

Estudio de los desplazamientos y las deformaciones en un punto

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil
Mecánica Tensorial

2025a



Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada.



Derrotero

- Conceptos necesarios del suplemento matemático
- 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- 3.3. Las galgas extensométricas
- 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- 3.5. Rotación
- 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

Derrotero

- Conceptos necesarios del suplemento matemático
- 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- 3.3. Las galgas extensométricas
- 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- 3.5. Rotación
- 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

Expansión en series de Taylor

Apéndice matemático

Código: 03_00_taylor.ipynb

Expansión en series de Taylor

Apéndice matemático

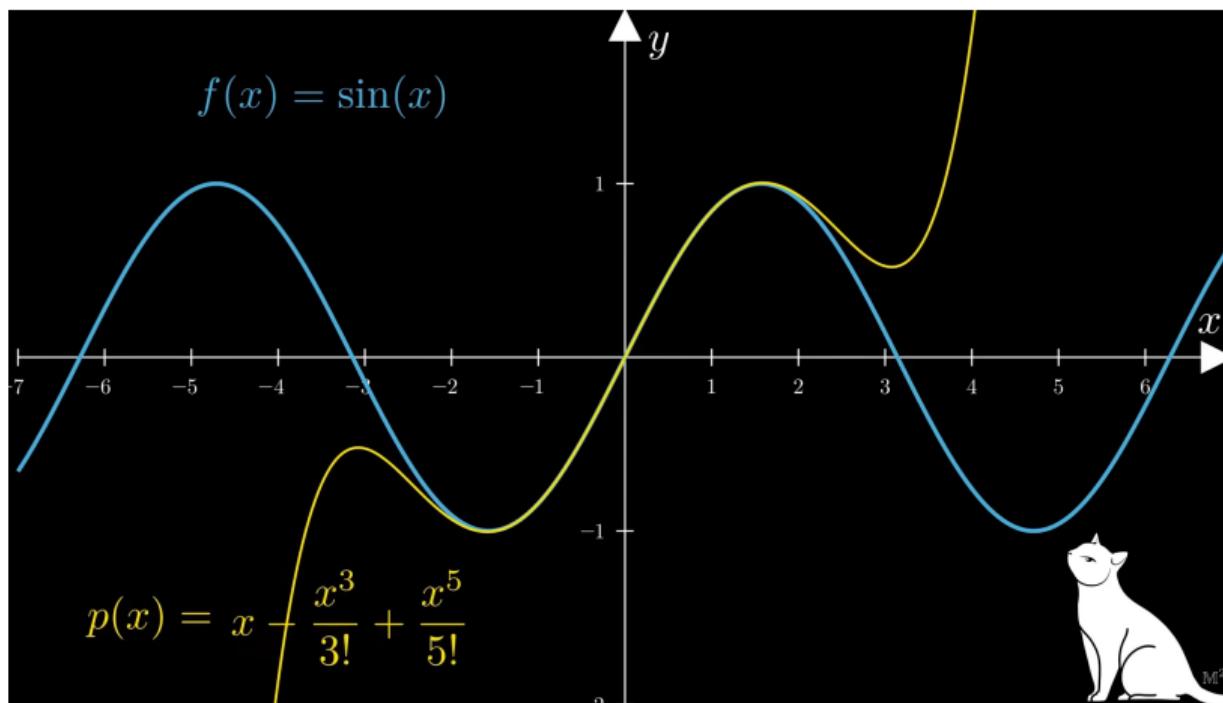


Figure: Series de Taylor | Un Resultado MUY IMPORTANTE en FÍSICA

Aproximación de ángulos pequeños

Apéndice matemático

En el límite cuando el ángulo tiende a cero, mediante una aproximación de primer orden de las funciones trigonométricas truncando su correspondiente serie de Taylor:

$$\sin x \approx x$$

$$\cos x \approx 1$$

$$\tan x \approx x$$

Si se utiliza una aproximación de segundo orden:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

Aproximación de ángulos pequeños

Apéndice matemático

Tabla A.1: Valor de las funciones trigonométricas para diferentes ángulos.

θ (grados)	θ (radianes)	$\sin(\theta)$ (error)	$\cos(\theta)$ (error)	$\tan(\theta)$ (error)
0	0	0 (0 %)	1 (0 %)	0 (0 %)
1	0.0175	0.0175 (0.0051 %)	0.9998 (0.0152 %)	0.0175 (0.0102 %)
2	0.0349	0.0349 (0.0203 %)	0.9994 (0.0610 %)	0.0349 (0.0406 %)
3	0.0524	0.0523 (0.0457 %)	0.9986 (0.1372 %)	0.0524 (0.0914 %)
4	0.0698	0.0698 (0.0813 %)	0.9976 (0.2442 %)	0.0699 (0.1625 %)
5	0.0873	0.0872 (0.1270 %)	0.9962 (0.3820 %)	0.0875 (0.2540 %)
6	0.1047	0.1045 (0.1830 %)	0.9945 (0.5508 %)	0.1051 (0.3658 %)
7	0.1222	0.1219 (0.2492 %)	0.9925 (0.7510 %)	0.1228 (0.4980 %)
8	0.1396	0.1392 (0.3257 %)	0.9903 (0.9828 %)	0.1405 (0.6507 %)
9	0.1571	0.1564 (0.4124 %)	0.9877 (1.2465 %)	0.1584 (0.8238 %)
10	0.1745	0.1736 (0.5095 %)	0.9848 (1.5427 %)	0.1763 (1.0175 %)

Expansión en series de Taylor en varias variables

Apéndice matemático

La serie de Taylor para funciones multivariadas alrededor del punto (a_i) se define como:

$$f(x_1, \dots, x_d) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=0}^{\infty} \frac{(x_1-a_1)^{n_1} \cdots (x_d-a_d)^{n_d}}{n_1! \cdots n_d!} \left(\frac{\delta^{n_1+\cdots+n_d} f}{\delta x_1^{n_1} \cdots \delta x_d^{n_d}} \right) (a_1, \dots, a_d).$$

La expansión truncada en series de Taylor de segundo orden es:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &\approx f(x_0, y_0) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \\ &+ \frac{1}{2!} \left[\Delta x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, y_0)} + 2\Delta x \Delta y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} + \Delta y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(x_0, y_0)} \right]. \end{aligned}$$

Deformaciones

Cambio de forma o tamaño de un sólido debido a los esfuerzos internos producidos por:

- Fuerzas másicas y superficiales
- Ocurrencia de dilatación térmica
- Desplazamientos impuestos

Asumimos:

- Las deformaciones que están ocurriendo dentro del sólido son muy pequeñas

Deformaciones

Cambio de forma o tamaño de un sólido debido a los esfuerzos internos producidos por:

- Fuerzas másicas y superficiales
- Ocurrencia de dilatación térmica
- Desplazamientos impuestos

Asumimos:

- Las deformaciones que están ocurriendo dentro del sólido son muy pequeñas

Deformaciones

Cambio de forma o tamaño de un sólido debido a los esfuerzos internos producidos por:

- Fuerzas másicas y superficiales
- Ocurrencia de dilatación térmica
- Desplazamientos impuestos

Asumimos:

- Las deformaciones que están ocurriendo dentro del sólido son muy pequeñas

Deformaciones

Cambio de forma o tamaño de un sólido debido a los esfuerzos internos producidos por:

- Fuerzas másicas y superficiales
- Ocurrencia de dilatación térmica
- Desplazamientos impuestos

Asumimos:

- Las deformaciones que están ocurriendo dentro del sólido son muy pequeñas

Deformaciones

Cambio de forma o tamaño de un sólido debido a los esfuerzos internos producidos por:

- Fuerzas másicas y superficiales
- Ocurrencia de dilatación térmica
- Desplazamientos impuestos

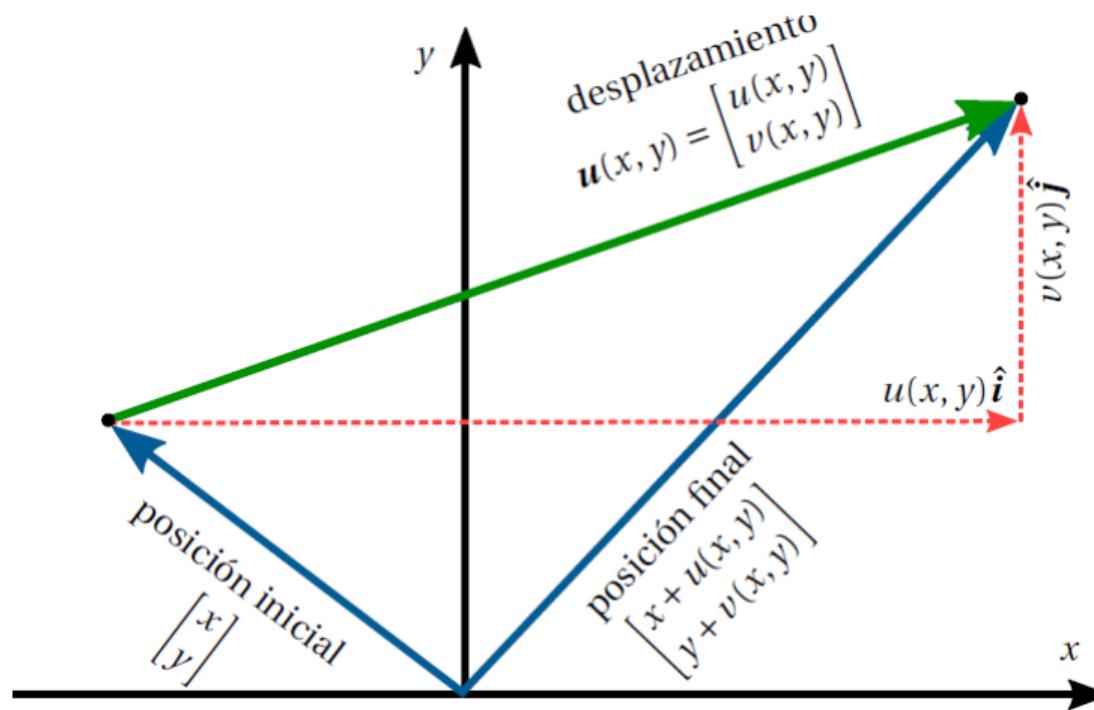
Asumimos:

- Las deformaciones que están ocurriendo dentro del sólido son muy pequeñas

Derrotero

- Conceptos necesarios del suplemento matemático
- **3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido**
- 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- 3.3. Las galgas extensométricas
- 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- 3.5. Rotación
- 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

Campo vectorial de desplazamientos de un sólido



Campo vectorial de desplazamientos de un sólido

- El sólido deformado es continuo.
- Hay una distribución de deformaciones representada como una función continua por partes.

Dominio en (x, y, z)

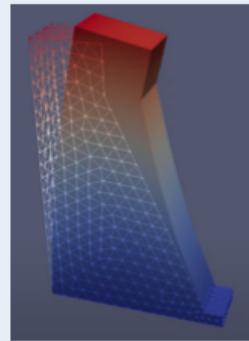


Figure: Muro de compresión deformado.

Dominio en (x, y, z, t)

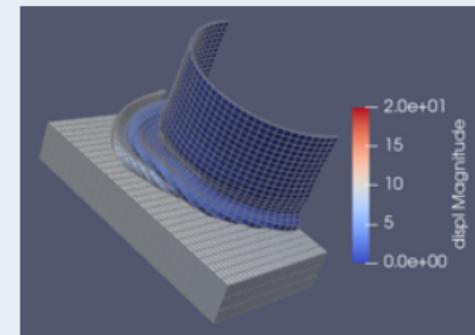
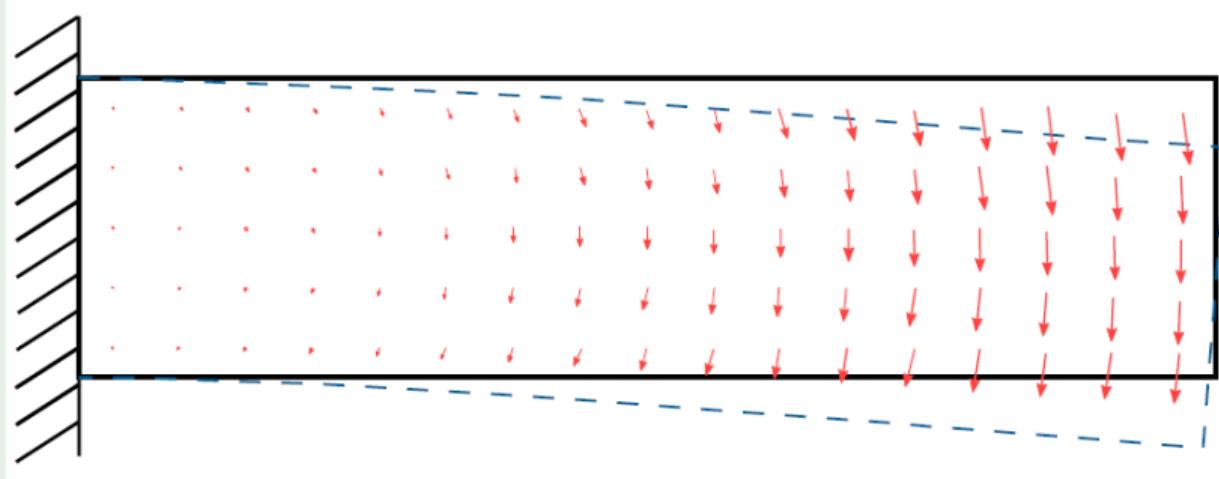


Figure: Lata aplastada por una placa (Paraview).

Campo vectorial de desplazamientos de un sólido

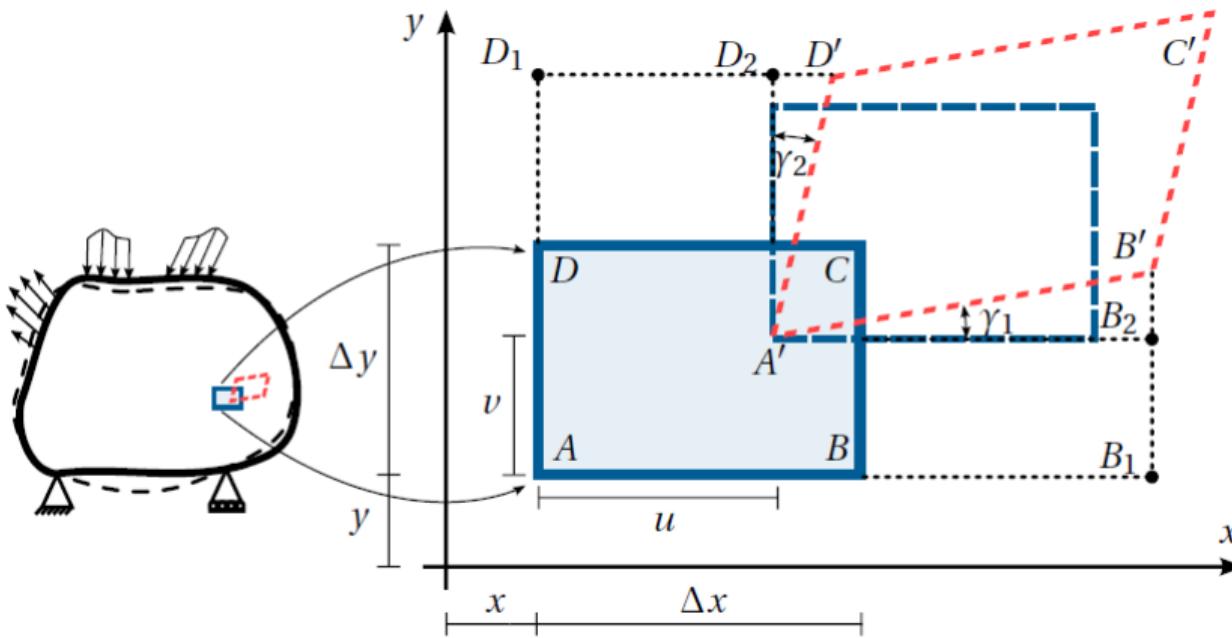
Campo vectorial de desplazamientos para una viga



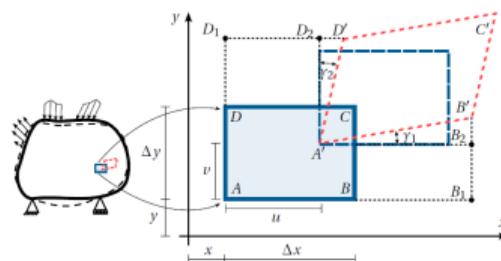
Derrotero

- Conceptos necesarios del suplemento matemático
- 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- **3.2. Componentes de la deformación en un punto**
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- 3.3. Las galgas extensométricas
- 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- 3.5. Rotación
- 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

Componentes de la deformación en un punto



Componentes de la deformación en un punto



$$A := (x, y)$$

$$B := (x + \Delta x, y)$$

$$C := (x + \Delta x, y + \Delta y)$$

$$D := (x, y + \Delta y)$$

- Componentes **horizontales** del desplazamiento:

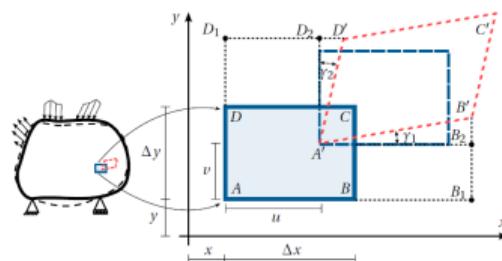
$$u(A) = u(x, y)$$

$$u(B) \approx u(x, y) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x, y)}$$

$$u(C) \approx u(x, y) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x, y)} + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x, y)}$$

$$u(D) \approx u(x, y) + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x, y)}$$

Componentes de la deformación en un punto



$$A := (x, y)$$

$$B := (x + \Delta x, y)$$

$$C := (x + \Delta x, y + \Delta y)$$

$$D := (x, y + \Delta y)$$

- Componentes **verticales** del desplazamiento:

$$v(A) = v(x, y)$$

$$v(B) \approx v(x, y) + \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x,y)}$$

$$v(C) \approx v(x, y) + \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x,y)} + \Delta y \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{(x,y)}$$

$$v(D) \approx v(x, y) + \Delta y \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{(x,y)}$$

Componentes de la deformación en un punto

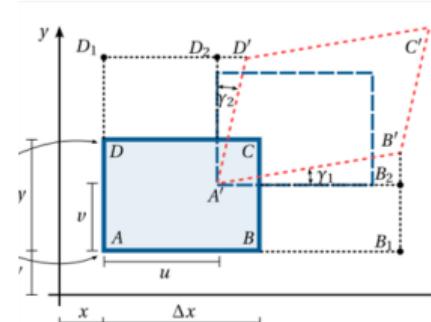
$$A' := (x + u(x, y), y + v(x, y))$$

$$B' := \left(\underbrace{x + \Delta x}_{\text{pos. ini}} + \underbrace{u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x}_{\text{desplazamiento}}, \underbrace{y}_{\text{pos. ini}} + \underbrace{v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x}_{\text{desplazamiento}} \right)$$

$$C' := \left(\underbrace{x + \Delta x}_{\text{pos. ini}} + \underbrace{u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y}_{\text{desplazamiento}}, \underbrace{y + \Delta y}_{\text{pos. ini}} + \underbrace{v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y}_{\text{desplazamiento}} \right)$$

$$D' := \left(x + u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y, y + \Delta y + v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right)$$

Componentes de la deformación en un punto



$$A'B_2 = \text{Coord}_x(B') - \text{Coord}_x(A') = \Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x,y)} \Delta x$$

$$A'D_2 = \text{Coord}_y(D') - \text{Coord}_y(A') = \Delta y + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x,y)} \Delta y$$

$$B_2B' = \text{Coord}_y(B') - \text{Coord}_y(A') = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x,y)} \Delta x$$

$$D_2D' = \text{Coord}_x(D') - \text{Coord}_x(A') = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x,y)} \Delta y$$

Derrotero

- 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular

Deformacion longitudinal (Deformación lineal)

(ε) es una medida de cuánto se estira o contrae el sólido en un punto y en una dirección en particular.

$$\varepsilon = \lim_{L_i \rightarrow 0} \frac{L_f - L_i}{L_i}$$

Deformacion longitudinal (Deformación lineal)

(ε) es una medida de cuánto se estira o contrae el sólido en un punto y en una dirección en particular.

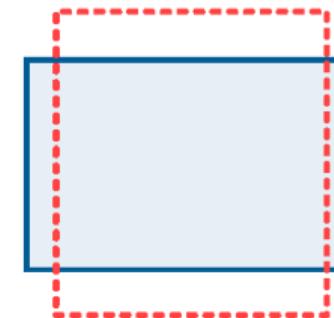
$$\varepsilon = \lim_{L_i \rightarrow 0} \frac{L_f - L_i}{L_i}$$

Deformación longitudinal (Deformación lineal)

$$\varepsilon_x(\mathbf{x}) := \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x}; \quad \varepsilon_y(\mathbf{x}) := \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial y}; \quad \varepsilon_z(\mathbf{x}) := \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial z}$$



$\varepsilon_x > 0$ (estiramiento en dirección x)
 $\varepsilon_y < 0$ (contracción en dirección y)



$\varepsilon_x < 0$ (contracción en dirección x)
 $\varepsilon_y > 0$ (estiramiento en dirección y)

Derrotero

- 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular

Deformación angular

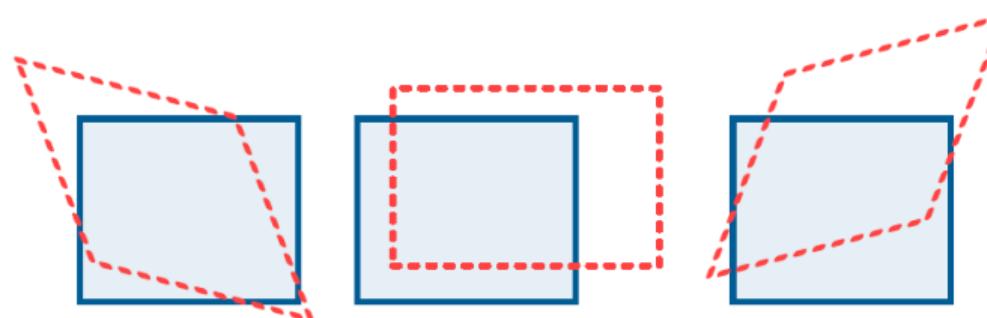
γ_{ij} mide el cambio de ángulo entre dos caras que originalmente eran ortogonales.

Deformación angular

$$\gamma_{xy}(\mathbf{x}) := \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial x}$$

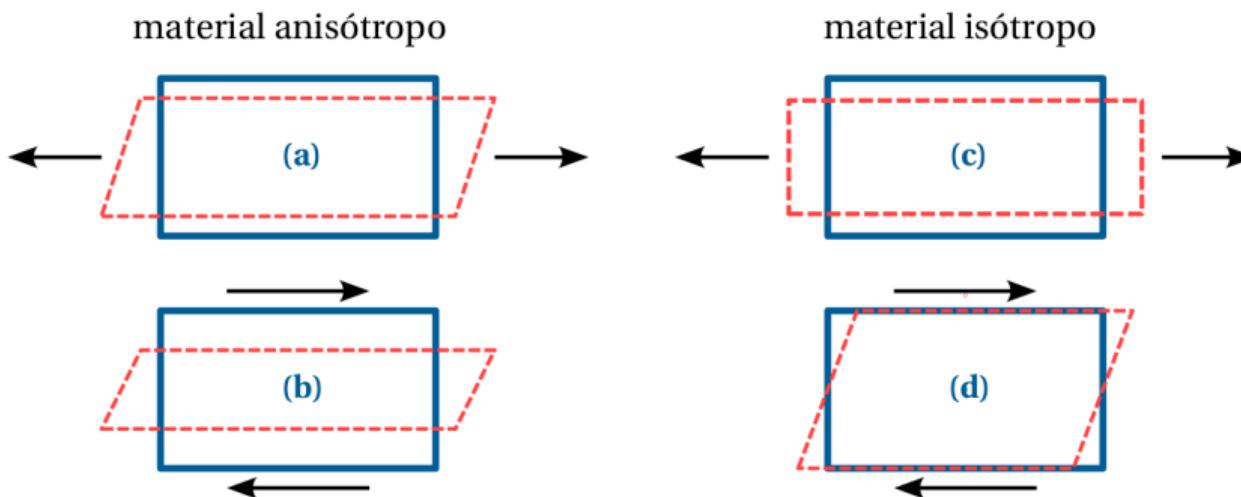
$$\gamma_{xz}(\mathbf{x}) := \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial z} + \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz}(\mathbf{x}) := \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial z} + \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial y}$$

(a) $\gamma_{xy} < 0$ (b) $\gamma_{xy} = 0$ (c) $\gamma_{xy} > 0$

Deformación angular

γ_{xy} denota el cambio en el valor del ángulo $\angle BAD$ cuando un cuerpo se somete a **esfuerzos normales y cortantes**.



Veremos luego que para los materiales isótropos, el comportamiento angular es independiente del comportamiento longitudinal.

Deformaciones angulares matemáticas

$$\varepsilon_{xy}(x, y) := \frac{\gamma_{xy}(x, y)}{2} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}.$$

Tensor de deformaciones infinitecimales de Cauchy

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}}_{\text{deformaciones matemáticas}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}}_{\text{deformaciones ingenieriles}}$$

Comentario

La deducción de las ecuaciones anteriores involucra únicamente consideraciones geométricas y, como no se hace referencia alguna a las propiedades y características de comportamiento del material, el resultado es aplicable a toda clase de materiales, incluyendo materiales elásticos y plásticos. Las únicas restricciones que hacemos son que el desplazamiento sea una función continua y derivable y que las deformaciones sean pequeñas.

Comentario

Geometrical interpretation of S_{ij} 's first off-diagonal component, $S_{12} = S_{21}$, is provided in Figure 3.11. The average rate at which the initially perpendicular segments δx_1 and δx_2 rotate toward each other is:

$$\frac{1}{2} \frac{D(\alpha + \beta)}{Dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{2dt} \left(\frac{1}{\delta x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \delta x_2 dt \right) + \frac{1}{\delta x_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \delta x_1 dt \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = S_{12} = S_{21},$$

where again D/Dt indicates that the fluid element is followed as shear deformation takes place, and again this simple construction is readily extended to the other two Cartesian direction pairs. Thus, the off-diagonal terms of S_{ij} represent the average rate at which material line segments initially parallel to the i - and j -directions rotate toward each other.

FIGURE 3.11 Illustration of positive deformation of a fluid element in the plane defined by the first and second coordinate directions. Here, both $\partial u_1 / \partial x_2$ and $\partial u_2 / \partial x_1$ are shown as positive, so $S_{12} = S_{21}$ from (3.12) is also positive. The deformation angle $d\alpha = \angle CBA$ is proportional to $\partial u_1 / \partial x_2$ while $d\beta$ is proportional to $\partial u_2 / \partial x_1$.

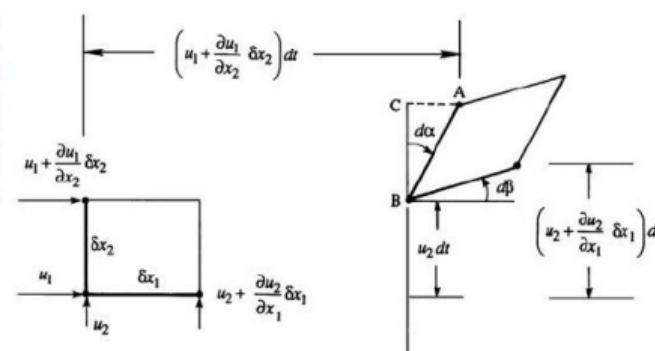


Figure: (ver: ?) En mecánica de fluidos también hablarán de deformaciones angulares.

Derrotero

- Conceptos necesarios del suplemento matemático
- 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- **3.3. Las galgas extensométricas**
- 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- 3.5. Rotación
- 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

Las galgas extensométricas



- Elementos que miden la deformación en un punto y que a partir de una relación esfuerzo-deformación del material, permiten conocer de forma indirecta los esfuerzos en esos puntos.
- No es posible medir directamente los esfuerzos al interior de una estructura y solo se pueden inferir estos a través de la medición de deformaciones.
- Complementar el tema de forma autónoma

Las galgas extensométricas



- Elementos que miden la deformación en un punto y que a partir de una relación esfuerzo-deformación del material, permiten conocer de forma indirecta los esfuerzos en esos puntos.
- No es posible medir directamente los esfuerzos al interior de una estructura y solo se pueden inferir estos a través de la medición de deformaciones.
- Complementar el tema de forma autónoma

Las galgas extensométricas



- Elementos que miden la deformación en un punto y que a partir de una relación esfuerzo-deformación del material, permiten conocer de forma indirecta los esfuerzos en esos puntos.
- No es posible medir directamente los esfuerzos al interior de una estructura y solo se pueden inferir estos a través de la medición de deformaciones.
- Complementar el tema de forma autónoma

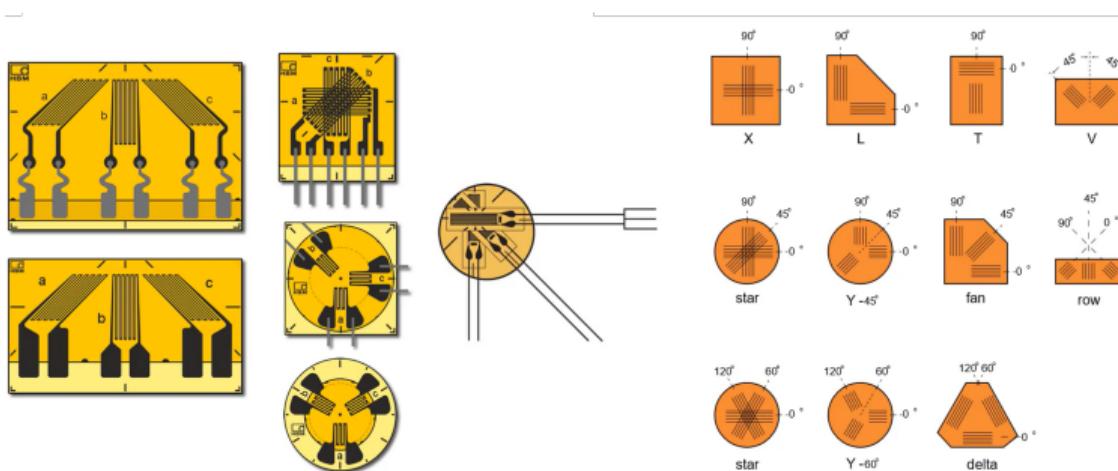
Las galgas extensométricas



- Elementos que miden la deformación en un punto y que a partir de una relación esfuerzo-deformación del material, permiten conocer de forma indirecta los esfuerzos en esos puntos.
- No es posible medir directamente los esfuerzos al interior de una estructura y solo se pueden inferir estos a través de la medición de deformaciones.
- Complementar el tema de forma autónoma

Las galgas extensométricas

Como estas solo pueden medir deformaciones longitudinales, se agrupan en configuraciones llamadas **rosetas de deformación** para medir las deformaciones en todas las direcciones posibles.

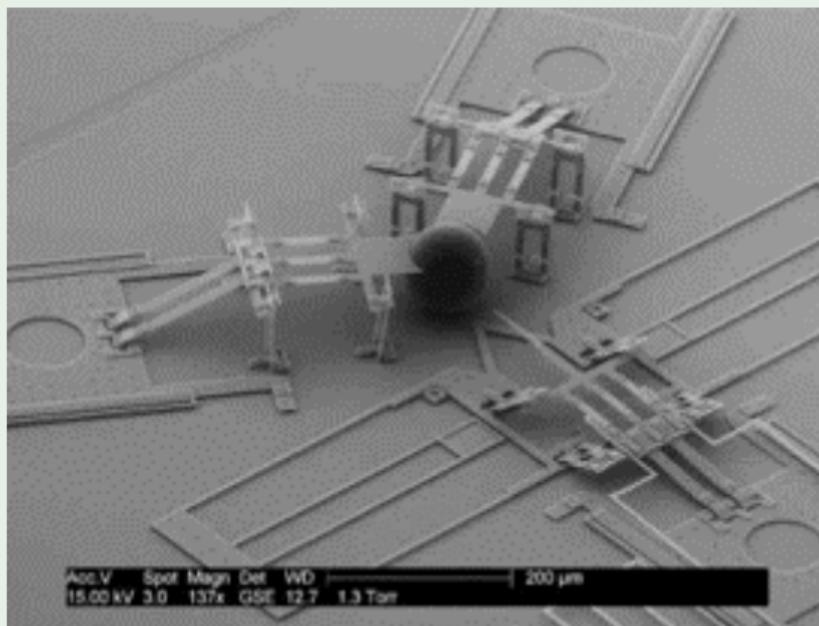


Video: Strain Gauge 101 - Learn the basics of how they're used

¿... y esto?

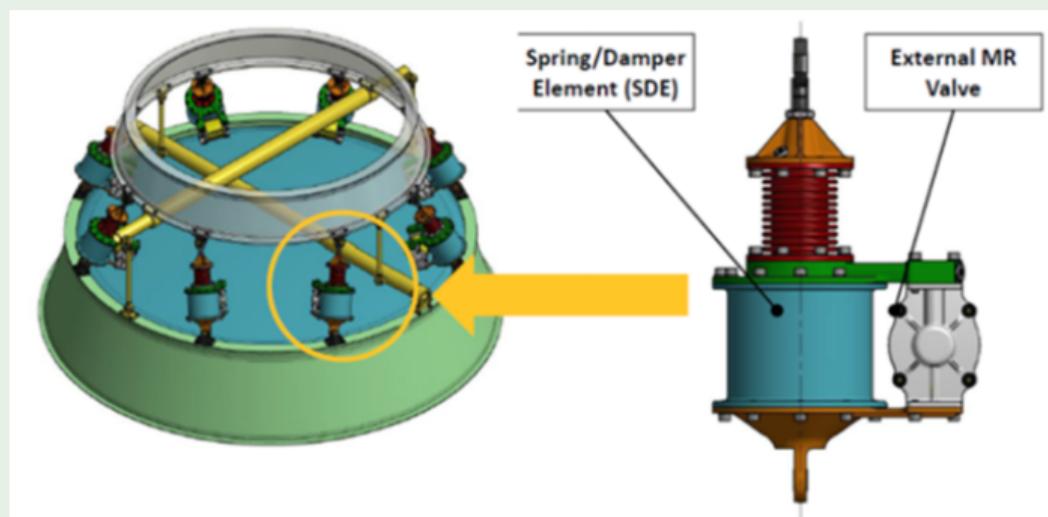
Muchos dispositivos electrónicos, tan colosales como los Sistemas Activos de Disipación Sísmica, medianos como los acelerógrafos, o tan minúsculos como los MEMES (*Micro Electro-Mechanical Systems*), son activados por desplazamientos y deformaciones.

¿... y esto?



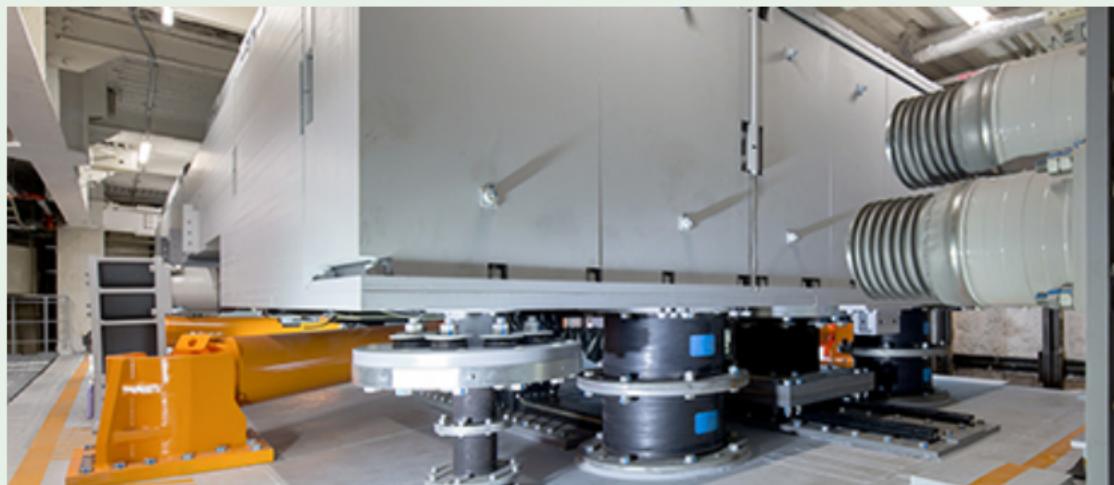
MEMS, así funcionan los sistemas microeléctricos en el hardware. [Link](#).

¿... y esto?



ESA - Semi active damping systems. [Link](#).

¿... y esto?



Introducing Tuned Mass Dampers | January 2017 | Highlighting Japan. [Link](#).

¿Fuerzas, esfuerzos, desplazamientos, deformaciones?

- Puede pensarse que las fuerzas y los desplazamientos van primero que los esfuerzos y las deformaciones.
- Usualmente, en los laboratorios de estructuras se simulan las cargas con desplazamientos inducidos para hallar esfuerzos, y en los laboratorios de suelos se aplican fuerzas para hallar esfuerzos.
- Por ejemplo, el **Laboratorio de Ingeniería Estructural y Sísmica de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales**, induce desplazamientos mediante actuadores en su **Mesa Vibradora** y en su **Sistema Híbrido de Simulación Sísmica**.

¿Fuerzas, esfuerzos, desplazamientos, deformaciones?

- Puede pensarse que las fuerzas y los desplazamientos van primero que los esfuerzos y las deformaciones.
- Usualmente, en los laboratorios de estructuras se simulan las cargas con desplazamientos inducidos para hallar esfuerzos, y en los laboratorios de suelos se aplican fuerzas para hallar esfuerzos.
- Por ejemplo, el **Laboratorio de Ingeniería Estructural y Sísmica de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales**, induce desplazamientos mediante actuadores en su **Mesa Vibradora** y en su **Sistema Híbrido de Simulación Sísmica**.

¿Fuerzas, esfuerzos, desplazamientos, deformaciones?

- Puede pensarse que las fuerzas y los desplazamientos van primero que los esfuerzos y las deformaciones.
- Usualmente, en los laboratorios de estructuras se simulan las cargas con desplazamientos inducidos para hallar esfuerzos, y en los laboratorios de suelos se aplican fuerzas para hallar esfuerzos.
- Por ejemplo, el **Laboratorio de Ingeniería Estructural y Sísmica de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales**, induce desplazamientos mediante actuadores en su **Mesa Vibradora** y en su **Sistema Híbrido de Simulación Sísmica**.

¿Fuerzas, esfuerzos, desplazamientos, deformaciones?

- Puede pensarse que las fuerzas y los desplazamientos van primero que los esfuerzos y las deformaciones.
- Usualmente, en los laboratorios de estructuras se simulan las cargas con desplazamientos inducidos para hallar esfuerzos, y en los laboratorios de suelos se aplican fuerzas para hallar esfuerzos.
- Por ejemplo, el **Laboratorio de Ingeniería Estructural y Sísmica de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales**, induce desplazamientos mediante actuadores en su **Mesa Vibradora** y en su **Sistema Híbrido de Simulación Sísmica**.

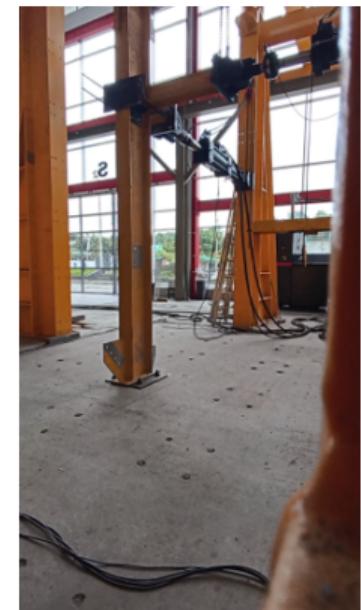
Mesa vibradora

Laboratorio de Ingeniería Estructural y Sísmica de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales



Sistema híbrido de simulación sísmica

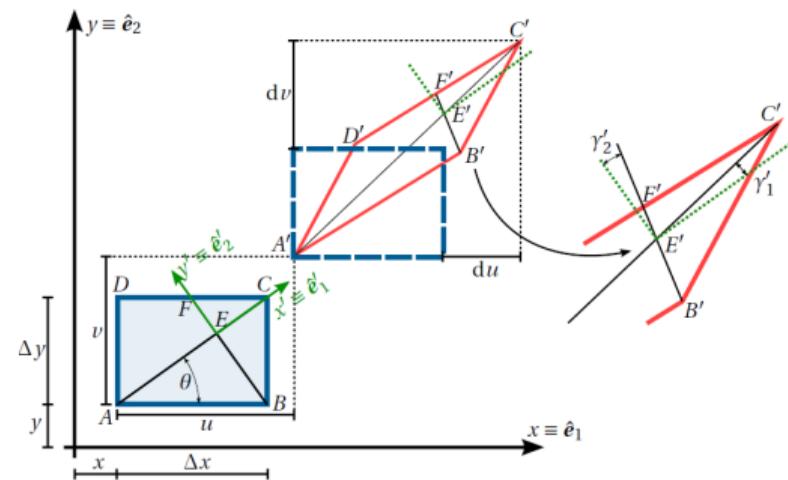
Laboratorio de Ingeniería Estructural y Sísmica de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales



Derrotero

- Conceptos necesarios del suplemento matemático
- 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- 3.3. Las galgas extensométricas
- **3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones**
- 3.5. Rotación
- 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

Especificación de la deformación en otras direcciones



Estudio autónomo

- 03.04 - Deformación en otras direcciones (Parte 1/2)
- 03.04 - Deformación en otras direcciones (Parte 2/2)
- 03_04_exp_otras_direcciones.ipynb

Especificación de la deformación en otras direcciones

Según Solecki y Connat, 2003:

$$\varepsilon_{x'}(\theta) = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta$$

$$\varepsilon_{y'}(\theta) = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta - \varepsilon_{xy} \sin 2\theta$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}(\theta)}{2} = \varepsilon_{x'y'}(\theta) = \varepsilon_{xy} \cos 2\theta - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\theta$$

Especificación de la deformación en otras direcciones

Según Solecki y Connat, 2003:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} & \varepsilon_{x'y'} & \varepsilon_{x'z'} \\ \varepsilon_{y'x'} & \varepsilon_{y'} & \varepsilon_{y'z'} \\ \varepsilon_{z'x'} & \varepsilon_{z'y'} & \varepsilon_{z'} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\varepsilon'}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}}_{T^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}}_{T}$$

Cambio de base

- En términos de deformaciones matemáticas:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{z'} \\ \varepsilon_{y'z'} \\ \varepsilon_{x'z'} \\ \varepsilon_{x'y'} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & 2\gamma_1 \beta_1 & 2\gamma_1 \alpha_1 & 2\alpha_1 \beta_1 \\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & 2\gamma_2 \beta_2 & 2\gamma_2 \alpha_2 & 2\alpha_2 \beta_2 \\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & 2\gamma_3 \beta_3 & 2\gamma_3 \alpha_3 & 2\alpha_3 \beta_3 \\ \alpha_2 \alpha_3 & \beta_2 \beta_3 & \gamma_2 \gamma_3 & \gamma_2 \beta_3 + \beta_2 \gamma_3 & \gamma_2 \alpha_3 + \alpha_2 \gamma_3 & \alpha_2 \beta_3 + \beta_2 \alpha_3 \\ \alpha_1 \alpha_3 & \beta_1 \beta_3 & \gamma_1 \gamma_3 & \gamma_1 \beta_3 + \beta_1 \gamma_3 & \gamma_1 \alpha_3 + \alpha_1 \gamma_3 & \alpha_1 \beta_3 + \beta_1 \alpha_3 \\ \alpha_1 \alpha_2 & \beta_1 \beta_2 & \gamma_1 \gamma_2 & \gamma_1 \beta_2 + \beta_1 \gamma_2 & \gamma_1 \alpha_2 + \alpha_1 \gamma_2 & \alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 \end{pmatrix}}_{=T_\sigma \text{ (ver ecuación (2.23))}} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

- En términos de deformaciones ingenieriles:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{z'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{x'y'} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & \gamma_1 \beta_1 & \gamma_1 \alpha_1 & \alpha_1 \beta_1 \\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & \gamma_2 \beta_2 & \gamma_2 \alpha_2 & \alpha_2 \beta_2 \\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & \gamma_3 \beta_3 & \gamma_3 \alpha_3 & \alpha_3 \beta_3 \\ 2\alpha_2 \alpha_3 & 2\beta_2 \beta_3 & 2\gamma_2 \gamma_3 & \gamma_2 \beta_3 + \beta_2 \gamma_3 & \gamma_2 \alpha_3 + \alpha_2 \gamma_3 & \alpha_2 \beta_3 + \beta_2 \alpha_3 \\ 2\alpha_1 \alpha_3 & 2\beta_1 \beta_3 & 2\gamma_1 \gamma_3 & \gamma_1 \beta_3 + \beta_1 \gamma_3 & \gamma_1 \alpha_3 + \alpha_1 \gamma_3 & \alpha_1 \beta_3 + \beta_1 \alpha_3 \\ 2\alpha_1 \alpha_2 & 2\beta_1 \beta_2 & 2\gamma_1 \gamma_2 & \gamma_1 \beta_2 + \beta_1 \gamma_2 & \gamma_1 \alpha_2 + \alpha_1 \gamma_2 & \alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 \end{pmatrix}}_{T_\varepsilon} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Con $T_\sigma^{-1} = T_\varepsilon^T$. (Esta igualdad la podemos verificar mediante el cálculo simbólico de ambas matrices. Revisar la última parte del código 03_04.ipynb)

Deformación en función de los vectores normales al plano

Como la dirección de los vectores \hat{e}'_1 , \hat{e}'_2 y \hat{e}'_3 es arbitraria, siempre y cuando estos sean vectores mutuamente ortogonales, de las ecuaciones anteriores se sigue que:

- la deformación longitudinal en una dirección del vector normal \hat{n} :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\hat{n}} &= \mathbf{n}^T \underline{\underline{\varepsilon}} \hat{n} \\ &= \varepsilon_x \alpha^2 + \varepsilon_y \beta^2 + \varepsilon_z \gamma^2 + 2\varepsilon_{xy} \alpha \beta + 2\varepsilon_{yz} \beta \gamma + 2\varepsilon_{xz} \alpha \gamma\end{aligned}$$

- la deformación angular matemática sobre un plano generado por los vectores mutuamente ortogonales \hat{m} y \hat{n} es:

$$\varepsilon_{\hat{m}\hat{n}} = \mathbf{m}^T \underline{\underline{\varepsilon}} \hat{n}$$

(Verifique que estas formulaciones son equivalentes a las que planteamos en el tema de esfuerzos)

Relación entre las deformaciones calculadas en sistemas de ejes coordinados diferentes

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \mathbf{T} \underline{\underline{\varepsilon}}' \mathbf{T}^T$$

(Verifique que estas formulaciones son equivalentes a las que planteamos en el tema de esfuerzos)

Formulación en dos dimensiones

Código: 03_04.ipynb

$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + 2\varepsilon_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

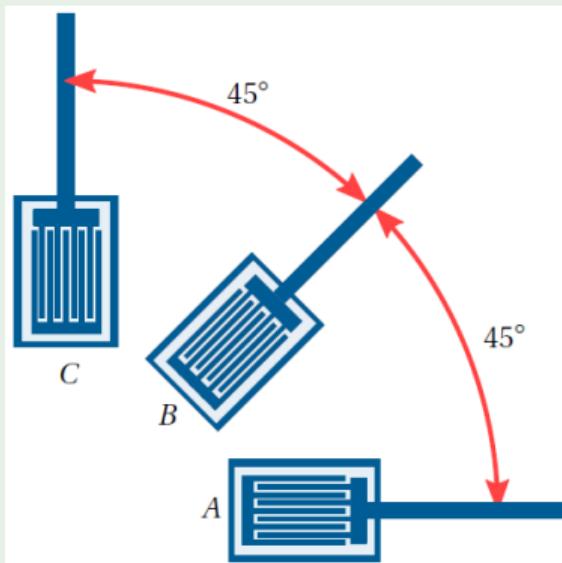
$$\varepsilon_{y'} = \varepsilon_x \sin^2 \theta + \varepsilon_y \cos^2 \theta - 2\varepsilon_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\varepsilon_{x'y'} = \varepsilon_y \sin \theta \cos \theta - \varepsilon_x \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\varepsilon_{x'z'} = \varepsilon_{y'z'} = \varepsilon_{z'} = 0$$

(Verifique que estas formulaciones son equivalentes a las que planteamos en el tema de esfuerzos)

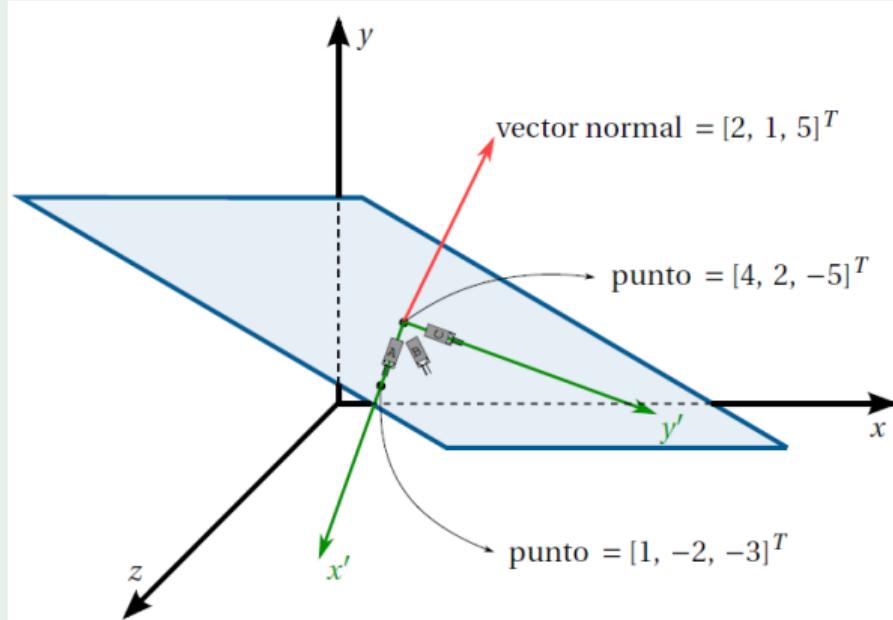
3.4.1. Ejemplo



Consider the strain rosette shown; in this figure, three extensometers are shown located in directions $\theta_A = 0^\circ$, $\theta_B = 45^\circ$ and $\theta_C = 90^\circ$. The reading of each one of these extensometers is ε_A , ε_B , ε_C , respectively. Find the strains ε_x , ε_y and ε_{xy} .

3.4.2. Ejemplo: cambio de base

Código: [03_04_02_ejemplo.ipynb](#)

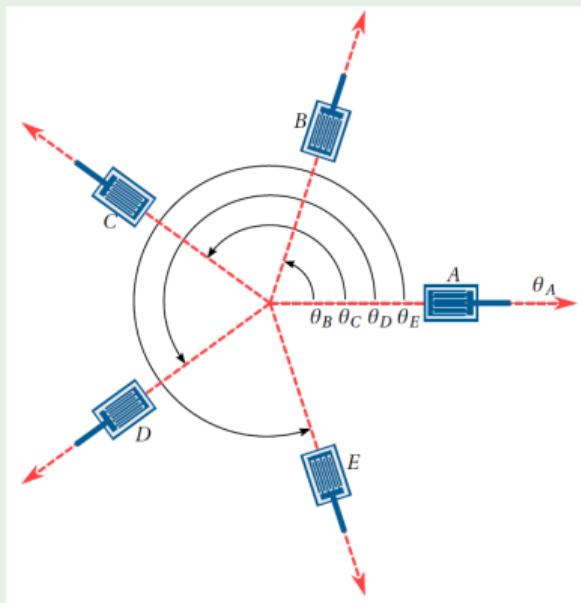


3.4.2. Ejemplo: cambio de base

Considere una placa sometida a un estado de deformación plana sobre la cual reposan tres galgas extensométricas A , B y C . Suponga que la placa está ubicada en el espacio de modo tal que esta pasa por el punto $(4, 2, -5)$ y tiene una normal $(2, 1, 5)$. Supongamos que el punto $(4, 2, -5)$ es el origen de un sistema de coordenadas $x'y'z'$ inscrito en la placa, que el eje de coordenadas x' apunta en la dirección del punto $(1, -2, -3)$ y que el eje z' coincide con el vector $(2, 1, 5)$, el cual es normal al plano. Si la galga A está ubicada

en la dirección del eje x' , y las galgas B y C se encuentran a 45° y 90° , respectivamente, en sentido antihorario sobre la placa con respecto a la galga A (de modo que la galga C apunta en la dirección del eje y'), determine las deformaciones en el plano $x'y'$ y expréselas adicionalmente con respecto al sistema de coordenadas especificado por los ejes x , y y z , suponiendo que $\varepsilon_A = 10^{-3}$, $\varepsilon_B = 2.1 \times 10^{-3}$ y $\varepsilon_C = -1.7 \times 10^{-3}$.

3.4.3. Ejemplo: más de tres galgas extensométricas



Suponga que se tienen cinco galgas extensométricas, a saber A, B, C, D y E , ubicadas sobre el mismo plano a unas inclinaciones de $0^\circ, 72^\circ, 144^\circ, 216^\circ$ y 288° ; las deformaciones medidas por las galgas fueron $3.0012 \times 10^{-4}, 3.4521 \times 10^{-4}, 1.4935 \times 10^{-3}, -4.0924 \times 10^{-4}$ y 1.5207×10^{-3} , respectivamente. Dadas las lecturas anteriores, estime la mejor aproximación posible de las deformaciones $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ y ε_{xy} .

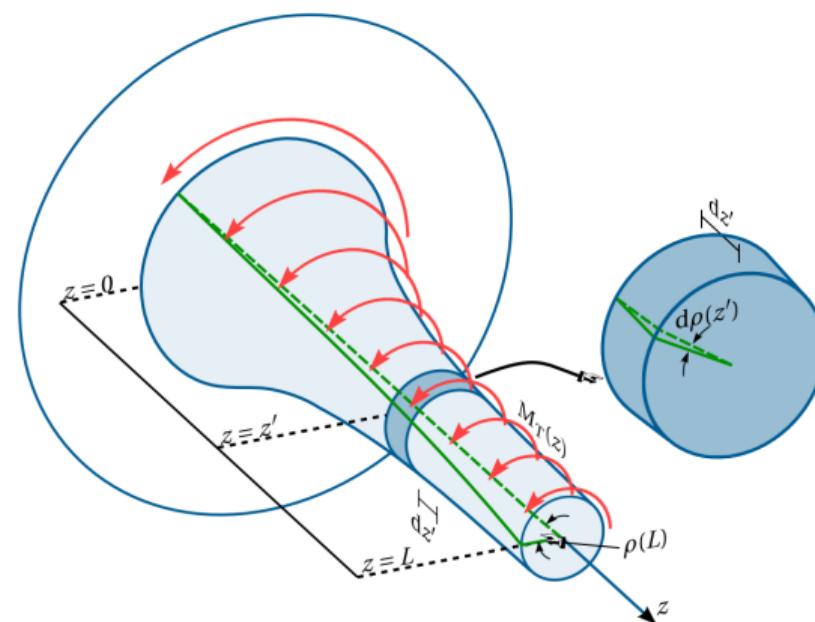
Código: [03_04_03_ejemplo.ipynb](#)

Derrotero

- Conceptos necesarios del suplemento matemático
- 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- 3.3. Las galgas extensométricas
- 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- **3.5. Rotación**
- 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

Rotación

En ocasiones es conveniente cuantificar cuánto rota un punto al interior de un sólido cuando este se deforma.

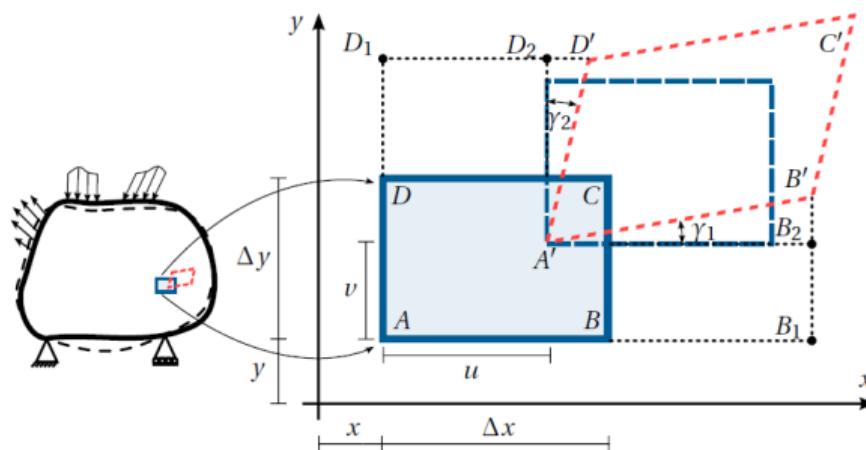


Rotación

Pequeño derrotero de esta sección:

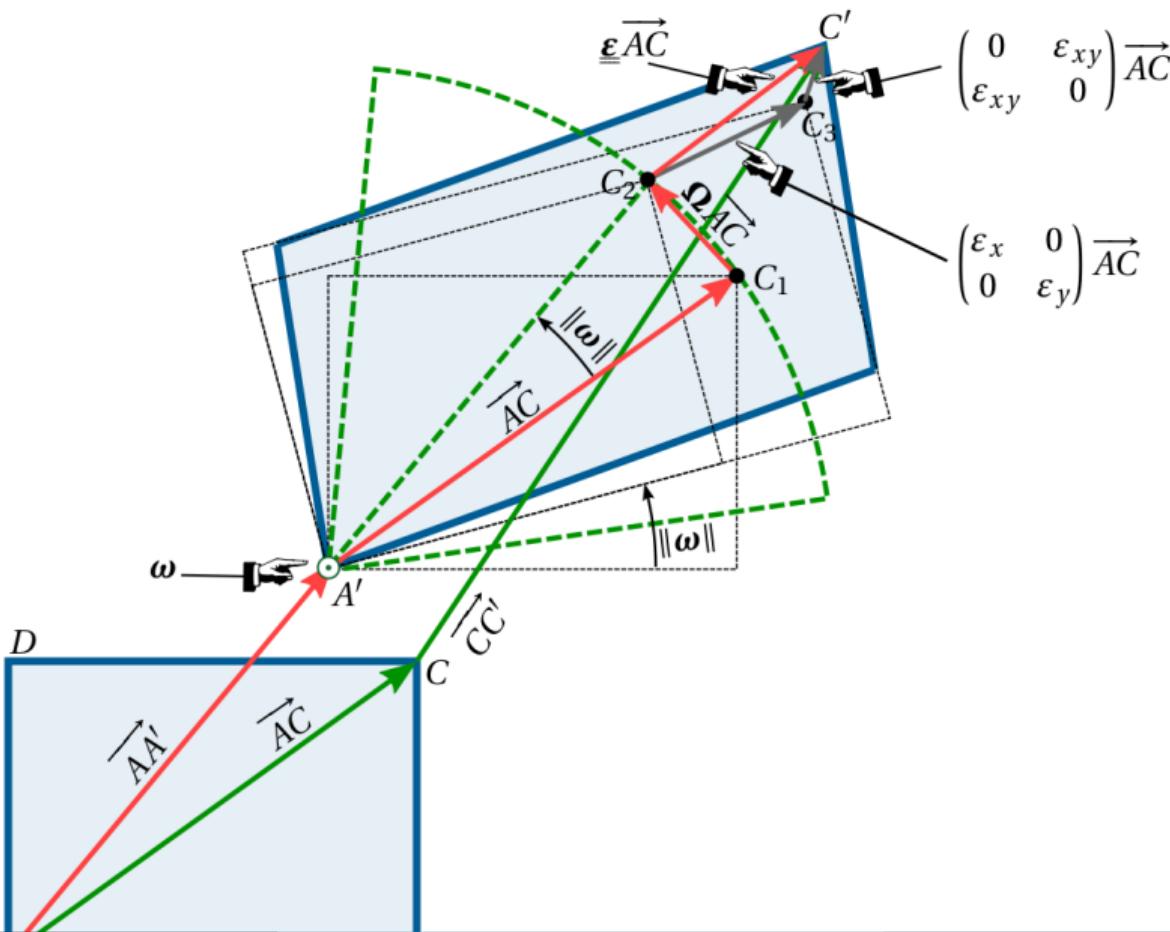
1. Matriz de rotaciones.
2. Vector de rotación.
3. Rotación rígida.
4. Formulación del rotacional.
5. Eje de rotación.
6. Componentes de la deformación.

Matriz de rotaciones



$$A' := (x + u(x, y), y + v(x, y))$$

$$C' := \left(\underbrace{x + \Delta x}_{\text{pos. ini}} + u(x, y) + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y}_{u(C)}, \underbrace{y + \Delta y}_{\text{pos. ini}} + v(x, y) + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y}_{v(C)} \right)$$



Matriz de rotaciones

Matricialmente la coordenada del punto C se puede ver como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u(C) \\ v(C) \end{bmatrix}}_{\overrightarrow{CC'}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u(A) \\ v(A) \end{bmatrix}}_{\overrightarrow{AA'}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}}_{H} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}}_{\overrightarrow{AC}};$$

Donde:

- H es una matriz jacobiana. La **matriz gradiente de desplazamientos**.

Matriz de rotaciones

Teorema

Toda matriz cuadrada \mathbf{A} puede escribirse como

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$$

donde \mathbf{B} es simétrica y \mathbf{C} es antisimétrica.

Nota: Tome la operación

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T).$$

Matriz de rotaciones

H Cumple con la siguiente propiedad:

$$H = \underbrace{\frac{H + H^T}{2}}_{\underline{\varepsilon}} + \underbrace{\frac{H - H^T}{2}}_{\Omega}.$$

Donde:

- $\underline{\varepsilon}$ es una matriz simétrica.
- Ω es una matriz antisimétrica. (*skew-symmetric*).

Matriz de rotaciones

- Expansión bidimensional:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u(C) \\ v(C) \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{CC'}} = \underbrace{\begin{pmatrix} u(A) \\ v(A) \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AA'}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AC}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\Omega}} \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AC}}$$

Matriz de rotaciones

- Expansión tridimensional:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u(C) \\ v(C) \\ w(C) \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{CC'}} = \underbrace{\begin{pmatrix} u(A) \\ v(A) \\ w(A) \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AA'}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \\
 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\Omega}} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

Matriz de rotaciones

Ecuación vectorial:

- En el caso bidimensional.

$$\begin{bmatrix} u(C) \\ v(C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(A) \\ v(A) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z \\ \omega_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

- En el caso tridimensional

$$\begin{bmatrix} u(C) \\ v(C) \\ w(C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(A) \\ v(A) \\ w(A) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'} + \underline{\underline{\varepsilon}} \overrightarrow{AC} + \boldsymbol{\Omega} \overrightarrow{AC}.$$

Matriz de rotaciones

Ecuación vectorial:

- En el caso bidimensional.

$$\begin{bmatrix} u(C) \\ v(C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(A) \\ v(A) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z \\ \omega_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

- En el caso tridimensional

$$\begin{bmatrix} u(C) \\ v(C) \\ w(C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(A) \\ v(A) \\ w(A) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'} + \underline{\underline{\varepsilon}} \overrightarrow{AC} + \boldsymbol{\Omega} \overrightarrow{AC}.$$

Matriz de rotaciones

Ecuación vectorial:

- En el caso bidimensional.

$$\begin{bmatrix} u(C) \\ v(C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(A) \\ v(A) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z \\ \omega_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

- En el caso tridimensional

$$\begin{bmatrix} u(C) \\ v(C) \\ w(C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(A) \\ v(A) \\ w(A) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'} + \underline{\underline{\varepsilon}} \overrightarrow{AC} + \boldsymbol{\Omega} \overrightarrow{AC}.$$

Matriz de rotaciones

Ecuación vectorial:

- En el caso bidimensional.

$$\begin{bmatrix} u(C) \\ v(C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(A) \\ v(A) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z \\ \omega_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

- En el caso tridimensional

$$\begin{bmatrix} u(C) \\ v(C) \\ w(C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(A) \\ v(A) \\ w(A) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'} + \underline{\underline{\varepsilon}} \overrightarrow{AC} + \boldsymbol{\Omega} \overrightarrow{AC}.$$

Matriz de rotaciones

Las componentes ω_x , ω_y , ω_z de la matriz Ω son entonces:

$$\omega_x := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \omega_y := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \omega_z := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

(No son "dobleuves" sino "omegas")

Matriz de rotaciones

Las componentes de $\underline{\underline{\varepsilon}}$ y $\underline{\Omega}$ son números bastante pequeños en comparación con la unidad:

$$\varepsilon_{ij} \ll 1 \text{ y } \omega_{ij} \ll 1$$

Matriz de rotaciones

Matriz gradiente de desplazamientos

$$\boldsymbol{H} = \nabla \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Matriz de rotaciones o de giros

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

También conocida como **tensor de rotaciones infinitesimales** (*infinitesimal rotation tensor*).

Vector de rotaciones

Propiedad del producto vectorial o producto cruz

El producto cruz de dos vectores $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^T$ y $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]^T$ se puede escribir como el producto de una matriz antisimétrica y un vector de la siguiente forma:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix};$$

en este caso, el vector $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^T$ se le llama **vector de rotaciones**, **vector dual** o **vector axial** de la matriz antisimétrica A .

Vector de rotaciones

Es claro que en el caso tridimensional es válida la siguiente expresión:

$$\Omega \vec{AC} = \omega \times \vec{AC},$$

donde $\omega := [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ es el vector de rotaciones o vector dual de Ω .

Rotación rígida

Un sólido está sometido a **rotación rígida** cuando todos sus puntos experimentan el mismo ángulo de giro alrededor de un eje dado, el cual permanece invariante en posición, es decir, como si a través de dicho punto invariante existiese un eje de rotación; de este modo, cada uno de los puntos del sólido rígido describe trayectorias circulares alrededor del eje de rotación.

Rotación rígida

MH

Hola Chat, si en n sólido todos sus puntos girar un miso ángulo alrededor de un eje dado, el cual permanece invariante en su posición, ¿se puede decir que todos los puntos tienen la misma velocidad angular?



Sí, en un sólido rígido todos los puntos se mueven en un movimiento circular uniforme alrededor del mismo eje de rotación, por lo que tienen la misma velocidad angular.

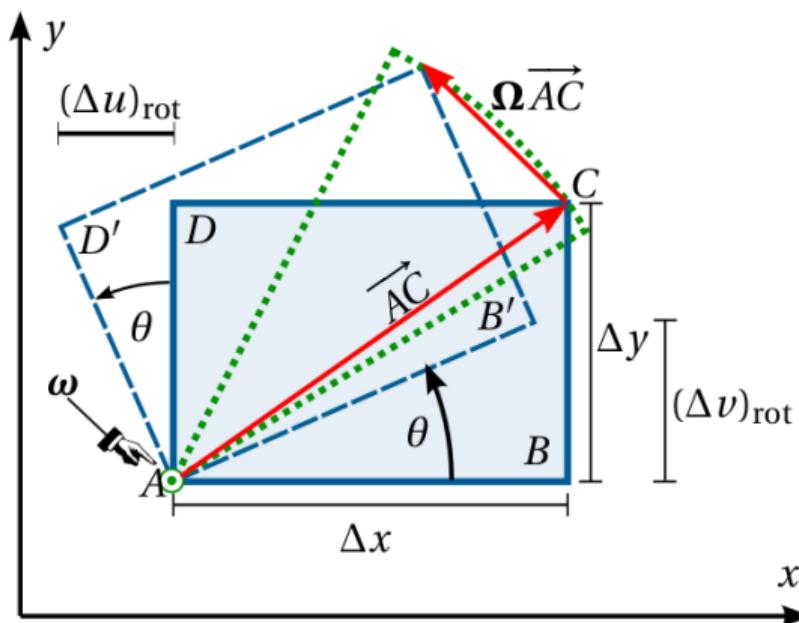


La velocidad angular es la rapidez a la que un objeto gira alrededor de un eje y se mide en radianes por segundo. En un sólido rígido, todos los puntos se mueven en círculos de la misma magnitud, por lo que tienen la misma velocidad angular.

Es importante destacar que la velocidad angular es una propiedad del sólido rígido en su conjunto, no de los puntos individuales. Por lo tanto, si el sólido rígido gira más rápido o más lento, la velocidad angular de todos los puntos cambiará proporcionalmente.

Figure: Uso de chat GPT para resolver algunas dudas. <https://openai.com/blog/chatgpt>.

Formulación del rotacional

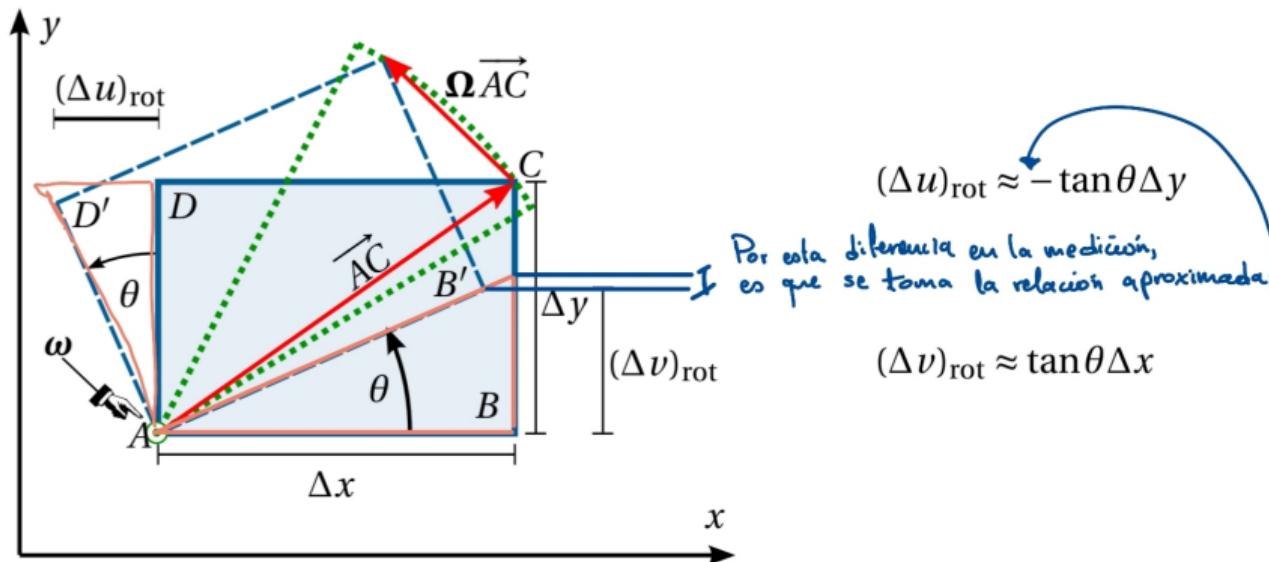


$$(\Delta u)_{\text{rot}} \approx -\tan \theta \Delta y$$

$$(\Delta v)_{\text{rot}} \approx \tan \theta \Delta x$$

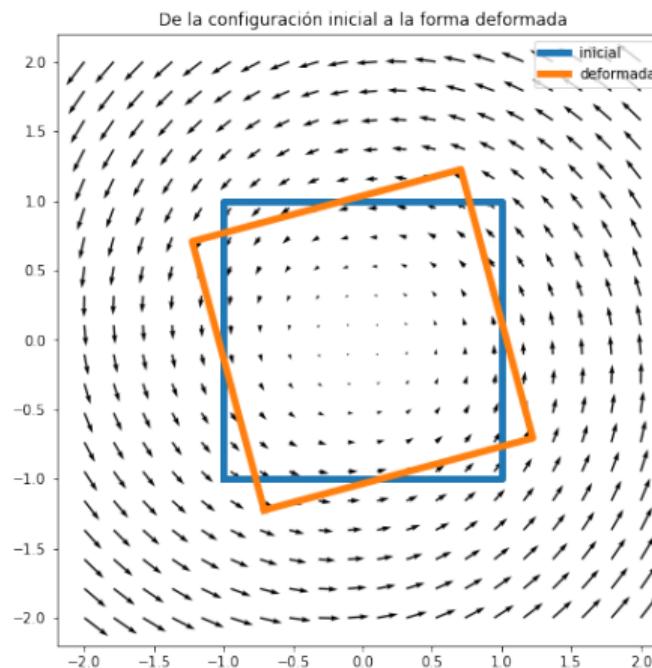
Podemos interpretar a ω_x , ω_y y ω_z como los ángulos de rotación del sólido en el punto (x, y, z) medidos en radianes al rededor de los ejes x , y y z , respectivamente.

Formulación del rotacional



Formulación del rotacional

A.20. Rotacional



El rotacional es un operador vectorial que muestra la tendencia de un campo vectorial tridimensional a inducir rotación en cada uno de sus puntos. En un punto dado del campo vectorial, el rotacional se representa por un vector cuya longitud y dirección caracterizan dicha rotación alrededor del punto considerado.

$$\text{rot} \boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{u}$$

Formulación del rotacional

El rotacional de un campo vectorial \mathbf{u} se define como:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{u} &:= \det \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}},\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T = \boldsymbol{\omega}.$$

Eje de rotación

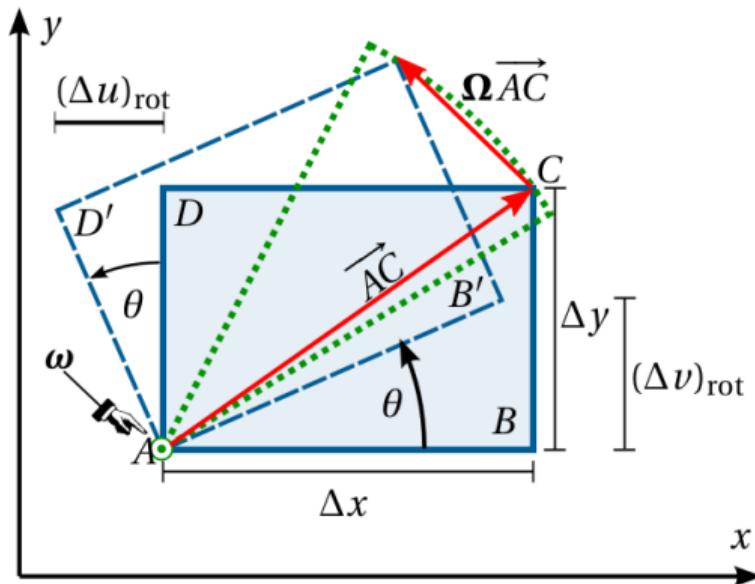
El **eje de rotación** (o de **giro**) está descrito por una línea recta L que pasa por (x, y, z) y cuya dirección es la indicada por el ω , es decir,

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

El sentido de la rotación sigue la regla de la mano derecha, y su magnitud es igual a $\|\omega\|$ medida en radianes.

Componentes de la deformación

Entendiendo el producto $\Omega \vec{AC}$ en el caso bidimensional



$$(\Delta u)_{\text{rot}} \approx -\tan \theta \Delta y$$

$$(\Delta v)_{\text{rot}} \approx \tan \theta \Delta x$$

Componentes de la deformación

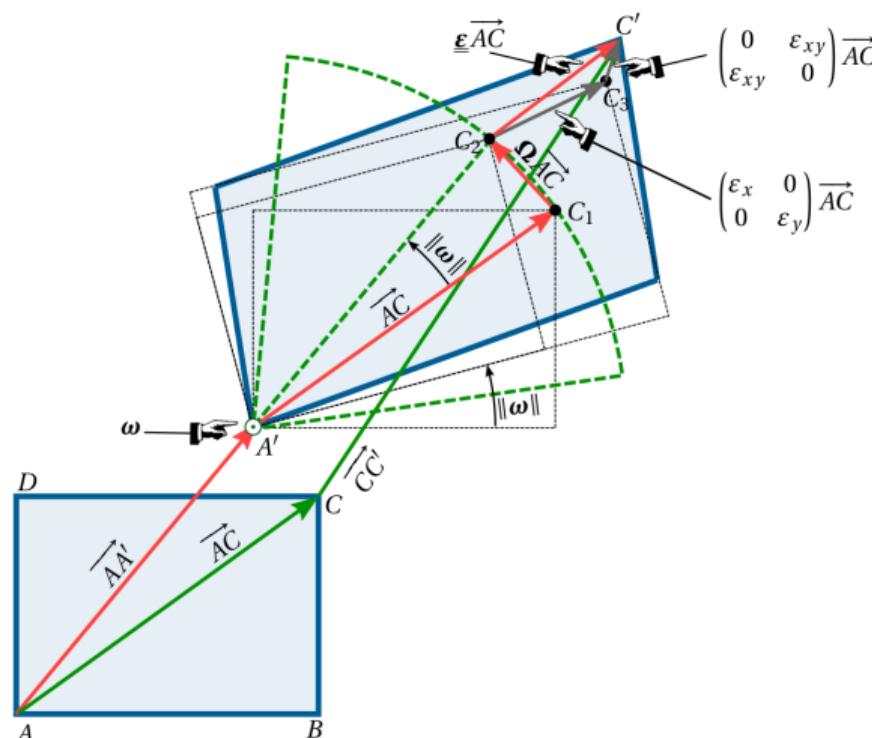
Entendiendo el producto $\Omega \vec{AC}$ en el caso bidimensional

La siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} (\Delta u)_{\text{rot}} \\ (\Delta v)_{\text{rot}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -\tan \theta \Delta y \\ \tan \theta \Delta x \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -\omega_z \Delta y \\ \omega_z \Delta x \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z \\ \omega_z & 0 \end{bmatrix}}_{\Omega} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}}_{\vec{AC}}$$

- $\Omega \vec{AC}$ proporciona las componentes horizontales y verticales del punto C debidas a la rotación de \vec{AC} .
- La rotación: $\theta = \omega_z$ radianes, siguiendo la regla de la mano derecha.
- Igualdad válida siempre y cuando el ángulo de rotación ω_z sea pequeño.

Componentes de la deformación

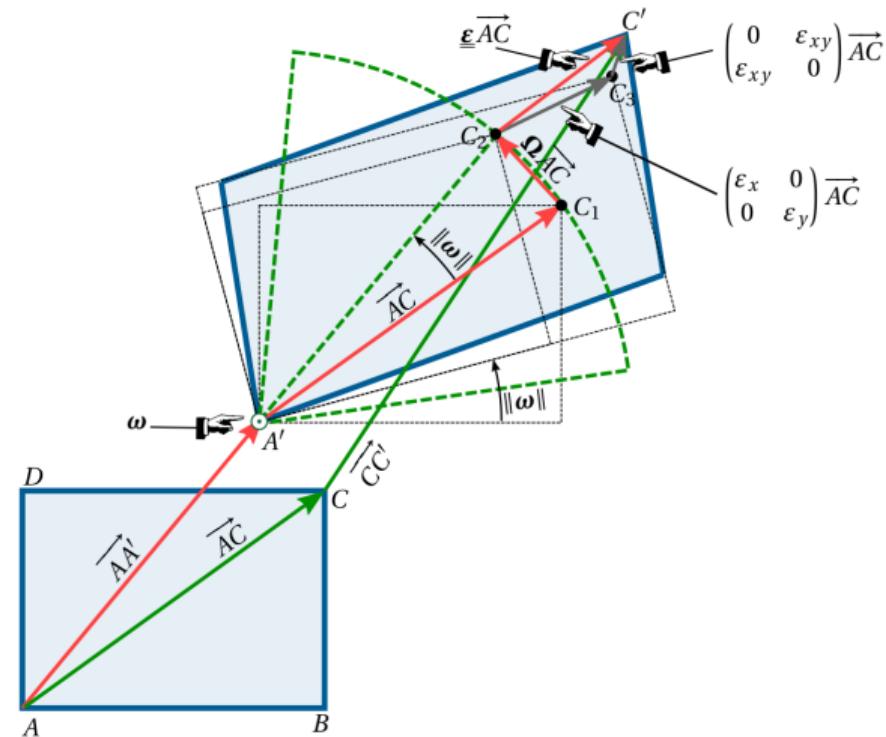


$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'} + \underline{\varepsilon} \overrightarrow{AC} + \Omega \overrightarrow{AC}$$

Componentes de la deformación

- Una **traslación rígida** definida por el vector $\overrightarrow{AA'}$, mediante la cual \overrightarrow{AC} se vuelve $\overrightarrow{A'C_1}$.

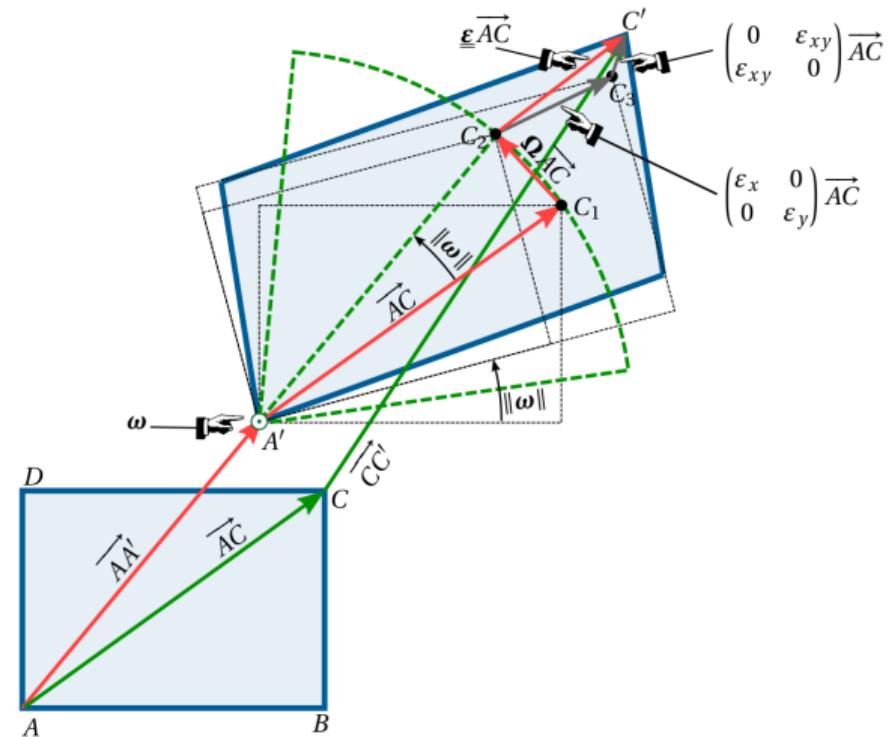
$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC}$$



Componentes de la deformación

- Un giro o rotación rígida, determinada por el vector $\overrightarrow{C_1C_2} := \Omega \overrightarrow{AC}$ y la matriz de giro Ω , mediante la cual $\overrightarrow{A'C_1}$ se vuelve $\overrightarrow{A'C_2}$.

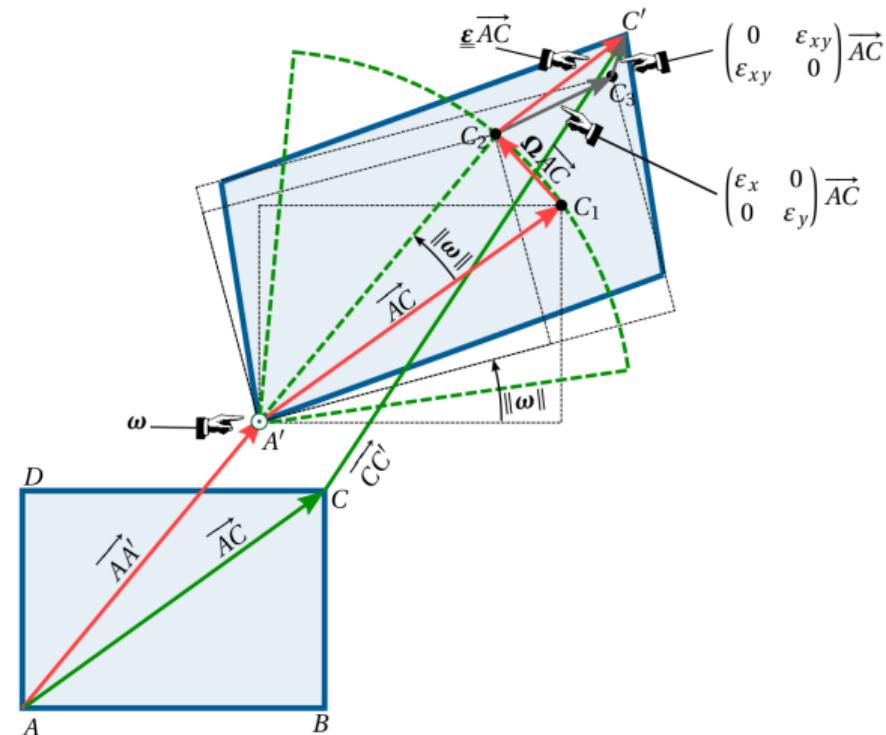
$$\overrightarrow{A'C_2} = \overrightarrow{A'C_1} + \Omega \overrightarrow{AC}$$



Componentes de la deformación

- Una **deformación**, definida por el vector $\overrightarrow{C_2C'} := \underline{\underline{\varepsilon}} \overrightarrow{AC}$ y la matriz de deformaciones $\underline{\underline{\varepsilon}}$, mediante la cual $\overrightarrow{A'C_2}$ se vuelve $\overrightarrow{A'C'}$.

$$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'C_2} + \underline{\underline{\varepsilon}} \overrightarrow{AC}$$



Componentes de la deformación

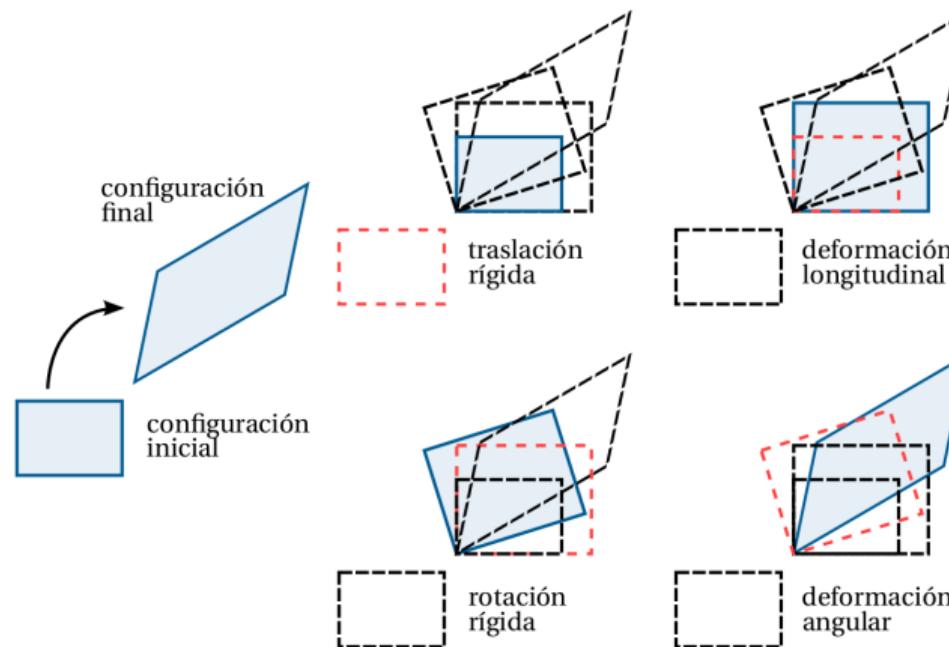


Figure: Componenes de la deformación. La deformación del sólido se descompone en una traslación rígida ($\overrightarrow{AA'}$), una rotación rígida ($\Omega \overrightarrow{AC}$) y unas deformaciones longitudinales y angulares ($\underline{\varepsilon} \overrightarrow{AC}$) y Nota: esta no es la secuencia de la figura.

Derrotero

- Conceptos necesarios del suplemento matemático
- 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- 3.3. Las galgas extensométricas
- 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- 3.5. Rotación
- **3.6. Deformaciones principales**
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

Derrotero

- **3.6. Deformaciones principales**
 - **3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones**
 - **3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios**

Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones

A partir de nuestra ecuación $\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + 2\varepsilon_{xy} \sin \theta \cos \theta$, tomando su derivada respecto a θ igualada a cero

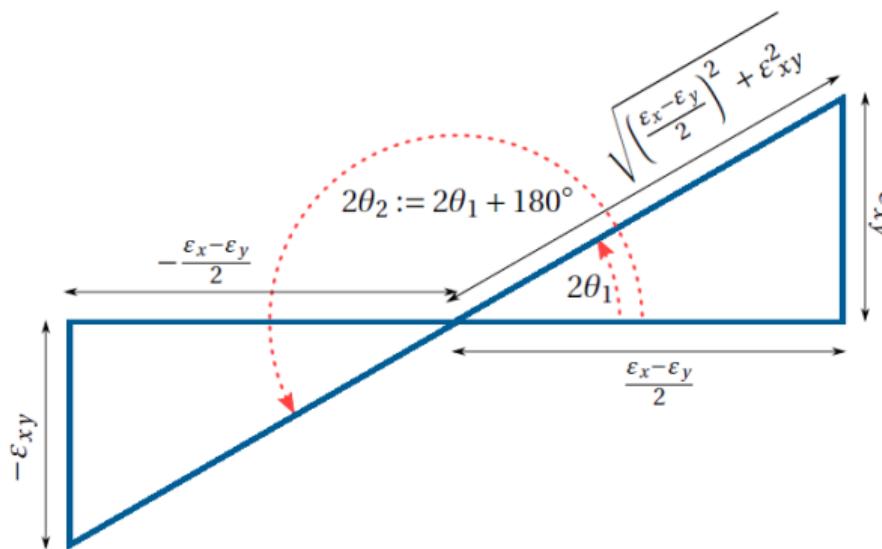
$$\frac{d\varepsilon_{x'}}{d\theta} = -(\varepsilon_{x'} - \varepsilon_{y'}) \sin 2\theta + 2\varepsilon_{xy} \cos 2\theta = 0,$$

encontramos mínimos y máximos de la función. Hablamos de unas direcciones principales en términos de deformaciones:

$$\tan 2\theta_1 = \frac{+\varepsilon_{xy}}{+\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}}$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{-\varepsilon_{xy}}{-\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}}$$

Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones



$$\sin 2\theta_1 = \frac{\varepsilon_{xy}}{R}$$

$$\cos 2\theta_1 = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2R}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2}$$

$$\sin 2\theta_2 = -\frac{\varepsilon_{xy}}{R}$$

$$\cos 2\theta_2 = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2R}$$

Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones

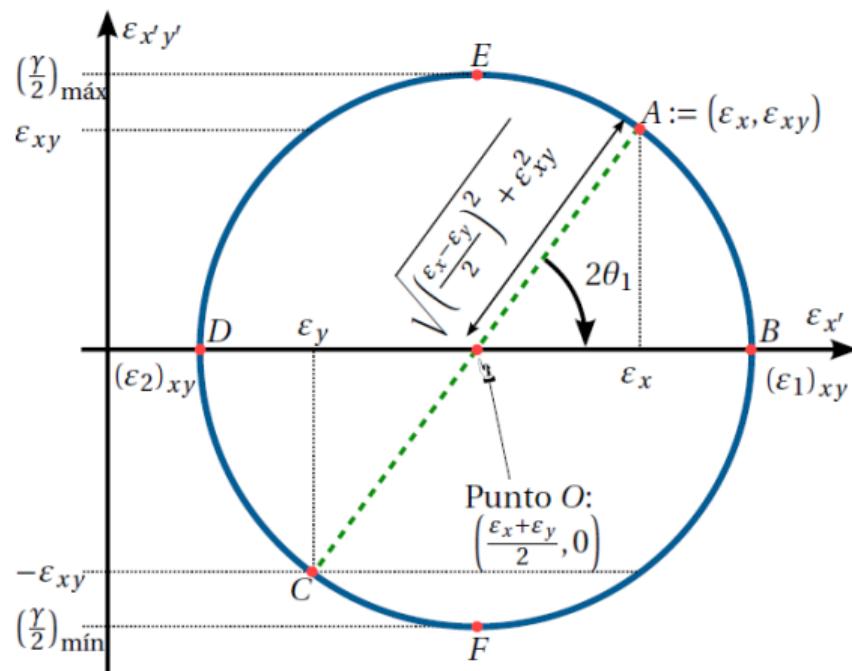
Tendremos unas deformaciones principales, las cuales no estarán acompañadas de deformaciones angulares para una inclinación dada por las direcciones principales anteriores. Son:

$$(\varepsilon_1)_{xy} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2}$$

$$(\varepsilon_2)_{xy} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2}.$$

(Verifique el enunciado)

Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones



Derrotero

- **3.6. Deformaciones principales**
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

A.8. Optimización de una función sujeta a restricciones de igualdad (apéndice matemático)

El método de los **multiplicadores de Lagrange** se utiliza para hallar máximos y mínimos locales de una función, sujeta al cumplimiento de una o varias igualdades.

Sea una función $f(x)$ con $x \in \mathbb{R}^m$, y dicha función sujeta a una restricción de igualdad $g(x) = c$, c constante.

A.8. Optimización de una función sujeta a restricciones de igualdad (apéndice matemático)

El método de los **multiplicadores de Lagrange** consiste en convertir el problema de optimización con restricciones de igualdad en uno sin restricciones, cambiando la función $f(\mathbf{x})$ por una **función Lagrangiana** dada por

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda(g(\mathbf{x}) - c).$$

Aquí la constante desconocida λ se conoce como un **multiplicador de Lagrange**. Para minimizar L se deben calcular todas las derivadas de L y se deben igualar a cero. Solucionamos:

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{x}) &= \lambda g(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) &= c\end{aligned}$$

Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

- eigenvalues problem:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \hat{n} = \varepsilon_n \hat{n}$$

- Ecuación característica:

- Caso bidimensional:

$$\varepsilon_n^2 - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)\varepsilon_n + \varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_{xy}^2 = 0$$

- Caso tridimensional:

$$-\varepsilon_n^3 + I_1^d \varepsilon_n^2 - I_2^d \varepsilon_n + I_3^d = 0$$

- Invariantes de deformaciones

$$e := I_1^d := \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

$$I_2^d := \frac{1}{2} \left(\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})^2 - \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2) \right)$$

$$I_3^d := \det(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

- eigenvalues problem:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \hat{\mathbf{n}} = \varepsilon_n \hat{\mathbf{n}}$$

- Ecuación característica:

- Caso bidimensional:

$$\varepsilon_n^2 - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)\varepsilon_n + \varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_{xy}^2 = 0$$

- Caso tridimensional:

$$-\varepsilon_n^3 + I_1^d \varepsilon_n^2 - I_2^d \varepsilon_n + I_3^d = 0$$

- Invariantes de deformaciones

$$e := I_1^d := \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

$$I_2^d := \frac{1}{2} \left(\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})^2 - \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2) \right)$$

$$I_3^d := \det(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

- eigenvalues problem:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \hat{\mathbf{n}} = \varepsilon_n \hat{\mathbf{n}}$$

- Ecuación característica:

- Caso bidimensional:

$$\varepsilon_n^2 - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)\varepsilon_n + \varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_{xy}^2 = 0$$

- Caso tridimensional:

$$-\varepsilon_n^3 + I_1^d \varepsilon_n^2 - I_2^d \varepsilon_n + I_3^d = 0$$

- Invariantes de deformaciones

$$e := I_1^d := \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

$$I_2^d := \frac{1}{2} \left(\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})^2 - \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2) \right)$$

$$I_3^d := \det(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

- eigenvalues problem:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \hat{\mathbf{n}} = \varepsilon_n \hat{\mathbf{n}}$$

- Ecuación característica:

 - Caso bidimensional:

$$\varepsilon_n^2 - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)\varepsilon_n + \varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_{xy}^2 = 0$$

 - Caso tridimensional:

$$-\varepsilon_n^3 + I_1^d \varepsilon_n^2 - I_2^d \varepsilon_n + I_3^d = 0$$

- Invariantes de deformaciones

$$e := I_1^d := \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

$$I_2^d := \frac{1}{2} \left(\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})^2 - \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2) \right)$$

$$I_3^d := \det(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

Interpretación del problema de valores y vectores propios

Según se estudió en la Sección 3.5 y con referencia a la Figura 3.10, el vector $\overrightarrow{C_2C'} := \varepsilon \overrightarrow{AC}$ describe la dirección de deformación del elemento; una pregunta necesaria es para cuál dirección del vector \overrightarrow{AC} existe una deformación tal que el vector $\overrightarrow{C_2C'}$ no cambie de dirección (no rote), es decir, $\underline{\varepsilon} \overrightarrow{AC} = \varepsilon_n \overrightarrow{AC}$ o simplemente $\underline{\varepsilon} \hat{n} = \varepsilon_n \hat{n}$; aquí la variable ε_n (sin negrilla) representa la magnitud del vector \overrightarrow{AC} para la cual esta igualdad se cumple.

Referencias y material de ayuda



- Lista de reproducción: [03 - Desplazamientos y deformaciones](#)
- Repositorio del curso: [github/medio_continuo](https://github.com/michaelhp/medio_continuo)