Ecuaciones diferenciales fundamentales de la teoría de la elasticidad

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil
Mecánica de Sólidos

2025a

Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada.

Derrotero

Derrotero

Nota sobre la nomenclatura

Tengamos en cuenta que:

- Al sólido de estudio lo denotamos como Ω.
- Estamos utilizando las funciones X, Y y Z para representar las funciones $\Omega \to \mathbb{R}$ que describen la variación de las fuerzas másicas por unidad de volumen en el interior del sólido Ω.
- Estamos empleando los símbolos $\bar{X}$, $\bar{Y}$ y $\bar{Z}$ para representar las funciones $\delta\Omega \to \mathbb{R}$ que describen la variación de las fuerzas superficiales por unidad de área en el contorno $\delta\Omega$ del sólido Ω.
- $\boldsymbol{x} := [x, y, z]^T$ representa la posición en el espacio referida a los tres ejes coordenados.
- dS representará un diferencial de superficie (S mayúscula), mientras que ds representa un diferencial de longitud de arco, asociado al parámetro de longitud de arco (s minúscula).

Nota sobre la nomenclatura

Tengamos en cuenta que:

- Al sólido de estudio lo denotamos como Ω.
- Estamos utilizando las funciones X, Y y Z para representar las funciones $\Omega \to \mathbb{R}$ que describen la variación de las fuerzas másicas por unidad de volumen en el interior del sólido Ω.
- Estamos empleando los símbolos $\bar{X}$, $\bar{Y}$ y $\bar{Z}$ para representar las funciones $\delta\Omega \to \mathbb{R}$ que describen la variación de las fuerzas superficiales por unidad de área en el contorno $\delta\Omega$ del sólido Ω.
- $x := [x, y, z]^T$ representa la posición en el espacio referida a los tres ejes coordenados.
- dS representará un diferencial de superficie (S mayúscula), mientras que ds representa un diferencial de longitud de arco, asociado al parámetro de longitud de arco (s minúscula).

Nota sobre la nomenclatura

Tengamos en cuenta que:

- Al sólido de estudio lo denotamos como Ω.
- Estamos utilizando las funciones X, Y y Z para representar las funciones $\Omega \to \mathbb{R}$ que describen la variación de las fuerzas másicas por unidad de volumen en el interior del sólido Ω.
- Estamos empleando los símbolos $\bar{X}$, $\bar{Y}$ y $\bar{Z}$ para representar las funciones $\delta\Omega \to \mathbb{R}$ que describen la variación de las fuerzas superficiales por unidad de área en el contorno $\delta\Omega$ del sólido Ω.
- $x := [x, y, z]^T$ representa la posición en el espacio referida a los tres ejes coordenados.
- dS representará un diferencial de superficie (S mayúscula), mientras que ds representa un diferencial de longitud de arco, asociado al parámetro de longitud de arco (s minúscula).

Nota sobre la nomenclatura

Tengamos en cuenta que:

- Al sólido de estudio lo denotamos como Ω.
- Estamos utilizando las funciones X, Y y Z para representar las funciones $\Omega \to \mathbb{R}$ que describen la variación de las fuerzas másicas por unidad de volumen en el interior del sólido Ω.
- Estamos empleando los símbolos $\bar{X}$, $\bar{Y}$ y $\bar{Z}$ para representar las funciones $\delta\Omega \to \mathbb{R}$ que describen la variación de las fuerzas superficiales por unidad de área en el contorno $\delta\Omega$ del sólido Ω.
- $\boldsymbol{x} := [x, y, z]^T$ representa la posición en el espacio referida a los tres ejes coordenados.
- dS representará un diferencial de superficie (S mayúscula), mientras que ds representa un diferencial de longitud de arco, asociado al parámetro de longitud de arco (s minúscula).

Nota sobre la nomenclatura

Tengamos en cuenta que:

- Al sólido de estudio lo denotamos como Ω.
- Estamos utilizando las funciones X, Y y Z para representar las funciones $\Omega \to \mathbb{R}$ que describen la variación de las fuerzas másicas por unidad de volumen en el interior del sólido Ω.
- Estamos empleando los símbolos $\bar{X}$, $\bar{Y}$ y $\bar{Z}$ para representar las funciones $\delta\Omega \to \mathbb{R}$ que describen la variación de las fuerzas superficiales por unidad de área en el contorno $\delta\Omega$ del sólido Ω.
- $\boldsymbol{x} := [x, y, z]^T$ representa la posición en el espacio referida a los tres ejes coordenados.
- dS representará un diferencial de superficie (S mayúscula), mientras que ds representa un diferencial de longitud de arco, asociado al parámetro de longitud de arco (s minúscula).

Nota sobre la nomenclatura

Tengamos en cuenta que:

- Al sólido de estudio lo denotamos como Ω.
- Estamos utilizando las funciones X, Y y Z para representar las funciones $\Omega \to \mathbb{R}$ que describen la variación de las fuerzas másicas por unidad de volumen en el interior del sólido Ω.
- Estamos empleando los símbolos $\bar{X}$, $\bar{Y}$ y $\bar{Z}$ para representar las funciones $\delta\Omega \to \mathbb{R}$ que describen la variación de las fuerzas superficiales por unidad de área en el contorno $\delta\Omega$ del sólido Ω.
- $\boldsymbol{x} := [x, y, z]^T$ representa la posición en el espacio referida a los tres ejes coordenados.
- dS representará un diferencial de superficie (S mayúscula), mientras que ds representa un diferencial de longitud de arco, asociado al parámetro de longitud de arco (s minúscula).

Introducción

Problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ($\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$)

La variación de los esfuerzos dentro del sólido estará definida por:

- **EDPs de equilibrio**: describen leyes físicas universales como conervación de la masa y de la energía. Aplicables a todo material.
- **EDPs de compatibilidad**: Describen el comportamiento mecánico de materiales particulares.

Introducción

Problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ($\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$)

La variación de los esfuerzos dentro del sólido estará definida por:

- **EDPs de equilibrio**: describen leyes físicas universales como conervación de la masa y de la energía. Aplicables a todo material.
- **EDPs de compatibilidad**: Describen el comportamiento mecánico de materiales particulares.

Introducción

Problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ($\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$)

La variación de los esfuerzos dentro del sólido estará definida por:

- **EDPs de equilibrio**: describen leyes físicas universales como conervación de la masa y de la energía. Aplicables a todo material.
- **EDPs de compatibilidad**: Describen el comportamiento mecánico de materiales particulares.

Introducción

Problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ($\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$)

La variación de los esfuerzos dentro del sólido estará definida por:

- **EDPs de equilibrio**: describen leyes físicas universales como conervación de la masa y de la energía. Aplicables a todo material.
- **EDPs de compatibilidad**: Describen el comportamiento mecánico de materiales particulares.

Introducción

Problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ($\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$)

La variación de los esfuerzos dentro del sólido estará definida por:

- **EDPs de equilibrio**: describen leyes físicas universales como conervación de la masa y de la energía. Aplicables a todo material.
- **EDPs de compatibilidad**: Describen el comportamiento mecánico de materiales particulares.

Introducción

Problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ($\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$)

La variación de los esfuerzos dentro del sólido estará definida por:

- **EDPs de equilibrio**: describen leyes físicas universales como conervación de la masa y de la energía. Aplicables a todo material.
- **EDPs de compatibilidad**: Describen el comportamiento mecánico de materiales particulares.

Introducción

Problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ($\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$)

La variación de los esfuerzos dentro del sólido estará definida por:

- **EDPs de equilibrio**: describen leyes físicas universales como conervación de la masa y de la energía. Aplicables a todo material.
- **EDPs de compatibilidad**: Describen el comportamiento mecánico de materiales particulares.

Introducción

Problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ($\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$)

La variación de los esfuerzos dentro del sólido estará definida por:

- **EDPs de equilibrio**: describen leyes físicas universales como conervación de la masa y de la energía. Aplicables a todo material.
- **EDPs de compatibilidad**: Describen el comportamiento mecánico de materiales particulares.

Introducción

Problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

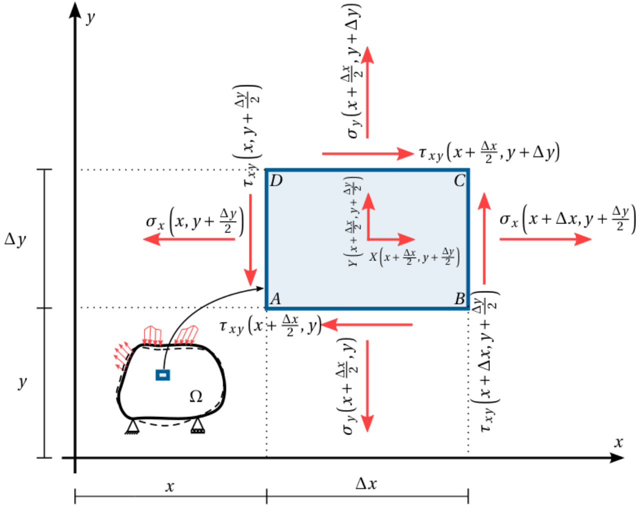
- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ($\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$)

La variación de los esfuerzos dentro del sólido estará definida por:

- **EDPs de equilibrio**: describen leyes físicas universales como conservación de la masa y de la energía. Aplicables a todo material.
- **EDPs de compatibilidad**: Describen el comportamiento mecánico de materiales particulares.

Derrotero

Ecuaciones diferenciales de equilibrio



Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Para el caso bidimensional, encontramos el equlibrio mediante el siguiente par de ecuaciones:

$$\frac{\partial \sigma_x(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x,y)}{\partial y} + X(x,y) = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x,y)}{\partial y} + Y(x,y) = 0$$

Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Análogamente, en el caso tridimensional:

$$\frac{\partial \sigma_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial z} + X(x,y,z) = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial z} + Y(x,y,z) = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(x,y,z)}{\partial z} + Z(x,y,z) = 0$$

Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio (interno)

$$\frac{\partial \sigma_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial z} + X(x,y,z) = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial z} + Y(x,y,z) = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(x,y,z)}{\partial z} + Z(x,y,z) = 0$$

Expresan el equilibrio de fuerzas en las direcciones x, y y z en todos los puntos interiores del sólido.

- Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) en 1829, matemático e ingeniero civil.

Comentarios

- Aplicables a cualquier sólido independiente del material constitutivo.
- Los esfuerzos son funciones derivables y continuas con respecto a la posición.
- El problema planteado es estáticamente indeterminado (o hiperestático)

Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio (interno)

$$\frac{\partial \sigma_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial z} + X(x,y,z) = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial z} + Y(x,y,z) = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(x,y,z)}{\partial z} + Z(x,y,z) = 0$$

Expresan el equilibrio de fuerzas en las direcciones x, y y z en todos los puntos interiores del sólido.

- Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) en 1829, matemático e ingeniero civil.

Comentarios

- Aplicables a cualquier sólido independiente del material constitutivo.
- Los esfuerzos son funciones derivables y continuas con respecto a la posición.
- El problema planteado es estáticamente indeterminado (o hiperestático)

Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$

- En notación vectorial:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

$$\text{div } \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

Cuando la única fuerza másica actuando es el peso propio:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial z} - \rho(x,y,z)g &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(x,y,z)}{\partial z} &= 0
\end{aligned}$$

Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$

- En notación vectorial:

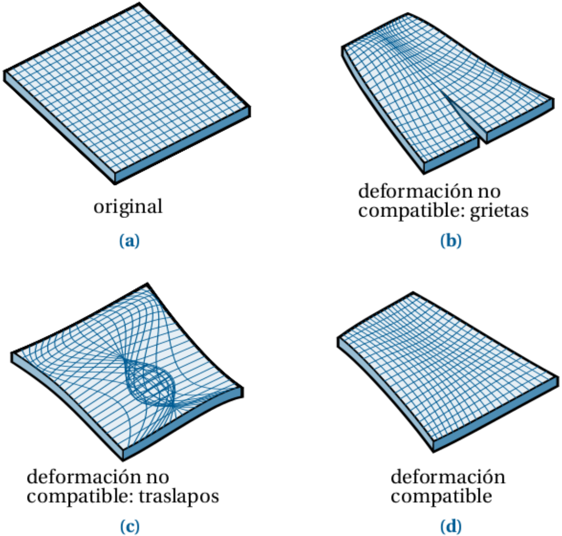
$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$
$$\text{div } \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

Cuando la única fuerza másica actuando es el peso propio:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial z} &= 0\\
\frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial z} - \rho(x,y,z)g &= 0\\
\frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(x,y,z)}{\partial z} &= 0
\end{aligned}$$

Derrotero

¿Para qué?



Las ecuaciones que desarrollaremos:

- EDPs de compatibilidad en términos de deformaciones para:
  - Caso bidimensional.
  - Caso tridimensional (Saint-Venant).
- EDPs de compatibilidad en términos de esfuerzos para:
  - Caso de Tensión plana.
  - Caso de Deformación plana.
  - Caso bidimensional general (Lévy).
  - Caso tridimensional (Michell, Beltrami).

Ecuaciones de compatibilidad en dos dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Operando:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

Reemplazando:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

Ecuación de compatibilidad bidimensional en términos de deformaciones

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

- Los desplazamientos u y v deben ser funciones continuas y derivables, cuyas primeras dos derivadas parciales mixtas son continuas.
- Únicamente aplicable cuando se presentan deformaciones pequeñas.

Ecuaciones de compatibilidad en dos dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Operando:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

Reemplazando:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

Ecuación de compatibilidad bidimensional en términos de deformaciones

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

- Los desplazamientos u y v deben ser funciones continuas y derivables, cuyas primeras dos derivadas parciales mixtas son continuas.
- Únicamente aplicable cuando se presentan deformaciones pequeñas.

Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Conociendo:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Sumando estas ecuaciones y organizando términos:

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Intercambiando cíclicamente los índices x, y, y z, obtenemos:

Ecuaciones de compatibilidad de Saint-Venant

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

(mismas anotaciones)

- Adhémar Jean Claude de Saint-Venant (1797-1886) en 1864, matemático e ingeniero mecánico.

Las ecuaciones de Saint-Venant se pueden resumir en una única ecuación usando notación tensorial:

$$\varepsilon_{ij,km} + \varepsilon_{mk,ji} - \varepsilon_{ik,jm} - \varepsilon_{mj,ki} = 0; \quad i, j, k, m = 1, 2, 3$$

Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Intercambiando cíclicamente los índices x, y, y z, obtenemos:

Ecuaciones de compatibilidad de Saint-Venant

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

(mismas anotaciones)

- Adhémar Jean Claude de Saint-Venant (1797-1886) en 1864, matemático e ingeniero mecánico.

Las ecuaciones de Saint-Venant se pueden resumir en una única ecuación usando notación tensorial:

$$\varepsilon_{ij,km} + \varepsilon_{mk,ji} - \varepsilon_{ik,jm} - \varepsilon_{mj,ki} = 0; \quad i,j,k,m = 1,2,3$$

Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Las ecuaciones anteriores son LD. Se pueden reducir al siguiente sistema de 3 EDPs LI:

$$2\frac{\partial^4 \varepsilon_x}{\partial y^2 \partial z^2} = \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$2\frac{\partial^4 \varepsilon_y}{\partial x^2 \partial z^2} = \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$2\frac{\partial^4 \varepsilon_z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

Sin embargo, se emplea la formulación anterior (sistema 6x6) al ser matemáticamente más simple su uso.

Ecuaciones de compatibilidad para el caso de tensión plana expresada en términos de esfuerzos

Condición de **tensión plana**: $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Las deformaciones (Eq. 4.35):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

Derivando:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{G}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad en dos dimensiones (Eq. 5.6) con $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\sigma_y)\right)$$

Ecuaciones de compatibilidad para el caso de tensión plana expresada en términos de esfuerzos

Las ecuaciones diferenciales de equilibrio 2D:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

Derivando, sumando y despejando el término que contiene a τ_{xy}:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Igualando y simplificando ambas expresiones:

Ecuación de compatibilidad para el caso de tensión plana

En términos de esfuerzos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Ecuaciones de compatibilidad para el caso de tensión plana expresada en términos de esfuerzos

Las ecuaciones diferenciales de equilibrio 2D:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

Derivando, sumando y despejando el término que contiene a τ_{xy}:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Igualando y simplificando ambas expresiones:

Ecuación de compatibilidad para el caso de tensión plana

En términos de esfuerzos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Ecuaciones de compatibilidad para el caso de deformación plana expresada en términos de esfuerzos

Condición de **deformación plana**: $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Las deformaciones (Eq. 4.38):

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}((1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}((1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

Aplicando derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x(1-\nu) - \nu\sigma_y) \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y(1-\nu) - \nu\sigma_x) \\
\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{G}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}
\end{aligned}$$

Ecuaciones de compatibilidad para el caso de deformación plana expresada en términos de esfuerzos

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad en dos dimensiones (Eq. 5.6):

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{G(1+\nu)}{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x(1-\nu)-\nu\sigma_y)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y(1-\nu)-\nu\sigma_x)\right)$$

Igualando las ecuaciones:

$$\frac{G(1+\nu)}{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x(1-\nu)-\nu\sigma_y)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y(1-\nu)-\nu\sigma_x)\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Simplificando:

Ecuación de compatibilidad para el caso de deformación plana

En términos de esfuerzos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y) = -\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Ecuaciones de compatibilidad para el caso de deformación plana expresada en términos de esfuerzos

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad en dos dimensiones (Eq. 5.6):

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{G(1+\nu)}{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x(1-\nu)-\nu\sigma_y)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y(1-\nu)-\nu\sigma_x)\right)$$

Igualando las ecuaciones:

$$\frac{G(1+\nu)}{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x(1-\nu)-\nu\sigma_y)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y(1-\nu)-\nu\sigma_x)\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Simplificando:

Ecuación de compatibilidad para el caso de deformación plana

En términos de esfuerzos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y) = -\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

Ecuación de compatibilidad general para el caso bidimensional

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

$$K_1 = \begin{cases} -(1+\nu) & \text{para el caso de } \textbf{tensión plana} \\ -\dfrac{1}{1-\nu} & \text{para el caso de } \textbf{deformación plana} \end{cases}$$

- Aplicable solo a sólidos con materiales elásticos (Ley de Hooke), lineales e isótropos.
- Materiales homogeneos: $E(x, y, z) = \nu(x, y, z) =$ cte.
- Deformaciones pequeñas.

Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\nabla^2 \sigma_{ii} = K_1 b_{i,i}$$

- En notación vectorial:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \mathrm{div}\boldsymbol{b}$$

donde

$$\begin{cases} \nabla^2 := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & \textbf{operador laplaciano bidimensional} \\ \mathrm{div}\boldsymbol{b} := \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} & \text{divergenia del campo vectorial } \boldsymbol{b} \end{cases}$$

Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

¿Y si las fuerzas másicas son homogéneas?

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = 0;$$

Ecuación de Lévy

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

La distribución de esfuerzos debe ser igual para todas las estructuras en tensión o deformación plana, siempre y cuando se trate de:

- Contornos idénticos.
- Estructuras sometidas al mismo sistema de fuerzas superficiales y másicas, constantes.

- Maurice Lévy (1838-1910), ingeniero y matemático francés

Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

¿Y si las fuerzas másicas son homogéneas?

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = 0;$$

Ecuación de Lévy

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

La distribución de esfuerzos debe ser igual para todas las estructuras en tensión o deformación plana, siempre y cuando se trate de:

- Contornos idénticos.
- Estructuras sometidas al mismo sistema de fuerzas superficiales y másicas, constantes.

- Maurice Lévy (1838-1910), ingeniero y matemático francés

Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

¿Y si las fuerzas másicas son homogéneas?

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = 0;$$

Ecuación de Lévy

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

La distribución de esfuerzos debe ser igual para todas las estructuras en tensión o deformación plana, siempre y cuando se trate de:

- Contornos idénticos.
- Estructuras sometidas al mismo sistema de fuerzas superficiales y másicas, constantes.

- Maurice Lévy (1838-1910), ingeniero y matemático francés

Fotoeslasticidad

En el método fotoelástico, un material transparente se somete a una luz polarizada y a unas fuerzas; según la llamada *ley de Brewster* o *ley tenso-óptica*, el material responderá mostrando unas franjas del igual color, las cuales se pueden interpretar como curvas de esfuerzo cortante máximo τ_{max} constante; esto siempre y cuando el esfuerzo fuera del plano sea el esfuerzo intermedio, es decir, σ_2 en el caso tridimensional. (ver video).

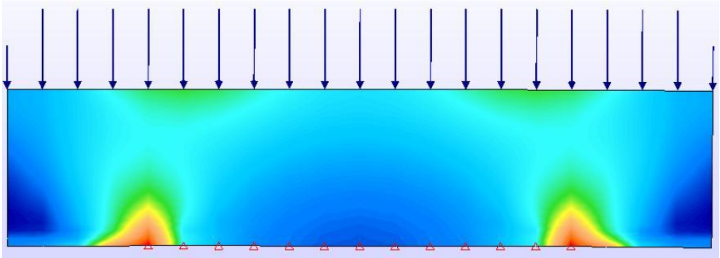


Figure: *Estudio de la distribución de esfuerzos sobre un polímero sometido a compresión, utilizando la técnica de fotoelasticidad. Hilda Sofía Soto Lesmes, ver.*

Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

Recordemos:

- Las Eqs. (4.3) dadas por la superposición de las deformaciones elásticas:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z))$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))$$

- Las EDPs de equilibrio interno (Eq. 5.2):

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = 0$$

Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

Ecuaciones de Michell

$$\nabla^2\sigma_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial X}{\partial x}$$

$$\nabla^2\sigma_y + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial Y}{\partial y}$$

$$\nabla^2\sigma_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial Z}{\partial z}$$

$$\nabla^2\tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z} = -\left(\frac{\partial Y}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$$

$$\nabla^2\tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial z} = -\left(\frac{\partial X}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial x}\right)$$

$$\nabla^2\tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y} = -\left(\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial x}\right)$$

- John Henry Michell (1863-1940) en 1900, matemático australiano.

Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\Theta_{,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}b_{k,k} - b_{i,j} - b_{j,i}$$

donde:

- $\Theta := \sigma_{kk} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ es el primer invariante de esfuerzos I_1
- ∇^2 es el **operador laplaciano tridimensional**:

$$\nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Comentario

A comparación de las ecuaciones de Saint-Venant, las de Michell son LI.

Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\Theta_{,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}b_{k,k} - b_{i,j} - b_{j,i}$$

donde:

- $\Theta := \sigma_{kk} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ es el primer invariante de esfuerzos I_1
- ∇^2 es el **operador laplaciano tridimensional**:

$$\nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Comentario

A comparación de las ecuaciones de Saint-Venant, las de Michell son LI.

Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

¿Y si las fuerzas másicas son constantes?

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} X(x,y,z) & Y(x,y,z) & Z(x,y,z) \end{bmatrix}^T = \text{cte}$$

Ecuaciones de Beltrami

$$\nabla^2\sigma_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = 0 \qquad \nabla^2\tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z} = 0$$

$$\nabla^2\sigma_y + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} = 0 \qquad \nabla^2\tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial z} = 0$$

$$\nabla^2\sigma_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} = 0 \qquad \nabla^2\tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y} = 0$$

- Válidas para materiales elásticos, lineales, homogéneos e isótropos (Ley de Hooke).
- Son análogas a $\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$ (caso bidimensional).

- Eugenio Beltrami (1835-1900) en 1892, matemático italiano.

Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

¿Y si las fuerzas másicas son constantes?

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} X(x,y,z) & Y(x,y,z) & Z(x,y,z) \end{bmatrix}^T = \text{cte}$$

Ecuaciones de Beltrami

$$\nabla^2\sigma_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = 0 \qquad \nabla^2\tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z} = 0$$

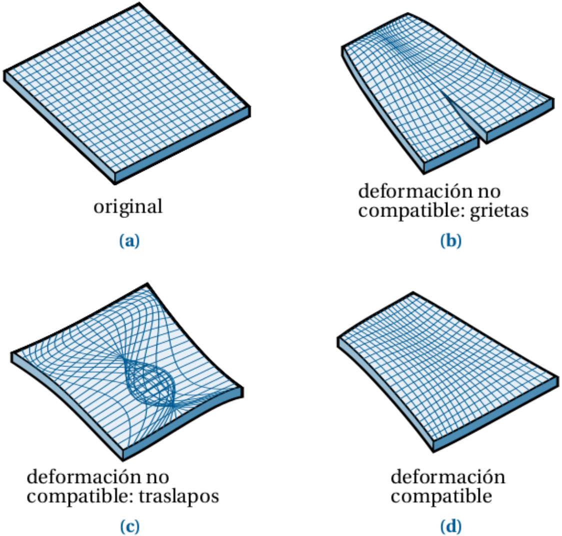
$$\nabla^2\sigma_y + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} = 0 \qquad \nabla^2\tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial z} = 0$$

$$\nabla^2\sigma_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} = 0 \qquad \nabla^2\tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y} = 0$$

- Válidas para materiales elásticos, lineales, homogéneos e isótropos (Ley de Hooke).
- Son análogas a $\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$ (caso bidimensional).

- Eugenio Beltrami (1835-1900) en 1892, matemático italiano.

Interpretación física de las ecuaciones de compatibilidad



Las ecuaciones que desarrollaremos:

- EDPs de compatibilidad en términos de deformaciones para:
  - Caso bidimensional.
  - Caso tridimensional (Saint-Venant).
- EDPs de compatibilidad en términos de esfuerzos para:
  - Caso de Tensión plana.
  - Caso de Deformación plana.
  - Caso bidimensional general (Lévy)
  - Caso tridimensional (Michell, Beltrami).

Interpretación física de las ecuaciones de compatibilidad

Sobre las ecuaciones de compatibilidad en términos de deformaciones

- Caso bidimensional:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

- Caso tridimensional (Saint-Venant):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

Grietas y discontinuidades

No deben aparecer grietas o discontinuidades en el campo de deformaciones.

- u, v, w son:
  - Funciones contínuas y derivables.
  - Continuidad $C^3(\Omega)$
- Válidas para materiales con cualquier tipo de comportamiento (elástico, plástico, anisótropo, lineal, no lineal, etc) siempre y cuando las deformaciones de este sean pequeñas.

Interpretación física de las ecuaciones de compatibilidad

Sobre las ecuaciones de compatibilidad en términos de deformaciones

- Caso bidimensional:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

- Caso tridimensional (Saint-Venant):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

En general: los traslapos

- El hecho de que el sólido no se traslapará en sus deformaciones está implícitamente dicho por las ecuaciones de compatibilidad al imponer las relaciones entre las segundas derivadas de los desplazamientos u, v y w.
- El propósito principal de las ecuaciones de compatibilidad es imponer restricciones en las deformaciones, garantizando así que los desplazamientos u, v y w tengan un valor único.

Interpretación física de las ecuaciones de compatibilidad

Sobre las ecuaciones de compatibilidad en términos de esfuerzos

- Caso bidimensional:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right).$$

- Caso tridimensional (Michell, Beltrami):
- Caso bidimensional simplificado (Lévy):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0.$$

Validez

Sólo son válidas para materiales con comportamiento elástico, lineal, homogéneo e isótropo siempre y cuando las deformaciones sean pequeñas.

- En su deducción se empleó la Ley de Hooke.

Ejercicio

Código: 05_02_07_ejemplo.py

Considere una condición de tensión plana, en la cual $\varepsilon_x(x, y) = a(x^2 + y^2)$ y $\gamma_{x,y}(x, y) = 2xy$, donde a es una constante. Encuentre la deformación longitudinal $\varepsilon_y(x, y)$ correspondiente que sea físicamente válida, asumiendo una condición en la cual las fuerzas másicas se consideran nulas y que el material es elástico, lineal, homogéneo e isótropo.

Derrotero

Condiciones de frontera

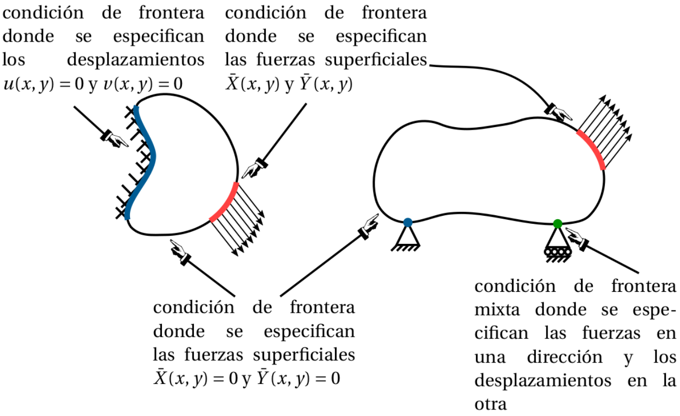
Las condiciones de frontera describen, por ejemplo, la forma como está soportado el sólido o las cargas superficiales aplicadas, y esto se modela matemáticamente definiendo ya sea los desplazamientos o los esfuerzos en los puntos del contorno del sólido.

Condición de frontera escencial

(de desplazamiento o cinemática) se especifican los desplazamientos.

Condición de frontera natural

(de fuerza o esfuerzo) describe los esfuerzos en el contorno del sólido.

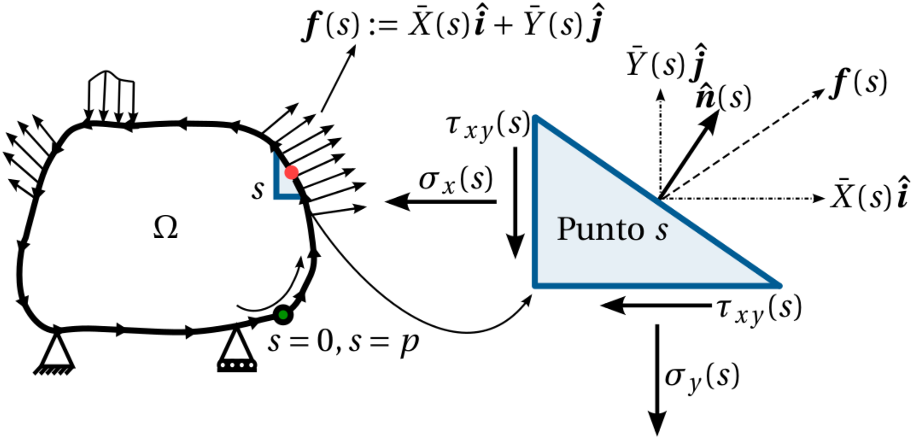


Derrotero

Condiciones de equilibrio en la frontera

- ¿Qué pasa en la frontera del sólido?
- ¿De qué forma las fuerzas superficiales se convierten en esfuerzos en el interior del sólido?

Análisis en dos dimensiones



Análisis en dos dimensiones

Partiendo de la ecuación de Cauchy (2.3) que nos permite analizar no solo los esfuerzos en el interior del sólido, sino también las condiciones en la frontera:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{n}}}$$

Parametrizando y relacionando con las fuerzas superficiales $\boldsymbol{f}$:

Ecuaciones de equilibrio externo bidimensionales

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{X}(s) \\ \bar{Y}(s) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{f}(s)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x(s) & \tau_{xy}(s) \\ \tau_{xy}(s) & \sigma_y(s) \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha(s) \\ \beta(s) \end{pmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{n}}(s)}$$

Se relacionan las cargas superficiales con la forma de la frontera y los esfuerzos en el interior del sólido para un punto $s \in \delta\Omega$.

Análisis en dos dimensiones

Partiendo de la ecuación de Cauchy (2.3) que nos permite analizar no solo los esfuerzos en el interior del sólido, sino también las condiciones en la frontera:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{n}}}$$

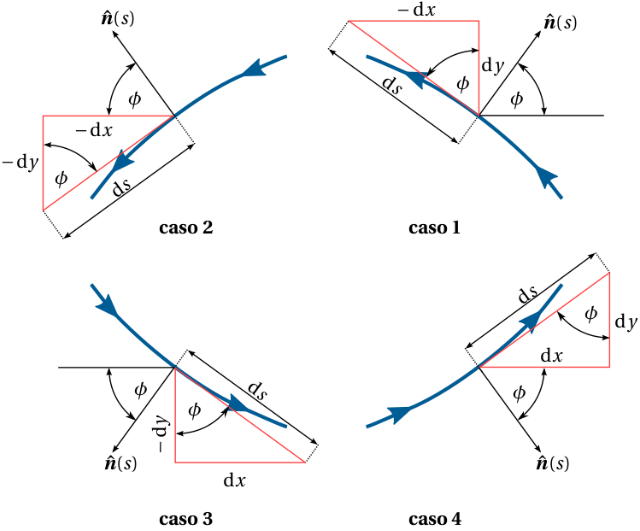
Parametrizando y relacionando con las fuerzas superficiales $\boldsymbol{f}$:

Ecuaciones de equilibrio externo bidimensionales

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{X}(s) \\ \bar{Y}(s) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{f}(s)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x(s) & \tau_{xy}(s) \\ \tau_{xy}(s) & \sigma_y(s) \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha(s) \\ \beta(s) \end{pmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{n}}(s)}$$

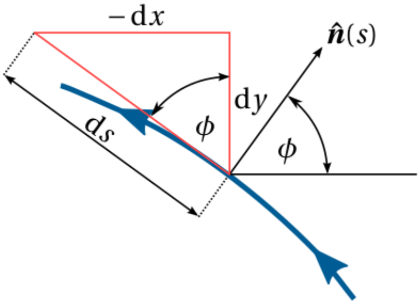
Se relacionan las cargas superficiales con la forma de la frontera y los esfuerzos en el interior del sólido para un punto $s \in \delta\Omega$.

Análisis en dos dimensiones



Análisis en dos dimensiones

Caso 1: (*i cuadrante*)



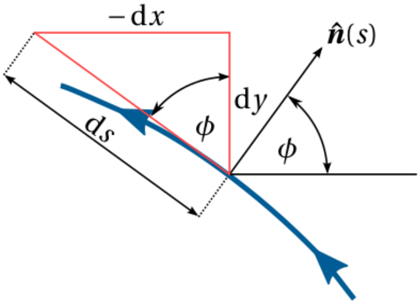
$\hat{\boldsymbol{n}} := \left[\cos\phi, \cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)\right]^T$, por lo tanto:

$$\alpha = \cos\phi = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right) = \sin\phi = -\frac{dx}{ds}$$

Análisis en dos dimensiones

Caso 1: (*i cuadrante*)



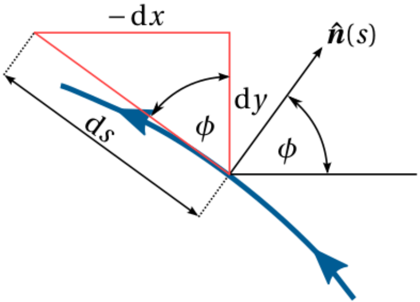
$\hat{\boldsymbol{n}} := \left[\cos\phi, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\right]^T$, por lo tanto:

$$\alpha = \cos\phi = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin\phi = -\frac{dx}{ds}$$

Análisis en dos dimensiones

Caso 1: (*i cuadrante*)



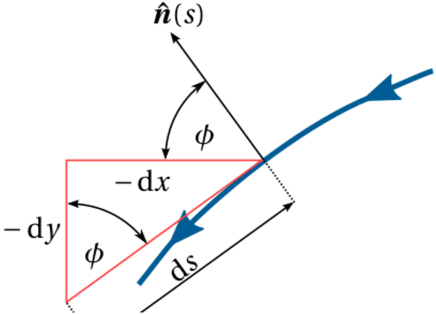
$\hat{\boldsymbol{n}} := \left[\cos\phi, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\right]^T$, por lo tanto:

$$\alpha = \cos\phi = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin\phi = -\frac{dx}{ds}$$

Análisis en dos dimensiones

Caso 2: (*ii cuadrante*)



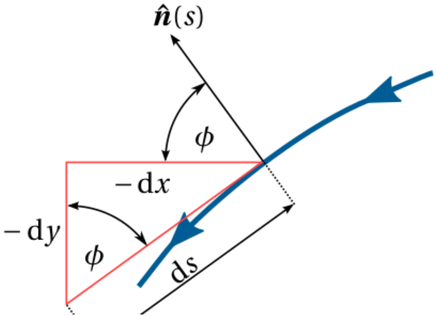
$\hat{\boldsymbol{n}} := \left[\cos(\pi - \phi), \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\right]^T$, por lo tanto:

$$\alpha = \cos(\pi - \phi) = -\cos\phi = \frac{-dy}{-ds} = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin\phi = -\frac{dx}{ds}$$

Análisis en dos dimensiones

Caso 2: (*ii cuadrante*)



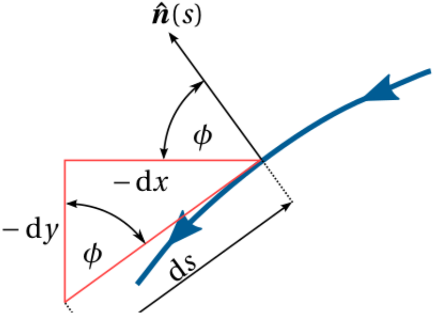
$\hat{\boldsymbol{n}} := \left[\cos(\pi-\phi), \cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)\right]^T$, por lo tanto:

$$\alpha = \cos(\pi-\phi) = -\cos\phi = \frac{-dy}{-ds} = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right) = \sin\phi = -\frac{dx}{ds}$$

Análisis en dos dimensiones

Caso 2: (*ii cuadrante*)



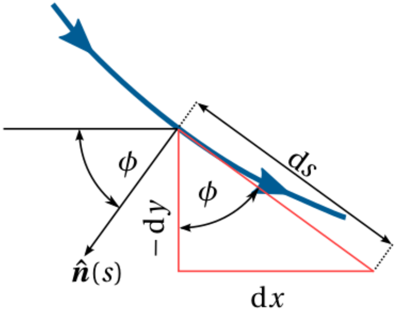
$\hat{\boldsymbol{n}} := \left[\cos(\pi-\phi), \cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)\right]^T$, por lo tanto:

$$\alpha = \cos(\pi-\phi) = -\cos\phi = \frac{-dy}{-ds} = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right) = \sin\phi = -\frac{dx}{ds}$$

Análisis en dos dimensiones

Caso 3: (*iii cuadrante*)



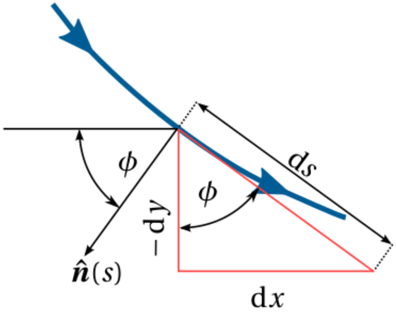
$\hat{\boldsymbol{n}} := \left[\cos(\pi+\phi), \cos\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)\right]^T$, por lo tanto:

$$\alpha = \cos(\pi+\phi) = -\cos\phi = \frac{-dy}{ds} = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right) = -\sin\phi = -\frac{dx}{ds}$$

Análisis en dos dimensiones

Caso 3: (*iii cuadrante*)



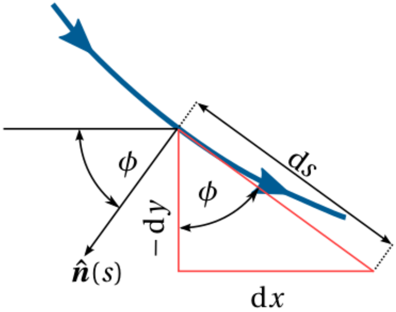
$\hat{\boldsymbol{n}} := \left[\cos(\pi + \phi), \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)\right]^T$, por lo tanto:

$$\alpha = \cos(\pi + \phi) = -\cos\phi = \frac{-dy}{ds} = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = -\sin\phi = -\frac{dx}{ds}$$

Análisis en dos dimensiones

Caso 3: (*iii cuadrante*)



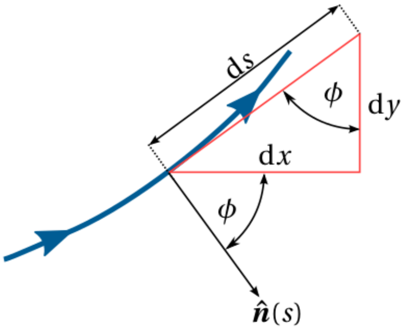
$\hat{\boldsymbol{n}} := \left[\cos(\pi+\phi), \cos\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)\right]^T$, por lo tanto:

$$\alpha = \cos(\pi+\phi) = -\cos\phi = \frac{-dy}{ds} = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right) = -\sin\phi = -\frac{dx}{ds}$$

Análisis en dos dimensiones

Caso 4: (*iv cuadrante*)



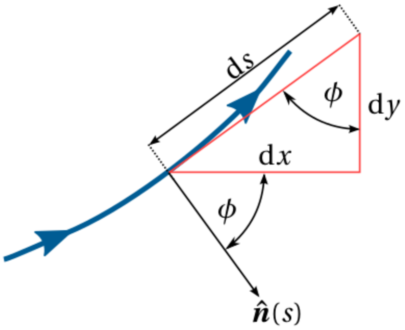
$\hat{\boldsymbol{n}} := \left[\cos(2\pi - \phi), \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \phi\right)\right]^T$, por lo tanto:

$$\alpha = \cos(2\pi - \phi) = \cos\phi = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \phi\right) = -\sin\phi = -\frac{dx}{ds}$$

Análisis en dos dimensiones

Caso 4: (*iv cuadrante*)



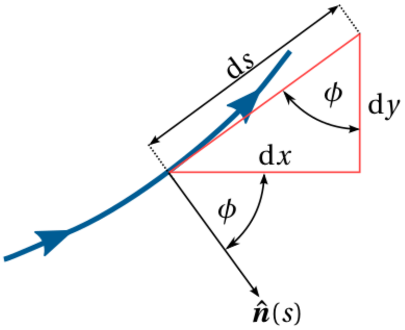
$\hat{\boldsymbol{n}} := \left[\cos(2\pi - \phi), \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \phi\right)\right]^T$, por lo tanto:

$$\alpha = \cos(2\pi - \phi) = \cos\phi = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \phi\right) = -\sin\phi = -\frac{dx}{ds}$$

Análisis en dos dimensiones

Caso 4: (*iv cuadrante*)



$\hat{\boldsymbol{n}} := \left[\cos(2\pi - \phi), \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \phi\right)\right]^T$, por lo tanto:

$$\alpha = \cos(2\pi - \phi) = \cos\phi = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \phi\right) = -\sin\phi = -\frac{dx}{ds}$$

Análisis en dos dimensiones

Vector normal y unitario al contorno (bidimensional)

$$\hat{\boldsymbol{n}} := \left[\frac{dy(s)}{ds}, -\frac{dx(s)}{ds}\right]$$

- $\forall (x(s), y(s)) \in \delta\Omega$
- se deduce que las componentes del vector $\hat{\boldsymbol{n}}$ están relacionadas con la geometría del sólido
- Esta ecuación es válida únicamente cuando la curva $(x(s), y(s))$ esté parametrizada con respecto a la longitud de arco

Análisis en tres dimensiones

Haciendo un análisis similar al propuesto para el caso bidimensional:

Ecuaciones de equilibrio externo tridimensionales

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{X}(\boldsymbol{x}) \\ \bar{Y}(\boldsymbol{x}) \\ \bar{Z}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{f}(x,y,z)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x(\boldsymbol{x}) & \tau_{xy}(\boldsymbol{x}) & \tau_{xz}(\boldsymbol{x}) \\ \tau_{xy}(\boldsymbol{x}) & \sigma_y(\boldsymbol{x}) & \tau_{yz}(\boldsymbol{x}) \\ \tau_{xz}(\boldsymbol{x}) & \tau_{yz}(\boldsymbol{x}) & \sigma_z(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{x})} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha(\boldsymbol{x}) \\ \beta(\boldsymbol{x}) \\ \gamma(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})}$$

- $\forall (x, y, z) \in \delta\Omega$
- Relaciona las cargas superficiales con la geometría de las fronteras del sólido y con los esfuerzos internos.
- En tres dimensiones no es posible describir la frontera como una curva paramétrica.

Derrotero

Equilibrio estático

Un cuerpo se encuentra en **equilibrio estático** cuando:

$$\boldsymbol{f}_{masicas} + \boldsymbol{f}_{superficiales} = 0 \qquad \boldsymbol{m}_{masicas} + \boldsymbol{m}_{superficiales} = 0;$$

Acciones producidas por las **fuerzas másicas**:

$$\boldsymbol{f}_{masicas} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})dV \qquad \boldsymbol{m}_{masicas} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})dV;$$

Acciones producidas por las **fuerzas superficiales**:

$$\boldsymbol{f}_{superficiales} = \oiint_{\delta\Omega} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})dS \qquad \boldsymbol{m}_{superficiales} = \oiint_{\delta\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})dS.$$

Equilibrio estático

Un cuerpo se encuentra en **equilibrio estático** cuando:

$$\boldsymbol{f}_{masicas} + \boldsymbol{f}_{superficiales} = 0 \qquad \boldsymbol{m}_{masicas} + \boldsymbol{m}_{superficiales} = 0;$$

Acciones producidas por las **fuerzas másicas**:

$$\boldsymbol{f}_{masicas} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})dV \qquad \boldsymbol{m}_{masicas} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})dV;$$

Acciones producidas por las **fuerzas superficiales**:

$$\boldsymbol{f}_{superficiales} = \oiint_{\delta\Omega} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})dS \qquad \boldsymbol{m}_{superficiales} = \oiint_{\delta\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})dS.$$

Equilibrio estático

Un cuerpo se encuentra en **equilibrio estático** cuando:

$$\boldsymbol{f}_{masicas} + \boldsymbol{f}_{superficiales} = 0 \qquad \boldsymbol{m}_{masicas} + \boldsymbol{m}_{superficiales} = 0;$$

Acciones producidas por las **fuerzas másicas**:

$$\boldsymbol{f}_{masicas} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})dV \qquad \boldsymbol{m}_{masicas} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})dV;$$

Acciones producidas por las **fuerzas superficiales**:

$$\boldsymbol{f}_{superficiales} = \oiint_{\delta\Omega} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})dS \qquad \boldsymbol{m}_{superficiales} = \oiint_{\delta\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})dS.$$

Equilibrio estático

Un cuerpo se encuentra en **equilibrio estático** cuando:

$$\boldsymbol{f}_{masicas} + \boldsymbol{f}_{superficiales} = 0 \qquad \boldsymbol{m}_{masicas} + \boldsymbol{m}_{superficiales} = 0;$$

Acciones producidas por las **fuerzas másicas**:

$$\boldsymbol{f}_{masicas} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})dV \qquad \boldsymbol{m}_{masicas} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})dV;$$

Acciones producidas por las **fuerzas superficiales**:

$$\boldsymbol{f}_{superficiales} = \oiint_{\delta\Omega} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})dS \qquad \boldsymbol{m}_{superficiales} = \oiint_{\delta\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})dS.$$

Equilibrio estático

Un cuerpo se encuentra en **equilibrio estático** cuando:

$$\boldsymbol{f}_{masicas} + \boldsymbol{f}_{superficiales} = 0 \qquad \boldsymbol{m}_{masicas} + \boldsymbol{m}_{superficiales} = 0;$$

Acciones producidas por las **fuerzas másicas**:

$$\boldsymbol{f}_{masicas} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})dV \qquad \boldsymbol{m}_{masicas} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})dV;$$

Acciones producidas por las **fuerzas superficiales**:

$$\boldsymbol{f}_{superficiales} = \oint\!\!\oint_{\delta\Omega} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})dS \qquad \boldsymbol{m}_{superficiales} = \oint\!\!\oint_{\delta\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})dS.$$

Equilibrio estático

Un cuerpo se encuentra en **equilibrio estático** cuando:

$$\boldsymbol{f}_{masicas} + \boldsymbol{f}_{superficiales} = 0 \qquad \boldsymbol{m}_{masicas} + \boldsymbol{m}_{superficiales} = 0;$$

Acciones producidas por las **fuerzas másicas**:

$$\boldsymbol{f}_{masicas} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) dV \qquad \boldsymbol{m}_{masicas} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) dV;$$

Acciones producidas por las **fuerzas superficiales**:

$$\boldsymbol{f}_{superficiales} = \oiint_{\delta\Omega} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) dS \qquad \boldsymbol{m}_{superficiales} = \oiint_{\delta\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) dS.$$

Equilibrio estático

En conclusión, como tenemos equilibrio estático, resulta que:

$$\iiint_{\Omega} \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})dV + \oiint_{\delta\Omega} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})dS = 0$$

$$\iiint_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})dV + \oiint_{\delta\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})dS = 0$$

Tenga en cuenta que las integrales $\oiint$ son integrales de contorno, que se efectúan sobre toda la "piel" de Ω, es decir, sobre $\delta\Omega$.

Equilibrio estático

Particularización para el caso bidimensional

La ecuación (5.26a) (equilibrio de fuerzas):

$$\iint_{\Omega} X(\boldsymbol{x})dA + \oint_{\delta\Omega} \bar{X}(\boldsymbol{s})ds = 0$$
$$\iint_{\Omega} Y(\boldsymbol{x})dA + \oint_{\delta\Omega} \bar{Y}(\boldsymbol{s})ds = 0$$

La ecuación (5.26b) (equilibrio de momentos):

$$\iint_{\Omega} \left(xY(\boldsymbol{x}) - yX(\boldsymbol{x})\right) dA + \oint_{\delta\Omega} \left(x(s)\bar{Y}(s) - y(s)\bar{X}(s)\right) ds = 0$$

Equilibrio estático

Particularización para el caso bidimensional

La ecuación (5.26a) (equilibrio de fuerzas):

$$\iint_{\Omega} X(\boldsymbol{x})dA + \oint_{\delta\Omega} \bar{X}(\boldsymbol{s})ds = 0$$
$$\iint_{\Omega} Y(\boldsymbol{x})dA + \oint_{\delta\Omega} \bar{Y}(\boldsymbol{s})ds = 0$$

La ecuación (5.26b) (equilibrio de momentos):

$$\iint_{\Omega} (xY(\boldsymbol{x}) - yX(\boldsymbol{x}))\, dA + \oint_{\delta\Omega} \left(x(s)\bar{Y}(s) - y(s)\bar{X}(s)\right) ds = 0$$

Equilibrio estático

Particularización para el caso bidimensional

La ecuación (5.26a) (equilibrio de fuerzas):

$$\iint_{\Omega} X(\boldsymbol{x})dA + \oint_{\delta\Omega} \bar{X}(\boldsymbol{s})ds = 0$$
$$\iint_{\Omega} Y(\boldsymbol{x})dA + \oint_{\delta\Omega} \bar{Y}(\boldsymbol{s})ds = 0$$

La ecuación (5.26b) (equilibrio de momentos):

$$\iint_{\Omega} \left(xY(\boldsymbol{x}) - yX(\boldsymbol{x})\right) dA + \oint_{\delta\Omega} \Big(x(s)\bar{Y}(s) - y(s)\bar{X}(s)\Big)\, ds = 0$$

Equilibrio estático

Ecuaciones integrales de equilibrio

Ecuaciones integrales de equilibrio (postulado de Cauchy)

Sea un sólido Ω el cual está sujeto a unas fuerzas másicas y de superficie representadas por los campos vectoriales $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{f}$, respectivamente. Entonces cada subdominio V de un sólido Ω, es decir, cada $V \subseteq \Omega$ satisface las siguientes ecuaciones de equilibrio

$$\iiint_V \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})dV + \oiint_{\delta V} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})dS = 0$$

$$\iiint_V \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})dV + \oiint_{\delta V} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})dS = 0$$

- $\boldsymbol{x} := [x, y, z]^T \in V$
- Tienen como dominio $V \subseteq \Omega$ (5.29), por lo que son ecuaciones más generales que las vistas anteriormente (5.26).

Derrotero

5.6. Un enfoque alternativo para deducir las ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio

Recordemos las EDPs de equilibrio:

$$\mathrm{div}\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = 0$$

Primer enfoque

Al hacer sumatorias de fuerzas en un elemento diferencial de sólido.

Recordemos la primera EDPs de equilibrio tridimensional:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

Segundo enfoque

Cualquier subconjunto V del sólido Ω está en equilibrio de fuerzas, tal y como lo dicen las **ecuaciones integrales de equilibrio** (5.29)

5.6. Un enfoque alternativo para deducir las ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio

Recordemos las EDPs de equilibrio:

$$\mathrm{div}\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = 0$$

Primer enfoque

Al hacer sumatorias de fuerzas en un elemento diferencial de sólido.

Recordemos la primera EDPs de equilibrio tridimensional:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

Segundo enfoque

Cualquier subconjunto V del sólido Ω está en equilibrio de fuerzas, tal y como lo dicen las **ecuaciones integrales de equilibrio** (5.29)

5.6. Un enfoque alternativo para deducir las ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio

Recordemos las EDPs de equilibrio:

$$\mathrm{div}\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = 0$$

Primer enfoque

Al hacer sumatorias de fuerzas en un elemento diferencial de sólido.

Recordemos la primera EDPs de equilibrio tridimensional:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

Segundo enfoque

Cualquier subconjunto V del sólido Ω está en equilibrio de fuerzas, tal y como lo dicen las **ecuaciones integrales de equilibrio** (5.29)

5.6. Un enfoque alternativo para deducir las ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio

Recordemos las EDPs de equilibrio:

$$\text{div}\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \boldsymbol{b} = 0$$

Primer enfoque

Al hacer sumatorias de fuerzas en un elemento diferencial de sólido.

Recordemos la primera EDPs de equilibrio tridimensional:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

Segundo enfoque

Cualquier subconjunto V del sólido Ω está en equilibrio de fuerzas, tal y como lo dicen las **ecuaciones integrales de equilibrio** (5.29)

Un enfoque alternativo para deducir las ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio

Procedimiento:

$$\iiint_V \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})dV + \oiint_{\delta V} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}\hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})dS = 0$$

Tomando la primera ecuación integral

$$\iiint_V X(\boldsymbol{x})dV + \oiint_{\delta V} \begin{bmatrix} \sigma_x(\boldsymbol{x}) \\ \tau_{xy}(\boldsymbol{x}) \\ \tau_{xz}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})dS = 0$$

Aplicando el teorema de la divergencia

$$\iiint_V X(\boldsymbol{x})dV + \iiint_V \operatorname{div}\left(\left[\sigma_x(\boldsymbol{x}), \tau_{xy}(\boldsymbol{x}), \tau_{xz}(\boldsymbol{x})\right]^T\right) dV = 0$$

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X\right) dV = 0$$

Un enfoque alternativo para deducir las ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio

Como esta ecuación es válida para todo $V \subseteq \Omega$ (es decir, cualquier parte V del sólido Ω puede ser escogida), entonces deducimos que el integrando es cero (0), y por lo tanto:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

Pregunta de control 12, sección 5.15

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función que se integra sobre una región V y supongamos que su integral vale cero para todo $V \subseteq \Omega$, es decir, $\int_V f(x)dx = 0 \ \forall \ V \subseteq \Omega$; esto implica que $f(x) = 0 \ \forall \ x \in \Omega$

Un enfoque alternativo para deducir las ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio

Como esta ecuación es válida para todo $V \subseteq \Omega$ (es decir, cualquier parte V del sólido Ω puede ser escogida), entonces deducimos que el integrando es cero (0), y por lo tanto:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

Pregunta de control 12, sección 5.15

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función que se integra sobre una región V y supongamos que su integral vale cero para todo $V \subseteq \Omega$, es decir, $\int_V f(x)dx = 0 \ \forall \ V \subseteq \Omega$; esto implica que $f(x) = 0 \ \forall \ x \in \Omega$

Derrotero

Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones

Caso bidimensional

$$\varepsilon_x(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \rightarrow \partial u(x,y) = \varepsilon_x(x,y)\partial x \qquad \rightarrow u(x,y) = \int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)$$

$$\varepsilon_y(x,y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \rightarrow \partial v(x,y) = \varepsilon_y(x,y)\partial x \qquad \rightarrow v(x,y) = \int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)$$

Reemplazando en $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\gamma_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)\right)$$

Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones

Caso bidimensional

$$\varepsilon_x(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \rightarrow \partial u(x,y) = \varepsilon_x(x,y)\partial x \qquad \rightarrow u(x,y) = \int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)$$

$$\varepsilon_y(x,y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \rightarrow \partial v(x,y) = \varepsilon_y(x,y)\partial x \qquad \rightarrow v(x,y) = \int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)$$

Reemplazando en $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\gamma_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)\right)$$

Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones

Caso bidimensional

$$\varepsilon_x(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \rightarrow \partial u(x,y) = \varepsilon_x(x,y)\partial x \quad \rightarrow u(x,y) = \int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)$$

$$\varepsilon_y(x,y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \rightarrow \partial v(x,y) = \varepsilon_y(x,y)\partial x \quad \rightarrow v(x,y) = \int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)$$

Reemplazando en $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\gamma_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)\right)$$

Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones

Caso bidimensional

$$\varepsilon_x(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \to \partial u(x,y) = \varepsilon_x(x,y)\partial x \qquad \to u(x,y) = \int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)$$

$$\varepsilon_y(x,y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \to \partial v(x,y) = \varepsilon_y(x,y)\partial x \qquad \to v(x,y) = \int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)$$

Reemplazando en $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\gamma_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)\right)$$

Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones

Caso bidimensional

$$\varepsilon_x(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \to \partial u(x,y) = \varepsilon_x(x,y)\partial x \qquad \to u(x,y) = \int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)$$

$$\varepsilon_y(x,y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \to \partial v(x,y) = \varepsilon_y(x,y)\partial x \qquad \to v(x,y) = \int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)$$

Reemplazando en $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\gamma_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)\right)$$

Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones

Caso bidimensional

$$\varepsilon_x(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \rightarrow \partial u(x,y) = \varepsilon_x(x,y)\partial x \qquad \rightarrow u(x,y) = \int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)$$

$$\varepsilon_y(x,y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \rightarrow \partial v(x,y) = \varepsilon_y(x,y)\partial x \qquad \rightarrow v(x,y) = \int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)$$

Reemplazando en $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\gamma_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)\right)$$

Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones

Caso bidimensional

$$\varepsilon_x(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \rightarrow \partial u(x,y) = \varepsilon_x(x,y)\partial x \qquad \rightarrow u(x,y) = \int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)$$

$$\varepsilon_y(x,y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \rightarrow \partial v(x,y) = \varepsilon_y(x,y)\partial x \qquad \rightarrow v(x,y) = \int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)$$

Reemplazando en $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\gamma_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int \varepsilon_x(x',y)dx' + f(y)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int \varepsilon_y(x,y')dy' + g(x)\right)$$

Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones

Caso bidimensional

Organizando términos:

$$\frac{df(y)}{dy} + \frac{dg(x)}{dx} = \gamma_{xy}(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int \varepsilon_x(x',y)dx'\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\int \varepsilon_y(x,y')dy'\right).$$

El desplazamiento depende de dos funciones $f(y)$ y $g(x)$; encontrarlas requiere de cierta pericia en el cálculo de la solución, ya que estas dos funciones contienen términos asociados a los desplazamientos y rotaciones rígidas del sólido.

Ejemplo

Encontrando los desplazamientos asociados al desplazamiento y la rotación rígida

Ni el desplazamiento ni la rotación rígida producen deformaciones longitudinales o angulares en el sólido, es decir:

$$\varepsilon_x(x,y) = \varepsilon_{x,y} = \gamma_{xy}(x,y) = 0 \ \forall \ (x,y) \in \Omega$$

Obtenemos que los desplazamientos vendrán dados por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ obtenemos } u(x,y) = c_1 + f(y)$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ obtenemos } v(x,y) = c_2 + g(x)$$

Reemplazando en $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$, resulta:

$$\gamma_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(c_1 + f(y)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(c_2 + g(x)\right) = \frac{df(y)}{dy} + \frac{dg(x)}{dx} = 0$$

Ejemplo

Encontrando los desplazamientos asociados al desplazamiento y la rotación rígida

La ecuación anterior se puede descomponer en dos ecuaciones diferenciales a saber:

$$\frac{df(y)}{dy} + \omega_0 = 0 \qquad \frac{dg(x)}{dx} - \omega_0 = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones:

$$f(y) = -\omega_0 y + d_1 \qquad g(x) = \omega_0 x + d_2$$

Reemplazando en (eq 5.32)

$$u(x,y) = c_1 + d_1 - \omega_0 y \qquad v(x,y) = c_2 + d_2 + \omega_0 x$$

Haciendo $u_0 = c_1 + d_1$ y $v_0 = c_2 + d_2$ obtenemos:

Ejemplo

Encontrando los desplazamientos asociados al desplazamiento y la rotación rígida

Los desplazamientos asociados a la rotación y al desplazamiento rígido en las direcciones x y y están dados, respectivamente, por:

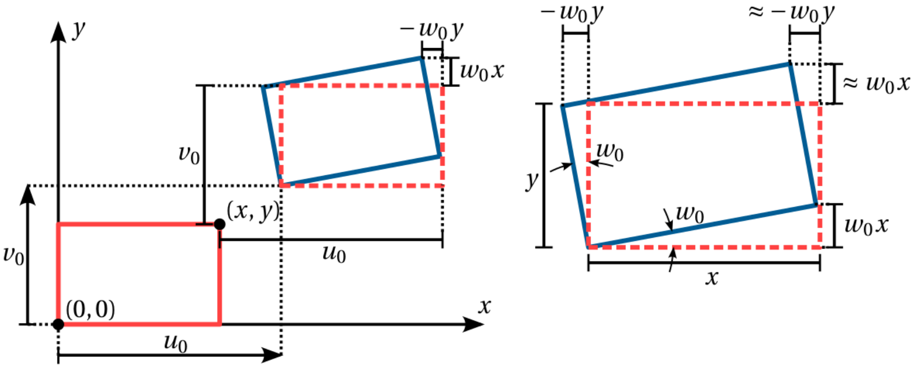
$$u(x, y) = u_0 - \omega_0 y \qquad v(x, y) = v_0 + \omega_0 x;$$

Donde:

- u_0, v_0 representan el desplazamiento rígido en las direcciones x y y, respectivamente.
- ω_0 representa, para ángulos pequeños, el ángulo de rotación rígida del sólido en radianes.

Ejemplo

Encontrando los desplazamientos asociados al desplazamiento y la rotación rígida



Derrotero

Función de tensión de Airy

Uso

Se utiliza en mecánica de sólidos para deducir analíticamente muchas condiciones de esfuerzo presentes en sólidos con ciertas geometrías *bidimensionales*.

Método

Se asume una función de tensión ϕ que depende de unos coeficientes desconocidos y que satisfagan un operador llamado *el biarmónico*; luego, se estima el campo vectorial de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos y a partir de las condiciones de frontera, se estima el valor de los coeficientes desconocidos.

No existen las funciones de tensión de Airy para el caso tridimensional

Función de tensión de Airy

Uso

Se utiliza en mecánica de sólidos para deducir analíticamente muchas condiciones de esfuerzo presentes en sólidos con ciertas geometrías *bidimensionales*.

Método

Se asume una función de tensión ϕ que depende de unos coeficientes desconocidos y que satisfagan un operador llamado *el biarmónico*; luego, se estima el campo vectorial de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos y a partir de las condiciones de frontera, se estima el valor de los coeficientes desconocidos.

No existen las funciones de tensión de Airy para el caso tridimensional

Función de tensión de Airy

Uso

Se utiliza en mecánica de sólidos para deducir analíticamente muchas condiciones de esfuerzo presentes en sólidos con ciertas geometrías *bidimensionales*.

Método

Se asume una función de tensión ϕ que depende de unos coeficientes desconocidos y que satisfagan un operador llamado *el biarmónico*; luego, se estima el campo vectorial de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos y a partir de las condiciones de frontera, se estima el valor de los coeficientes desconocidos.

No existen las funciones de tensión de Airy para el caso tridimensional

Función de tensión de Airy

Uso

Se utiliza en mecánica de sólidos para deducir analíticamente muchas condiciones de esfuerzo presentes en sólidos con ciertas geometrías *bidimensionales*.

Método

Se asume una función de tensión ϕ que depende de unos coeficientes desconocidos y que satisfagan un operador llamado *el biarmónico*; luego, se estima el campo vectorial de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos y a partir de las condiciones de frontera, se estima el valor de los coeficientes desconocidos.

No existen las funciones de tensión de Airy para el caso tridimensional

Función de tensión de Airy

Sea $V(x, y)$ una función tal que:

$$X(x, y) = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial x}$$
$$Y(x, y) = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial y}$$

y hágase

$$\sigma_x(x, y) = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} + V(x, y)$$
$$\sigma_y(x, y) = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} + V(x, y)$$
$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Función de tensión de Airy

$$X(x,y) = -\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}$$
$$Y(x,y) = -\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}$$

$$\sigma_x(x,y) = \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial y^2} + V(x,y)$$
$$\sigma_y(x,y) = \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x^2} + V(x,y)$$
$$\tau_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x \partial y}$$

- $\boldsymbol{b} = -\nabla V$donde $\boldsymbol{b} = [X, Y]^T$
- V pertenece a un tipo especial de funciones conocidas como **funciones potenciales escalares**.
- ϕ se conoce como **la función de tensión de Airy** (*Airy stress function*).

- George Bidell Airy (1801-1892) en 1862, matemático y astrónomo inglés.

Función de tensión de Airy

Recordemos:

- Las ecuaciones diferenciales de equilibrio (5.1)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

- La ecuación de compatibilidad general (5.13)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Si reemplazamos las ecuaciones (5.36) y (5.37) en las ecuaciones diferenciales de equilibrio (5.1), veremos que la función de tensión de Airy satisface dichas ecuaciones (es decir, obtendremos $0 = 0$).

Función de tensión de Airy

Calculamos derivadas:

- Para $\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + V$:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

- Para $\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V$:

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

- Para las fuerzas másicas $X = -\frac{\partial V}{\partial x}$ y $Y = -\frac{\partial V}{\partial y}$:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

Función de tensión de Airy

Reemplazamos (5.36), (5.37a) y (5.37b) en la ecuación de compatibilidad (5.13) aplicando derivadas, llegamos a:

$$\underbrace{\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4}}_{\nabla^4 \phi} = K_2 \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}_{\nabla^2 V}$$

donde

$$K_2 := -2 - K_1 = \begin{cases} \nu - 1 & \text{para el caso de } \textbf{tensión plana} \\ -\dfrac{1-2\nu}{1-\nu} & \text{para el caso de } \textbf{deformación plana} \end{cases}$$

En notación tensorial:

$$\phi_{,1111} + 2\phi_{,1212} + \phi_{,2222} = K_2(V_{,11} + V_{,22})$$

Función de tensión de Airy

La ecuación anterior de forma compacta:

$$\nabla^4\phi = K_2\nabla^2 V$$

- Tiene la forma de las **ecuaciones biarmónicas**
- A sus soluciones se les conoce como **funciones biarmónicas**
- $\nabla^4\phi$ se llama **biarmónico** de ϕ
- $\nabla^2 V$ se le llama **laplaciano** de la función V.
- V es una **función potencial**.

$\nabla^4\phi = \nabla^2(\nabla^2)\phi$:

$$\underbrace{\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}}_{\nabla^4\phi} = \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)}_{\nabla^2(\nabla^2\phi)}$$

Función de tensión de Airy

¿Y si las fuerzas másicas son constantes?

$$\nabla^4 \phi = 0$$

La distribución de tensiones es la misma para el estado de tensión plana y para el estado de deformación plana.

Cuando la fuerza másica resultante se reduce al peso propio tenemos que la función potencial V es

$$V = \rho g y$$

y por lo tanto,

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\rho g,$$

Las ecuaciones (5.37) se reducen a

$$\sigma_x = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \rho g y \qquad \sigma_y = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \rho g y \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional

- Parametrización de las fuerzas superficiales:

$$\bar{X}(s) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + V(s)\frac{dy(s)}{ds} \qquad \bar{Y}(s) = -\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + V(s)\frac{dx(s)}{ds}\right)$$

- Variación de la función de tensión de Airy (5.50):

$$\frac{\partial \phi\left(x(s), y(s)\right)}{\partial y} = \int \left(\bar{X}(s) - V(s)\alpha(s)\right) ds + C_1$$
$$\frac{\partial \phi\left(x(s), y(s)\right)}{\partial x} = -\int \left(\bar{Y}(s) - V(s)\beta(s)\right) ds + C_2$$

Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional

- Haciendo $V = 0$ con el objeto de no considerar los esfuerzos producidos por las fuerzas másicas, resulta (5.53):

$$\phi\left(x(s), y(s)\right) = x(s)\frac{\partial \phi}{\partial x} + y(s)\frac{\partial \phi}{\partial y} - \int \left(y(s)\bar{X}(s) - x(s)\bar{Y}(s)\right) ds + C$$

Conclusión

Determinar la distribución de tensiones

El problema para determinar la distribución de tensiones en un problema bidimensional, cuando no se tiene en cuenta la fuerza másica y se utiliza el enfoque de Airy, se reduce a encontrar la función ϕ que cumple en todo punto interior al contorno, la ecuación (5.46, $\nabla^4\phi = 0$), sujeto a las condiciones de frontera (5.50) y (5.53)

Derrotero

Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

Motivación

Las EDPs de equilibrio junto con las EDPs de compatibilidad nos permitieron calcular el esfuerzo y la deformación en todos los puntos del sólido. Sin embargo, si queremos calcular directamente los desplazamientos de las diferentes partículas de nuestro sólido, se requiere resolver el problema de un modo alternativo, utilizando las llamadas *ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier*

- Claude Louis Hneri Navier (1785 - 1836), matemático, físico e ingeniero civil francés.

Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

Recordemos las EDPs de equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial z} + X(x,y,z) = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial z} + Y(x,y,z) = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xz}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(x,y,z)}{\partial z} + Z(x,y,z) = 0$$

Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

La **ley de Hooke** (4.14) reemplazando las deformaciones longitudinales (3.12) y angualres (3.14) por su significado correspondiente:

$$\sigma_x = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2G\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \tau_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_y = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2G\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \tau_{xz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_z = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2G\frac{\partial w}{\partial z} \qquad \tau_{yz} = G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

Reemplazando en la primera EDPs de equilibrio:

$$(\lambda + G)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + X = 0$$

Siguiendo el mismo procedimiento en la dirección y y en la dirección z, deducimos:

$$(\lambda + G)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + G\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + Y = 0$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + G\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + Z = 0$$

Estas son las llamadas ecuaciones de Cauchy-Navier

Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

Dos notaciones:

- Notación vectorial

$$(\lambda + G)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + G\nabla^2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

- Notación tensorial

$$(\lambda + G)u_{j,ij} + Gu_{i,jj} + b_i = 0$$

Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

Dos notaciones:

- Notación vectorial

$$(\lambda + G)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + G\nabla^2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

- Notación tensorial

$$(\lambda + G)u_{j,ij} + Gu_{i,jj} + b_i = 0$$

Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

Dos notaciones:

- Notación vectorial

$$(\lambda + G)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + G\nabla^2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

- Notación tensorial

$$(\lambda + G)u_{j,ij} + Gu_{i,jj} + b_i = 0$$

Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

Ecuacioens de Cauchy-Navier

$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial x} + G\nabla^2 u + X = 0$$
$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial y} + G\nabla^2 v + Y = 0$$
$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial z} + G\nabla^2 w + Z = 0$$

- Estas ecuaciones son solamente válidas para sólidos hechos con materiales elásticos, lineales, isótropos y homogéneos.

- En notación vectorial

$$(\lambda + G)\nabla e + G\nabla^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

Ecuacioens de Cauchy-Navier

$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial x} + G\nabla^2 u + X = 0$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial y} + G\nabla^2 v + Y = 0$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial z} + G\nabla^2 w + Z = 0$$

- Estas ecuaciones son solamente válidas para sólidos hechos con materiales elásticos, lineales, isótropos y homogéneos.

- En notación vectorial

$$(\lambda + G)\nabla e + G\nabla^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

La solución de las ecuaciones de Navier requiere también plantear unas condiciones de frontera:

1. Especificar las deformaciones o los desplazamientos.
2. Especificar los esfuerzos en términos de los desplazamientos (ley de Hooke)

$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\begin{bmatrix} \lambda e & 0 & 0 \\ 0 & \lambda e & 0 \\ 0 & 0 & \lambda e \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \right)}_{\underline{\underline{\sigma}}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

3. Especificar condiciones mixtas.

Las ecuaciones de Navier (5.57) junto con las condiciones en la frontera definen completamente las tres componentes del desplazamiento u, v y w.

Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

La solución de las ecuaciones de Navier requiere también plantear unas condiciones de frontera:

1. Especificar las deformaciones o los desplazamientos.
2. Especificar los esfuerzos en términos de los desplazamientos (ley de Hooke)

$$\begin{bmatrix}\bar{X}\\ \bar{Y}\\ \bar{Z}\end{bmatrix} = \underbrace{\left(\begin{bmatrix}\lambda e & 0 & 0\\ 0 & \lambda e & 0\\ 0 & 0 & \lambda e\end{bmatrix} + G\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix} + G\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}\right)}_{\underline{\underline{\sigma}}}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}$$

3. Especificar condiciones mixtas.

Las ecuaciones de Navier (5.57) junto con las condiciones en la frontera definen completamente las tres componentes del desplazamiento u, v y w.

Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

La solución de las ecuaciones de Navier requiere también plantear unas condiciones de frontera:

1. Especificar las deformaciones o los desplazamientos.
2. Especificar los esfuerzos en términos de los desplazamientos (ley de Hooke)

$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\begin{bmatrix} \lambda e & 0 & 0 \\ 0 & \lambda e & 0 \\ 0 & 0 & \lambda e \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \right)}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

3. Especificar condiciones mixtas.

Las ecuaciones de Navier (5.57) junto con las condiciones en la frontera definen completamente las tres componentes del desplazamiento u, v y w.

Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

La solución de las ecuaciones de Navier requiere también plantear unas condiciones de frontera:

1. Especificar las deformaciones o los desplazamientos.
2. Especificar los esfuerzos en términos de los desplazamientos (ley de Hooke)

$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\begin{bmatrix} \lambda e & 0 & 0 \\ 0 & \lambda e & 0 \\ 0 & 0 & \lambda e \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \right)}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

3. Especificar condiciones mixtas.

Las ecuaciones de Navier (5.57) junto con las condiciones en la frontera definen completamente las tres componentes del desplazamiento u, v y w.

Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

La solución de las ecuaciones de Navier requiere también plantear unas condiciones de frontera:

1. Especificar las deformaciones o los desplazamientos.
2. Especificar los esfuerzos en términos de los desplazamientos (ley de Hooke)

$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\begin{bmatrix} \lambda e & 0 & 0 \\ 0 & \lambda e & 0 \\ 0 & 0 & \lambda e \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \right)}_{\underline{\underline{\sigma}}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

3. Especificar condiciones mixtas.

Las ecuaciones de Navier (5.57) junto con las condiciones en la frontera definen completamente las tres componentes del desplazamiento u, v y w.

Particularización

Ecuaciones de Cauchy-Navier al caso bidimensional

Deformación plana

$$G\nabla^2 u + (\lambda + G)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + X = 0$$

$$G\nabla^2 v + (\lambda + G)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + Y = 0$$

Tensión plana

$$G\nabla^2 u + \frac{E}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + X = 0$$

$$G\nabla^2 v + \frac{E}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + Y = 0$$

Derrotero

Unicidad de la solución

Planteamiento de Kirchhoff

Si una solución existe, esta es *única* en términos de esfuerzos y deformaciones, y los desplazamientos son únicos dentro de los límites impuestos por un movimiento rígido arbitrario, es decir, **dos soluciones al mismo problema no pueden existir excepto para soluciones que únicamente difieren en rotaciones y traslaciones rígidas**. Ver (Timoshenko y Goodier (1970, sección 86)).

- Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) físico alemán.

La unicidad y existencia de la solución no se garantiza en sólidos hechos de materiales con comportamiento no lineal, plástico o sujetos a grandes deformaciones.

Derrotero

Principio de superposición

Los esfuerzos, deformaciones y desplazamientos de un sólido en equilibrio sujeto a un conjunto de configuraciones de carga se pueden analizar como la suma de las soluciones que correspondan a cada una de dichas configuraciones, asumiendo que cada una de ellas se aplica independientemente.

El principio no es aplicable cuando se analiza un sólido cuyo material tiene un comportamiento no lineal o cuando los cambios de posición y forma de la estructrura al aplicar la configuración de fuerzas 1 se tenga que considerar antes de aplicar el sistema de fuerzas 2

Principio de superposición

Podemos entender este problema desde las ecuaciones ecuaciones (5.57) y (5.58):

$$(\lambda + G)\nabla e + G\nabla^2 \boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\begin{bmatrix} \lambda e & 0 & 0 \\ 0 & \lambda e & 0 \\ 0 & 0 & \lambda e \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \right)}_{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Observe que la naturaleza lineal de las ecuaciones clásicas de la elasticidad es lo que establece el Principio de superposición.

5.11. Principio de superposición

4 condiciones necesarias:

1. El sólido debe ser elástico y, bajo las acciones exteriores, el material no se agrieta ni se traslapa.
2. Las acciones exteriores producen en el sólido pequeños desplazamientos, deformaciones y giros. Esto se conoce como *principio de rigidez relativa*: se desprecia el cambio de geometría del sólido durante la deformación.
3. El material se debe regir por la ley de Hooke (es decir, debe haber una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones).
4. Las deformaciones son recuperables. Existe un estado de referencia del sólido, normalmente el estado original sin deformar, al cual vuelve el sólido al retirar las acciones exteriores.

5.11. Principio de superposición

4 condiciones necesarias:

1. El sólido debe ser elástico y, bajo las acciones exteriores, el material no se agrieta ni se traslapa.
2. Las acciones exteriores producen en el sólido pequeños desplazamientos, deformaciones y giros. Esto se conoce como *principio de rigidez relativa*: se desprecia el cambio de geometría del sólido durante la deformación.
3. El material se debe regir por la ley de Hooke (es decir, debe haber una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones).
4. Las deformaciones son recuperables. Existe un estado de referencia del sólido, normalmente el estado original sin deformar, al cual vuelve el sólido al retirar las acciones exteriores.

5.11. Principio de superposición

4 condiciones necesarias:

1. El sólido debe ser elástico y, bajo las acciones exteriores, el material no se agrieta ni se traslapa.
2. Las acciones exteriores producen en el sólido pequeños desplazamientos, deformaciones y giros. Esto se conoce como *principio de rigidez relativa*: se desprecia el cambio de geometría del sólido durante la deformación.
3. El material se debe regir por la ley de Hooke (es decir, debe haber una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones).
4. Las deformaciones son recuperables. Existe un estado de referencia del sólido, normalmente el estado original sin deformar, al cual vuelve el sólido al retirar las acciones exteriores.

5.11. Principio de superposición

4 condiciones necesarias:

1. El sólido debe ser elástico y, bajo las acciones exteriores, el material no se agrieta ni se traslapa.
2. Las acciones exteriores producen en el sólido pequeños desplazamientos, deformaciones y giros. Esto se conoce como *principio de rigidez relativa*: se desprecia el cambio de geometría del sólido durante la deformación.
3. El material se debe regir por la ley de Hooke (es decir, debe haber una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones).
4. Las deformaciones son recuperables. Existe un estado de referencia del sólido, normalmente el estado original sin deformar, al cual vuelve el sólido al retirar las acciones exteriores.

5.11. Principio de superposición

4 condiciones necesarias:

1. El sólido debe ser elástico y, bajo las acciones exteriores, el material no se agrieta ni se traslapa.
2. Las acciones exteriores producen en el sólido pequeños desplazamientos, deformaciones y giros. Esto se conoce como *principio de rigidez relativa*: se desprecia el cambio de geometría del sólido durante la deformación.
3. El material se debe regir por la ley de Hooke (es decir, debe haber una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones).
4. Las deformaciones son recuperables. Existe un estado de referencia del sólido, normalmente el estado original sin deformar, al cual vuelve el sólido al retirar las acciones exteriores.

Conclusión

Principio de superposición

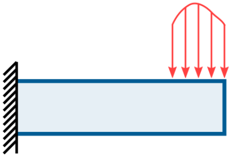
Dos soluciones para el mismo sólido, con la misma geometría, pero con diferentes condiciones de frontera se pueden adicionar para obtener la solución al problema en el que ambos conjuntos de condiciones de frontera se están aplicando simultáneamente.

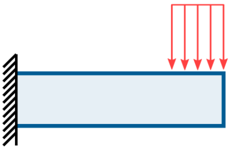
Derrotero

Principio de Saint-Venant

"Suponga que las fuerzas que actúan sobre un pequeño elemento de la superficie de un cuerpo elástico son reemplazadas por otro sistema de fuerzas actuando sobre la misma porción de superficie y que es estáticamente equivalente al anterior. Entonces, aunque esta distribución de fuerzas produce cambios sustanciales en los esfuerzos de forma local, esta distribución de fuerzas tiene un efecto despreciable en los esfuerzos que son producidos a distancias mayores comparadas con las dimensiones lineales de la superficie en la cual las fuerzas fueron cambiadas."

- Adhemar Jean Calude Barré de Saint-Venant (1797-1886), ingeniero mecánico y matemático francés.





Derrotero

El problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Debemos encontrar:

Esfuerzos

- σ_x, σ_y, σ_z
- τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}

Deformaciones

- ε_x, ε_y, ε_z
- γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}

Desplazamientos

- u, v, w

El problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Debemos encontrar:

Esfuerzos

- σ_x, σ_y, σ_z
- τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}

Deformaciones

- ε_x, ε_y, ε_z
- γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}

Desplazamientos

- u, v, w

El problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Debemos encontrar:

Esfuerzos

- σ_x, σ_y, σ_z
- τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}

Deformaciones

- ε_x, ε_y, ε_z
- γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}

Desplazamientos

- u, v, w

El problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Debemos encontrar:

Esfuerzos

- σ_x, σ_y, σ_z
- τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}

Deformaciones

- ε_x, ε_y, ε_z
- γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}

Desplazamientos

- u, v, w

El problema

Dado un cuerpo sólido elástico Ω, se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, así como las reacciones en sus apoyos.

Debemos encontrar:

Esfuerzos

- σ_x, σ_y, σ_z
- τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}

Deformaciones

- ε_x, ε_y, ε_z
- γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}

Desplazamientos

- u, v, w

Recordemos

Formulación basada en esfuerzos

EDPs de compatibilidad (6)

$$\nabla^2\sigma_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial X}{\partial x}$$
$$\nabla^2\sigma_y + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial Y}{\partial y}$$
$$\nabla^2\sigma_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial Z}{\partial z}$$
$$\nabla^2\tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z} = -\left(\frac{\partial Y}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$$
$$\nabla^2\tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial z} = -\left(\frac{\partial X}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial x}\right)$$
$$\nabla^2\tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y} = -\left(\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial x}\right)$$

Formulación basada en desplazamientos

EDPs de Cauchy-Navier (3)

$$(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial x} + G\nabla^2 u + X = 0$$
$$(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial y} + G\nabla^2 v + Y = 0$$
$$(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial z} + G\nabla^2 w + Z = 0$$

$$\sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$
$$\sigma_y = \lambda e + 2G\varepsilon_y \qquad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$
$$\sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

Ecuaciones de Lamé (Ley de Hooke)

$$\varepsilon_x(x,y,z) := \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x,y,z)} \qquad \gamma_{xy}(x,y,z) := \left.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x,y,z)}$$
$$\varepsilon_y(x,y,z) := \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x,y,z)} \qquad \gamma_{xz}(x,y,z) := \left.\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{(x,y,z)}$$
$$\varepsilon_z(x,y,z) := \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{(x,y,z)} \qquad \gamma_{yz}(x,y,z) := \left.\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{(x,y,z)}$$

Deformaciones

$$u(x,y,z)$$
$$v(x,y,z)$$
$$w(x,y,z)$$

Desplazamientos

Diferentes situaciones

Cargas moderadas *Comportamiento lineal*

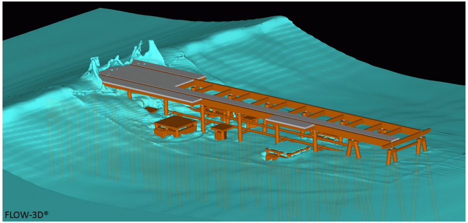


Figure: *Modelo de estación marítima.*

- Maquinarias
- Tránsito peatonal o vehicular
- Tránsito vehicular
- Oleaje y vientos

Cargas destructivas *Comportamiento no lineal*

Figure: *Terremoto de Kobe, 1995.*

- Terremotos y sismos
- Explosiones
- Huracanes o ciclones

Instrumentación

Figure: *Video:* *What is structural monitoring?*

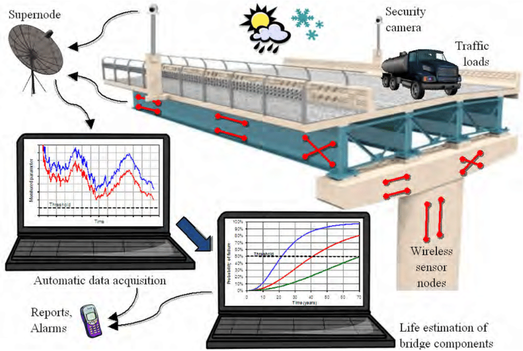


Figure: *Tomado de:* *Concept of structural health monitoring of bridge structures.*

Ejemplo

INVIAS decidió instrumentar un puente para medir sus deformaciones debidas a la acción del tránsito vehicular; sin embargo, no pagó el software del proveedor sino que programó el suyo propio (software A). Un ingeniero no conforme programó otro (software B). Luego de analizar los datos de la instrumentación, el software A arroja las siguientes funciones de deformación:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2 y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

mientras que el software B arroja estas:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

donde k es una constante muy pequeña. Respecto a este problema, responda:

1. ¿Cómo podemos decidir cuál programa está en lo correcto? Explique, demuestre y concluya.

Solución

¿Qué nos está pidiendo el problema?
R//. Verificar la compatibilidad de las ecuaciones que definen las deformaciones.

Veamos que ambos softwares indican un comportamiento simplificado a deformación plana:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

El tránsito vehicular puede ser una carga moderada: análisis lineal.

Debemos emplear las ecuaciones de compatibilidad bidimensionales en términos de deformaciones:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

Solución

¿Qué nos está pidiendo el problema?
R//. Verificar la compatibilidad de las ecuaciones que definen las deformaciones.

Veamos que ambos softwares indican un comportamiento simplificado a deformación plana:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

El tránsito vehicular puede ser una carga moderada: análisis lineal.

Debemos emplear las ecuaciones de compatibilidad bidimensionales en términos de deformaciones:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

Solución

¿Qué nos está pidiendo el problema?
R//. Verificar la compatibilidad de las ecuaciones que definen las deformaciones.

Veamos que ambos softwares indican un comportamiento simplificado a deformación plana:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

El tránsito vehicular puede ser una carga moderada: análisis lineal.

Debemos emplear las ecuaciones de compatibilidad bidimensionales en términos de deformaciones:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

Solución

¿Qué nos está pidiendo el problema?
R//. Verificar la compatibilidad de las ecuaciones que definen las deformaciones.

Veamos que ambos softwares indican un comportamiento simplificado a deformación plana:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

El tránsito vehicular puede ser una carga moderada: análisis lineal.

Debemos emplear las ecuaciones de compatibilidad bidimensionales en términos de deformaciones:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

Solución

¿Qué nos está pidiendo el problema?
R//. Verificar la compatibilidad de las ecuaciones que definen las deformaciones.

Veamos que ambos softwares indican un comportamiento simplificado a deformación plana:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

El tránsito vehicular puede ser una carga moderada: análisis lineal.

Debemos emplear las ecuaciones de compatibilidad bidimensionales en términos de deformaciones:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2 y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2 y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2 y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2 y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2 y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2 y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2 y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2 y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2 y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y\right) = 0$$
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2 y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2 y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \qquad \varepsilon_y = kx^2y \qquad \gamma_{xy} = 2kx - y \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kx - y\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Las deformaciones medidas por el **software A** no son compatibles, pues

$$0 = 2kx + 2ky$$

Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy\right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy\right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy\right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy\right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy\right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy\right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy\right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy\right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy\right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy\right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy\right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy\right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

Solución

Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \qquad \varepsilon_y = ky^2 \qquad \gamma_{xy} = 2kxy \qquad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} 2kxy\right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

Solución

Las deformaciones medidas por el **software B** si son compatibles, pues

$$2k = 2k$$

Solución

¿Cuál software mide adecuadamente las deformaciones?

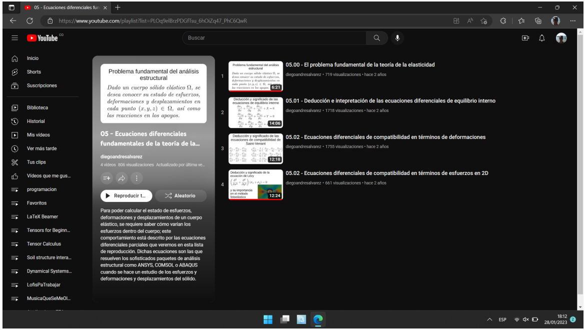
R//. El software B.

Solución

¿Cuál software mide adecuadamente las deformaciones?
R//. El software B.

Derrotero

Referencias y material de apoyo



- Lista de resproducción: 05 - Ecuaciones diferenciales fundamentales de la teoría de la ...
- Repositorio del curso: github/medio_continuo