

4200687 - Mecánica Tensorial

Unidad 2. Análisis de tensiones

**Michael Heredia Pérez
Ing., Esp., MSc.**

mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil



2026a

Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada.



Derrotero

- 2.1. Tensiones o esfuerzos
- 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
- 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional
- 2.4. Notación indicial
- 2.5. Cambio de base
- 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas
- 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
- 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
- La analogía del bombillo y la caja
- Material de apoyo

Derrotero

- 2.1. Tensiones o esfuerzos
- 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
- 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional
- 2.4. Notación indicial
- 2.5. Cambio de base
- 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas
- 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
- 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
- La analogía del bombillo y la caja
- Material de apoyo

Tensiones o esfuerzos

- Intensidad de una fuerza por unidad de área en el contorno de un punto material sobre una superficie real o imaginaria de un medio continuo.
- Las fuerzas internas son una reacción a las fuerzas externas aplicadas.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Tensiones o esfuerzos

- Intensidad de una fuerza por unidad de área en el contorno de un punto material sobre una superficie real o imaginaria de un medio continuo.
- Las fuerzas internas son una reacción a las fuerzas externas aplicadas.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Tensiones o esfuerzos

- Intensidad de una fuerza por unidad de área en el contorno de un punto material sobre una superficie real o imaginaria de un medio continuo.
- Las fuerzas internas son una reacción a las fuerzas externas aplicadas.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Tensiones o esfuerzos

- El sólido deformado es continuo.
- Hay una distribución de esfuerzos representada como una función continua por partes.

Dominio en (x, y, z)

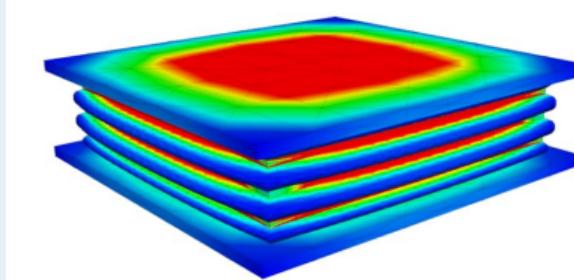


Figure: *Modelo estático de neopreno zunchado.* [ver post.](#)

Dominio en (x, y, z, t)

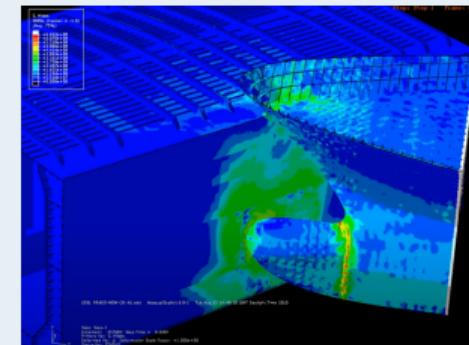
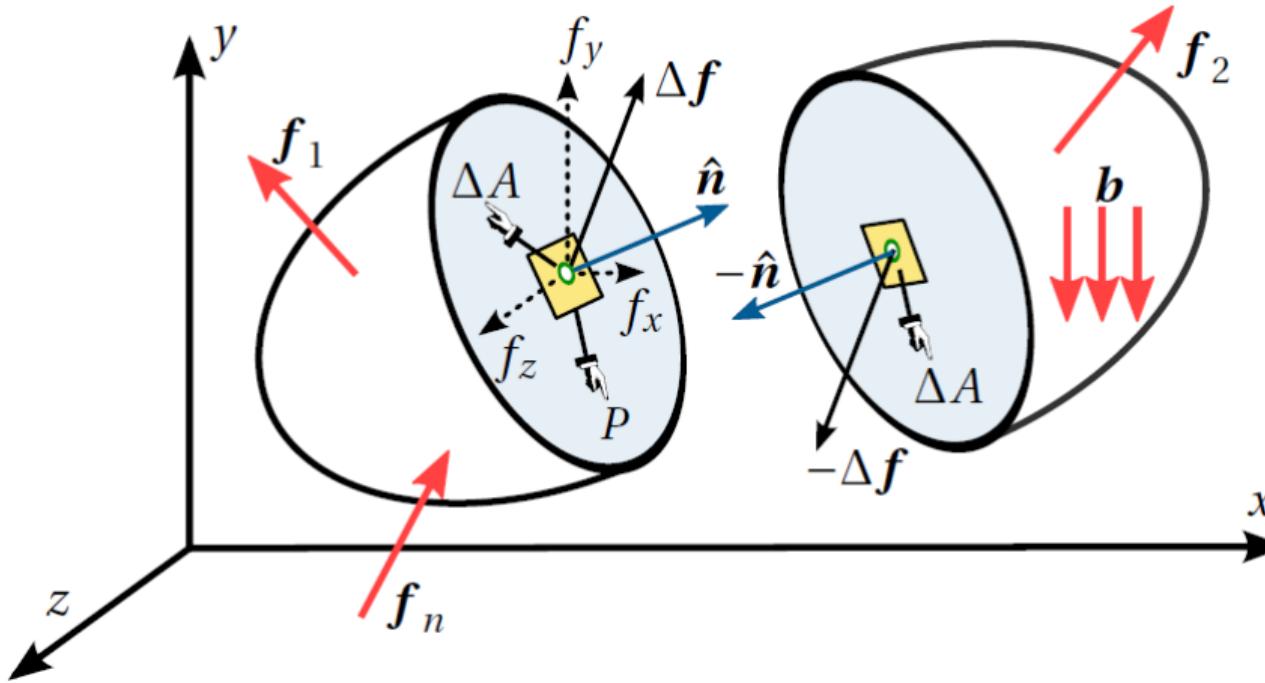
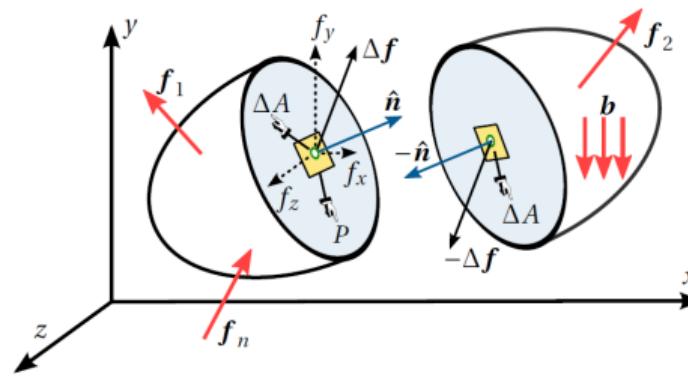


Figure: *Software-Ship collision.* [ver video.](#)

Tensiones o esfuerzos



Tensiones o esfuerzos



Principio de esfuerzos de Cauchy

A medida que la superficie se vuelve muy pequeña y tiende al punto P la tensión o esfuerzo (denotada por q) en el punto (x, y, z) asociado con el plano normal \hat{n} es

$$q(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta A}$$

Descomposición del esfuerzo

El esfuerzo:

$$\mathbf{q}(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta A}$$

aquí ΔA tiene normal \hat{n} . Se divide en:

- **Vector de esfuerzo normal**

Fuerzas de compresión y tracción

$$\sigma_n(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f_n}{\Delta A}$$

- **Vector de esfuerzo tangencial**

Fuerzas de cortante

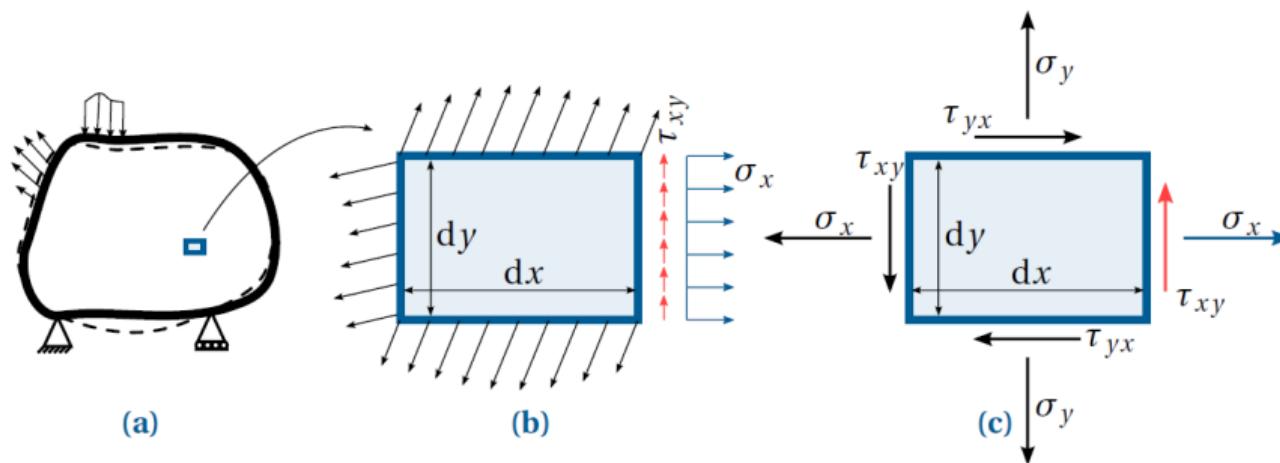
$$\sigma_s(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f_s}{\Delta A}$$

$$\mathbf{q}(x, y, z) = \sigma_n(x, y, z) + \sigma_s(x, y, z)$$

Derrotero

- 2.1. Tensiones o esfuerzos
- **2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional**
- 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional
- 2.4. Notación indicial
- 2.5. Cambio de base
- 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas
- 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
- 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
- La analogía del bombillo y la caja
- Material de apoyo

Análisis de un elemento infinitesimal rectangular

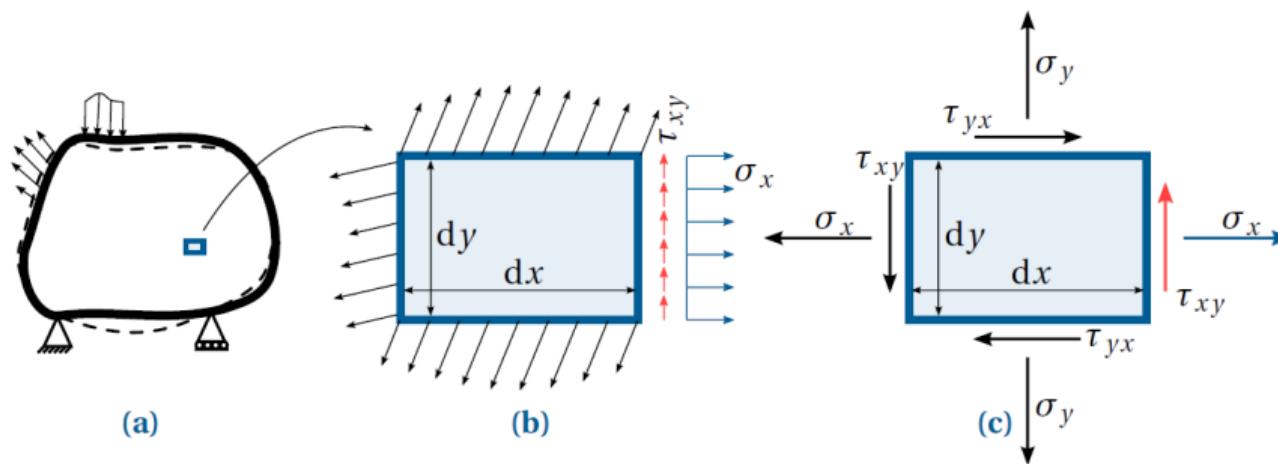


Un esfuerzo cortante τ_{ij} que actúa sobre una superficie ortogonal al eje i y tiene la misma dirección que el eje j .

Condición de equilibrio estático

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Análisis de un elemento infinitesimal rectangular



Un esfuerzo cortante τ_{ij} que actúa sobre una superficie ortogonal al eje i y tiene la misma dirección que el eje j .

Condición de equilibrio estático

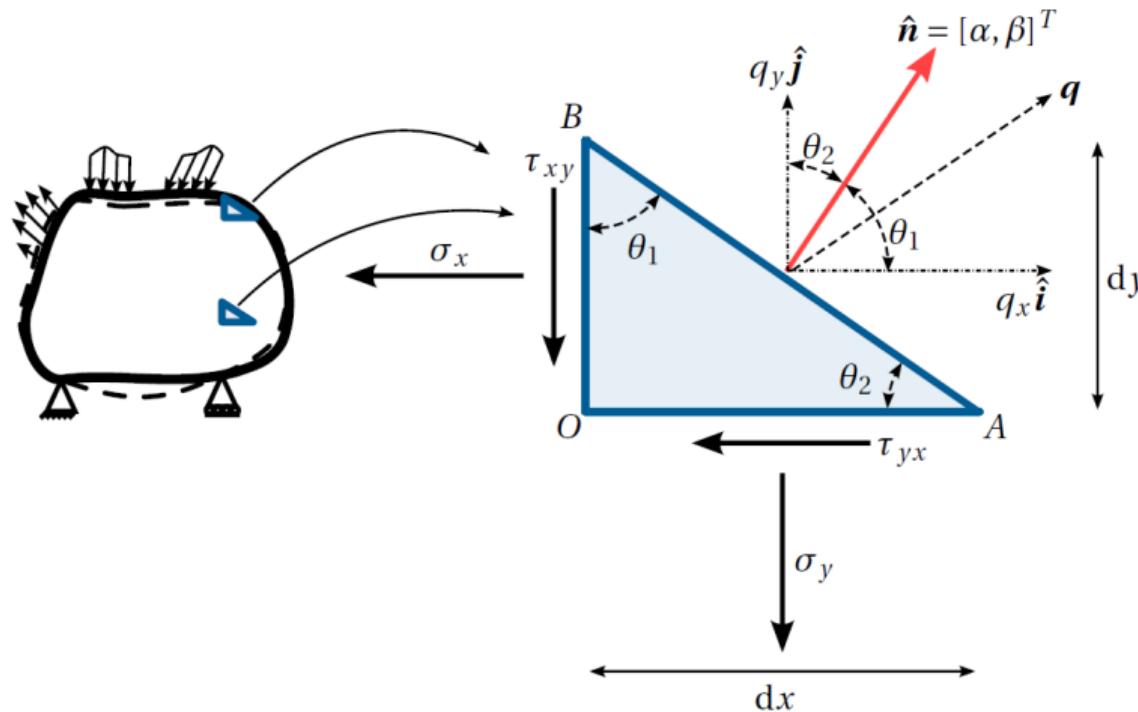
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Análisis de un elemento infinitesimal rectangular

Tarea

Verificar que las fuerzas másicas son extremadamente pequeñas en comparación con las fuerzas de superficie.
(elemento infinitesimal rectangular)

Análisis de un elemento infinitesimal triangular



Análisis de un elemento infinitesimal triangular

Fórmula de Cauchy bidimensional

$$\underbrace{\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}}_q = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\hat{n}}$$

- \underline{q} : vector de esfuerzos
- $\underline{\underline{\sigma}}$: Matriz de tensiones de Cauchy (bidimensional)
- \hat{n} : Vector normal unitario a la superficie \overline{AB}

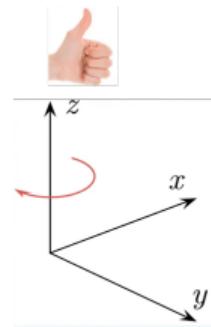
Estos arreglos son función del punto $P(x, y, z)$.

Derrotero

- 2.1. Tensiones o esfuerzos
- 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
- **2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional**
- 2.4. Notación indicial
- 2.5. Cambio de base
- 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas
- 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
- 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
- La analogía del bombillo y la caja
- Material de apoyo

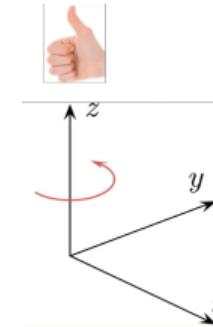
Un pequeño comentario sobre el sistema coordenado en tres dimensiones

Sistema coordenado de la mano **izquierda**



Usado usualmente en geotécnica y pavimentos

Sistema coordenado de la mano **derecha**

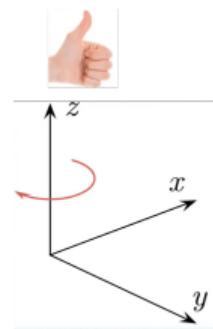


Usado usualmente en estructuras e hidráulica

La consecuencia de usar un sistema de coordenadas u otro es que las fórmulas que se deducen con diferente sistema de coordenadas pueden diferir en los signos de las fórmulas.

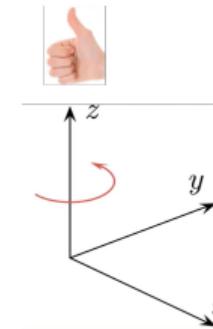
Un pequeño comentario sobre el sistema coordenado en tres dimensiones

Sistema coordenado de la mano **izquierda**



Usado usualmente en geotécnica y pavimentos

Sistema coordenado de la mano **derecha**

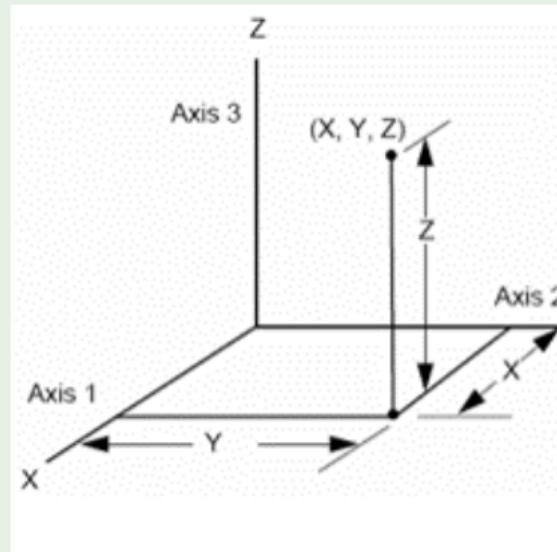


Usado usualmente en estructuras e hidráulica

La consecuencia de usar un sistema de coordenadas u otro es que las fórmulas que se deducen con diferente sistema de coordenadas pueden diferir en los signos de las fórmulas.

¿... dónde veo esto?

Manual de MIDAS GTS

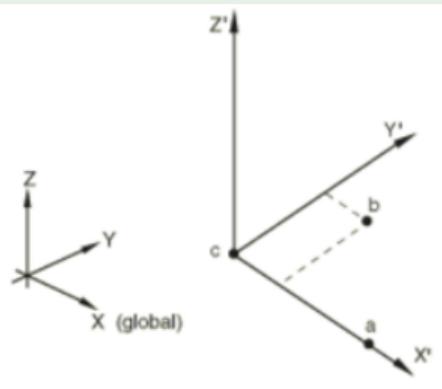


MIDAS GTS traduce Sistema de Análisis Geotécnico... y trabaja el sistema coordenado de la mano derecha!

¿... dónde veo esto?

Abaqus y FEM Design son softwares enfocados en el área estructural y mecánica, y también trabajan en el sistema coordenado de la mano derecha

Manual de Abaqus



Manual de FEM Design

Global co-ordinate system	
Function	Definition of co-ordinates Definition of directions Interpretation of results -
Type	Right-handed Cartesian
Axes	X, Y, Z
Symbol	
Symbol color	Fixed 3 colors, X = green Y = red Z = blue

¿... dónde veo esto?

- NO es información trivial, de ser así no se molestarían en ponerlo en los manuales de usuario del programa.

Otro ejemplo

La fuerza cortante en función de la carga distribuida en vigas... ¿cómo se define?

$$\frac{dV}{dx} = w \text{ o } \frac{dV}{dx} = -w$$

¿... dónde veo esto?

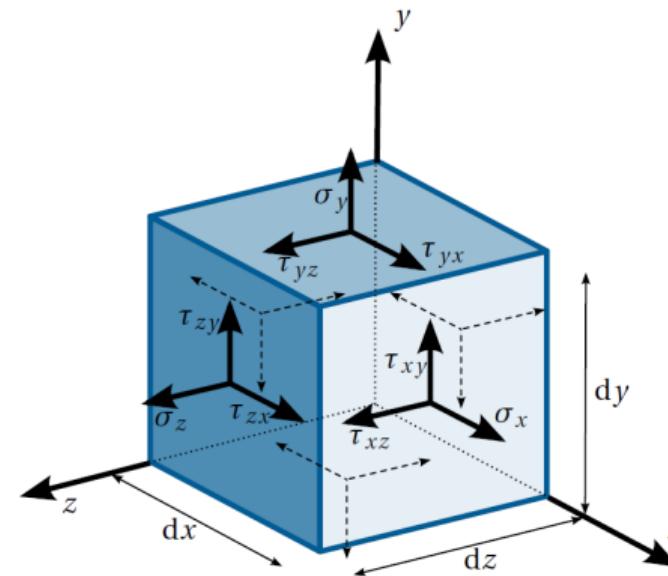
- NO es información trivial, de ser así no se molestarían en ponerlo en los manuales de usuario del programa.

Otro ejemplo

La fuerza cortante en función de la carga distribuida en vigas... ¿cómo se define?

$$\frac{dV}{dx} = w \text{ o } \frac{dV}{dx} = -w$$

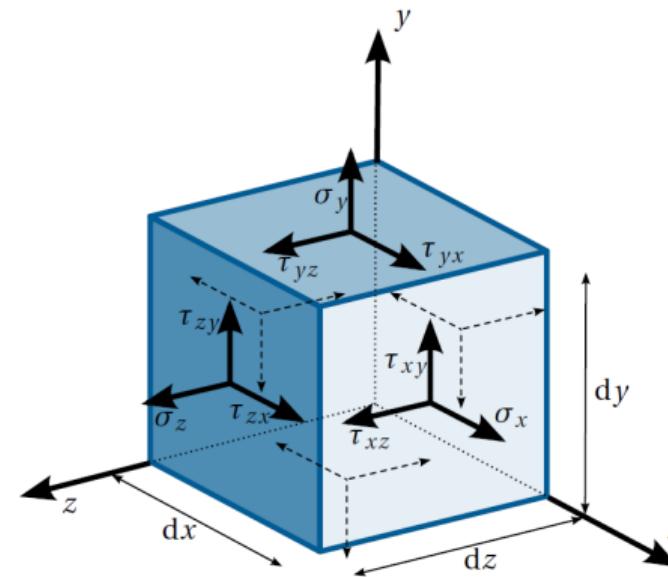
Análisis de un paralelepípedo infinitesimal



Condición de equilibrio estático

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

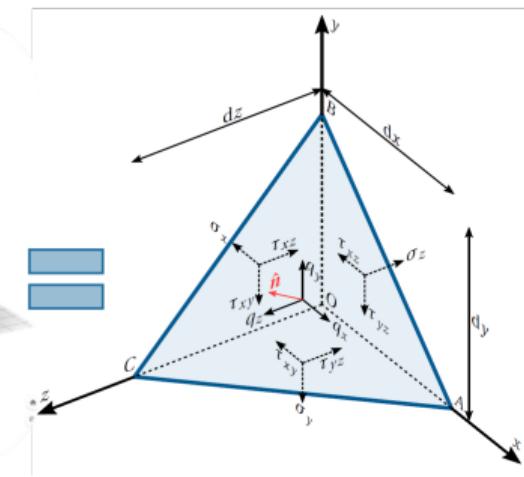
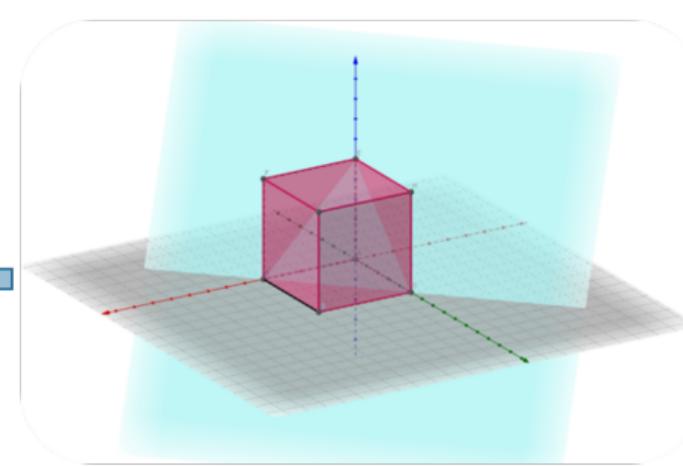
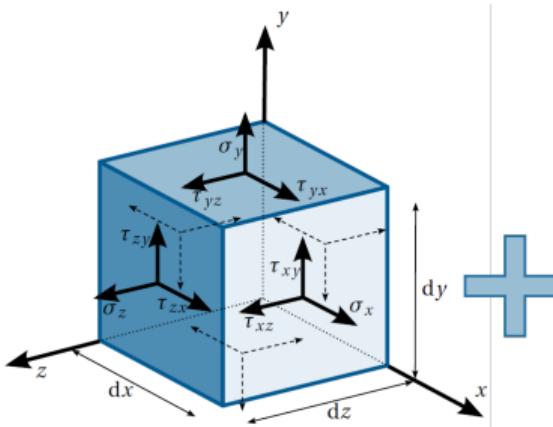
Análisis de un paralelepípedo infinitesimal



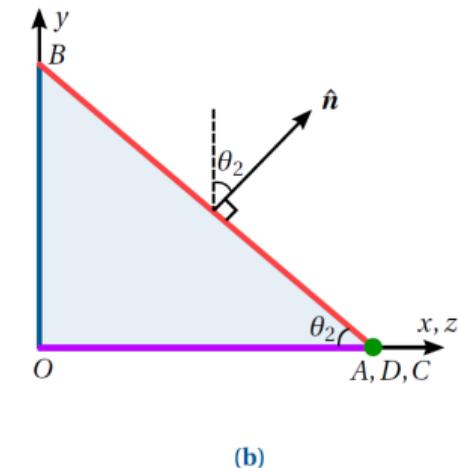
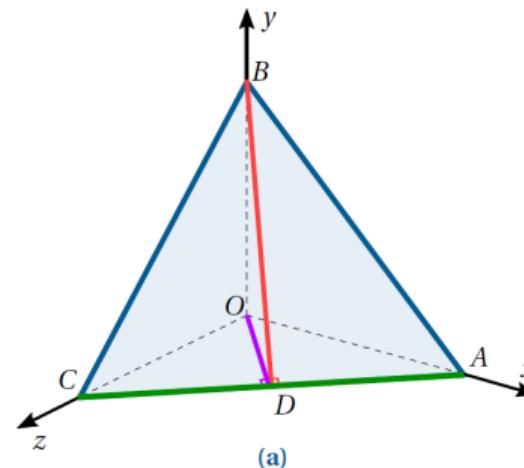
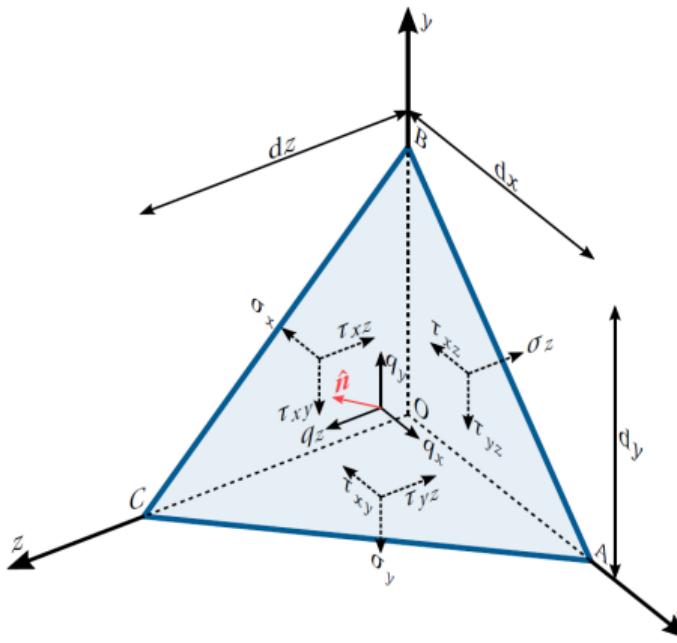
Condición de equilibrio estático

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Análisis de un tetraedro infinitesimal



Análisis de un tetraedro infinitesimal



Análisis de un tetraedro infinitesimal

Fórmula de Cauchy tridimensional

$$\underbrace{\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}}_q = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}}_{\underline{\sigma}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}_{\hat{n}}$$

- \underline{q} : vector de esfuerzos
- $\underline{\sigma}$: Matriz (simétrica) de tensiones de Cauchy (tridimensional) o tensor de esfuerzos
- \hat{n} : Vector normal unitario a la superficie del plano \overline{ABC}

Estos arreglos son función del punto $P(x, y, z)$.

Derrotero

- 2.1. Tensiones o esfuerzos
- 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
- 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional
- **2.4. Notación indicial**
- 2.5. Cambio de base
- 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas
- 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
- 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
- La analogía del bombillo y la caja
- Material de apoyo

Notación indicial

<Pendiente>

Delta de Kronecker

La función Kronecker delta o delta de Kronecker (*no confundir con la función impulso unitario o delta de Dirac*).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Otro ejemplo

La condición de ortogonalidad de dos vectores a partir del producto escalar

$$\langle a_i, a_j \rangle = a_i \cdot a_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Delta de Kronecker

La función Kronecker delta o delta de Kronecker (*no confundir con la función impulso unitario o delta de Dirac*).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Otro ejemplo

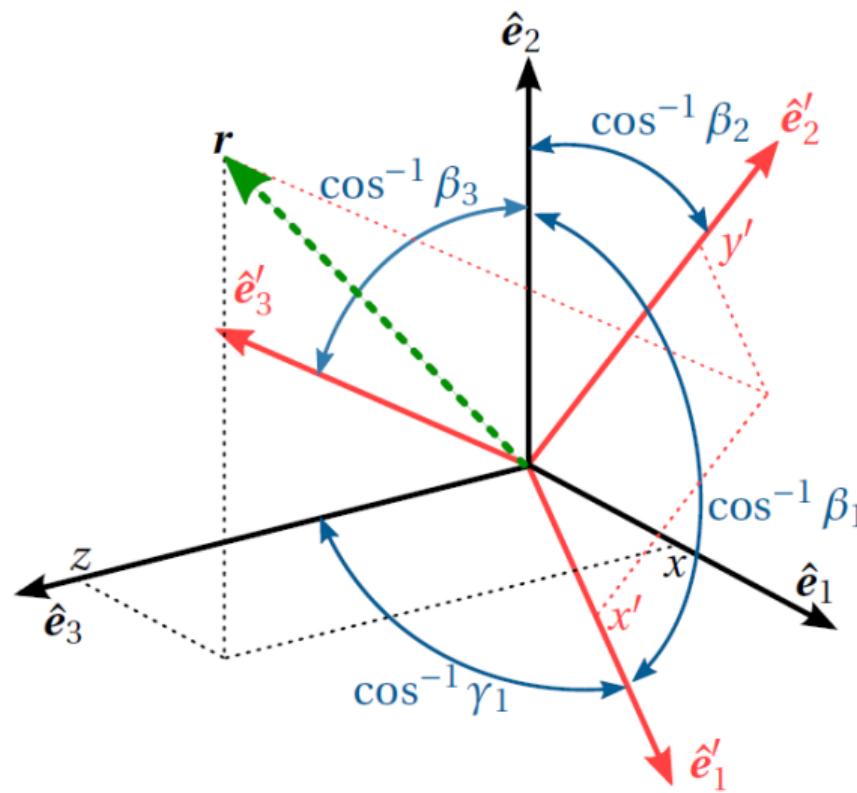
La condición de ortogonalidad de dos vectores a partir del producto escalar

$$\langle a_i, a_j \rangle = a_i \cdot a_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Derrotero

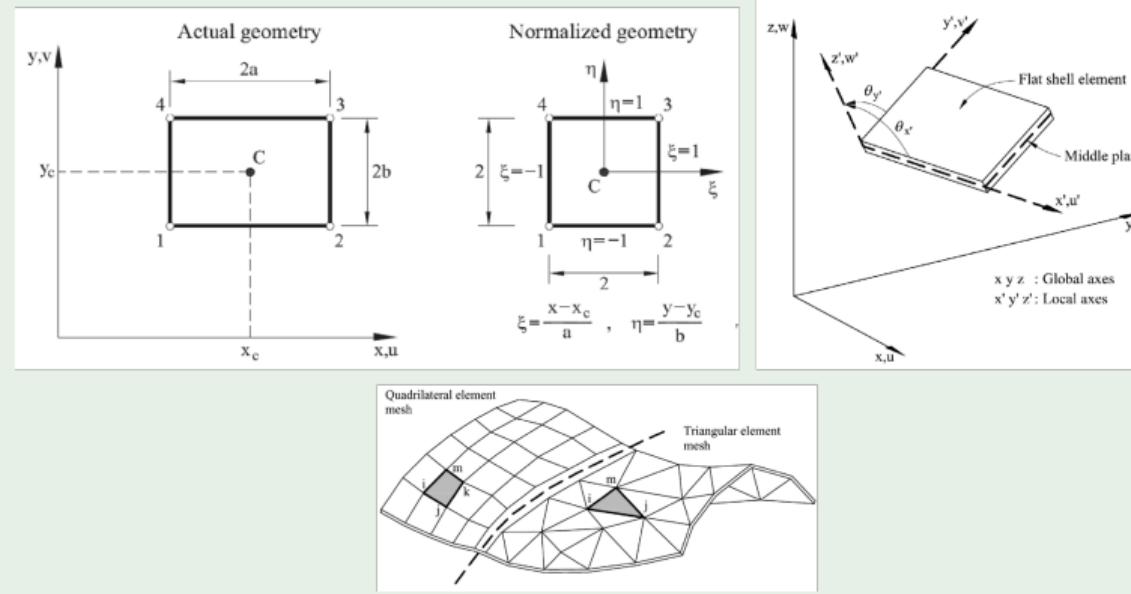
- 2.1. Tensiones o esfuerzos
- 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
- 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional
- 2.4. Notación indicial
- **2.5. Cambio de base**
- 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas
- 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
- 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
- La analogía del bombillo y la caja
- Material de apoyo

Cambio de base



¿... dónde veo esto?

Formulación de soluciones numéricas

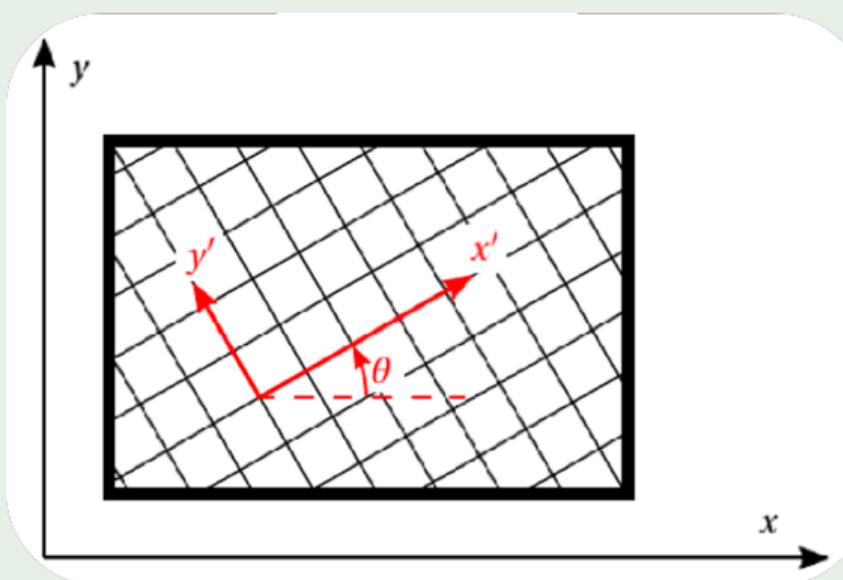


En una malla de elementos finitos, cada elemento se estudia en un sistema coordenado local (x', y') o (ξ, η) .

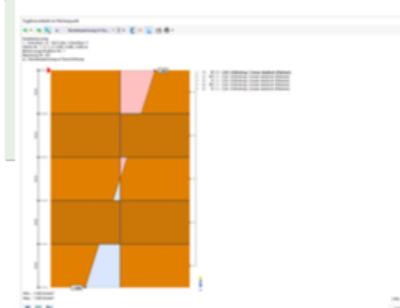
¿... dónde veo esto?

La ortotropía de un sólido

Los ejes de ortotropía de un sólido no siempre estarán en el mismo sentido de los ejes globales, así que se representan en otro sistema de coordenadas locales.



Nuevas características en RFEM 6 y RSTAB 9



▲ Distribución normal de tensiones en un panel de madera contralaminada (CLT)

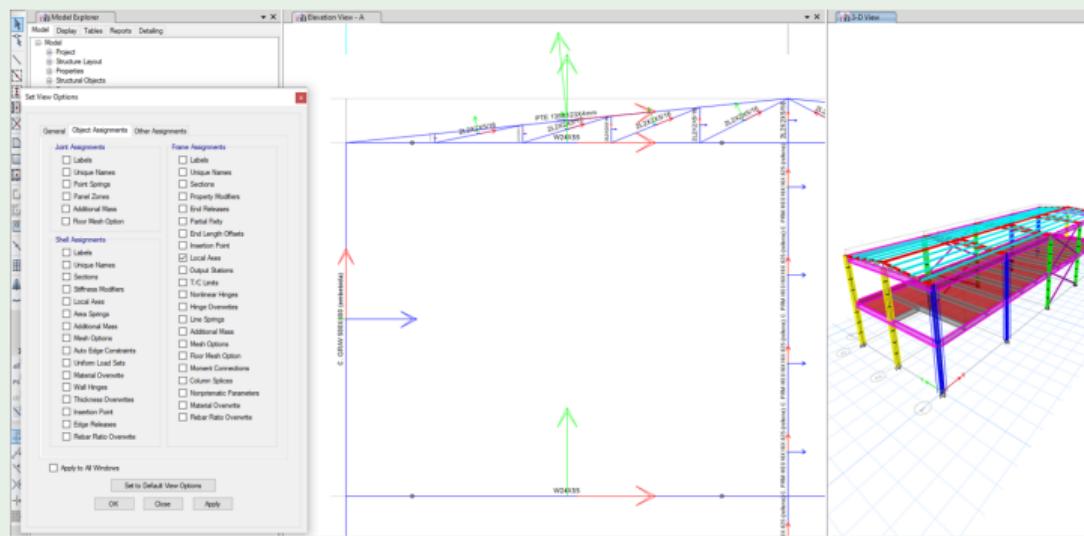
Cálculo de superficies de madera ortótropa y madera contralaminada (CLT)

¿Trabaja con madera? Entonces tenemos buenas noticias. En el complemento Cálculo de madera para RFEM 6, ahora puede diseñar tanto barras como superficies según el Eurocódigo, como madera contralaminada (CLT), madera laminada encolada, madera de coníferas, transformados de madera, etc.

→ [Más información](#)

¿... dónde veo esto?

Formulación interna de softwares de cálculo

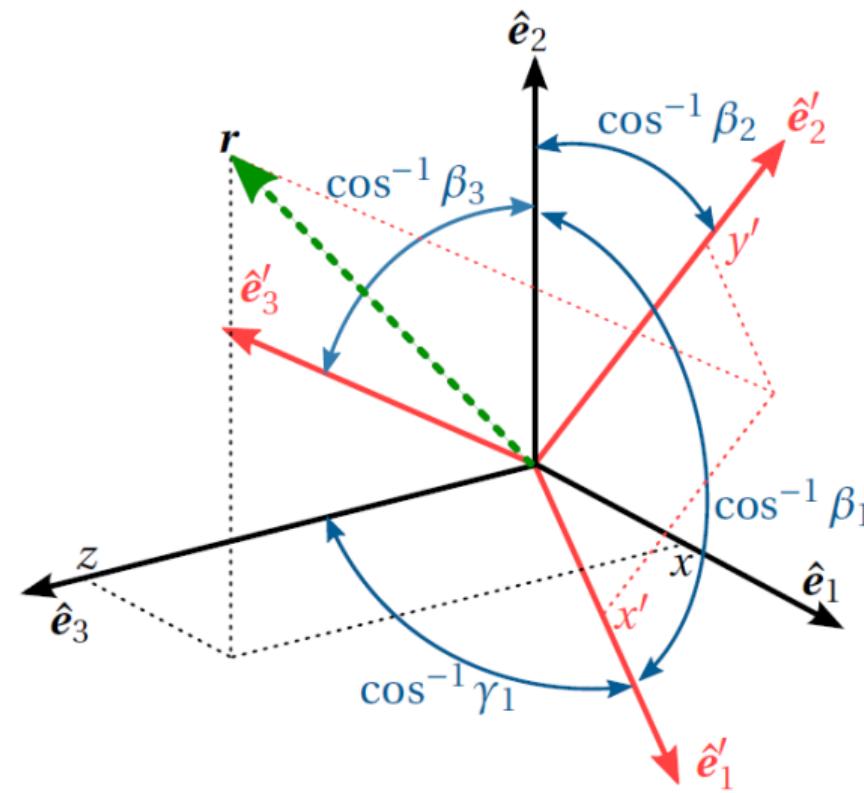


En ETABS, al igual que en todos los softwares de ingeniería estructural y mecánica, los elementos son simplificados y estudiados dentro de su propio sistema de coordenadas. Se activa la opción *Local Axes* (ejes locales) para ver sus ejes, estos están codificados por colores según su documentación.

Cambio de base

(x_i, \hat{e}_i) Sistema de coordenadas **globales**

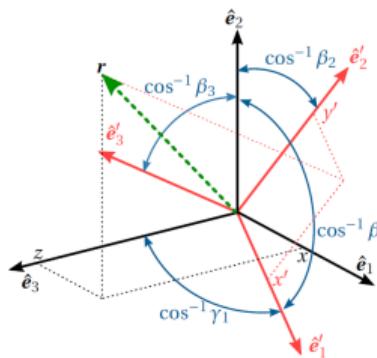
(x'_i, \hat{e}'_i) Sistema de coordenadas **locales**



Cambio de base

Componentes:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = \hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_1 & \beta_1 = \hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_2 & \gamma_1 = \hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_3 \\ \alpha_2 = \hat{e}'_2 \cdot \hat{e}_1 & \beta_2 = \hat{e}'_2 \cdot \hat{e}_2 & \gamma_2 = \hat{e}'_2 \cdot \hat{e}_3 \\ \alpha_3 = \hat{e}'_3 \cdot \hat{e}_1 & \beta_3 = \hat{e}'_3 \cdot \hat{e}_2 & \gamma_3 = \hat{e}'_3 \cdot \hat{e}_3 \end{array}$$



Representación vectorial:

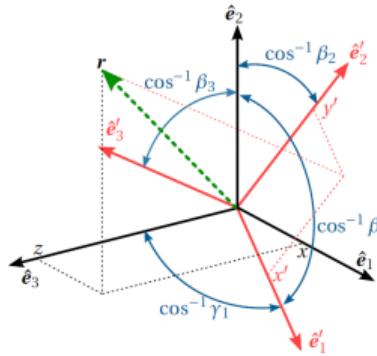
$$\mathbf{r} = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3 = x'\hat{e}'_1 + y'\hat{e}'_2 + z'\hat{e}'_3$$

Haciendo el producto punto ([eq 2.9], \hat{e}_i), $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{aligned}$$

Cambio de base

Obteniendo:



$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_r = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_T \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{r'}$$

con

$$T = [\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3]$$

- r : vector de coordenadas globales del punto P
- r' : vector de coordenadas locales del punto P
- T : matriz de transformación

Cambio de base

$\langle [\text{eq 2.9}], \hat{\mathbf{e}}_i \rangle, 1 = 1, 2, 3$

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z'$$

$$y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z'$$

$$z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'$$

$\langle [\text{eq 2.9}], \hat{\mathbf{e}}'_i \rangle, 1 = 1, 2, 3$

$$x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z$$

$$y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z$$

$$z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_r = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_T \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{r'}$$

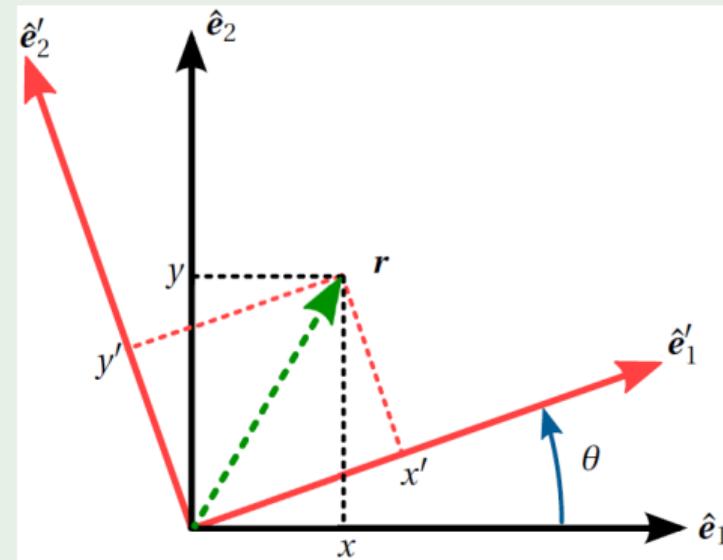
$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{r'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{T^T} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_r$$

Se deduce que la matriz T es **ortogonal**, ya que $T^{-1} = T^T$

Cambio de base

Ejemplo

Formular una expresión matemática para la rotación de la siguiente figura



Derrotero

- 2.1. Tensiones o esfuerzos
- 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
- 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional
- 2.4. Notación indicial
- 2.5. Cambio de base
- **2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas**
- 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
- 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
- La analogía del bombillo y la caja
- Material de apoyo

Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas

Fórmulas de transformación de la matriz de esfuerzos entre los sistemas de coordenadas \hat{e}_i y \hat{e}'_i .

Del sistema global al local

Incómodo al cómodo

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \mathbf{T}^T \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{T}$$

Del sistema local al global

Cómodo al incómodo

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{T} \underline{\underline{\sigma}}' \mathbf{T}^T$$

Expandiendo la primera eq.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} & \tau_{y'z'} & \sigma_{z'} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{T}}$$

Comentario sobre el uso de la programación

El libro guía de clase tiene códigos escritos en MAXIMA para el desarrollo de varias demostraciones simbólicas y cálculos numéricos de ahora en adelante. A su vez, estos estarán traducidos a lenguaje Python en el [repositorio del curso](#).



A.5. Notación tensorial de Voigt

repaso del apéndice

Woldemar Voigt

Esta notación se emplea para representar un tensor simétrico como uno de orden menor.

Ejemplo

La matriz de esfuerzos de Cauchy:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Se puede expresar como un vector de dimensión 6:

$$\underline{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}]^T \equiv [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6]^T$$

Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional

- Código: [02_06_01_cambio_de_base.ipynb](#)

$$\sigma'_x = 2\gamma_1\beta_1\tau_{yz} + 2\gamma_1\alpha_1\tau_{xz} + 2\alpha_1\beta_1\tau_{xy} + \gamma_1^2\sigma_z + \beta_1^2\sigma_y + \alpha_1^2\sigma_x$$

$$\sigma'_y = 2\gamma_2\beta_2\tau_{yz} + 2\gamma_2\alpha_2\tau_{xz} + 2\alpha_2\beta_2\tau_{xy} + \gamma_2^2\sigma_z + \beta_2^2\sigma_y + \alpha_2^2\sigma_x$$

$$\sigma'_z = 2\gamma_3\beta_3\tau_{yz} + 2\gamma_3\alpha_3\tau_{xz} + 2\alpha_3\beta_3\tau_{xy} + \gamma_3^2\sigma_z + \beta_3^2\sigma_y + \alpha_3^2\sigma_x$$

$$\tau'_{y'z'} = (\gamma_2\beta_3 + \beta_2\gamma_3)\tau_{yz} + (\gamma_2\alpha_3 + \alpha_2\gamma_3)\tau_{xz} + (\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3)\tau_{xy} + \gamma_2\gamma_3\sigma_z + \beta_2\beta_3\sigma_y + \alpha_2\alpha_3\sigma_x$$

$$\tau'_{x'z'} = (\gamma_1\beta_3 + \beta_1\gamma_3)\tau_{yz} + (\gamma_1\alpha_3 + \alpha_1\gamma_3)\tau_{xz} + (\alpha_1\beta_3 + \beta_1\alpha_3)\tau_{xy} + \gamma_1\gamma_3\sigma_z + \beta_1\beta_3\sigma_y + \alpha_1\alpha_3\sigma_x$$

$$\tau'_{x'y'} = (\gamma_1\beta_2 + \beta_1\gamma_2)\tau_{yz} + (\gamma_1\alpha_2 + \alpha_2\gamma_1)\tau_{xz} + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)\tau_{xy} + \gamma_1\gamma_2\sigma_z + \beta_1\beta_2\sigma_y + \alpha_1\alpha_2\sigma_x$$

Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional

- Código: [02_06_01_cambio_de_base.ipynb](#)

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \sigma_{z'} \\ \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & 2\gamma_1\beta_1 & 2\gamma_1\alpha_1 & 2\alpha_1\beta_1 \\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & 2\gamma_2\beta_2 & 2\gamma_2\alpha_2 & 2\alpha_2\beta_2 \\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & 2\gamma_3\beta_3 & 2\gamma_3\alpha_3 & 2\alpha_3\beta_3 \\ \alpha_2\alpha_3 & \beta_2\beta_3 & \gamma_2\gamma_3 & \gamma_2\beta_3 + \beta_2\gamma_3 & \gamma_2\alpha_3 + \alpha_2\gamma_3 & \alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3 \\ \alpha_1\alpha_3 & \beta_1\beta_3 & \gamma_1\gamma_3 & \gamma_1\beta_3 + \beta_1\gamma_3 & \gamma_1\alpha_3 + \alpha_1\gamma_3 & \alpha_1\beta_3 + \beta_1\alpha_3 \\ \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & \gamma_1\beta_2 + \beta_1\gamma_2 & \gamma_1\alpha_2 + \alpha_1\gamma_2 & \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 \end{pmatrix}}_{T_\sigma} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional

- Escritura alterna

$$\sigma_{x'} = \hat{\mathbf{e}}'^T_1 \underline{\underline{\sigma}} \hat{\mathbf{e}}'_1 \quad \tau_{y'z'} = \hat{\mathbf{e}}'^T_2 \underline{\underline{\sigma}} \hat{\mathbf{e}}'_3 = \hat{\mathbf{e}}'^T_3 \underline{\underline{\sigma}} \hat{\mathbf{e}}'_2$$

$$\sigma_{y'} = \hat{\mathbf{e}}'^T_2 \underline{\underline{\sigma}} \hat{\mathbf{e}}'_2 \quad \tau_{y'z'} = \hat{\mathbf{e}}'^T_1 \underline{\underline{\sigma}} \hat{\mathbf{e}}'_3 = \hat{\mathbf{e}}'^T_3 \underline{\underline{\sigma}} \hat{\mathbf{e}}'_1$$

$$\sigma_{x'} = \hat{\mathbf{e}}'^T_3 \underline{\underline{\sigma}} \hat{\mathbf{e}}'_3 \quad \tau_{y'z'} = \hat{\mathbf{e}}'^T_1 \underline{\underline{\sigma}} \hat{\mathbf{e}}'_2 = \hat{\mathbf{e}}'^T_2 \underline{\underline{\sigma}} \hat{\mathbf{e}}'_1$$

Caracterización de la matriz de tensiones al caso tridimensional

Como la dirección de los vectores \hat{e}'_1 , \hat{e}'_2 y \hat{e}'_3 es arbitraria, siempre y cuando estos sean vectores mutuamente ortogonales, de las ecuaciones anteriores se sigue que:

- el esfuerzo normal a un plano cuyo vector normal unitario es \hat{n} está dada por:

$$\begin{aligned}\sigma_{\hat{n}} &= \hat{n}^T \underline{\underline{\sigma}} \hat{n} \\ &= \sigma_x \alpha^2 + \sigma_y \beta^2 + \sigma_z \gamma^2 + 2\tau_{xy} \alpha \beta + 2\tau_{yz} \beta \gamma + 2\tau_{xz} \alpha \gamma\end{aligned}$$

- el esfuerzo cortante en la dirección del vector \hat{m} sobre un plano cuto vector normal unitario es \hat{n} es:

$$\tau_{\hat{n}\hat{m}} = \hat{m}^T \underline{\underline{\sigma}} \hat{n}$$

Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional

- Código: [02_06_02_sigma_bidimensional.ipynb](#)

$$\sigma_{x'}(\theta) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{y'}(\theta) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'}(\theta) = \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{z'}(\theta) = \tau_{x'z'}(\theta) = \tau_{y'z'}(\theta) = 0$$

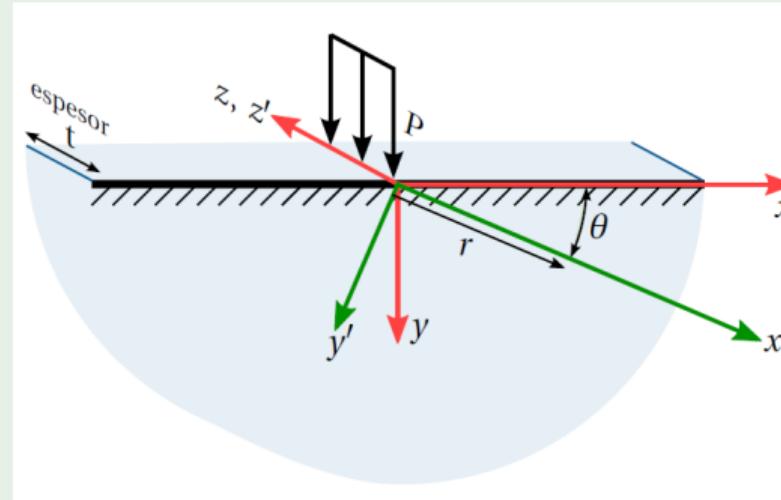
Caracterización de la matriz de tensiones al caso bidimensional

- Código: [02_06_02_sigma_bidimensional.ipynb](#)

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{pmatrix}}_{T_{\sigma, 2D}} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: el problema de Flamant

Ejemplo

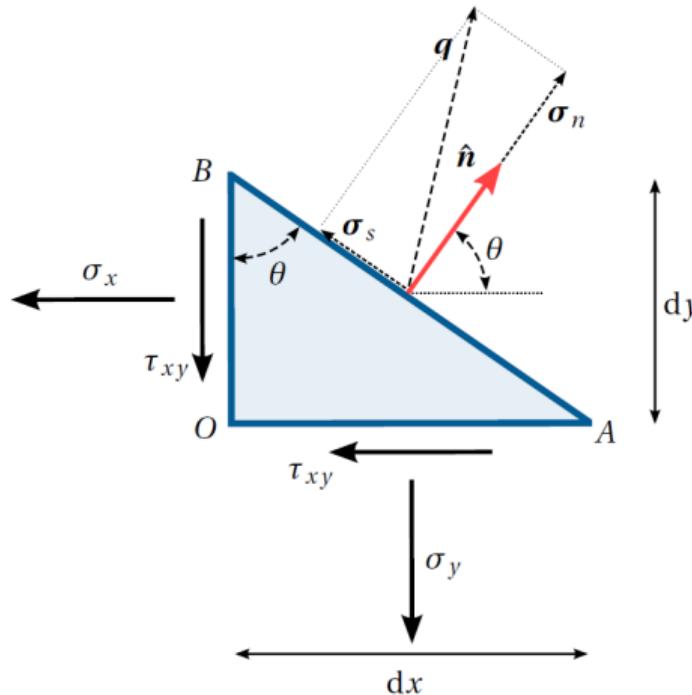


- Código: [02_06_02_ejemplo_01.ipynb](#)

Derrotero

- 2.1. Tensiones o esfuerzos
- 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
- 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional
- 2.4. Notación indicial
- 2.5. Cambio de base
- 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas
- **2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano**
- 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
- 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
- La analogía del bombillo y la caja
- Material de apoyo

Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano



Entendamos el vector del esfuerzo normal σ_n como la proyección del vector de esfuerzos q sobre el vector normal al plano \hat{n} :

$$\sigma_n = \text{Proy } q/\hat{n} = \frac{\langle q, \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n}, \hat{n} \rangle} \hat{n}$$

Esfuerzos normales y tangenciales (tridimensionales) sobre un plano

- El valor del esfuerzo normal:

$$\sigma_n = \sigma_x \alpha^2 + \sigma_y \beta^2 + \sigma_z \gamma^2 + 2\tau_{xz}\alpha\gamma + 2\tau_{yz}\beta\gamma + 2\tau_{xy}\alpha\beta$$

- El valor del esfuerzo tangencial o cortante:

$$\tau_n^2 = (\sigma_x \alpha + \tau_{xy} \beta + \tau_{xz} \gamma)^2 + (\tau_{xy} \alpha + \sigma_y \beta + \tau_{yz} \gamma)^2 + (\tau_{xz} \alpha + \tau_{yz} \beta + \sigma_z \gamma)^2 - \sigma_n^2$$

- Código: [02_07.ipynb](#)

Esfuerzos normales y tangenciales (bidimensionales) sobre un plano

$$\sigma'_x \rightarrow \sigma_n \quad \tau_{x'y'} \rightarrow \tau_n$$

- El valor del esfuerzo normal:

$$\begin{aligned}\sigma_n(\theta) &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy}\end{aligned}$$

- El valor del esfuerzo tangencial o cortante:

$$\tau_n(\theta) = \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta$$

Derrotero

- 2.1. Tensiones o esfuerzos
- 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
- 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional
- 2.4. Notación indicial
- 2.5. Cambio de base
- 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas
- 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- **2.8. Esfuerzos y direcciones principales**
- 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
- La analogía del bombillo y la caja
- Material de apoyo

Tensiones y direcciones principales en dos dimensiones

Esfuerzos principales bidimensionales

$$(\sigma_1)_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

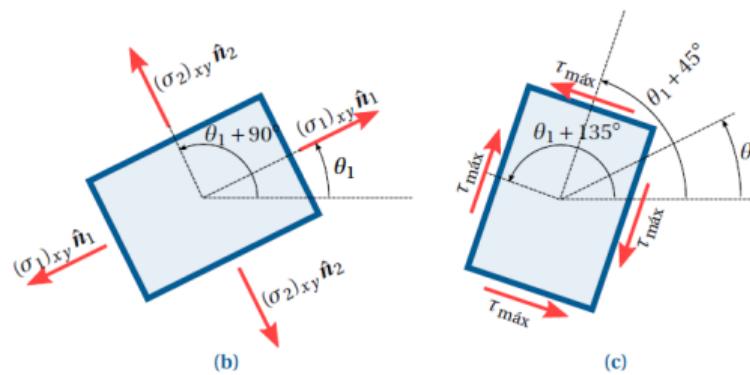
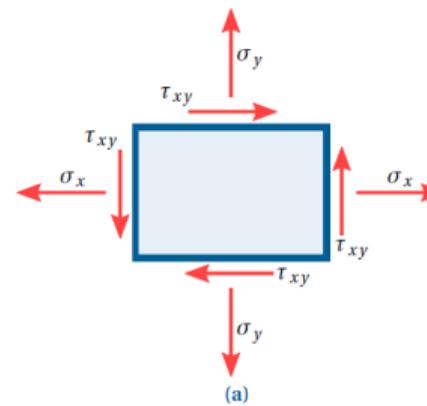
$$(\sigma_2)_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Tensiones y direcciones principales bidimensionales

Debemos dar solución a los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned}(\sigma_x - (\sigma_1)_{xy}) \alpha_1 + \tau_{xy} \beta_1 &= 0 & (\sigma_x - (\sigma_2)_{xy}) \alpha_2 + \tau_{xy} \beta_2 &= 0 \\ \tau_{xy} \alpha_1 + (\sigma_y - (\sigma_1)_{xy}) \beta_1 &= 0 & \text{y} & \tau_{xy} \alpha_2 + (\sigma_y - (\sigma_2)_{xy}) \beta_2 = 0 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 &= 1 & \alpha_2^2 + \beta_2^2 &= 1\end{aligned}$$

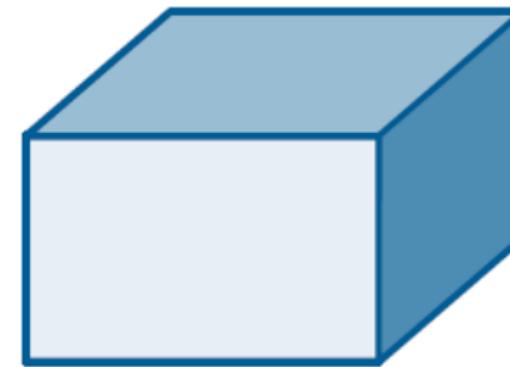
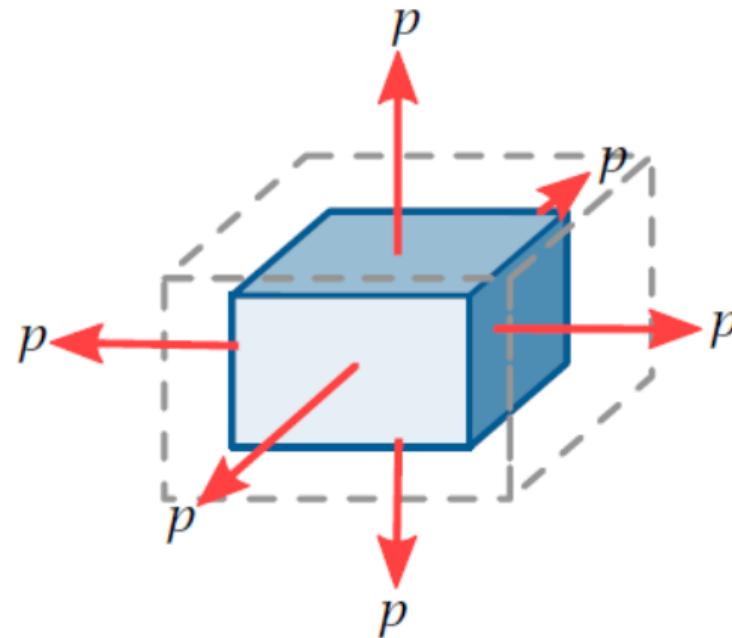
Tensiones y direcciones principales bidimensionales



Tensiones y direcciones principales bidimensionales

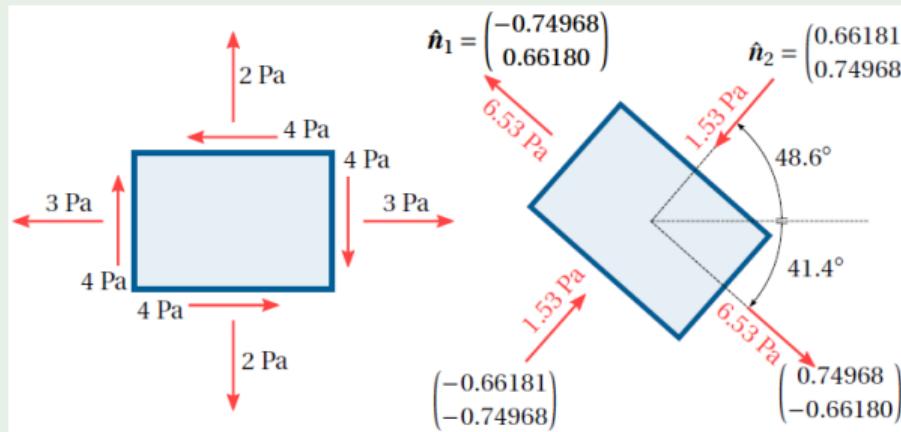
¿Cuándo tenemos un discriminante nulo?

$R//.$ Estado de esfuerzos hidrostáticos



Tensiones y direcciones principales bidimensionales

Ejemplo



- Código: [02_08_01_ejemplo_01.ipynb](#)

Tensiones y direcciones principales tridimensionales

Expandiendo el determinante $\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \mathbf{I}) = 0$

$$\begin{aligned} & (\sigma_x - \sigma_n) [(\sigma_y - \sigma_n)(\sigma_z - \sigma_n) - \tau_{yz}^2] \\ & - \tau_{xy} [\tau_{xy}(\sigma_z - \sigma_n) - \tau_{yz}\tau_{xz}] \\ & + \tau_{xz} [\tau_{xy}\tau_{yz} - (\sigma_y - \sigma_n)\tau_{xz}] = 0; \end{aligned}$$

Tensiones y direcciones principales tridimensionales

Agrupando y reduciendo términos:

Ecuación característica de $\underline{\underline{\sigma}}$ tridimensional

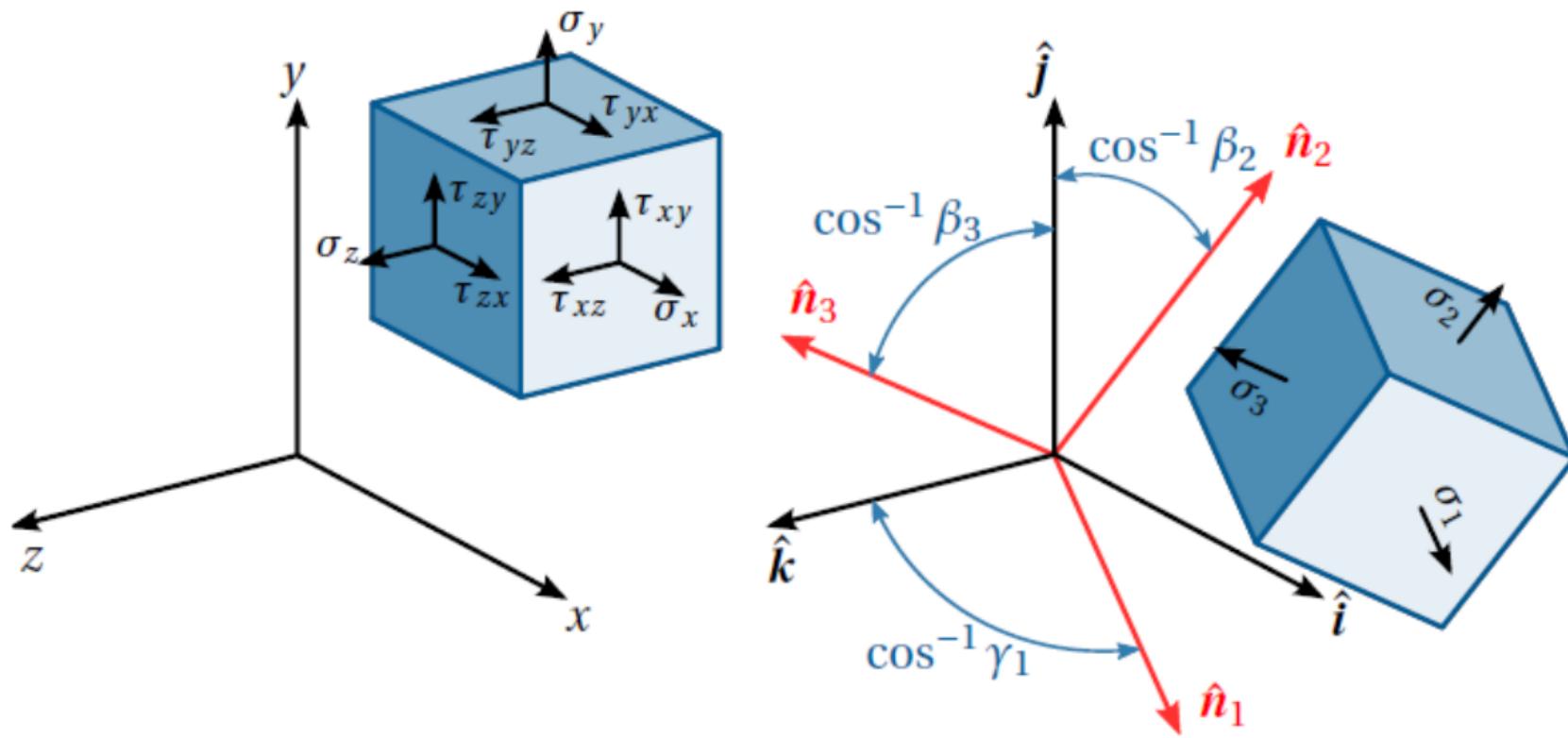
$$-\sigma_n^3 + I_1\sigma_n^2 - I_2\sigma_n + I_3 = 0$$

donde,

$$\begin{aligned}\Theta &:= I_1 := \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \\ I_2 &:= \frac{1}{2} \left((\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}))^2 - \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^2) \right) \\ I_3 &:= \det(\underline{\underline{\sigma}}).\end{aligned}$$

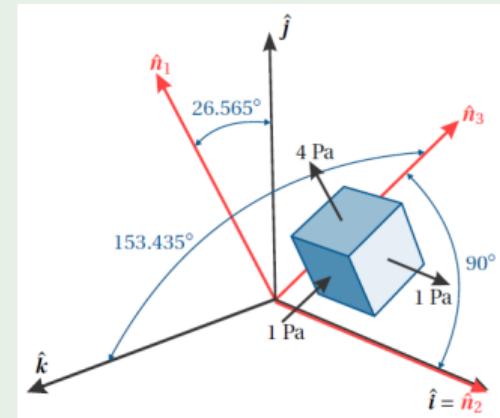
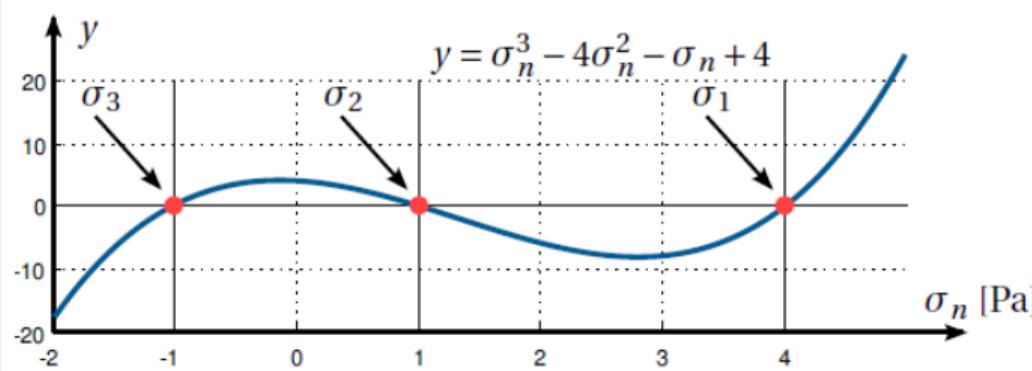
- Código: [02_08_02.ipynb](#)

Tensiones y direcciones principales tridimensionales



Tensiones y direcciones principales tridimensionales

Ejemplo



- Código: [02_08_02_ejemplos.ipynb](#)

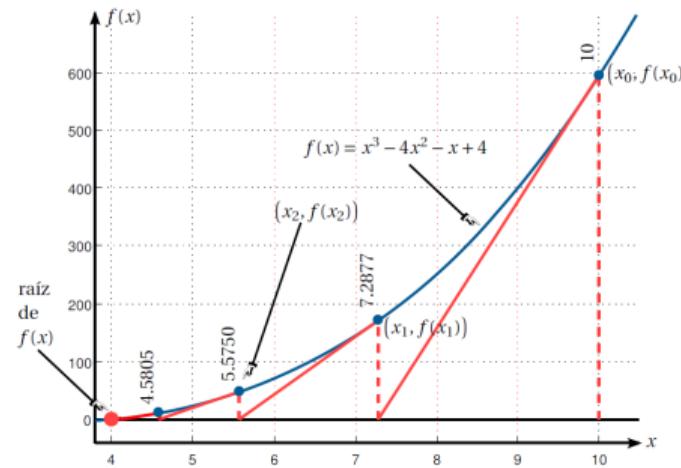
Método de Newton-Raphson

para encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz de tensiones utilizando una calculadora científica

Estudio autónomo

Pregúntese y responda:

- ¿Cómo lo programo en Python o Matlab?
- ¿Ya está implementado en Python o Matlab? ¿Cómo funciona?



Ortogonalidad de las direcciones principales

Estudio autónomo

Verifique la ortogonalidad de los vectores propios del ejercicio anterior

- **Código:** [02_08_04_ejemplo.ipynb](#)

Derrotero

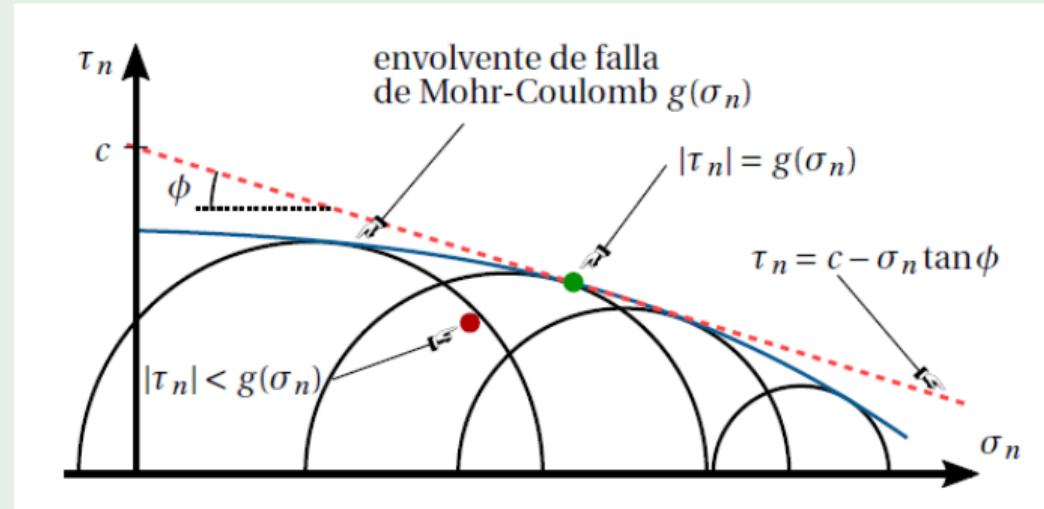
- 2.1. Tensiones o esfuerzos
- 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
- 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional
- 2.4. Notación indicial
- 2.5. Cambio de base
- 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas
- 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
- **2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales**
- La analogía del bombillo y la caja
- Material de apoyo

Círculo de Mohr

La **circunferencia de Mohr** fue propuesta por el ingeniero civil alemán Otto Mohr (1835 - 1918) en 1882 **con el objeto de representar gráficamente el estado de esfuerzos en un punto**.

Ejemplo: criterio de falla de Mohr-Coulomb

Este criterio es altamente utilizado en el análisis de cimentaciones.



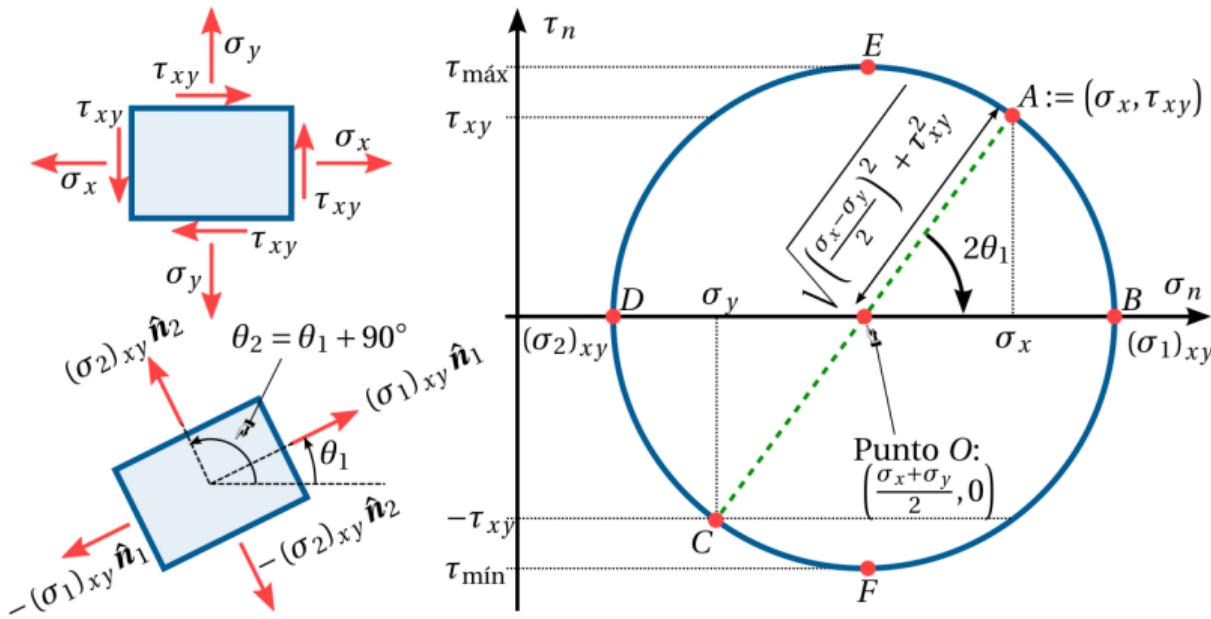
Círculo de Mohr en dos dimensiones

Estudio autónomo

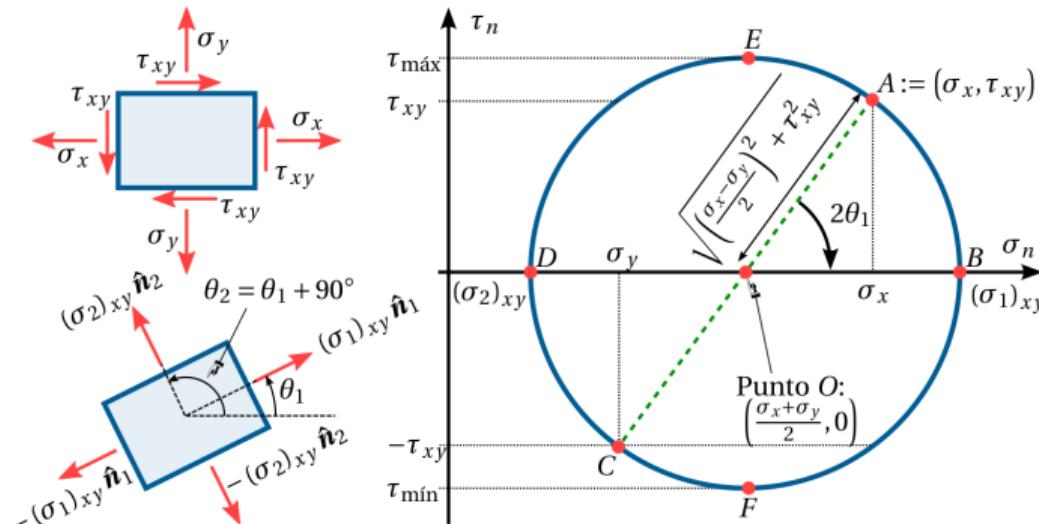
Estudiar los siguientes videos:

- 02.09 - Círculo de Mohr en 2D (Parte 1/3) - Deducción del círculo de Mohr para tensión plana
- 02.09 - Círculo de Mohr en 2D (Parte 2/3) - Esfuerzos normales y cortantes máximos y mínimos
- 02.09 - Círculo de Mohr en 2D (Parte 3/3) - Deducción del círculo de Mohr para tensión plana

Círculo de Mohr en dos dimensiones



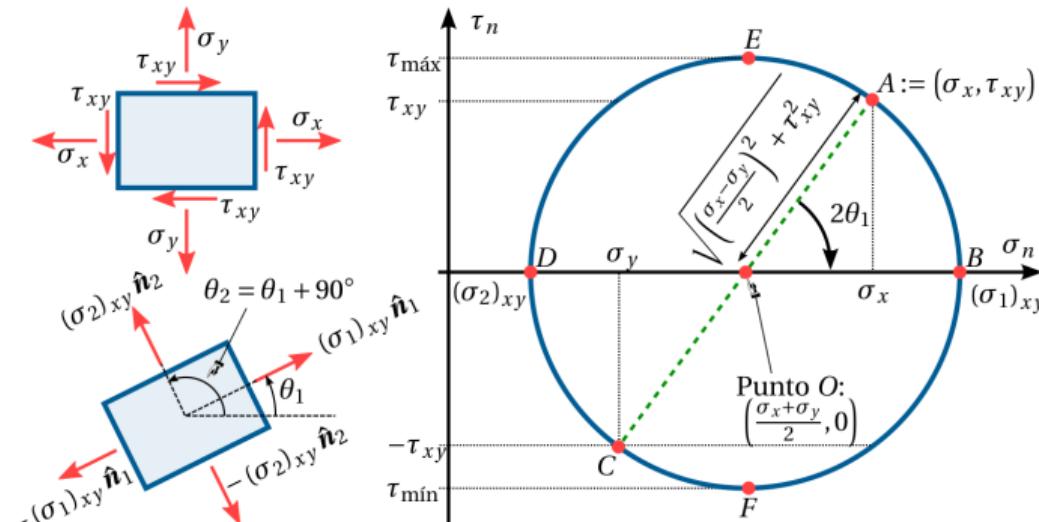
Círculo de Mohr en dos dimensiones



Interpretación física

Representa el lugar geométrico de las posibles combinaciones de esfuerzos normales σ_n y cortantes τ_n que actúan sobre la superficie inclinada \overline{AB} a medida que el ángulo θ varía entre 0° y 180° .

Círculo de Mohr en dos dimensiones



Interpretación matemática

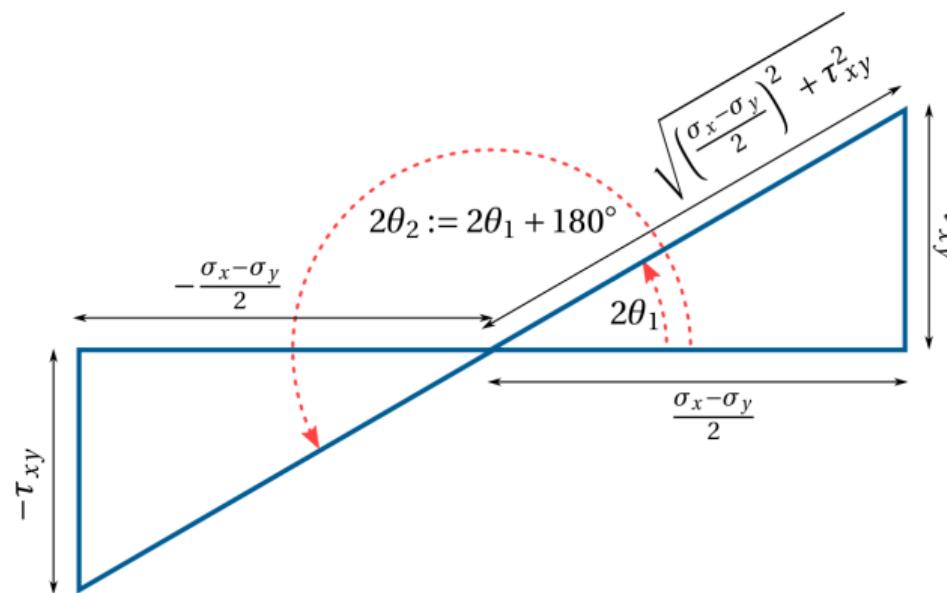
Curva paramétrica $(\sigma_n(\theta), \tau_n(\theta))$ que aparecen al variar el parámetro θ en el intervalo $[0^\circ, 180^\circ]$. Dicha curva empieza a graficarse en el punto de coordenadas (σ_x, σ_y) y se traza en sentido horario. La circunferencia resultante tiene centro en $(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0)$ y radio $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

Círculo de Mohr en dos dimensiones

Nos planteamos dos preguntas:

- ¿Cuál es la inclinación θ para la cual se producen los esfuerzos normales σ_n máximos y mínimos sobre el punto en consideración?
- ¿Qué magnitud tienen?

Círculo de Mohr en dos dimensiones



$$\sin 2\theta_1 = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

$$\cos 2\theta_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sin 2\theta_2 = -\frac{\tau_{xy}}{R}$$

$$\cos 2\theta_2 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}$$

Círculo de Mohr en dos dimensiones

Resumen de ecuaciones

- Construcción de la curva paramétrica:

$$\sigma_n(\theta) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_n(\theta) = \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta$$

- Direcciones principales:

$$\tan 2\theta_1 = \frac{+\tau_{xy}}{+\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} \quad \tan 2\theta_2 = \frac{-\tau_{xy}}{-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}$$

- Esfuerzos principales:

$$(\sigma_1)_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$(\sigma_2)_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Círculo de Mohr en dos dimensiones

Resumen de ecuaciones

- Esfuerzos cortantes máximos y mínimos:

$$(\tau_{\max})_{xy} = + \frac{(\sigma_1)_{xy} - (\sigma_2)_{xy}}{2} = + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$(\tau_{\min})_{xy} = - \frac{(\sigma_1)_{xy} - (\sigma_2)_{xy}}{2} = - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Dirección de los esfuerzos cortantes máximos y mínimos:

$$\cot 2\theta_{c1} = \frac{+\tau_{xy}}{-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} \quad \cot 2\theta_{c2} = \frac{-\tau_{xy}}{+\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}$$

Círculo de Mohr en dos dimensiones

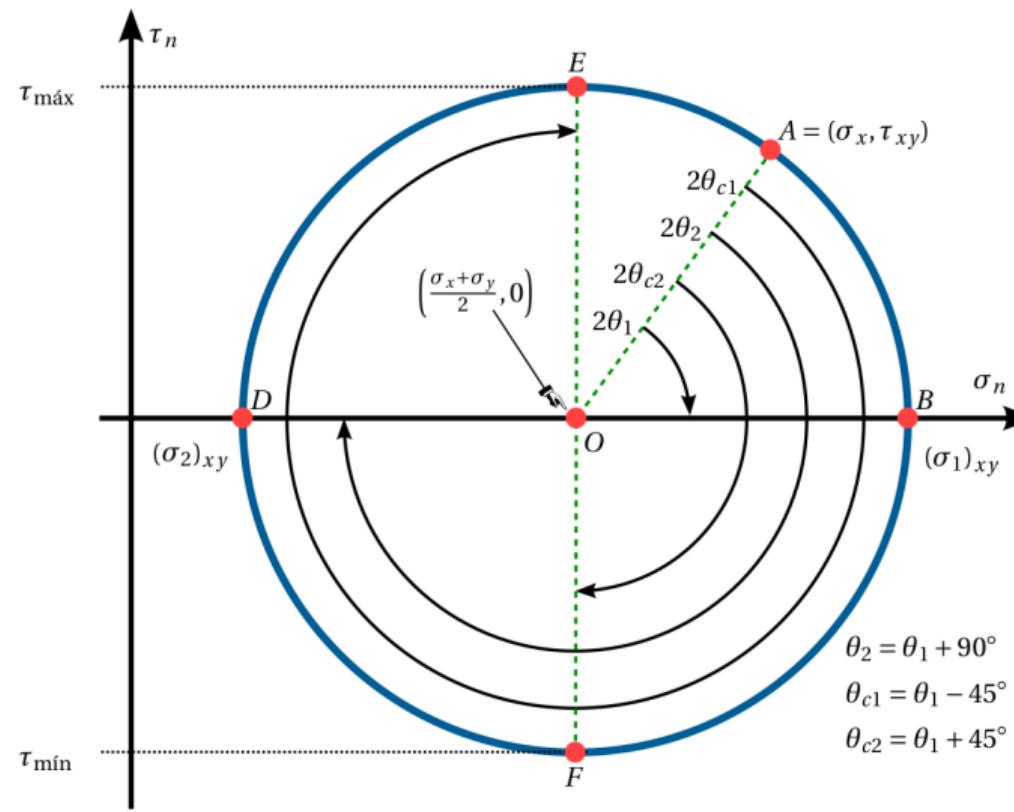
Relación entre ángulos

Veremos que θ_{c1} y θ_{c2} se producen a 45° de los planos principales, más explícitamente:

$$\theta_{c1} = \theta_1 - 45^\circ = \theta_2 + 45^\circ$$

$$\theta_{c2} = \theta_1 + 45^\circ = \theta_2 - 45^\circ$$

Gráfica e interpretación del círculo de Mohr



La función atan2

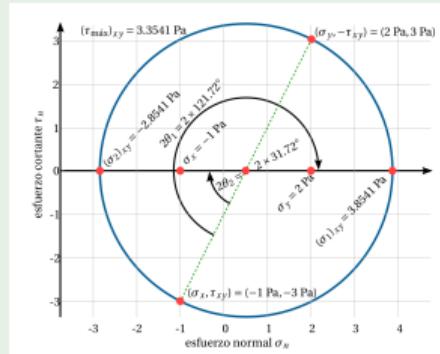
Es una función $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow (-\pi, \pi]$ que retorna el ángulo correcto en radiante entre un vector $[x, y]^T$ y el eje x positivo teniendo en cuenta que para ubicar el cuadrante, se utilizan los signos de los argumentos x y y . Está definida por:

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } y \geq 0, x < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{si } y < 0, x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } y > 0, x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } y < 0, x = 0 \\ \text{indefinido} & \text{si } y = 0, x = 0 \end{cases}$$

- Código: [02_09_03_atan2.ipynb](#)

Círculo de Mohr en dos dimensiones

Ejemplo



Consideré un punto sujeto a los esfuerzos $\sigma_x = 1 \text{ Pa}$, $\sigma_y = 2 \text{ Pa}$ y $\tau_{xy} = -3 \text{ Pa}$; calcule los esfuerzos principales y sus direcciones para el punto en consideración.

- Código: [02_09_04_ejemplo.ipynb](#)
- Código: [circulo_mohr_2d.py](#)

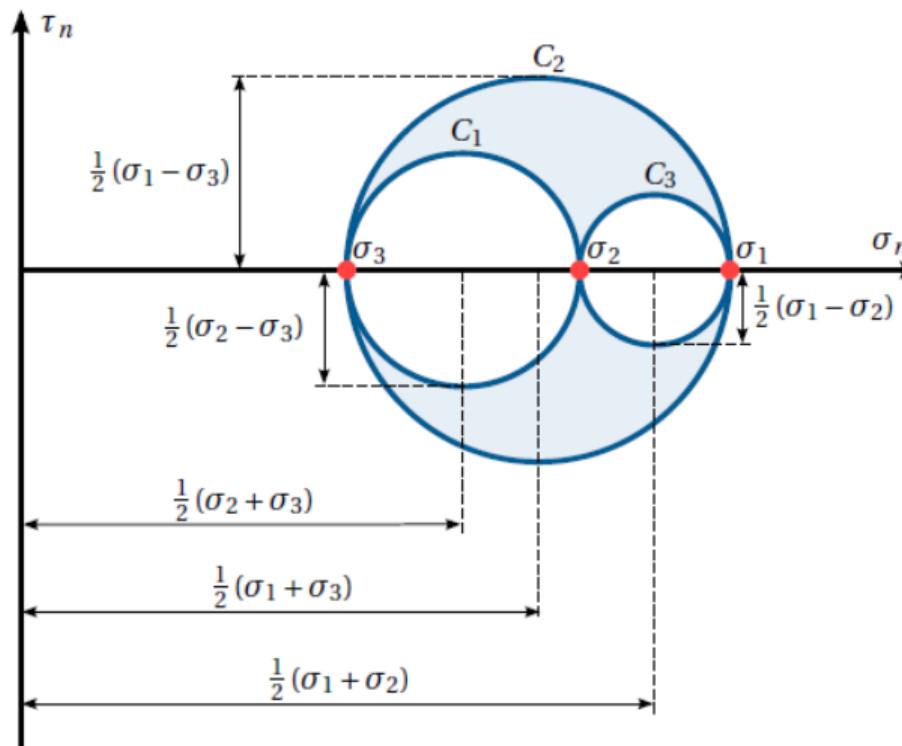
Círculo de Mohr en tres dimensiones

Estudio autónomo

Estudiar los siguientes videos:

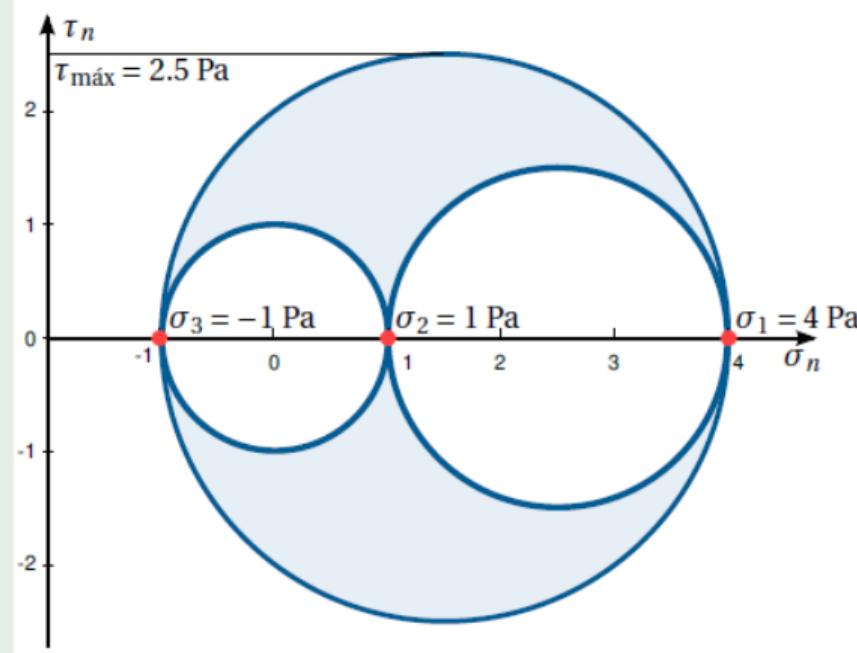
- 02.09 - Círculo de Mohr en 3D (Parte 1/3) - Deducción del círculo de Mohr tridimensional
- 02.09 - Círculo de Mohr en 3D (Parte 2/3) - Ubicando los planos donde actúan los esfuerzos en 3D
- 02.09 - Círculo de Mohr en 3D (Parte 3/3) - ¿Dónde actúan los esfuerzos cortantes máximos en 3D?

Círculo de Mohr en tres dimensiones



Círculo de Mohr en tres dimensiones

Ejemplo



Derrotero

- 2.1. Tensiones o esfuerzos
- 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
- 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional
- 2.4. Notación indicial
- 2.5. Cambio de base
- 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas
- 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
- 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
- **La analogía del bombillo y la caja**
- Material de apoyo

La analogía del bombillo y la caja

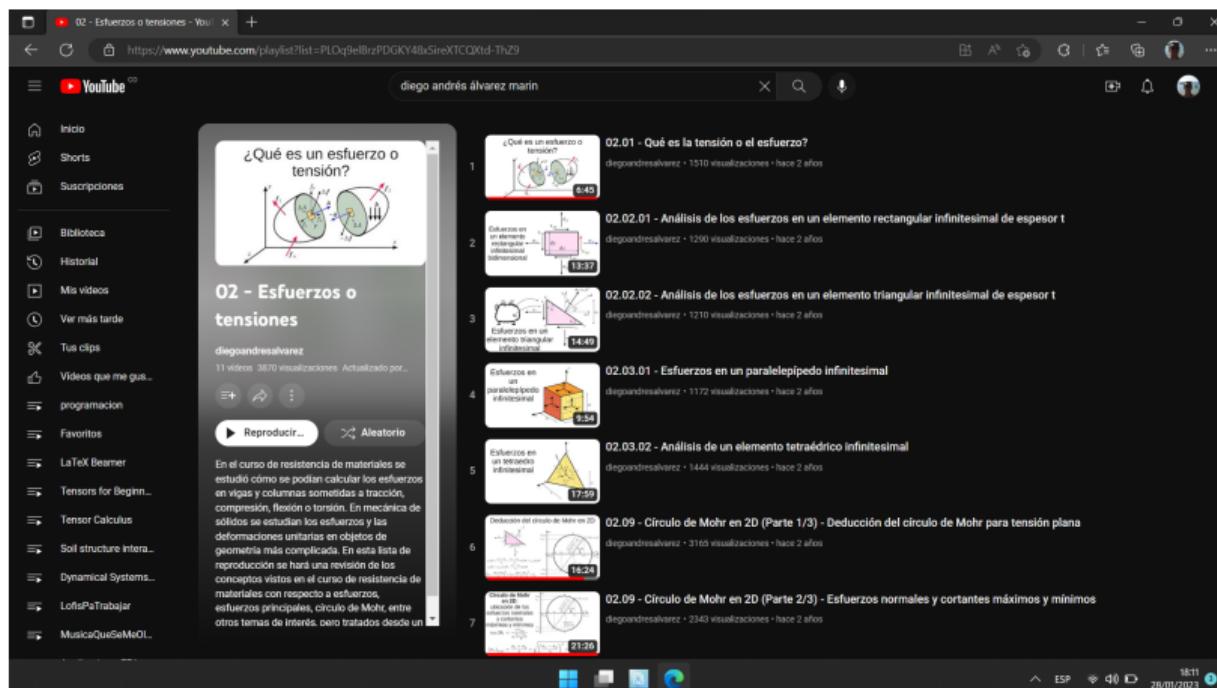
Estudio autónomo

Prestar atención a La analogía del bombillo y la caja :)

Derrotero

- 2.1. Tensiones o esfuerzos
- 2.2. Estudio de las tensiones en un punto bidimensional
- 2.3. Estudio de las tensiones en un punto tridimensional
- 2.4. Notación indicial
- 2.5. Cambio de base
- 2.6. Matriz de esfuerzos expresada en otro sistema de coordenadas
- 2.7. Esfuerzos normales y tangenciales sobre un plano
- 2.8. Esfuerzos y direcciones principales
- 2.9. Círculo de Mohr en problemas bi y tridimensionales
- La analogía del bombillo y la caja
- **Material de apoyo**

Videos de YouTube



- Lista de reproducción: [02 - Esfuerzos o Tensiones](#)
- Repositorio del curso: [github/medio_continuo](https://github.com/diegoandresalvarez/medio_continuo)