

03. Estudio de los desplazamientos y las deformaciones en un punto

secciones 3.1 a 3.4

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil
Mecánica Tensorial

2023a



Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada ([Álvarez, 2022](#)).



Derrotero

- ① Deformaciones
- ② 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- ③ Conceptos necesarios del suplemento matemático
- ④ 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- ⑤ 3.3. Las galgas extensométricas
- ⑥ 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- ⑦ 3.5. Rotación
- ⑧ 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios
- ⑨ Referencias

Derrotero

① Deformaciones

② 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido

③ Conceptos necesarios del suplemento matemático

④ 3.2. Componentes de la deformación en un punto

 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)

 3.2.2. Deformación angular

⑤ 3.3. Las galgas extensométricas

⑥ 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones

⑦ 3.5. Rotación

⑧ 3.6. Deformaciones principales

 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional
 utilizando maximización y minimización de funciones

 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores
 propios

⑨ Referencias

Deformaciones

Cambio de forma o tamaño de un sólido debido a los esfuerzos internos producidos por:

- Fuerzas básicas y superficiales
- Ocurrencia de dilatación térmica
- Desplazamientos impuestos

Asumimos:

- Las deformaciones que están ocurriendo dentro del sólido son muy pequeñas

Derrotero

① Deformaciones

② 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido

③ Conceptos necesarios del suplemento matemático

④ 3.2. Componentes de la deformación en un punto

 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)

 3.2.2. Deformación angular

⑤ 3.3. Las galgas extensométricas

⑥ 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones

⑦ 3.5. Rotación

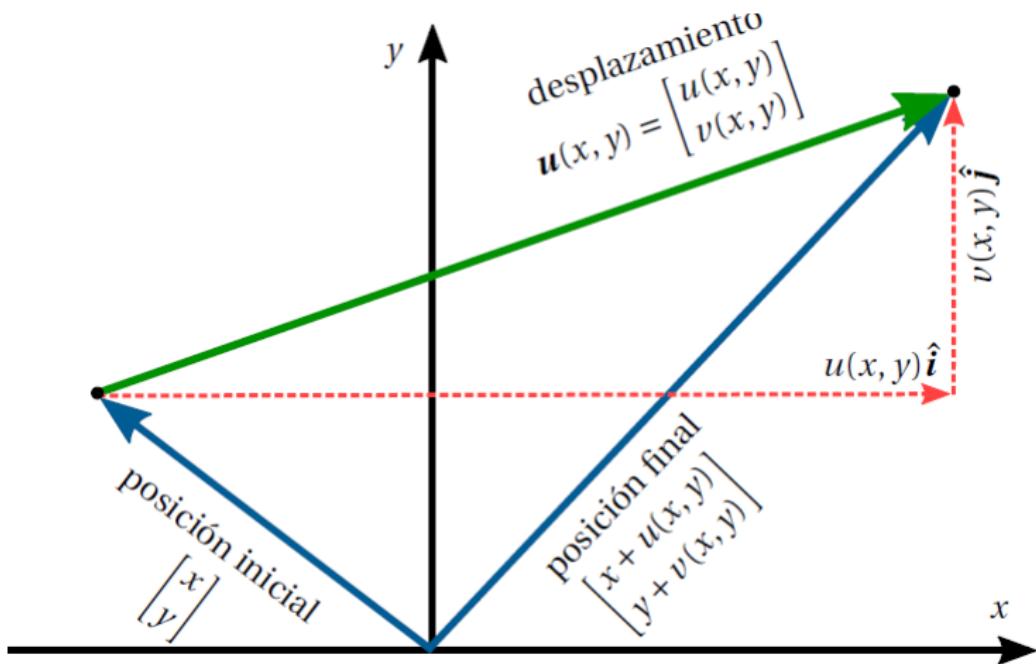
⑧ 3.6. Deformaciones principales

 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional
 utilizando maximización y minimización de funciones

 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores
 propios

⑨ Referencias

Campo vectorial de desplazamientos de un sólido



Campo vectorial de desplazamientos de un sólido

- El sólido deformado es continuo.
- Hay una distribución de esfuerzos representada como una función continua por partes.

Dominio en (x, y, z)

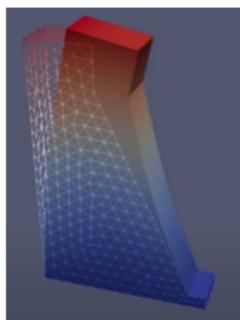


Figura: Muro de compresión deformado.

Dominio en (x, y, z, t)

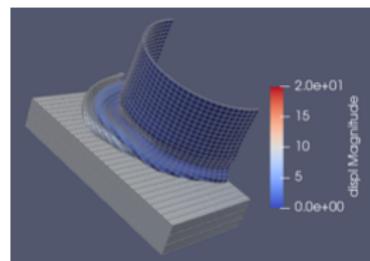
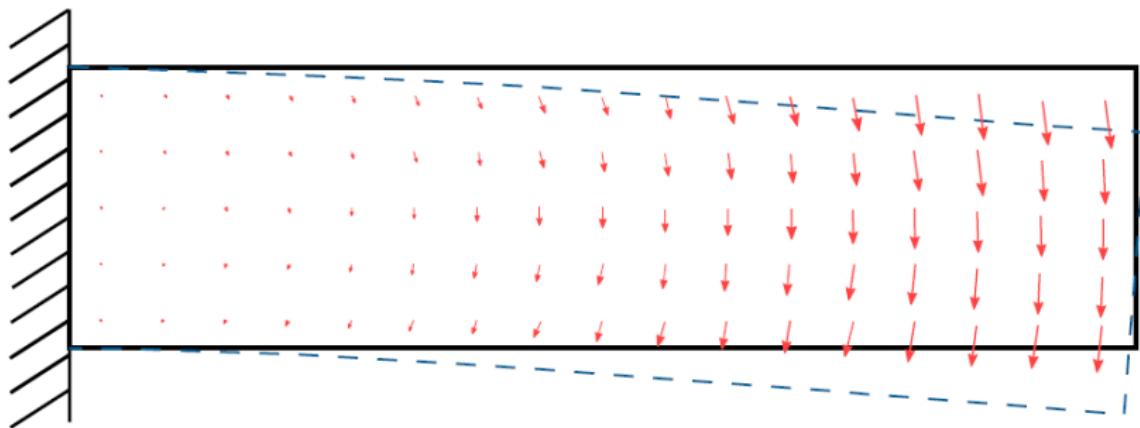


Figura: Lata aplastada por una placa (Paraview).

Campo vectorial de desplazamientos de un sólido

Campo vectorial de desplazamientos para una viga



Derrotero

- ① Deformaciones
- ② 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- ③ **Conceptos necesarios del suplemento matemático**
- ④ 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- ⑤ 3.3. Las galgas extensométricas
- ⑥ 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- ⑦ 3.5. Rotación
- ⑧ 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios
- ⑨ Referencias

Expansión en series de Taylor en varias variables

Apéndice matemático

La serie de Taylor para funciones multivariadas alrededor del punto (a_i) se define como:

$$f(x_1, \dots, x_d) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=0}^{\infty} \frac{(x_1-a_1)^{n_1} \cdots (x_d-a_d)^{n_d}}{n_1! \cdots n_d!} \left(\frac{\delta^{n_1+\cdots+n_d} f}{\delta x_1^{n_1} \cdots \delta x_d^{n_d}} \right) (a_1, \dots, a_d).$$

La expansión truncada en series de Taylor de segundo orden es:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &\approx f(x_0, y_0) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \\ &+ \frac{1}{2!} \left[\Delta x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(x_0, y_0)} + 2\Delta x \Delta y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} + \Delta y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(x_0, y_0)} \right]. \end{aligned}$$

Aproximación de ángulos pequeños

Apéndice matemático

En el límite cuando el ángulo tiende a cero, mediante una aproximación de primer orden de las funciones trigonométricas truncando su correspondiente serie de Taylor:

$$\sin x \approx x$$

$$\cos x \approx 1$$

$$\tan x \approx x$$

Si se utiliza una aproximación de segundo orden:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

Aproximación de ángulos pequeños

Apéndice matemático

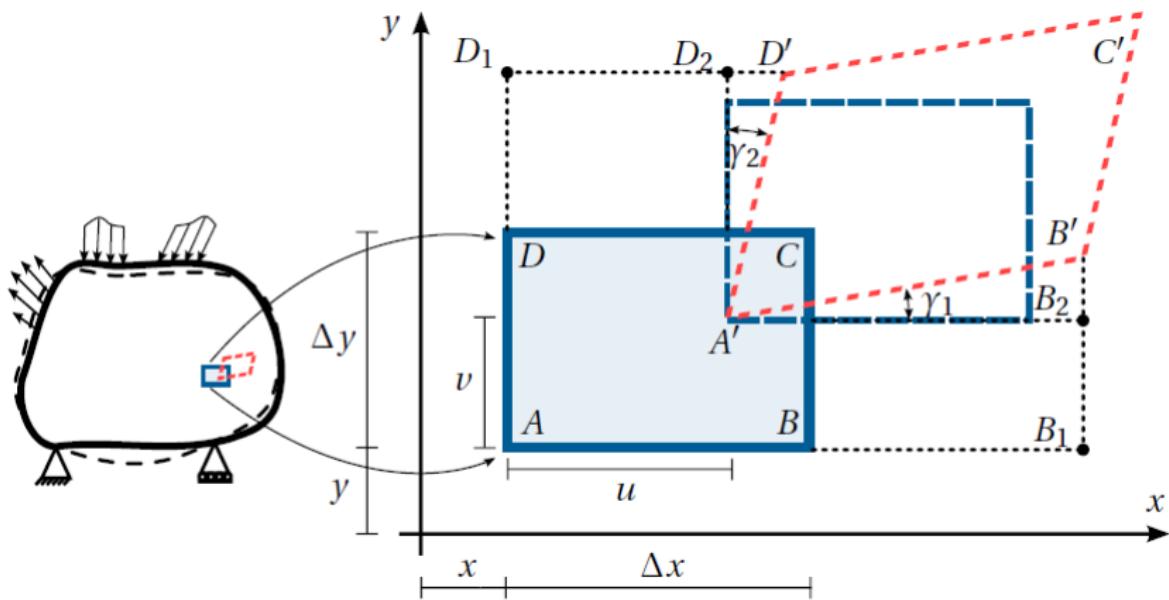
Tabla A.1: Valor de las funciones trigonométricas para diferentes ángulos.

θ (grados)	θ (radianes)	$\sin(\theta)$ (error)	$\cos(\theta)$ (error)	$\tan(\theta)$ (error)
0	0	0 (0 %)	1 (0 %)	0 (0 %)
1	0.0175	0.0175 (0.0051 %)	0.9998 (0.0152 %)	0.0175 (0.0102 %)
2	0.0349	0.0349 (0.0203 %)	0.9994 (0.0610 %)	0.0349 (0.0406 %)
3	0.0524	0.0523 (0.0457 %)	0.9986 (0.1372 %)	0.0524 (0.0914 %)
4	0.0698	0.0698 (0.0813 %)	0.9976 (0.2442 %)	0.0699 (0.1625 %)
5	0.0873	0.0872 (0.1270 %)	0.9962 (0.3820 %)	0.0875 (0.2540 %)
6	0.1047	0.1045 (0.1830 %)	0.9945 (0.5508 %)	0.1051 (0.3658 %)
7	0.1222	0.1219 (0.2492 %)	0.9925 (0.7510 %)	0.1228 (0.4980 %)
8	0.1396	0.1392 (0.3257 %)	0.9903 (0.9828 %)	0.1405 (0.6507 %)
9	0.1571	0.1564 (0.4124 %)	0.9877 (1.2465 %)	0.1584 (0.8238 %)
10	0.1745	0.1736 (0.5095 %)	0.9848 (1.5427 %)	0.1763 (1.0175 %)

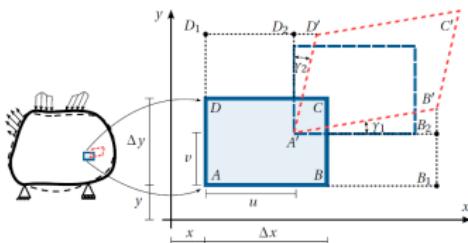
Derrotero

- ① Deformaciones
- ② 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- ③ Conceptos necesarios del suplemento matemático
- ④ 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- ⑤ 3.3. Las galgas extensométricas
- ⑥ 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- ⑦ 3.5. Rotación
- ⑧ 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios
- ⑨ Referencias

Componentes de la deformación en un punto



Componentes de la deformación en un punto



$$A := (x, y)$$

$$B := (x + \Delta x, y)$$

$$C := (x + \Delta x, y + \Delta y)$$

$$D := (x, y + \Delta y)$$

- Componentes **horizontales** del desplazamiento:

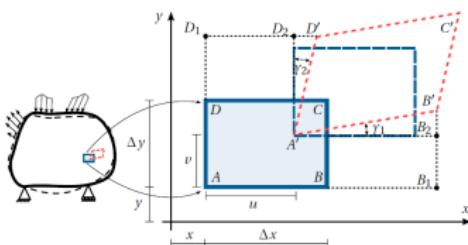
$$u(A) = u(x, y)$$

$$u(B) \approx u(x, y) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x,y)}$$

$$u(C) \approx u(x, y) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x,y)} + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x,y)}$$

$$u(D) \approx u(x, y) + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x,y)}$$

Componentes de la deformación en un punto



$$A := (x, y)$$

$$B := (x + \Delta x, y)$$

$$C := (x + \Delta x, y + \Delta y)$$

$$D := (x, y + \Delta y)$$

- Componentes **verticales** del desplazamiento:

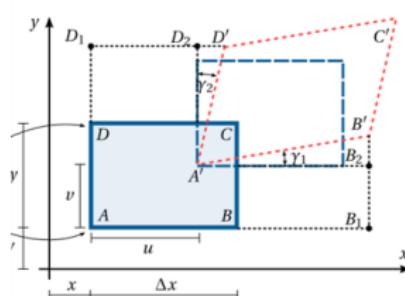
$$v(A) = v(x, y)$$

$$v(B) \approx v(x, y) + \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x,y)}$$

$$v(C) \approx v(x, y) + \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x,y)} + \Delta y \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{(x,y)}$$

$$v(D) \approx v(x, y) + \Delta y \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{(x,y)}$$

Componentes de la deformación en un punto



$$A'B_2 = \text{Coord}_x(B') - \text{Coord}_x(A') = \Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x,y)} \Delta x$$

$$A'D_2 = \text{Coord}_y(D') - \text{Coord}_y(A') = \Delta y + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x,y)} \Delta y$$

$$B_2B' = \text{Coord}_y(B') - \text{Coord}_y(A') = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x,y)} \Delta x$$

$$D_2D' = \text{Coord}_x(D') - \text{Coord}_x(A') = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x,y)} \Delta y$$

Derrotero

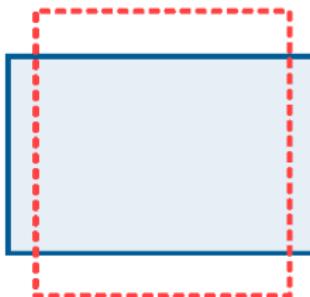
- ① Deformaciones
- ② 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- ③ Conceptos necesarios del suplemento matemático
- ④ 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- ⑤ 3.3. Las galgas extensométricas
- ⑥ 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- ⑦ 3.5. Rotación
- ⑧ 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios
- ⑨ Referencias

Deformación longitudinal

(Deformación lineal)



$\varepsilon_x > 0$ (estiramiento en dirección x)
 $\varepsilon_y < 0$ (contracción en dirección y)



$\varepsilon_x < 0$ (contracción en dirección x)
 $\varepsilon_y > 0$ (estiramiento en dirección y)

$$\varepsilon_x(x, y, z) := \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x}$$

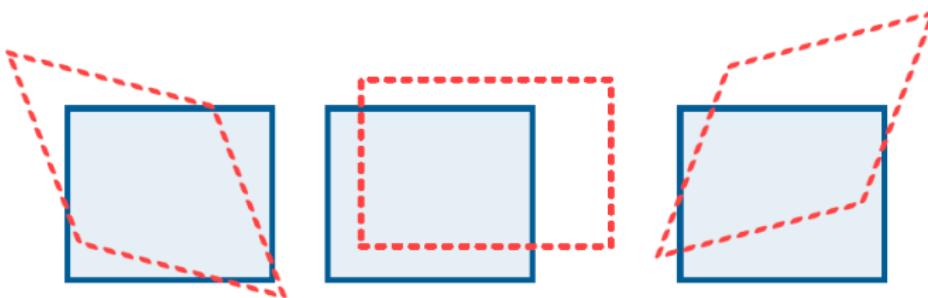
$$\varepsilon_y(x, y, z) := \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z(x, y, z) := \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z}$$

Derrotero

- ① Deformaciones
- ② 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- ③ Conceptos necesarios del suplemento matemático
- ④ 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- ⑤ 3.3. Las galgas extensométricas
- ⑥ 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- ⑦ 3.5. Rotación
- ⑧ 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios
- ⑨ Referencias

Deformación angular

(a) $\gamma_{xy} < 0$ (b) $\gamma_{xy} = 0$ (c) $\gamma_{xy} > 0$

$$\gamma_{xy}(x, y, z) := \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz}(x, y, z) := \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz}(x, y, z) := \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y}$$

Deformaciones angulares matemáticas

$$\varepsilon_{xy}(x, y) := \frac{\gamma_{xy}(x, y)}{2} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}.$$

Matriz de deformaciones infinitecimales de Cauchy

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}}_{\text{deformaciones matemáticas}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}}_{\text{deformaciones ingenieriles}}$$

Derrotero

- ① Deformaciones
- ② 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- ③ Conceptos necesarios del suplemento matemático
- ④ 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- ⑤ 3.3. Las galgas extensométricas
- ⑥ 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- ⑦ 3.5. Rotación
- ⑧ 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios
- ⑨ Referencias

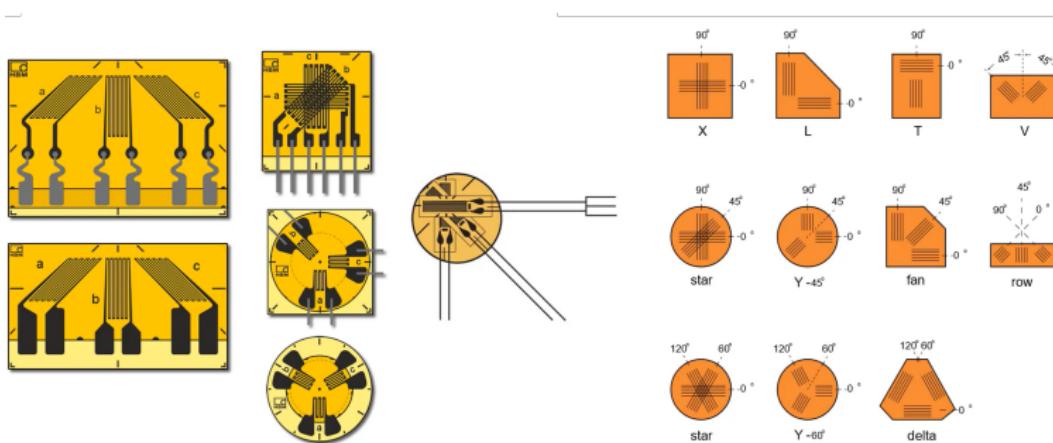
Las galgas extensométricas



- Elementos que miden la deformación en un punto y que a partir de una relación esfuerzo-deformación del material, permiten conocer de forma indirecta los esfuerzos en esos puntos.
- No es posible medir directamente los esfuerzos al interior de una estructura y solo se pueden inferir estos a través de la medición de deformaciones.
- Complementar el tema de forma autónoma

Las galgas extensométricas

Como estas solo pueden medir deformaciones longitudinales, se agrupan en configuraciones llamadas **rosetas de deformación** para medir las deformaciones en todas las direcciones posibles.



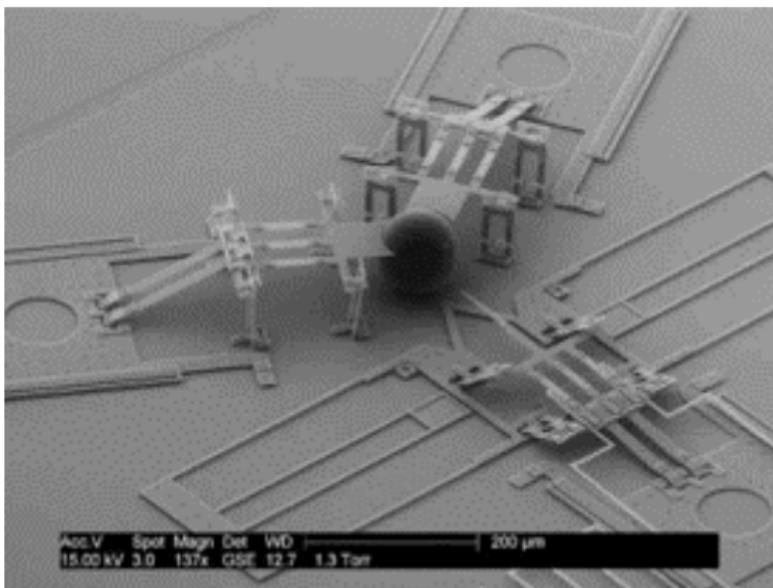
Video

[Strain Gauge 101 - Learn the basics of how they're used](#)

¿... y esto?

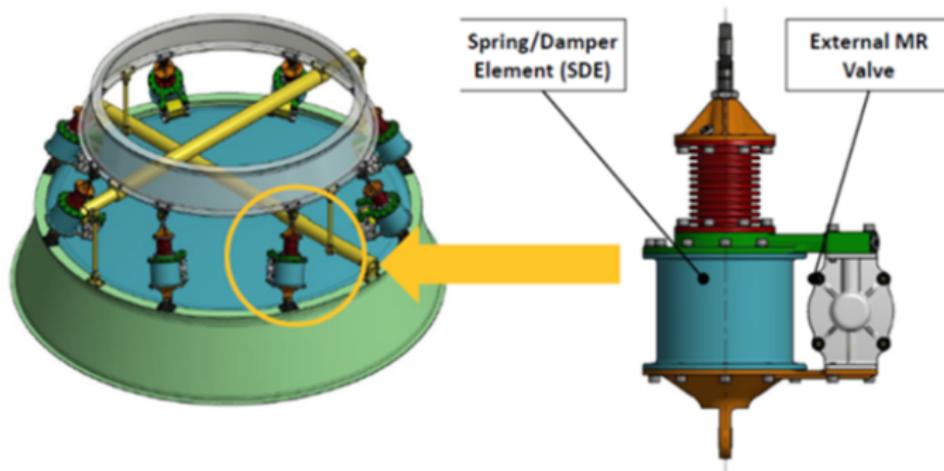
Muchos dispositivos electrónicos, tan colosales como los Sistemas Activos de Disipación Sísmica, medianos como los acelerógrafos, o tan minúsculos como los MEMES (*Micro Electro-Mechanical Systems*), son activados por desplazamientos y deformaciones.

¿... y esto?



MEMS, así funcionan los sistemas microeléctricos en el hardware. [Link.](#)

¿... y esto?



ESA - Semi active damping systems. [Link](#).

¿... y esto?



Introducing Tuned Mass Dampers | January 2017 | Highlighting Japan. [Link.](#)

¿Fuerzas, esfuerzos, desplazamientos, deformaciones?

- Puede pensarse que las fuerzas y los desplazamientos van primero que los esfuerzos y las deformaciones.
- Usualmente, en los laboratorios de estructuras se simulan las cargas con desplazamientos inducidos para hallar esfuerzos, y en los laboratorios de suelos se aplican fuerzas para hallar esfuerzos.
- Por ejemplo, el **Laboratorio de Ingeniería Estructural y Sísmica de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales**, induce desplazamientos mediante actuadores en su **Mesa Vibradora** y en su **Sistema Híbrido de Simulación Sísmica**.

Mesa vibradora

Laboratorio de Ingeniería Estructural y Sísmica de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales



Sistema híbrido de simulación sísmica

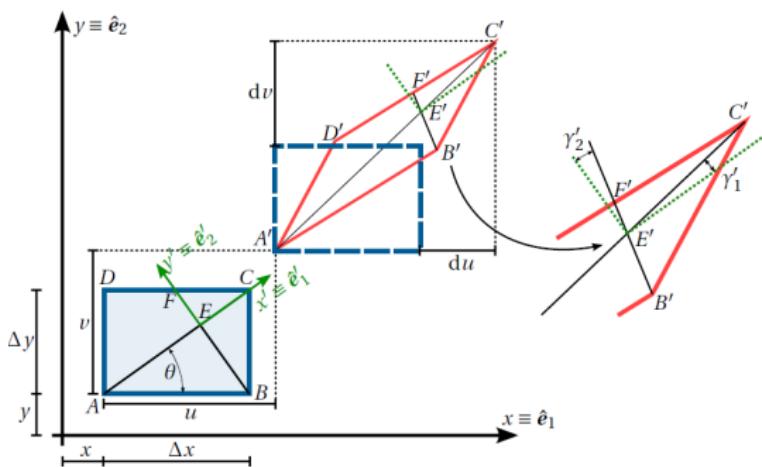
Laboratorio de Ingeniería Estructural y Sísmica de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales



Derrotero

- ① Deformaciones
- ② 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- ③ Conceptos necesarios del suplemento matemático
- ④ 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- ⑤ 3.3. Las galgas extensométricas
- ⑥ **3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones**
- ⑦ 3.5. Rotación
- ⑧ 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios
- ⑨ Referencias

Especificación de la deformación en otras direcciones



Complementar

- 03.04 - Deformación en otras direcciones (Parte 1/2)
- 03.04 - Deformación en otras direcciones (Parte 2/2)
- 03_04_exp_otras_direcciones.ipynb

Especificación de la deformación en otras direcciones

Según Solecki y Connat, 2003:

$$\varepsilon'_x(\theta) = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta$$

$$\varepsilon'_y(\theta) = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta - \varepsilon_{xy} \sin 2\theta$$

$$\frac{\gamma'_{x'y'}(\theta)}{2} = \varepsilon'_{x'y'}(\theta) = \varepsilon_{xy} \cos 2\theta - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\theta$$

Especificación de la deformación en otras direcciones

Según Solecki y Connat, 2003:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon'_x & \varepsilon'_{x'y'} & \varepsilon'_{x'z'} \\ \varepsilon'_{y'x'} & \varepsilon'_y & \varepsilon'_{y'z'} \\ \varepsilon'_{z'x'} & \varepsilon'_{z'y'} & \varepsilon'_z \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\varepsilon'}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_T^T \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}}_T$$

Cambio de base

- En términos de deformaciones matemáticas:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{z'} \\ \varepsilon_{y'z'} \\ \varepsilon_{x'z'} \\ \varepsilon_{x'y'} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & 2\gamma_1 \beta_1 & 2\gamma_1 \alpha_1 & 2\alpha_1 \beta_1 \\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & 2\gamma_2 \beta_2 & 2\gamma_2 \alpha_2 & 2\alpha_2 \beta_2 \\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & 2\gamma_3 \beta_3 & 2\gamma_3 \alpha_3 & 2\alpha_3 \beta_3 \\ \alpha_2 \alpha_3 & \beta_2 \beta_3 & \gamma_2 \gamma_3 & \gamma_2 \beta_3 + \beta_2 \gamma_3 & \gamma_2 \alpha_3 + \alpha_2 \gamma_3 & \alpha_2 \beta_3 + \beta_2 \alpha_3 \\ \alpha_1 \alpha_3 & \beta_1 \beta_3 & \gamma_1 \gamma_3 & \gamma_1 \beta_3 + \beta_1 \gamma_3 & \gamma_1 \alpha_3 + \alpha_1 \gamma_3 & \alpha_1 \beta_3 + \beta_1 \alpha_3 \\ \alpha_1 \alpha_2 & \beta_1 \beta_2 & \gamma_1 \gamma_2 & \gamma_1 \beta_2 + \beta_1 \gamma_2 & \gamma_1 \alpha_2 + \alpha_1 \gamma_2 & \alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 \end{pmatrix}}_{=T_\sigma \text{ (ver ecuación (2.23))}} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

- En términos de deformaciones ingenieriles:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{z'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{x'y'} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & \gamma_1 \beta_1 & \gamma_1 \alpha_1 & \alpha_1 \beta_1 \\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & \gamma_2 \beta_2 & \gamma_2 \alpha_2 & \alpha_2 \beta_2 \\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & \gamma_3 \beta_3 & \gamma_3 \alpha_3 & \alpha_3 \beta_3 \\ 2\alpha_2 \alpha_3 & 2\beta_2 \beta_3 & 2\gamma_2 \gamma_3 & \gamma_2 \beta_3 + \beta_2 \gamma_3 & \gamma_2 \alpha_3 + \alpha_2 \gamma_3 & \alpha_2 \beta_3 + \beta_2 \alpha_3 \\ 2\alpha_1 \alpha_3 & 2\beta_1 \beta_3 & 2\gamma_1 \gamma_3 & \gamma_1 \beta_3 + \beta_1 \gamma_3 & \gamma_1 \alpha_3 + \alpha_1 \gamma_3 & \alpha_1 \beta_3 + \beta_1 \alpha_3 \\ 2\alpha_1 \alpha_2 & 2\beta_1 \beta_2 & 2\gamma_1 \gamma_2 & \gamma_1 \beta_2 + \beta_1 \gamma_2 & \gamma_1 \alpha_2 + \alpha_1 \gamma_2 & \alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 \end{pmatrix}}_{T_\epsilon} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Con $T_\sigma^{-1} = T_\epsilon^T$

Deformación en función de los vectores normales al plano

Como la dirección de los vectores \hat{e}'_1 , \hat{e}'_2 y \hat{e}'_3 es arbitraria, siempre y cuando estos sean vectores mutuamente ortogonales, de las ecuaciones anteriores se sigue que:

- la deformación longitudinal en una dirección del vector normal \hat{n} :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\hat{n}} &= \mathbf{n}^T \underline{\underline{\varepsilon}} \hat{n} \\ &= \varepsilon_x \alpha^2 + \varepsilon_y \beta^2 + \varepsilon_z \gamma^2 + 2\varepsilon_{xy} \alpha \beta + 2\varepsilon_{yz} \beta \gamma + 2\varepsilon_{xz} \alpha \gamma\end{aligned}$$

- la deformación angular matemática sobre un plano generado por los vectores mutuamente ortogonales \hat{m} y \hat{n} es:

$$\varepsilon_{\hat{n}\hat{m}} = \mathbf{m}^T \underline{\underline{\varepsilon}} \hat{n}$$

Relación entre las deformaciones calculadas en sistemas de ejes coordenados diferentes

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \mathbf{T} \underline{\underline{\varepsilon}}' \mathbf{T}^T$$

Formulación en dos dimensiones

Código

03_04.ipynb

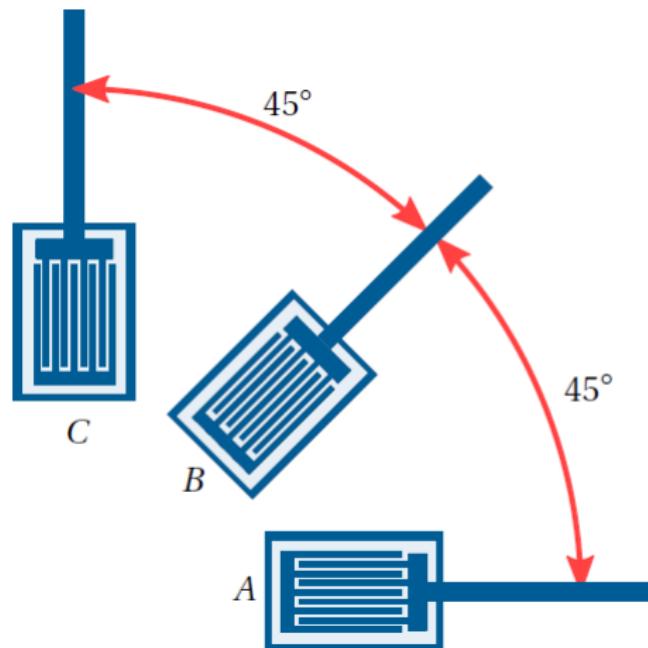
$$\varepsilon'_x = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + 2\varepsilon_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\varepsilon'_y = \varepsilon_x \sin^2 \theta + \varepsilon_y \cos^2 \theta - 2\varepsilon_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

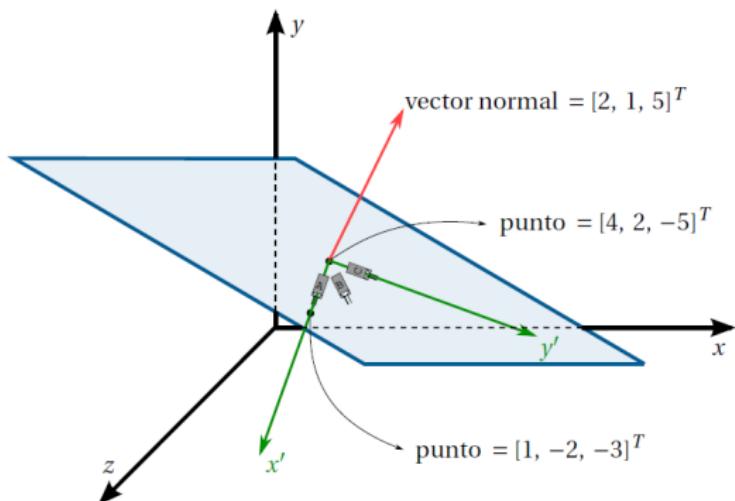
$$\varepsilon_{x'y'} = \varepsilon_y \sin \theta \cos \theta - \varepsilon_x \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\varepsilon_{x'z'} = \varepsilon_{y'z'} = \varepsilon_{z'} = 0$$

Ejemplo



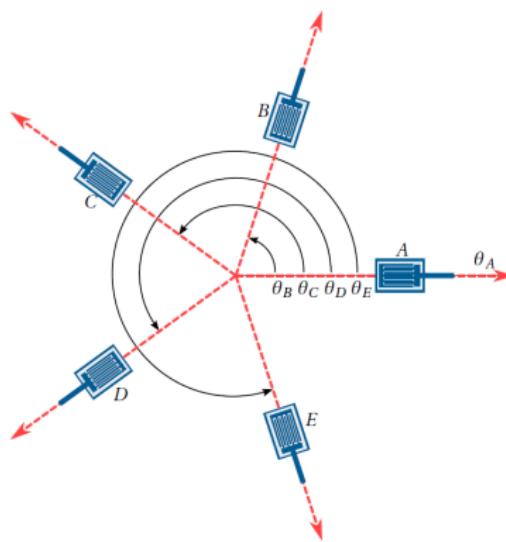
Ejemplo: cambio de base



Código

03_04_02_ejemplo.ipynb

Ejemplo: más de tres galgas extensométricas



Código

[03_04_03_ejemplo.ipynb](#)

Derrotero

- ① Deformaciones
- ② 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- ③ Conceptos necesarios del suplemento matemático
- ④ 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- ⑤ 3.3. Las galgas extensométricas
- ⑥ 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- ⑦ 3.5. Rotación
- ⑧ 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios
- ⑨ Referencias

Rotación

Estudio autónomo

Prestar atención a:

- El gradiente y el rotacinal del campo vectorial de desplazamientos
- La matriz \mathbf{H} como operación de una matriz simétrica y antisimétrica
- El concepto de rotación rígida
- Proceso de deformación de un sólido

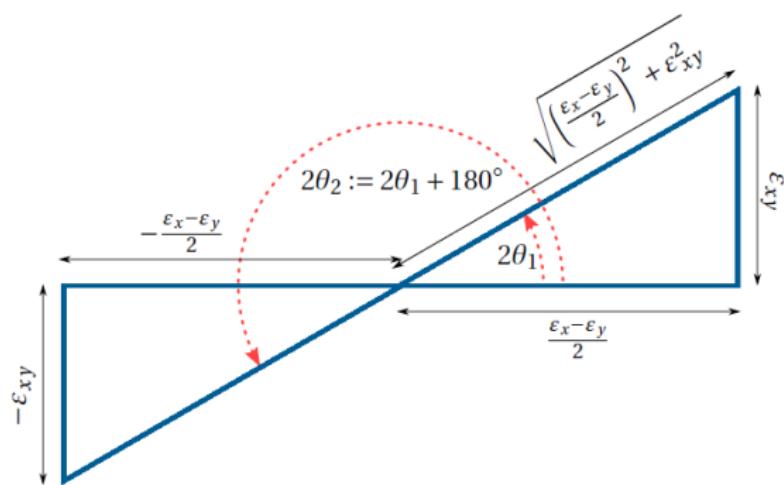
Derrotero

- ① Deformaciones
- ② 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- ③ Conceptos necesarios del suplemento matemático
- ④ 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- ⑤ 3.3. Las galgas extensométricas
- ⑥ 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- ⑦ 3.5. Rotación
- ⑧ 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios
- ⑨ Referencias

Derrotero

- ① Deformaciones
- ② 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- ③ Conceptos necesarios del suplemento matemático
- ④ 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- ⑤ 3.3. Las galgas extensométricas
- ⑥ 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- ⑦ 3.5. Rotación
- ⑧ 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios
- ⑨ Referencias

Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones



$$\sin 2\theta_1 = \frac{\varepsilon_{xy}}{R}$$

$$\cos 2\theta_1 = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2R}$$

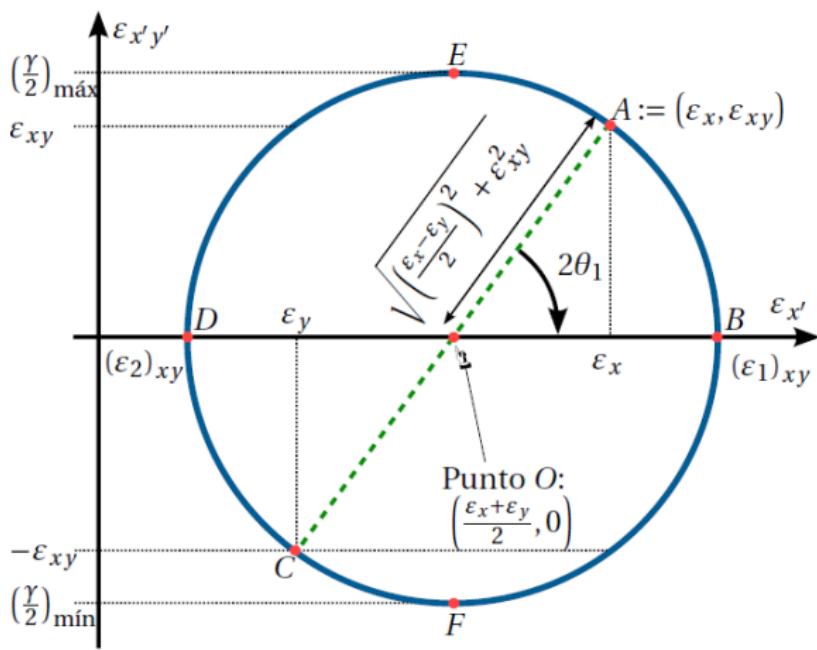
$$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2}$$

$$\sin 2\theta_2 = -\frac{\varepsilon_{xy}}{R}$$

$$\cos 2\theta_2 = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2R}$$

$$\frac{d\varepsilon_{x'}}{d\theta} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\theta + 2\varepsilon_{xy} \cos 2\theta = 0$$

Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones



Derrotero

- ① Deformaciones
- ② 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- ③ Conceptos necesarios del suplemento matemático
- ④ 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- ⑤ 3.3. Las galgas extensométricas
- ⑥ 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- ⑦ 3.5. Rotación
- ⑧ 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios
- ⑨ Referencias

Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios

- eigenvalues problem:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \hat{\mathbf{n}} = \varepsilon_n \hat{\mathbf{n}}$$

- Ecuación característica:

- Caso bidimensional:

$$\varepsilon_n^2 - (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \varepsilon_x \varepsilon_y - \varepsilon_{xy}^2 = 0$$

- Caso tridimensional:

$$-\varepsilon_n^3 + I_1^d \varepsilon_n^2 - I_2^d \varepsilon_n + I_3^d = 0$$

- **Invariantes de deformaciones**

$$e := I_1^d := \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

$$I_2^d := \frac{1}{2} (\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})^2 - \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2))$$

$$I_2^d := \det(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

Derrotero

- ① Deformaciones
- ② 3.1. Campo vectorial de desplazamientos de un sólido
- ③ Conceptos necesarios del suplemento matemático
- ④ 3.2. Componentes de la deformación en un punto
 - 3.2.1. Deformación lineal (longitudinal)
 - 3.2.2. Deformación angular
- ⑤ 3.3. Las galgas extensométricas
- ⑥ 3.4. Especificación de la deformación en otras direcciones
- ⑦ 3.5. Rotación
- ⑧ 3.6. Deformaciones principales
 - 3.6.1. Expresión de las deformaciones principales en el caso bidimensional utilizando maximización y minimización de funciones
 - 3.6.2. Expresión de las deformaciones principales utilizando valores y vectores propios
- ⑨ Referencias

Referencias

Álvarez, D. A. (2022). *Teoría de la elasticidad*, volume 1. Universidad Nacional de Colombia.

Links

The screenshot shows a YouTube playlist page with the following details:

- Title:** 03 - Desplazamientos y deformaciones
- URL:** https://www.youtube.com/playlist?list=PL0cQdeBzrPGcpdpX1RT67exW7AQ7m3K
- Thumbnail 1:** Deducción de las deformaciones angulares. Description: $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$, $\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$, $\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$. Duration: 00:45.
- Thumbnail 2:** Campo vectorial de desplazamientos de un sólido. Description: $\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix}$. Duration: 00:45.
- Thumbnail 3:** Deformación longitudinal unitaria. Description: $\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$. Duration: 00:45.
- Thumbnail 4:** Deformación angular. Description: $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$, $\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$, $\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$. Duration: 00:45.
- Thumbnail 5:** ¿Qué es una galga extensiométrica? Description: A diagram of a strain gauge. Duration: 00:45.
- Thumbnail 6:** Deducción de deformaciones en direcciones diagonales. Description: $\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$, $\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$. Duration: 00:45.
- Thumbnail 7:** Transformación del tensor de deformaciones diagonales. Description: A diagram of a coordinate transformation. Duration: 00:45.
- Thumbnail 8:** Tres tipos de deformación. Description: A diagram showing three types of deformation: translation, rigid rotation, and deformation. Duration: 00:45.
- Thumbnail 9:** Descomposición del movimiento de un punto: traslación rígida, rotación rígida y deformaciones. Description: A diagram showing the decomposition of point movement. Duration: 00:45.
- Thumbnail 10:** 03.01 - Campo vectorial de desplazamientos. Description: diegoandresalvarez • 1545 visualizaciones • hace 2 años.
- Thumbnail 11:** 03.02 - Deformaciones longitudinales o unitarias. Description: diegoandresalvarez • 2627 visualizaciones • hace 2 años.
- Thumbnail 12:** 03.03 - Deformaciones angulares. Description: diegoandresalvarez • 2520 visualizaciones • hace 2 años.
- Thumbnail 13:** 03.04 - Deformación en otras direcciones (Parte 1/2). Description: diegoandresalvarez • 532 visualizaciones • hace 3 años.
- Thumbnail 14:** 03.04 - Deformación en otras direcciones (Parte 2/2). Description: diegoandresalvarez • 554 visualizaciones • hace 2 años.
- Thumbnail 15:** 03.05 - Descomposición del movimiento de un punto: traslación rígida, rotación rígida y deformaciones. Description: diegoandresalvarez • 508 visualizaciones • hace 2 años.

- Lista de reproducción: [03 - Desplazamientos y deformaciones](#)
- Repositorio del curso: [github/mejorando-mecanica-tensorial](https://github.com/herediamichael/mejorando-mecanica-tensorial)