

4100611 - Mecánica de Sólidos

Unidad 1. Repaso de esfuerzos, deformaciones infinitesimales y ley de Hooke.

Michael Heredia Pérez

Ing., Esp., MSc.

mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil



2026a

Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada.



Derrotero

- Conceptos básicos
- Estudio de los esfuerzos en un punto
- Estudio de los desplazamientos y las deformaciones en un punto
- Relaciones entre esfuerzos y deformaciones
- Material de apoyo

Derrotero

- Conceptos básicos
- Estudio de los esfuerzos en un punto
- Estudio de los desplazamientos y las deformaciones en un punto
- Relaciones entre esfuerzos y deformaciones
- Material de apoyo

¿Qué es la mecánica de sólidos?

Es la rama de la mecánica clásica que estudia el comportamiento de la materia sólida deformable sometida a acciones externas como:

- Fuerzas superficiales
- Cambios de temperatura
- Desplazamientos aplicados

Movimiento de gases y líquidos

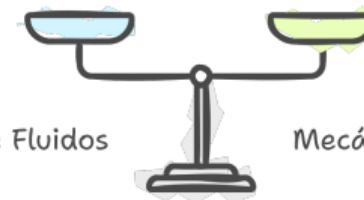


Comportamiento de materiales sólidos

Fuerzas que provocan el movimiento



Fuerzas y cambios de temperatura



Mecánica de Fluidos

Mecánica de Sólidos

Figure: Hecho con Napkin AI.

¿Qué es un sólido?

Un sólido se caracteriza por:

- Oponer resistencia a la deformación (cambios de forma y de volumen).
- Valores altos del módulo de elasticidad (E) y de cortante (G).

Sus propiedades:

Isotropía

Propiedades físicas del material son las mismas en todas las direcciones.

Continuidad

No existen discontinuidades intersticiales.

Homogeneidad

Cualquier muestra del sólido posee las mismas propiedades físicas.

¿Qué es un sólido?

Un sólido se caracteriza por:

- Oponer resistencia a la deformación (cambios de forma y de volumen).
- Valores altos del módulo de elasticidad (E) y de cortante (G).

Sus propiedades:

Isotropía

Propiedades físicas del material son las mismas en todas las direcciones.

Continuidad

No existen discontinuidades intersticiales.

Homogeneidad

Cualquier muestra del sólido posee las mismas propiedades físicas.

¿Qué es un sólido?

Un sólido se caracteriza por:

- Oponer resistencia a la deformación (cambios de forma y de volumen).
- Valores altos del módulo de elasticidad (E) y de cortante (G).

Sus propiedades:

Isotropía

Propiedades físicas del material son las mismas en todas las direcciones.

Continuidad

No existen discontinuidades intersticiales.

Homogeneidad

Cualquier muestra del sólido posee las mismas propiedades físicas.

¿Qué es un sólido?

Un sólido se caracteriza por:

- Oponer resistencia a la deformación (cambios de forma y de volumen).
- Valores altos del módulo de elasticidad (E) y de cortante (G).

Sus propiedades:

Isotropía

Propiedades físicas del material son las mismas en todas las direcciones.

Continuidad

No existen discontinuidades intersticiales.

Homogeneidad

Cualquier muestra del sólido posee las mismas propiedades físicas.

¿Qué es un sólido?

Un sólido se caracteriza por:

- Oponer resistencia a la deformación (cambios de forma y de volumen).
- Valores altos del módulo de elasticidad (E) y de cortante (G).

Sus propiedades:

Isotropía

Propiedades físicas del material son las mismas en todas las direcciones.

Continuidad

No existen discontinuidades intersticiales.

Homogeneidad

Cualquier muestra del sólido posee las mismas propiedades físicas.

¿Qué es un sólido?

Un sólido se caracteriza por:

- Oponer resistencia a la deformación (cambios de forma y de volumen).
- Valores altos del módulo de elasticidad (E) y de cortante (G).

Sus propiedades:

Isotropía

Propiedades físicas del material son las mismas en todas las direcciones.

Continuidad

No existen discontinuidades intersticiales.

Homogeneidad

Cualquier muestra del sólido posee las mismas propiedades físicas.

¿Qué es un sólido?

Un sólido se caracteriza por:

- Oponer resistencia a la deformación (cambios de forma y de volumen).
- Valores altos del módulo de elasticidad (E) y de cortante (G).

Sus propiedades:

Isotropía

Propiedades físicas del material son las mismas en todas las direcciones.

Continuidad

No existen discontinuidades intersticiales.

Homogeneidad

Cualquier muestra del sólido posee las mismas propiedades físicas.

Caracterización: ¿Cómo responde un sólido al esfuerzo aplicado?

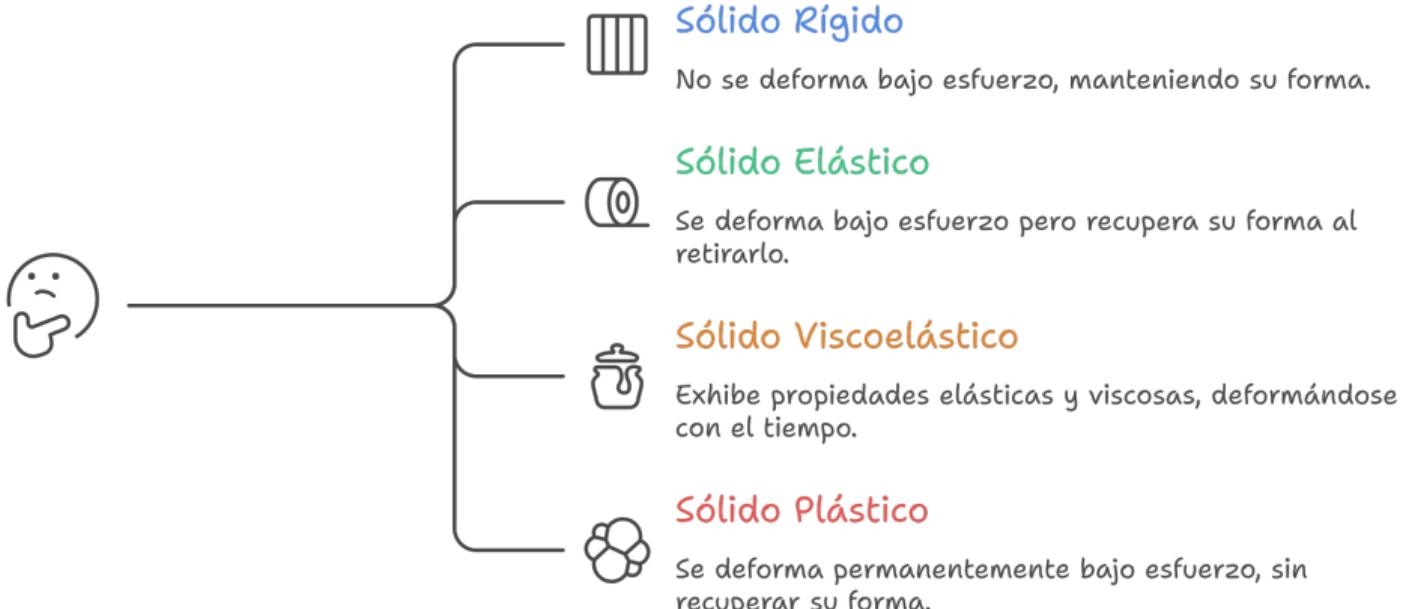


Figure: Hecho con Napkin AI.

Diferenciales de primer, segundo y tercer orden

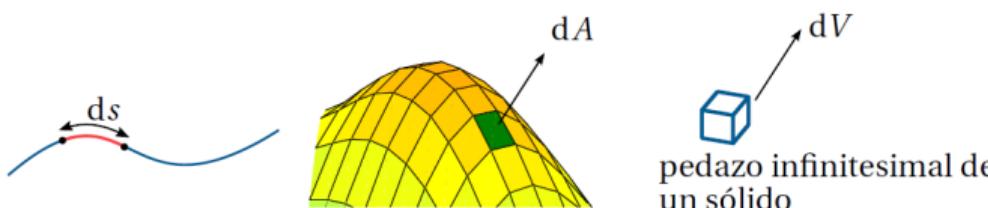


Figure: Diferenciales de línea, de área y de volumen.

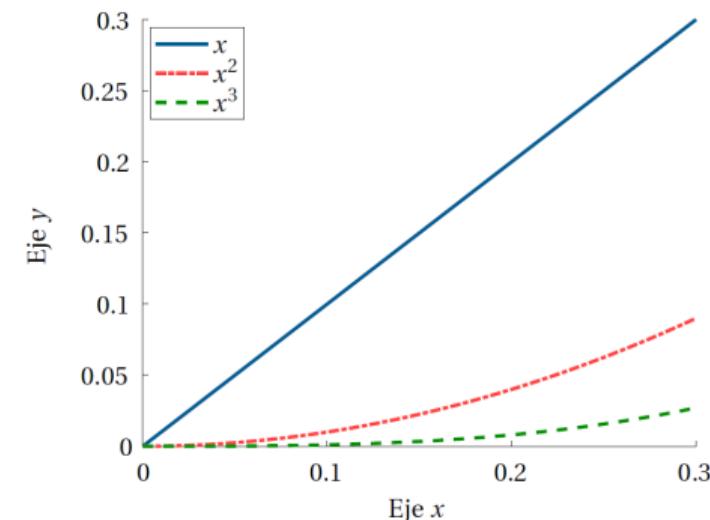


Figure: Tasa de crecimiento. Variación de las funciones x , x^2 y x^3 .

Fuerzas que actúan sobre un sólido

Fuerzas másicas

(*body forces*)

Están distribuidas en todo el sólido, de modo que estas actúan directamente en todas las partículas del cuerpo.

$$\mathbf{b}(x, y, z) := [X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)]^T$$

Fuerzas superficiales

(*surface forces*)

Están presentes únicamente en el contorno del sólido, y se producen por el contacto con otro sólido o fluido.

$$\mathbf{f}(x, y, z) := [\bar{X}(x, y, z), \bar{Y}(x, y, z), \bar{Z}(x, y, z)]^T$$

Fuerzas que actúan sobre un sólido

Fuerzas másicas

(*body forces*)

Están distribuidas en todo el sólido, de modo que estas actúan directamente en todas las partículas del cuerpo.

$$\mathbf{b}(x, y, z) := [X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)]^T$$

Fuerzas superficiales

(*surface forces*)

Están presentes únicamente en el contorno del sólido, y se producen por el contacto con otro sólido o fluido.

$$\mathbf{f}(x, y, z) := [\bar{X}(x, y, z), \bar{Y}(x, y, z), \bar{Z}(x, y, z)]^T$$

Fuerzas que actúan sobre un sólido

Fuerzas másicas

(*body forces*)

Están distribuidas en todo el sólido, de modo que estas actúan directamente en todas las partículas del cuerpo.

$$\mathbf{b}(x, y, z) := [X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)]^T$$

Fuerzas superficiales

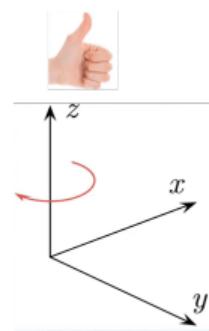
(*surface forces*)

Están presentes únicamente en el contorno del sólido, y se producen por el contacto con otro sólido o fluido.

$$\mathbf{f}(x, y, z) := [\bar{X}(x, y, z), \bar{Y}(x, y, z), \bar{Z}(x, y, z)]^T$$

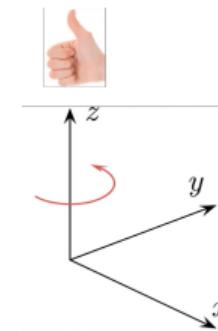
Un pequeño comentario sobre el sistema coordenado en tres dimensiones

Sistema coordenado de la mano **izquierda**



Usado usualmente en geotécnica y pavimentos

Sistema coordenado de la mano **derecha**

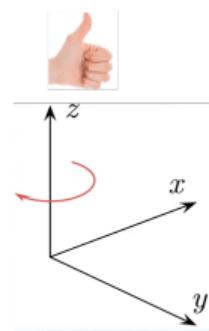


Usado usualmente en estructuras e hidráulica

La consecuencia de usar un sistema de coordenadas u otro es que las fórmulas que se deducen con diferente sistema de coordenadas pueden diferir en los signos de las fórmulas.

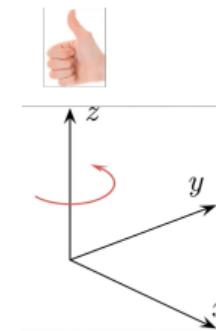
Un pequeño comentario sobre el sistema coordenado en tres dimensiones

Sistema coordenado de la mano **izquierda**



Usado usualmente en geotécnica y pavimentos

Sistema coordenado de la mano **derecha**

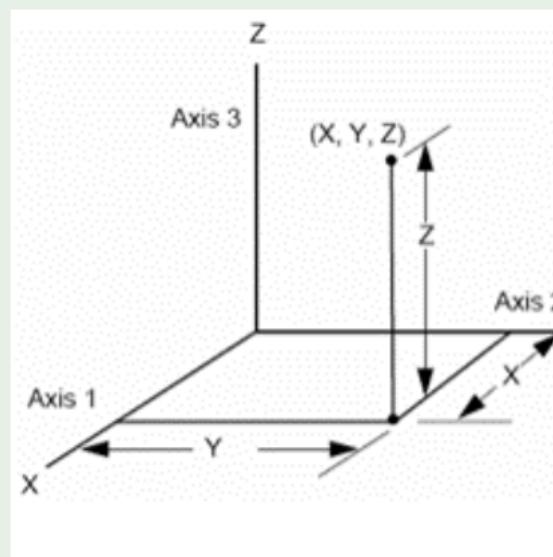


Usado usualmente en estructuras e hidráulica

La consecuencia de usar un sistema de coordenadas u otro es que las fórmulas que se deducen con diferente sistema de coordenadas pueden diferir en los signos de las fórmulas.

¿... dónde veo esto?

Manual de MIDAS GTS

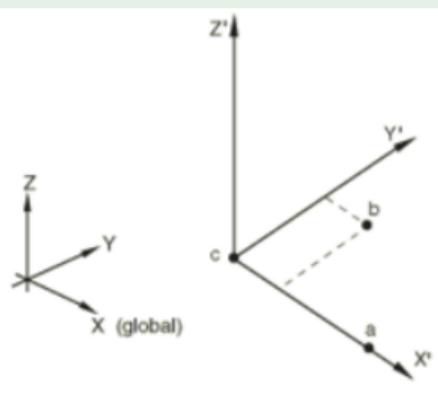


MIDAS GTS traduce Sistema de Análisis Geotécnico... y trabaja el sistema coordenado de la mano derecha!

¿... dónde veo esto?

Abaqus y FEM Design son softwares enfocados en el área estructural y mecánica, y también trabajan en el sistema coordenado de la mano derecha

Manual de Abaqus



Manual de FEM Design

Global co-ordinate system	
Function	Definition of co-ordinates Definition of directions Interpretation of results -
Type	Right-handed Cartesian
Axes	X, Y, Z
Symbol	
Symbol color	Fixed 3 colors, X = green Y = red Z = blue

¿... dónde veo esto?

- NO es información trivial, de ser así no se molestarían en ponerlo en los manuales de usuario del programa.

Otro ejemplo

La fuerza cortante en función de la carga distribuida en vigas... ¿cómo se define?

$$\frac{dV}{dx} = w \text{ o } \frac{dV}{dx} = -w$$

¿... dónde veo esto?

- NO es información trivial, de ser así no se molestarían en ponerlo en los manuales de usuario del programa.

Otro ejemplo

La fuerza cortante en función de la carga distribuida en vigas... ¿cómo se define?

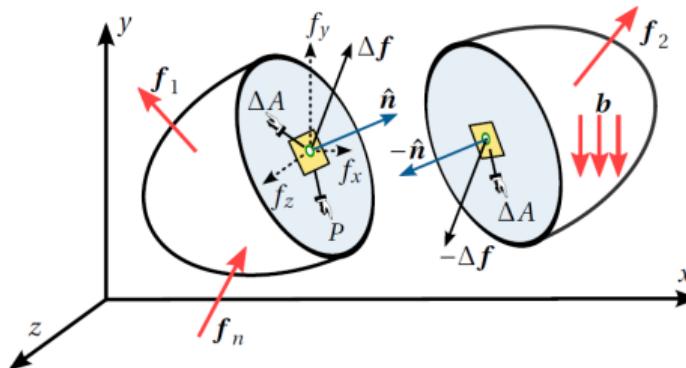
$$\frac{dV}{dx} = w \text{ o } \frac{dV}{dx} = -w$$

Derrotero

- Conceptos básicos
- **Estudio de los esfuerzos en un punto**
- Estudio de los desplazamientos y las deformaciones en un punto
- Relaciones entre esfuerzos y deformaciones
- Material de apoyo

Tensiones o esfuerzos

Intensidad de una fuerza por unidad de área en el contorno de un punto material sobre una superficie real o imaginaria de un medio continuo.



Principio de esfuerzos de Cauchy

$$q(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta A}$$

El esfuerzo:

$$q(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta A}$$

aquí ΔA tiene normal \hat{n} . Se divide en:

- **Vector de esfuerzo normal**

Fuerzas de compresión y tracción

$$\sigma_n(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f_n}{\Delta A}$$

- **Vector de esfuerzo tangencial**

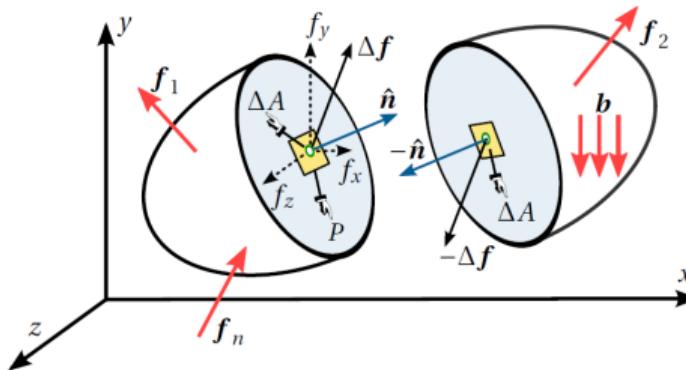
Fuerzas de cortante

$$\sigma_s(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f_s}{\Delta A}$$

$$q(x, y, z) = \sigma_n(x, y, z) + \sigma_s(x, y, z)$$

Tensiones o esfuerzos

Intensidad de una fuerza por unidad de área en el contorno de un punto material sobre una superficie real o imaginaria de un medio continuo.



Principio de esfuerzos de Cauchy

$$\mathbf{q}(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta A}$$

El esfuerzo:

$$q(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta A}$$

aquí ΔA tiene normal \hat{n} . Se divide en:

- **Vector de esfuerzo normal**

Fuerzas de compresión y tracción

$$\sigma_n(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f_n}{\Delta A}$$

- **Vector de esfuerzo tangencial**

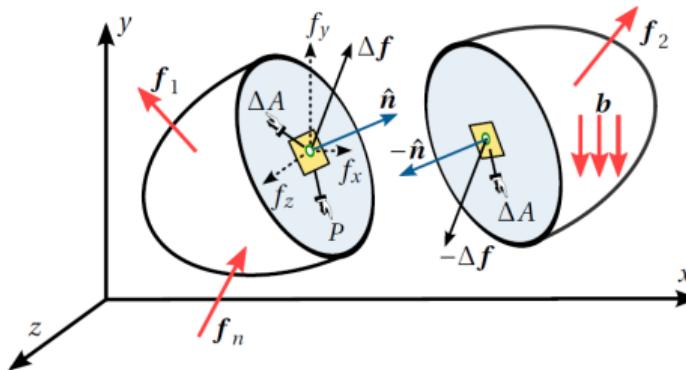
Fuerzas de cortante

$$\sigma_s(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f_s}{\Delta A}$$

$$q(x, y, z) = \sigma_n(x, y, z) + \sigma_s(x, y, z)$$

Tensiones o esfuerzos

Intensidad de una fuerza por unidad de área en el contorno de un punto material sobre una superficie real o imaginaria de un medio continuo.



Principio de esfuerzos de Cauchy

$$q(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta A}$$

El esfuerzo:

$$q(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta A}$$

aquí ΔA tiene normal \hat{n} . Se divide en:

- **Vector de esfuerzo normal**

Fuerzas de compresión y tracción

$$\sigma_n(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f_n}{\Delta A}$$

- **Vector de esfuerzo tangencial**

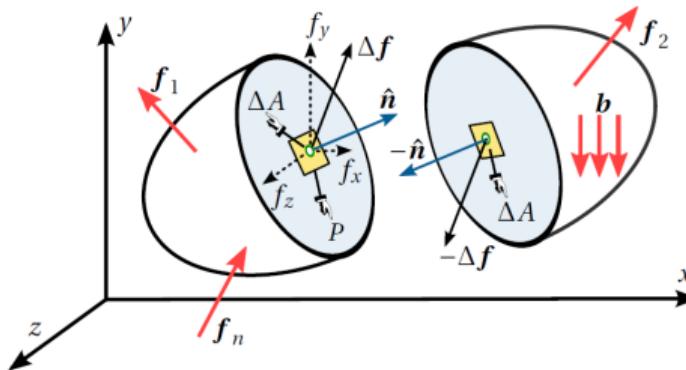
Fuerzas de cortante

$$\sigma_s(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f_s}{\Delta A}$$

$$q(x, y, z) = \sigma_n(x, y, z) + \sigma_s(x, y, z)$$

Tensiones o esfuerzos

Intensidad de una fuerza por unidad de área en el contorno de un punto material sobre una superficie real o imaginaria de un medio continuo.



Principio de esfuerzos de Cauchy

$$q(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta A}$$

El esfuerzo:

$$q(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta A}$$

aquí ΔA tiene normal \hat{n} . Se divide en:

- **Vector de esfuerzo normal**

Fuerzas de compresión y tracción

$$\sigma_n(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f_n}{\Delta A}$$

- **Vector de esfuerzo tangencial**

Fuerzas de cortante

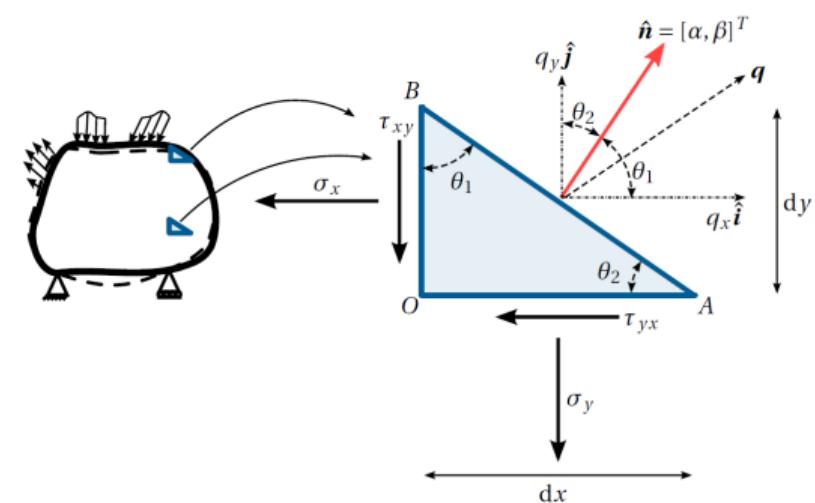
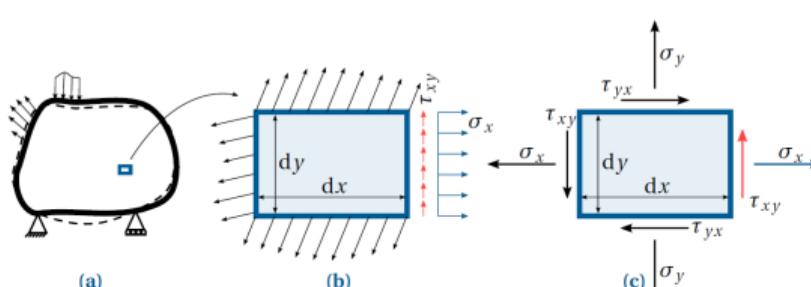
$$\sigma_s(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta f_s}{\Delta A}$$

$$q(x, y, z) = \sigma_n(x, y, z) + \sigma_s(x, y, z)$$

Esfuerzos bidimensionales

Fórmula de Cauchy bidimensional

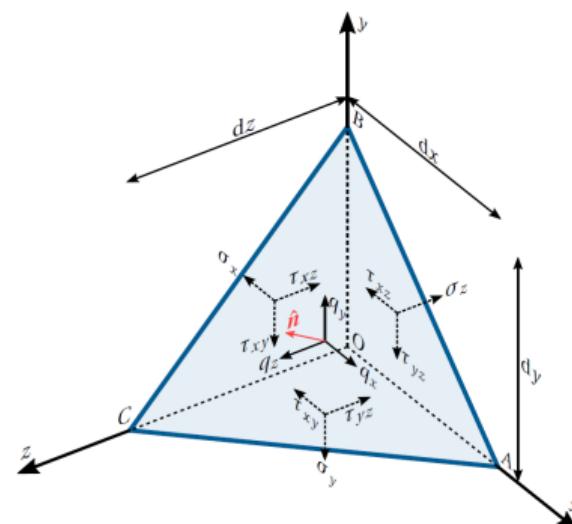
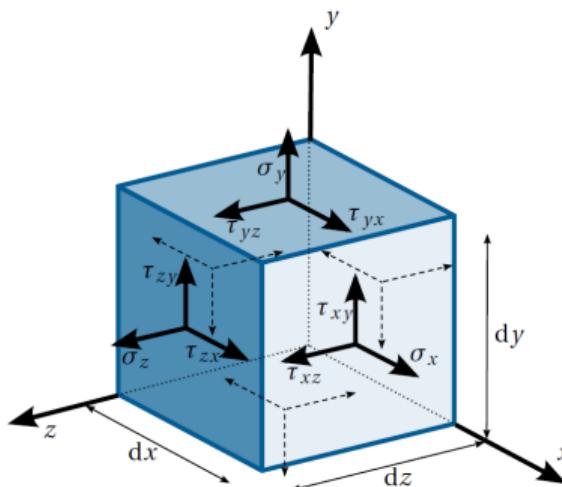
$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$



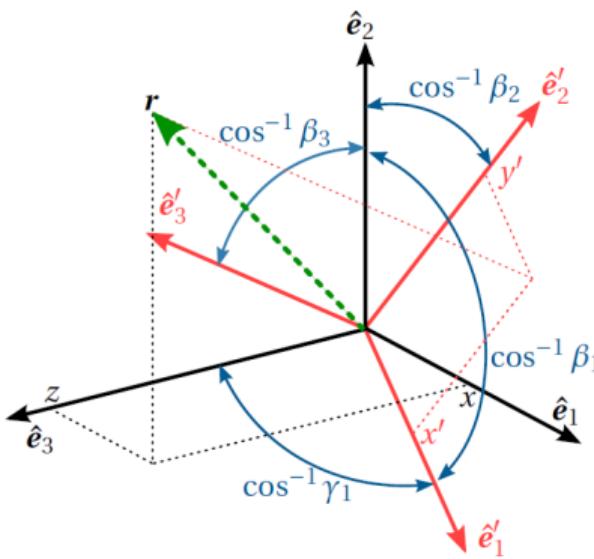
Esfuerzos tridimensionales

Fórmula de Cauchy tridimensional

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$



Cambio de base y tensor de esfuerzos en otro sistema coordenado



Del sistema global al local

Incómodo al cómodo

$$\underline{\underline{\sigma}}' = T^T \underline{\underline{\sigma}} T$$

Del sistema local al global

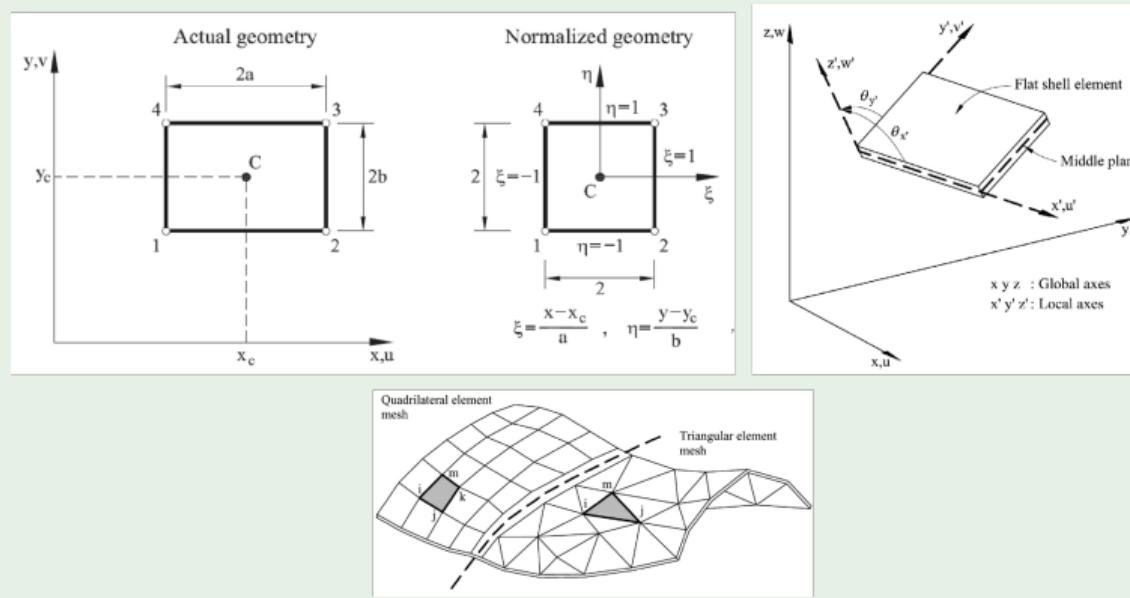
Cómodo al incómodo

$$\underline{\underline{\sigma}} = T \underline{\underline{\sigma}}' T^T$$

- Sistema de coordenadas **globales**: (x_i, \hat{e}_i)
- Sistema de coordenadas **locales**: (x'_i, \hat{e}'_i)

¿... dónde veo esto?

Formulación de soluciones numéricas

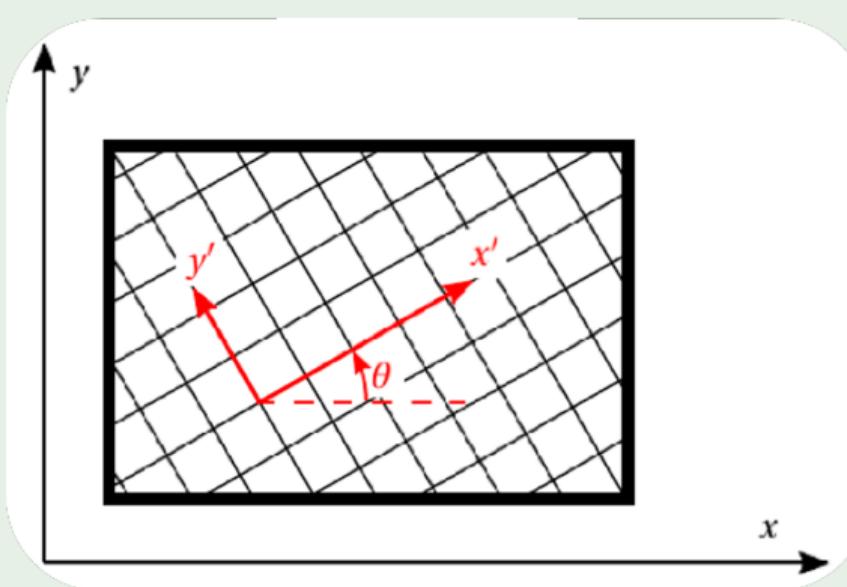


En una malla de elementos finitos, cada elemento se estudia en un sistema coordenado local (x', y') o (ξ, η) .

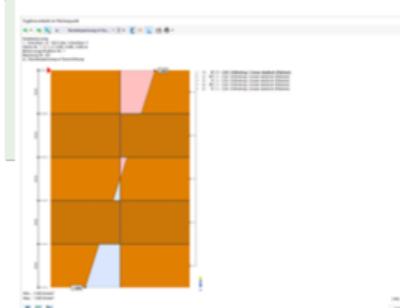
¿... dónde veo esto?

La ortotropía de un sólido

Los ejes de ortotropía de un sólido no siempre estarán en el mismo sentido de los ejes globales, así que se representan en otro sistema de coordenadas locales.



Nuevas características en RFEM 6 y RSTAB 9



▲ Distribución normal de tensiones en un panel de madera contralaminada (CLT)

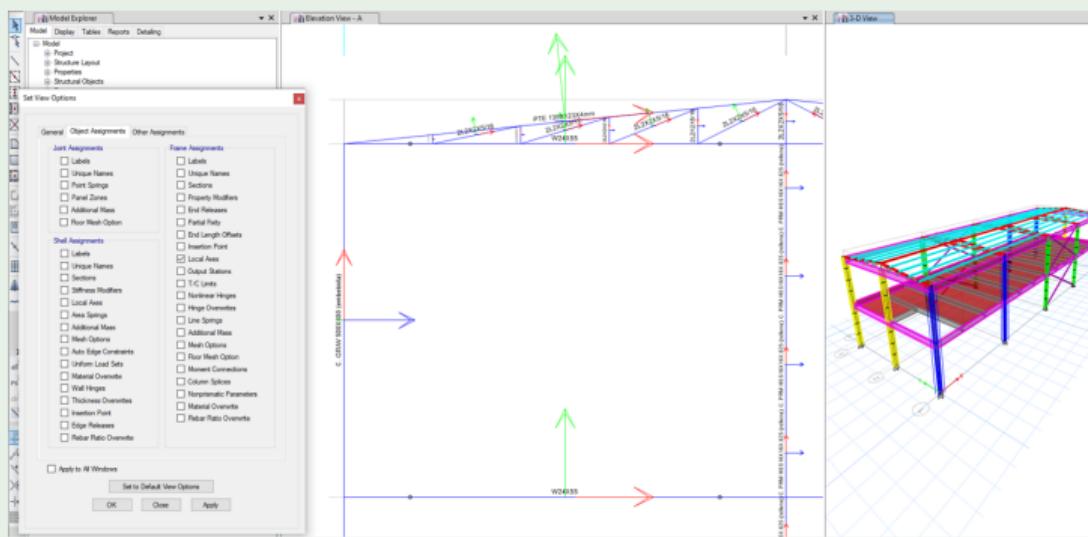
Cálculo de superficies de madera ortótropa y madera contralaminada (CLT)

¿Trabaja con madera? Entonces tenemos buenas noticias. En el complemento Cálculo de madera para RFEM 6, ahora puede diseñar tanto barras como superficies según el Eurocódigo, como madera contralaminada (CLT), madera laminada encolada, madera de coníferas, transformados de madera, etc.

→ [Más información](#)

¿... dónde veo esto?

Formulación interna de softwares de cálculo



En ETABS, al igual que en todos los softwares de ingeniería estructural y mecánica, los elementos son simplificados y estudiados dentro de su propio sistema de coordenadas. Se activa la opción *Local Axes* (ejes locales) para ver sus ejes, estos están codificados por colores según su documentación.

Esfuerzos y direcciones principales bidimensionales

A partir de los esfuerzos normales y tangenciales en un plano:

- El valor del esfuerzo normal:

$$\begin{aligned}\sigma_n(\theta) &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta\end{aligned}$$

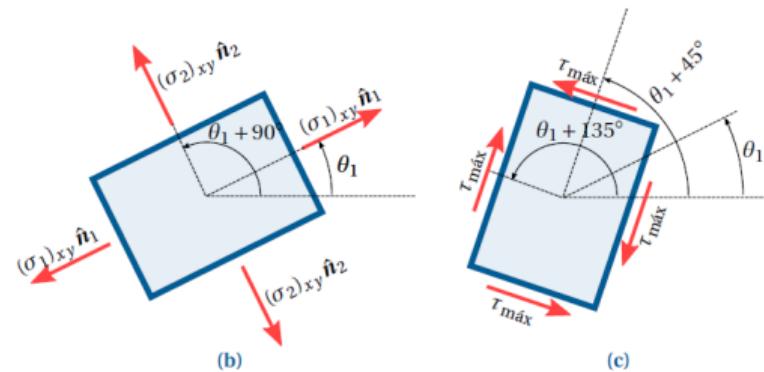
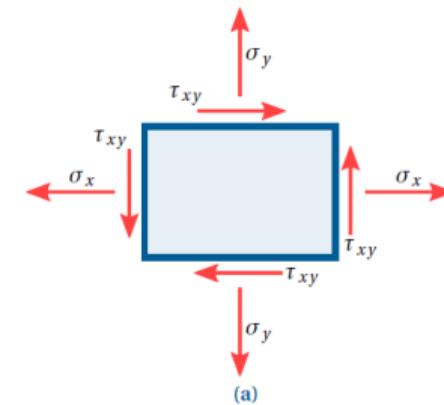
- El valor del esfuerzo tangencial o cortante:

$$\tau_n(\theta) = \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta$$

Esfuerzos principales bidimensionales

$$(\sigma_1)_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$(\sigma_2)_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



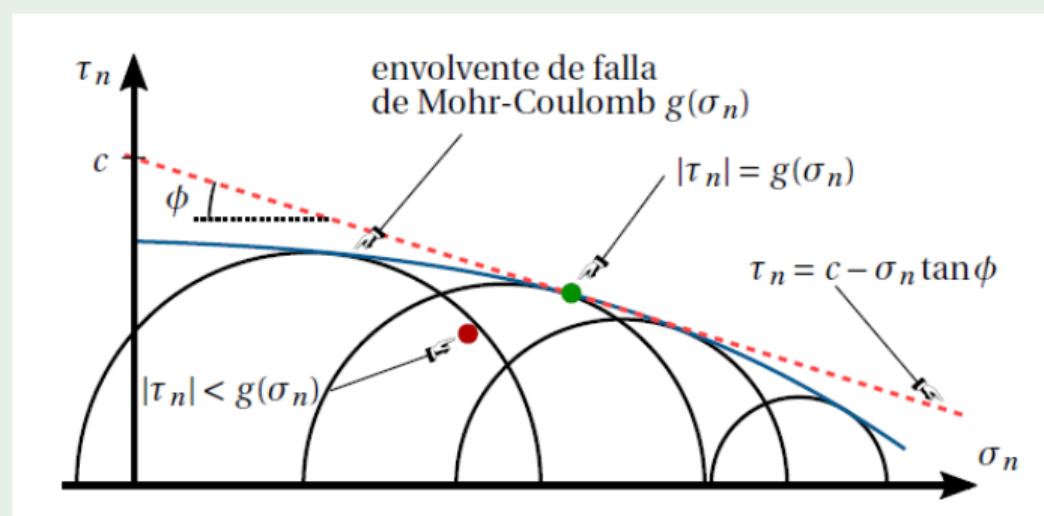
Círculo de Mohr

¿Recuerda sus dos interpretaciones?

La **circunferencia de Mohr** fue propuesta por el ingeniero civil alemán Otto Mohr (1835 - 1918) en 1882 **con el objeto de representar gráficamente el estado de esfuerzos en un punto.**

Ejemplo: criterio de falla de Mohr-Coulomb

Este criterio es altamente utilizado en el análisis de cimentaciones.



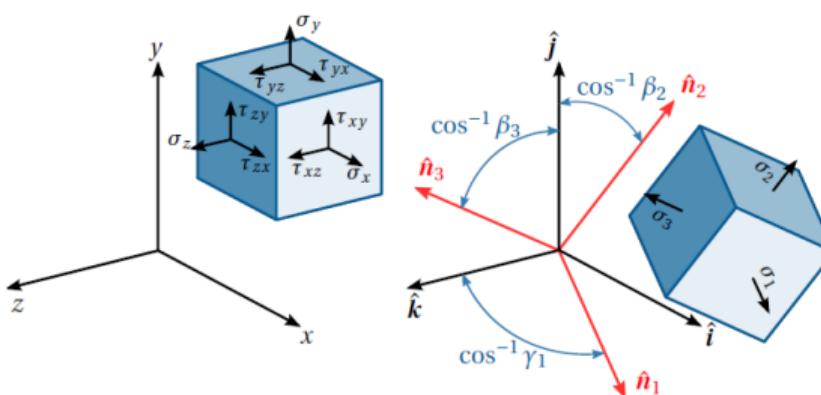
Esfuerzos y direcciones principales

¿Para qué orientación del sólido no existen esfuerzos cortantes?

Se encuentran al obtener los valores y vectores propios del tensor de esfuerzos:

$$\underline{\underline{\sigma}} \hat{n} = \sigma_n \hat{n}$$

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \mathbf{I}) = 0$$



Agrupando y reduciendo términos:

Ecuación característica de $\underline{\underline{\sigma}}$ tridimensional

$$-\sigma_n^3 + I_1\sigma_n^2 - I_2\sigma_n + I_3 = 0$$

donde,

$$\Theta := I_1 := \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})$$

$$I_2 := \frac{1}{2} \left((\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}))^2 - \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^2) \right)$$

$$I_3 := \det(\underline{\underline{\sigma}}).$$

- Código: 02_08_02.ipynb

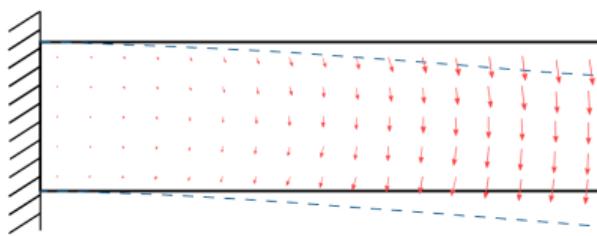
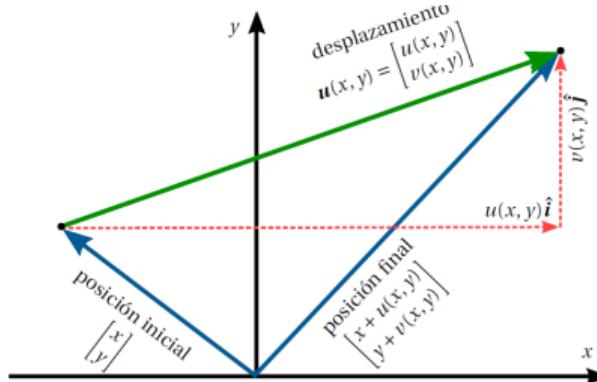
Derrotero

- Conceptos básicos
- Estudio de los esfuerzos en un punto
- **Estudio de los desplazamientos y las deformaciones en un punto**
- Relaciones entre esfuerzos y deformaciones
- Material de apoyo

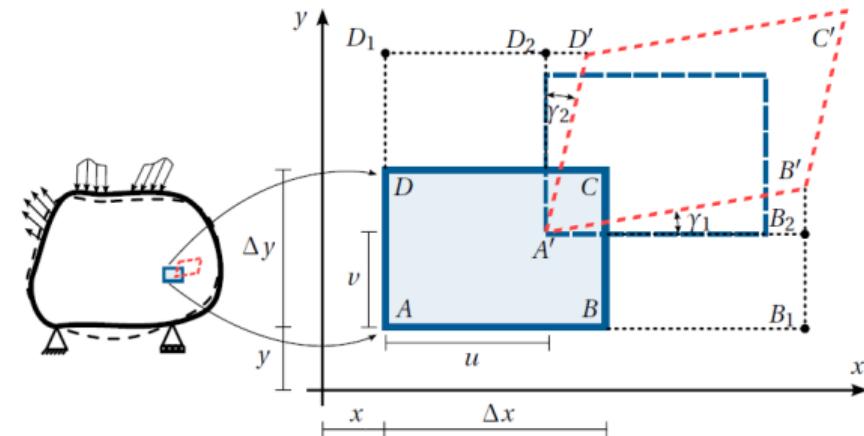
Los desplazamientos y las deformaciones como campos vectoriales

Las deformaciones: cambio de forma o tamaño de un sólido debido a los esfuerzos internos

Campo vectorial de desplazamientos



Campo vectorial de deformaciones

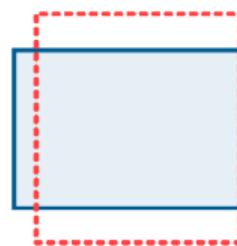


Formulación de pequeñas deformaciones en el sólido

Deformaciones longitudinales



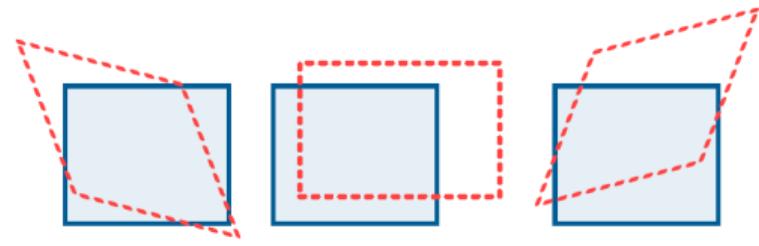
$\varepsilon_x > 0$ (estiramiento en dirección x)
 $\varepsilon_y < 0$ (contracción en dirección y)



$\varepsilon_x < 0$ (contracción en dirección x)
 $\varepsilon_y > 0$ (estiramiento en dirección y)

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(x, y, z) &:= \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} \\ \varepsilon_y(x, y, z) &:= \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} \\ \varepsilon_z(x, y, z) &:= \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z}\end{aligned}$$

Deformaciones angulares



(a) $\gamma_{xy} < 0$

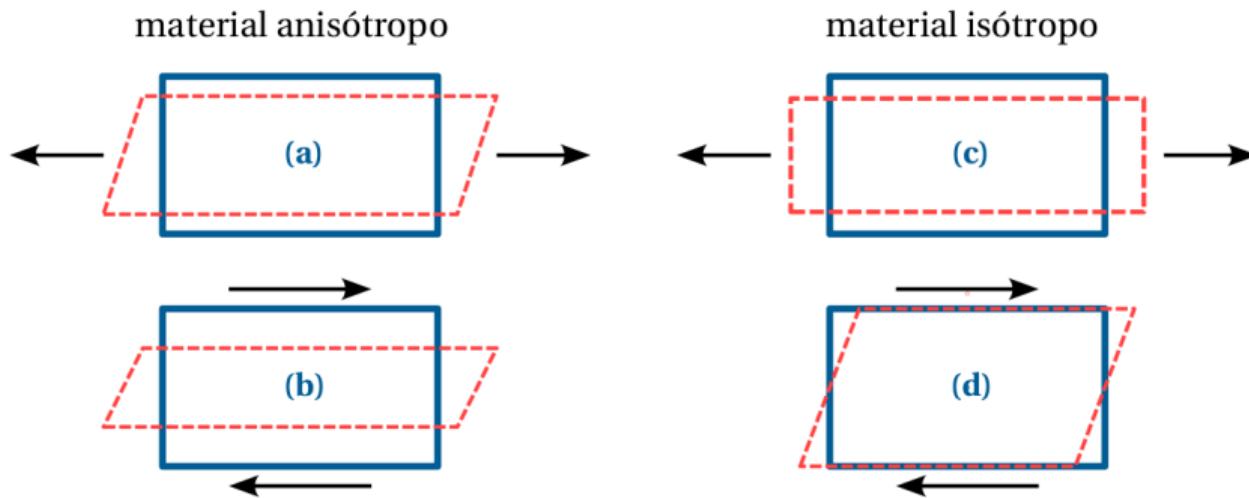
(b) $\gamma_{xy} = 0$

(c) $\gamma_{xy} > 0$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy}(x, y, z) &:= \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} \\ \gamma_{xz}(x, y, z) &:= \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x} \\ \gamma_{yz}(x, y, z) &:= \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y}\end{aligned}$$

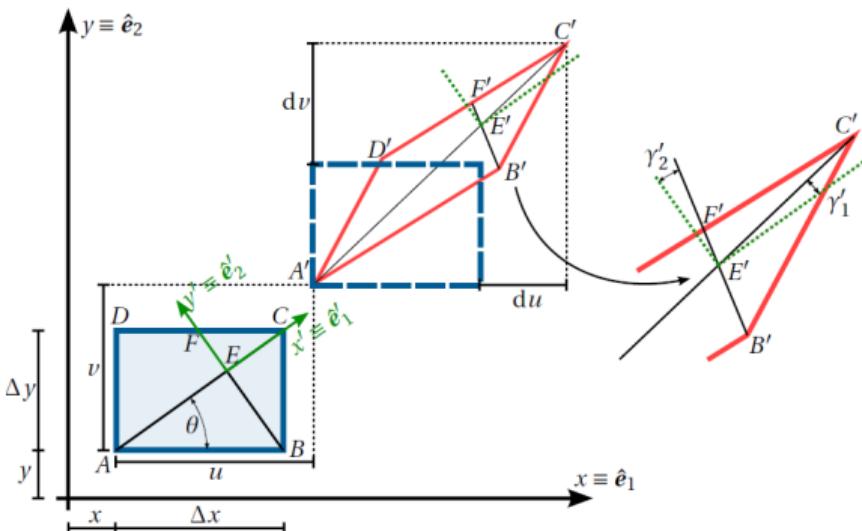
Profundizando en las deformaciones angulares

γ_{xy} denota el cambio en el valor del ángulo $\angle BAD$ cuando un cuerpo se somete a **esfuerzos normales y cortantes**.



Veremos luego que para los materiales isótropos, el comportamiento angular es independiente del comportamiento longitudinal.

Deformaciones en otras direcciones



- En términos de deformaciones matemáticas:

$$\underline{\varepsilon}' = \mathbf{T}_\sigma \underline{\varepsilon}$$

- En términos de deformaciones ingenieriles:

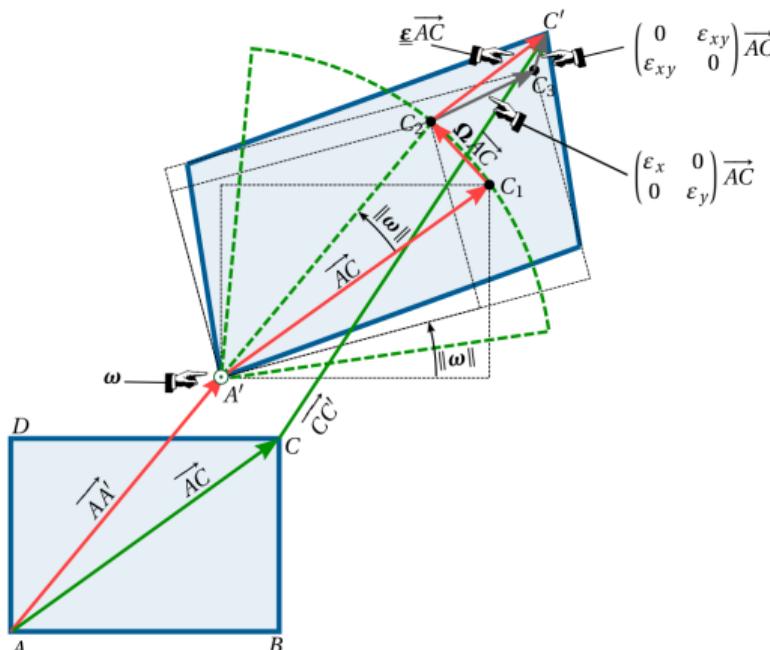
$$\underline{\varepsilon}' = \mathbf{T}_\epsilon \underline{\varepsilon}$$

Siguiendo las relaciones $\mathbf{T}_\sigma^{-1} = \mathbf{T}_\epsilon^T$ y $\underline{\varepsilon} = \mathbf{T}\underline{\varepsilon}'\mathbf{T}^T$.

$$\varepsilon'_x(\theta) = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta$$

$$\varepsilon'_{x'y'}(\theta) = \varepsilon_{xy} \cos 2\theta - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta$$

Rotación



Podemos calcular la rotación de un sólido en 6 pasos:

1. Matriz de rotaciones.
2. Vector de rotación.
3. Rotación rígida.
4. Formulación del rotacional.
5. Eje de rotación.
6. Componentes de la deformación.

Rotación

Componentes de la deformación

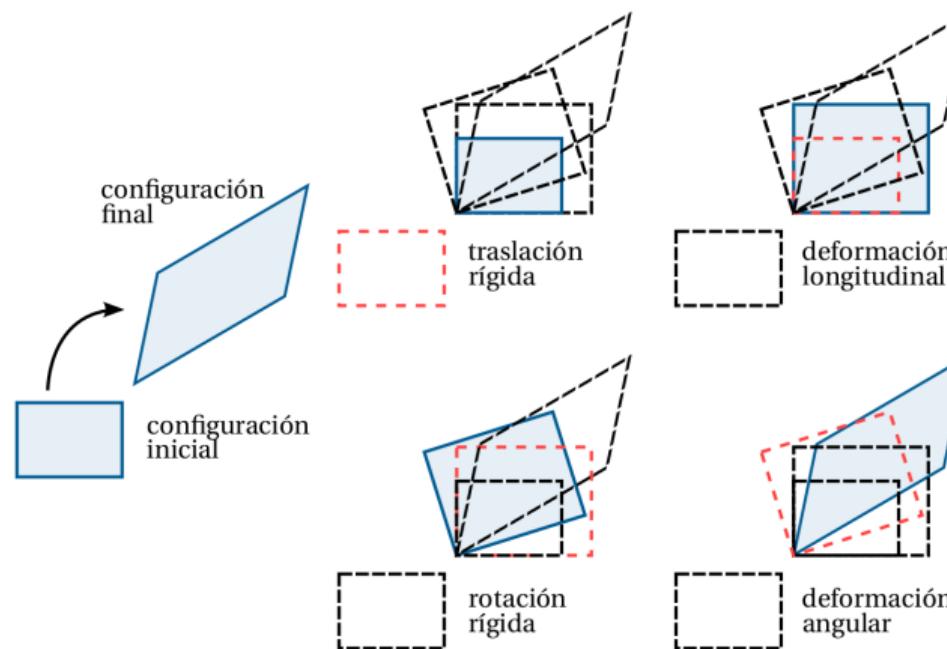


Figure: Componenes de la deformación. La deformación del sólido se descompone en una traslación rígida ($\overrightarrow{AA'}$), una rotación rígida ($\overrightarrow{\Omega A'C}$) y unas deformaciones longitudinales y angulares ($\overrightarrow{\varepsilon A'C}$) y Nota: esta no es la secuencia de la figura.

Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

- eigenvalues problem:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \hat{n} = \varepsilon_n \hat{n}$$

- Ecuación característica:

- Caso bidimensional:

$$\varepsilon_n^2 - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)\varepsilon_n + \varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_{xy}^2 = 0$$

- Caso tridimensional:

$$-\varepsilon_n^3 + I_1^d \varepsilon_n^2 - I_2^d \varepsilon_n + I_3^d = 0$$

- Invariantes de deformaciones

$$e := I_1^d := \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

$$I_2^d := \frac{1}{2} \left(\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})^2 - \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2) \right)$$

$$I_3^d := \det(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

- eigenvalues problem:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \hat{\mathbf{n}} = \varepsilon_n \hat{\mathbf{n}}$$

- Ecuación característica:

- Caso bidimensional:

$$\varepsilon_n^2 - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)\varepsilon_n + \varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_{xy}^2 = 0$$

- Caso tridimensional:

$$-\varepsilon_n^3 + I_1^d \varepsilon_n^2 - I_2^d \varepsilon_n + I_3^d = 0$$

- Invariantes de deformaciones

$$e := I_1^d := \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

$$I_2^d := \frac{1}{2} \left(\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})^2 - \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2) \right)$$

$$I_3^d := \det(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

- eigenvalues problem:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \hat{\mathbf{n}} = \varepsilon_n \hat{\mathbf{n}}$$

- Ecuación característica:

- Caso bidimensional:

$$\varepsilon_n^2 - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)\varepsilon_n + \varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_{xy}^2 = 0$$

- Caso tridimensional:

$$-\varepsilon_n^3 + I_1^d \varepsilon_n^2 - I_2^d \varepsilon_n + I_3^d = 0$$

- Invariantes de deformaciones

$$e := I_1^d := \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

$$I_2^d := \frac{1}{2} \left(\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})^2 - \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2) \right)$$

$$I_3^d := \det(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

- eigenvalues problem:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \hat{\mathbf{n}} = \varepsilon_n \hat{\mathbf{n}}$$

- Ecuación característica:

- Caso bidimensional:

$$\varepsilon_n^2 - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)\varepsilon_n + \varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_{xy}^2 = 0$$

- Caso tridimensional:

$$-\varepsilon_n^3 + I_1^d \varepsilon_n^2 - I_2^d \varepsilon_n + I_3^d = 0$$

- Invariantes de deformaciones

$$e := I_1^d := \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

$$I_2^d := \frac{1}{2} \left(\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})^2 - \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2) \right)$$

$$I_3^d := \det(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

Derrotero

- Conceptos básicos
- Estudio de los esfuerzos en un punto
- Estudio de los desplazamientos y las deformaciones en un punto
- Relaciones entre esfuerzos y deformaciones
- Material de apoyo

Comportamiento de los materiales frágiles y materiales dúctiles

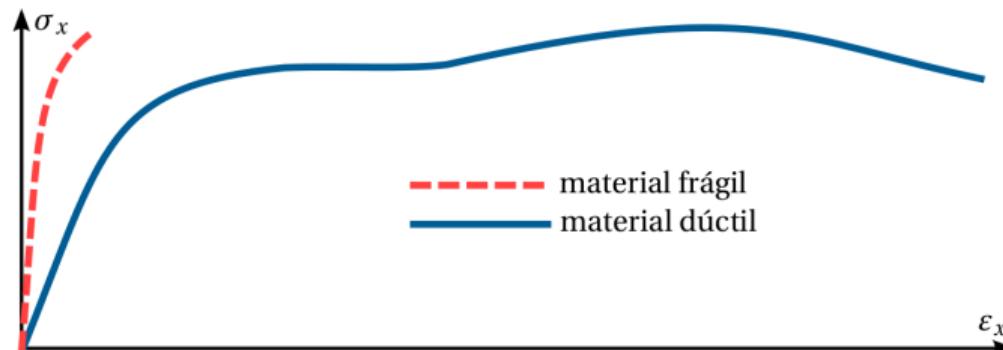


Figure: Curva esfuerzo-deformación para materiales dúctiles y frágiles.

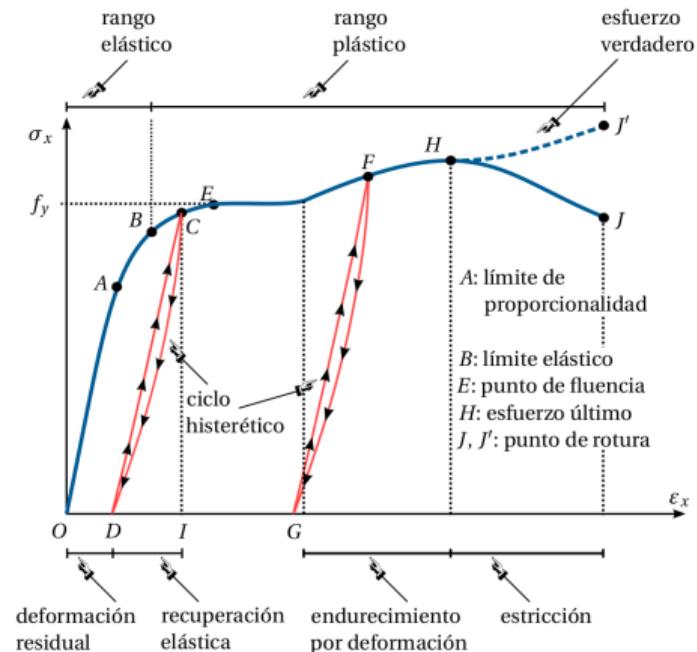


Figure: Curva esfuerzo-deformación teórica para materiales dúctiles.

Curvas esfuerzo-deformación

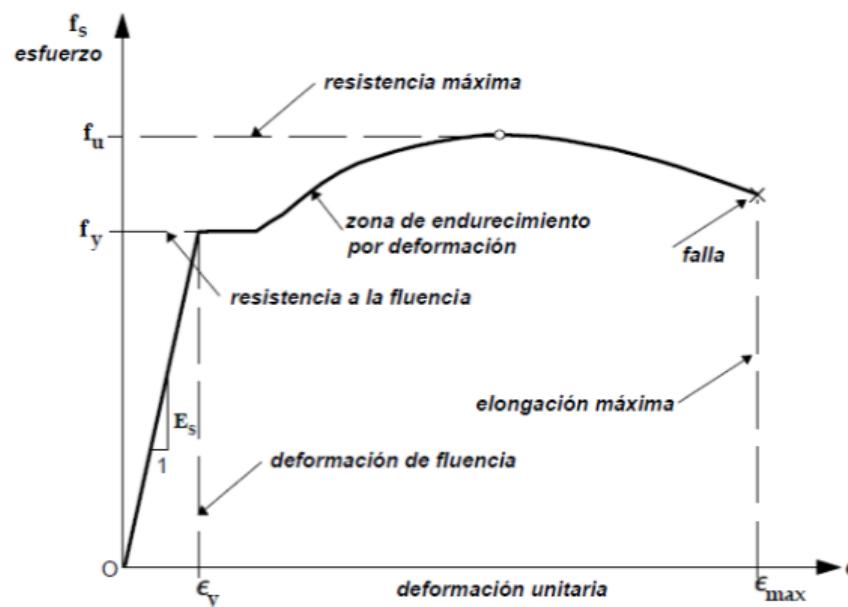


Figura 6-2(a) - Curva esfuerzo-deformación del acero de refuerzo

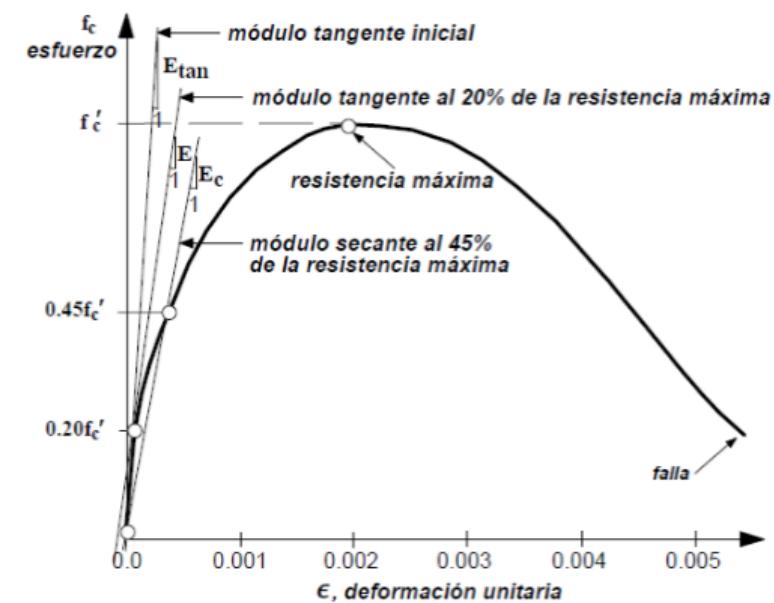


Figura 6-2(b) - Curva esfuerzo-deformación del concreto no confinado

Figure: García Reyes, L. E. (1998). Dinámica estructural aplicada al diseño sísmico. Universidad de los Andes, Facultad de Ingeniería Civil.

Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles

(Sin claridad del límite de fluencia)

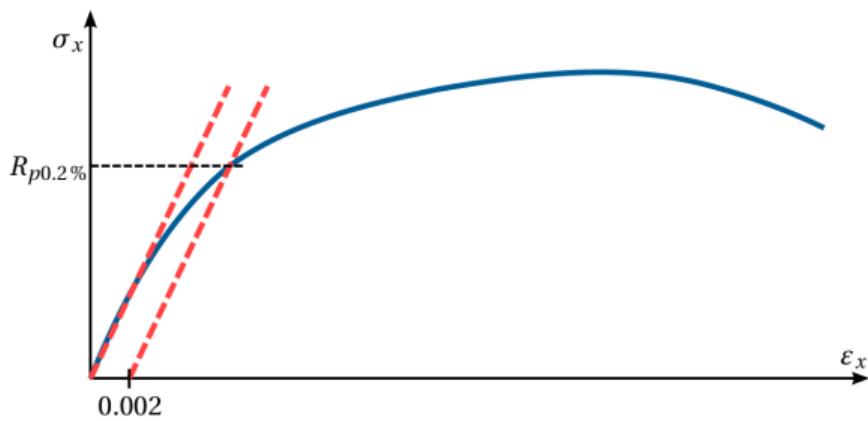


Figure: Método de la compensación o corregimiento ASTM A370.

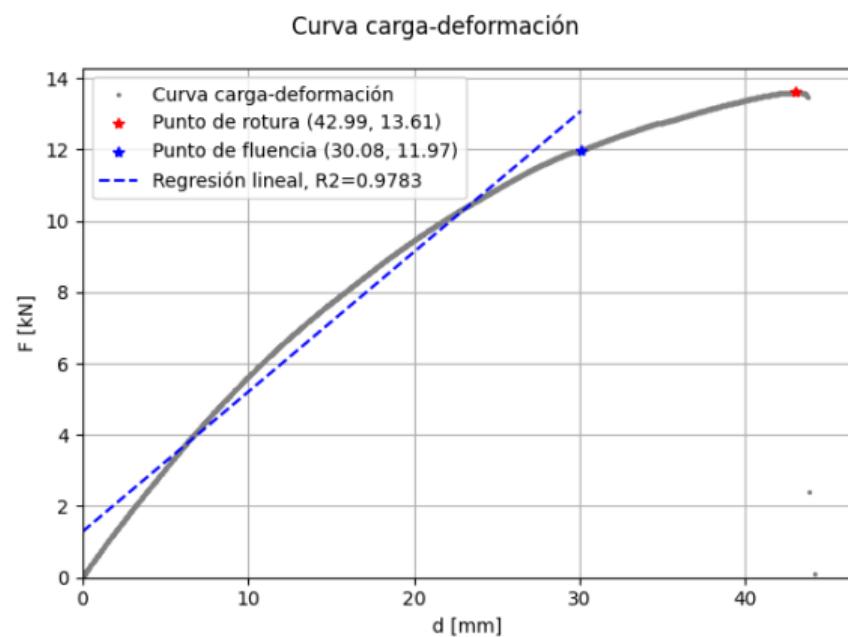


Figure: Ensayo de madera plástica (plastic lumber en inglés) realizado en el Laboratorio de Ingeniería Estructural y Sísmica de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales.

Comportamiento del acero

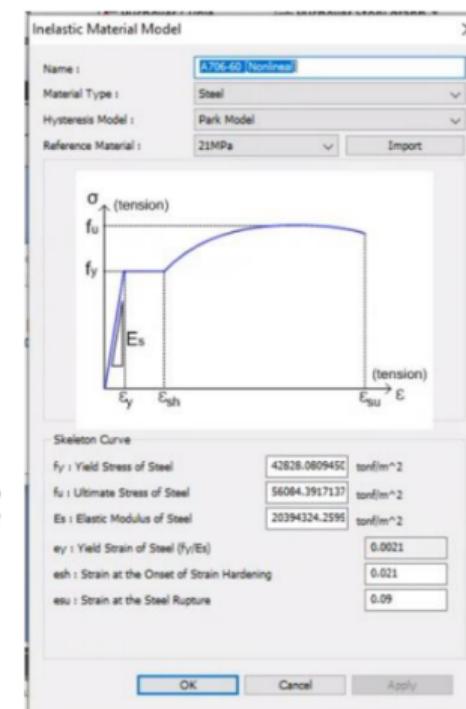
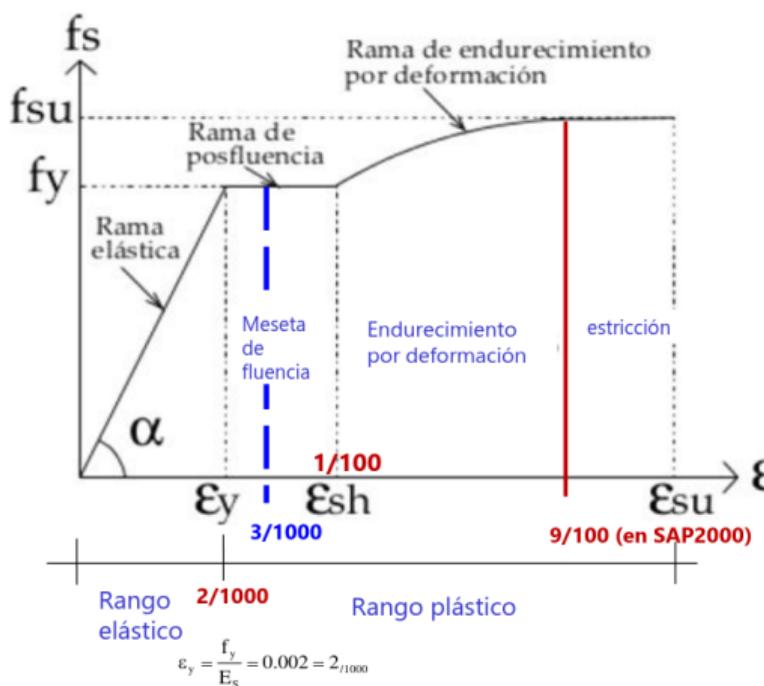


Figure: Curso de Diseño Sísmico de Concreto Reforzado en la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales. Profesor Daniel Alveiro Bedoya Ruiz (2022).

Comportamiento del concreto reforzado

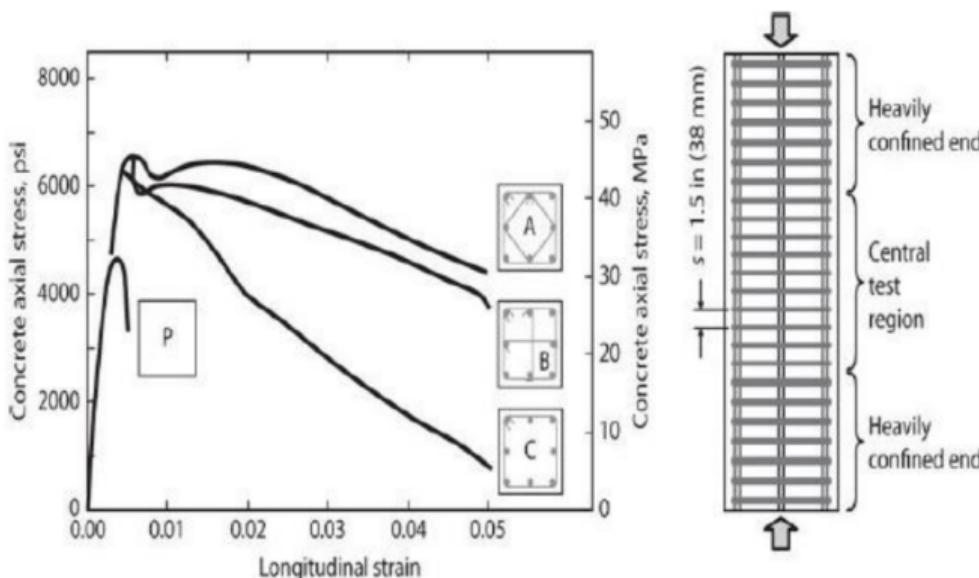


FIGURE 4.1 Stress-strain response of plain concrete (P) and three confined concrete cross sections.
(After Moehle and Cavanagh, 1985, used with permission from ASCE.)

Figure: *Curso de Diseño Sísmico de Concreto Reforzado en la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales. Profesor Daniel Alveiro Bedoya Ruiz (2022).*

Comportamiento de materiales lignocelulósicos

Ensayo de compresión

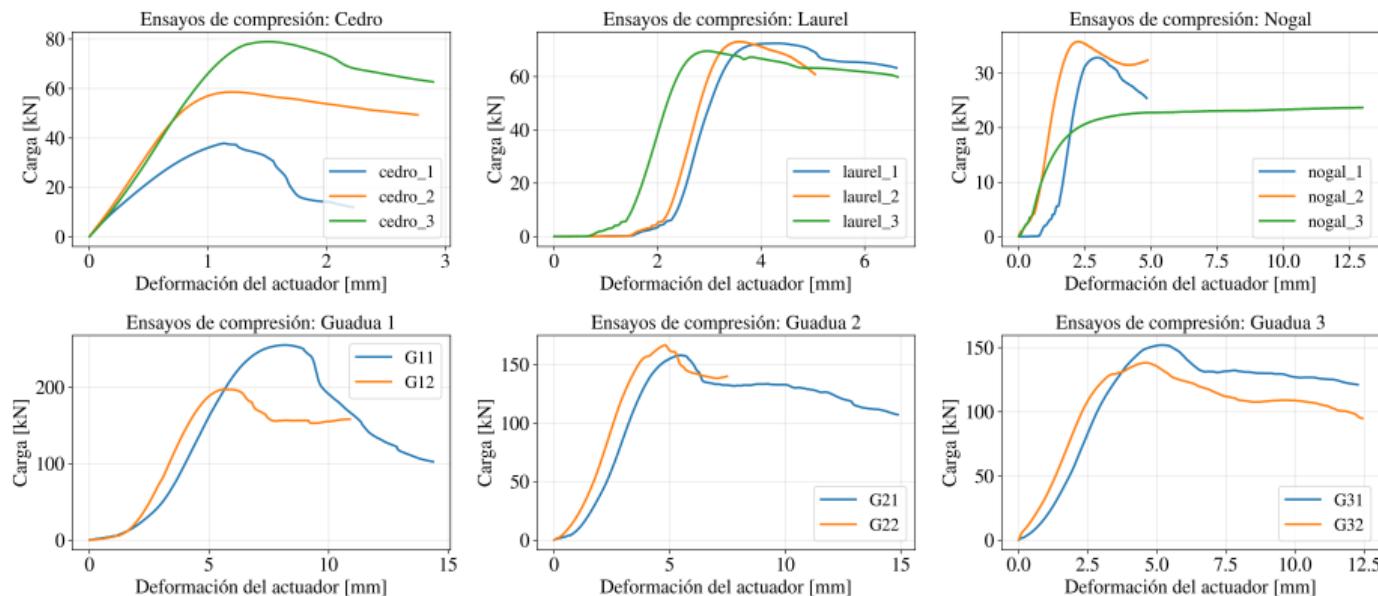


Figure: Ver: <https://github.com/michaelherediaperez/procesamiento-datos-ensayos-compresion>.

Comportamiento de materiales lignocelulósicos

Guaduas

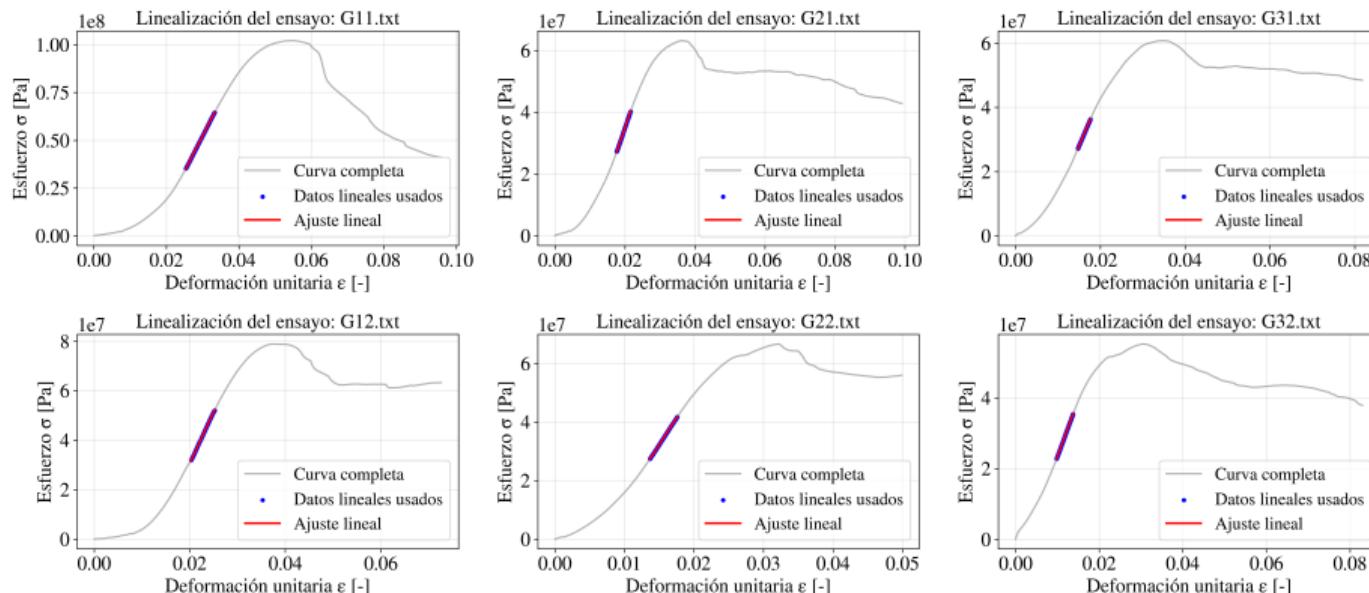


Figure: Ver: <https://github.com/michaelherediaperez/procesamiento-datos-ensayos-compresion>.

Comportamiento de materiales lignocelulósicos

Maderas

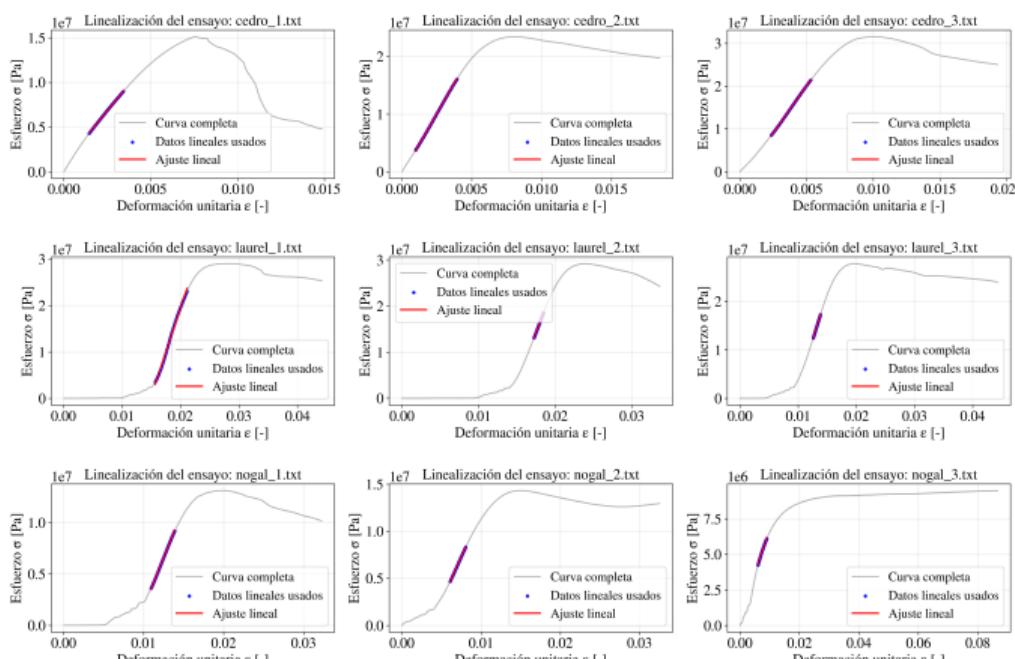


Figure: Ver: <https://github.com/michaelherediaperez/procesamiento-datos-ensayos-compresion>.

Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos

Isótropo: propiedades mecánicas iguales en todas las direcciones del análisis.

Partimos de las deformaciones longitudinales y angulares:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y))$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

Despejando los esfuerzos:

Ecuaciones de Lamé

$$\sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2G\varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

- Père de Gabriel Jean Baptiste Lamé (1795-1870), matemático francés.

Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos

Isótropo: propiedades mecánicas iguales en todas las direcciones del análisis.

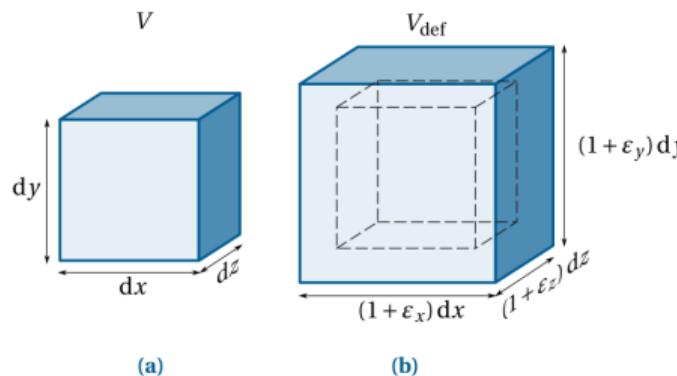
Formulación matricial

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_D \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

- La dilatación cúbica: $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$.
- La constante de Lamé: $\lambda := \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$.
- Código: [04_03_03.ipynb](#)

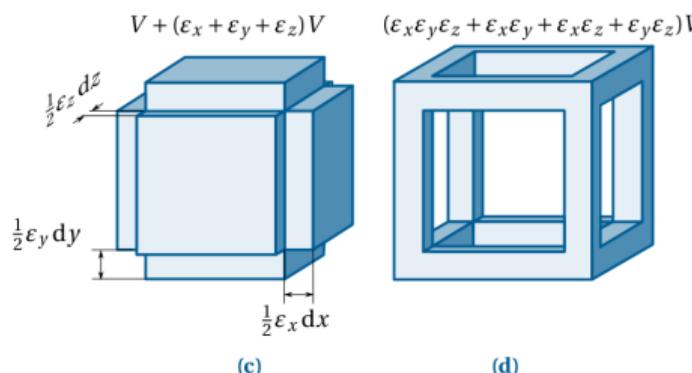
$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \mathbf{I} + 2G \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Cambios de volumen y dilatación cúbica



La dilatación cúbica o deformación volumétrica es el cambio de volumen por unidad de volumen.

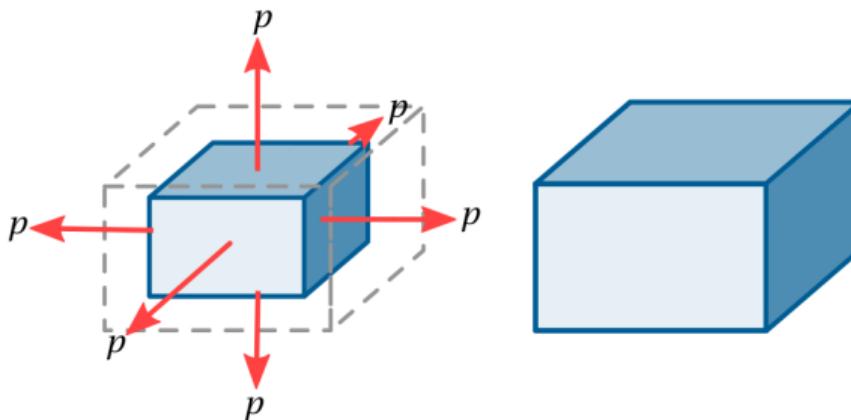
$$e := \frac{V_{\text{def}} - V}{V} \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$



$$\begin{aligned} e(x, y, z) &= \operatorname{div} \mathbf{u}(x, y, z) \\ &= \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z} \end{aligned}$$

Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad

Es una propiedad del material que determina su incompresibilidad y es una medida de la capacidad de una sustancia de soportar cambios de volumen cuando se somete a esfuerzos normales en todas las direcciones.



$$K := \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

- Entre más tienda $\nu \rightarrow 0$ más incompresible es el sólido.
- Un suelo saturado tiene un ν cercano a 0.5.

Derrotero

- Conceptos básicos
- Estudio de los esfuerzos en un punto
- Estudio de los desplazamientos y las deformaciones en un punto
- Relaciones entre esfuerzos y deformaciones
- Material de apoyo

Material complementario: clases grabadas y diapositivas

Consulte el repositorio de GitHub: https://github.com/michaelherediaperez/medio_continuo

Conceptos básicos	Esfuerzos	Deformaciones
		
Playlist YouTube	Playlist YouTube	Playlist YouTube
Diapositiva Mec. Tensorial	Diapositiva Mec. Tensorial	Diapositiva Mec. Tensorial

- Adicional: Diapositiva Mec. Tensorial: relaciones entre esfuerzos y deformaciones.