4100611 - Mecánica de Sólidos

Unidad 2. Relación entre esfuerzos y deformaciones

Michael Heredia Pérez
Ing., Esp., MSc.

mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil

2026a

Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada.

Derrotero

- 4.9. Particularización de tres a dos dimensiones
- 4.10. Interpretación de gráficos de esfuerzos y deformaciones
- 4.11. Cálculo de las trayectorias de esfuerzos principales
- 4.12. Modificación de la ley de Hooke para tener en cuenta los efectos térmicos en el caso de materiales isótropos

Derrotero

- 4.9. Particularización de tres a dos dimensiones
- 4.10. Interpretación de gráficos de esfuerzos y deformaciones
- 4.11. Cálculo de las trayectorias de esfuerzos principales
- 4.12. Modificación de la ley de Hooke para tener en cuenta los efectos térmicos en el caso de materiales isótropos

Particularización de tres a dos dimensiones

Existen 3 casos de particularización:

- Tensión plana
- Deformación plana
- Caso axisimétrico (*coordenadas cilíndricas*)

Tensión y deformación plana se conocen como los **casos de elasticidad plana**. Ver: https://es.wikipedia.org/wiki/Elasticidad_plana.

Tensión plana

Cuando:

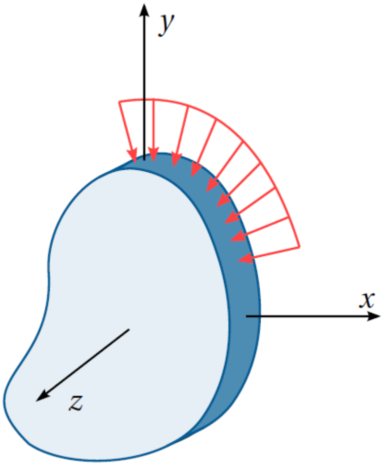
1. σ_1, σ_2 o σ_3 nulo.
2. Una dimensión **muy pequeña** respecto a las demás.
3. Elementos delgados o "planos".

Suposiciones:

1. Sin cargas aplicadas en dirección del eje z.
2. Cargas aplicadas perpendiculares al eje z.
3. Cargas distribuidas uniformemente en su **espesor**.

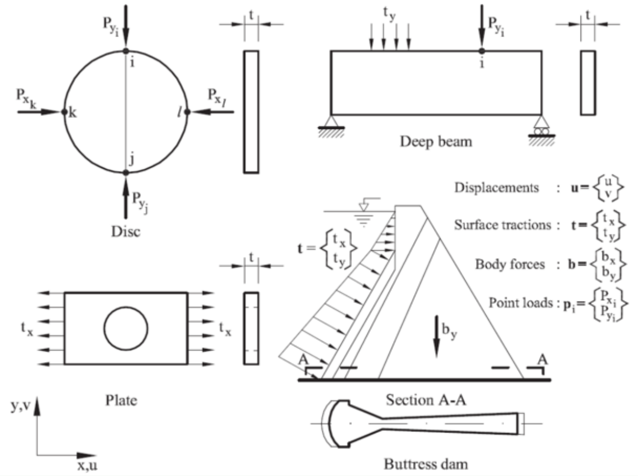
Formulación matemática de Tensión plana

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$



Tensión plana

Algunos ejemplos de la práctica ingenieril



Tensión plana

Profundizando en algunos ejemplos de la práctica ingenieril

Prompt

<rol>
Actúa como un profesor universitario de mecánica de sólidos.
</rol>
<contexto>
En el curso de mecánica de sólidos, para estudiantes de ingeniería civil, de pregrado, se está explicando el tema de Tensión y Deformación Plana.
Estos son dos casos que nos permiten simplificar sólidos tridimensionales como bidimensionales, a partir de particularización de la Ley de Hooke.
</contexto>
<tarea>
En el caso de los elementos de la figura, responde:
1. ¿Qué son?
2. ¿Por qué son ejemplos de tensión plana?
3. ¿Qué tipo de estructura sería en una obra civil? dentro del contexto de ingeniería civil.
</tarea>

Tensión plana en el caso isótropo

Particularizamos la Ley de Hooke general (tridimensional) a un caso bidimensional

Partimos de las deformaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$
$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$

Particularizamos:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right)$$
$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$
$$\gamma_{yz} = 0$$
$$\gamma_{xz} = 0$$

Despejamos los esfuerzos:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)$$
$$\sigma_z = 0$$
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$
$$\tau_{xz} = 0$$
$$\tau_{yz} = 0$$

Tarea

Verifique el desarrollo de estas ecuaciones mediante un código simbólico en Python.

Tensión plana en el caso isótropo

Particularizamos la Ley de Hooke general (tridimensional) a un caso bidimensional

Partimos de las deformaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$
$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$

Particularizamos:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right)$$
$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$
$$\gamma_{yz} = 0$$
$$\gamma_{xz} = 0$$

Despejamos los esfuerzos:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)$$
$$\sigma_z = 0$$
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$
$$\tau_{xz} = 0$$
$$\tau_{yz} = 0$$

Tarea

Verifique el desarrollo de estas ecuaciones mediante un código simbólico en Python.

Tensión plana en el caso isótropo

Particularizamos la Ley de Hooke general (tridimensional) a un caso bidimensional

Partimos de las deformaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$
$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$

Particularizamos:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right)$$
$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$
$$\gamma_{yz} = 0$$
$$\gamma_{xz} = 0$$

Despejamos los esfuerzos:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)$$
$$\sigma_z = 0$$
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$
$$\tau_{xz} = 0$$
$$\tau_{yz} = 0$$

Tarea

Verifique el desarrollo de estas ecuaciones mediante un código simbólico en Python.

Tensión plana en el caso isótropo

Particularizamos la Ley de Hooke general (tridimensional) a un caso bidimensional

Partimos de las deformaciones:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right)\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right)\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right)\\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}\\
\gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz}\\
\gamma_{xz} &= \frac{1}{G}\tau_{xz}
\end{aligned}$$

Particularizamos:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right)\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right)\\
\varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}\\
\gamma_{yz} &= 0\\
\gamma_{xz} &= 0
\end{aligned}$$

Despejamos los esfuerzos:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)\\
\sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)\\
\sigma_z &= 0\\
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy}\\
\tau_{xz} &= 0\\
\tau_{yz} &= 0
\end{aligned}$$

Tarea

Verifique el desarrollo de estas ecuaciones mediante un código simbólico en Python.

Tensión plana en el caso isótropo

Particularizamos la Ley de Hooke general (tridimensional) a un caso bidimensional

Partimos de las deformaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$
$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$

Particularizamos:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right)$$
$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$
$$\gamma_{yz} = 0$$
$$\gamma_{xz} = 0$$

Despejamos los esfuerzos:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)$$
$$\sigma_z = 0$$
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$
$$\tau_{xz} = 0$$
$$\tau_{yz} = 0$$

Tarea

Verifique el desarrollo de estas ecuaciones mediante un código simbólico en Python.

Tensión plana en el caso isótropo

Particularizamos la Ley de Hooke general (tridimensional) a un caso bidimensional

Representación matricial

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Las matrices de esfuerzos y deformaciones simplificadas al caso de tensión plana:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\det \underline{\underline{\sigma}} = 0} \qquad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Tensión plana en el caso isótropo

Particularizamos la Ley de Hooke general (tridimensional) a un caso bidimensional

Representación matricial

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Las matrices de esfuerzos y deformaciones simplificadas al caso de tensión plana:

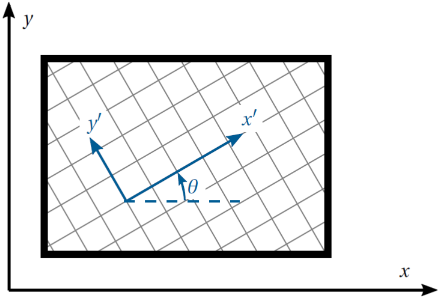
$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\det \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = 0} \qquad \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Tensión plana en el caso ortótropo

Particularizamos la Ley de Hooke general (tridimensional) a un caso bidimensional

Representación matricial

$$\begin{pmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{pmatrix} = \frac{1}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}\begin{pmatrix}E_x & E_x\nu_{yx} & 0\\ E_y\nu_{xy} & E_y & 0\\ 0 & & (1-\nu_{xy}\nu_{yx})G_{xy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{pmatrix}$$



Si las direcciones de los ejes de ortotropía x', y' están inclinadas un ángulo θ con respecto a los ejes globales x, y de la estructura, la matriz constitutiva para el material ortótropo en coordenadas globales $\boldsymbol{D}_{TP}$ es:

$$\boldsymbol{D}_{TP} = \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\varepsilon},2D}^{T}\boldsymbol{D}'_{TP}\boldsymbol{T}_{\varepsilon,2D}$$

Recuerde:

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{T}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{\varepsilon}$$

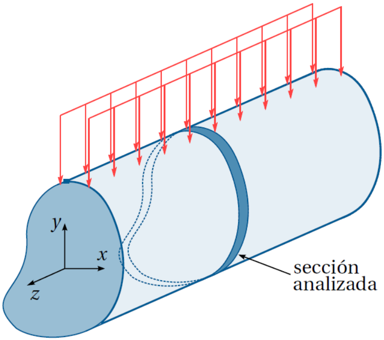
Deformación plana

Cuando:

1. Una dimensión **muy grande** respecto a las demás.
2. Elementos alargados.

Suposiciones:

1. Cargas independientes del eje z.
2. Cargas aplicadas perpendiculares al eje z.
3. Cargas distribuidas uniformemente en su **longitud**.
4. Bajo iguales condiciones, basta con analizar una *tajada* considerada confinada.
5. Aplica para las *tajadas* interiores, no para las *tapas*.

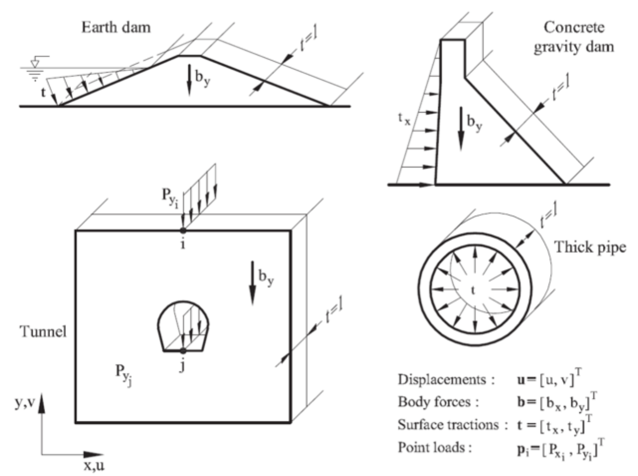


Formulación matemática de Deformación plana

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

Deformación plana

Algunos ejemplos



Deformación plana

Profundizando en algunos ejemplos de la práctica ingenieril

Prompt

<rol>
Actúa como un profesor universitario de mecánica de sólidos.
</rol>
<contexto>
En el curso de mecánica de sólidos, para estudiantes de ingeniería civil, de pregrado, se está explicando el tema de Tensión y Deformación Plana.
Estos son dos casos que nos permiten simplificar sólidos tridimensionales como bidimensionales, a partir de particularización de la Ley de Hooke.
</contexto>
<tarea>
En el caso de los elementos de la figura, responde:
1. ¿Qué son?
2. ¿Por qué son ejemplos de deformación plana?
3. ¿Qué tipo de estructura sería en una obra civil? dentro del contexto de ingeniería civil.
</tarea>

Deformación plana en el caso isótropo

Particularizamos la Ley de Hooke general (tridimensional) a un caso bidimensional

Partimos de las deformaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$
$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$

Particularizamos:

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}\left((1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}\left((1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x\right)$$
$$\varepsilon_z = 0$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$
$$\gamma_{yz} = 0$$
$$\gamma_{xz} = 0$$

Despejamos los esfuerzos:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left((1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right)$$
$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y\right)$$
$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)$$
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$
$$\tau_{xz} = 0$$
$$\tau_{yz} = 0$$

Tarea

Verifique el desarrollo de estas ecuaciones mediante un código simbólico en Python.

Deformación plana en el caso isótropo

Particularizamos la Ley de Hooke general (tridimensional) a un caso bidimensional

Partimos de las deformaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$
$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$

Particularizamos:

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}\left((1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}\left((1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x\right)$$
$$\varepsilon_z = 0$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$
$$\gamma_{yz} = 0$$
$$\gamma_{xz} = 0$$

Despejamos los esfuerzos:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left((1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right)$$
$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y\right)$$
$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)$$
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$
$$\tau_{xz} = 0$$
$$\tau_{yz} = 0$$

Tarea

Verifique el desarrollo de estas ecuaciones mediante un código simbólico en Python.

Deformación plana en el caso isótropo

Particularizamos la Ley de Hooke general (tridimensional) a un caso bidimensional

Partimos de las deformaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$
$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$

Particularizamos:

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}\left((1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}\left((1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x\right)$$
$$\varepsilon_z = 0$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$
$$\gamma_{yz} = 0$$
$$\gamma_{xz} = 0$$

Despejamos los esfuerzos:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left((1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right)$$
$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y\right)$$
$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)$$
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$
$$\tau_{xz} = 0$$
$$\tau_{yz} = 0$$

Tarea

Verifique el desarrollo de estas ecuaciones mediante un código simbólico en Python.

Deformación plana en el caso isótropo

Particularizamos la Ley de Hooke general (tridimensional) a un caso bidimensional

Partimos de las deformaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$
$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$

Particularizamos:

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}\left((1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}\left((1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x\right)$$
$$\varepsilon_z = 0$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$
$$\gamma_{yz} = 0$$
$$\gamma_{xz} = 0$$

Despejamos los esfuerzos:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left((1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right)$$
$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y\right)$$
$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)$$
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$
$$\tau_{xz} = 0$$
$$\tau_{yz} = 0$$

Tarea

Verifique el desarrollo de estas ecuaciones mediante un código simbólico en Python.

Deformación plana en el caso isótropo

Particularizamos la Ley de Hooke general (tridimensional) a un caso bidimensional

Partimos de las deformaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$
$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$

Particularizamos:

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}\left((1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}\left((1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x\right)$$
$$\varepsilon_z = 0$$
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$
$$\gamma_{yz} = 0$$
$$\gamma_{xz} = 0$$

Despejamos los esfuerzos:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left((1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right)$$
$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y\right)$$
$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)$$
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$
$$\tau_{xz} = 0$$
$$\tau_{yz} = 0$$

Tarea

Verifique el desarrollo de estas ecuaciones mediante un código simbólico en Python.

Deformación plana en el caso isótropo

Particularizamos la Ley de Hooke general (tridimensional) a un caso bidimensional

Representación matricial

$$\begin{pmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{pmatrix}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{pmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & & \frac{1-2\nu}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{pmatrix}$$

Las matrices de esfuerzos y deformaciones simplificadas al caso de deformación plana:

$$\underline{\underline{\sigma}}=\underbrace{\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & 0\\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0\\ 0 & 0 & \sigma_z\end{pmatrix}}_{\sigma_z=\nu(\sigma_x+\sigma_y)}\qquad \underline{\underline{\varepsilon}}=\underbrace{\begin{pmatrix}\varepsilon_x & \gamma_{xy} & 0\\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{\det\underline{\underline{\varepsilon}}=0}$$

Deformación plana en el caso isótropo

Particularizamos la Ley de Hooke general (tridimensional) a un caso bidimensional

Representación matricial

$$\begin{pmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{pmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & & \frac{1-2\nu}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{pmatrix}$$

Las matrices de esfuerzos y deformaciones simplificadas al caso de deformación plana:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \underbrace{\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & 0\\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0\\ 0 & 0 & \sigma_z\end{pmatrix}}_{\sigma_z=\nu(\sigma_x+\sigma_y)} \qquad \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \underbrace{\begin{pmatrix}\varepsilon_x & \gamma_{xy} & 0\\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{\det \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}=0}$$

Deformación plana en el caso ortótropo

Particularizamos la Ley de Hooke general (tridimensional) a un caso bidimensional

Ejercicio autónomo

Desarrolle la Ley de Hooke generalizada para el caso de deformación plana mediante un código simbólico en Python.

Relación entre los esfuerzos principales obtenidos en el análisis bidimensional y tridimensional

Explicación a partir de un ejemplo

- **Código:** 4_9_3_relaciones_esfuerzos_pp_bidimensional_tridimensional.ipynb

Relación entre los esfuerzos principales obtenidos en el análisis bidimensional y tridimensional

Tensión plana

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \text{máx}\left((\sigma_1)_{xy}, (\sigma_2)_{xy}, 0\right) \\
\sigma_2 &= \text{mediana}\left((\sigma_1)_{xy}, (\sigma_2)_{xy}, 0\right) \\
\sigma_3 &= \min\left((\sigma_1)_{xy}, (\sigma_2)_{xy}, 0\right) \\
\tau_{máx} &= \text{máx}\left(\frac{|(\sigma_1)_{xy}|}{2}, \frac{|(\sigma_2)_{xy}|}{2}, \frac{|(\sigma_1)_{xy} - (\sigma_2)_{xy}|}{2}\right)
\end{aligned}$$

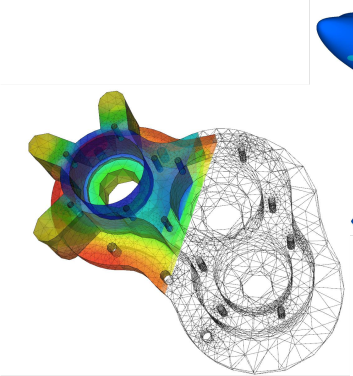
Deformación plana

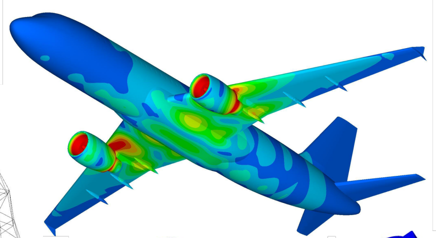
$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \text{máx}\left((\sigma_1)_{xy}, (\sigma_2)_{xy}, \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right) \\
\sigma_2 &= \text{mediana}\left((\sigma_1)_{xy}, (\sigma_2)_{xy}, \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right) \\
\sigma_3 &= \min\left((\sigma_1)_{xy}, (\sigma_2)_{xy}, \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right) \\
\tau_{máx} &= \text{máx}\left(\frac{|(\sigma_1)_{xy} - \nu(\sigma_x + \sigma_y)|}{2}, \frac{|(\sigma_2)_{xy} - \nu(\sigma_x + \sigma_y)|}{2}, \frac{|(\sigma_1)_{xy} - (\sigma_2)_{xy}|}{2}\right)
\end{aligned}$$

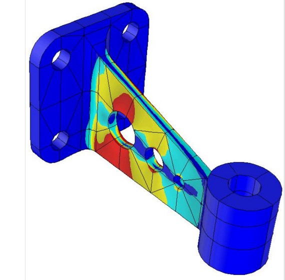
Derrotero

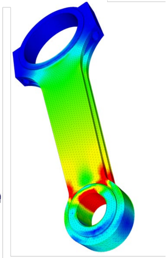
Resultados del software de modelación

Análisis por Elementos Finitos (*Finite Element Analysis - FEA*)

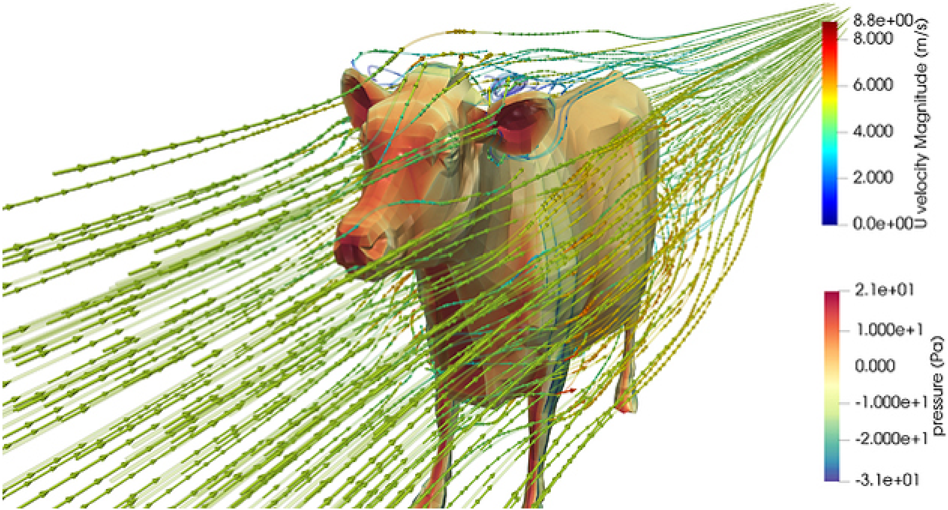




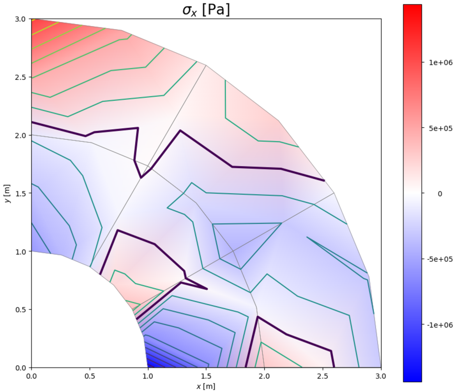


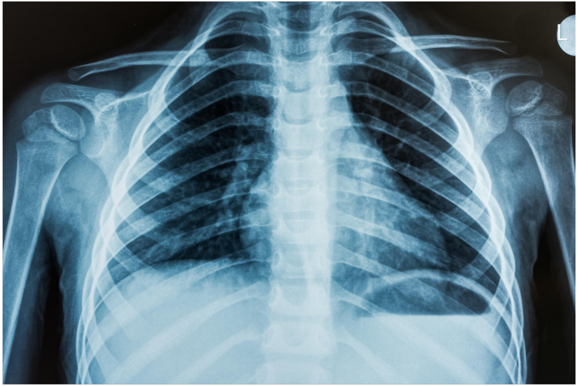


Modelos poco comunes

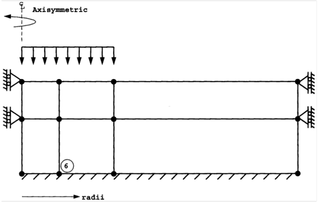


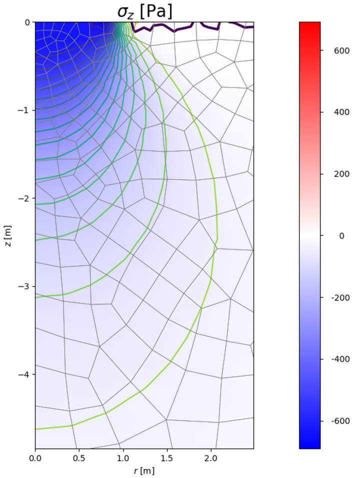
Los gráficos son radiografías de las estructuras

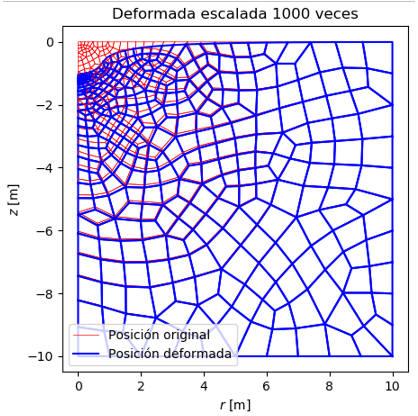




¿Cómo relaciono esfuerzos y deformaciones

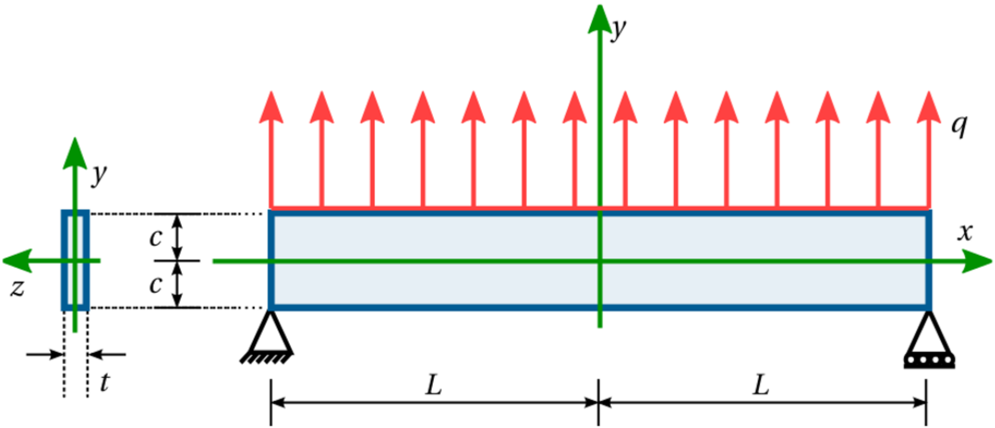






El problema

Una viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida



Formulación

- Condiciones de frontera:

$$\tau_{xy}(x, y = \pm c, z) = 0 \qquad (\tau_{xy} = 0 \text{ en el borde superior e inferior de la viga})$$
$$\sigma_y(x, y = -c, z) = 0 \qquad (\text{el borde inferior no soporta cargas})$$
$$\sigma_y(x, y = +c, z) = \frac{q}{t} \qquad (\text{el borde supeior soporta la carga distribuida})$$

- Fuerza cortante V y su momento flector M en los extremos:

$$V(\pm L) = -\int_{-c}^{c}\int_{0}^{t} \tau_{xy}(\pm L, y, z)dzdy = \pm ql$$
$$M(\pm L) = -\int_{-c}^{c}\int_{0}^{t} \sigma_x(\pm L, y, z)dzdy = 0$$

- Fuerza axial en toda su longitud:

$$f_{axial}(x) = \int_{-c}^{c}\int_{0}^{t} \sigma_x(x, y, z)dzdy = 0$$

Formulación

- Esfuerzos al interior de la viga

$$\sigma_x(x,y,z) = -\frac{q}{2I}\left(x^2y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{2}{5}c^2y - L^2y\right)$$
$$\sigma_y(x,y,z) = -\frac{q}{2I}\left(\frac{1}{3}y^3 - c^2y - \frac{2}{3}c^3\right)$$
$$\sigma_z(x,y,z) = 0$$
$$\tau_{xy}(x,y,z) = -\frac{q}{2I}(c^2 - y^2)x$$
$$\tau_{xz}(x,y,z) = 0$$
$$\tau_{yz}(x,y,z) = 0$$

Parea realizar el análisis

- **Código:** 04_09_graficos_colores.ipynb

Interpretación de los gráficos de σ_x, σ_y y τ_{xy}

Convención de signos en vigas

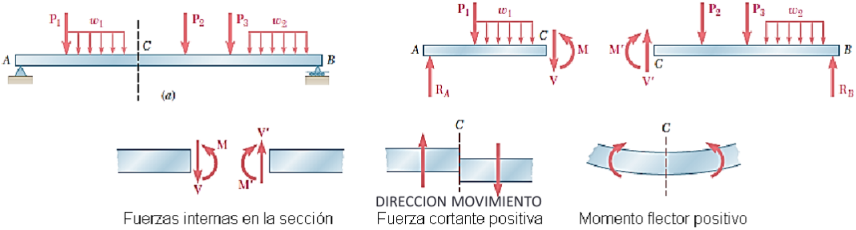


Figure: *Curso de Estática. (Herrera, 2018)*
(Hibbeler R.C 2012 Structural Analysis)

Convención de signos en vigas

Significado del signo de la fuerza cortante

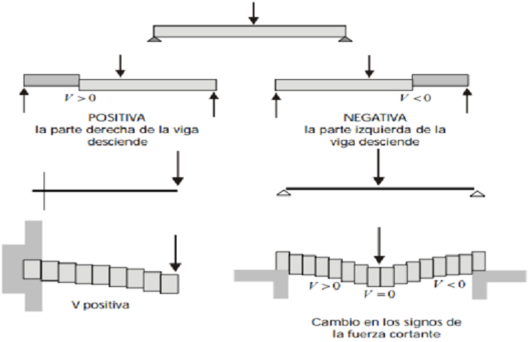


Figure: *Curso de Estática. (Herrera, 2018)*
(Hibbeler R.C 2012 Structural Analysis)

Convención de signos en vigas

Significado del signo del momento flector

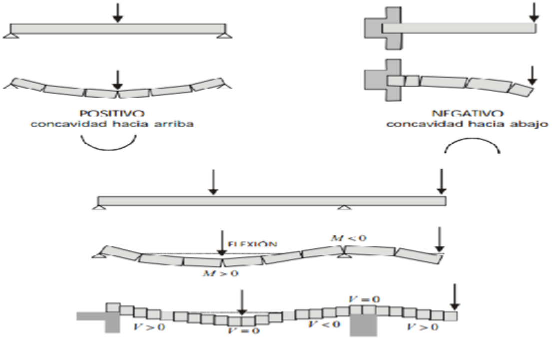
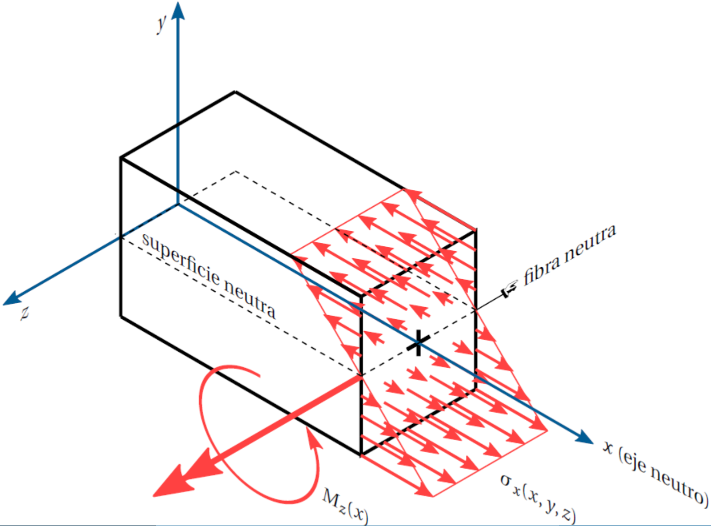


Figure: *Curso de Estática. (Herrera, 2018) (Hibbeler R.C 2012 Structural Analysis)*

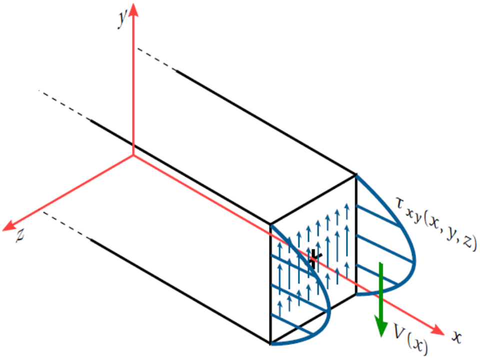
Distribuciones en la sección transversal

Momento flector



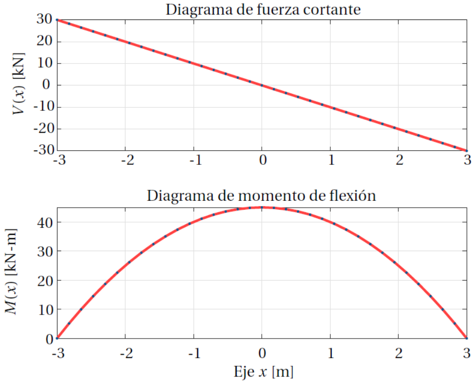
Distribuciones en la sección transversal

Fuerza cortante



Relación de los diagramas de colores de una viga con sus diagramas de cortante y momento

- **Código:** 04_09_04.ipynb



Interpretación de los gráficos de esfuerzos principales y cortante máximo

Derrotero

Cálculo de las trayectorias de esfuerzos principales

Derrotero

Modificación de la ley de Hooke para tener en cuenta los efectos térmicos en el caso de materiales isótropos

Estudio autónomo