

4100611 - Mecánica de Sólidos

Unidad 2. Relación entre esfuerzos y deformaciones

**Michael Heredia Pérez
Ing., Esp., MSc.**

mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil



2026a

Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada.



Derrotero

- 4.9. Particularización de tres a dos dimensiones
 - 4.9.1. Tensión plana
 - 4.9.2. Deformación plana
 - 4.9.3. Relación entre los esfuerzos principales obtenidos en el análisis bidimensional y tridimensional
 - Ejemplos
- 4.10. Interpretación de gráficos de esfuerzos y deformaciones
 - Contexto
 - Análisis de una viga
 - 4.10.1. Interpretación de los gráficos de σ_x , σ_y y τ_{xy}
 - 4.10.4. Relación de los diagramas de colores de una viga con sus diagramas de cortante y momento
 - 4.10.2. Interpretación de los gráficos de ε_x , ε_y y γ_{xy}
 - 4.10.3. Interpretación de los gráficos de esfuerzos principales y cortante máximo
 - 4.10.5. Disposición de los flejes si la viga estuviera hecha con concreto reforzado
- 4.11. Cálculo de las trayectorias de esfuerzos principales
- 4.12. Modificación de la ley de Hooke para tener en cuenta los efectos térmicos en el caso de materiales isótropos

Derrotero

- 4.9. Particularización de tres a dos dimensiones
 - 4.9.1. Tensión plana
 - 4.9.2. Deformación plana
 - 4.9.3. Relación entre los esfuerzos principales obtenidos en el análisis bidimensional y tridimensional
 - Ejemplos
- 4.10. Interpretación de gráficos de esfuerzos y deformaciones
 - Contexto
 - Análisis de una viga
 - 4.10.1. Interpretación de los gráficos de σ_x , σ_y y τ_{xy}
 - 4.10.4. Relación de los diagramas de colores de una viga con sus diagramas de cortante y momento
 - 4.10.2. Interpretación de los gráficos de ε_x , ε_y y γ_{xy}
 - 4.10.3. Interpretación de los gráficos de esfuerzos principales y cortante máximo
 - 4.10.5. Disposición de los flejes si la viga estuviera hecha con concreto reforzado
- 4.11. Cálculo de las trayectorias de esfuerzos principales
- 4.12. Modificación de la ley de Hooke para tener en cuenta los efectos térmicos en el caso de materiales isótropos

Particularización de tres a dos dimensiones

Existen 3 casos de particularización:

- Tensión plana
- Deformación plana
- Caso axisimétrico

Tensión y deformación plana se conocen como los **casos de elasticidad plana**. wikipedia/elasticidad_plana.

Particularización de tres a dos dimensiones

Existen 3 casos de particularización:

- Tensión plana
- Deformación plana
- Caso axisimétrico

Tensión y deformación plana se conocen como los **casos de elasticidad plana**. wikipedia/elasticidad_plana.

Particularización de tres a dos dimensiones

Existen 3 casos de particularización:

- Tensión plana
- Deformación plana
- Caso axisimétrico

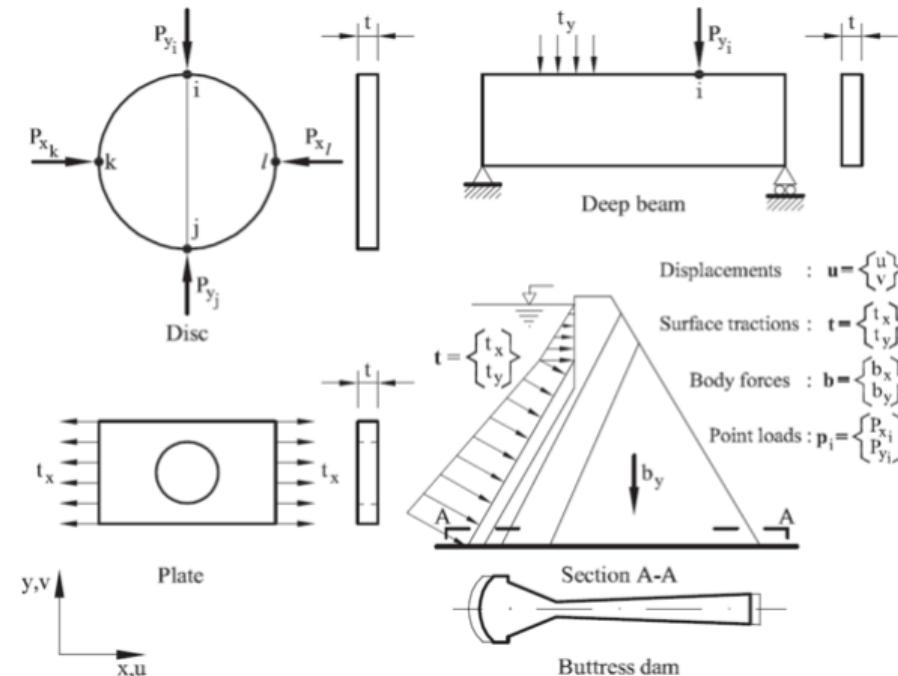
Tensión y deformación plana se conocen como los **casos de elasticidad plana**. wikipedia/elasticidad_plana.

Derrotero

- 4.9. Particularización de tres a dos dimensiones
 - 4.9.1. Tensión plana
 - 4.9.2. Deformación plana
 - 4.9.3. Relación entre los esfuerzos principales obtenidos en el análisis bidimensional y tridimensional
 - Ejemplos

Tensión plana

En elementos estructurales en los cuales **una dirección es muy pequeña comparada con las otras dos**, es decir, cuando un elemento es muy delgado.



Tensión plana

Supondremos que:

- El elemento no tiene cargas aplicadas en la dirección z ni sobre la superficie ortogonal al eje z .
- Las cargas están aplicadas en el contorno del cuerpo, ortogonal al eje z , distribuidas uniformemente en su espesor.

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Existe cuando uno de los tres esfuerzos principales ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) es cero, usualmente en elementos delgados.

Tensión plana

Supondremos que:

- El elemento no tiene cargas aplicadas en la dirección z ni sobre la superficie ortogonal al eje z .
- Las cargas están aplicadas en el contorno del cuerpo, ortogonal al eje z , distribuidas uniformemente en su espesor.

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Existe cuando uno de los tres esfuerzos principales ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) es cero, usualmente en elementos delgados.

Tensión plana

Supondremos que:

- El elemento no tiene cargas aplicadas en la dirección z ni sobre la superficie ortogonal al eje z .
- Las cargas están aplicadas en el contorno del cuerpo, ortogonal al eje z , distribuidas uniformemente en su espesor.

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Existe cuando uno de los tres esfuerzos principales ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) es cero, usualmente en elementos delgados.

Tensión plana

Supondremos que:

- El elemento no tiene cargas aplicadas en la dirección z ni sobre la superficie ortogonal al eje z .
- Las cargas están aplicadas en el contorno del cuerpo, ortogonal al eje z , distribuidas uniformemente en su espesor.

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Existe cuando uno de los tres esfuerzos principales ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) es cero, usualmente en elementos delgados.

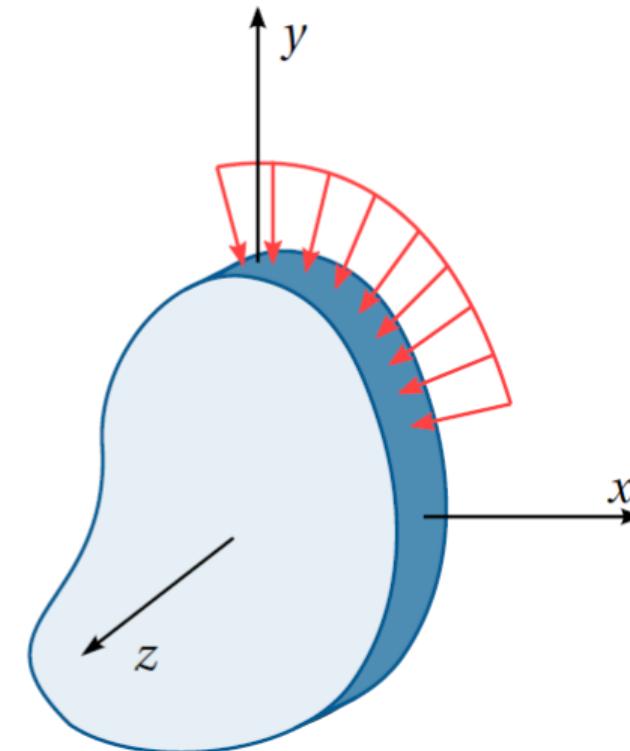
Tensión plana

tensión plana

$$\sigma_z = 0$$

$$\tau_{xz} = 0$$

$$\tau_{yz} = 0$$



Caso isótropo

Tensión plana

- Deformaciones longitudinales

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y))$$

- Deformaciones angulares

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

Caso isótropo

Tensión plana

Aplicando las condiciones de tensión plana:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = 0$$

$$\gamma_{xz} = 0$$

Caso isótropo

Tensión plana

Ley de Hooke generalizada para un material isótropo, tensión plana

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x)$$

$$\sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = 0$$

$$\tau_{yz} = 0$$

Caso isótropo

Tensión plana

Representación matricial

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Las matrices de esfuerzos y deformaciones simplificadas al caso de tensión plana:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\det \underline{\underline{\sigma}} = 0} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Caso isótropo

Tensión plana

Representación matricial

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Las matrices de esfuerzos y deformaciones simplificadas al caso de tensión plana:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\det \underline{\underline{\sigma}} = 0} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Caso ortotropo

Tensión plana

Ley de Hooke generalizada para un material ortotropo TP

$$\sigma_x = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}(\varepsilon_x + \nu_{yx}\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}(\varepsilon_y + \nu_{xy}\varepsilon_x)$$

$$\sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = G_{xy}\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = 0$$

$$\tau_{yz} = 0$$

Caso ortótropo

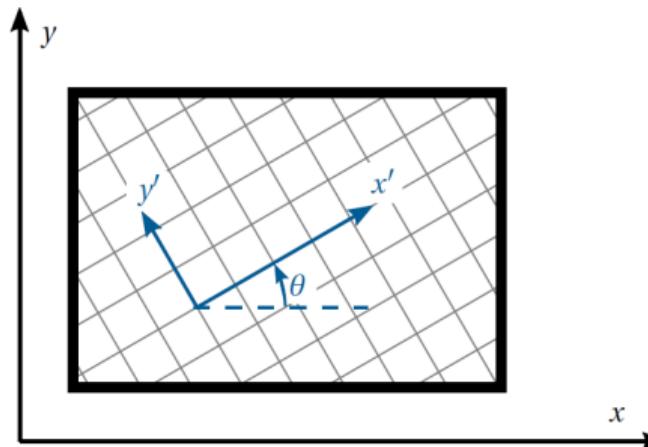
Tensión plana

Representación matricial

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \begin{pmatrix} E_x & E_x\nu_{yx} & 0 \\ E_y\nu_{xy} & E_y & 0 \\ 0 & (1 - \nu_{xy}\nu_{yx})G_{xy} & \gamma_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Caso ortótropo

Tensión plana



Si las direcciones de los ejes de ortotropía x' , y' están inclinadas un ángulo θ con respecto a los ejes globales x , y de la estructura, la matriz constitutiva para el material ortótropo en coordenadas globales D_{TP} es:

$$D_{TP} = T_{\epsilon,2D}^T D'_{TP} T_{\epsilon,2D}$$

Recuerde:

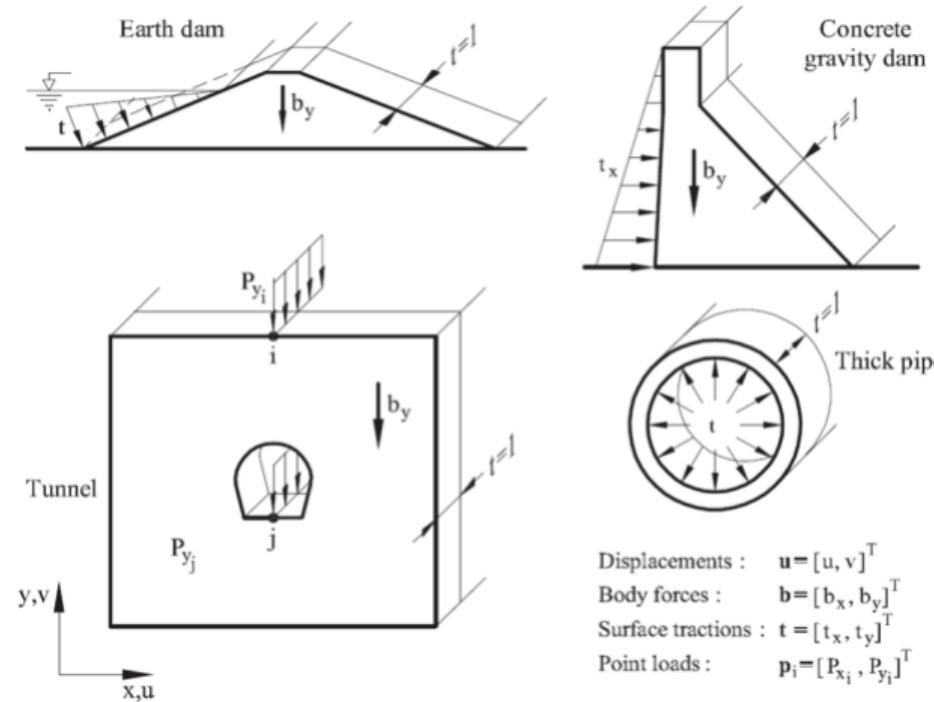
$$\sigma = \underbrace{T_{\epsilon}^T D' T_{\epsilon}}_D \epsilon$$

Derrotero

- 4.9. Particularización de tres a dos dimensiones
 - 4.9.1. Tensión plana
 - 4.9.2. Deformación plana
 - 4.9.3. Relación entre los esfuerzos principales obtenidos en el análisis bidimensional y tridimensional
 - Ejemplos

Deformación plana

En elementos estructurales en los cuales **una dimensión es mucho más grande que las otras dos**.



Deformación plana

Supondremos que:

- Dadas las condiciones geométricas, la deformación en la dirección de la dimensión más larga no se puede efectuar.
- El elemento es cargado mediante fuerzas perpendiculares a la dirección longitudinal: independientes de z .
- Basta con analizar una rebanada la cual se supone confinada entre dos planos rígidos y lisos, de modo que el desplazamiento en la dirección axial no sea posible.

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

Deformación plana

Supondremos que:

- Dadas las condiciones geométricas, la deformación en la dirección de la dimensión más larga no se puede efectuar.
- El elemento es cargado mediante fuerzas perpendiculares a la dirección longitudinal: independientes de z .
- Basta con analizar una rebanada la cual se supone confinada entre dos planos rígidos y lisos, de modo que el desplazamiento en la dirección axial no sea posible.

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

Deformación plana

Supondremos que:

- Dadas las condiciones geométricas, la deformación en la dirección de la dimensión más larga no se puede efectuar.
- El elemento es cargado mediante fuerzas perpendiculares a la dirección longitudinal: independientes de z .
- Basta con analizar una rebanada la cual se supone confinada entre dos planos rígidos y lisos, de modo que el desplazamiento en la dirección axial no sea posible.

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

Deformación plana

Supondremos que:

- Dadas las condiciones geométricas, la deformación en la dirección de la dimensión más larga no se puede efectuar.
- El elemento es cargado mediante fuerzas perpendiculares a la dirección longitudinal: independientes de z .
- Basta con analizar una rebanada la cual se supone confinada entre dos planos rígidos y lisos, de modo que el desplazamiento en la dirección axial no sea posible.

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

Deformación plana

Supondremos que:

- Dadas las condiciones geométricas, la deformación en la dirección de la dimensión más larga no se puede efectuar.
- El elemento es cargado mediante fuerzas perpendiculares a la dirección longitudinal: independientes de z .
- Basta con analizar una rebanada la cual se supone confinada entre dos planos rígidos y lisos, de modo que el desplazamiento en la dirección axial no sea posible.

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

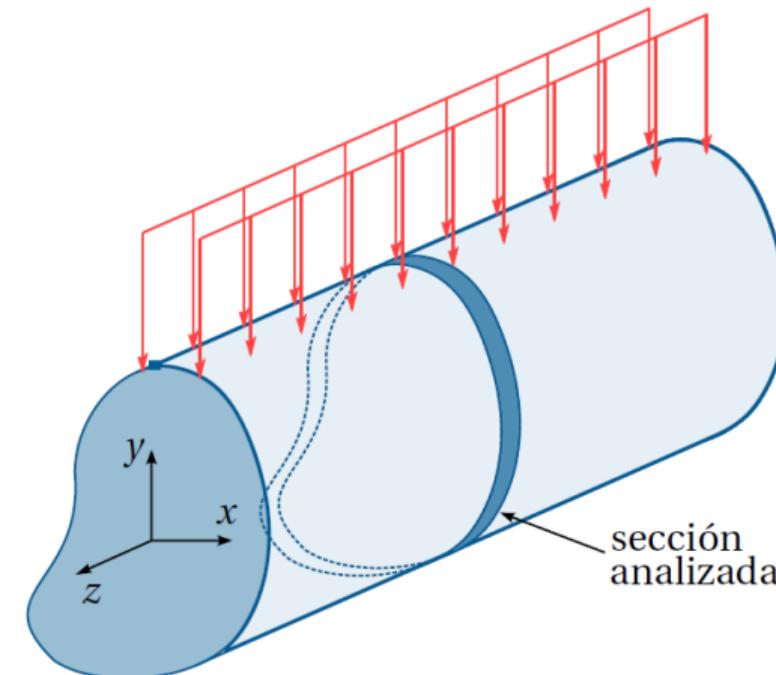
Deformación plana

deformación plana

$$\varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{xz} = 0$$

$$\gamma_{yz} = 0$$



Caso isótropo

Deformación plana

- Deformaciones longitudinales

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y))$$

- Deformaciones angulares

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

Caso isótropo

Deformación plana

Aplicando las condiciones de deformación plana:

$$\varepsilon_x = \frac{1 + \nu}{E} ((1 - \nu)\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1 + \nu}{E} ((1 - \nu)\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$$\varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = 0$$

$$\gamma_{xz} = 0$$

Caso isótropo

Deformación plana

Ley de Hooke generalizada para un material isótropo, deformación plana

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}((1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y)$$

$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = 0$$

$$\tau_{yz} = 0$$

Caso isótropo

Deformación plana

Representación matricial

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Las matrices de esfuerzos y deformaciones simplificadas al caso de deformación plana:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}}_{\det \underline{\underline{\varepsilon}} = 0}$$

Caso isótropo

Deformación plana

Representación matricial

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Las matrices de esfuerzos y deformaciones simplificadas al caso de deformación plana:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}}_{\det \underline{\underline{\varepsilon}} = 0}$$

Derrotero

- 4.9. Particularización de tres a dos dimensiones
 - 4.9.1. Tensión plana
 - 4.9.2. Deformación plana
- 4.9.3. Relación entre los esfuerzos principales obtenidos en el análisis bidimensional y tridimensional
- Ejemplos

Relación entre los esfuerzos principales obtenidos en el análisis bidimensional y tridimensional

Deformación plana

$$\sigma_1 = \max((\sigma_1)_{xy}, (\sigma_2)_{xy}, \nu(\sigma_x + \sigma_y))$$

$$\sigma_2 = \text{mediana}((\sigma_1)_{xy}, (\sigma_2)_{xy}, \nu(\sigma_x + \sigma_y))$$

$$\sigma_3 = \min((\sigma_1)_{xy}, (\sigma_2)_{xy}, \nu(\sigma_x + \sigma_y))$$

$$\tau_{\max} = \max \left(\frac{|(\sigma_1)_{xy} - \nu(\sigma_x + \sigma_y)|}{2}, \frac{|(\sigma_2)_{xy} - \nu(\sigma_x + \sigma_y)|}{2}, \frac{|(\sigma_1)_{xy} - (\sigma_2)_{xy}|}{2} \right)$$

Relación entre los esfuerzos principales obtenidos en el análisis bidimensional y tridimensional

Tensión plana

$$\sigma_1 = \max((\sigma_1)_{xy}, (\sigma_2)_{xy}, 0)$$

$$\sigma_2 = \text{mediana}((\sigma_1)_{xy}, (\sigma_2)_{xy}, 0)$$

$$\sigma_3 = \min((\sigma_1)_{xy}, (\sigma_2)_{xy}, 0)$$

$$\tau_{\max} = \max \left(\frac{|(\sigma_1)_{xy}|}{2}, \frac{|(\sigma_2)_{xy}|}{2}, \frac{|(\sigma_1)_{xy} - (\sigma_2)_{xy}|}{2} \right)$$

Derrotero

- 4.9. Particularización de tres a dos dimensiones
 - 4.9.1. Tensión plana
 - 4.9.2. Deformación plana
 - 4.9.3. Relación entre los esfuerzos principales obtenidos en el análisis bidimensional y tridimensional
- Ejemplos

Ejemplo 2.9.4

Ejemplo: esfuerzos y direcciones principales 2D

Consideré un punto sujeto a los esfuerzos $\sigma_x = -1\text{Pa}$, $\sigma_y = 2\text{Pa}$ y $\tau_{xy} = -3\text{Pa}$; encuentre los esfuerzos principales (y su dirección) para el punto en consideración.

- Código: [02_09_04_ejemplo.ipynb](#)

Ejemplo 4.9.3

Ejemplo: esfuerzos y direcciones 3D

Solucionar el Ejemplo 2.9.4 considerando que el sólido es tridimensional. Aplicar simplificaciones de 3D a 2D.

- **Código:** [04_08_03_ejemplo_DP.ipynb](#)
- **Código:** [04_08_03_ejemplo_TP.ipynb](#)

Derrotero

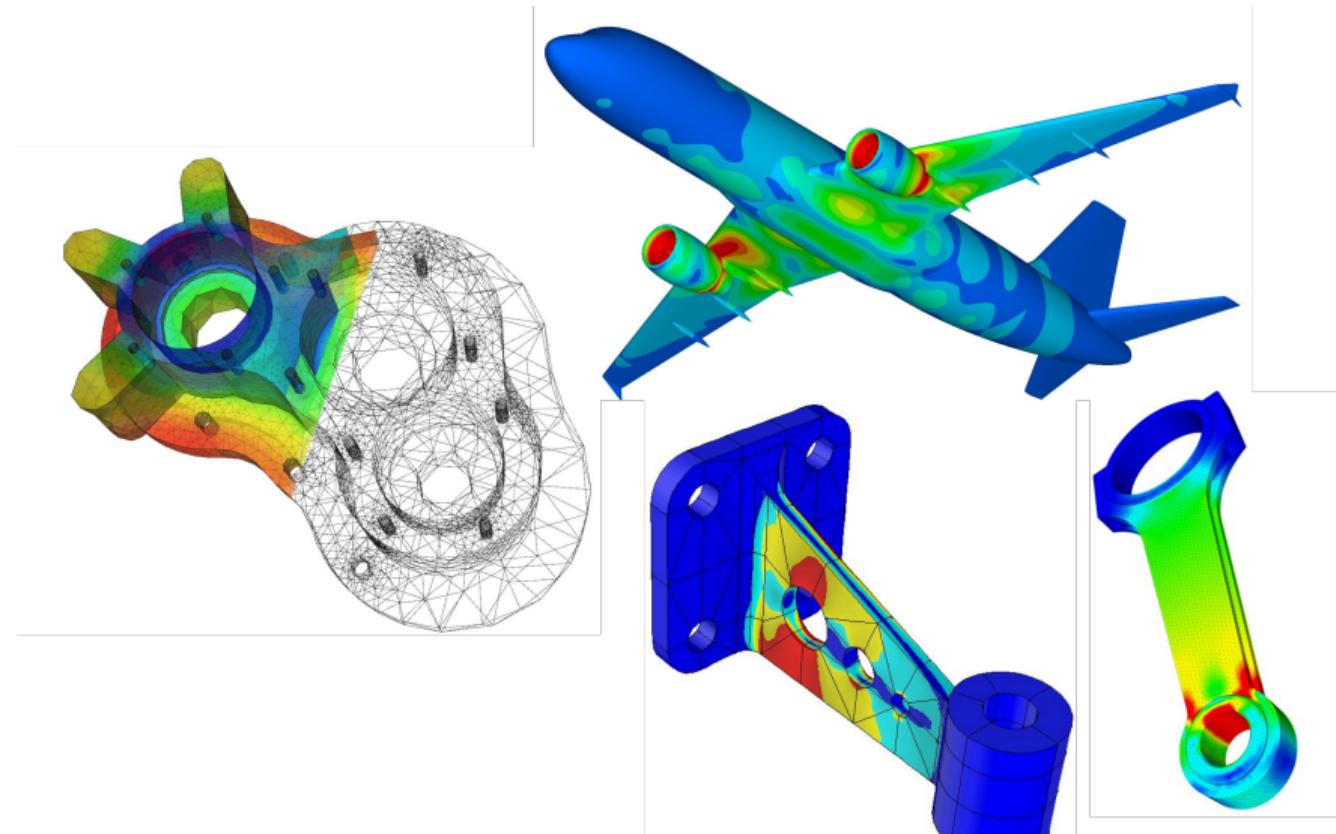
- 4.9. Particularización de tres a dos dimensiones
 - 4.9.1. Tensión plana
 - 4.9.2. Deformación plana
 - 4.9.3. Relación entre los esfuerzos principales obtenidos en el análisis bidimensional y tridimensional
 - Ejemplos
- 4.10. Interpretación de gráficos de esfuerzos y deformaciones
 - Contexto
 - Análisis de una viga
 - 4.10.1. Interpretación de los gráficos de σ_x , σ_y y τ_{xy}
 - 4.10.4. Relación de los diagramas de colores de una viga con sus diagramas de cortante y momento
 - 4.10.2. Interpretación de los gráficos de ε_x , ε_y y γ_{xy}
 - 4.10.3. Interpretación de los gráficos de esfuerzos principales y cortante máximo
 - 4.10.5. Disposición de los flejes si la viga estuviera hecha con concreto reforzado
- 4.11. Cálculo de las trayectorias de esfuerzos principales
- 4.12. Modificación de la ley de Hooke para tener en cuenta los efectos térmicos en el caso de materiales isótropos

Derrotero

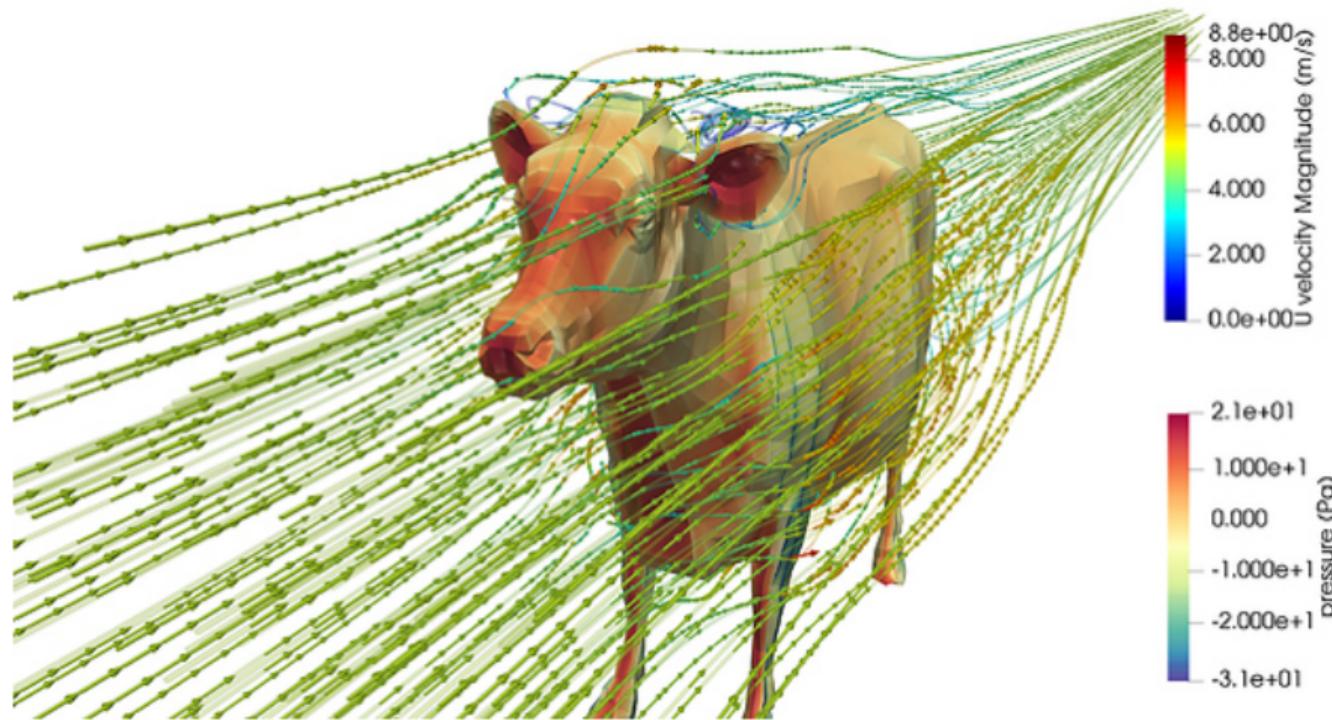
- 4.10. Interpretación de gráficos de esfuerzos y deformaciones

- Contexto
- Análisis de una viga
- 4.10.1. Interpretación de los gráficos de σ_x , σ_y y τ_{xy}
- 4.10.4. Relación de los diagramas de colores de una viga con sus diagramas de cortante y momento
- 4.10.2. Interpretación de los gráficos de ε_x , ε_y y γ_{xy}
- 4.10.3. Interpretación de los gráficos de esfuerzos principales y cortante máximo
- 4.10.5. Disposición de los flejes si la viga estuviera hecha con concreto reforzado

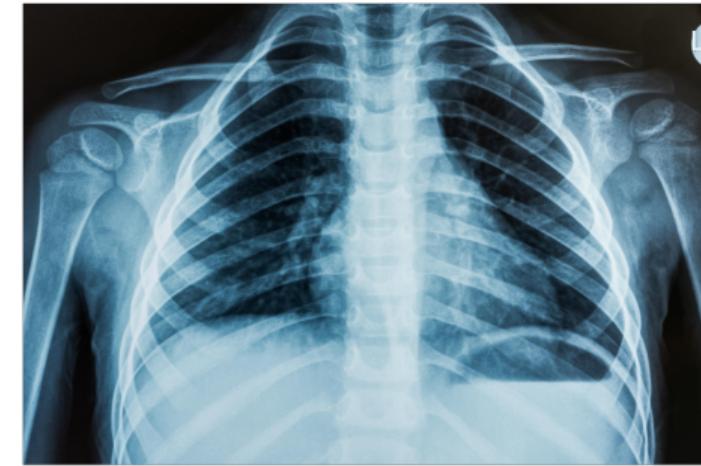
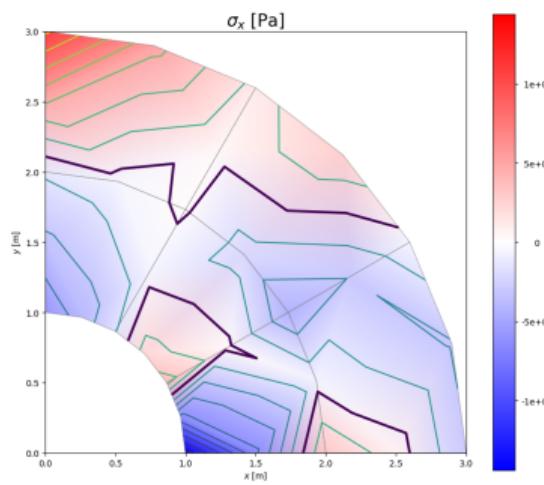
Resultados del software de EF



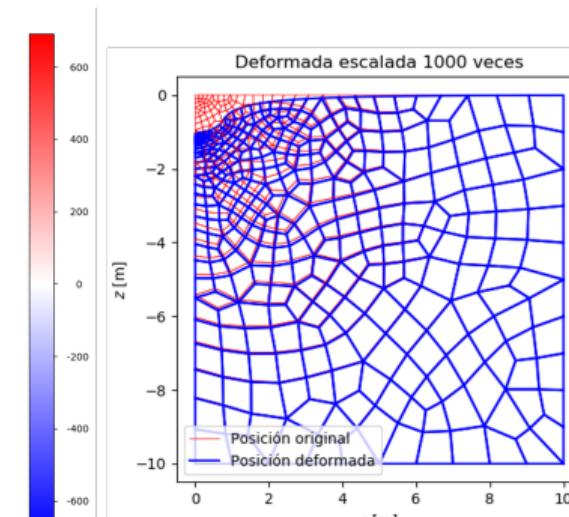
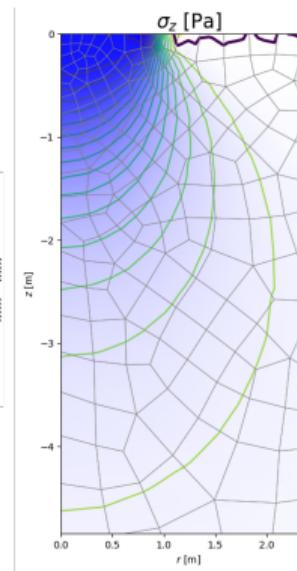
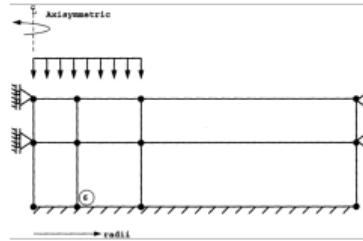
Modelos poco comunes



Los gráficos son radiografías de las estructuras



¿Cómo relaciono esfuerzos y deformaciones



Derrotero

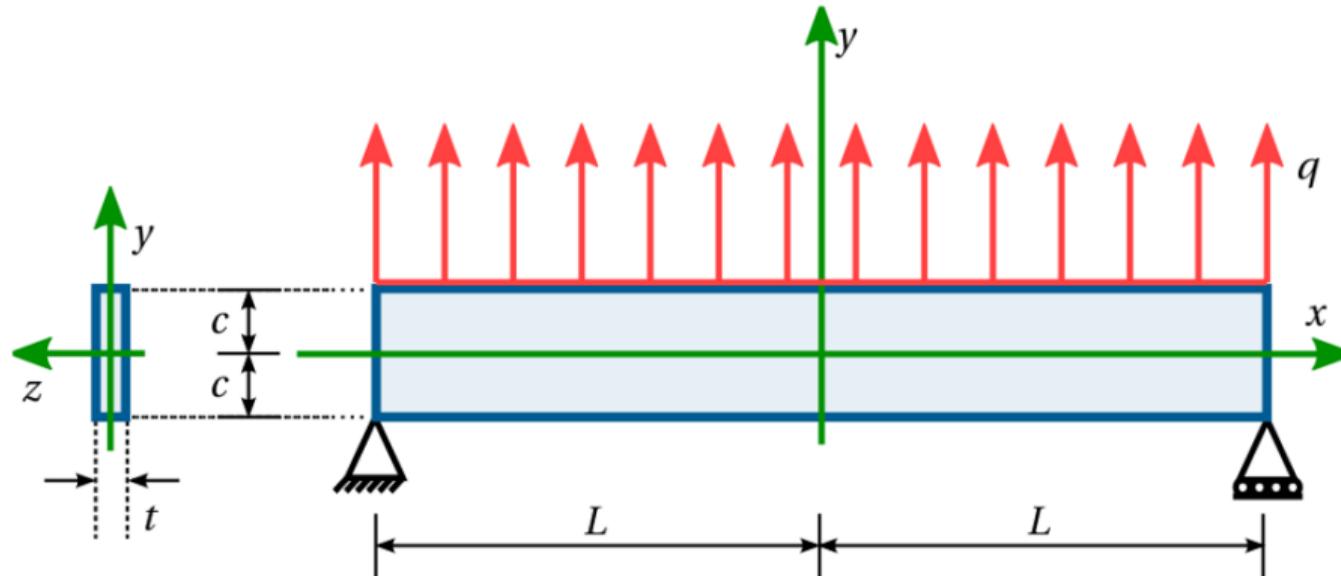
- 4.10. Interpretación de gráficos de esfuerzos y deformaciones

- Contexto

- Análisis de una viga

- 4.10.1. Interpretación de los gráficos de σ_x , σ_y y τ_{xy}
 - 4.10.4. Relación de los diagramas de colores de una viga con sus diagramas de cortante y momento
 - 4.10.2. Interpretación de los gráficos de ε_x , ε_y y γ_{xy}
 - 4.10.3. Interpretación de los gráficos de esfuerzos principales y cortante máximo
 - 4.10.5. Disposición de los flejes si la viga estuviera hecha con concreto reforzado

El problema



Formulación

- Condiciones de frontera:

$$\tau_{xy}(x, y = \pm c, z) = 0 \quad (\tau_{xy} = 0 \text{ en el borde superior e inferior de la viga})$$

$$\sigma_y(x, y = -c, z) = 0 \quad (\text{el borde inferior no soporta cargas})$$

$$\sigma_y(x, y = +c, z) = \frac{q}{t} \quad (\text{el borde superior soporta la carga distribuida})$$

- Fuerza cortante V y su momento flector M en los extremos:

$$V(\pm L) = - \int_{-c}^c \int_0^t \tau_{xy}(\pm L, y, z) dz dy = \pm ql$$

$$M(\pm L) = - \int_{-c}^c \int_0^t \sigma_x(\pm L, y, z) dz dy = 0$$

- Fuerza axial en toda su longitud:

$$f_{axial}(x) = \int_{-c}^c \int_0^t \sigma_x(x, y, z) dz dy = 0$$

Formulación

- Esfuerzos al interior de la viga

$$\sigma_x(x, y, z) = -\frac{q}{2I} \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 + \frac{2}{5} c^2 y - L^2 y \right)$$

$$\sigma_y(x, y, z) = -\frac{q}{2I} \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y - \frac{2}{3} c^3 \right)$$

$$\sigma_z(x, y, z) = 0$$

$$\tau_{xy}(x, y, z) = -\frac{q}{2I} (c^2 - y^2) x$$

$$\tau_{xz}(x, y, z) = 0$$

$$\tau_{yz}(x, y, z) = 0$$

Análisis

- Código: [04_09_graficos_colores.ipynb](#)

Derrotero

- 4.10. Interpretación de gráficos de esfuerzos y deformaciones

- Contexto
- Análisis de una viga

- 4.10.1. Interpretación de los gráficos de σ_x , σ_y y τ_{xy}

- 4.10.4. Relación de los diagramas de colores de una viga con sus diagramas de cortante y momento
- 4.10.2. Interpretación de los gráficos de ε_x , ε_y y γ_{xy}
- 4.10.3. Interpretación de los gráficos de esfuerzos principales y cortante máximo
- 4.10.5. Disposición de los flejes si la viga estuviera hecha con concreto reforzado

Interpretación de los gráficos de σ_x , σ_y y τ_{xy}

Convención de signos en vigas

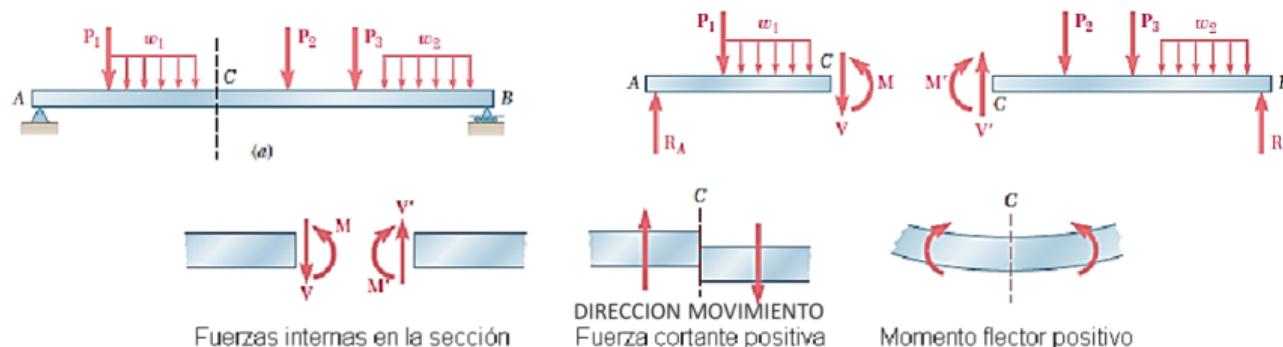


Figure: *Curso de Estática. (Herrera, 2018)*
(Hibbeler R.C 2012 Structural Analysis)

Convención de signos en vigas

Significado del signo de la fuerza cortante

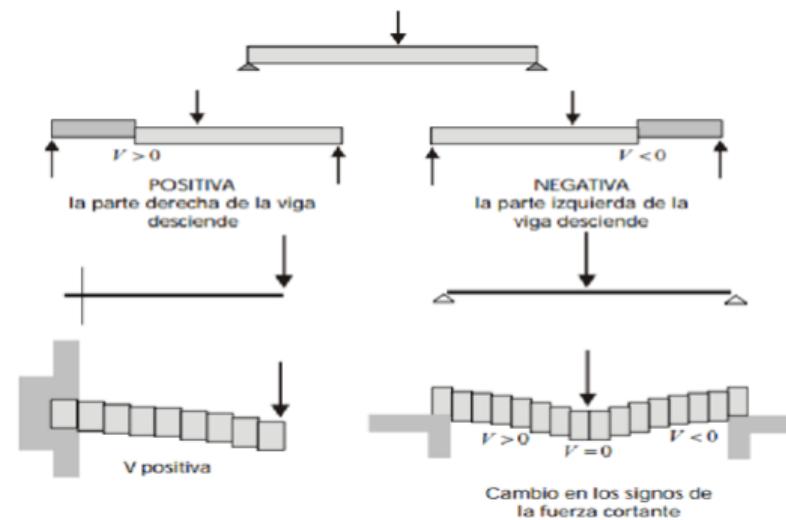


Figure: *Curso de Estática. (Herrera, 2018)*
(Hibbeler R.C 2012 Structural Analysis)

Convención de signos en vigas

Significado del signo del momento flector

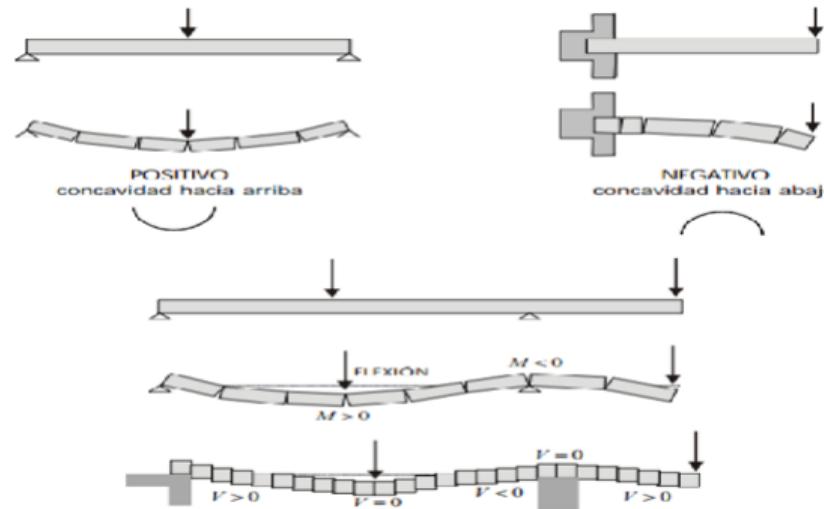
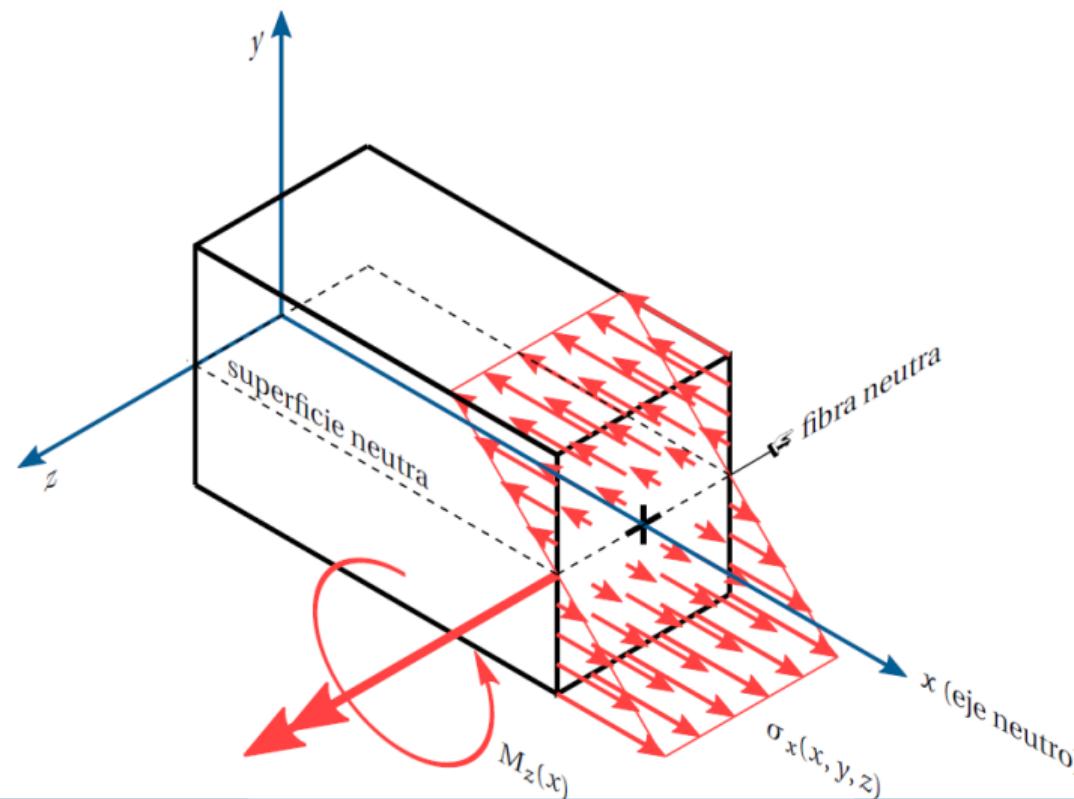


Figure: *Curso de Estática. (Herrera, 2018)*
(Hibbeler R.C 2012 Structural Analysis)

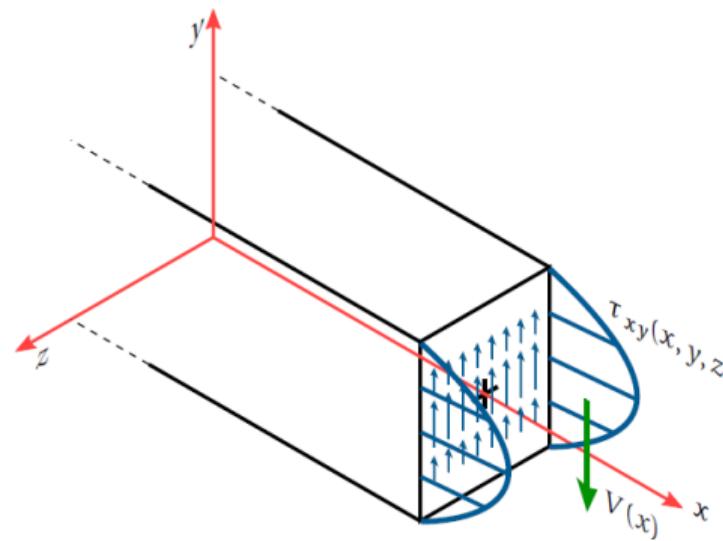
Distribuciones en la sección transversal

Momento flector



Distribuciones en la sección transversal

Fuerza cortante



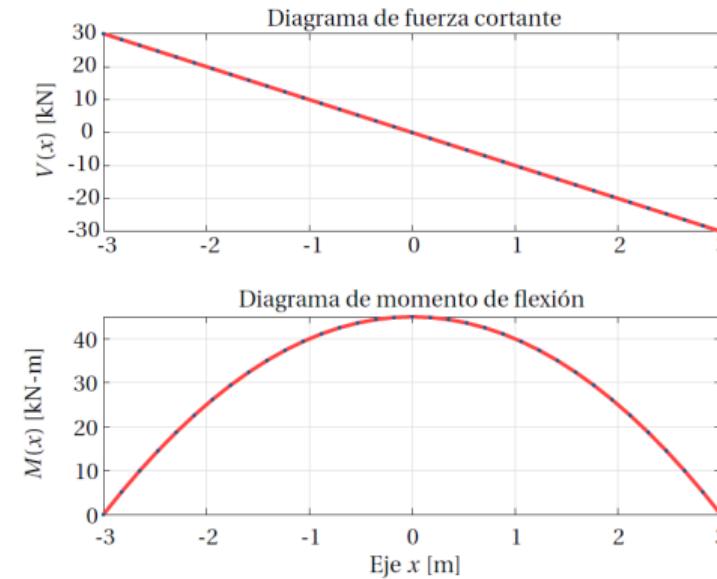
Derrotero

- **4.10. Interpretación de gráficos de esfuerzos y deformaciones**

- Contexto
- Análisis de una viga
- 4.10.1. Interpretación de los gráficos de σ_x , σ_y y τ_{xy}
- **4.10.4. Relación de los diagramas de colores de una viga con sus diagramas de cortante y momento**
- 4.10.2. Interpretación de los gráficos de ε_x , ε_y y γ_{xy}
- 4.10.3. Interpretación de los gráficos de esfuerzos principales y cortante máximo
- 4.10.5. Disposición de los flejes si la viga estuviera hecha con concreto reforzado

Relación de los diagramas de colores de una viga con sus diagramas de cortante y momento

- Código: [04_09_04.ipynb](#)



Derrotero

- **4.10. Interpretación de gráficos de esfuerzos y deformaciones**

- Contexto
- Análisis de una viga
- 4.10.1. Interpretación de los gráficos de σ_x , σ_y y τ_{xy}
- 4.10.4. Relación de los diagramas de colores de una viga con sus diagramas de cortante y momento
- **4.10.2. Interpretación de los gráficos de ε_x , ε_y y γ_{xy}**
- 4.10.3. Interpretación de los gráficos de esfuerzos principales y cortante máximo
- 4.10.5. Disposición de los flejes si la viga estuviera hecha con concreto reforzado

Derrotero

- **4.10. Interpretación de gráficos de esfuerzos y deformaciones**

- Contexto
- Análisis de una viga
- 4.10.1. Interpretación de los gráficos de σ_x , σ_y y τ_{xy}
- 4.10.4. Relación de los diagramas de colores de una viga con sus diagramas de cortante y momento
- 4.10.2. Interpretación de los gráficos de ε_x , ε_y y γ_{xy}
- **4.10.3. Interpretación de los gráficos de esfuerzos principales y cortante máximo**
- 4.10.5. Disposición de los flejes si la viga estuviera hecha con concreto reforzado

Interpretación de los gráficos de esfuerzos principales y cortante máximo

Derrotero

- 4.10. Interpretación de gráficos de esfuerzos y deformaciones

- Contexto
- Análisis de una viga
- 4.10.1. Interpretación de los gráficos de σ_x , σ_y y τ_{xy}
- 4.10.4. Relación de los diagramas de colores de una viga con sus diagramas de cortante y momento
- 4.10.2. Interpretación de los gráficos de ε_x , ε_y y γ_{xy}
- 4.10.3. Interpretación de los gráficos de esfuerzos principales y cortante máximo
- 4.10.5. Disposición de los flejes si la viga estuviera hecha con concreto reforzado

Derrotero

- 4.9. Particularización de tres a dos dimensiones
 - 4.9.1. Tensión plana
 - 4.9.2. Deformación plana
 - 4.9.3. Relación entre los esfuerzos principales obtenidos en el análisis bidimensional y tridimensional
 - Ejemplos
- 4.10. Interpretación de gráficos de esfuerzos y deformaciones
 - Contexto
 - Análisis de una viga
 - 4.10.1. Interpretación de los gráficos de σ_x , σ_y y τ_{xy}
 - 4.10.4. Relación de los diagramas de colores de una viga con sus diagramas de cortante y momento
 - 4.10.2. Interpretación de los gráficos de ε_x , ε_y y γ_{xy}
 - 4.10.3. Interpretación de los gráficos de esfuerzos principales y cortante máximo
 - 4.10.5. Disposición de los flejes si la viga estuviera hecha con concreto reforzado
- **4.11. Cálculo de las trayectorias de esfuerzos principales**
- 4.12. Modificación de la ley de Hooke para tener en cuenta los efectos térmicos en el caso de materiales isótropos

Cálculo de las trayectorias de esfuerzos principales

Derrotero

- 4.9. Particularización de tres a dos dimensiones
 - 4.9.1. Tensión plana
 - 4.9.2. Deformación plana
 - 4.9.3. Relación entre los esfuerzos principales obtenidos en el análisis bidimensional y tridimensional
 - Ejemplos
- 4.10. Interpretación de gráficos de esfuerzos y deformaciones
 - Contexto
 - Análisis de una viga
 - 4.10.1. Interpretación de los gráficos de σ_x , σ_y y τ_{xy}
 - 4.10.4. Relación de los diagramas de colores de una viga con sus diagramas de cortante y momento
 - 4.10.2. Interpretación de los gráficos de ε_x , ε_y y γ_{xy}
 - 4.10.3. Interpretación de los gráficos de esfuerzos principales y cortante máximo
 - 4.10.5. Disposición de los flejes si la viga estuviera hecha con concreto reforzado
- 4.11. Cálculo de las trayectorias de esfuerzos principales
- 4.12. Modificación de la ley de Hooke para tener en cuenta los efectos térmicos en el caso de materiales isótropos

Modificación de la ley de Hooke para tener en cuenta los efectos térmicos en el caso de materiales isótropos

Estudio autónomo