

03. Estudio de los desplazamientos y las deformaciones en un punto

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil
Mecánica Tensorial

2023a





Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada ([Álvarez, 2022](#)).





Derrotero

- Conceptos necesarios del suplemento matemático
- Deformaciones
- 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- 3.3. Las galgas extensométricas
- 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- 3.5. Rotación
- 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios
- Referencias



Derrotero

- Conceptos necesarios del suplemento matemático
- Deformaciones
- 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- 3.3. Las galgas extensométricas
- 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- 3.5. Rotación
- 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios
- Referencias



Expansión en series de Taylor

Apéndice matemático

Código

- [03_00_taylor.ipynb](#)



Expansión en series de Taylor

Apéndice matemático

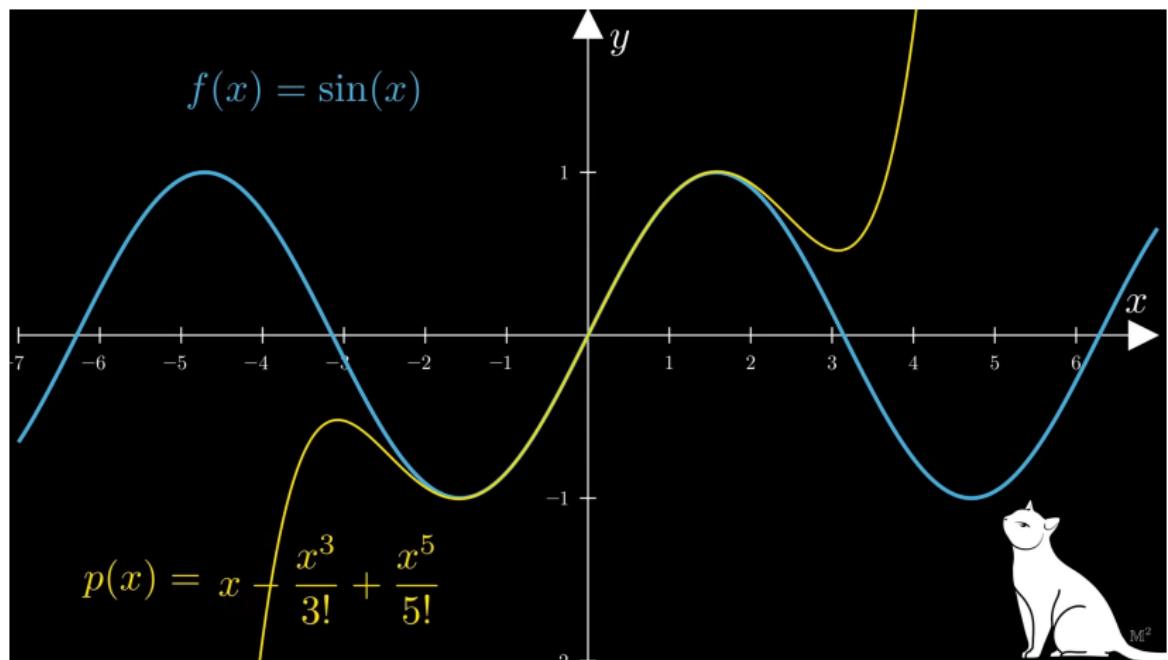


Figura: Series de Taylor | Un Resultado MUY IMPORTANTE en FÍSICA



Aproximación de ángulos pequeños

Apéndice matemático

En el límite cuando el ángulo tiende a cero, mediante una aproximación de primer orden de las funciones trigonométricas truncando su correspondiente serie de Taylor:

$$\sin x \approx x$$

$$\cos x \approx 1$$

$$\tan x \approx x$$

Si se utiliza una aproximación de segundo orden:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$



Aproximación de ángulos pequeños

Apéndice matemático

Tabla A.1: Valor de las funciones trigonométricas para diferentes ángulos.

θ (grados)	θ (radianes)	$\sin(\theta)$ (error)	$\cos(\theta)$ (error)	$\tan(\theta)$ (error)
0	0	0 (0 %)	1 (0 %)	0 (0 %)
1	0.0175	0.0175 (0.0051 %)	0.9998 (0.0152 %)	0.0175 (0.0102 %)
2	0.0349	0.0349 (0.0203 %)	0.9994 (0.0610 %)	0.0349 (0.0406 %)
3	0.0524	0.0523 (0.0457 %)	0.9986 (0.1372 %)	0.0524 (0.0914 %)
4	0.0698	0.0698 (0.0813 %)	0.9976 (0.2442 %)	0.0699 (0.1625 %)
5	0.0873	0.0872 (0.1270 %)	0.9962 (0.3820 %)	0.0875 (0.2540 %)
6	0.1047	0.1045 (0.1830 %)	0.9945 (0.5508 %)	0.1051 (0.3658 %)
7	0.1222	0.1219 (0.2492 %)	0.9925 (0.7510 %)	0.1228 (0.4980 %)
8	0.1396	0.1392 (0.3257 %)	0.9903 (0.9828 %)	0.1405 (0.6507 %)
9	0.1571	0.1564 (0.4124 %)	0.9877 (1.2465 %)	0.1584 (0.8238 %)
10	0.1745	0.1736 (0.5095 %)	0.9848 (1.5427 %)	0.1763 (1.0175 %)



Expansión en series de Taylor en varias variables

Apéndice matemático

La serie de Taylor para funciones multivariadas alrededor del punto (a_i) se define como:

$$f(x_1, \dots, x_d) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=0}^{\infty} \frac{(x_1-a_1)^{n_1} \cdots (x_d-a_d)^{n_d}}{n_1! \cdots n_d!} \left(\frac{\delta^{n_1+\cdots+n_d} f}{\delta x_1^{n_1} \cdots \delta x_d^{n_d}} \right) (a_1, \dots, a_d).$$

La expansión truncada en series de Taylor de segundo orden es:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &\approx f(x_0, y_0) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \\ &+ \frac{1}{2!} \left[\Delta x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, y_0)} + 2\Delta x \Delta y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} + \Delta y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(x_0, y_0)} \right]. \end{aligned}$$



Derrotero

- Conceptos necesarios del suplemento matemático
- **Deformaciones**
- 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- 3.3. Las galgas extensométricas
- 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- 3.5. Rotación
- 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios
- Referencias



Deformaciones

Cambio de forma o tamaño de un sólido debido a los esfuerzos internos producidos por:

- Fuerzas másicas y superficiales
- Ocurrencia de dilatación térmica
- Desplazamientos impuestos

Asumimos:

- Las deformaciones que están ocurriendo dentro del sólido son muy pequeñas



Deformaciones

Cambio de forma o tamaño de un sólido debido a los esfuerzos internos producidos por:

- Fuerzas másicas y superficiales
- Ocurrencia de dilatación térmica
- Desplazamientos impuestos

Asumimos:

- Las deformaciones que están ocurriendo dentro del sólido son muy pequeñas



Deformaciones

Cambio de forma o tamaño de un sólido debido a los esfuerzos internos producidos por:

- Fuerzas másicas y superficiales
- Ocurrencia de dilatación térmica
- Desplazamientos impuestos

Asumimos:

- Las deformaciones que están ocurriendo dentro del sólido son muy pequeñas



Deformaciones

Cambio de forma o tamaño de un sólido debido a los esfuerzos internos producidos por:

- Fuerzas másicas y superficiales
- Ocurrencia de dilatación térmica
- Desplazamientos impuestos

Asumimos:

- Las deformaciones que están ocurriendo dentro del sólido son muy pequeñas



Deformaciones

Cambio de forma o tamaño de un sólido debido a los esfuerzos internos producidos por:

- Fuerzas másicas y superficiales
- Ocurrencia de dilatación térmica
- Desplazamientos impuestos

Asumimos:

- Las deformaciones que están ocurriendo dentro del sólido son muy pequeñas

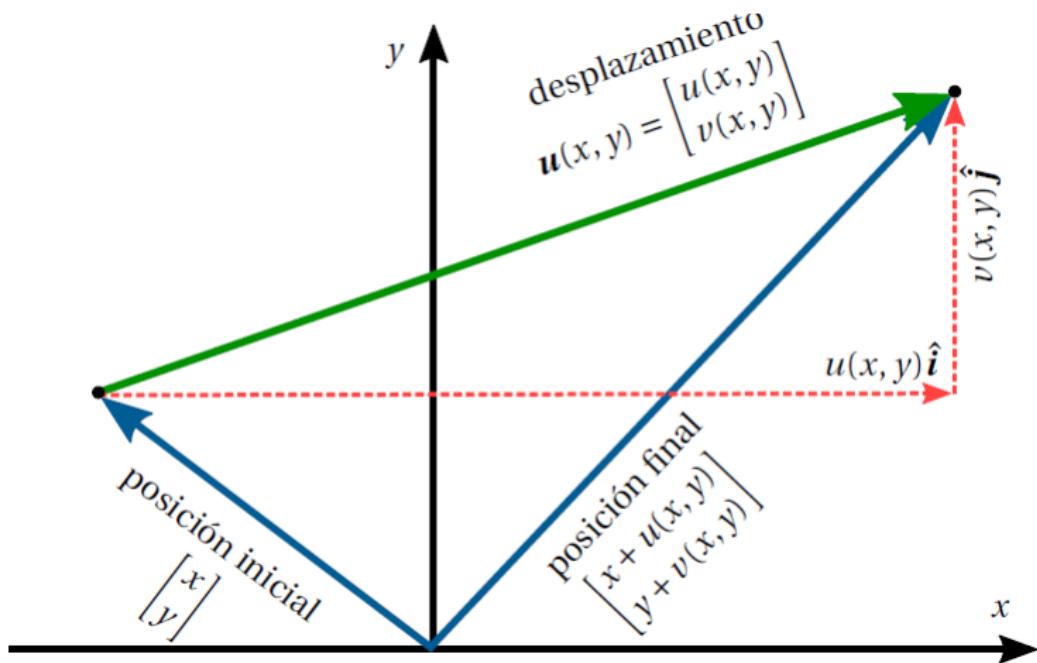


Derrotero

- Conceptos necesarios del suplemento matemático
- Deformaciones
- **3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido**
- 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- 3.3. Las galgas extensométricas
- 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- 3.5. Rotación
- 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios
- Referencias



Campo vectorial de desplazamientos de un sólido





Campo vectorial de desplazamientos de un sólido

- El sólido deformado es continuo.
- Hay una distribución de esfuerzos representada como una función continua por partes.

Dominio en (x, y, z)

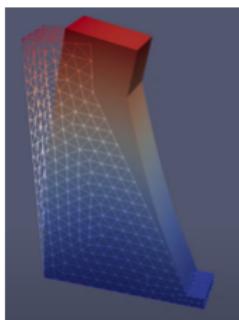


Figura: Muro de compresión deformado.

Dominio en (x, y, z, t)

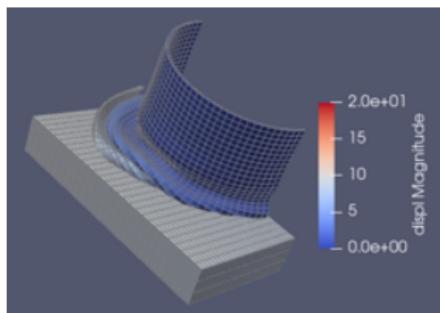
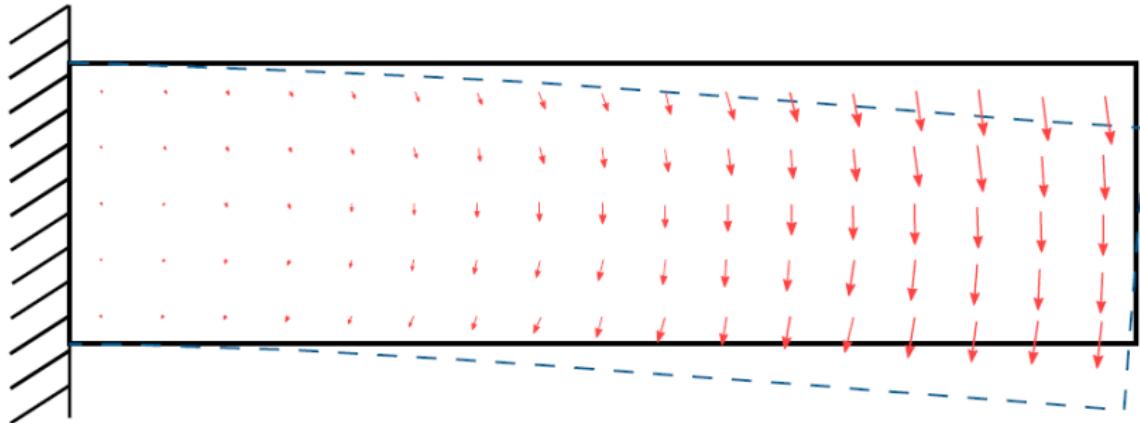


Figura: Lata aplastada por una placa (Paraview).



Campo vectorial de desplazamientos de un sólido

Campo vectorial de desplazamientos para una viga



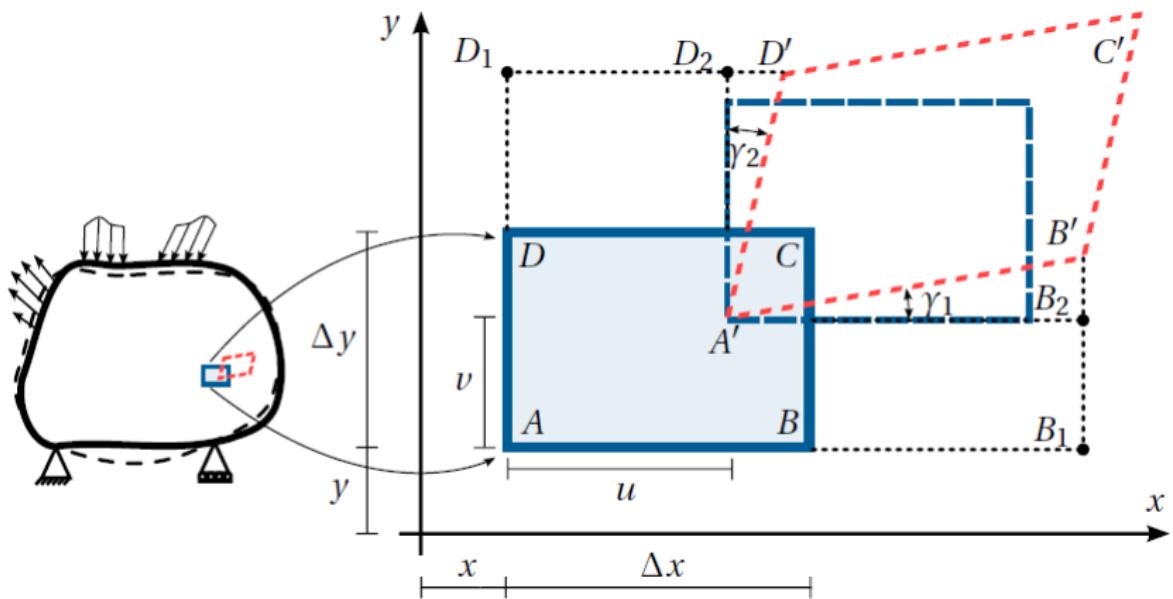


Derrotero

- Conceptos necesarios del suplemento matemático
- Deformaciones
- 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- **3.2. Componentes de la deformación en un punto**
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- 3.3. Las galgas extensométricas
- 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- 3.5. Rotación
- 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios
- Referencias

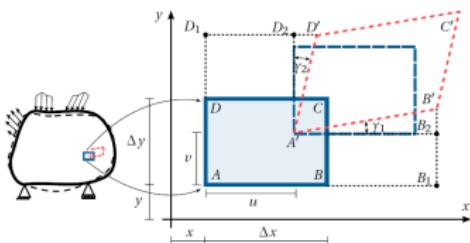


Componentes de la deformación en un punto





Componentes de la deformación en un punto



$$A := (x, y)$$

$$B := (x + \Delta x, y)$$

$$C := (x + \Delta x, y + \Delta y)$$

$$D := (x, y + \Delta y)$$

- Componentes **horizontales** del desplazamiento:

$$u(A) = u(x, y)$$

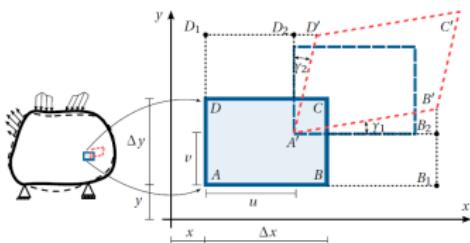
$$u(B) \approx u(x, y) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x,y)}$$

$$u(C) \approx u(x, y) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x,y)} + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x,y)}$$

$$u(D) \approx u(x, y) + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x,y)}$$



Componentes de la deformación en un punto



$$A := (x, y)$$

$$B := (x + \Delta x, y)$$

$$C := (x + \Delta x, y + \Delta y)$$

$$D := (x, y + \Delta y)$$

- Componentes **verticales** del desplazamiento:

$$v(A) = v(x, y)$$

$$v(B) \approx v(x, y) + \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x,y)}$$

$$v(C) \approx v(x, y) + \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x,y)} + \Delta y \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{(x,y)}$$

$$v(D) \approx v(x, y) + \Delta y \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{(x,y)}$$



Componentes de la deformación en un punto

$$A' := (x + u(x, y), y + v(x, y))$$

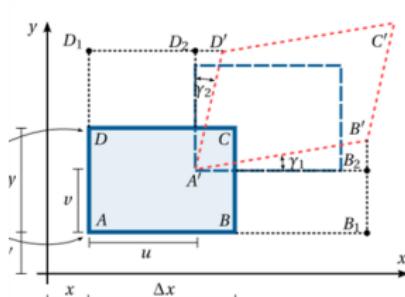
$$B' := \left(\underbrace{x + \Delta x}_{\text{pos. ini}} + \underbrace{u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x}_{\text{desplazamiento}}, \underbrace{y}_{\text{pos. ini}} + \underbrace{v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x}_{\text{desplazamiento}} \right)$$

$$C' := \left(\underbrace{x + \Delta x}_{\text{pos. ini}} + \underbrace{u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y}_{\text{desplazamiento}}, \underbrace{y + \Delta y}_{\text{pos. ini}} + \underbrace{v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y}_{\text{desplazamiento}} \right)$$

$$D' := \left(x + u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y, y + v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right)$$



Componentes de la deformación en un punto



$$A'B_2 = \text{Coord}_x(B') - \text{Coord}_x(A') = \Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x,y)} \Delta x$$

$$A'D_2 = \text{Coord}_y(D') - \text{Coord}_y(A') = \Delta y + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x,y)} \Delta y$$

$$B_2B' = \text{Coord}_y(B') - \text{Coord}_y(A') = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x,y)} \Delta x$$

$$D_2D' = \text{Coord}_x(D') - \text{Coord}_x(A') = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x,y)} \Delta y$$



Derrotero

- Conceptos necesarios del suplemento matemático
- Deformaciones
- 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- 3.3. Las galgas extensométricas
- 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- 3.5. Rotación
- 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios
- Referencias



Deformacion longitudinal

(Deformación lineal)

(ε) es una medida de cuánto se estira o contrae el sólido en un punto y en una dirección en particular.

$$\varepsilon = \lim_{L_i \rightarrow 0} \frac{L_f - L_i}{L_i}$$



Deformacion longitudinal

(Deformación lineal)

(ε) es una medida de cuánto se estira o contrae el sólido en un punto y en una dirección en particular.

$$\varepsilon = \lim_{L_i \rightarrow 0} \frac{L_f - L_i}{L_i}$$



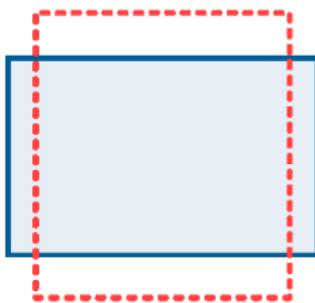
Deformación longitudinal

(Deformación lineal)

$$\varepsilon_x(\mathbf{x}) := \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x}; \quad \varepsilon_y(\mathbf{x}) := \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial y}; \quad \varepsilon_z(\mathbf{x}) := \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial z}$$



$\varepsilon_x > 0$ (estiramiento en dirección x)
 $\varepsilon_y < 0$ (contracción en dirección y)



$\varepsilon_x < 0$ (contracción en dirección x)
 $\varepsilon_y > 0$ (estiramiento en dirección y)



Derrotero

- Conceptos necesarios del suplemento matemático
- Deformaciones
- 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- 3.3. Las galgas extensométricas
- 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- 3.5. Rotación
- 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios
- Referencias



Deformación angular

γ_{ij} mide el cambio de ángulo entre dos caras que originalmente eran ortogonales.

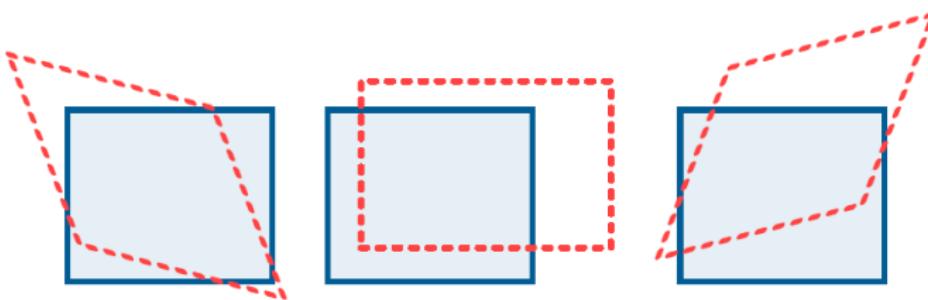


Deformación angular

$$\gamma_{xy}(\mathbf{x}) := \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz}(\mathbf{x}) := \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial z} + \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz}(\mathbf{x}) := \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial z} + \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial y}$$

(a) $\gamma_{xy} < 0$ (b) $\gamma_{xy} = 0$ (c) $\gamma_{xy} > 0$



Deformaciones angulares matemáticas

$$\varepsilon_{xy}(x, y) := \frac{\gamma_{xy}(x, y)}{2} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}.$$

Tensor de deformaciones infinitecimales de Cauchy

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}}_{\text{deformaciones matemáticas}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}}_{\text{deformaciones ingenieriles}}$$



Comentario

La deducción de las ecuaciones anteriores involucra únicamente consideraciones geométricas y, como no se hace referencia alguna a las propiedades y características de comportamiento del material, el resultado es aplicable a toda clase de materiales, incluyendo materiales elásticos y plásticos. Las únicas restricciones que hacemos son que el desplazamiento sea una función continua y derivable y que las deformaciones sean pequeñas.



Derrotero

- Conceptos necesarios del suplemento matemático
- Deformaciones
- 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- **3.3. Las galgas extensométricas**
- 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- 3.5. Rotación
- 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios
- Referencias



Las galgas extensométricas



- Elementos que miden la deformación en un punto y que a partir de una relación esfuerzo-deformación del material, permiten conocer de forma indirecta los esfuerzos en esos puntos.
- No es posible medir directamente los esfuerzos al interior de una estructura y solo se pueden inferir estos a través de la medición de deformaciones.
- Complementar el tema de forma autónoma



Las galgas extensométricas



- Elementos que miden la deformación en un punto y que a partir de una relación esfuerzo-deformación del material, permiten conocer de forma indirecta los esfuerzos en esos puntos.
- No es posible medir directamente los esfuerzos al interior de una estructura y solo se pueden inferir estos a través de la medición de deformaciones.
- Complementar el tema de forma autónoma



Las galgas extensométricas



- Elementos que miden la deformación en un punto y que a partir de una relación esfuerzo-deformación del material, permiten conocer de forma indirecta los esfuerzos en esos puntos.
- No es posible medir directamente los esfuerzos al interior de una estructura y solo se pueden inferir estos a través de la medición de deformaciones.
- Complementar el tema de forma autónoma



Las galgas extensométricas

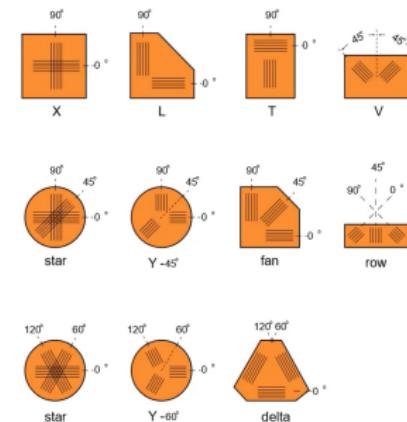
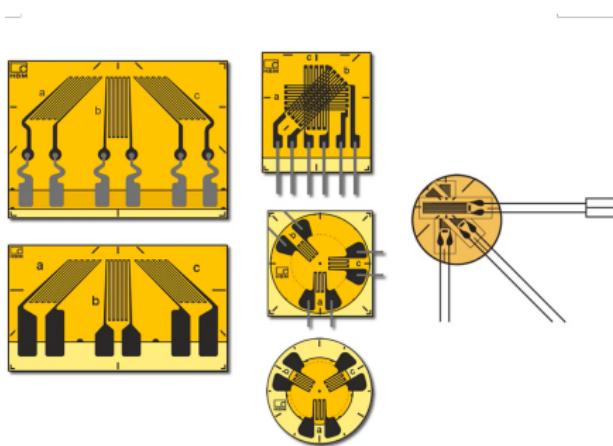


- Elementos que miden la deformación en un punto y que a partir de una relación esfuerzo-deformación del material, permiten conocer de forma indirecta los esfuerzos en esos puntos.
- No es posible medir directamente los esfuerzos al interior de una estructura y solo se pueden inferir estos a través de la medición de deformaciones.
- Complementar el tema de forma autónoma



Las galgas extensométricas

Como estas solo pueden medir deformaciones longitudinales, se agrupan en configuraciones llamadas **rosetas de deformación** para medir las deformaciones en todas las direcciones posibles.



Video

[Strain Gauge 101 - Learn the basics of how they're used](#)

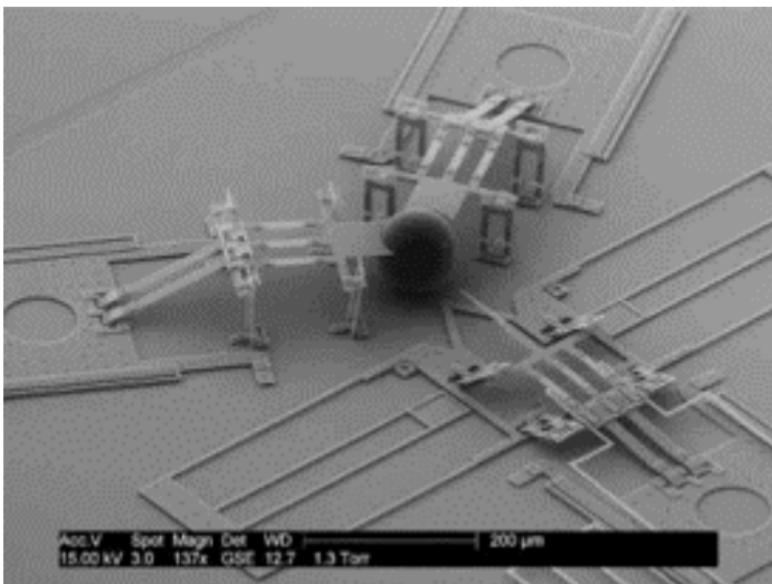


¿... y esto?

Muchos dispositivos electrónicos, tan colosales como los Sistemas Activos de Disipación Sísmica, medianos como los acelerógrafos, o tan minúsculos como los MEMES (*Micro Electro-Mechanical Systems*), son activados por desplazamientos y deformaciones.



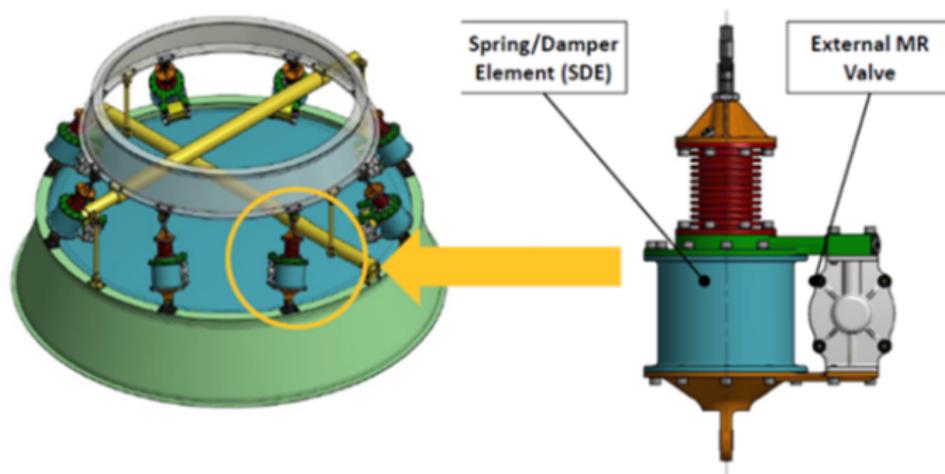
¿... y esto?



MEMS, así funcionan los sistemas microeléctricos en el hardware. [Link.](#)



¿... y esto?



ESA - Semi active damping systems. [Link.](#)



¿... y esto?



Introducing Tuned Mass Dampers | January 2017 | Highlighting Japan. [Link.](#)



¿Fuerzas, esfuerzos, desplazamientos, deformaciones?

- Puede pensarse que las fuerzas y los desplazamientos van primero que los esfuerzos y las deformaciones.
- Usualmente, en los laboratorios de estructuras se simulan las cargas con desplazamientos inducidos para hallar esfuerzos, y en los laboratorios de suelos se aplican fuerzas para hallar esfuerzos.
- Por ejemplo, el **Laboratorio de Ingeniería Estructural y Sísmica de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales**, induce desplazamientos mediante actuadores en su **Mesa Vibradora** y en su **Sistema Híbrido de Simulación Sísmica**.



¿Fuerzas, esfuerzos, desplazamientos, deformaciones?

- Puede pensarse que las fuerzas y los desplazamientos van primero que los esfuerzos y las deformaciones.
- Usualmente, en los laboratorios de estructuras se simulan las cargas con desplazamientos inducidos para hallar esfuerzos, y en los laboratorios de suelos se aplican fuerzas para hallar esfuerzos.
- Por ejemplo, el **Laboratorio de Ingeniería Estructural y Sísmica de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales**, induce desplazamientos mediante actuadores en su **Mesa Vibradora** y en su **Sistema Híbrido de Simulación Sísmica**.



¿Fuerzas, esfuerzos, desplazamientos, deformaciones?

- Puede pensarse que las fuerzas y los desplazamientos van primero que los esfuerzos y las deformaciones.
- Usualmente, en los laboratorios de estructuras se simulan las cargas con desplazamientos inducidos para hallar esfuerzos, y en los laboratorios de suelos se aplican fuerzas para hallar esfuerzos.
- Por ejemplo, el **Laboratorio de Ingeniería Estructural y Sísmica de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales**, induce desplazamientos mediante actuadores en su **Mesa Vibradora** y en su **Sistema Híbrido de Simulación Sísmica**.



¿Fuerzas, esfuerzos, desplazamientos, deformaciones?

- Puede pensarse que las fuerzas y los desplazamientos van primero que los esfuerzos y las deformaciones.
- Usualmente, en los laboratorios de estructuras se simulan las cargas con desplazamientos inducidos para hallar esfuerzos, y en los laboratorios de suelos se aplican fuerzas para hallar esfuerzos.
- Por ejemplo, el **Laboratorio de Ingeniería Estructural y Sísmica de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales**, induce desplazamientos mediante actuadores en su **Mesa Vibradora** y en su **Sistema Híbrido de Simulación Sísmica**.



Mesa vibradora

Laboratorio de Ingeniería Estructural y Sísmica de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales





Sistema híbrido de simulación sísmica

Laboratorio de Ingeniería Estructural y Sísmica de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales



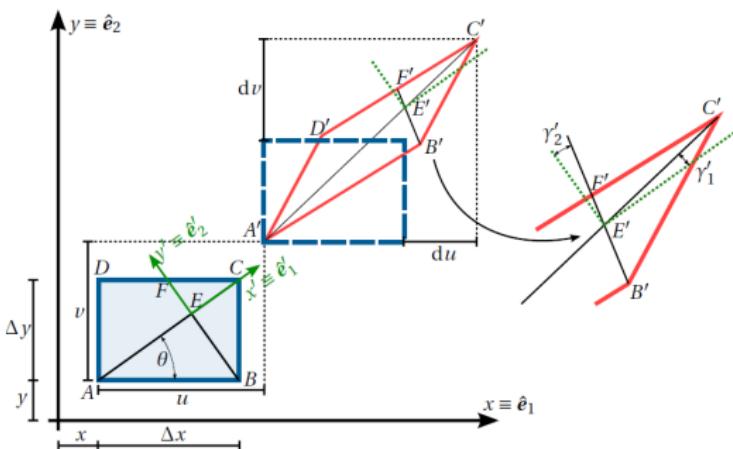


Derrotero

- Conceptos necesarios del suplemento matemático
- Deformaciones
- 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- 3.3. Las galgas extensométricas
- **3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones**
- 3.5. Rotación
- 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios
- Referencias



Especificación de la deformación en otras direcciones



Estudio Autónomo

- 03.04 - Deformación en otras direcciones (Parte 1/2)
- 03.04 - Deformación en otras direcciones (Parte 2/2)
- 03_04_exp_otras_direcciones.ipynb



Especificación de la deformación en otras direcciones

Según Solecki y Connat, 2003:

$$\varepsilon_{x'}(\theta) = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta$$

$$\varepsilon_{y'}(\theta) = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta - \varepsilon_{xy} \sin 2\theta$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}(\theta)}{2} = \varepsilon_{x'y'}(\theta) = \varepsilon_{xy} \cos 2\theta - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\theta$$



Especificación de la deformación en otras direcciones

Según Solecki y Connat, 2003:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{x'} & \varepsilon_{x'y'} & \varepsilon_{x'z'} \\ \varepsilon_{y'x'} & \varepsilon_{y'} & \varepsilon_{y'z'} \\ \varepsilon_{z'x'} & \varepsilon_{z'y'} & \varepsilon_{z'} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\varepsilon'}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}^T \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_T$$



Cambio de base

- En términos de deformaciones matemáticas:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{z'} \\ \varepsilon_{y'z'} \\ \varepsilon_{x'z'} \\ \varepsilon_{x'y'} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & 2\gamma_1 \beta_1 & 2\gamma_1 \alpha_1 & 2\alpha_1 \beta_1 \\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & 2\gamma_2 \beta_2 & 2\gamma_2 \alpha_2 & 2\alpha_2 \beta_2 \\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & 2\gamma_3 \beta_3 & 2\gamma_3 \alpha_3 & 2\alpha_3 \beta_3 \\ \alpha_2 \alpha_3 & \beta_2 \beta_3 & \gamma_2 \gamma_3 & \gamma_2 \beta_3 + \beta_2 \gamma_3 & \gamma_2 \alpha_3 + \alpha_2 \gamma_3 & \alpha_2 \beta_3 + \beta_2 \alpha_3 \\ \alpha_1 \alpha_3 & \beta_1 \beta_3 & \gamma_1 \gamma_3 & \gamma_1 \beta_3 + \beta_1 \gamma_3 & \gamma_1 \alpha_3 + \alpha_1 \gamma_3 & \alpha_1 \beta_3 + \beta_1 \alpha_3 \\ \alpha_1 \alpha_2 & \beta_1 \beta_2 & \gamma_1 \gamma_2 & \gamma_1 \beta_2 + \beta_1 \gamma_2 & \gamma_1 \alpha_2 + \alpha_1 \gamma_2 & \alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 \end{pmatrix}}_{=T_\sigma} \text{ (ver ecuación (2.23))} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

- En términos de deformaciones ingenieriles:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{z'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{x'y'} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & \gamma_1 \beta_1 & \gamma_1 \alpha_1 & \alpha_1 \beta_1 \\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & \gamma_2 \beta_2 & \gamma_2 \alpha_2 & \alpha_2 \beta_2 \\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & \gamma_3 \beta_3 & \gamma_3 \alpha_3 & \alpha_3 \beta_3 \\ 2\alpha_2 \alpha_3 & 2\beta_2 \beta_3 & 2\gamma_2 \gamma_3 & \gamma_2 \beta_3 + \beta_2 \gamma_3 & \gamma_2 \alpha_3 + \alpha_2 \gamma_3 & \alpha_2 \beta_3 + \beta_2 \alpha_3 \\ 2\alpha_1 \alpha_3 & 2\beta_1 \beta_3 & 2\gamma_1 \gamma_3 & \gamma_1 \beta_3 + \beta_1 \gamma_3 & \gamma_1 \alpha_3 + \alpha_1 \gamma_3 & \alpha_1 \beta_3 + \beta_1 \alpha_3 \\ 2\alpha_1 \alpha_2 & 2\beta_1 \beta_2 & 2\gamma_1 \gamma_2 & \gamma_1 \beta_2 + \beta_1 \gamma_2 & \gamma_1 \alpha_2 + \alpha_1 \gamma_2 & \alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 \end{pmatrix}}_{T_\epsilon} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Con $\mathbf{T}_\sigma^{-1} = \mathbf{T}_\epsilon^T$



Deformación en función de los vectores normales al plano

Como la dirección de los vectores \hat{e}'_1 , \hat{e}'_2 y \hat{e}'_3 es arbitraria, siempre y cuando estos sean vectores mutuamente ortogonales, de las ecuaciones anteriores se sigue que:

- la deformación longitudinal en una dirección del vector normal \hat{n} :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\hat{n}} &= \mathbf{n}^T \underline{\underline{\varepsilon}} \hat{n} \\ &= \varepsilon_x \alpha^2 + \varepsilon_y \beta^2 + \varepsilon_z \gamma^2 + 2\varepsilon_{xy} \alpha \beta + 2\varepsilon_{yz} \beta \gamma + 2\varepsilon_{xz} \alpha \gamma\end{aligned}$$

- la deformación angular matemática sobre un plano generado por los vectores mutuamente ortogonales \hat{m} y \hat{n} es:

$$\varepsilon_{\hat{n}\hat{m}} = \mathbf{m}^T \underline{\underline{\varepsilon}} \hat{n}$$



Relación entre las deformaciones calculadas en sistemas de ejes coordenados diferentes

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \mathbf{T} \underline{\underline{\varepsilon}}' \mathbf{T}^T$$



Formulación en dos dimensiones

Código

- [03_04.ipynb](#)

$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + 2\varepsilon_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

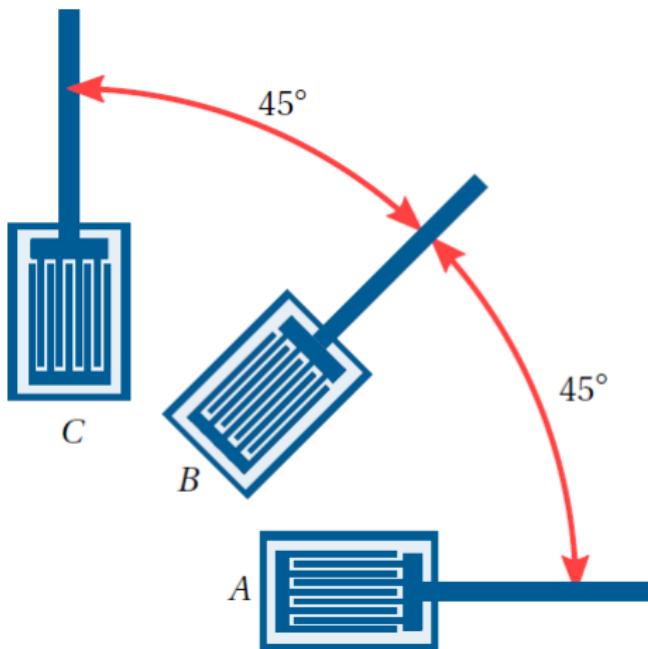
$$\varepsilon_{y'} = \varepsilon_x \sin^2 \theta + \varepsilon_y \cos^2 \theta - 2\varepsilon_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\varepsilon_{x'y'} = \varepsilon_y \sin \theta \cos \theta - \varepsilon_x \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\varepsilon_{x'z'} = \varepsilon_{y'z'} = \varepsilon_{z'} = 0$$

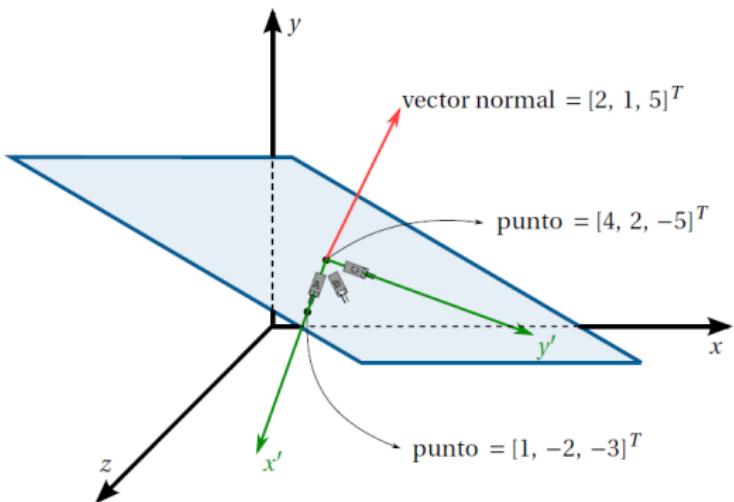


Ejemplo





Ejemplo: cambio de base

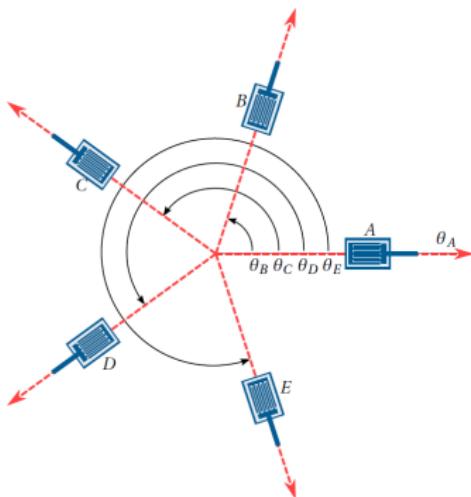


Código

- 03_04_02_ejemplo.ipynb



Ejemplo: más de tres galgas extensométricas



Código

- 03_04_03_ejemplo.ipynb



Derrotero

- Conceptos necesarios del suplemento matemático
- Deformaciones
- 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- 3.3. Las galgas extensométricas
- 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- **3.5. Rotación**
- 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios
- Referencias



Rotación

Estudio autónomo

- 03.05 - Descomposición del movimiento de un punto: traslación rígida, rotación rígida y deformaciones



Derrotero

- Conceptos necesarios del suplemento matemático
- Deformaciones
- 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- 3.3. Las galgas extensométricas
- 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- 3.5. Rotación
- 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios
- Referencias

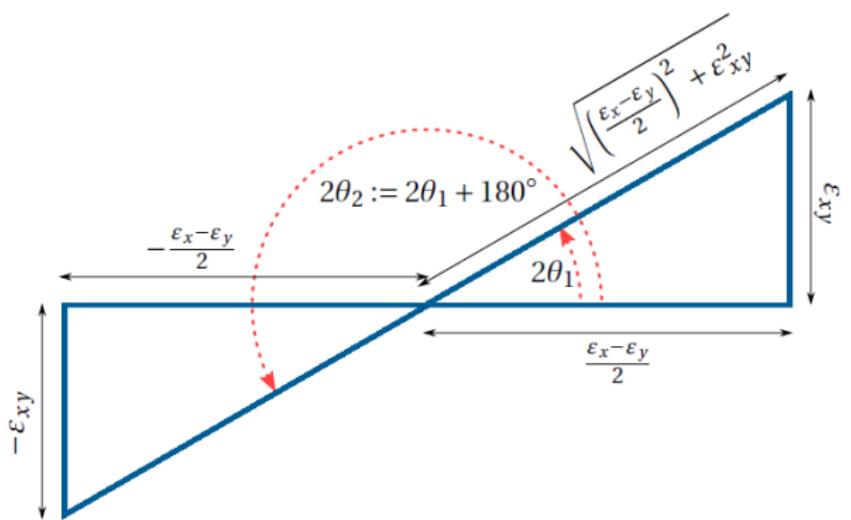


Derrotero

- Conceptos necesarios del suplemento matemático
- Deformaciones
- 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- 3.3. Las galgas extensométricas
- 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- 3.5. Rotación
- 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios
- Referencias



Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones



$$\sin 2\theta_1 = \frac{\varepsilon_{xy}}{R}$$

$$\cos 2\theta_1 = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2R}$$

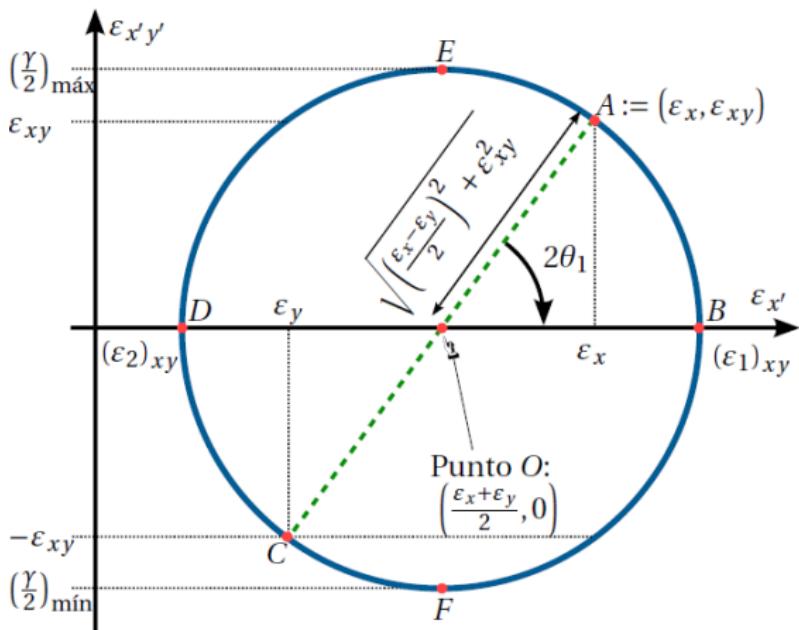
$$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2}$$

$$\sin 2\theta_2 = -\frac{\varepsilon_{xy}}{R}$$

$$\cos 2\theta_2 = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2R}$$



Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones





Derrotero

- Conceptos necesarios del suplemento matemático
- Deformaciones
- 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- 3.3. Las galgas extensométricas
- 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- 3.5. Rotación
- 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios
- Referencias



Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

- eigenvalues problem:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \hat{\mathbf{n}} = \varepsilon_n \hat{\mathbf{n}}$$

- Ecuación característica:
 - Caso bidimensional:

$$\varepsilon_n^2 - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)\varepsilon_n + \varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_{xy}^2 = 0$$

- Caso tridimensional:

$$-\varepsilon_n^3 + I_1^d \varepsilon_n^2 - I_2^d \varepsilon_n + I_3^d = 0$$

- Invariantes de deformaciones

$$e := I_1^d := \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

$$I_2^d := \frac{1}{2} (\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})^2 - \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2))$$

$$I_2^d := \det(\underline{\underline{\varepsilon}})$$



Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

- eigenvalues problem:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \hat{\mathbf{n}} = \varepsilon_n \hat{\mathbf{n}}$$

- Ecuación característica:
 - Caso bidimensional:

$$\varepsilon_n^2 - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)\varepsilon_n + \varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_{xy}^2 = 0$$

- Caso tridimensional:

$$-\varepsilon_n^3 + I_1^d \varepsilon_n^2 - I_2^d \varepsilon_n + I_3^d = 0$$

- Invariantes de deformaciones

$$e := I_1^d := \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

$$I_2^d := \frac{1}{2} (\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})^2 - \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2))$$

$$I_2^d := \det(\underline{\underline{\varepsilon}})$$



Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

- eigenvalues problem:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \hat{\mathbf{n}} = \varepsilon_n \hat{\mathbf{n}}$$

- Ecuación característica:
 - Caso bidimensional:

$$\varepsilon_n^2 - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)\varepsilon_n + \varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_{xy}^2 = 0$$

- Caso tridimensional:

$$-\varepsilon_n^3 + I_1^d \varepsilon_n^2 - I_2^d \varepsilon_n + I_3^d = 0$$

- Invariantes de deformaciones

$$e := I_1^d := \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

$$I_2^d := \frac{1}{2} (\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})^2 - \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2))$$

$$I_2^d := \det(\underline{\underline{\varepsilon}})$$



Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

- eigenvalues problem:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \hat{\mathbf{n}} = \varepsilon_n \hat{\mathbf{n}}$$

- Ecuación característica:
 - Caso bidimensional:

$$\varepsilon_n^2 - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)\varepsilon_n + \varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_{xy}^2 = 0$$

- Caso tridimensional:

$$-\varepsilon_n^3 + I_1^d \varepsilon_n^2 - I_2^d \varepsilon_n + I_3^d = 0$$

- **Invariantes de deformaciones**

$$e := I_1^d := \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

$$I_2^d := \frac{1}{2} (\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})^2 - \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2))$$

$$I_3^d := \det(\underline{\underline{\varepsilon}})$$



Derrotero

- Conceptos necesarios del suplemento matemático
- Deformaciones
- 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- 3.3. Las galgas extensométricas
- 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- 3.5. Rotación
- 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios
- Referencias



Referencias

Álvarez, D. A. (2022). *Teoría de la elasticidad*, volume 1. Universidad Nacional de Colombia.



Links

Screenshot of a YouTube playlist titled "03 - Desplazamientos y deformaciones" from the channel "diegoandresalvarez". The playlist contains 7 videos related to mechanics tensorial:

- 03.01 - Campo vectorial de desplazamientos**: Concepto vectorial de desplazamiento de sólidos. $\mathbf{u}(x,y,z) = \begin{cases} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{cases}$. 1545 visualizaciones.
- 03.02 - Deformaciones longitudinales o unitarias**: Deformación de los deformadores longitudinales o uniaxiales. $\gamma_{xx} = \frac{\partial x}{\partial X}, \gamma_{yy} = \frac{\partial y}{\partial Y}, \gamma_{zz} = \frac{\partial z}{\partial Z}$. 2627 visualizaciones.
- 03.03 - Galgas extensionimétricas**: ¿Qué es una galga extensionimétrica? 2313 visualizaciones.
- 03.04 - Deformación en otras direcciones (Parte 1/2)**: Deducción de deformación en otras direcciones (parte 1/2). 552 visualizaciones.
- 03.04 - Deformación en otras direcciones (Parte 2/2)**: Transformación del tensor de deformación en otras direcciones (parte 2/2). 554 visualizaciones.
- 03.05 - Descomposición del movimiento de un punto: traslación rígida, rotación rígida y deformaciones**: Descomposición del movimiento de un punto: traslación rígida, rotación rígida y deformaciones. 508 visualizaciones.

- **Lista de reproducción: 03 - Desplazamientos y deformaciones**
- **Repository of the course: [github/meedio_continuo](https://github.com/diegoandresalvarez/meedio_continuo)**