglos son función del punto $P(x, y, z)$.

Derrotero

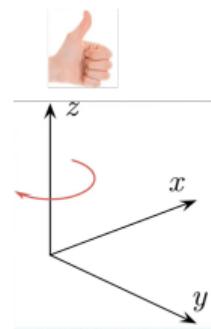
- 2.1. Tensiones o esfuerzos
- 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
 - 2.2.1. Análisis de un elemento infinitesimal rectangular
 - 2.2.2. Análisis de un elemento infinitesimal triangular
- **2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional**
 - Un pequeño comentario sobre el sistema coordenado en tres dimensiones
 - 2.3.1. Análisis de un paralelepípedo infinitesimal
 - 2.3.2. Análisis de un tetraedro infinitesimal
- 2.4. Notación indicial
- 2.5. Cambio de base
- 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas
 - 2.6.1. Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional
 - 2.6.2. Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional

Derrotero

- 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional
 - Un pequeño comentario sobre el sistema coordenado en tres dimensiones
 - 2.3.1. Análisis de un paralelepípedo infinitesimal
 - 2.3.2. Análisis de un tetraedro infinitesimal

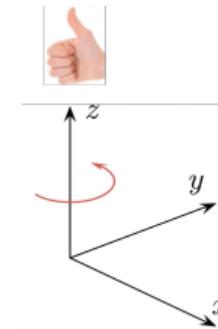
Un pequeño comentario sobre el sistema coordenado en tres dimensiones

Sistema coordenado de la mano **izquierda**



Usado usualmente en geotécnica y pavimentos

Sistema coordenado de la mano **derecha**

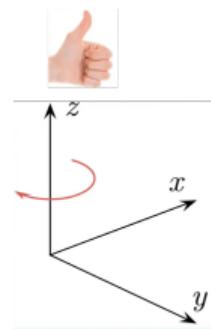


Usado usualmente en estructuras e hidráulica

La consecuencia de usar un sistema de coordenadas u otro es que las fórmulas que se deducen con diferente sistema de coordenadas pueden diferir en los signos de las fórmulas.

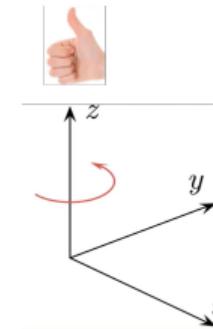
Un pequeño comentario sobre el sistema coordenado en tres dimensiones

Sistema coordenado de la mano **izquierda**



Usado usualmente en geotécnica y pavimentos

Sistema coordenado de la mano **derecha**

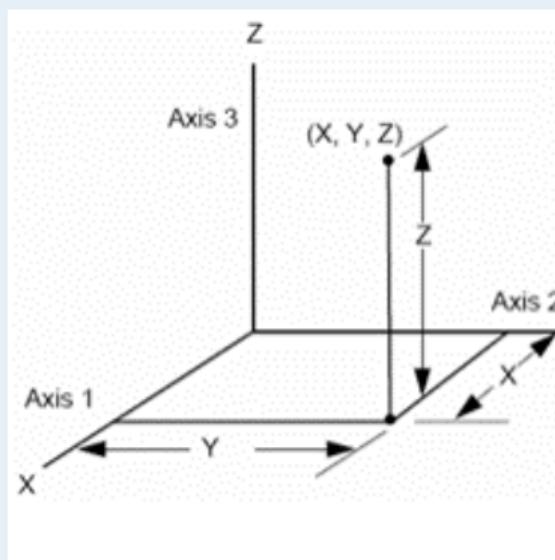


Usado usualmente en estructuras e hidráulica

La consecuencia de usar un sistema de coordenadas u otro es que las fórmulas que se deducen con diferente sistema de coordenadas pueden diferir en los signos de las fórmulas.

¿... dónde veo esto?

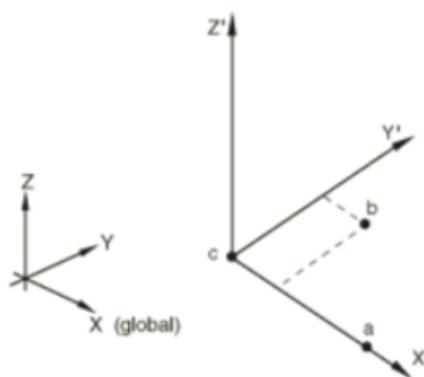
Manual de MIDAS GTS



MIDAS GTS traduce Sistema de Análisis Geotécnico... y trabaja el sistema coordenado de la mano derecha!

¿... dónde veo esto?

ABAQUS y FEM DESIGN son softwares enfocados en el área estructural y mecánica, y también trabajan en el sistema coordenado de la mano derecha



Global co-ordinate system	
Function	Definition of co-ordinates Definition of directions Interpretation of results -
Type	Right-handed Cartesian
Axes	X, Y, Z
Symbol	
Symbol color	Fixed 3 colors, X = green Y = red Z = blue

¿... dónde veo esto?

- NO es información trivial, de ser así no se molestarían en ponerlo en los manuales de usuario del programa.

Otro ejemplo

La fuerza cortante en función de la carga distribuida en vigas... ¿cómo se define?

$$\frac{dV}{dx} = w \text{ o } \frac{dV}{dx} = -w$$

¿... dónde veo esto?

- NO es información trivial, de ser así no se molestarían en ponerlo en los manuales de usuario del programa.

Otro ejemplo

La fuerza cortante en función de la carga distribuida en vigas... ¿cómo se define?

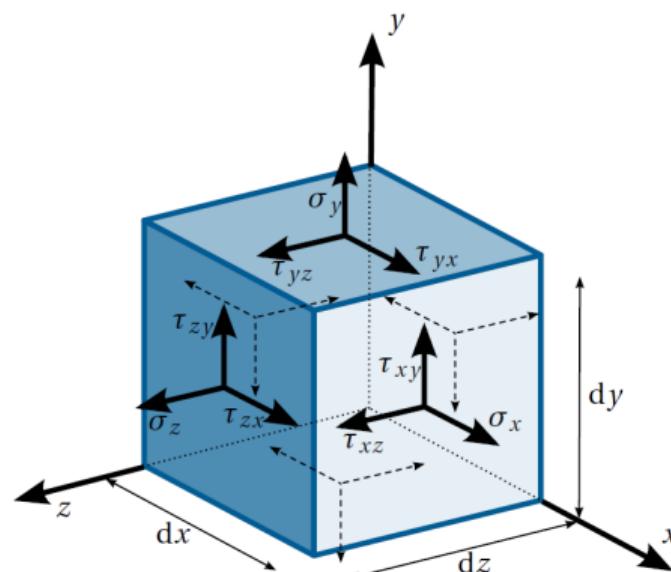
$$\frac{dV}{dx} = w \text{ o } \frac{dV}{dx} = -w$$

Derrotero

- 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional

- Un pequeño comentario sobre el sistema coordenado en tres dimensiones
- 2.3.1. Análisis de un paralelepípedo infinitesimal
- 2.3.2. Análisis de un tetraedro infinitesimal

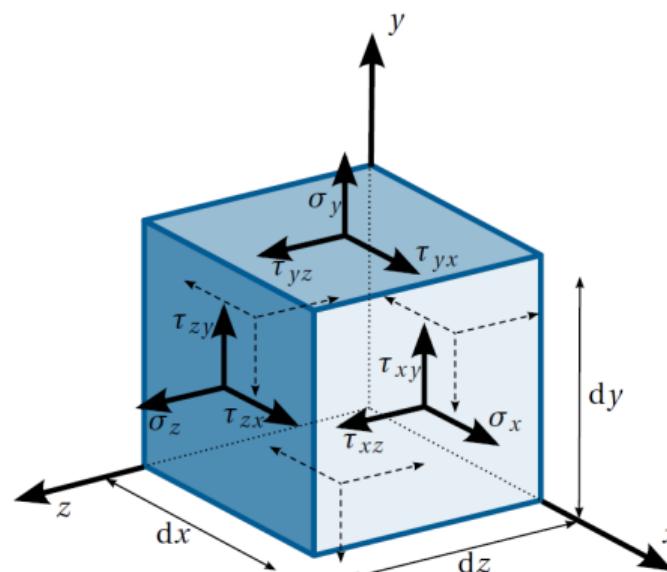
Análisis de un paralelepípedo infinitesimal



Condición de equilibrio estático

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Análisis de un paralelepípedo infinitesimal



Condición de equilibrio estático

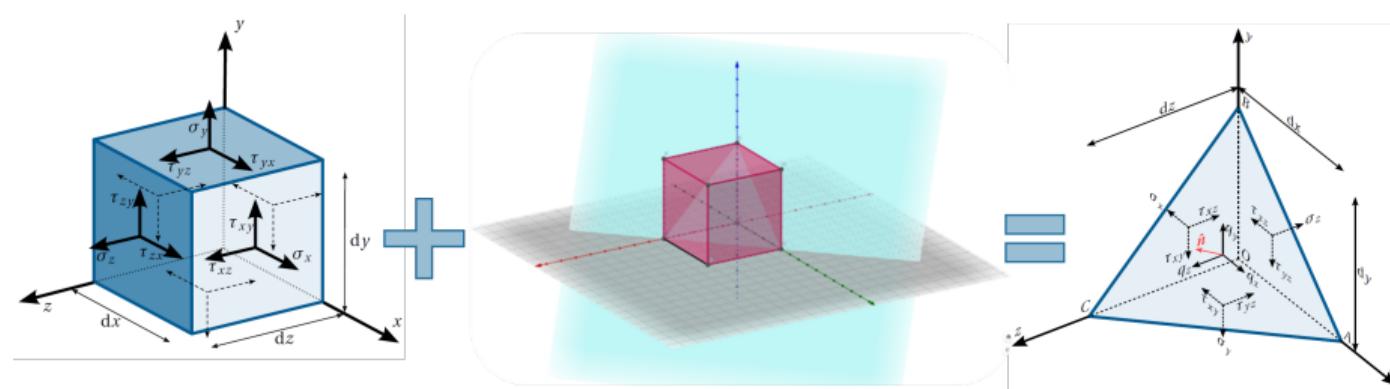
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Derrotero

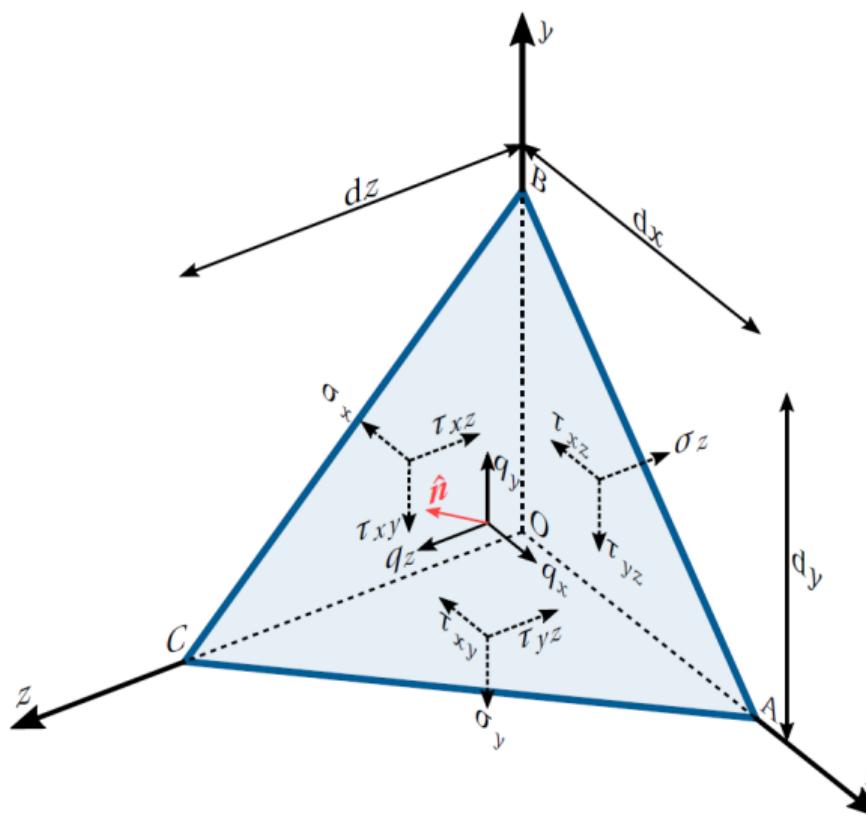
- 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional

- Un pequeño comentario sobre el sistema coordenado en tres dimensiones
- 2.3.1. Análisis de un paralelepípedo infinitesimal
- 2.3.2. Análisis de un tetraedro infinitesimal

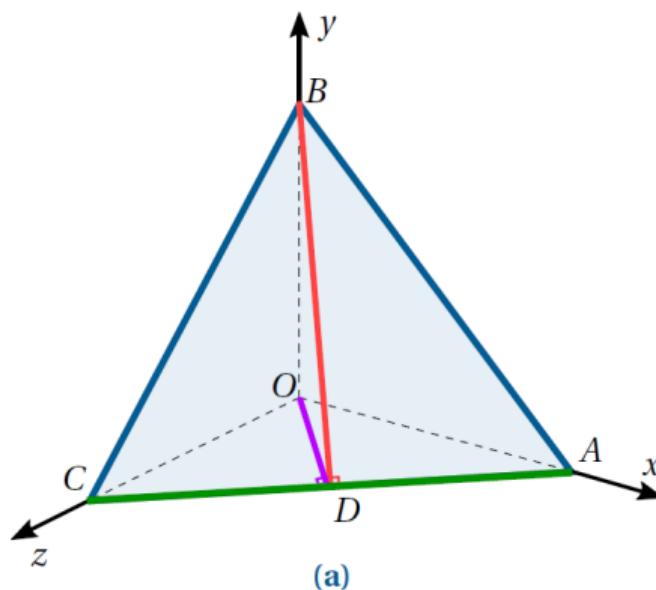
Análisis de un tetraedro infinitesimal



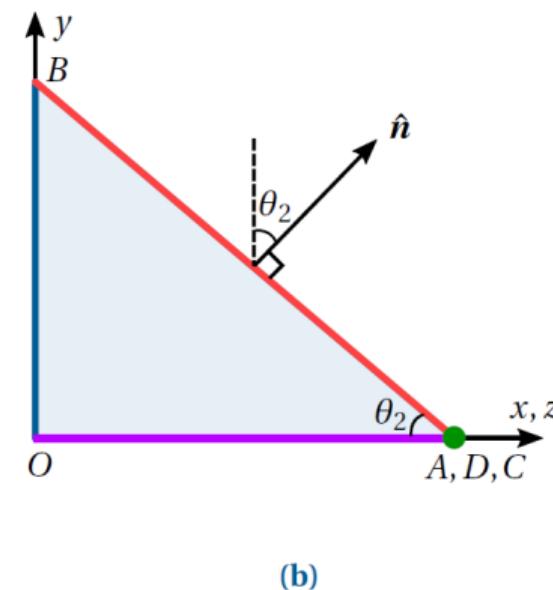
Análisis de un tetraedro infinitesimal



Análisis de un tetraedro infinitesimal



(a)



(b)

Análisis de un tetraedro infinitesimal

Fórmula de Cauchy tridimensional

$$\underbrace{\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}}_q = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}_{\hat{n}}$$

- \underline{q} : vector de esfuerzos
- $\underline{\underline{\sigma}}$: Matriz (simétrica) de tensiones de Cauchy (tridimensional) o tensor de esfuerzos
- \hat{n} : Vector normal unitario a la superficie del plano \overline{ABC}

Estos arreglos son función del punto $P(x, y, z)$.

Dato curioso

Fórmula de Cauchy tridimensional

$$\underbrace{\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}}_q = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}}_{\underline{\sigma}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}_{\hat{n}}$$

Observe que la matriz $\underline{\sigma}(x, y, z)$ es en este caso simétrica. No obstante, es importante anotar que Fung and Tong (2017, página 64) dicen que, según el matemático y científico escocés James Clerk Maxwell (1831 - 1879), **esta matriz no es simétrica en el caso de un imán en un campo magnético y en el caso de un material dieléctrico en un campo eléctrico con diferentes planos de polarización**, ya que en ambas situaciones, cuando se tienen esfuerzos cortantes muy pequeños y campos electromagnéticos muy intensos, aparecen sobre el cuerpo del sólido “momentos másicos” que evitan que la matriz $\underline{\sigma}(x, y, z)$ sea simétrica.

Derrotero

- 2.1. Tensiones o esfuerzos
- 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
 - 2.2.1. Análisis de un elemento infinitesimal rectangular
 - 2.2.2. Análisis de un elemento infinitesimal triangular
- 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional
 - Un pequeño comentario sobre el sistema coordenado en tres dimensiones
 - 2.3.1. Análisis de un paralelepípedo infinitesimal
 - 2.3.2. Análisis de un tetraedro infinitesimal
- 2.4. Notación indicial
- 2.5. Cambio de base
- 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas
 - 2.6.1. Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional
 - 2.6.2. Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional

Notación indicial

Tema aplazado

Este tema se verá junto con la introducción al cálculo tensorial

Delta de Kronecker

La función Kronecker delta o delta de Kronecker (*no confundir con la función impulso unitario o delta de Dirac*).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Otro ejemplo

La condición de ortogonalidad de dos vectores a partir del producto escalar

$$\langle a_i, a_j \rangle = a_i \cdot a_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Delta de Kronecker

La función Kronecker delta o delta de Kronecker (*no confundir con la función impulso unitario o delta de Dirac*).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Otro ejemplo

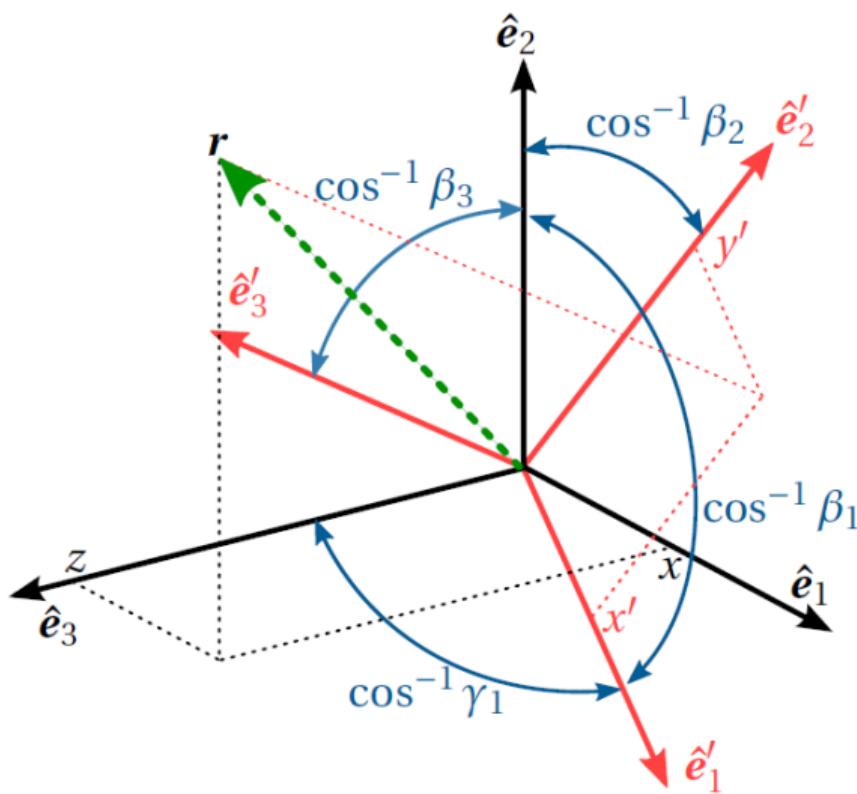
La condición de ortogonalidad de dos vectores a partir del producto escalar

$$\langle a_i, a_j \rangle = a_i \cdot a_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

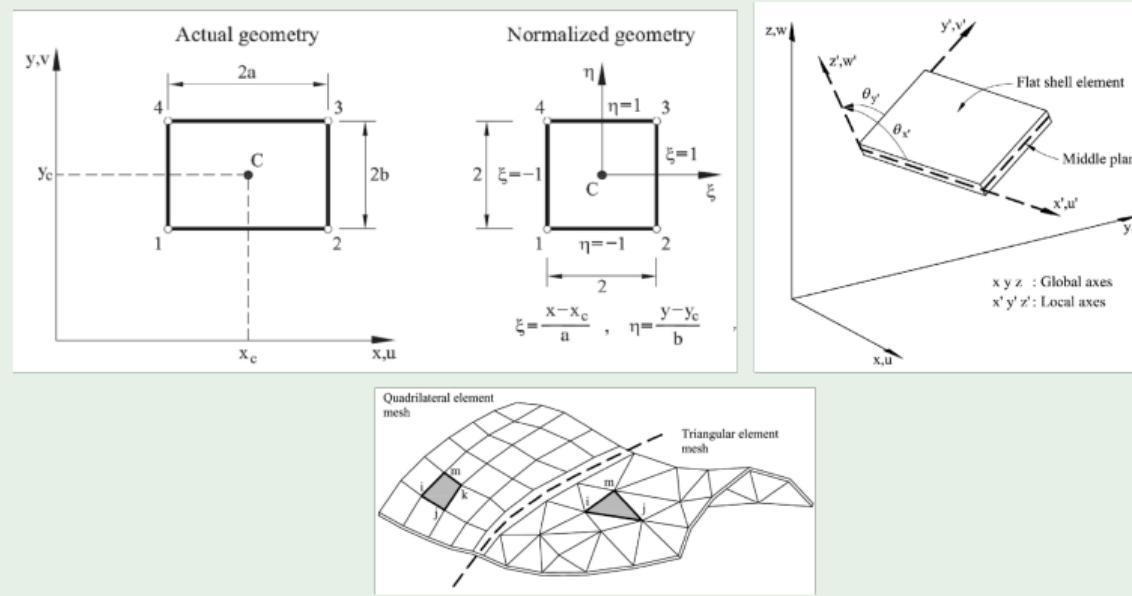
Derrotero

- 2.1. Tensiones o esfuerzos
- 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
 - 2.2.1. Análisis de un elemento infinitesimal rectangular
 - 2.2.2. Análisis de un elemento infinitesimal triangular
- 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional
 - Un pequeño comentario sobre el sistema coordenado en tres dimensiones
 - 2.3.1. Análisis de un paralelepípedo infinitesimal
 - 2.3.2. Análisis de un tetraedro infinitesimal
- 2.4. Notación indicial
- **2.5. Cambio de base**
- 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas
 - 2.6.1. Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional
 - 2.6.2. Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional

Cambio de base

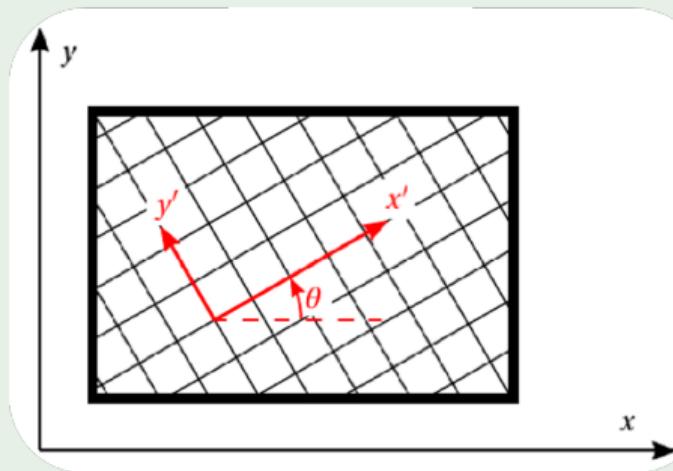


¿... dónde veo esto?



En una malla de elementos finitos, cada elemento se estudia en un sistema coordenado local (x', y') o (ξ, η) .

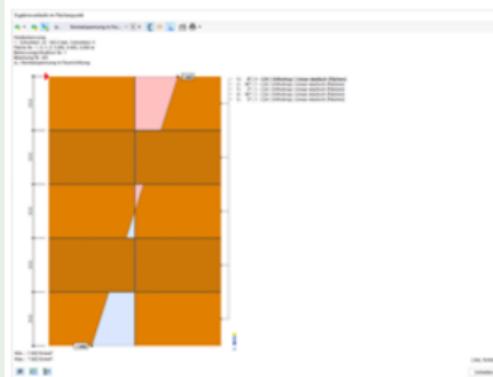
¿... dónde veo esto?



Los ejes de ortotropía de un sólido no siempre estarán en el mismo sentido de los ejes globales, así que se representan en otro sistema de coordenadas locales.

¿... dónde veo esto?

Nuevas características en RFEM 6 y RSTAB 9



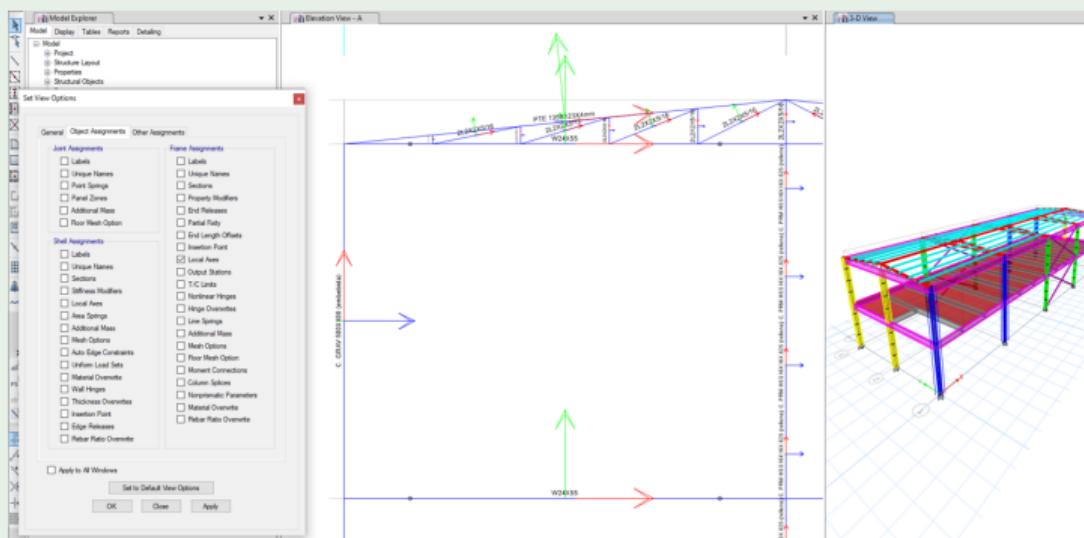
- ▲ Distribución normal de tensiones en un panel de madera contralaminada (CLT)

Cálculo de superficies de madera ortótropa y madera contralaminada (CLT)

¿Trabaja con madera? Entonces tenemos buenas noticias. En el complemento Cálculo de madera para RFEM 6, ahora puede diseñar tanto barras como superficies según el Eurocódigo, como madera contralaminada (CLT), madera laminada encolada, madera de coníferas, transformados de madera, etc.

→ [Más información](#)

¿... dónde veo esto?

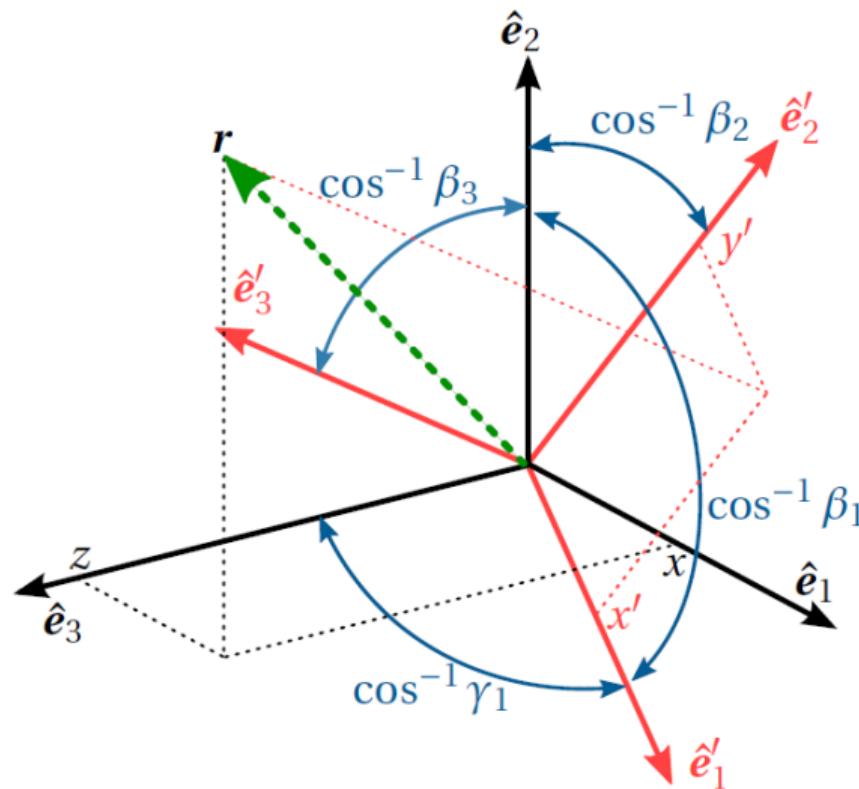


En ETABS, al igual que en todos los softwares de ingeniería estructural y mecánica, los elementos son simplificados y estudiados dentro de su propio sistema de coordenadas. Se activa la opción *Local Axes* (ejes locales) para ver sus ejes, estos están codificados por colores según su documentación.

Cambio de base

(x_i, \hat{e}_i) Sistema de coordenadas **globales**

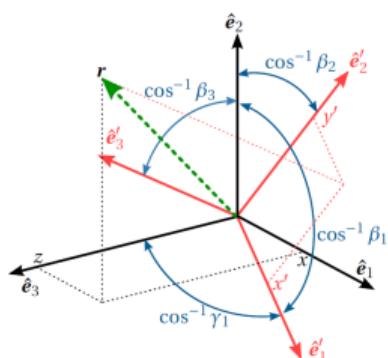
(x'_i, \hat{e}'_i) Sistema de coordenadas **locales**



Cambio de base

Componentes:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = \hat{\mathbf{e}}'_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 & \beta_1 = \hat{\mathbf{e}}'_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 & \gamma_1 = \hat{\mathbf{e}}'_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \alpha_2 = \hat{\mathbf{e}}'_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 & \beta_2 = \hat{\mathbf{e}}'_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 & \gamma_2 = \hat{\mathbf{e}}'_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \alpha_3 = \hat{\mathbf{e}}'_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 & \beta_3 = \hat{\mathbf{e}}'_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 & \gamma_3 = \hat{\mathbf{e}}'_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 \end{array}$$



Representación vectorial:

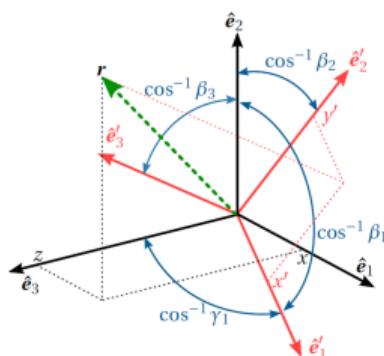
$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{e}}_1 + y\hat{\mathbf{e}}_2 + z\hat{\mathbf{e}}_3 = x'\hat{\mathbf{e}}'_1 + y'\hat{\mathbf{e}}'_2 + z'\hat{\mathbf{e}}'_3$$

Haciendo el producto punto ([eq 2.9], $\hat{\mathbf{e}}_i$), $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{aligned}$$

Cambio de base

Obteniendo:



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_T \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{r'}$$

with

$$\mathbf{T} = [\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3]$$

- \mathbf{r} : vector de coordenadas globales del punto P
- \mathbf{r}' : vector de coordenadas locales del punto P
- \mathbf{T} : matriz de transformación

Cambio de base

$\langle [eq\ 2.9], \hat{e}_i \rangle, 1 = 1, 2, 3$

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z'$$

$$y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z'$$

$$z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'$$

$\langle [eq\ 2.9], \hat{e}'_i \rangle, 1 = 1, 2, 3$

$$x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z$$

$$y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z$$

$$z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_r = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_T \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{r'}$$

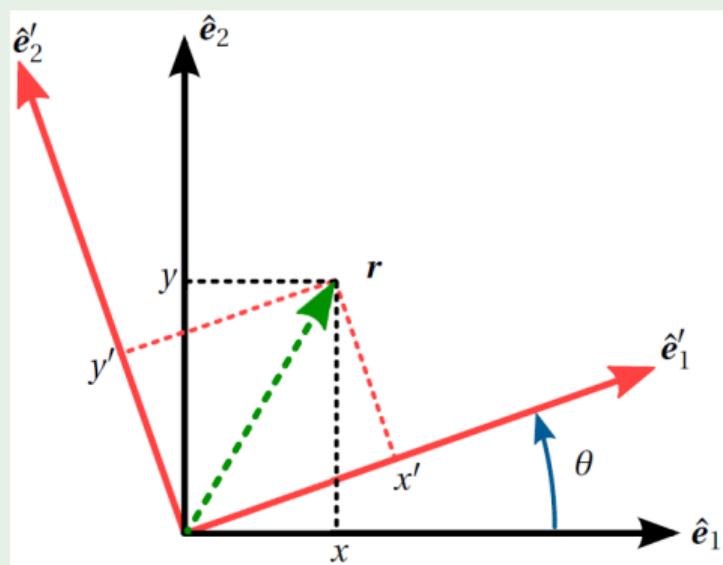
$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{r'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{T^T} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_r$$

Se deduce que la matriz T es **ortogonal**, ya que $T^{-1} = T^T$

Cambio de base

Ejemplo

Formular una expresión matemática para la rotación de la siguiente figura



Derrotero

- 2.1. Tensiones o esfuerzos
- 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
 - 2.2.1. Análisis de un elemento infinitesimal rectangular
 - 2.2.2. Análisis de un elemento infinitesimal triangular
- 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional
 - Un pequeño comentario sobre el sistema coordenado en tres dimensiones
 - 2.3.1. Análisis de un paralelepípedo infinitesimal
 - 2.3.2. Análisis de un tetraedro infinitesimal
- 2.4. Notación indicial
- 2.5. Cambio de base
- **2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas**
 - 2.6.1. Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional
 - 2.6.2. Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional

Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas

Fórmulas de transformación de la matriz de esfuerzos entre los sistemas de coordenadas \hat{e}_i y \hat{e}'_i .

Del sistema global al local

Incómodo al cómodo

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \mathbf{T}^T \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{T}$$

Del sistema local al global

Cómodo al incómodo

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{T} \underline{\underline{\sigma}}' \mathbf{T}^T$$

Expandiendo la primera eq.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} & \tau_{y'z'} & \sigma_{z'} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}}$$

Comentario sobre el uso de la programación

El libro guía de clase tiene códigos escritos en MAXIMA para el desarrollo de varias demostraciones simbólicas y cálculos numéricos de ahora en adelante. A su vez, estos estarán traducidos a lenguaje Python en el [repositorio del curso](#).



A.5. Notación tensorial de Voigt

repaso del apéndice

Woldemar Voigt

Esta notación se emplea para representar un tensor simétrico como uno de orden menor.

Ejemplo

La matriz de esfuerzos de Cauchy:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Se puede expresar como un vector de dimensión 6:

$$\underline{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}]^T \equiv [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6]^T$$

Derrotero

- 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas
 - 2.6.1. Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional
 - 2.6.2. Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional

Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional

Código: 02_06_01_cambio_de_base.ipynb

$$\sigma'_x = 2\gamma_1\beta_1\tau_{yz} + 2\gamma_1\alpha_1\tau_{xz} + 2\alpha_1\beta_1\tau_{xy} + \gamma_1^2\sigma_z + \beta_1^2\sigma_y + \alpha_1^2\sigma_x$$

$$\sigma'_y = 2\gamma_2\beta_2\tau_{yz} + 2\gamma_2\alpha_2\tau_{xz} + 2\alpha_2\beta_2\tau_{xy} + \gamma_2^2\sigma_z + \beta_2^2\sigma_y + \alpha_2^2\sigma_x$$

$$\sigma'_z = 2\gamma_3\beta_3\tau_{yz} + 2\gamma_3\alpha_3\tau_{xz} + 2\alpha_3\beta_3\tau_{xy} + \gamma_3^2\sigma_z + \beta_3^2\sigma_y + \alpha_3^2\sigma_x$$

$$\begin{aligned}\tau'_{y'z'} = & (\gamma_2\beta_3 + \beta_2\gamma_3)\tau_{yz} + (\gamma_2\alpha_3 + \alpha_2\gamma_3)\tau_{xz} + (\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3)\tau_{xy} + \\ & \gamma_2\gamma_3\sigma_z + \beta_2\beta_3\sigma_y + \alpha_2\alpha_3\sigma_x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau'_{x'z'} = & (\gamma_1\beta_3 + \beta_1\gamma_3)\tau_{yz} + (\gamma_1\alpha_3 + \alpha_1\gamma_3)\tau_{xz} + (\alpha_1\beta_3 + \beta_1\alpha_3)\tau_{xy} + \\ & \gamma_1\gamma_3\sigma_z + \beta_1\beta_3\sigma_y + \alpha_1\alpha_3\sigma_x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau'_{x'y'} = & (\gamma_1\beta_2 + \beta_1\gamma_2)\tau_{yz} + (\gamma_1\alpha_2 + \alpha_2\gamma_1)\tau_{xz} + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)\tau_{xy} + \\ & \gamma_1\gamma_2\sigma_z + \beta_1\beta_2\sigma_y + \alpha_1\alpha_2\sigma_x\end{aligned}$$

Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional

Código: 02_06_01_cambio_de_base.ipynb

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \sigma_{z'} \\ \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & 2\gamma_1\beta_1 & 2\gamma_1\alpha_1 & 2\alpha_1\beta_1 \\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & 2\gamma_2\beta_2 & 2\gamma_2\alpha_2 & 2\alpha_2\beta_2 \\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & 2\gamma_3\beta_3 & 2\gamma_3\alpha_3 & 2\alpha_3\beta_3 \\ \alpha_2\alpha_3 & \beta_2\beta_3 & \gamma_2\gamma_3 & \gamma_2\beta_3 + \beta_2\gamma_3 & \gamma_2\alpha_3 + \alpha_2\gamma_3 & \alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3 \\ \alpha_1\alpha_3 & \beta_1\beta_3 & \gamma_1\gamma_3 & \gamma_1\beta_3 + \beta_1\gamma_3 & \gamma_1\alpha_3 + \alpha_1\gamma_3 & \alpha_1\beta_3 + \beta_1\alpha_3 \\ \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & \gamma_1\beta_2 + \beta_1\gamma_2 & \gamma_1\alpha_2 + \alpha_1\gamma_2 & \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 \end{pmatrix}}_{T_\sigma} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional

- Escritura alterna

$$\sigma_{x'} = \hat{\mathbf{e}}'^T_1 \underline{\underline{\sigma}} \hat{\mathbf{e}}'_1 \quad \tau_{y'z'} = \hat{\mathbf{e}}'^T_2 \underline{\underline{\sigma}} \hat{\mathbf{e}}'_3 = \hat{\mathbf{e}}'^T_3 \underline{\underline{\sigma}} \hat{\mathbf{e}}'_2$$

$$\sigma_{y'} = \hat{\mathbf{e}}'^T_2 \underline{\underline{\sigma}} \hat{\mathbf{e}}'_2 \quad \tau_{y'z'} = \hat{\mathbf{e}}'^T_1 \underline{\underline{\sigma}} \hat{\mathbf{e}}'_3 = \hat{\mathbf{e}}'^T_3 \underline{\underline{\sigma}} \hat{\mathbf{e}}'_1$$

$$\sigma_{x'} = \hat{\mathbf{e}}'^T_3 \underline{\underline{\sigma}} \hat{\mathbf{e}}'_3 \quad \tau_{y'z'} = \hat{\mathbf{e}}'^T_1 \underline{\underline{\sigma}} \hat{\mathbf{e}}'_2 = \hat{\mathbf{e}}'^T_2 \underline{\underline{\sigma}} \hat{\mathbf{e}}'_1$$

Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional

Como la dirección de los vectores \hat{e}'_1 , \hat{e}'_2 y \hat{e}'_3 es arbitraria, siempre y cuando estos sean vectores mutuamente ortogonales, de las ecuaciones anteriores se sigue que:

- el esfuerzo normal a un plano cuyo vector normal unitario es \hat{n} está dada por:

$$\begin{aligned}\sigma_{\hat{n}} &= \hat{n}^T \underline{\underline{\sigma}} \hat{n} \\ &= \sigma_x \alpha^2 + \sigma_y \beta^2 + \sigma_z \gamma^2 + 2\tau_{xy} \alpha \beta + 2\tau_{yz} \beta \gamma + 2\tau_{xz} \alpha \gamma\end{aligned}$$

- el esfuerzo cortante en la dirección del vector \hat{m} sobre un plano cuto vector normal unitario es \hat{n} es:

$$\tau_{\hat{n}\hat{m}} = \hat{m}^T \underline{\underline{\sigma}} \hat{n}$$

Derrotero

- 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas
 - 2.6.1. Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional
 - 2.6.2. Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional

Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional

Código: 02_06_02_sigma_bidimensional.ipynb

$$\sigma_{x'}(\theta) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{y'}(\theta) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'}(\theta) = \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{z'}(\theta) = \tau_{x'z'}(\theta) = \tau_{y'z'}(\theta) = 0$$

Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional

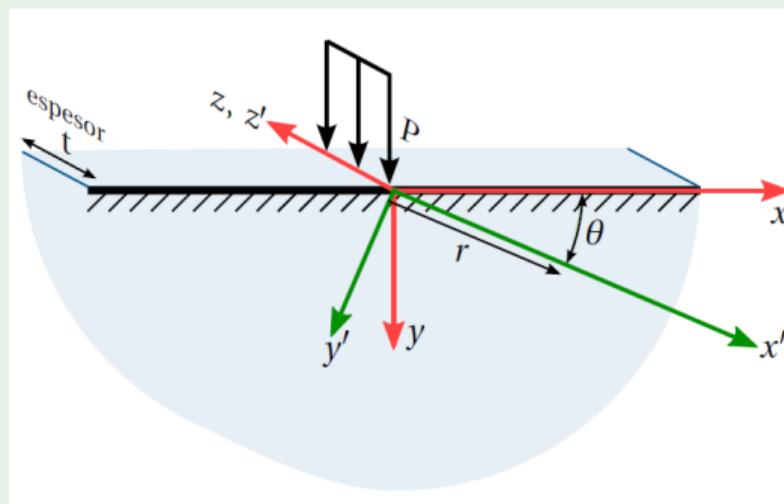
Código: 02_06_02_sigma_bidimensional.ipynb

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{pmatrix}}_{T_{\sigma, 2D}} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: el problema de Flamant

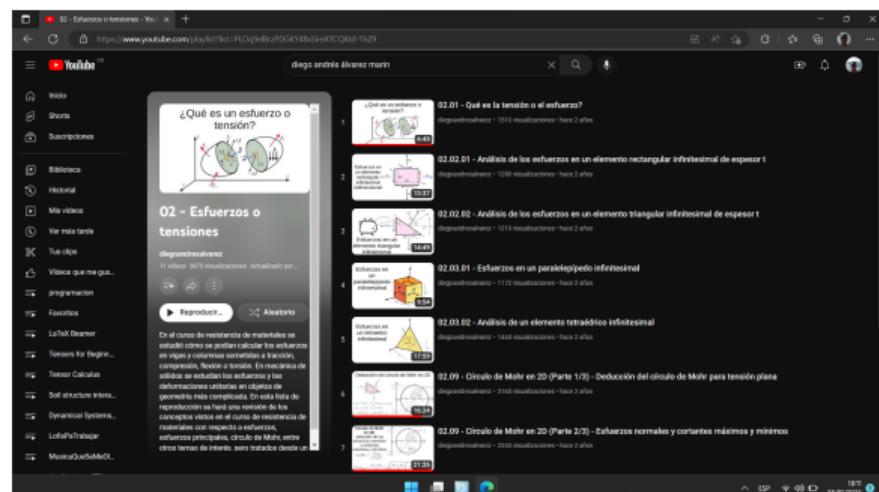
Código: [02_06_02_ejemplo_01.ipynb](#)

Ejemplo



Referencias y material de apoyo

Fung, Y.-c. and Tong, P. (2017). *Classical and computational solid mechanics*, volume 2. World scientific.



- Lista de reproducción: [02 - Esfuerzos o Tensiones](#)
- Repositorio del curso: [github/medio_continuo](https://github.com/diegoalvaromarin/medio_continuo)