

4100611 - Mecánica de Sólidos

Unidad 1. Repaso de esfuerzos, deformaciones infinitesimales y ley de Hooke.

Michael Heredia Pérez

Ing., Esp., MSc.

mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales

Departamento de Ingeniería Civil



2026a

Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada.



Derrotero

- Conceptos básicos
- Estudio de los esfuerzos en un punto
- Estudio de los desplazamientos y las deformaciones en un punto
- Relaciones entre esfuerzos y deformaciones
- Material de apoyo

Derrotero

- Conceptos básicos
- Estudio de los esfuerzos en un punto
- Estudio de los desplazamientos y las deformaciones en un punto
- Relaciones entre esfuerzos y deformaciones
- Material de apoyo

¿Qué es la mecánica de sólidos?

Es la rama de la mecánica clásica que estudia el comportamiento de la materia sólida deformable sometida a acciones externas como:

- Fuerzas superficiales
- Cambios de temperatura
- Desplazamientos aplicados



Figure: Hecho con Napkin AI.

¿Qué es un sólido?

Un sólido se caracteriza por:

- Oponer resistencia a la deformación (cambios de forma y de volumen).
- Valores altos del módulo de elasticidad (E) y de cortante (G).

Sus propiedades:

Isotropía

Propiedades físicas del material son las mismas en todas las direcciones.

Continuidad

No existen discontinuidades intersticiales.

Homogeneidad

Cualquier muestra del sólido posee las mismas propiedades físicas.

¿Qué es un sólido?

Un sólido se caracteriza por:

- Oponer resistencia a la deformación (cambios de forma y de volumen).
- Valores altos del módulo de elasticidad (E) y de cortante (G).

Sus propiedades:

Isotropía

Propiedades físicas del material son las mismas en todas las direcciones.

Continuidad

No existen discontinuidades intersticiales.

Homogeneidad

Cualquier muestra del sólido posee las mismas propiedades físicas.

¿Qué es un sólido?

Un sólido se caracteriza por:

- Oponer resistencia a la deformación (cambios de forma y de volumen).
- Valores altos del módulo de elasticidad (E) y de cortante (G).

Sus propiedades:

Isotropía

Propiedades físicas del material son las mismas en todas las direcciones.

Continuidad

No existen discontinuidades intersticiales.

Homogeneidad

Cualquier muestra del sólido posee las mismas propiedades físicas.

¿Qué es un sólido?

Un sólido se caracteriza por:

- Oponer resistencia a la deformación (cambios de forma y de volumen).
- Valores altos del módulo de elasticidad (E) y de cortante (G).

Sus propiedades:

Isotropía

Propiedades físicas del material son las mismas en todas las direcciones.

Continuidad

No existen discontinuidades intersticiales.

Homogeneidad

Cualquier muestra del sólido posee las mismas propiedades físicas.

¿Qué es un sólido?

Un sólido se caracteriza por:

- Oponer resistencia a la deformación (cambios de forma y de volumen).
- Valores altos del módulo de elasticidad (E) y de cortante (G).

Sus propiedades:

Isotropía

Propiedades físicas del material son las mismas en todas las direcciones.

Continuidad

No existen discontinuidades intersticiales.

Homogeneidad

Cualquier muestra del sólido posee las mismas propiedades físicas.

¿Qué es un sólido?

Un sólido se caracteriza por:

- Oponer resistencia a la deformación (cambios de forma y de volumen).
- Valores altos del módulo de elasticidad (E) y de cortante (G).

Sus propiedades:

Isotropía

Propiedades físicas del material son las mismas en todas las direcciones.

Continuidad

No existen discontinuidades intersticiales.

Homogeneidad

Cualquier muestra del sólido posee las mismas propiedades físicas.

¿Qué es un sólido?

Un sólido se caracteriza por:

- Oponer resistencia a la deformación (cambios de forma y de volumen).
- Valores altos del módulo de elasticidad (E) y de cortante (G).

Sus propiedades:

Isotropía

Propiedades físicas del material son las mismas en todas las direcciones.

Continuidad

No existen discontinuidades intersticiales.

Homogeneidad

Cualquier muestra del sólido posee las mismas propiedades físicas.

Caracterización: ¿Cómo responde un sólido al esfuerzo aplicado?

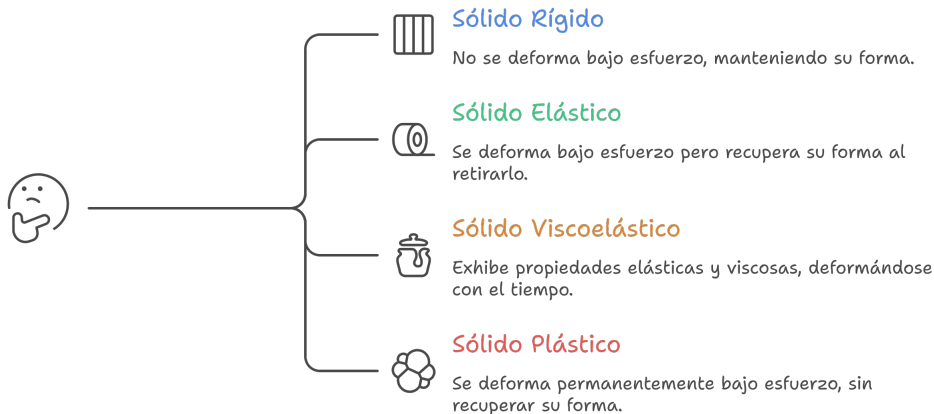


Figure: Hecho con *Napkin AI*.

Diferenciales de primer, segundo y tercer orden

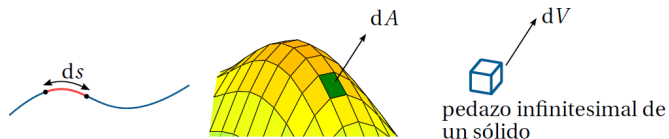


Figure: Diferenciales de línea, de área y de volumen.

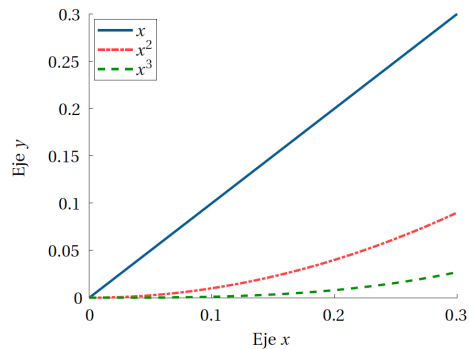


Figure: Tasa de crecimiento. Variación de las funciones x , x^2 y x^3 .

Fuerzas que actúan sobre un sólido

Fuerzas másicas

(*body forces*)

Están distribuidas en todo el sólido, de modo que estas actúan directamente en todas las partículas del cuerpo.

$$\mathbf{b}(x, y, z) := [X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)]^T$$

Fuerzas superficiales

(*surface forces*)

Están presentes únicamente en el contorno del sólido, y se producen por el contacto con otro sólido o fluido.

$$\mathbf{f}(x, y, z) := [\bar{X}(x, y, z), \bar{Y}(x, y, z), \bar{Z}(x, y, z)]^T$$

Fuerzas que actúan sobre un sólido

Fuerzas másicas

(*body forces*)

Están distribuidas en todo el sólido, de modo que estas actúan directamente en todas las partículas del cuerpo.

$$\mathbf{b}(x, y, z) := [X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)]^T$$

Fuerzas superficiales

(*surface forces*)

Están presentes únicamente en el contorno del sólido, y se producen por el contacto con otro sólido o fluido.

$$\mathbf{f}(x, y, z) := [\bar{X}(x, y, z), \bar{Y}(x, y, z), \bar{Z}(x, y, z)]^T$$

Fuerzas que actúan sobre un sólido

Fuerzas másicas

(*body forces*)

Están distribuidas en todo el sólido, de modo que estas actúan directamente en todas las partículas del cuerpo.

$$\mathbf{b}(x, y, z) := [X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)]^T$$

Fuerzas superficiales

(*surface forces*)

Están presentes únicamente en el contorno del sólido, y se producen por el contacto con otro sólido o fluido.

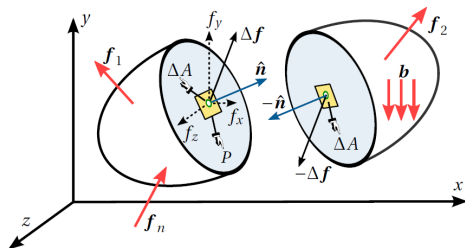
$$\mathbf{f}(x, y, z) := [\bar{X}(x, y, z), \bar{Y}(x, y, z), \bar{Z}(x, y, z)]^T$$

Derrotero

- Conceptos básicos
- Estudio de los esfuerzos en un punto
- Estudio de los desplazamientos y las deformaciones en un punto
- Relaciones entre esfuerzos y deformaciones
- Material de apoyo

Tensiones o esfuerzos

Intensidad de una fuerza por unidad de área en el contorno de un punto material sobre una superficie real o imaginaria de un medio continuo.



Principio de esfuerzos de Cauchy

$$q(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta A}$$

El esfuerzo:

$$q(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta A}$$

aquí ΔA tiene normal \hat{n} . Se divide en:

- **Vector de esfuerzo normal**
Fuerzas de compresión y tracción

$$\sigma_n(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f_n}{\Delta A}$$

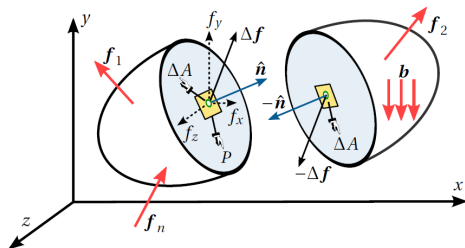
- **Vector de esfuerzo tangencial**
Fuerzas de cortante

$$\sigma_s(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f_s}{\Delta A}$$

$$q(x, y, z) = \sigma_n(x, y, z) + \sigma_s(x, y, z)$$

Tensiones o esfuerzos

Intensidad de una fuerza por unidad de área en el contorno de un punto material sobre una superficie real o imaginaria de un medio continuo.



Principio de esfuerzos de Cauchy

$$q(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta A}$$

El esfuerzo:

$$q(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta A}$$

aquí ΔA tiene normal \hat{n} . Se divide en:

- **Vector de esfuerzo normal**
Fuerzas de compresión y tracción

$$\sigma_n(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f_n}{\Delta A}$$

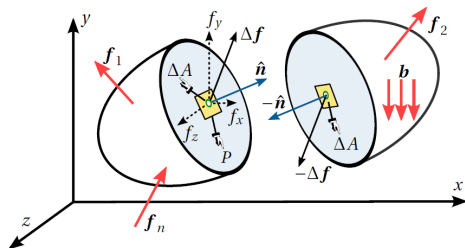
- **Vector de esfuerzo tangencial**
Fuerzas de cortante

$$\sigma_s(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f_s}{\Delta A}$$

$$q(x, y, z) = \sigma_n(x, y, z) + \sigma_s(x, y, z)$$

Tensiones o esfuerzos

Intensidad de una fuerza por unidad de área en el contorno de un punto material sobre una superficie real o imaginaria de un medio continuo.



Principio de esfuerzos de Cauchy

$$q(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta A}$$

El esfuerzo:

$$q(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta A}$$

aquí ΔA tiene normal \hat{n} . Se divide en:

- **Vector de esfuerzo normal**
Fuerzas de compresión y tracción

$$\sigma_n(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f_n}{\Delta A}$$

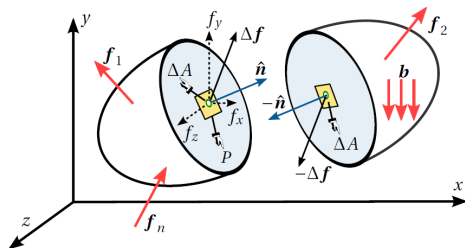
- **Vector de esfuerzo tangencial**
Fuerzas de cortante

$$\sigma_s(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f_s}{\Delta A}$$

$$q(x, y, z) = \sigma_n(x, y, z) + \sigma_s(x, y, z)$$

Tensiones o esfuerzos

Intensidad de una fuerza por unidad de área en el contorno de un punto material sobre una superficie real o imaginaria de un medio continuo.



Principio de esfuerzos de Cauchy

$$\mathbf{q}(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta A}$$

El esfuerzo:

$$\mathbf{q}(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta A}$$

aquí ΔA tiene normal \hat{n} . Se divide en:

- **Vector de esfuerzo normal**
Fuerzas de compresión y tracción

$$\sigma_n(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f_n}{\Delta A}$$

- **Vector de esfuerzo tangencial**
Fuerzas de cortante

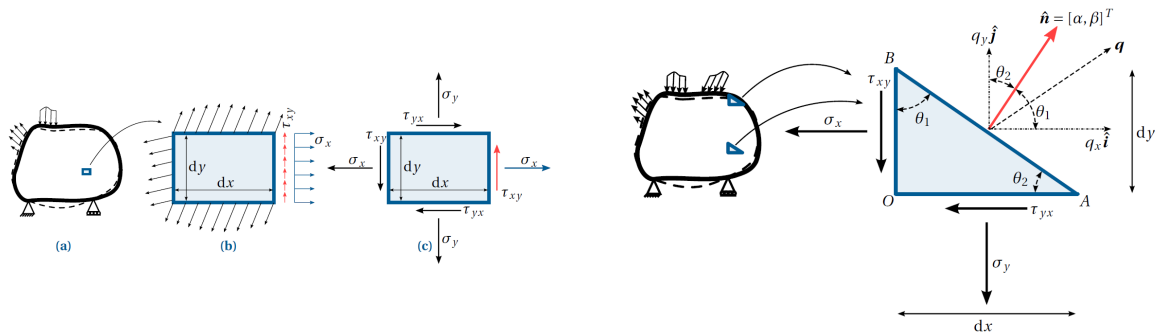
$$\sigma_s(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f_s}{\Delta A}$$

$$\mathbf{q}(x, y, z) = \sigma_n(x, y, z) + \sigma_s(x, y, z)$$

Esfuerzos bidimensionales

Fórmula de Cauchy bidimensional

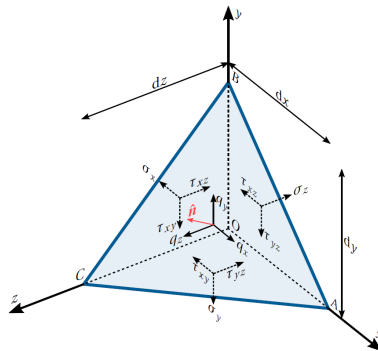
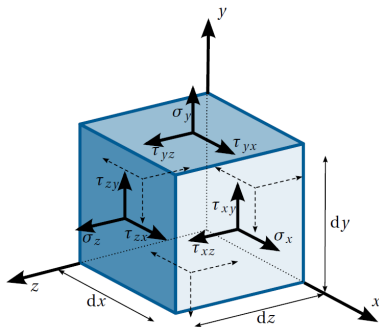
$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$



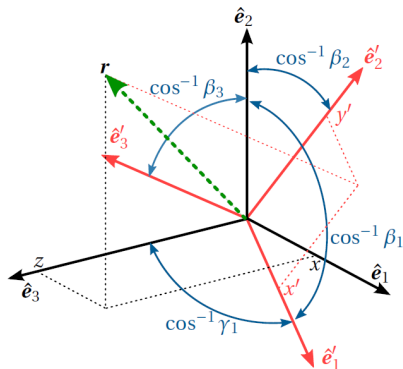
Esfuerzos tridimensionales

Fórmula de Cauchy tridimensional

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$



Cambio de base y tensor de esfuerzos en otro sistema coordenado



- Sistema de coordenadas **globales**: (x_i, \hat{e}_i)
- Sistema de coordenadas **locales**: (x'_i, \hat{e}'_i)

Del sistema global al local

Incómodo al cómodo

$$\underline{\underline{\sigma'}} = T^T \underline{\underline{\sigma}} T$$

Del sistema local al global

Cómico al incómodo

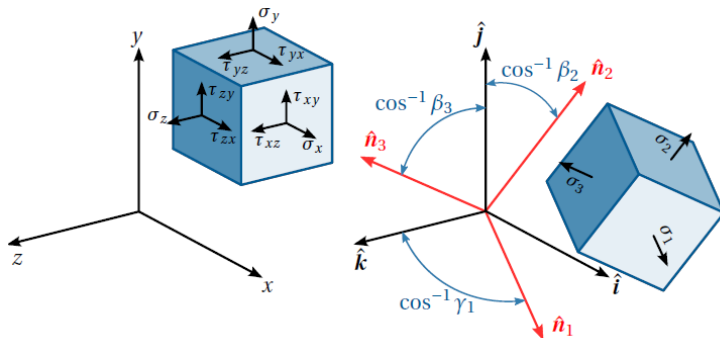
$$\underline{\underline{\sigma}} = T \underline{\underline{\sigma'}} T^T$$

Esfuerzos y direcciones principales

Se encuentran al obtener los valores y vectores propios del tensor de esfuerzos:

$$\underline{\underline{\sigma}} \hat{n} = \sigma_n \hat{n}$$

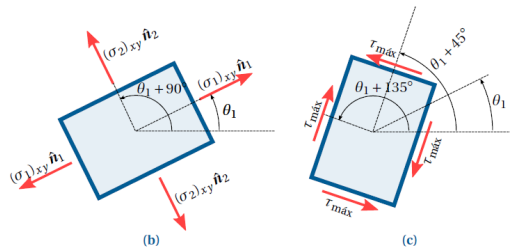
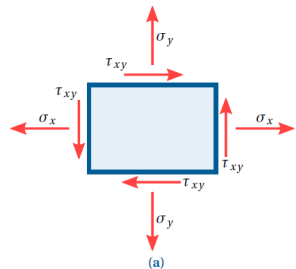
$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \mathbf{I}) = 0$$



Esfuerzos y direcciones principales bidimensionales

$$(\sigma_1)_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

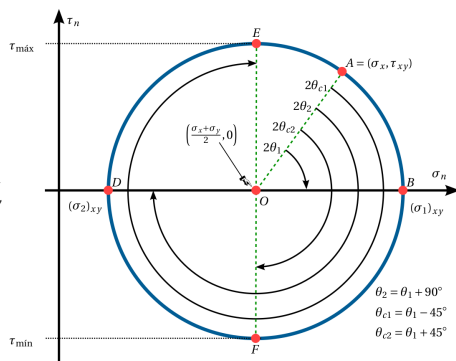
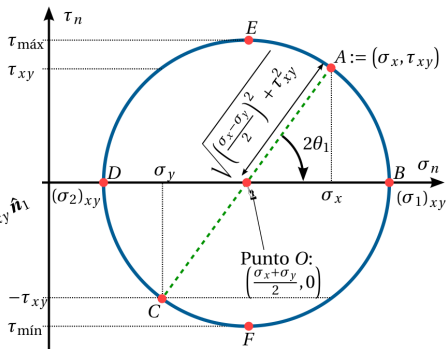
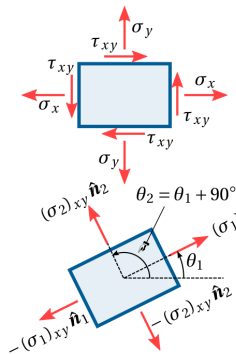
$$(\sigma_2)_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



Círculo de Mohr bidimensional

$$\sigma_n(\theta) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_n(\theta) = \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta$$



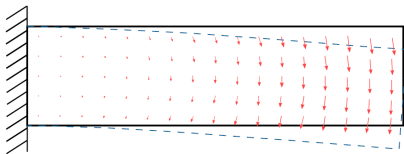
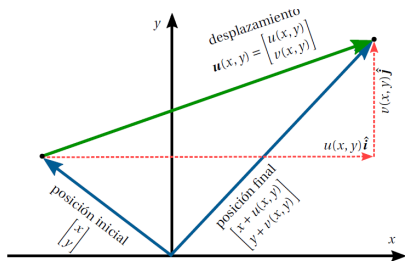
Derrotero

- Conceptos básicos
- Estudio de los esfuerzos en un punto
- Estudio de los desplazamientos y las deformaciones en un punto
- Relaciones entre esfuerzos y deformaciones
- Material de apoyo

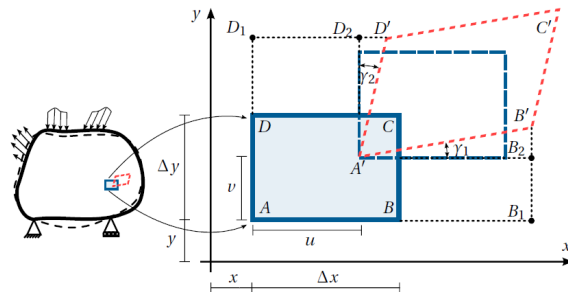
Los desplazamientos y las deformaciones como campos vectoriales

Las deformaciones: cambio de forma o tamaño de un sólido debido a los esfuerzos internos

Campo vectorial de desplazamientos



Campo vectorial de deformaciones

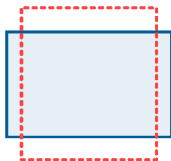


Formulación de pequeñas deformaciones en el sólido

Deformaciones longitudinales



$\varepsilon_x > 0$ (estiramiento en dirección x)
 $\varepsilon_y < 0$ (contracción en dirección y)



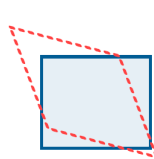
$\varepsilon_x < 0$ (contracción en dirección x)
 $\varepsilon_y > 0$ (estiramiento en dirección y)

$$\varepsilon_x(x, y, z) := \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x}$$

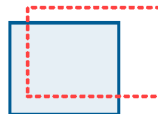
$$\varepsilon_y(x, y, z) := \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z(x, y, z) := \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z}$$

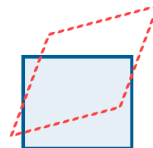
Deformaciones angulares



(a) $\gamma_{xy} < 0$



(b) $\gamma_{xy} = 0$



(c) $\gamma_{xy} > 0$

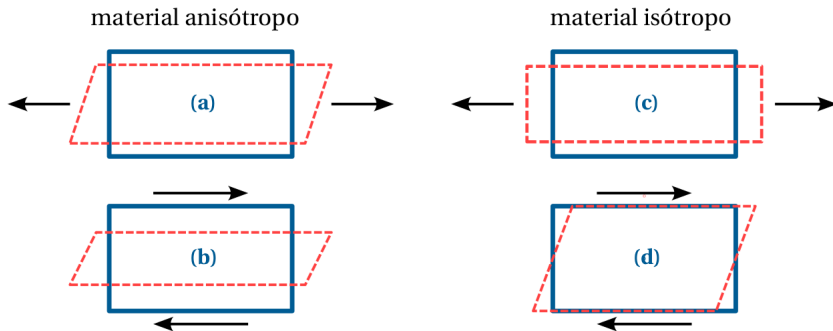
$$\gamma_{xy}(x, y, z) := \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz}(x, y, z) := \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz}(x, y, z) := \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y}$$

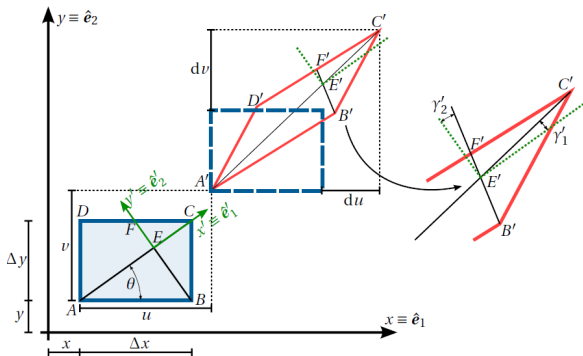
Profundizando en las deformaciones angulares

γ_{xy} denota el cambio en el valor del ángulo $\angle BAD$ cuando un cuerpo se somete a **esfuerzos normales y cortantes**.



Veremos luego que para los materiales isótropos, el comportamiento angular es independiente del comportamiento longitudinal.

Deformaciones en otras direcciones



- En términos de deformaciones matemáticas:

$$\underline{\underline{\epsilon}}' = \underline{\underline{T}}_{\sigma} \underline{\underline{\epsilon}}$$

- En términos de deformaciones ingenieriles:

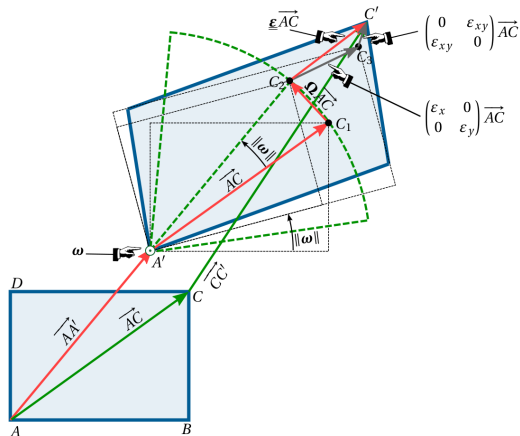
$$\underline{\underline{\epsilon}}' = \underline{\underline{T}}_{\epsilon} \underline{\underline{\epsilon}}$$

Siguiendo las relaciones $\underline{\underline{T}}_{\sigma}^{-1} = \underline{\underline{T}}_{\epsilon}^T$ y $\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{T}}_{\epsilon}' \underline{\underline{T}}^T$.

$$\epsilon'_x(\theta) = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \epsilon_{xy} \sin 2\theta$$

$$\epsilon_{x'y'}(\theta) = \epsilon_{xy} \cos 2\theta - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\theta + \epsilon_{xy} \sin 2\theta$$

Rotación



Podemos calcular la rotación de un sólido en 6 pasos:

1. Matriz de rotaciones.
2. Vector de rotación.
3. Rotación rígida.
4. Formulación del rotacional.
5. Eje de rotación.
6. Componentes de la deformación.

Derrotero

- Conceptos básicos
- Estudio de los esfuerzos en un punto
- Estudio de los desplazamientos y las deformaciones en un punto
- Relaciones entre esfuerzos y deformaciones
- Material de apoyo

Comportamiento de los materiales frágiles y materiales dúctiles

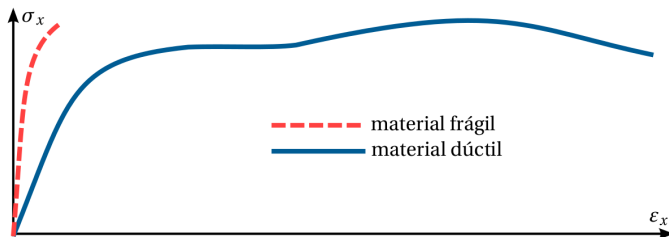


Figure: Curva esfuerzo-deformación para materiales dúctiles y frágiles.

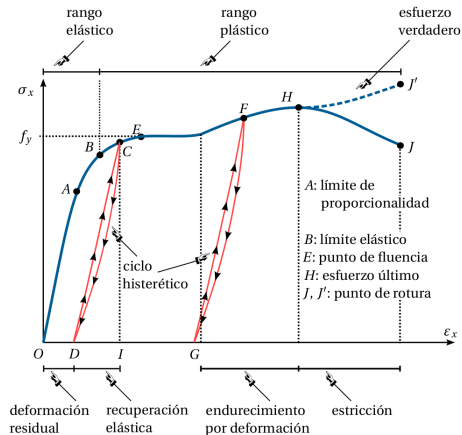


Figure: Curva esfuerzo-deformación teórica para materiales dúctiles.

Curvas esfuerzo-deformación

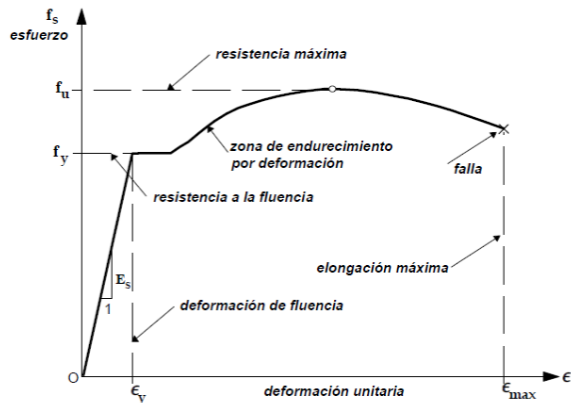


Figura 6-2(a) - Curva esfuerzo-deformación del acero de refuerzo

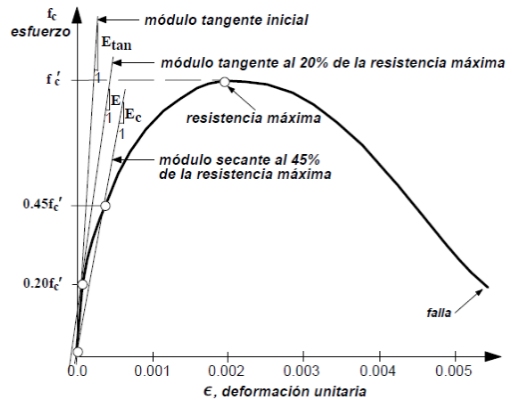


Figura 6-2(b) - Curva esfuerzo-deformación del concreto no confinado

Figure: García Reyes, L. E. (1998). *Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico*. Universidad de los Andes, Facultad de Ingeniería Civil.

Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles

(Sin claridad del límite de fluencia)

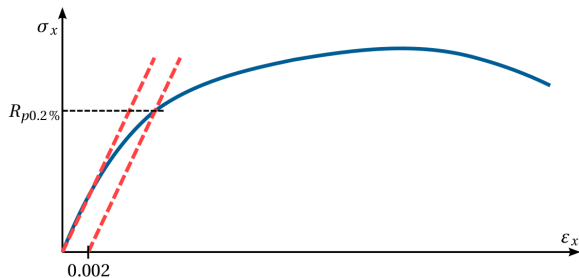


Figure: Método de la compensación o corregimiento ASTM A370.

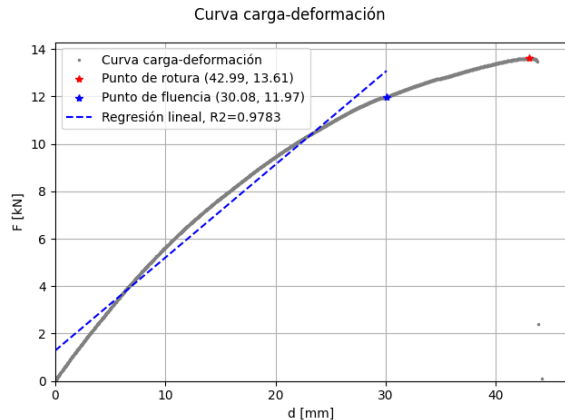


Figure: Ensayo de madera plástica (plastic lumber en inglés) realizado en el Laboratorio de Ingeniería Estructural y Sísmica de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales.

Comportamiento del acero

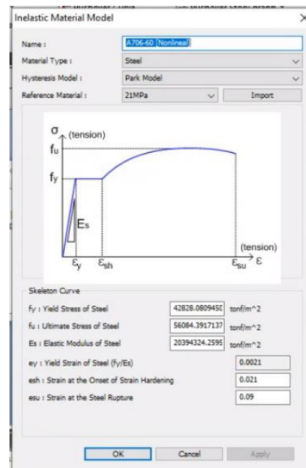
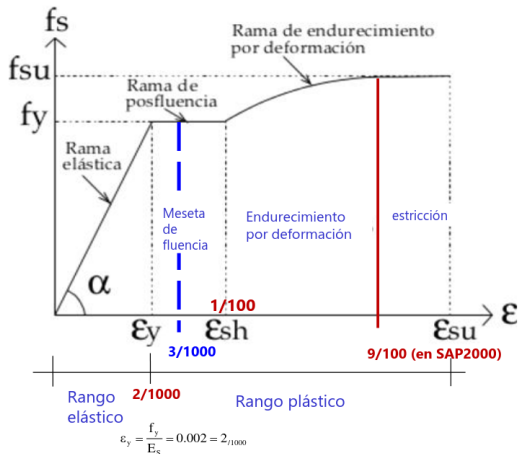


Figure: Curso de Diseño Sísmico de Concreto Reforzado en la Unievrnsidad Nacional de Colombia sede Manizales. Profesor Daniel Alveiro Bedoya Ruiz (2022).

Comportamiento del concreto reforzado

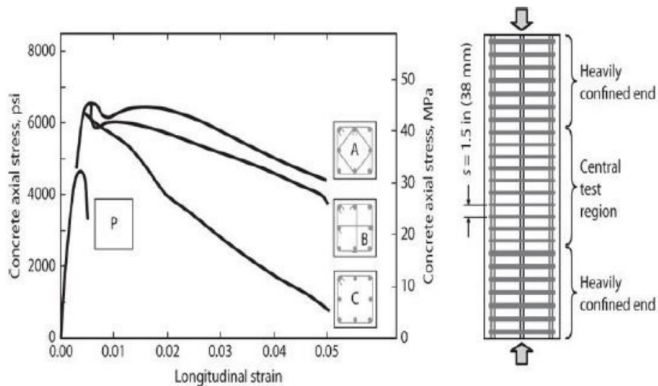


FIGURE 4.1 Stress–strain response of plain concrete (P) and three confined concrete cross sections. (After Moehle and Cavanagh, 1985, used with permission from ASCE.)

Figure: Curso de Diseño Sísmico de Concreto Reforzado en la Unievrstiad Nacional de Colombia sede Manizales. Profesor Daniel Alveiro Bedoya Ruiz (2022).

Ley de Hooke generalizada para materiales isotrópicos

Isótropo: propiedades mecánicas iguales en todas las direcciones del análisis.

Partimos de las deformaciones longitudinales y angulares:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y))$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

Despejando los esfuerzos:

Ecuaciones de Lamé

$$\sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2G\varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

- Père de Gabriel Jean Baptiste Lamé (1795-1870), matemático francés.

Ley de Hooke generalizada para materiales isotrópicos

Isótropo: propiedades mecánicas iguales en todas las direcciones del análisis.

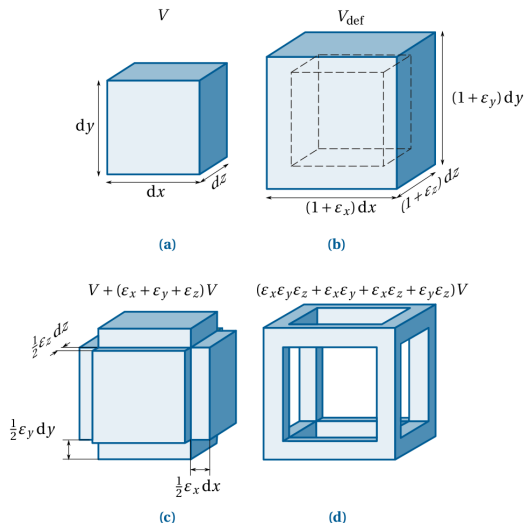
Formulación matricial

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_D \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

- La dilatación cúbica: $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$.
- La constante de Lamé: $\lambda := \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$.
- **Código:** 04_03_03.ipynb

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \mathbf{I} + 2G \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Cambios de volumen y dilatación cúbica



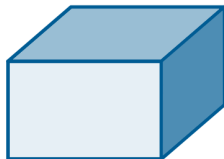
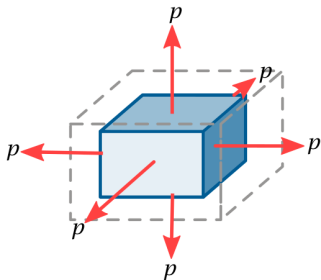
La dilatación cúbica o deformación volumétrica es el cambio de volumen por unidad de volumen.

$$e := \frac{V_{\text{def}} - V}{V} \approx \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

$$\begin{aligned} e(x, y, z) &= \text{div} \mathbf{u}(x, y, z) \\ &= \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z} \end{aligned}$$

Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad

Es una propiedad del material que determina su incompresibilidad y es una medida de la capacidad de una sustancia de soportar cambios de volumen cuando se somete a esfuerzos normales en todas las direcciones.



$$K := \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$




- Entre más tienda $\nu \rightarrow 0$ más incompresible es el sólido.
- Un suelo saturado tiene un ν cercano a 0.5.

Derrotero

- Conceptos básicos
- Estudio de los esfuerzos en un punto
- Estudio de los desplazamientos y las deformaciones en un punto
- Relaciones entre esfuerzos y deformaciones
- **Material de apoyo**

Material complementario: clases grabadas y diapositivas

Consulte el repositorio de GitHub: https://github.com/michaelherediaperez/medio_continuo

Conceptos básicos	Esfuerzos	Deformaciones
		
Playlist YouTube	Playlist YouTube	Playlist YouTube
Diapositiva Mec. Tensorial	Diapositiva Mec. Tensorial	Diapositiva Mec. Tensorial

- Adicional: Diapositiva Mec. Tensorial: relaciones entre esfuerzos y deformaciones.