

04. Relaciones entre los esfuerzos y las deformaciones

secciones 4.1 a 4.7

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil
Mecánica Tensorial

2023a



Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada ([Álvarez, 2022](#)).



Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortotropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortotropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias

Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortotropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortotropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias

Observación

Las ecuaciones deducidas en las unidades 2 y 3 solo tienen en cuenta factores geométricos y se ha aplicado equilibrio estático, por lo tanto son independientes del material.

Observaciones

La deformación de un sólido con esfuerzos aplicados depende de:

- velocidad de aplicación de estos
- historia de carga
- temperatura
- propiedades del material

Modelos constitutivos

Modelos matemáticos que relacionan los esfuerzos y las deformaciones, teniendo en cuenta las variables anteriores.

velocidad, historia de carga, temperatura y propiedades del material

Modelos constitutivos

Videos

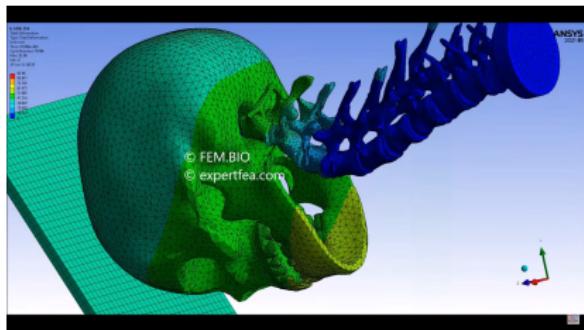


Figura: Simulation of Compression Shock of Skull with Brain Missing Meninges - ANSYS Explicit Dynamics. [Video](#).

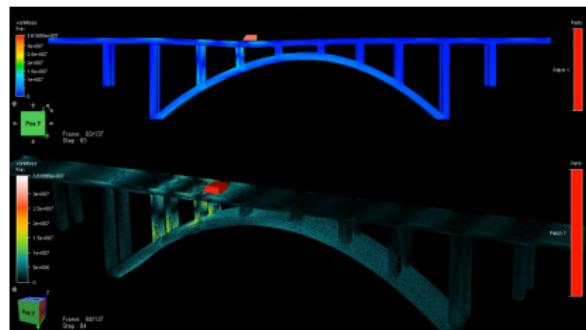


Figura: Linear Elasticity Problem using FEM (Bridge model). [Video](#).

Modelos constitutivos

Analizaremos el modelo constitutivo de los llamados sólidos con comportamiento “elástico lineal”, asumiendo que **la velocidad de aplicación de la carga en el ensayo de carga-desplazamiento, no tiene ningún efecto en dicha relación elástica lineal.**

Derrotero

- Preámbulo
- **4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles**
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortotropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortotropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias

Materiales frágiles y materiales dúctiles

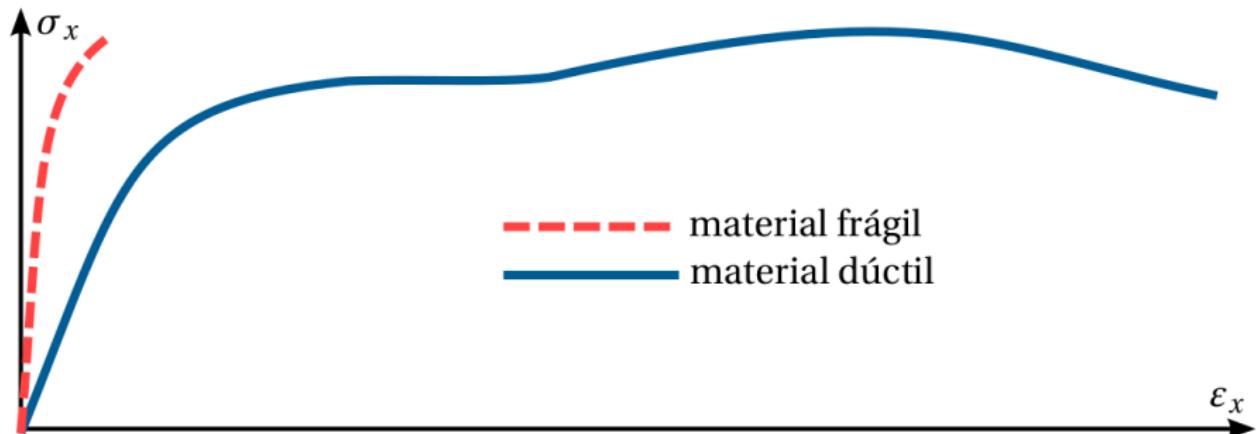


Figura: Curva esfuerzo-deformación para materiales dúctiles y frágiles.

Curvas esfuerzo-deformación



Figura 6-2(a) - Curva esfuerzo-deformación del acero de refuerzo

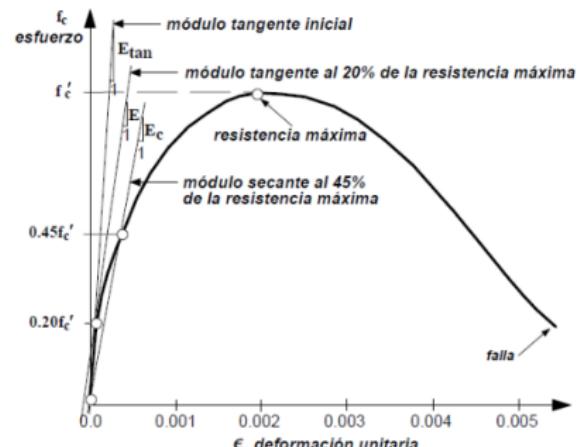


Figura 6-2(b) - Curva esfuerzo-deformación del concreto no confinado

Figura: Tomado de Reyes, 1998. No comparar escalas.

Curvas esfuerzo-deformación

Videos

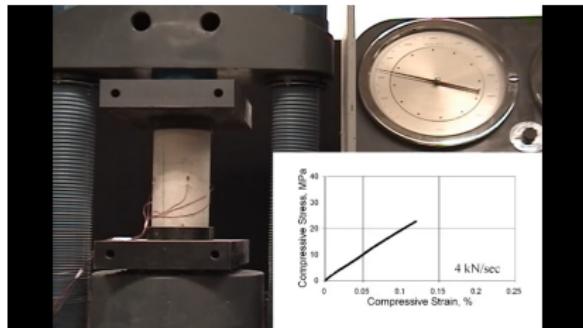


Figura: Compression testing of concrete. [Video](#).

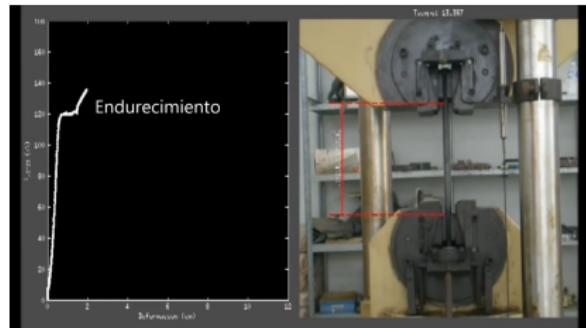
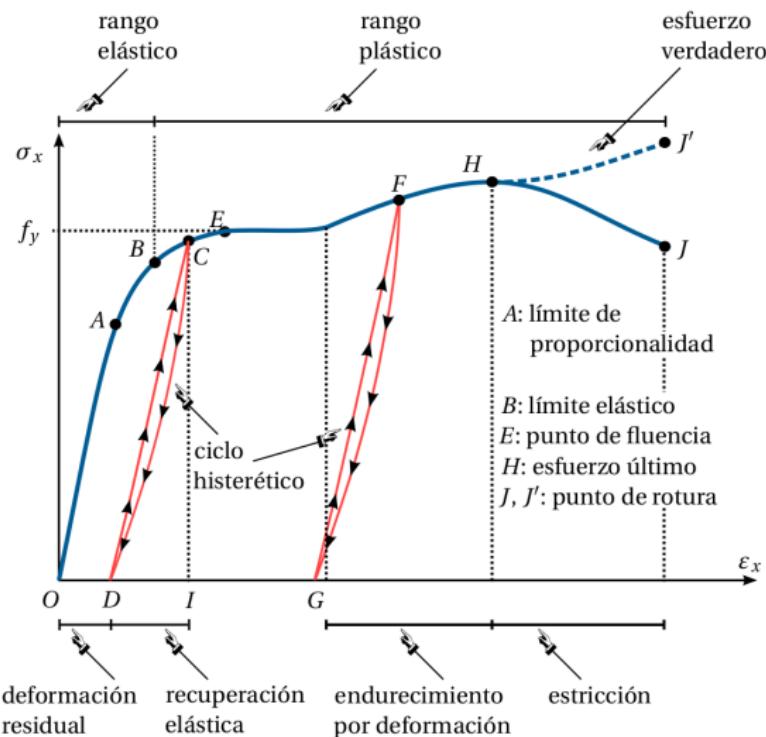


Figura: Ensayo de tracción - Resistencia de materiales. [Video](#).

Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- **4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles**
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortotropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortotropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias

Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles



Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles

(Sin claridad del límite de fluencia)

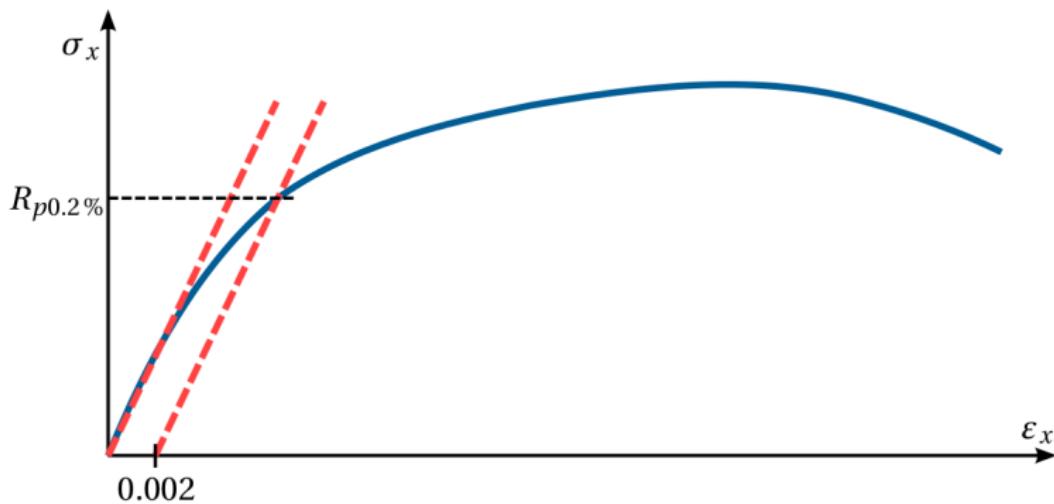


Figura: Método de la compensación o corregimiento ASTM A370.

Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles

(Sin claridad del límite de fluencia)

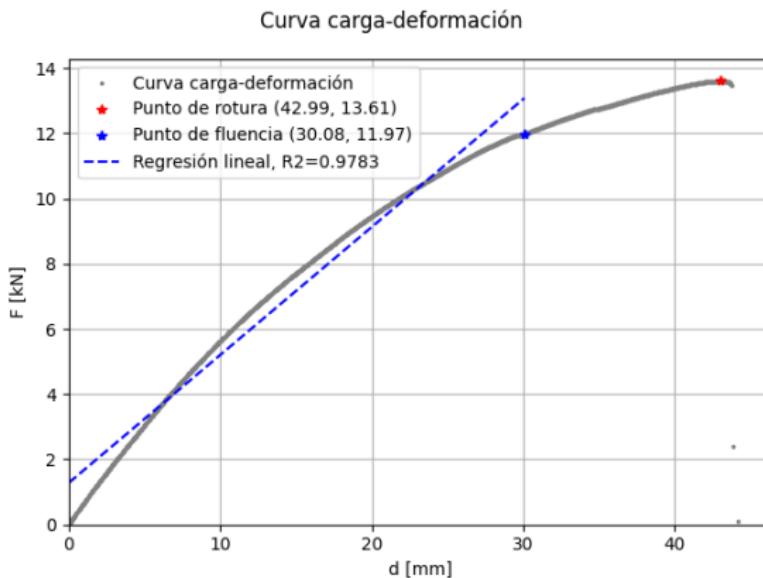


Figura: Ensayo de madera plástica (plastic lumber en inglés) realizado en el Laboratorio de Ingeniería Estructural y Sísmica de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales.

Comportamiento del acero

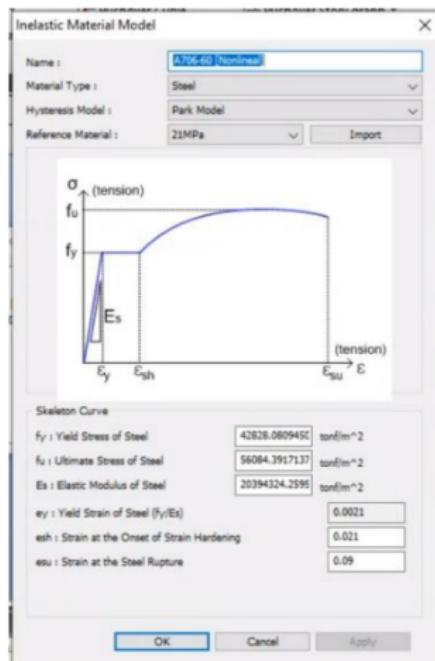
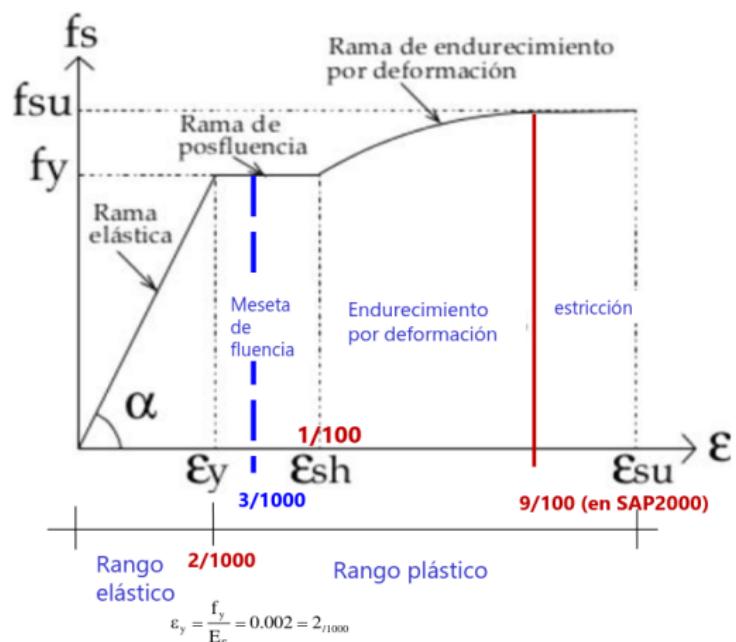


Figura: Curso de Diseño Sísmico de Concreto Reforzado; [Bedoya, 2022].

Comportamiento del concreto reforzado

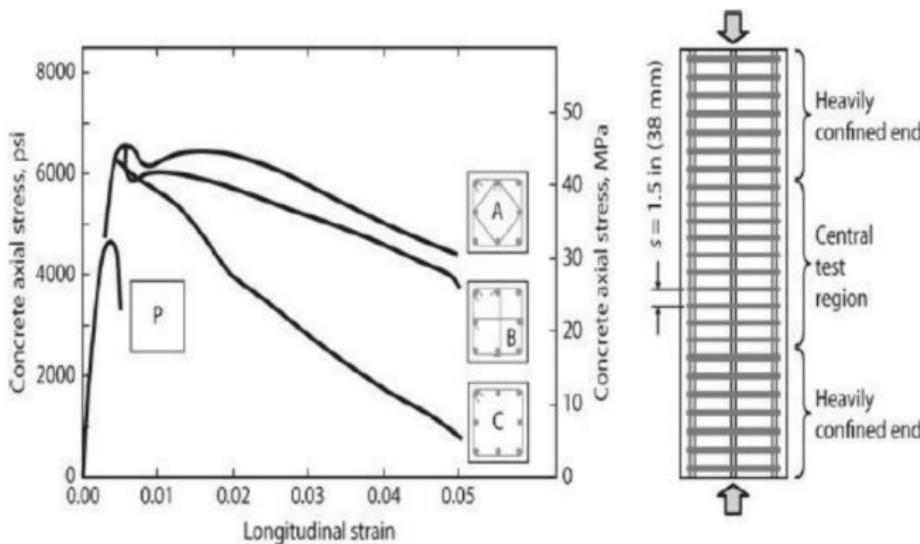


FIGURE 4.1 Stress-strain response of plain concrete (P) and three confined concrete cross sections.
(After Moehle and Cavanagh, 1985, used with permission from ASCE.)

Figura: Curso de Diseño Sísmico de Concreto Reforzado; [Bedoya, 2022].

Ciclo de histéresis (hysteresis loop)

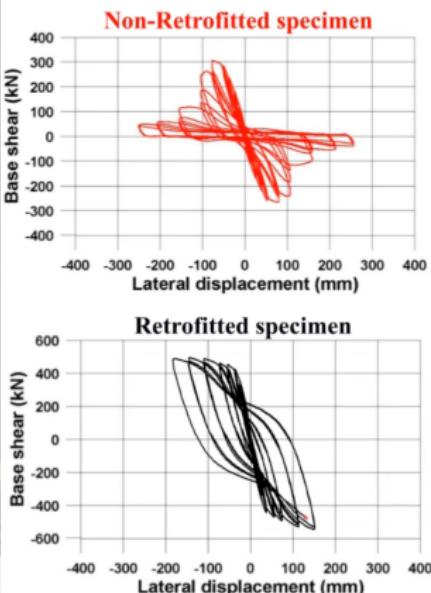


Figura: Hysteretic Behavior of non-retrofitted and retrofitted bridge piers reinforced by UHPFRC. [Video](#).

Ciclo de histéresis

(*hysteresis loop*)

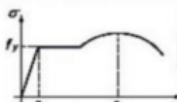
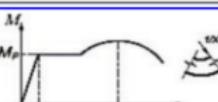
TIPO DE DUCTILIDAD	REPRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA	DEFINICIÓN
DUCTILIDAD DEL MATERIAL (AXIAL)		$\mu_c = \frac{\epsilon_u}{\epsilon_y}$
DUCTILIDAD DE LA SECCIÓN (CURVATURA)		$\mu_x = \frac{\chi_u}{\chi_y}$
DUCTILIDAD DEL MIEMBRO (ROTACIÓN)		$\mu_\theta = \frac{\theta_u}{\theta_y}$
DUCTILIDAD DE LA ESTRUCTURA (DESLAZAMIENTO)		$\mu_\Delta = \frac{\Delta_u}{\Delta_y}$

Figura 7. Tipos de ductilidad, adaptado de ATC-40 [9], 19

Figura: Curso de Diseño Sísmico de Concreto Reforzado; [Bedoya, 2022].

Ciclo de histéresis

(hysteresis loop)

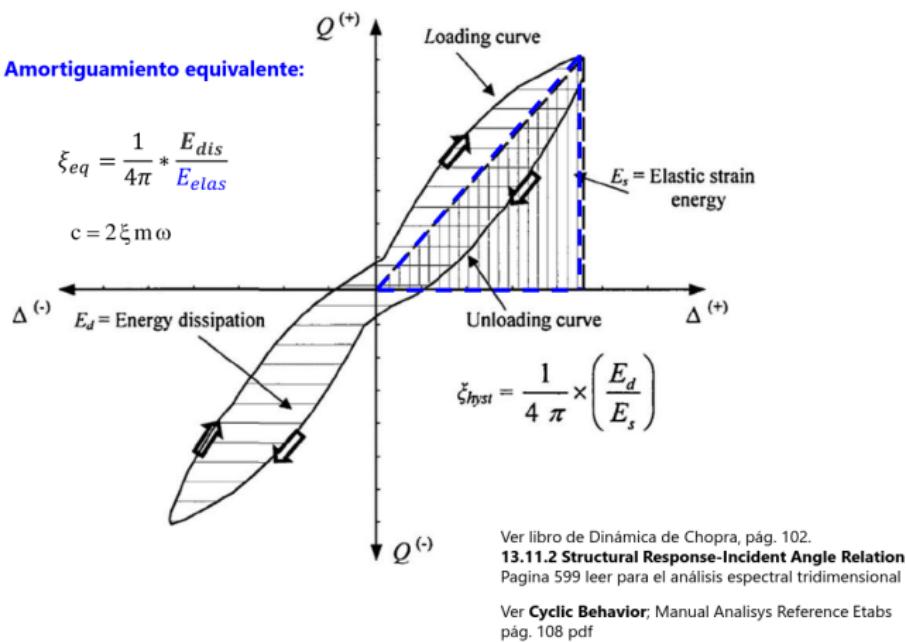


Figura: Curso de Diseño Sísmico de Concreto Reforzado; [Bedoya, 2022].

Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortótropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortótropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias

La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson

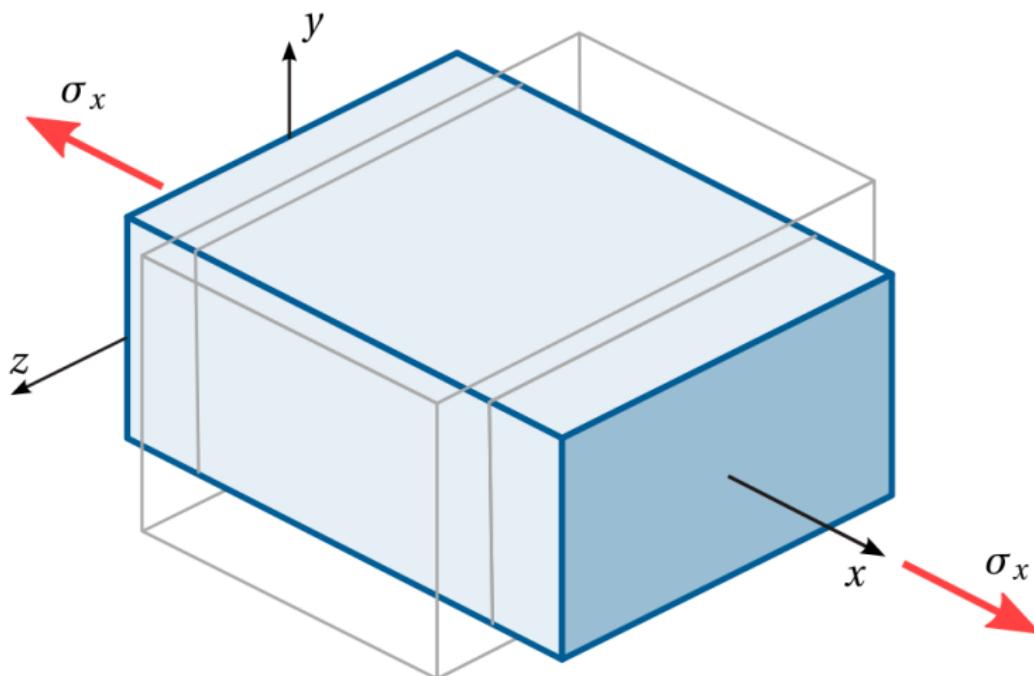


Figura: Forma deformada de un diferencial de sólido sometido a la contracción lateral que se produce por el efecto de Poisson.

La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson

Tabla 4.1: Módulos de Young y coeficientes de Poisson para diferentes materiales.

Material	Módulo de Young (GPa) E	Coeficiente de Poisson ν
Acero	200	0.27 – 0.30
Arcilla saturada	4 – 20	0.40 – 0.499
Caucho	0.01 – 0.1	≈ 0.499
Concreto	21.5 – 39	0.20
Corcho	0.032	≈ 0
Material augético		negativo
Nanotubos de carbono	1000 – 5000	-0.2 – 0.06

Materiales augéticos



Figura: Auxetic MetaMaterials. [Video.](#)



Figura: Material Connexion Bilbao, espuma augética. [Link.](#)

Módulo de Young, E

Thomas Young (1773-1829), científico y egiptólogo

- Indica qué tan rígido es un material, es decir, cuál es la oposición que ofrece al ser estirado o contraído.
- Disminuye con el aumento de la temperatura.
- f_y también disminuye con el aumento de la temperatura.

Coeficiente de Poisson, ν

Siméon Denis Poisson (1781-1840), matemático y físico

- Expresa una relación entre las deformaciones transversales y longitudinales.
- Varían con las variaciones de la temperatura.
- f_y también disminuye con el aumento de la temperatura.

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{transversal}}{\varepsilon_{longitudinal}}$$

Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortótropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortótropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias

Principio de superposición

Dice que para un sistema lineal, la respuesta neta, para una posición y tiempo dados, causada por dos o más estímulos, es la suma de las respuestas que causan cada uno de los estímulos individualmente.

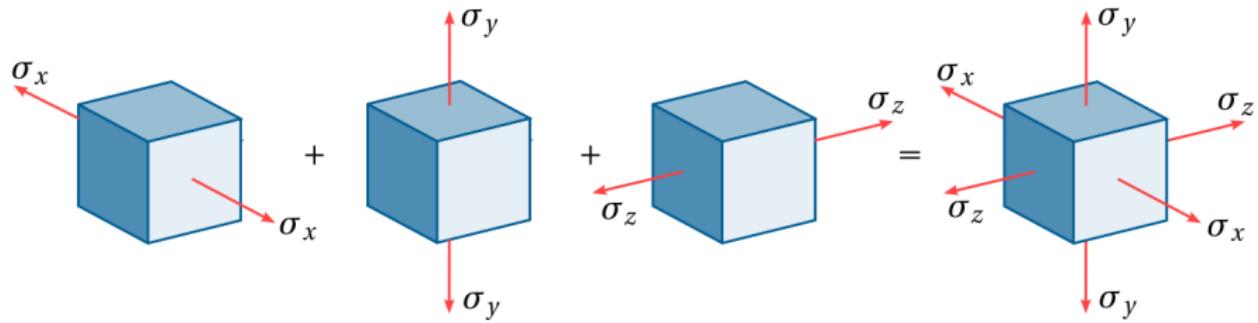


Figura: Aplicación del principio de superposición.

Principio de superposición

Legitimidad:

- Deformaciones y desplazamientos pequeños.
- Los desplazamientos no afectan sustancialmente la acción de las fuerzas externas.

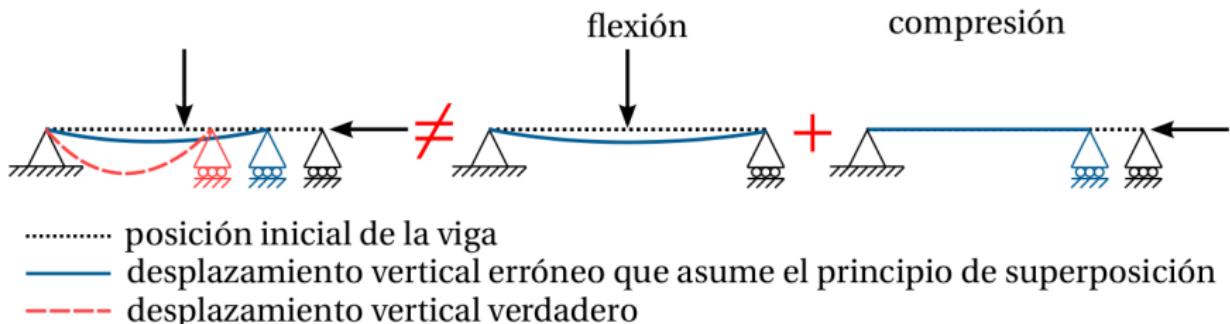


Figura: Barra esbelta sometida a flexo-compresión. En este caso no se debe emplear el principio de superposición.

Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales en las direcciones x, y, z

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z))$$

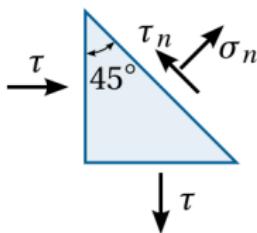
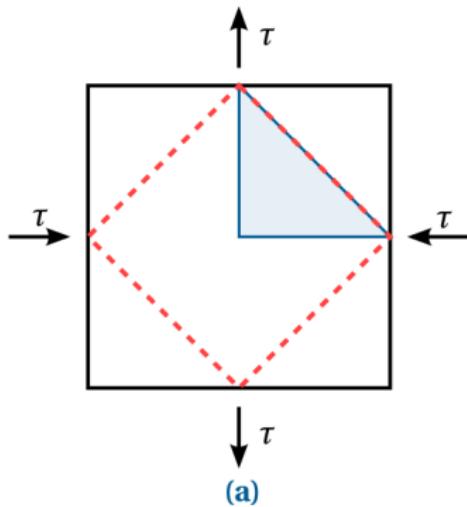
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y))$$

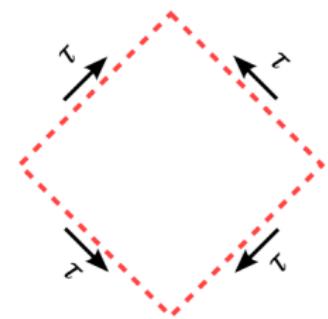
Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortótropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortótropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias

Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales

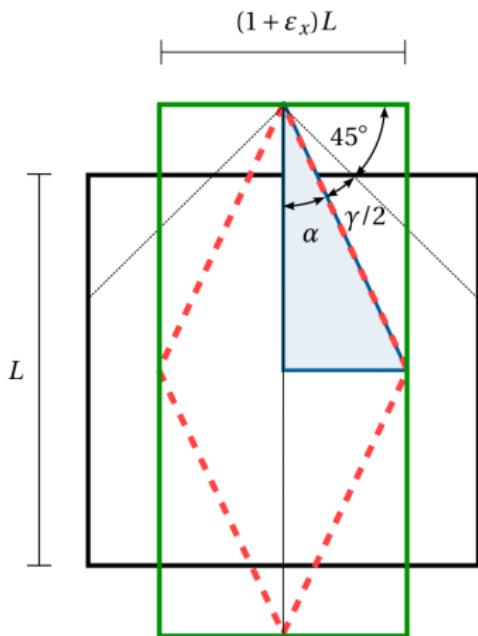


(b)

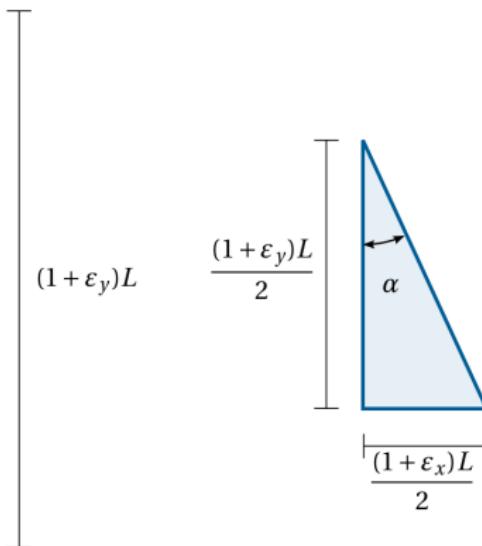


(c)

Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales



(a)



(b)

Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales

Buscamos obtener una constante llamada **Módulo de corte**, G .

$$G := \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Código

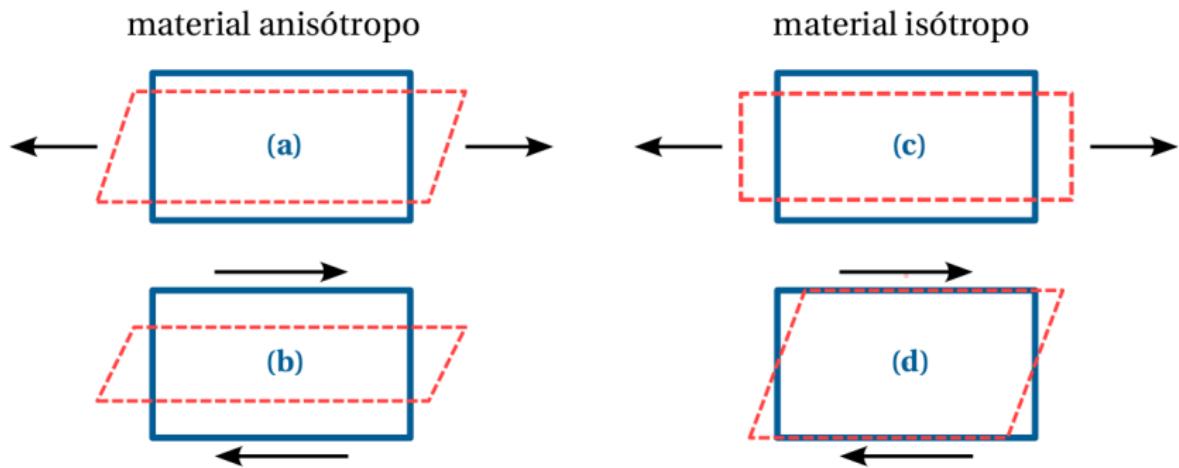
- [04_03_02.ipynb](#)

Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}.$$

Para un material con comportamiento lineal, elástico, e isótropo, las deformaciones longitudinales no están afectadas por las deformaciones angulares y no existe un efecto de Poisson para el esfuerzo cortante.

Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales



Formulación de las deformaciones

- Las deformaciones:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y))$$

- En notación indicial:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk}]$$

Formulación de las deformaciones

Ejemplo

A partir de la formulación en notación indicial:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk}]$$

veamos para ε_y :

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \sigma_{22} - \nu \delta_{22} \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk} \right] \\ &= \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)]\end{aligned}$$

Materiales isótropos, anisótropos y ortótropos

Isótropos

- Acero
- Aluminio
- Concreto

Anisótropos

- Maderas
- Tejido humano
- Fibras de carbono
- Placas metálicas roladas
- Estructura interna a partir de fibras alineadas o cuyo proceso de elaboración induce alteraciones en las estructuras atómicas (cristales).

Ortótropos

- Maderas
- Reforzados con fibras
- Algunos cristales
- Metales laminados

Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos**
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortótropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortótropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias

Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos

Isótropo: propiedades mecánicas iguales en todas las direcciones del análisis.

Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos

Partimos de las deformaciones longitudinales y angulares:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y))$$

Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos

Despejando los esfuerzos:

Ecuaciones de Lamé

$$\sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2G\varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

- Père de Gabriel Jean Baptiste Lamé (1795-1870), matemático francés.

Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos

Las ecuaciones de Lamé:

$$\sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2G\varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

- La dilatación cúbica:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

- Constante de Lamé:

$$\lambda := \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos

Formulación matricial

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_D \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Código

- [04_03_03.ipynb](#)

Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos

Tenemos:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_D \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

- D es la **matriz constitutiva** o **matriz de constantes elásticas** para un material isótropo.
- Relación entre la matriz de tensiones y la de deformaciones matemáticas:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \mathbf{I} + 2G \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortótropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortótropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias

Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos

Anisótropo: propiedades mecánicas diferentes según la dirección del análisis.

Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos

En el caso general de un material anisótropo, lineal y elástico, una componente del esfuerzo se asume como combinación lineal de las seis componentes de deformación; por ejemplo:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= d_{1111}\varepsilon_x + d_{1122}\varepsilon_y + d_{1133}\varepsilon_z + d_{1123}\gamma_{yz} + d_{1113}\gamma_{xz} + d_{1112}\gamma_{xy} \\ &= d_{1111}\varepsilon_x + d_{1122}\varepsilon_y + d_{1133}\varepsilon_z + 2d_{1123}\varepsilon_{yz} + 2d_{1113}\varepsilon_{xz} + 2d_{1112}\varepsilon_{xy}.\end{aligned}$$

A.5. Notación tensorial de Voigt

repaso del apéndice

Woldemar Voigt

Esta notación se emplea para representar un tensor simétrico como uno de orden menor.

Ejemplo

La matriz de esfuerzos de Cauchy:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Se puede expresar como un vector de dimensión 6:

$$\underline{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}]^T \equiv [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6]^T$$

Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos

Empleando la notación de Voigt:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}$$

Aquí el orden de los elementos del esfuerzo cortante y de la deformación angular es el que se asume en mecánica de sólidos. Su elección no es arbitraria, sino que está dada bajo el criterio de que $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ y que $\sigma_{ij} = \sigma_k$ para $i, j, k = 1, 2, \dots, 6$ de tal modo que $i + j + k = 9$. Por ejemplo, si $i = 2$ y $j = 3$, entonces $k = 4$. Esto explica el porqué de la relación $\tau_{yz} = \sigma_{23} = \sigma_4$.

Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\begin{pmatrix} d_{1111} & d_{1122} & d_{1133} & d_{1123} & d_{1113} & d_{1112} \\ d_{2211} & d_{2222} & d_{2233} & d_{2223} & d_{2213} & d_{2212} \\ d_{3311} & d_{3322} & d_{3333} & d_{3323} & d_{3313} & d_{3312} \\ d_{2311} & d_{2322} & d_{2333} & d_{2323} & d_{2313} & d_{2312} \\ d_{1311} & d_{1322} & d_{1333} & d_{1323} & d_{1313} & d_{1312} \\ d_{1211} & d_{1222} & d_{1233} & d_{1223} & d_{1213} & d_{1212} \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

- Notación tensorial:

$$\sigma_{ij} = d_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

d_{ijkl} es un tensor de orden 4 ($3^4 = 81$) con propiedades de simetría:

$$\begin{aligned} d_{\textcolor{red}{i}\textcolor{blue}{j}\textcolor{green}{k}\textcolor{magenta}{l}} &= d_{\textcolor{blue}{j}\textcolor{red}{i}\textcolor{green}{k}\textcolor{magenta}{l}}, & \sigma_{\textcolor{red}{i}\textcolor{blue}{j}} &= \sigma_{\textcolor{blue}{j}\textcolor{red}{i}} \\ d_{i\textcolor{blue}{j}\textcolor{magenta}{k}\textcolor{violet}{l}} &= d_{j\textcolor{violet}{i}\textcolor{magenta}{k}\textcolor{blue}{l}}, & \varepsilon_{\textcolor{blue}{k}\textcolor{violet}{l}} &= \varepsilon_{\textcolor{violet}{l}\textcolor{blue}{k}} \end{aligned}$$

Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\begin{pmatrix} d_{1111} & d_{1122} & d_{1133} & d_{1123} & d_{1113} & d_{1112} \\ d_{2211} & d_{2222} & d_{2233} & d_{2223} & d_{2213} & d_{2212} \\ d_{3311} & d_{3322} & d_{3333} & d_{3323} & d_{3313} & d_{3312} \\ d_{2311} & d_{2322} & d_{2333} & d_{2323} & d_{2313} & d_{2312} \\ d_{1311} & d_{1322} & d_{1333} & d_{1323} & d_{1313} & d_{1312} \\ d_{1211} & d_{1222} & d_{1233} & d_{1223} & d_{1213} & d_{1212} \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

- D matriz constitutiva o de constantes elásticas para un material anisótropo (caso más general).
- D es una matriz ($6^2 = 36$) **definida positiva** y **simétrica**: $d_{ijkl} = d_{klij}$
- $D^{-1} = S$ es la **matriz de conformidad**, tal que:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = S \boldsymbol{\sigma}$$

Matriz definida positiva

(Repaso)

Se dice que una matriz K es definida positiva si:

$$\mathbf{x}K\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i K_{ij} x_j > 0$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

- Alternativamente, una matriz es definida positiva si todos sus valores propios son números reales positivos.
- Toda matriz definida positiva K es invertible, su inversa K^{-1} existe.

Explicación de las componentes

- De las 81 componentes del tensor d_{ijkl} (o de las 36 componentes de la matriz D) se requieren únicamente 21 constantes para describir un material **anisótropo lineal elástico** (los términos en la diagonal y encima de la diagonal de la matriz D).
- Para materiales **isótropos**, solo se necesitan dos constantes a saber: Módulo de Young E y coeficiente de Poisson ν .
- Generalmente, los materiales anisótropos presentan ciertos ejes de simetría, por lo que las constantes se reducen de 21 a un número entre 2 y 21.

Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortotropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortotropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias

Ley de Hooke generalizada para materiales ortotropos

Ortótropo: propiedades mecánicas diferentes en tres direcciones mutuamente ortogonales alineadas con la estructura del material.

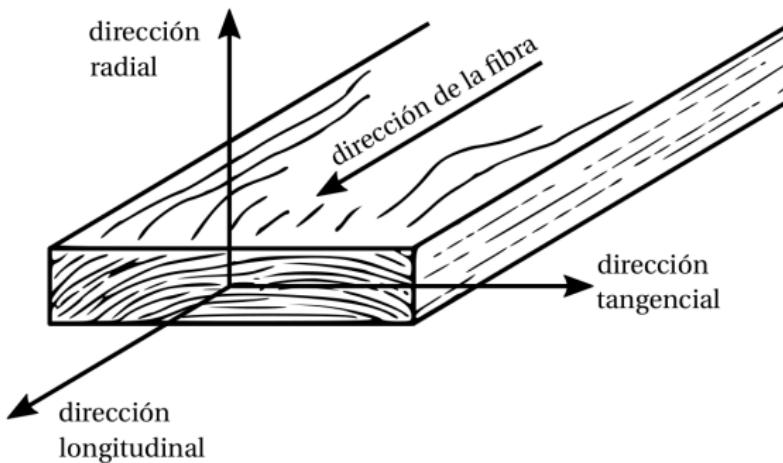


Figura: Direcciones de ortotropía de la madera.

Ley de Hooke generalizada para materiales ortotropos

- Sin interacción entre ε y γ , ni entre σ y τ .
- En el caso tridimensional, requieren de 9 constantes elásticas:
 - E_i módulo de elasticidad a lo largo del eje i :

$$E_x, E_y, E_z;$$

- ν_{ij} coeficiente de Poisson que corresponde a la contracción en la dirección j cuando se aplica un estiramiento en la dirección i :

$$\nu_{yz}, \nu_{xz}, \nu_{xy};$$

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_{transversal}}{\varepsilon_{longitudinal}} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}$$

- G_{ij} módulo de cortante en el plano ij :

$$G_{yz}, G_{xz}, G_{xy}.$$

4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortotropos

Deformaciones longitudinales y angulares son independientes

$$\epsilon_x = \frac{1}{E_x} \sigma_x - \frac{v_{yx}}{E_y} \sigma_y - \frac{v_{zx}}{E_z} \sigma_z$$

$$\epsilon_y = -\frac{v_{xy}}{E_x} \sigma_x + \frac{1}{E_y} \sigma_y - \frac{v_{zy}}{E_z} \sigma_z$$

$$\epsilon_z = -\frac{v_{xz}}{E_x} \sigma_x - \frac{v_{yz}}{E_y} \sigma_y + \frac{1}{E_z} \sigma_z$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G_{yz}} \tau_{yz}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G_{xy}} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G_{xz}} \tau_{xz}$$

Ley de Hooke generalizada para materiales ortotropos

10/16/2022

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{v_{yx}}{E_y} & -\frac{v_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{v_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{xz}}{E_x} & -\frac{v_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}$$

$$v_{yx} = \frac{E_y}{E_x} v_{xy}, \quad v_{zx} = \frac{E_z}{E_x} v_{xz}, \quad v_{zy} = \frac{E_z}{E_y} v_{yz}.$$

Simetría

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-v_{yz}v_{zy}}{E_x E_y \Delta} & \frac{v_{yz}v_{zx}+v_{yx}}{E_x E_y \Delta} & \frac{v_{yx}v_{zy}+v_{zx}}{E_x E_y \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v_{xz}v_{zy}+v_{yy}}{E_x E_y \Delta} & \frac{1-v_{xz}v_{zy}}{E_x E_y \Delta} & \frac{v_{yz}+v_{xy}v_{zx}}{E_x E_y \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v_{xy}v_{yz}+v_{zx}}{E_x E_y \Delta} & \frac{v_{yz}+v_{xy}v_{zx}}{E_x E_y \Delta} & \frac{1-v_{xy}v_{yz}}{E_x E_y \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{yz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \frac{1-v_{yz}v_{zy}-v_{xz}v_{zx}-v_{xy}v_{yx}-2v_{yx}v_{zy}v_{xz}}{E_x E_y E_z}$$

Matriz constitutiva de un material ortotropo

40

Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortótropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortótropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias

Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortótropos

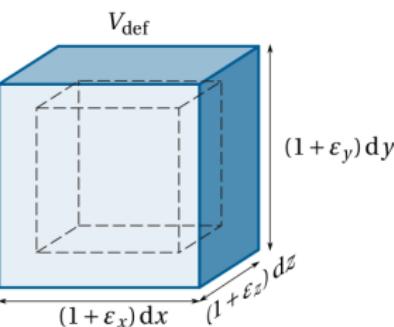
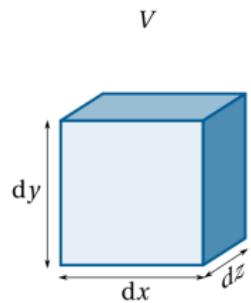
Estudio autónomo

Se concluye que ambas direcciones principales coinciden en el caso de tener un material **elástico, lineal, isótropo y ortótropo**.

Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortotropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortotropos
- **4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica**
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias

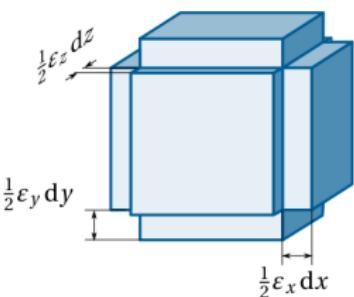
Cambios de volumen y dilatación cúbica



(a)

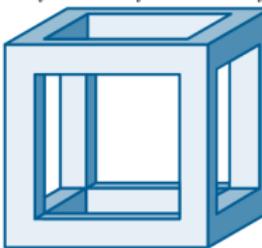
(b)

$$V + (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)V$$



(c)

$$(\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z)V$$



(d)

Cambios de volumen y dilatación cúbica

La dilatación cúbica o deformación volumétrica es el cambio de volumen por unidad de volumen.

$$e := \frac{V_{\text{def}-V}}{V} \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$e(x, y, z) = \operatorname{div} \mathbf{u}(x, y, z) = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z}$$

Cambios de volumen y dilatación cúbica

Se ha demostrado matemáticamente que:

- ① Los cambios de volumen en el sólido son producidos por los esfuerzos normales.
- ② Un elemento sometido solo a fuerzas cortantes no cambia de volumen.
- ③ Si el elemento está sometido a esfuerzos normales y cortantes, su cambio de volumen se puede aproximar mediante $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$.

Cambios de volumen y dilatación cúbica

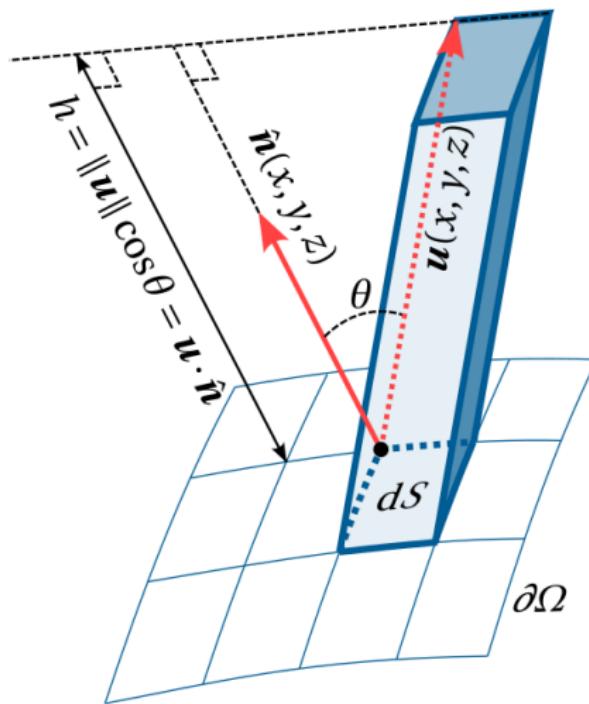
El cambio de volumen en todo el sólido Ω :

$$\begin{aligned}\Delta V &\approx \iiint_{\Omega} e(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} (\varepsilon_x(x, y, z) + \varepsilon_y(x, y, z) + \varepsilon_z(x, y, z)) dx dy dz\end{aligned}$$

Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortotropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortotropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- **4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia**
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias

Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia



Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia

Teorema de la divergencia, de Gauss o de Ostrogradsky

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}(x, y, z) dV = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{u}(x, y, z) \cdot \hat{\mathbf{n}}(x, y, z) dS$$

Nos permite calcular el cambio de volumen de un material ya sea como la suma de los pequeños cambios de volumen de cada uno de los diferenciales dV que lo conforman o mediante el flujo del material a través del contorno del sólido.

- Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) en 1762, matemático y astrónomo.
- Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) en 1813, matemático y físico.
- Mikhail Vasilyevich Ostrogradsky (1801-1862) en 1826, matemático y físico.

Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia

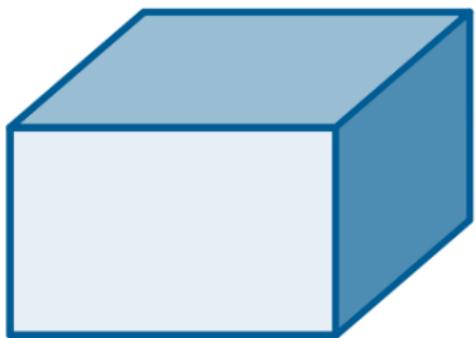
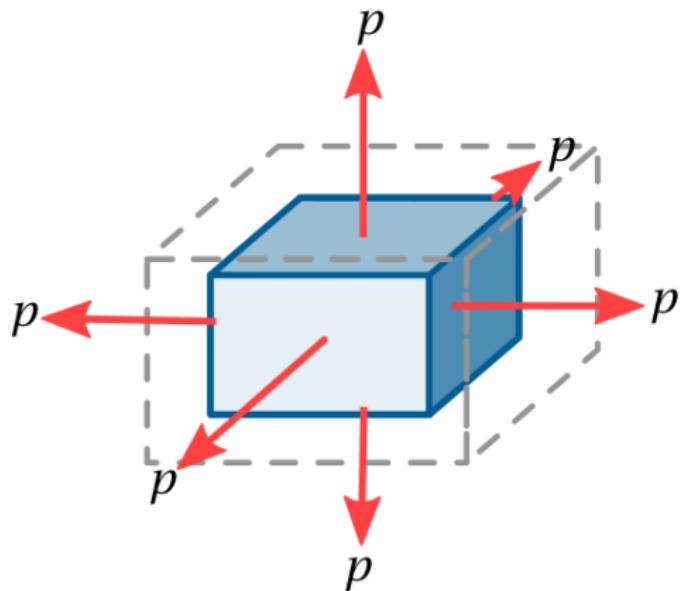
Video para complementar

- Gauss's Divergence Theorem

Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortótropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortótropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- **4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad**
- Referencias

Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad



Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad

$$K := \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

Es una propiedad del material que determina su incompresibilidad y es una medida de la capacidad de una sustancia de soportar cambios de volumen cuando se somete a esfuerzos normales en todas las direcciones.

- Entre más tienda $\nu \rightarrow 0$ más incompresible es el sólido.
- Un suelo saturado tiene un ν cercano a 0,5.

Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortótropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortótropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias

Referencias

- Reyes, L. E. G. (1998). *Dinámica de estructuras aplicada al diseño sísmico*. Universidad de los Andes.
- Álvarez, D. A. (2022). *Teoría de la elasticidad*, volume 1. Universidad Nacional de Colombia.