

04. Relaciones entre los esfuerzos y deformaciones

secciones 4.1 a 4.7

Michael Heredia Pérez
mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil
Mecánica Tensorial

2023a





Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada ([Álvarez, 2022](#)).





Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales en las direcciones x, y, z
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortotropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortotropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias



Derrotero

- **Preámbulo**
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales en las direcciones x, y, z
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortotropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortotropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias



Observación

Las ecuaciones deducidas en las unidades 2 y 3 solo tienen en cuenta factores geométricos y se ha aplicado equilibrio estático, por lo tanto son independientes del material.



Observaciones

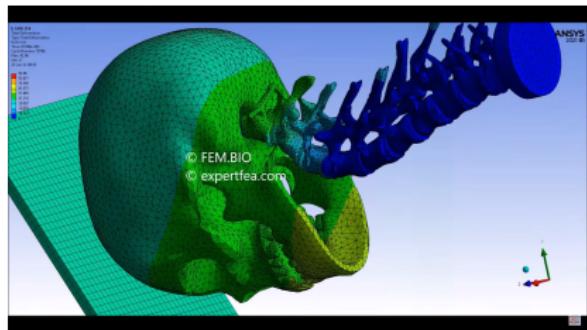
La deformación de un sólido con esfuerzos aplicados depende de:

- velocidad de aplicación de estos
- historia de carga
- temperatura
- propiedades del material

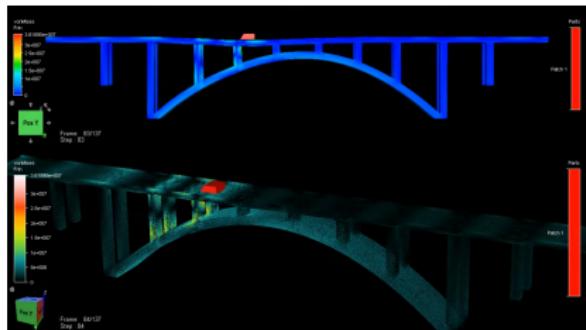


Modelos constitutivos

Modelos matemáticos que relacionan los esfuerzos y las deformaciones, teniendo en cuenta las variables anteriores. **velocidad, historia de carga, temperatura y propiedades del material**



Simulation of Compression Shock of Skull with Brain Missing Meninges - ANSYS Explicit Dynamics. [Video](#).



Linear Elasticity Problem using FEM (Bridge model). [Video](#).



Modelos constitutivos

Analizaremos el modelo constitutivo de los llamados sólidos con comportamiento “elástico lineal”, asumiendo que *la velocidad de aplicación de la carga en el ensayo de carga-desplazamiento, no tiene ningún efecto en dicha relación elástica lineal*.

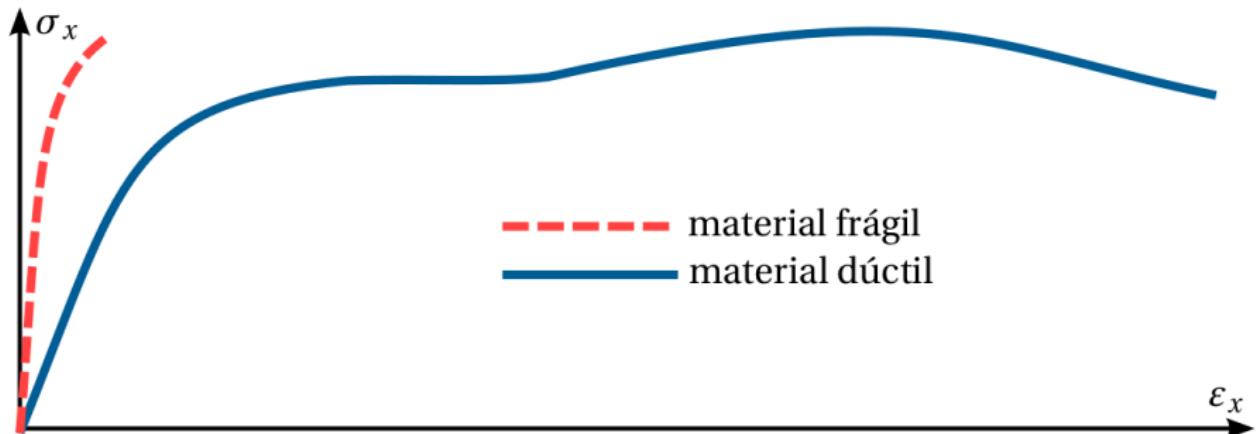


Derrotero

- Preámbulo
- **4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles**
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales en las direcciones x, y, z
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortotropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortotropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias



Materiales frágiles y materiales dúctiles





Curvas esfuerzo-deformación

AQUÍ VAN DOS FIGURAS



Curvas esfuerzo-deformación

AQUÍ VAN DOS FIGURAS

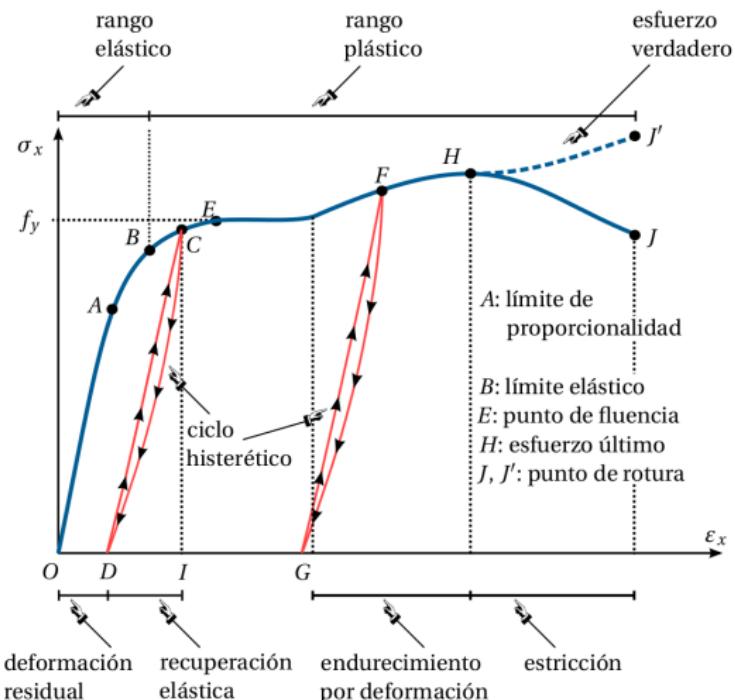


Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- **4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles**
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales en las direcciones x, y, z
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortotropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortotropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias



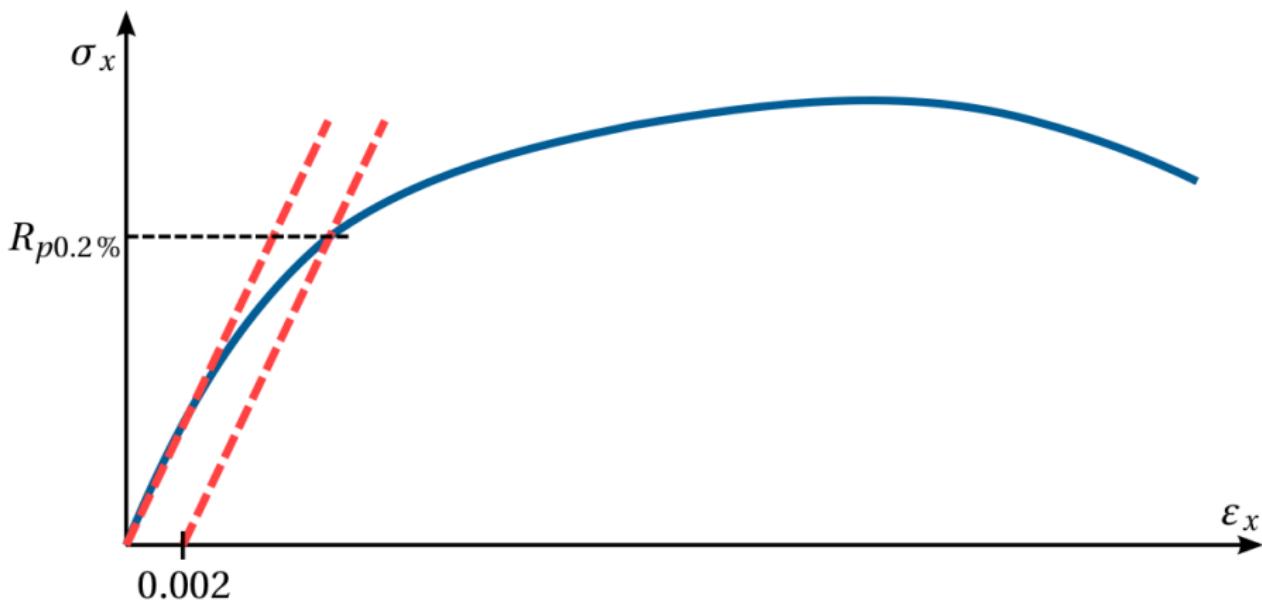
Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles





Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles

(Sin claridad del límite de fluencia)





Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles

(Sin claridad del límite de fluencia)

AQUÍ VA LA CURVA DE LA MADERA PLÁSTICA



Comportamiento del acero

AQUÍ VAN DOS CURVAS



Comportamiento del concreto reforzado

AQUÍ VAN DOS FIGURAS



Ciclo de histéresis

(*hysteresis loop*)

AQUÍ VA LA GRÁFICA DE HISTÉRESIS



Ciclo de histéresis

(*hysteresis loop*)

AQUÍ VA LA GRÁFICA DE HISTÉRESIS



Ciclo de histéresis

(*hysteresis loop*)

AQUÍ VA LA GRÁFICA DE HISTÉRESIS

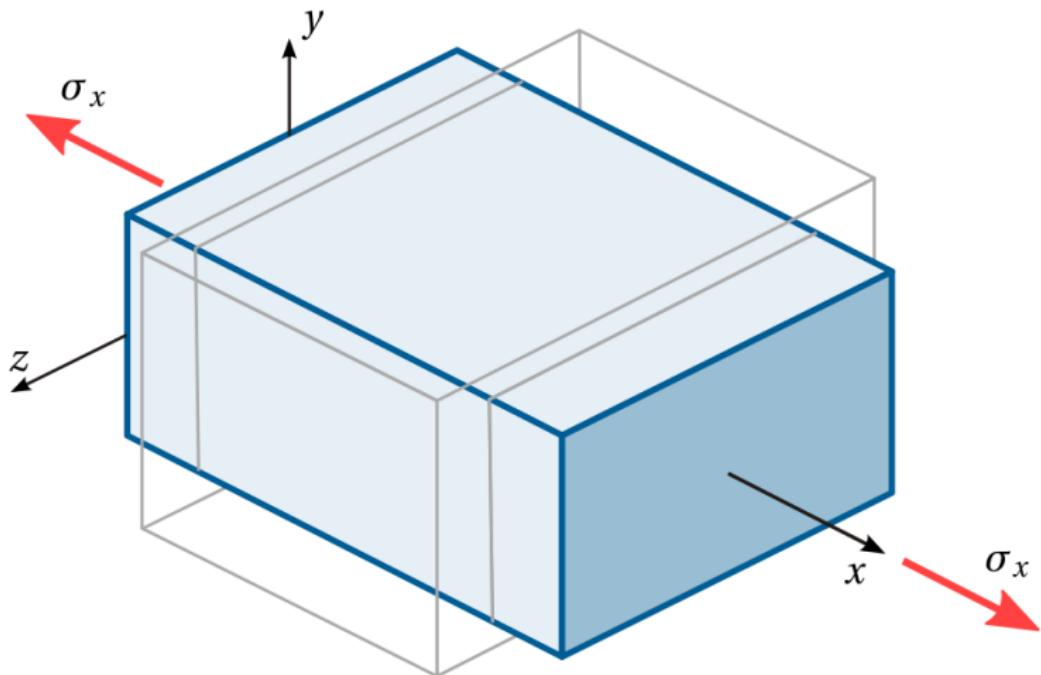


Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- **4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson**
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales en las direcciones x, y, z
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortotropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortotropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias



La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson





La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson

Tabla 4.1: Módulos de Young y coeficientes de Poisson para diferentes materiales.

Material	Módulo de Young (GPa) E	Coeficiente de Poisson ν
Acero	200	0.27 – 0.30
Arcilla saturada	4 – 20	0.40 – 0.499
Caucho	0.01 – 0.1	≈ 0.499
Concreto	21.5 – 39	0.20
Corcho	0.032	≈ 0
Material augético		negativo
Nanotubos de carbono	1000 – 5000	-0.2 – 0.06



Materiales augéticos

AQUÍ VAN VIDEO SDE AUGETICOS



Módulo de Young, E

Thomas Young (1773-1829), científico y egiptólogo

- Indica qué tan rígido es un material, es decir, cuál es la oposición que ofrece al ser estirado o contraído.
- Disminuye con el aumento de la temperatura.
- f_y también disminuye con el aumento de la temperatura.



Coeficiente de Poisson, ν

Siméon Denis Poisson (1781-1840), matemático y físico

- Expresa una relación entre las deformaciones transversales y longitudinales.
- Varían con las variaciones de la temperatura.
- f_y también disminuye con el aumento de la temperatura.



Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales en las direcciones x, y, z
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortótropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortótropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias



Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales en las direcciones x, y, z

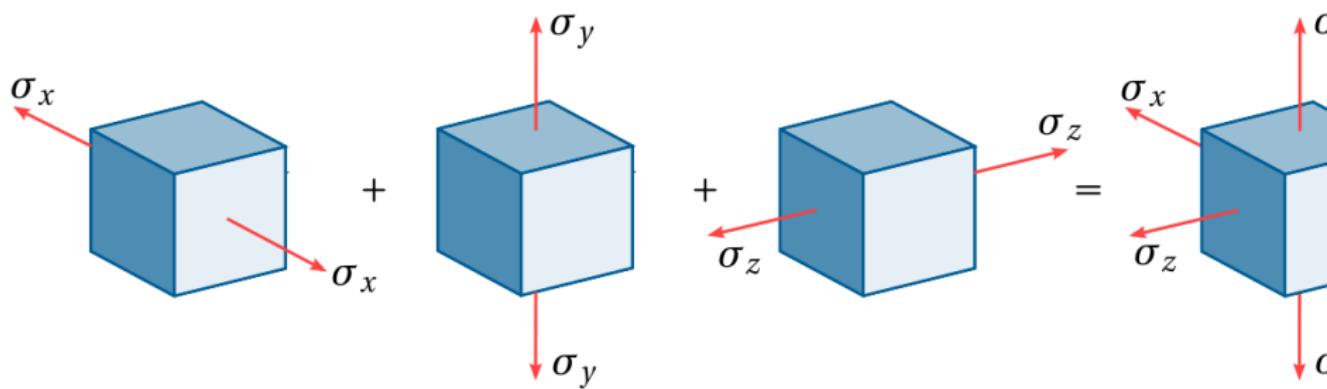
Tabla 4.2: Deformaciones longitudinales producidas por los diferentes esfuerzos. Dichas deformaciones longitudinales se suman en cada dirección (esto es, en cada fila) por virtud del principio de superposición, tal y como se indica en la Figura 4.5, para producir la deformación elástica total.

deformación longitudinal	producida por σ_x	producida por σ_y	producida por σ_z	producida conjuntamente por σ_x, σ_y y σ_z
ϵ_x	$\frac{\sigma_x}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_y}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_z}{E}$	$\frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$
ϵ_y	$-\nu \frac{\sigma_x}{E}$	$\frac{\sigma_y}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_z}{E}$	$\frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z))$
ϵ_z	$-\nu \frac{\sigma_x}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_y}{E}$	$\frac{\sigma_z}{E}$	$\frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))$



Principio de superposición

Dice que para un sistema lineal, la respuesta neta, para una posición y tiempo dados, causada por dos o más estímulos, es la suma de las respuestas que causan cada uno de los estímulos individualmente.

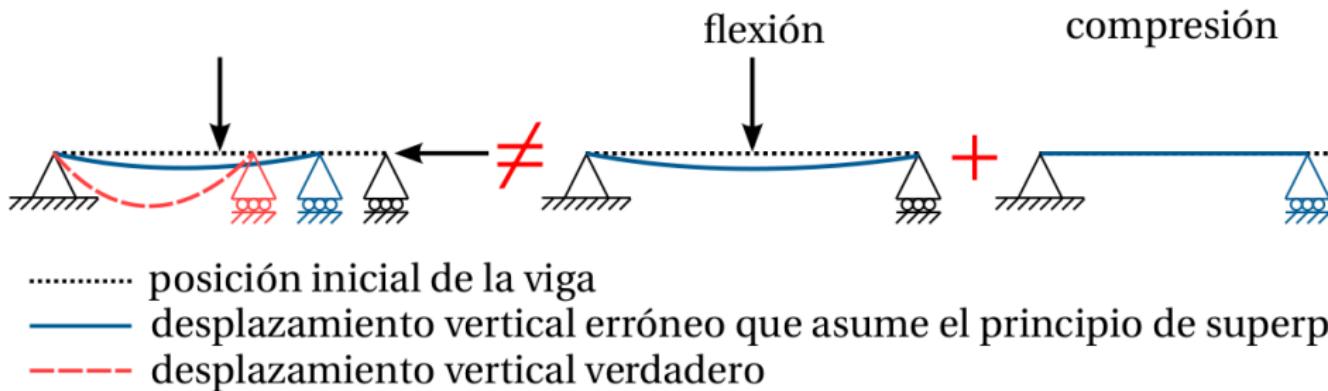




Principio de superposición

Legitimidad:

- Deformaciones y desplazamientos pequeños.
- Los desplazamientos no afectan sustancialmente la acción de las fuerzas externas.



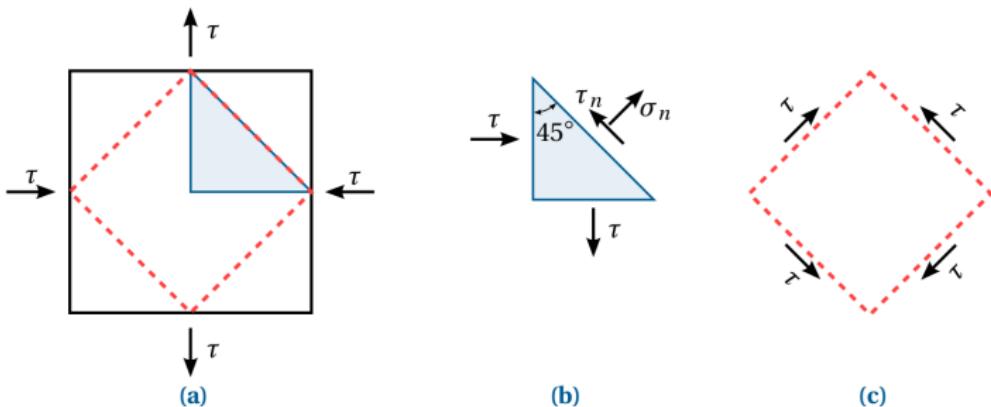


Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales en las direcciones x, y, z
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortótropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortótropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias

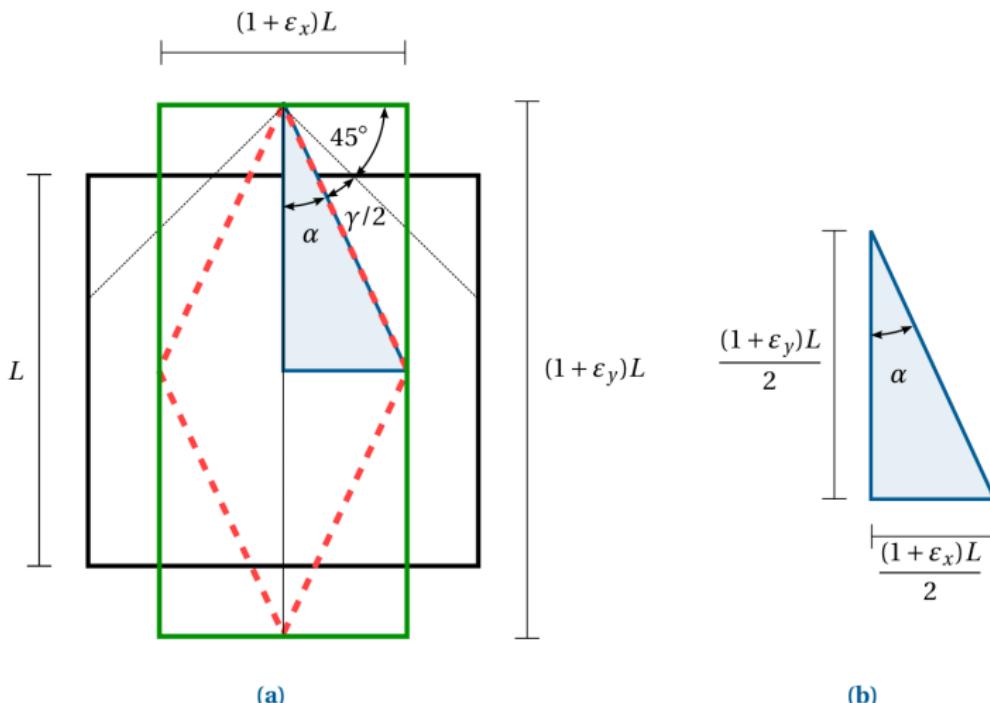


Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales





Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales





Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales

Buscamos obtener una constante llamada **Módulo de corte**, G .

$$G := \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Código

- 04_03_02.ipynb



Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales

Un elemento sólido que esté hecho de un material **elástico e isótropo**:

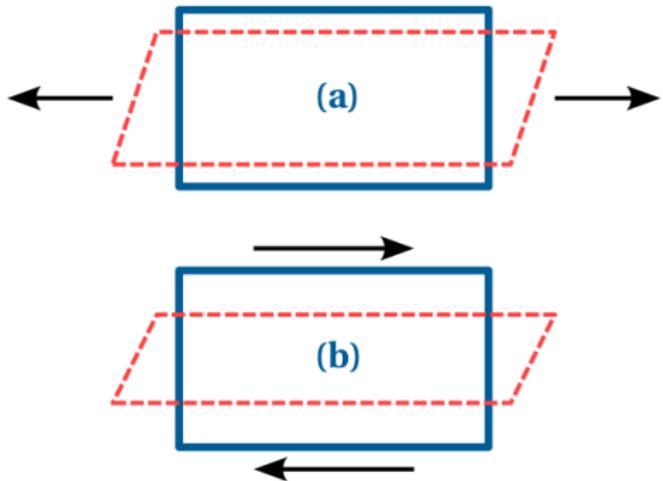
$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}.$$

Para un material con comportamiento lineal, elástico, e isótropo, las deformaciones longitudinales no están afectadas por las deformaciones angulares y no existe un efecto de Poisson para el esfuerzo cortante.

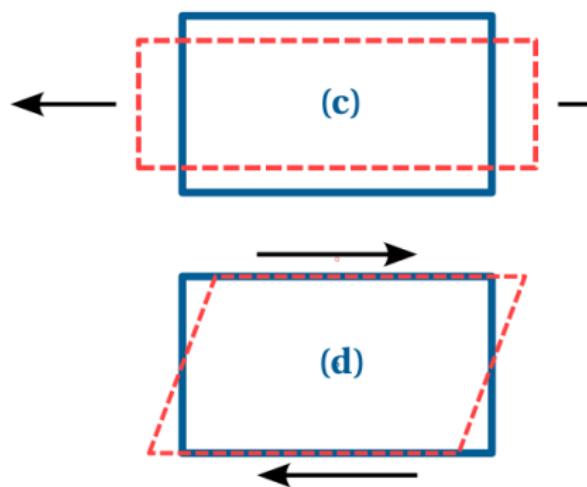


Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales

material anisótropo



material isótropo





Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales



Materiales isótropos, anisótropos y ortótropos

Isótropos

- Acero
- Aluminio
- Concreto

Anisótropos

- Maderas
- Tejido humano
- Fibras de carbono
- Placas metálicas roladas
- Estructura interna a partir de fibras alineadas o cuyo proceso de elaboración induce alteraciones en las estructuras atómicas (cristales).

Ortótropos

- Maderas
- Reforzados con fibras
- Algunos cristales
- Metales laminados



Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales en las direcciones x, y, z
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortótropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortótropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias



Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos

Isótropo: propiedades mecánicas iguales en todas las direcciones del análisis



Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales en las direcciones x, y, z
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortótropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortótropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias



Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos

Anisótropo: propiedades mecánicas diferentes según la dirección del análisis.



Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos



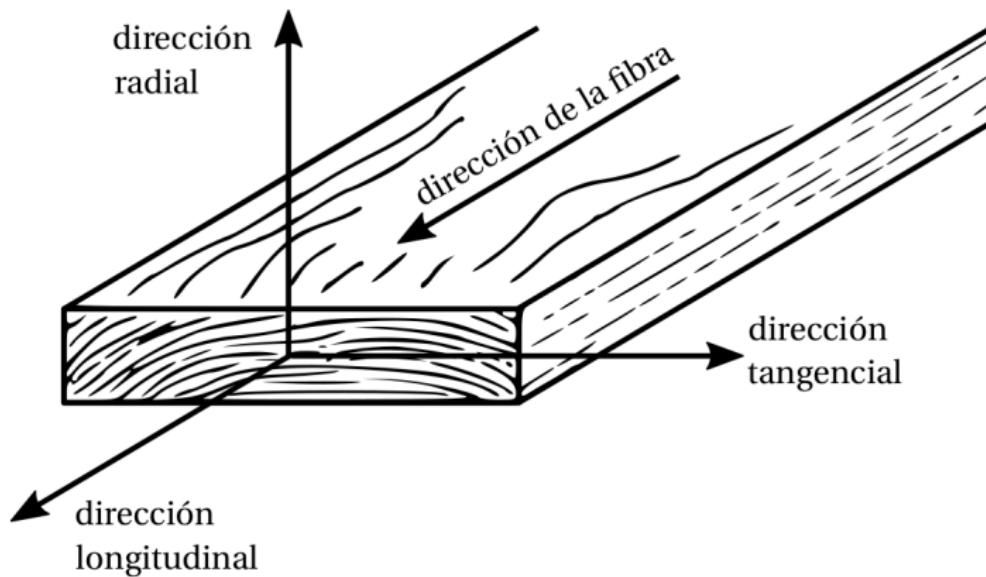
Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales en las direcciones x, y, z
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortotropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortotropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias



Ley de Hooke generalizada para materiales ortotropos

Ortótropo: propiedades mecánicas diferentes en tres direcciones mutuamente ortogonales alineadas con la estructura del material.





Ley de Hooke generalizada para materiales ortotropos

- Sin interacción entre ε y γ , ni entre σ y τ .
- En el caso tridimensional, requieren de 9 constantes elásticas:



Ley de Hooke generalizada para materiales ortótropos



Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales en las direcciones x, y, z
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortótropos
- **4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortótropos**
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias



Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortotropos

Estudio autónomo

Se concluye que ambas direcciones principales coinciden en el caso de tener un material elástico, lineal, isótropo y ortotropo.



Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales en las direcciones x, y, z
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortotropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortotropos
- **4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica**
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias



Cambios de volumen y dilatación cúbica



Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales en las direcciones x, y, z
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortotropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortotropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- **4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia**
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias



Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia



Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales en las direcciones x, y, z
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortotropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortotropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- **4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad**
- Referencias



Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad



Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
 - 4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales en las direcciones x, y, z
 - 4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales
 - 4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos
 - 4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos
 - 4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortotropos
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortotropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Referencias



Referencias

Álvarez, D. A. (2022). *Teoría de la elasticidad*, volume 1. Universidad Nacional de Colombia.