

# Criterios de falla para materiales dúctiles y frágiles

Michael Heredia Pérez  
[mherediap@unal.edu.co](mailto:mherediap@unal.edu.co)

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales  
Departamento de Ingeniería Civil  
Mecánica de Sólidos

2025a



## Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada.



## Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaedricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distorsión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

# Derrotero

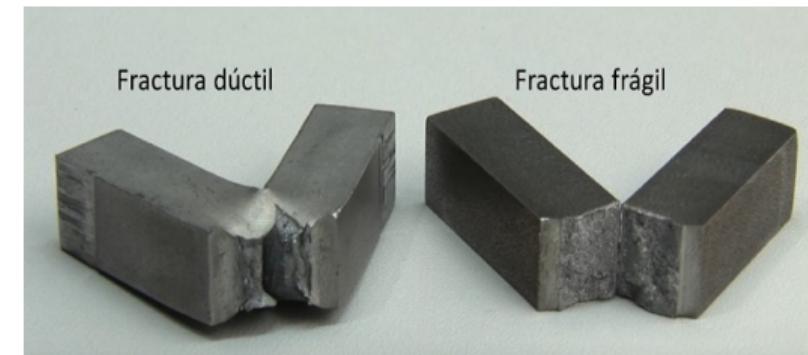
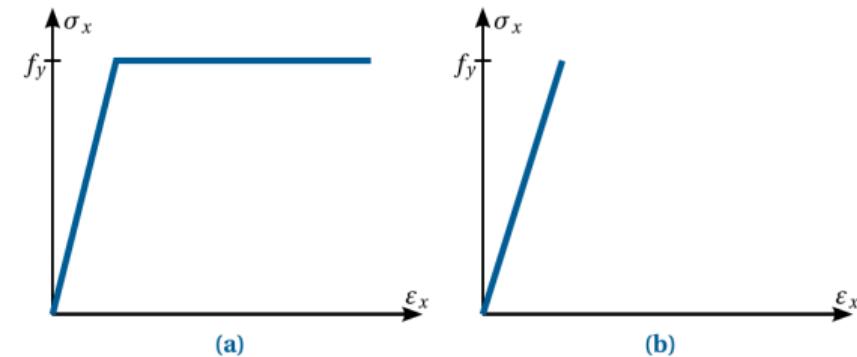
## ● Introducción

- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaédricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distorsión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

# Introducción

A tener en cuenta:

- Nos interesa conocer la combinación de esfuerzos que harán fallar un material.
- Esto dependerá el tipo de material y de la configuración de las cargas.
- Hay cientos de teorías de falla, y ninguna es óptima en todos los casos. La más básica es el caso de una barra de acero uniaxialmente cargada:  $\sigma_x \geq f_y$ .



## Introducción

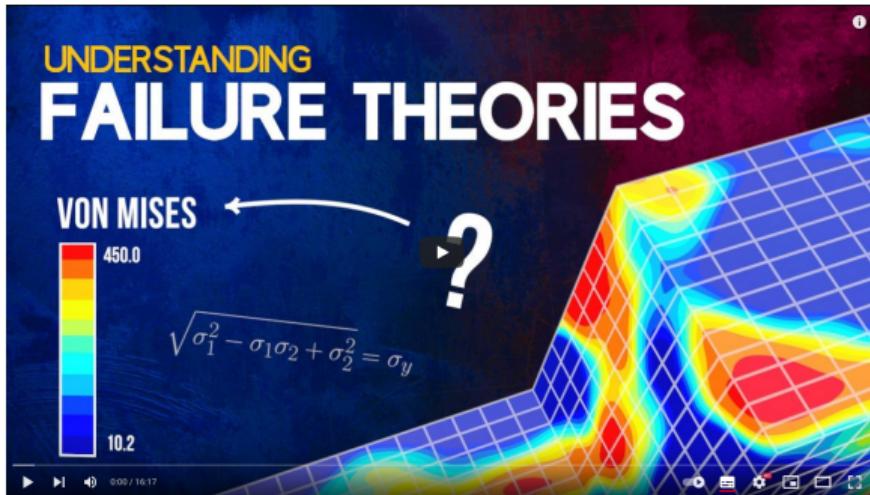


Figure: Video: *Understanding Failure Theories (Tresca, von Mises etc...)*

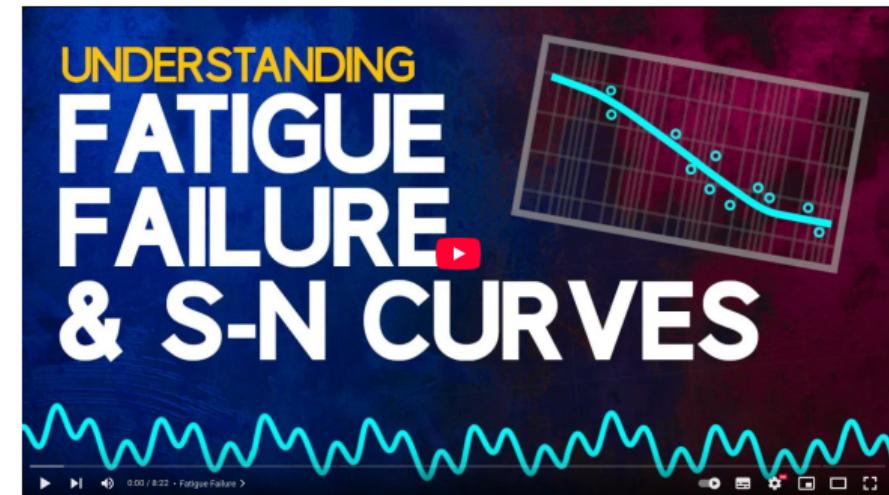


Figure: Video: *Understanding Fatigue Failure and S-N Curves*

# Derrotero

- Introducción
- **16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores**
- 16.2. Esfuerzos octaédricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distorsión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

# Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores

Repasando los invariantes de esfuerzos | Cálculo del círculo de Mohr tridimensional

Expandiendo el determinante  $\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_n \mathbf{I}) = 0$

$$\begin{aligned} & (\sigma_x - \sigma_n) [(\sigma_y - \sigma_n)(\sigma_z - \sigma_n) - \tau_{yz}^2] \\ & - \tau_{xy} [\tau_{xy}(\sigma_z - \sigma_n) - \tau_{yz}\tau_{xz}] \\ & + \tau_{xz} [\tau_{xy}\tau_{yz} - (\sigma_y - \sigma_n)\tau_{xz}] = 0; \end{aligned}$$

La ecuación característica:

$$-\sigma_n^3 + I_1\sigma_n^2 - I_2\sigma_n + I_3 = 0$$

De donde sacamos los **Invariantes de Esfuerzos**: Los invariantes son independientes de la base utilizada para describir el tensor.

$$\Theta := I_1 = \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})$$

$$I_2 = \frac{1}{2}((\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}))^2 - \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^2))$$

$$I_3 = \det(\underline{\underline{\sigma}})$$

Los invariantes son útiles cuando se necesita crear descripciones del comportamiento de los materiales, ya que, por ejemplo, un material isótropo no sabe qué sistema de coordenadas se ha usado para describir su comportamiento.

## Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores

Definimos dos esfuerzos nuevos que nos ayudarán a entender el comportamiento del tensor de esfuerzos tridimensional:

### Esfuerzo medio o hidrostático

$$\sigma_M := \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{I_1}{3}$$

### Esfuerzos desviadores

$$s_x := \sigma_x - \sigma_M$$

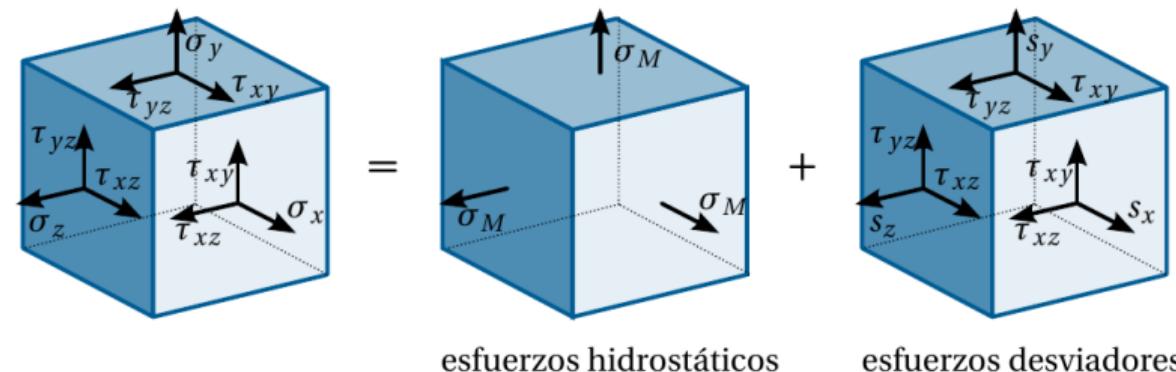
$$s_y := \sigma_y - \sigma_M$$

$$s_z := \sigma_z - \sigma_M$$

## Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores

El tensor de esfuerzos  $\underline{\underline{\sigma}}$  puede descomponerse en un **tensor de esfuerzos hidrostáticos** y un **tensor de esfuerzos desviadores**, en la base  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_M & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_M & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_M \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}_{\text{hidr}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} s_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & s_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & s_z \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}_{\text{desv}}}$$



## Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores

El tensor de esfuerzos  $\underline{\underline{\sigma}}$  puede descomponerse en un **tensor de esfuerzos hidrostáticos** y un **tensor de esfuerzos desviadores**, en la base **en la base  $\{\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3\}$** :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_M & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_M & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_M \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}_{\text{hidr}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma'}}_{\text{desv}}}$$

Tenemos los siguientes resultados:

- Los esfuerzos desviadores principales:

$$s_1 = \sigma_1 - \sigma_M$$

$$s_2 = \sigma_2 - \sigma_M$$

$$s_3 = \sigma_3 - \sigma_M$$

- $\underline{\underline{\sigma}}_{\text{hidr}} = \sigma_M \mathbf{I}$ .
- $\sigma_M = K e$ , recordando que:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

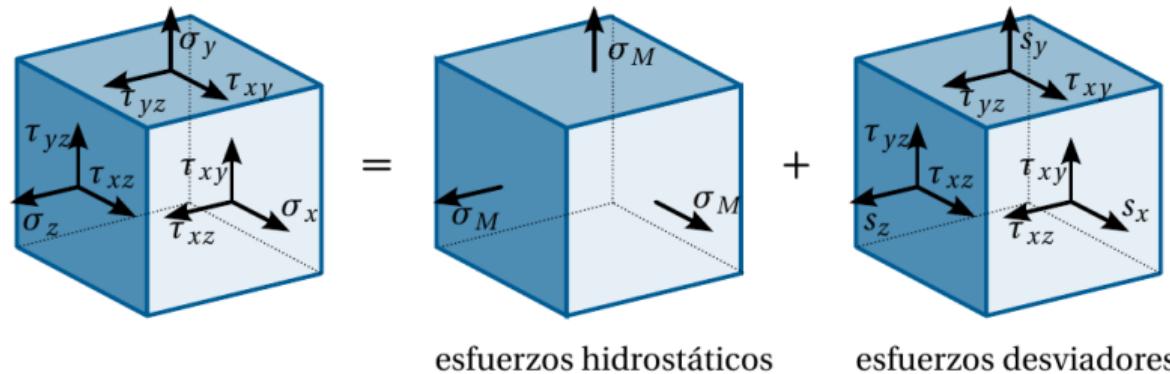
$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

- $\underline{\underline{\sigma}}_{\text{hidr}}$  describe los cambios de volumen en el material.

# Esfuerzos medios y desviadores

## Acción de los esfuerzos medios y desviadores



### Esfuerzos hidrostáticos: *dilatan el sólido*

- Son responsables del cambio de volumen.
- Estiran o contraen el sólido con igual intensidad en todas las direcciones.

### Esfuerzos desviadores: *distorsionan el sólido*

- No producen cambio de volumen.
- Son responsables de la distorsión del sólido:
  - Lo pueden estirar o contraer más en una dirección que en otra.
  - Lo pueden deformar angularmente.

# Esfuerzos desviadores

Verificando que no alteran el volumen

Código: 16\_01\_02\_verificacion\_cambio\_volumen.ipynb

```
/* Se define el esfuerzo hidrostático, ecuación (16.2) */
sM : (sigmax + sigmay + sigmaz)/3$

/* Se definen los esfuerzos desviadores, ecuación (16.3) */
sx : sigmax - sM$
sy : sigmay - sM$
sz : sigmaz - sM$

/* Se calculan las deformaciones asociadas al esf. desviador, ec. (4.3) */
ex : (1/E)*(sx - nu*(sy + sz))$
ey : (1/E)*(sy - nu*(sx + sz))$
ez : (1/E)*(sz - nu*(sx + sy))$

/* Se calcula la dilatación cúbica asociada al esf. desviador, ec. (4.27) */
e : expand(ex + ey + ez); /* imprime θ */
```

## Tarea

Demostrar que el tensor  $\underline{\underline{\sigma}}_{\text{desv}}$  tiene los mismos vectores propios que  $\underline{\underline{\sigma}}$  y sus valores propios están dados por:

$$s_1 = \sigma_1 - \sigma_M$$

$$s_2 = \sigma_2 - \sigma_M$$

$$s_3 = \sigma_3 - \sigma_M$$

## Invariantes de los tensores de esfuerzos medios y desviadores

Las ecuaciones características de los tensores de esfuerzos medios y desviadores son:

$$\det \left( \underline{\underline{\sigma}}_{\text{hidr}} - \sigma_n \mathbf{I} \right) = -\sigma_n^3 + \tilde{I}_1 \sigma_n^2 - \tilde{I}_2 \sigma_n + \tilde{I}_3 = 0$$
$$\det \left( \underline{\underline{\sigma}}_{\text{desv}} - s_n \mathbf{I} \right) = -\sigma_n^3 + J_1 \sigma_n^2 + J_2 \sigma_n + J_3 = 0$$

Código: [16\\_01\\_03\\_invariantes.ipynb](#)

## Invariantes de los tensores de esfuerzos medios y desviadores

**Invariantes de esfuerzos medios:**

$$\tilde{I}_1 := I_1 = 3\sigma_M = \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \quad \tilde{I}_2 := \frac{I_1^2}{3} = 3\sigma_M^2 \quad \tilde{I}_3 := \frac{I_1^3}{27} = \sigma_M^3.$$

**Invariantes de esfuerzos desviadores:**

$$J_1 := s_1 + s_2 + s_3 \quad J_2 := \frac{1}{2} \left\| [s_1, s_2, s_3]^T \right\|^2 \quad J_3 := s_1 s_2 s_3.$$

**Código:** [16\\_01\\_invariantes.ipynb](#)

# Invariantes de los tensores de esfuerzos medios y desviadores

Expresiones asociadas a los invariantes  $J_2$  y  $J_3$

$$\begin{aligned}
 J_2 &:= \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2}{6} + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \\
 &= \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{6} \\
 &= \frac{I_1^2}{3} - I_2 \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^2) - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}_{\text{desv}}^2) \\
 &= \frac{1}{2} \left\| \underline{\underline{\sigma}}_{\text{desv}} \right\|_F^2 \\
 &= -s_1 s_2 - s_2 s_3 - s_1 s_3 \\
 &= \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \\
 &= \frac{1}{2} \left\| [s_1, s_2, s_3]^T \right\|^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_3 &:= \frac{(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)}{27} \\
 &= I_3 - \frac{1}{3} I_1 I_2 + \frac{2}{27} I_1^3 \\
 &= \det \begin{pmatrix} \underline{\underline{\sigma}} \\ \equiv_{\text{desv}} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}_{\text{desv}}^3) \\
 &= s_1 s_2 s_3.
 \end{aligned}$$

## Aclaración: El signo de $J_2$ en la ecuación característica

Es una elección de convención para la definición de  $J_2$ , no un cambio en la física subyacente. La consistencia es clave.

### La convención "estándar" y su implicación

Si definiéramos  $J_2$  usando el polinomio característico usual:

$$-\sigma_n^3 + J_1\sigma_n^2 - J_2\sigma_n + J_3 = 0$$

Esto implicaría que  $J_2$  (calculado como  $s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1$ ) sería  $\leq 0$ .

- De hecho,  $J_2 = -\frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \leq 0$ .

En los criterios de falla,  $J_2$  (o una cantidad relacionada) aparece frecuentemente dentro de raíces cuadradas.

- Con la convención estándar, veríamos expresiones como  $\sqrt{-kJ_2}$  (donde  $k > 0$ ).
- Aunque matemáticamente  $-kJ_2 \geq 0$  (y la raíz es real), esto puede causar confusión al lector, sugiriendo erróneamente un número imaginario.

### Nuestra Elección: Simplificar y Evitar Confusión

Para mayor claridad y para que las expresiones sean más intuitivas, adoptamos un polinomio característico donde el término de  $J_2$  es positivo:

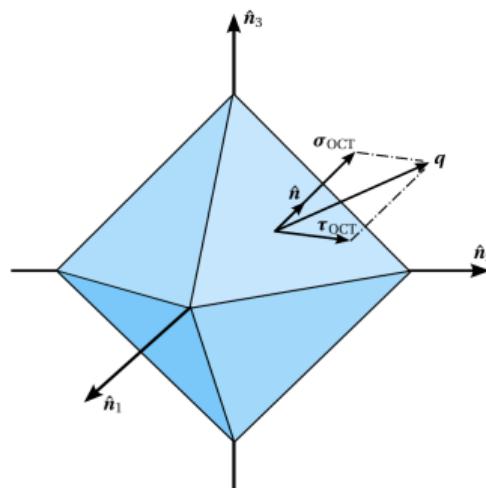
$$-\sigma_n^3 + J_1\sigma_n^2 + J_2\sigma_n + J_3 = 0 \quad (\text{Ec. 16.5 del texto})$$

- Con esta definición,  $J_2$  (calculado, por ejemplo, como  $\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \circ \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)$ ) es **siempre**  $\geq 0$ .
- Esto permite usar expresiones más directas como  $\sqrt{kJ_2}$  en las formulaciones de falla, eliminando el signo negativo "alarmante" dentro de la raíz.

## Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- **16.2. Esfuerzos octaédricos**
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distorsión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

## Esfuerzos octaédricos



En la base dada por  $\{\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3\}$ :

- Tensor de esfuerzos:  $\underline{\underline{\sigma}} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ .
- Definimos planos con vectores unitarios normales según sus cosenos directores:

$$\alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\beta = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

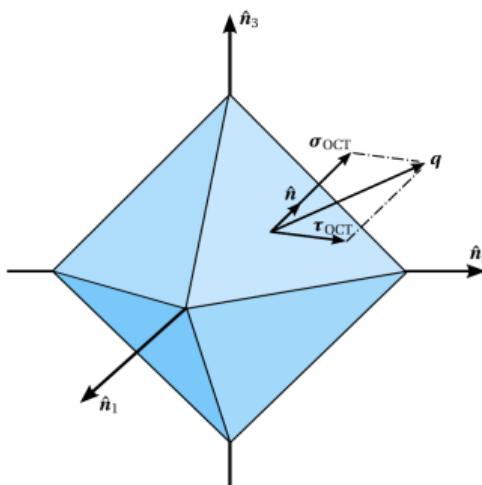
$$\gamma = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- Estos **planos octaédricos** son planos cuyas normales forman ángulos iguales con los ejes principales de esfuerzo.
- Evaluamos la ecuación de Cauchy en estos planos:

$$\mathbf{q} = \frac{\sqrt{3}}{3} [\pm \sigma_1, \pm \sigma_2, \pm \sigma_3]^T.$$

## Esfuerzos octaédricos

- Descomponemos  $\sigma$  en sus componentes normales ( $\sigma_n$ ) y tangenciales ( $\sigma_s$ ), como:



$$\sigma_{OCT} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3} = \sigma_M$$

$$\begin{aligned} |\tau_{OCT}| &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{2I_1^2 - 6I_2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3} J_2} \end{aligned}$$

- Definimos los esfuerzos octaédricos normal y cortante como:

$$|\sigma_{OCT}| = \|\sigma_n\|$$

$$|\tau_{OCT}| = \|\sigma_s\|.$$

Código: [16\\_02\\_esfuerzos\\_octaedricos.ipynb](#)

## Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaédricos
- **16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica**
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distrosión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

## Introducción a la superficie de fluencia

$$\begin{cases} f(\sigma) < k & \text{respuesta elástica del material} \\ f(\sigma) = k & \text{fluencia,} \end{cases}$$

En la base dada por las direcciones principales:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = k,$$

Ejemplos:

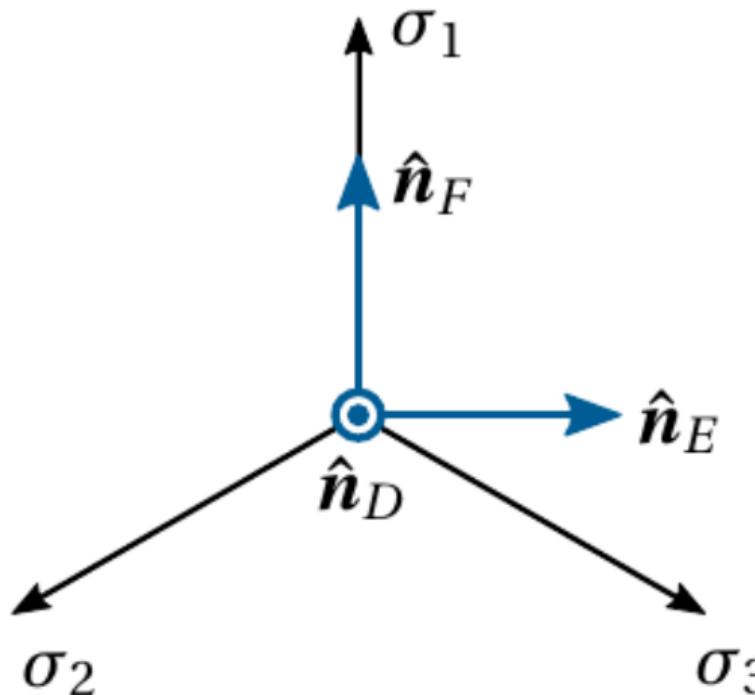
- Criterio de von Mises:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} \quad y \quad k = f_y$$

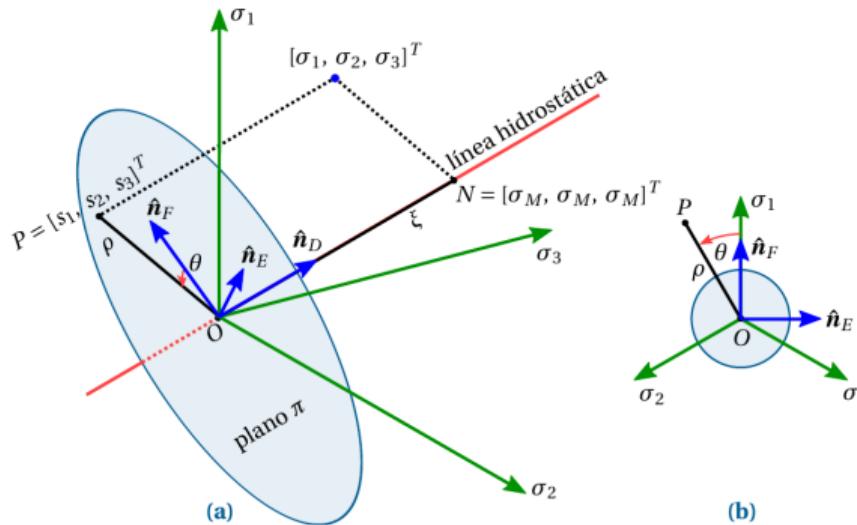
- Criterio de Tresca:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{2} \quad y \quad k = \frac{f_y}{2}.$$

## 8989 Definir el título 8989



# El sistema de coordenadas cilíndricas de Haigh-Westergaard



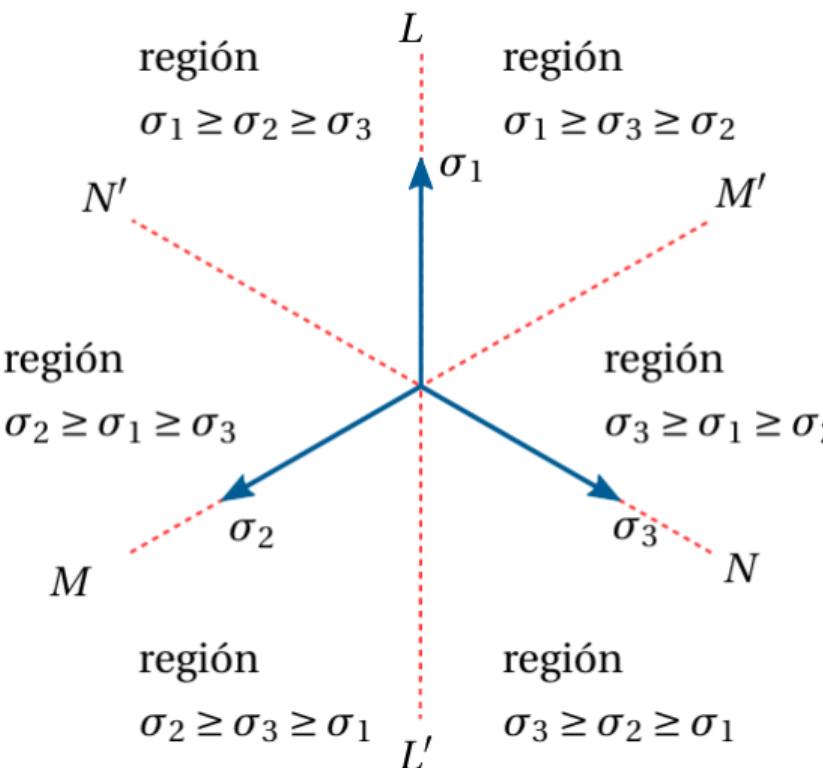
# El sistema de coordenadas cilíndricas de Haigh-Westergaard

Entendiendo las coordenadas, con ayuda de Google Gemini 2.5 Pro

Tabla: Coordenadas Cilíndricas de Haigh-Westergaard ( $\xi, \rho, \theta$ )

Coordenada	Significado Matemático	Significado Físico	Consideraciones Adicionales
$\xi$ (Xi)	Coordenada axial. Proyección del vector de esfuerzos principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ sobre la línea hidrostática ( $\text{dirección } \hat{n}_D \propto [1, 1, 1]^T$ ). Distancia (con signo) desde el origen a lo largo de esta linea.	Medida de la componente hidrostática del estado de esfuerzos. Directamente proporcional al esfuerzo medio, $\sigma_M = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ . Indica la "presión" o "tracción" media a la que está sometido el punto.	$\xi = \frac{J_1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\sigma_M$ . Puede ser positiva o negativa. La fluencia de muchos metales dúctiles es en gran medida independiente de $\xi$ .
$\rho$ (Rho)	Coordenada radial. Magnitud del vector de esfuerzos desviadores principales $[s_1, s_2, s_3]^T$ . Distancia desde la linea hidrostática hasta el punto de esfuerzo $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , medida en el plano $\pi$ (perpendicular a $\hat{n}_D$ ).	Medida de la intensidad de la componente desviadora (distorsionante) del estado de esfuerzos. Representa la "magnitud" del esfuerzo que causa cambio de forma sin cambio de volumen (en materiales incompresibles plásticamente).	$\rho = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = \sqrt{2J_2}$ . Es igual al esfuerzo de von Mises ( $\sigma_{vM}$ ). Es proporcional al esfuerzo cortante octaédrico ( $\tau_{OCT}$ ), $\rho = \sqrt{3}\tau_{OCT}$ . $\rho \geq 0$ . Si $\rho = 0$ , el estado es puramente hidrostático.
$\theta$ (Theta)	Coordenada angular (Ángulo de Lode). Ángulo medido en el plano $\pi$ (plano desviador) desde un eje de referencia fijo (e.g., proyección del eje $\sigma_1$ o el eje $\hat{n}_F$ ) hasta la proyección del vector de esfuerzos desviadores.	Describe la "naturaleza", "tipo" o "modo" del estado de esfuerzo desviador. Diferentes valores de $\theta$ indican diferentes relaciones relativas entre los esfuerzos desviadores principales $s_1, s_2, s_3$ .	Se relaciona con los invariantes $J_2$ y $J_3$ del tensor desviador: $\cos(3\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_1}{J_2^{1/2}}$ . Debido a la simetría en materiales isótropos, usualmente se considera en el rango $[0^\circ, 60^\circ]$ . La forma de la sección transversal de la superficie de fluencia en el plano $\pi$ depende de $\theta$ .

## Simetría del espacio de esfuerzos principales



## Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaedricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- **16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales**
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distorsión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

# Estudio de Percy Williams Bridgman

(1882 - 1961) Premio nobel de física 1946 | Ensayo con presiones de más de 10GPa en aleaciones dúctiles e isótropas

## Observaciones:

- La presión hidrostática no produce una deformación permanente en el sólido, incluso bajo altas presiones y en régimen plástico; en otras palabras, la deformación presentada debido a dicha presión es completamente elástica.
- La presión hidrostática tiene un efecto despreciable en el esfuerzo de fluencia; esto sucede incluso con presiones hidrostáticas 10 veces mayores que el esfuerzo de fluencia.
- La deformación plástica en los metales es prácticamente independiente del esfuerzo hidrostático  $\sigma_M$ .
- La curva esfuerzo-deformación no se modifica por la acción de la presión hidrostática, excepto cuando está sometido a presiones extremadamente altas.
- A elevadas presiones hidrostáticas, que llegan incluso a los 3100 MPa, la ductilidad aumenta a medida que incrementa la presión hidrostática.
- En el régimen plástico (incluso bajo grandes deformaciones), y una vez retiradas las cargas, el material cambia de forma (se distorsiona), pero no de volumen.



Figure: P. W. Bridgman

# Estudio de Percy Williams Bridgman

(1882 - 1961) Premio nobel de física 1946 | Ensayo con presiones de más de 10GPa en aleaciones dúctiles e isótropas



## Conclusiones:

- El tensor de esfuerzos medios  $\sigma_{\text{hidr}}$  no tiene mayor influencia en el comportamiento plástico de los materiales.
- Se espera que los esfuerzos desviadores tengan gran influencia en el comportamiento plástico de los materiales sometidos a un estado de esfuerzos tridimensional.

Figure: P. W. Bridgman

# Estudio de Percy Williams Bridgman

(1882 - 1961) Premio nobel de física 1946 | Ensayo con presiones de más de 10GPa en aleaciones dúctiles e isótropas



Figure: P. W. Bridgman

## Limitantes:

- Observaciones anteriores no son válidas para algunos metales y materiales frágiles como el concreto o la roca.
- Estos se vuelven dúctiles bajo la acción de grandes presiones hidrostáticas.
- Aportes de Theodore von Kármán:
  - Con presiones de hasta 600 MPa, algunas rocas (concreto y arenisca) cambian su comportamiento de frágil a dúctil, y su endurecimiento aumentaba.
  - Importante en geología y mecánica de rocas.



Figure: T. von Kármán

## Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaédricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- **16.5. Energía de dilatación y energía de distrosión**
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

## Energía de dilatación y energía de distorsión

- La **energía potencial elástica** es la energía almacenada en un objeto cuando se le aplica una fuerza que provoca su deformación. Recuerde por ejemplo una cauchera.
- Definimos la energía potencial elástica por unidad de volumen como:

$$\widetilde{W}_{\text{elást}} = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z)] + \frac{1}{2G} [\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2];$$

teniendo en cuenta:

- Para un material lineal, elástico e isótropo, y asumiendo deformaciones pequeñas.
- Físicamente: “densidad de energía potencial elástica”.
- Podemos descomponer dicha energía en la energía de dilatación  $\widetilde{W}_{\text{dila}}$  y la energía de distorsión  $\widetilde{W}_{\text{dist}}$ .

$$\widetilde{W}_{\text{elást}} = \widetilde{W}_{\text{dila}} + \widetilde{W}_{\text{dist}}.$$

## Energía de dilatación y energía de distorsión

- La **energía potencial elástica** es la energía almacenada en un objeto cuando se le aplica una fuerza que provoca su deformación. Recuerde por ejemplo una cauchera.
- Definimos la energía potencial elástica por unidad de volumen como:

$$\widetilde{W}_{\text{elást}} = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z)] + \frac{1}{2G} [\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2];$$

teniendo en cuenta:

- Para un material lineal, elástico e isótropo, y asumiendo deformaciones pequeñas.
- Físicamente: “densidad de energía potencial elástica”.
- Podemos descomponer dicha energía en la energía de dilatación  $\widetilde{W}_{\text{dila}}$  y la energía de distorsión  $\widetilde{W}_{\text{dist}}$ .

$$\widetilde{W}_{\text{elást}} = \widetilde{W}_{\text{dila}} + \widetilde{W}_{\text{dist}}.$$

## Energía de dilatación y energía de distorsión

- La **energía potencial elástica** es la energía almacenada en un objeto cuando se le aplica una fuerza que provoca su deformación. Recuerde por ejemplo una cauchera.
- Definimos la energía potencial elástica por unidad de volumen como:

$$\widetilde{W}_{\text{elást}} = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z)] + \frac{1}{2G} [\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2];$$

teniendo en cuenta:

- Para un material lineal, elástico e isótropo, y asumiendo deformaciones pequeñas.
- Físicamente: “densidad de energía potencial elástica”.
- Podemos descomponer dicha energía en la energía de dilatación  $\widetilde{W}_{\text{dila}}$  y la energía de distorsión  $\widetilde{W}_{\text{dist}}$ .

$$\widetilde{W}_{\text{elást}} = \widetilde{W}_{\text{dila}} + \widetilde{W}_{\text{dist}}.$$

## Energía de dilatación y energía de distorsión

- La **energía potencial elástica** es la energía almacenada en un objeto cuando se le aplica una fuerza que provoca su deformación. Recuerde por ejemplo una cauchera.
- Definimos la energía potencial elástica por unidad de volumen como:

$$\widetilde{W}_{\text{elást}} = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z)] + \frac{1}{2G} [\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2];$$

teniendo en cuenta:

- Para un material lineal, elástico e isótropo, y asumiendo deformaciones pequeñas.
- Físicamente: “densidad de energía potencial elástica”.
- Podemos descomponer dicha energía en la energía de dilatación  $\widetilde{W}_{\text{dila}}$  y la energía de distorsión  $\widetilde{W}_{\text{dist}}$ .

$$\widetilde{W}_{\text{elást}} = \widetilde{W}_{\text{dila}} + \widetilde{W}_{\text{dist}}.$$

# Energía de dilatación y energía de distorsión

Trabajando en el sistema dado por  $\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3$ .

## Energía de dilatación

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_{\text{dila}} &= \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \\ &= \frac{3(1-2\nu)}{2E} I_1^2\end{aligned}$$

- Trabajo invertido en comprimir o expandir el material, de modo que este cambie de volumen.
- El cuadrado del invariante  $I_1$  representa la energía de dilatación, la cual produce cambios de volumen en el material.

## Energía de distorsión

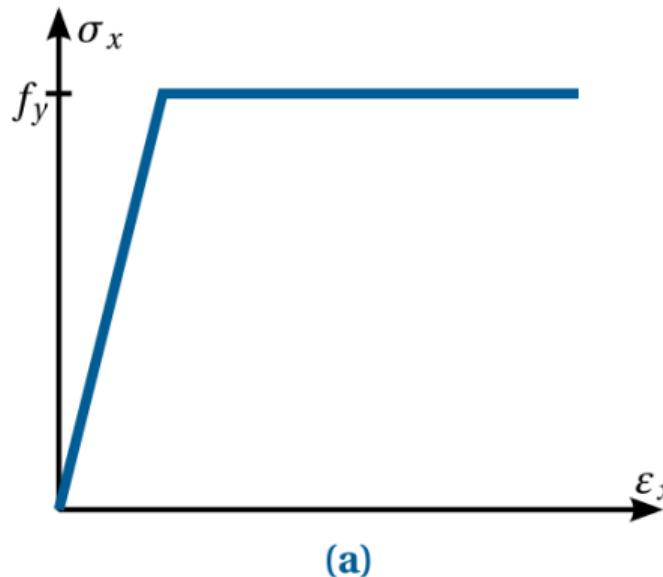
$$\begin{aligned}\widetilde{W}_{\text{dist}} &= \frac{1+\nu}{3E} \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \\ &= \frac{1+\nu}{E} J_2.\end{aligned}$$

- Sirve para predecir la combinación de esfuerzos que produzca fluencia en el material.
- $J_2$  directamente relacionado con la energía de distorsión, la cual causa cambio de forma en el material sin cambio de volumen.

## Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaédricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distrosión
- **16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles**
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

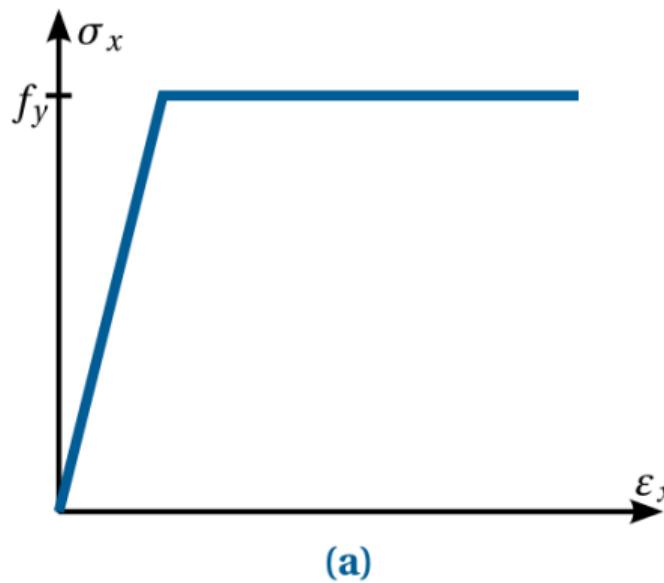
## Criterios de fluencia en materiales dúctiles



Figure

- Haremos referencia a una *superficie de fluencia* en materiales elásticos perfectos. En este caso, será  $f = k$ .
- Algunos materiales dúctiles son los metáles y las aleaciones.
- Veremos los criterios de:
  - von Mises
  - Tresca
- Comportamiento independiente de la presión hidrostática.

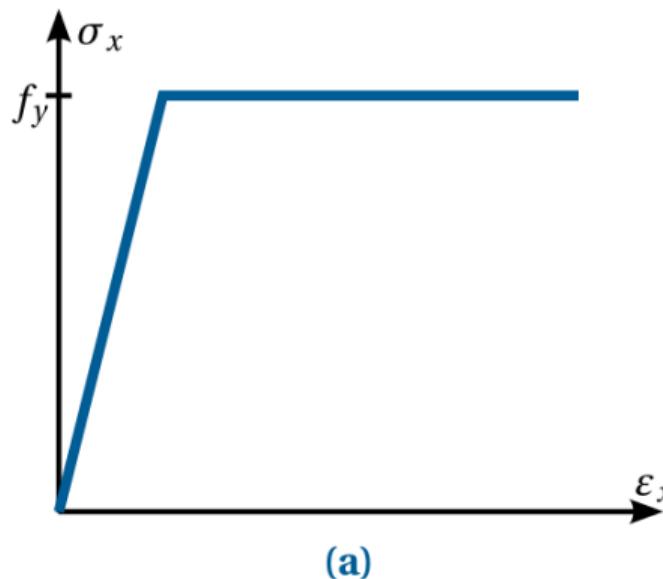
## Criterios de fluencia en materiales dúctiles



Figure

- Haremos referencia a una *superficie de fluencia* en materiales elásticos perfectos. En este caso, será  $f = k$ .
- Algunos materiales dúctiles son los metáles y las aleaciones.
- Veremos los criterios de:
  - von Mises
  - Tresca
- Comportamiento independiente de la presión hidrostática.

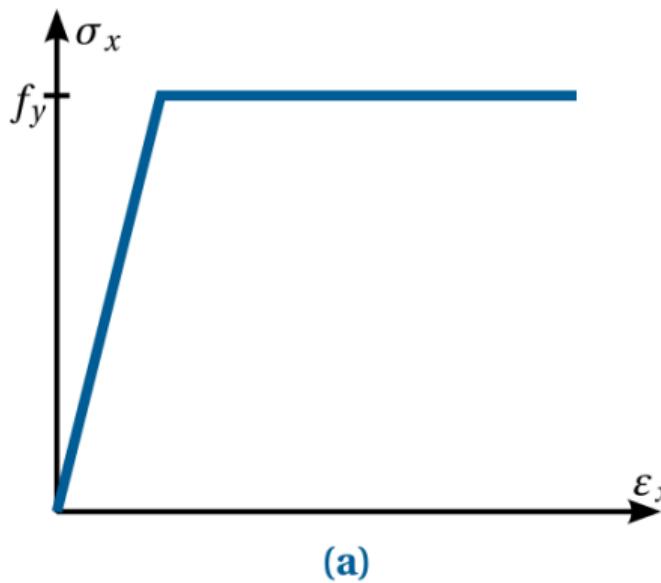
## Criterios de fluencia en materiales dúctiles



Figure

- Haremos referencia a una *superficie de fluencia* en materiales elásticos perfectos. En este caso, será  $f = k$ .
- Algunos materiales dúctiles son los metáles y las aleaciones.
- Veremos los criterios de:
  - von Mises
  - Tresca
- Comportamiento independiente de la presión hidrostática.

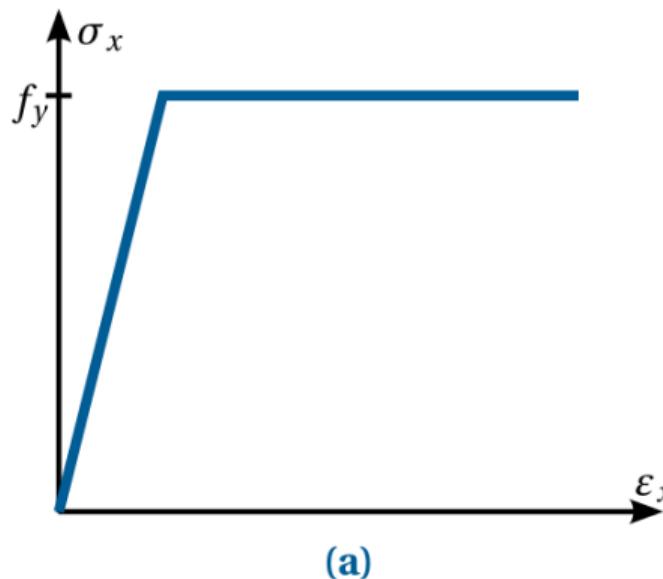
## Criterios de fluencia en materiales dúctiles



Figure

- Haremos referencia a una *superficie de fluencia* en materiales elásticos perfectos. En este caso, será  $f = k$ .
- Algunos materiales dúctiles son los metáles y las aleaciones.
- Veremos los criterios de:
  - von Mises
  - Tresca
- Comportamiento independiente de la presión hidrostática.

## Criterios de fluencia en materiales dúctiles



Figure

- Haremos referencia a una *superficie de fluencia* en materiales elásticos perfectos. En este caso, será  $f = k$ .
- Algunos materiales dúctiles son los metáles y las aleaciones.
- Veremos los criterios de:
  - von Mises
  - Tresca
- Comportamiento independiente de la presión hidrostática.

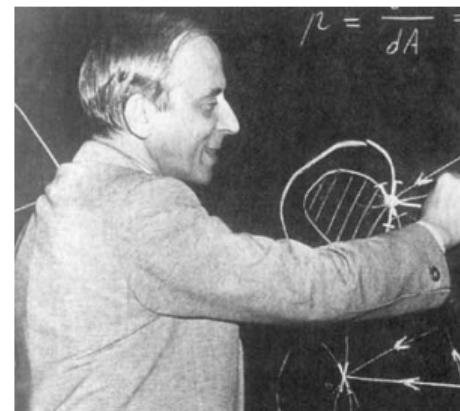
## Criterio de fluencia de von Mises

# Criterio de von Mises

Criterio de la energía máxima de distorsión, criterio de Huber-Hencky-von Mises



(a) Tytus Maksymilian Huber (1872–1950)



(b) Richard Edler von Mises (1883–1953)



(c) Heinrich Hencky (1885–1951)

- Usado *principalmente* en materiales dúctiles para determinar si un material isótropo entrará en fluencia cuando está sujeto a condiciones de carga tridimensional.

# Criterio de von Mises

## Formulación y desarrollo

Descripción:

- El material entrará en fluencia cuando la energía asociada a los esfuerzos desviadores alcanza el valor crítico  $k'$ :

$$\widetilde{W}_{\text{dist}} = \frac{1+\nu}{3E} \underbrace{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}}_{\sigma_{VM}^2} = k'.$$

- $k'$  a partir de la energía de distorsión por unidad de volumen asociada a la fluencia de una barra:

$$\widetilde{W}_{\text{dist}} = \frac{1+\nu}{3E} f_y^2.$$

- El material entrará en fluencia cuando el llamado esfuerzo de fluencia de von mises  $\sigma_{VM}$  alcance el esfuerzo de fluencia  $f_y$  del material.

# Criterio de von Mises

## Equivalencias matemáticas

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{VM}} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3} \\&= \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} \\&= \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2)}{2}} \\&= \sqrt{\frac{3}{2} \|\underline{\underline{\sigma}}_{\text{desv}}\|_F} \\&= \sqrt{\frac{3}{2} \rho} \\&= \sqrt{3J_2} \\&= \frac{3\sqrt{2}}{2} \tau_{\text{OCT}},\end{aligned}$$

## Criterio de von Mises

Observaciones al criterio y consideraciones prácticas

### Superficie de fluencia de von Mises

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} = f_y.$$

#### Observaciones:

1. Se debe verificar que el máximo esfuerzo de von Mises  $\sigma_{VM}$  no supere el esfuerzo de fluencia  $f_y$  del material dividido un factor de seguridad.
2. Criterio válido para materiales lineales, elástico e isótropos, y asumiendo deformaciones pequeñas.
3.  $\sigma_{VM}$  es un valor no negativo, aunque en algunos softwares puede variar esta consideración.
4.  $\sigma_{VM}$  no es un esfuerzo físico, no debe compararse directamente con otros.
5. Es un valor teórico que permite contrastar un estado de tensiones tridimensional con resultados unidimensionales.
6. El esfuerzo de von Mises depende de la variación entre los esfuerzos principales y no sus valores individuales: independiente del esfuerzo hidrostático.

## Criterio de von Mises

Observaciones al criterio y consideraciones prácticas

### Superficie de fluencia de von Mises

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} = f_y.$$

Observaciones:

1. Se debe verificar que el máximo esfuerzo de von Mises  $\sigma_{VM}$  no supere el esfuerzo de fluencia  $f_y$  del material dividido un factor de seguridad.
2. Criterio válido para materiales lineales, elástico e isótropos, y asumiendo deformaciones pequeñas.
3.  $\sigma_{VM}$  es un valor no negativo, aunque en algunos softwares puede variar esta consideración.
4.  $\sigma_{VM}$  no es un esfuerzo físico, no debe compararse directamente con otros.
5. Es un valor teórico que permite contrastar un estado de tensiones tridimensional con resultados unidimensionales.
6. El esfuerzo de von Mises depende de la variación entre los esfuerzos principales y no sus valores individuales: independiente del esfuerzo hidrostático.

## Criterio de von Mises

Observaciones al criterio y consideraciones prácticas

### Superficie de fluencia de von Mises

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} = f_y.$$

Observaciones:

1. Se debe verificar que el máximo esfuerzo de von Mises  $\sigma_{VM}$  no supere el esfuerzo de fluencia  $f_y$  del material dividido un factor de seguridad.
2. Criterio válido para materiales lineales, elástico e isótropos, y asumiendo deformaciones pequeñas.
3.  $\sigma_{VM}$  es un valor no negativo, aunque en algunos softwares puede variar esta consideración.
4.  $\sigma_{VM}$  no es un esfuerzo físico, no debe compararse directamente con otros.
5. Es un valor teórico que permite contrastar un estado de tensiones tridimensional con resultados unidimensionales.
6. El esfuerzo de von Mises depende de la variación entre los esfuerzos principales y no sus valores individuales: independiente del esfuerzo hidrostático.

## Criterio de von Mises

Observaciones al criterio y consideraciones prácticas

### Superficie de fluencia de von Mises

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} = f_y.$$

Observaciones:

1. Se debe verificar que el máximo esfuerzo de von Mises  $\sigma_{VM}$  no supere el esfuerzo de fluencia  $f_y$  del material dividido un factor de seguridad.
2. Criterio válido para materiales lineales, elástico e isótropos, y asumiendo deformaciones pequeñas.
3.  $\sigma_{VM}$  es un valor no negativo, aunque en algunos softwares puede variar esta consideración.
4.  $\sigma_{VM}$  no es un esfuerzo físico, no debe compararse directamente con otros.
5. Es un valor teórico que permite contrastar un estado de tensiones tridimensional con resultados unidimensionales.
6. El esfuerzo de von Mises depende de la variación entre los esfuerzos principales y no sus valores individuales: independiente del esfuerzo hidrostático.

## Criterio de von Mises

Observaciones al criterio y consideraciones prácticas

### Superficie de fluencia de von Mises

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} = f_y.$$

Observaciones:

1. Se debe verificar que el máximo esfuerzo de von Mises  $\sigma_{VM}$  no supere el esfuerzo de fluencia  $f_y$  del material dividido un factor de seguridad.
2. Criterio válido para materiales lineales, elástico e isótropos, y asumiendo deformaciones pequeñas.
3.  $\sigma_{VM}$  es un valor no negativo, aunque en algunos softwares puede variar esta consideración.
4.  $\sigma_{VM}$  no es un esfuerzo físico, no debe compararse directamente con otros.
5. Es un valor teórico que permite contrastar un estado de tensiones tridimensional con resultados unidimensionales.
6. El esfuerzo de von Mises depende de la variación entre los esfuerzos principales y no sus valores individuales: independiente del esfuerzo hidrostático.

## Criterio de von Mises

Observaciones al criterio y consideraciones prácticas

### Superficie de fluencia de von Mises

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} = f_y.$$

Observaciones:

1. Se debe verificar que el máximo esfuerzo de von Mises  $\sigma_{VM}$  no supere el esfuerzo de fluencia  $f_y$  del material dividido un factor de seguridad.
2. Criterio válido para materiales lineales, elástico e isótropos, y asumiendo deformaciones pequeñas.
3.  $\sigma_{VM}$  es un valor no negativo, aunque en algunos softwares puede variar esta consideración.
4.  $\sigma_{VM}$  no es un esfuerzo físico, no debe compararse directamente con otros.
5. Es un valor teórico que permite contrastar un estado de tensiones tridimensional con resultados unidimensionales.
6. El esfuerzo de von Mises depende de la variación entre los esfuerzos principales y no sus valores individuales: independiente del esfuerzo hidrostático.

## Criterio de von Mises

Observaciones al criterio y consideraciones prácticas

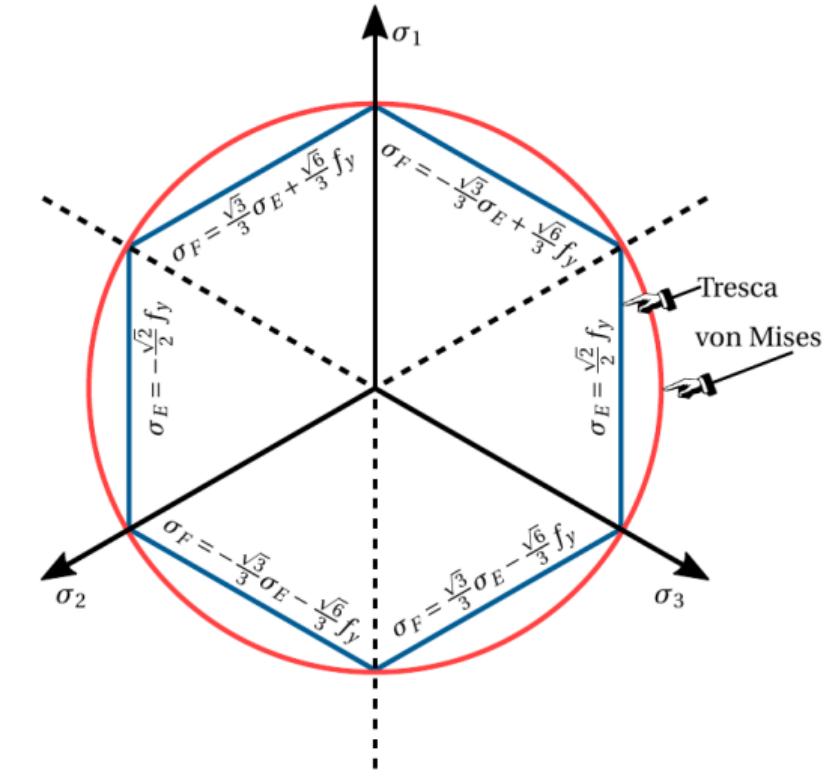
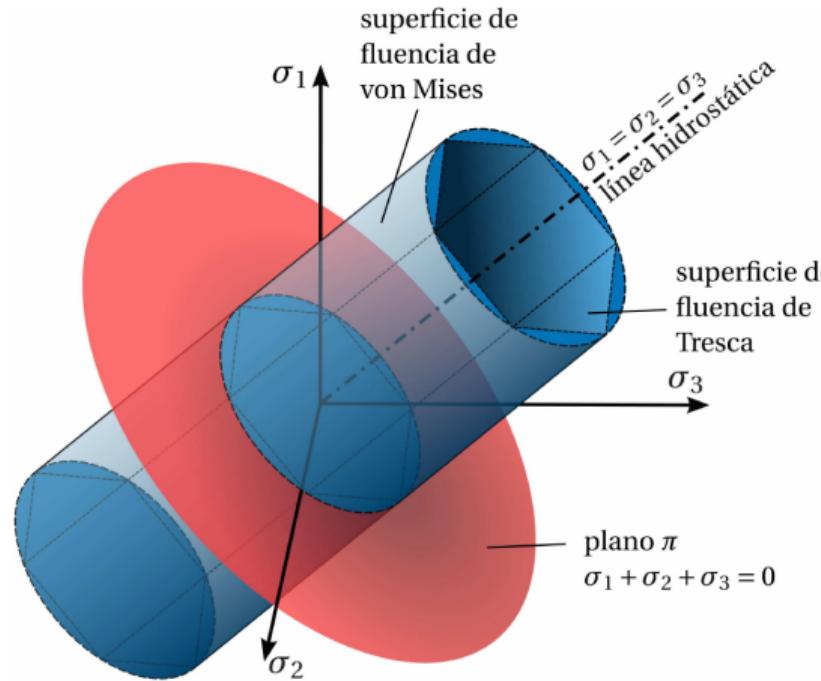
### Superficie de fluencia de von Mises

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} = f_y.$$

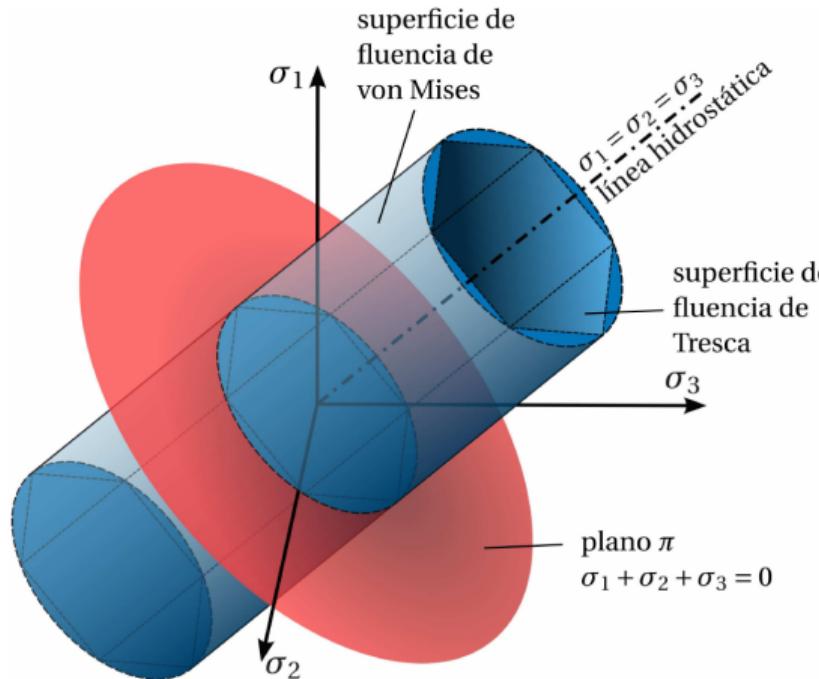
Observaciones:

1. Se debe verificar que el máximo esfuerzo de von Mises  $\sigma_{VM}$  no supere el esfuerzo de fluencia  $f_y$  del material dividido un factor de seguridad.
2. Criterio válido para materiales lineales, elástico e isótropos, y asumiendo deformaciones pequeñas.
3.  $\sigma_{VM}$  es un valor no negativo, aunque en algunos softwares puede variar esta consideración.
4.  $\sigma_{VM}$  no es un esfuerzo físico, no debe compararse directamente con otros.
5. Es un valor teórico que permite contrastar un estado de tensiones tridimensional con resultados unidimensionales.
6. El esfuerzo de von Mises depende de la variación entre los esfuerzos principales y no sus valores individuales: independiente del esfuerzo hidrostático.

## Graficando el criterio de fluencia de von Mises



## Graficando el criterio de fluencia de von Mises



Recordar cuando definimos  $\rho$ :

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{\sigma_E^2 + \sigma_F^2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \underbrace{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3}}_{=\sigma_{VM}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{VM} = \sqrt{2J_2} \\ &= \sqrt{3}\tau_{OCT} = \|\underline{\sigma}_{desv}\|_F = \left\| [s_1, s_2, s_3]^T \right\|.\end{aligned}$$

Reemplazando allí la ecuación de la superficie de fluencia, encontramos que

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\frac{3}{2}}\rho.$$

## Criterio de fluencia de Tresca

# Criterio de Tresca

Criterio del máximo esfuerzo cortante | Formulación y desarrollo



Figure: Henri Tresca (1814–1885)

- Asume que la fluencia comienza cuando el esfuerzo cortante máximo alcanza un valor crítico  $k''$ .

$$\tau_{\max} = k''$$

- Ya que calculamos  $\tau_{\max} = \frac{f_y}{2} = k''$ , llegamos a:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \tau_{\max} = \frac{\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{2} = \frac{f_y}{2}.$$

donde evidenciamos que abandonamos la convención  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

- Definimos el esfuerzo de Tresca como:

$$\begin{aligned}\sigma_T &= 2\tau_{\max} \\ &= \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \\ &= \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|);\end{aligned}$$

## Criterio de Tresca

Observaciones al criterio y consideraciones prácticas

### Superficie de fluencia de Tresca

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \tau_{\max} = \frac{\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{2} = \frac{f_y}{2}.$$

Observaciones:

1. Análogo al esfuerzo de von Mises: se compara contra  $f_y$ .
2.  $\sigma_T$  no es un esfuerzo físico, no debe compararse directamente con otros.
3. Es un valor teórico que permite contrastar un estado de tensiones tridimensional con resultados unidimensionales.

Comparativas:

1. En metales, el criterio de von Mises predice un poco mejor los resultados experimentales que el criterio de Tresca; sin embargo, sus diferencias son mínimas.
2. El criterio de Tresca tiende a proporcionar resultados más seguros o prudentes que el criterio de von Mises.

## Criterio de Tresca

Observaciones al criterio y consideraciones prácticas

### Superficie de fluencia de Tresca

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \tau_{\max} = \frac{\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{2} = \frac{f_y}{2}.$$

Observaciones:

1. Análogo al esfuerzo de von Mises: se compara contra  $f_y$ .
2.  $\sigma_T$  no es un esfuerzo físico, no debe compararse directamente con otros.
3. Es un valor teórico que permite contrastar un estado de tensiones tridimensional con resultados unidimensionales.

Comparativas:

1. En metales, el criterio de von Mises predice un poco mejor los resultados experimentales que el criterio de Tresca; sin embargo, sus diferencias son mínimas.
2. El criterio de Tresca tiende a proporcionar resultados más seguros o prudentes que el criterio de von Mises.

## Criterio de Tresca

Observaciones al criterio y consideraciones prácticas

### Superficie de fluencia de Tresca

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \tau_{\max} = \frac{\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{2} = \frac{f_y}{2}.$$

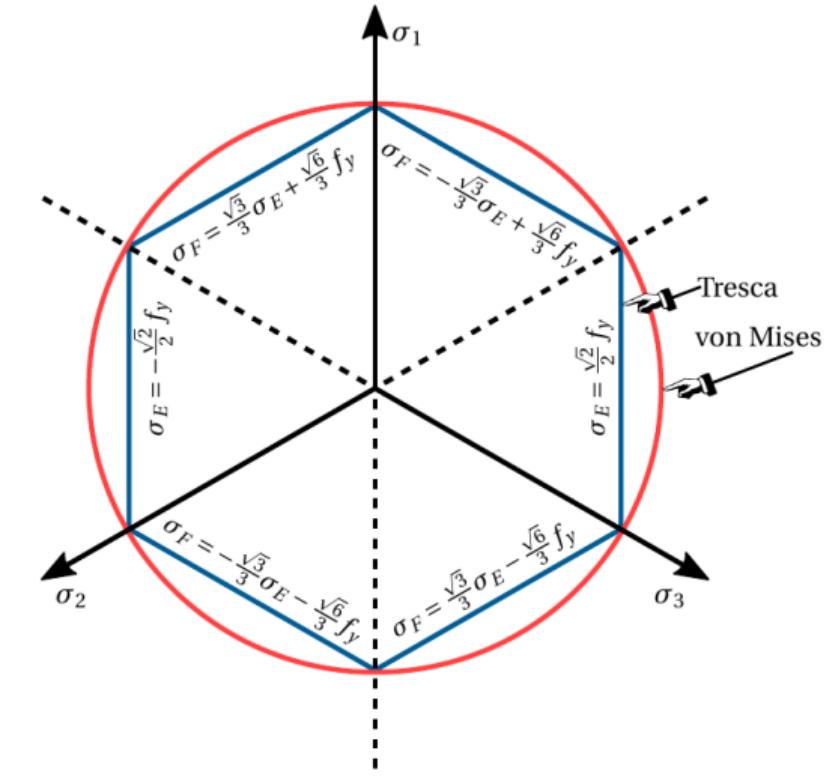
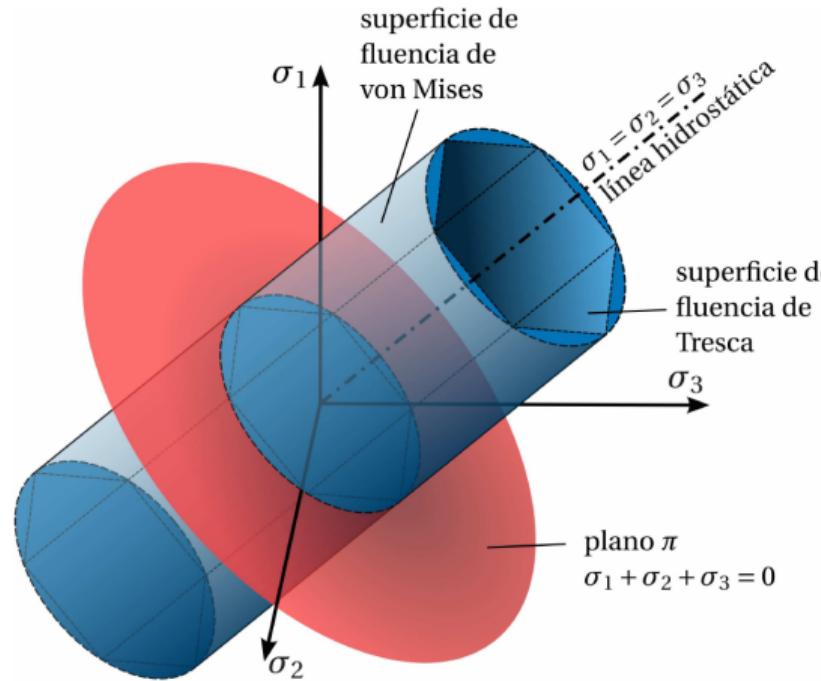
Observaciones:

1. Análogo al esfuerzo de von Mises: se compara contra  $f_y$ .
2.  $\sigma_T$  no es un esfuerzo físico, no debe compararse directamente con otros.
3. Es un valor teórico que permite contrastar un estado de tensiones tridimensional con resultados unidimensionales.

Comparativas:

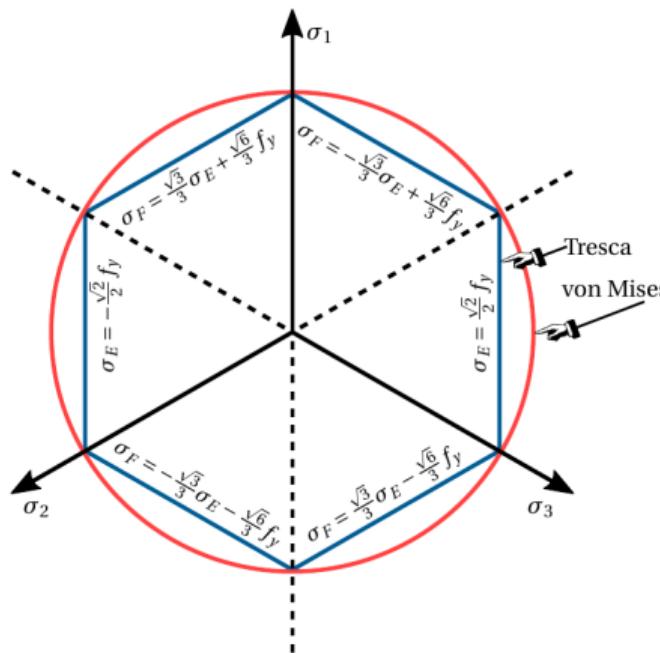
1. En metales, el criterio de von Mises predice un poco mejor los resultados experimentales que el criterio de Tresca; sin embargo, sus diferencias son mínimas.
2. El criterio de Tresca tiende a proporcionar resultados más seguros o prudentes que el criterio de von Mises.

## Graficando el criterio de fluencia de Tresca



# Graficando el criterio de fluencia de Tresca

Forma 1: Obteniendo las ecuaciones de los planos que conforman el prisma

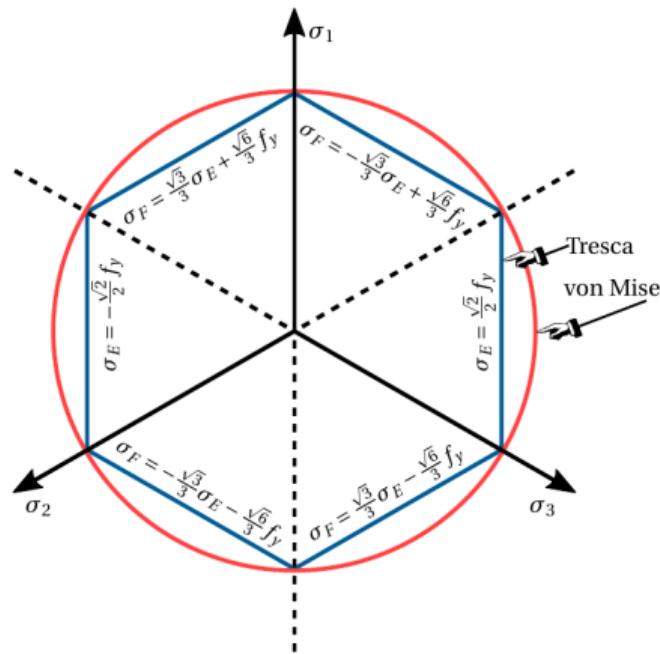


Obtenemos las ecuaciones de los planos en función de los esfuerzos principales o de la base  $\{\hat{n}_D, \hat{n}_E, \hat{n}_F\}$  en cada región del plano desviador:

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$	$\sigma_1 - \sigma_3 = f_y$	$\sigma_F = \frac{\sqrt{3}}{3}\sigma_E + \frac{\sqrt{6}}{3}f_y$
$\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2$	$\sigma_1 - \sigma_2 = f_y$	$\sigma_F = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sigma_E + \frac{\sqrt{6}}{3}f_y$
$\sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3$	$\sigma_2 - \sigma_3 = f_y$	$\sigma_E = -\frac{\sqrt{2}}{2}f_y$
$\sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_1$	$\sigma_2 - \sigma_1 = f_y$	$\sigma_F = \frac{\sqrt{3}}{3}\sigma_E - \frac{\sqrt{6}}{3}f_y$
$\sigma_3 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2$	$\sigma_3 - \sigma_2 = f_y$	$\sigma_E = \frac{\sqrt{2}}{2}f_y$
$\sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1$	$\sigma_3 - \sigma_1 = f_y$	$\sigma_F = \frac{\sqrt{3}}{3}\sigma_E - \frac{\sqrt{6}}{3}f_y$

# Graficando el criterio de fluencia de Tresca

Forma 2: Formulación a partir de los ceros del plano

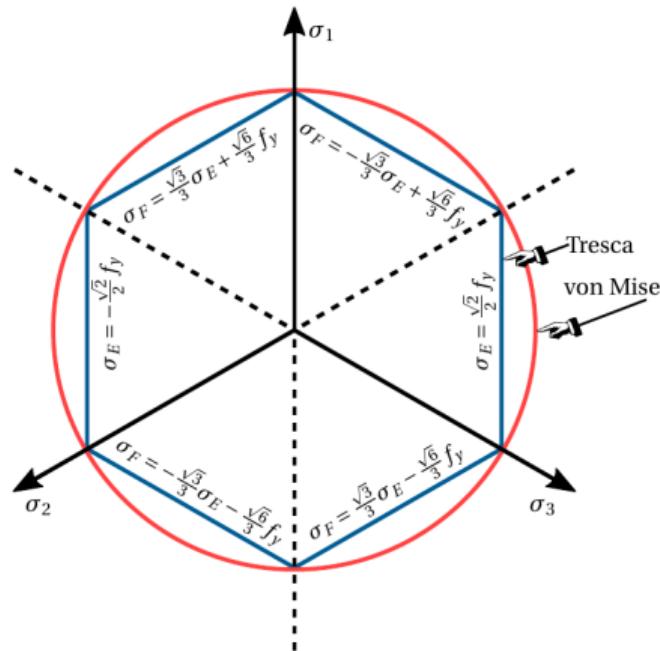


A partir de las formulaciones y simetrías en el espacio de los esfuerzos principales:

$$\begin{aligned}
 f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= \dots \\
 &= ((\sigma_1 - \sigma_3)^2 - f_y^2) ((\sigma_2 - \sigma_3)^2 - f_y^2) ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 - f_y^2) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

# Graficando el criterio de fluencia de Tresca

Forma 3: En el sistema de coordenadas cilíndricas de Haigh-Westergaard



Recordando, en el sistema de coordenadas cilíndricas de H-W:

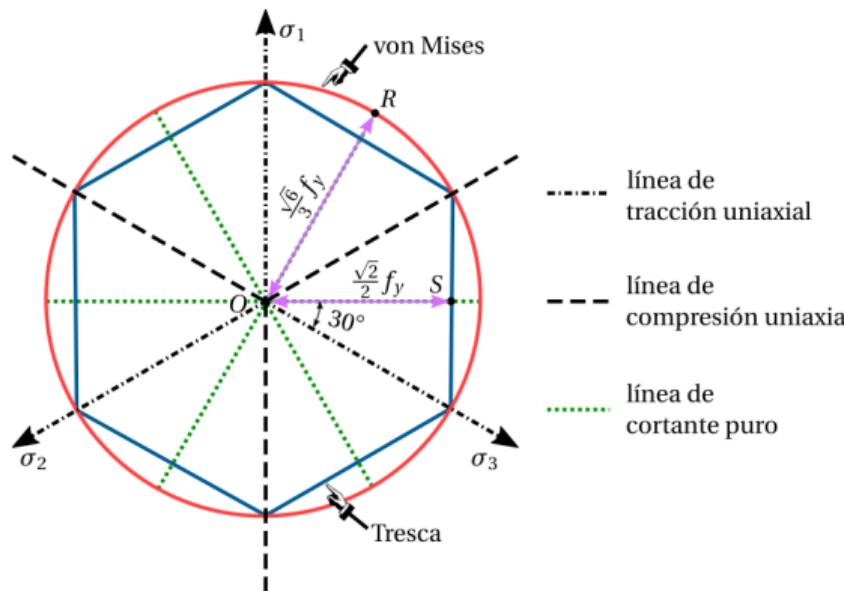
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \xi \\ \xi \\ \xi \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}} \rho \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \cos(\theta - 120^\circ) \\ \cos(\theta + 120^\circ) \end{bmatrix}.$$

Tenemos que  $\sigma_1 - \sigma_3 = f_y$  en la región  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , se puede expresar como

$$f(\rho, \theta, \xi) = \sqrt{\frac{1}{2}} \rho \sin(\theta + 60^\circ) = \frac{f_y}{2}.$$

# Entendiendo las gráficas de los criterios de von Mises y Tresca

# Entendiendo las gráficas de los criterios de von Mises y Tresca



## Línea de tracción uniaxial

Ocurre cuando un material está sometido a un esfuerzo de tracción en una sola dirección, y los esfuerzos en las otras dos direcciones perpendiculares son cero.

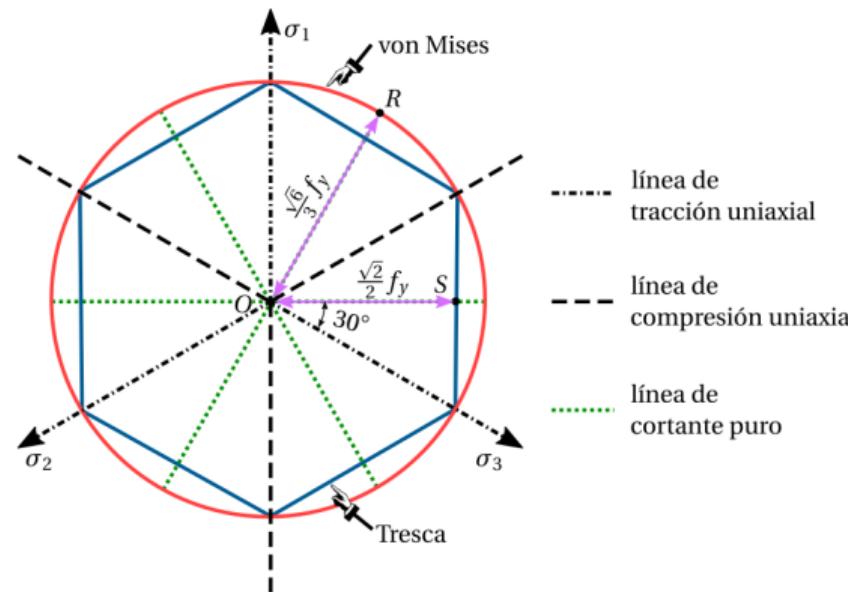
## Línea de compresión uniaxial

Ocurre cuando un material está sometido a un esfuerzo de compresión en una sola dirección, y los esfuerzos en las otras dos direcciones perpendiculares son cero.

## Línea de cortante puro

Ocurre cuando los esfuerzos normales son cero y solo hay un esfuerzo cortante actuando, o cuando los esfuerzos principales son de la forma  $(\tau, 0, -\tau)$ .

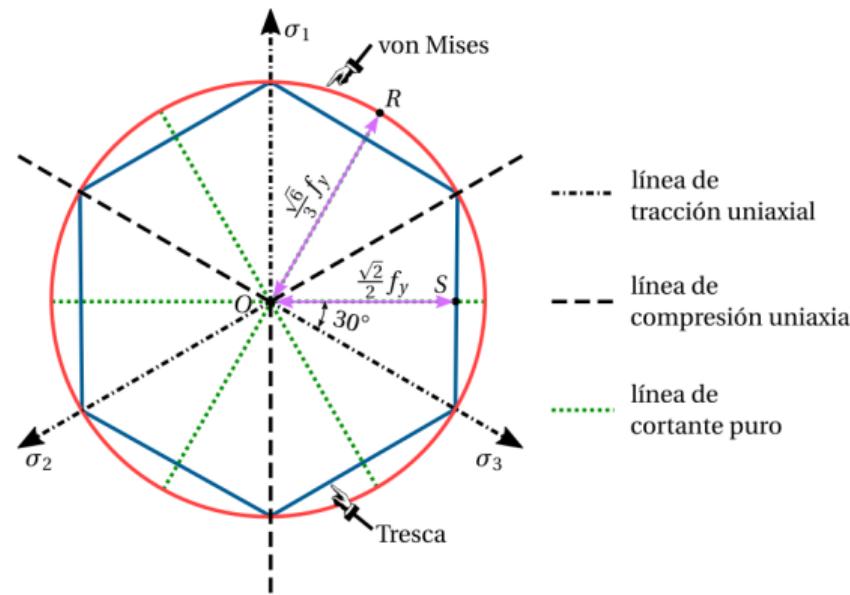
## Entendiendo las gráficas de los criterios de von Mises y Tresca



- Los vértices están asociados a ensayos de compresión o tracción uniaxial, por lo que ambos criterios predicen el mismo esfuerzo de fluencia.
- La diferencia entre estimaciones es máxima cuando se analiza el cortante puro:

$$(OR - OS)/OS = \frac{\sqrt{6}/3 - \sqrt{2}/2}{\sqrt{6}/3} = 15.5\%.$$

## Entendiendo las gráficas de los criterios de von Mises y Tresca



- Tres condiciones de cortantes puros:

$$\begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix};$$

con esfuerzos principales  $\tau$ , 0 y  $-\tau$ .

## Entendiendo las gráficas de los criterios de von Mises y Tresca

- Evaluando las posibles permutaciones de los esfuerzos principales y reemplazando en las ecuaciones de la base  $\{\hat{n}_D, \hat{n}_E, \hat{n}_F\}$ :

$$\sigma_1 = \tau; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -\tau \quad \sigma_E = -\frac{\tau}{\sqrt{2}}; \sigma_F = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\tau \quad \sigma_F = -\sqrt{3}\sigma_E$$

$$\sigma_1 = \tau; \sigma_3 = 0; \sigma_2 = -\tau \quad \sigma_E = +\frac{\tau}{\sqrt{2}}; \sigma_F = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\tau \quad \sigma_F = \sqrt{3}\sigma_E$$

$$\sigma_2 = \tau; \sigma_1 = 0; \sigma_3 = -\tau \quad \sigma_E = -\sqrt{2}\tau; \sigma_F = 0 \quad \sigma_F = 0$$

$$\sigma_2 = \tau; \sigma_3 = 0; \sigma_1 = -\tau \quad \sigma_E = -\frac{\tau}{\sqrt{2}}; \sigma_F = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\tau \quad \sigma_F = \sqrt{3}\sigma_E$$

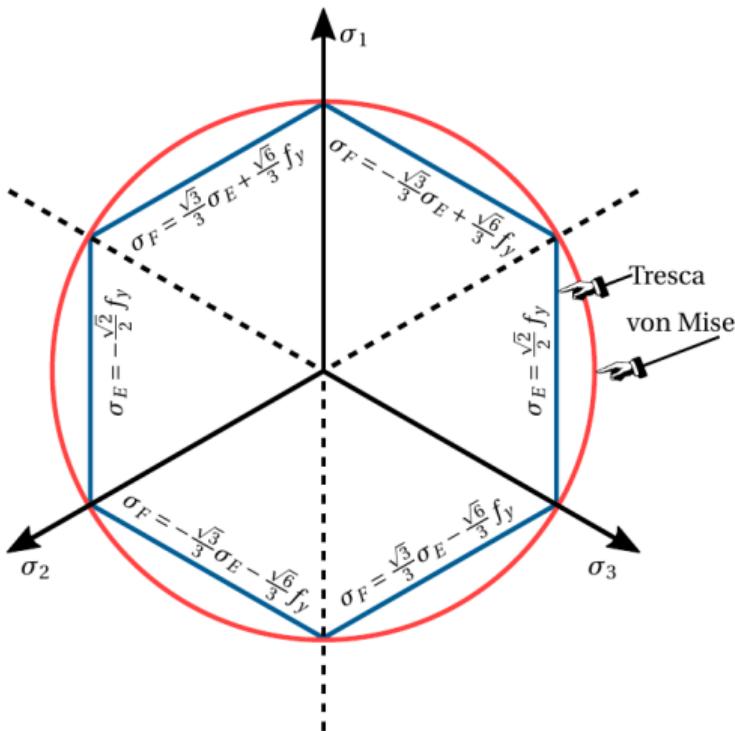
$$\sigma_3 = \tau; \sigma_1 = 0; \sigma_2 = -\tau \quad \sigma_E = +\sqrt{2}\tau; \sigma_F = 0 \quad \sigma_F = 0$$

$$\sigma_3 = \tau; \sigma_2 = 0; \sigma_1 = -\tau \quad \sigma_E = +\frac{\tau}{\sqrt{2}}; \sigma_F = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\tau \quad \sigma_F = -\sqrt{3}\sigma_E$$

## Comparando ambos criterios: von Mises y Tresca

## Comparando ambos criterios: von Mises y Tresca

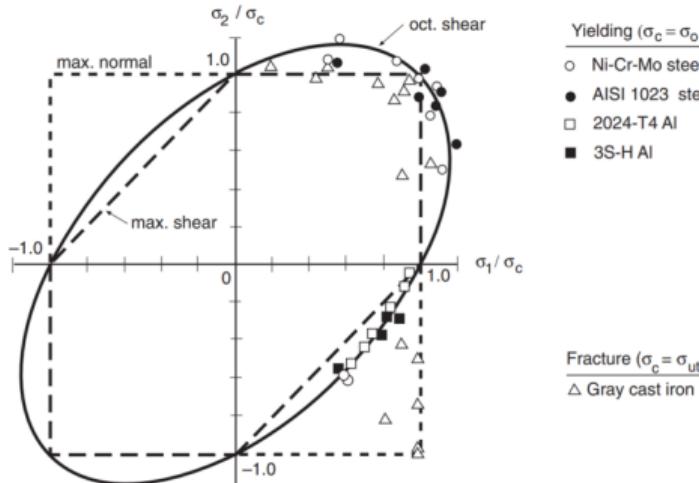
Podemos ver estas comparaciones en al grafica de ambas superficies intersectadas con el plano desviador



1. El material se mantiene en el rango elástico cuando los tres esfuerzos principales son aproximadamente iguales, sin importar cuánto sea la compresión o el estiramiento aplicado.
2. El material entra en fluencia cuando uno de los esfuerzos principales se vuelve mucho más grande o pequeño en comparación con los otros.
3. La superficie de fluencia para metales es independiente de  $I_1 = 3\sigma_M$ : la deformación plástica es prácticamente independiente del esfuerzo hidrostático.

# Comparando ambos criterios: von Mises y Tresca (en tensión plana)

Resultados de autores y estudios de Taylor y Quinney (1932) en tubos de pared delgada de cobre, aluminio y acero

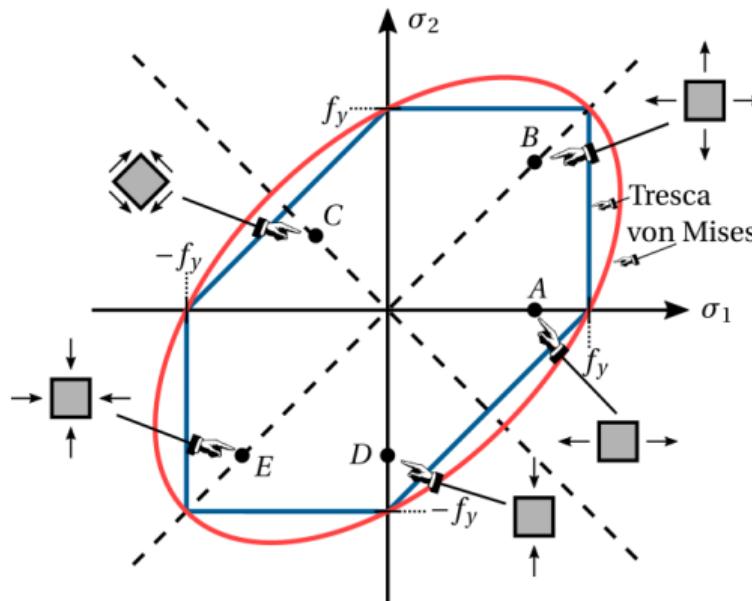


**Figure 7.11** Plane stress failure loci for three criteria. These are compared with biaxial yield data for ductile steels and aluminum alloys, and also with biaxial fracture data for gray cast iron. (The steel data are from [Lessells 40] and [Davis 45], the aluminum data from [Naghdi 58] and [Marin 40], and the cast iron data from [Coffin 50] and [Grassi 49].)

1. La teoría de von Mises predice mejor el inicio de fluencia en dichos materiales que la teoría de Tresca.
2. El ajuste depende mucho del tipo de material. No se debería descartar un criterio a menos que se tengan datos experimentales para comprobarlo.
3. El tipo de criterio a utilizar depende del tipo de material empleado y de qué tan conservadores sean los cálculos.

# Superficie de fluencia de Tresca y von Mises en el caso de tensión plana

En el caso de deformación plana, es más complejo, porque  $\varepsilon_3 = 0$ ,  $\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2)$



- Criterio de von Mises:

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2}{2}} = f_y.$$

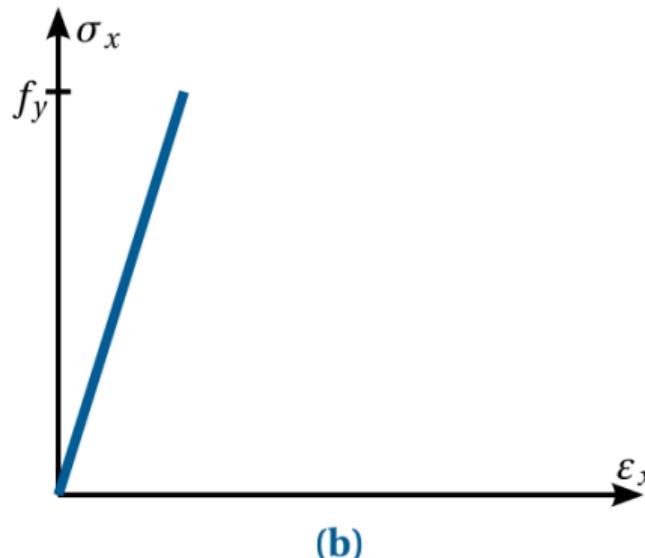
- Criterio de Tresca:

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{\max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2|, |\sigma_1|)}{2} = \frac{f_y}{2}.$$

## Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaédricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distorsión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- **16.7. Criterios de falla en materiales frágiles**
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos

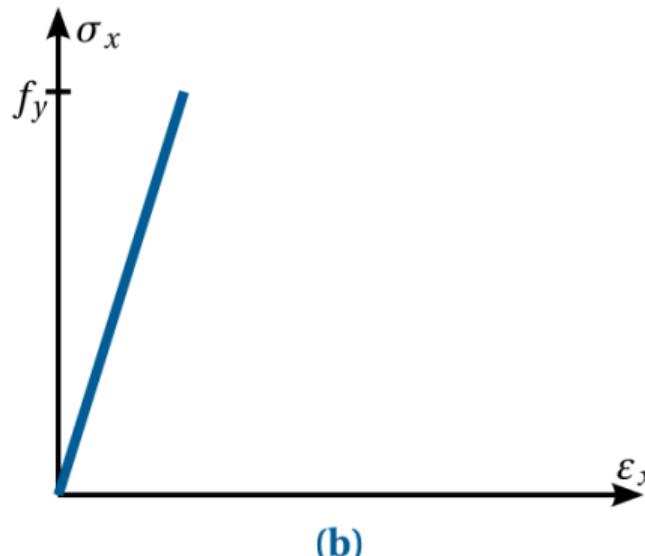
## Criterios de falla en materiales frágiles



Figure

- Haremos referencia a una *superficie de falla* o *superficie de rotura*. En este caso, será  $f = 0$ .
- Algunos materiales frágiles son:
  - Vidrio.
  - Roca.
  - Concreto.
  - Suelo (según sea estudiado, debido a su *plasticidad*).
- Veremos los criterios de:
  - Rankine
  - Mohr-Coulomb
  - Drucker-Prager
  - Matsuoka-Nakai
- Comportamiento que extremadamente dependiente de la presión hidrostática.

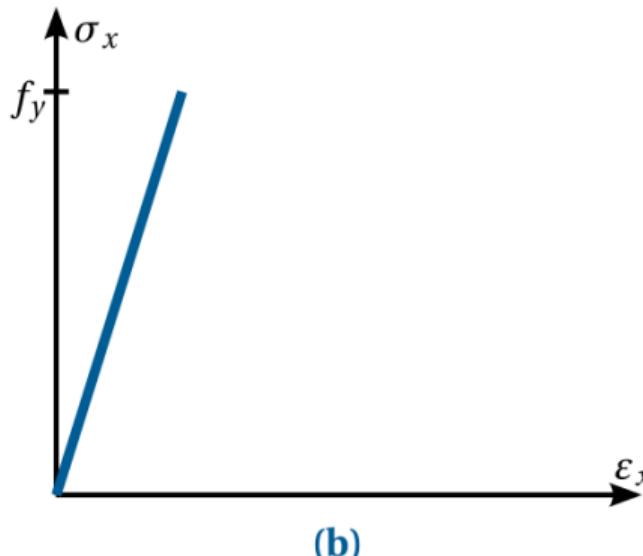
## Criterios de falla en materiales frágiles



Figure

- Haremos referencia a una *superficie de falla* o *superficie de rotura*. En este caso, será  $f = 0$ .
- Algunos materiales frágiles son:
  - Vidrio.
  - Roca.
  - Concreto.
  - Suelo (según sea estudiado, debido a su *plasticidad*).
- Veremos los criterios de:
  - Rankine
  - Mohr-Coulomb
  - Drucker-Prager
  - Matsuoka-Nakai
- Comportamiento que extremadamente dependiente de la presión hidrostática.

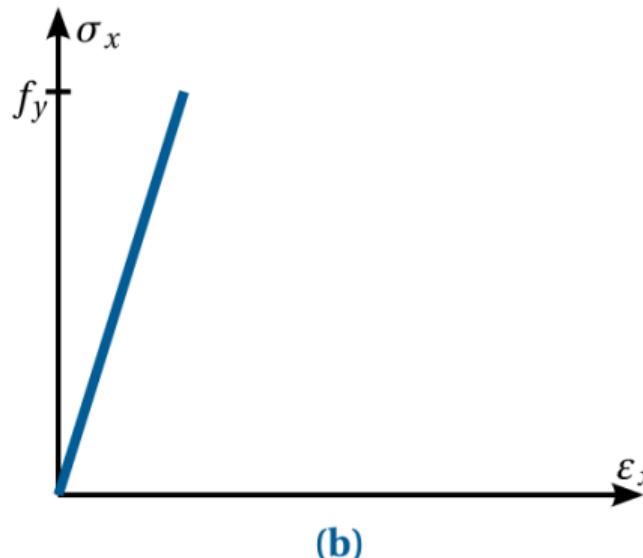
## Criterios de falla en materiales frágiles



Figure

- Haremos referencia a una *superficie de falla* o *superficie de rotura*. En este caso, será  $f = 0$ .
- Algunos materiales frágiles son:
  - Vidrio.
  - Roca.
  - Concreto.
  - Suelo (según sea estudiado, debido a su *plasticidad*).
- Veremos los criterios de:
  - Rankine
  - Mohr-Coulomb
  - Drucker-Prager
  - Matsuoka-Nakai
- Comportamiento que extremadamente dependiente de la presión hidrostática.

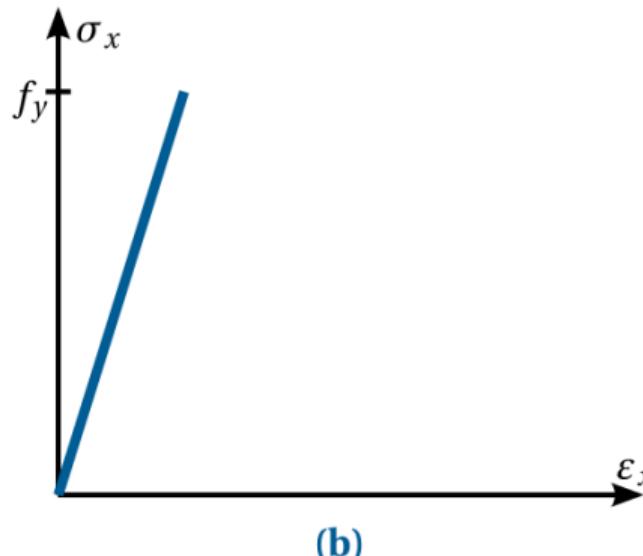
## Criterios de falla en materiales frágiles



Figure

- Haremos referencia a una *superficie de falla* o *superficie de rotura*. En este caso, será  $f = 0$ .
- Algunos materiales frágiles son:
  - Vidrio.
  - Roca.
  - Concreto.
  - Suelo (según sea estudiado, debido a su *plasticidad*).
- Veremos los criterios de:
  - Rankine
  - Mohr-Coulomb
  - Drucker-Prager
  - Matsuoka-Nakai
- Comportamiento que extremadamente dependiente de la presión hidrostática.

## Criterios de falla en materiales frágiles



Figure

- Haremos referencia a una *superficie de falla* o *superficie de rotura*. En este caso, será  $f = 0$ .
- Algunos materiales frágiles son:
  - Vidrio.
  - Roca.
  - Concreto.
  - Suelo (según sea estudiado, debido a su *plasticidad*).
- Veremos los criterios de:
  - Rankine
  - Mohr-Coulomb
  - Drucker-Prager
  - Matsuoka-Nakai
- Comportamiento que extremadamente dependiente de la presión hidrostática.

# Criterio de Rankine

# Criterio de Rankine

William John Macquorn Rankine (1820-1872) en 1850 | Criterio del esfuerzo principal máximo

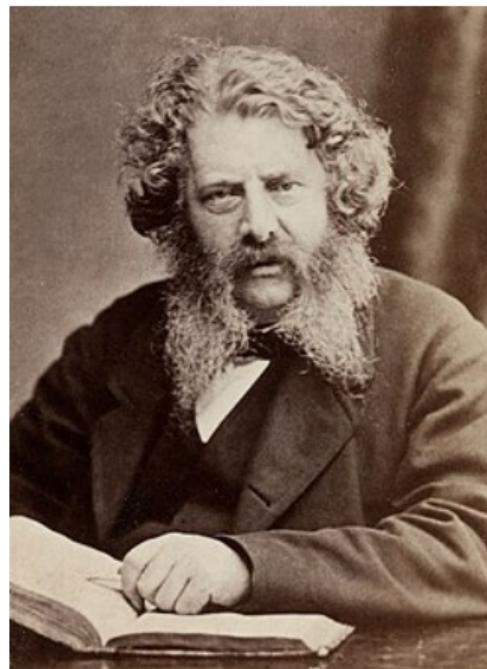


Figure: William J. M. Rankine.

- Un material falla a tracción cuando el esfuerzo principal más grande es mayor o igual que el esfuerzo máximo permisible por dicho material al ensayo de tracción simple,  $\sigma_t$ :

$$\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \geq \sigma_t.$$

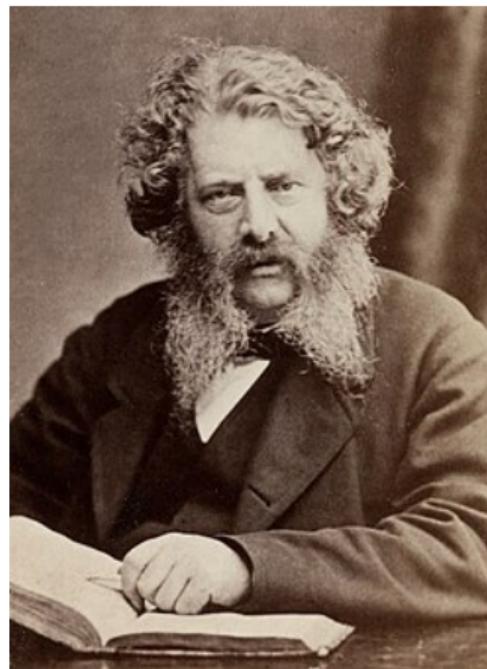
- Se extiende a la compresión,  $\sigma_c$ , cuando

$$\min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_c.$$

asumiendo  $\sigma_t \geq 0 \geq \sigma_c$ .

# Criterio de Rankine

William John Macquorn Rankine (1820-1872) en 1850 | Criterio del esfuerzo principal máximo



- Un material falla a tracción cuando el esfuerzo principal más grande es mayor o igual que el esfuerzo máximo permisible por dicho material al ensayo de tracción simple,  $\sigma_t$ :

$$\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \geq \sigma_t.$$

- Se extiende a la compresión,  $\sigma_c$ , cuando

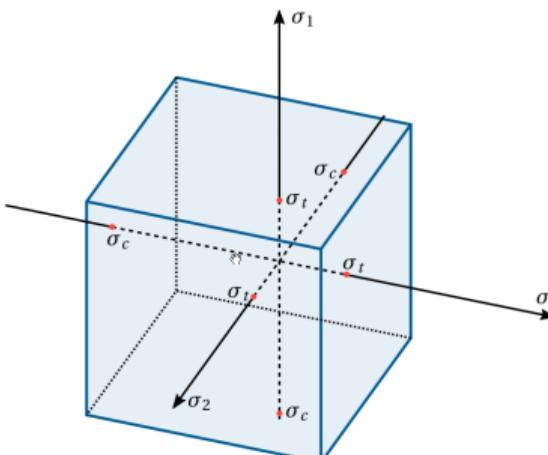
$$\min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_c.$$

asumiendo  $\sigma_t \geq 0 \geq \sigma_c$ .

Figure: William J. M. Rankine.

# Criterio de Rankine

William John Macquorn Rankine (1820-1872) en 1850 | Criterio del esfuerzo principal máximo



Figure

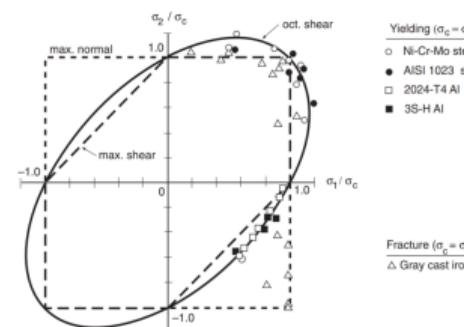


Figure 7.11 Plane stress failure loci for three criteria. These are compared with biaxial yield data for ductile steels and aluminum alloys, and also with biaxial fracture data for gray cast iron. (The steel data are from [Lessells 40] and [Davis 45], the aluminum data from [Naghdi 58] and [Marin 40], and the cast iron data from [Coffin 50] and [Grassi 49].)

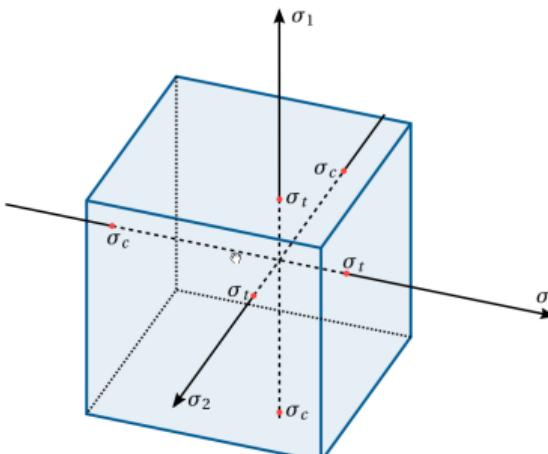
Figure

## Observaciones:

1. Fácil comparación con los datos experimentales pero no predice bien su falla. Ejemplo: hierro fundido (cast iron).
2. No es un criterio válido. De ser cierto, se produciría la rotura por compresión hidrostática ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_c$ ), lo cual está en desacuerdo con los resultados experimentales (Recordar los ensayos de Bridgman y otros).

# Criterio de Rankine

William John Macquorn Rankine (1820-1872) en 1850 | Criterio del esfuerzo principal máximo



Figure

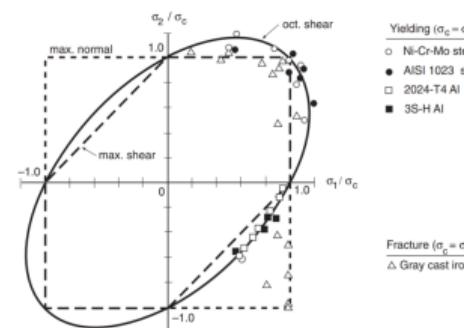


Figure 7.11 Plane stress failure loci for three criteria. These are compared with biaxial yield data for ductile steels and aluminum alloys, and also with biaxial fracture data for gray cast iron. (The steel data are from [Lessells 40] and [Davis 45], the aluminum data from [Naghdi 58] and [Marin 40], and the cast iron data from [Coffin 50] and [Grassi 49].)

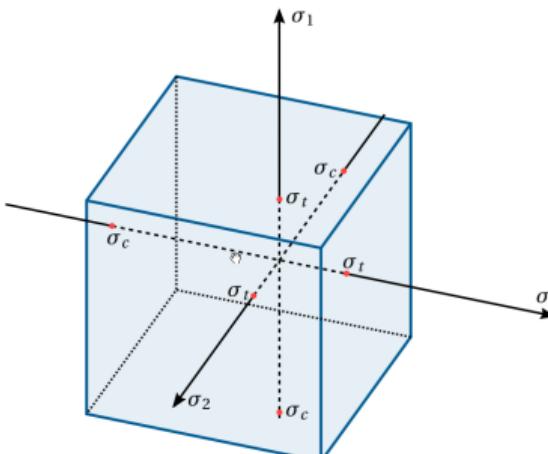
Figure

## Observaciones:

1. Fácil comparación con los datos experimentales pero no predice bien su falla. Ejemplo: hierro fundido (cast iron).
2. No es un criterio válido. De ser cierto, se produciría la rotura por compresión hidrostática ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_c$ ), lo cual está en desacuerdo con los resultados experimentales (Recordar los ensayos de Bridgman y otros).

# Criterio de Rankine

William John Macquorn Rankine (1820-1872) en 1850 | Criterio del esfuerzo principal máximo



Figure

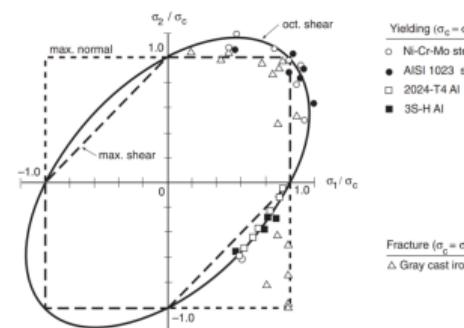


Figure 7.11 Plane stress failure loci for three criteria. These are compared with biaxial yield data for ductile steels and aluminum alloys, and also with biaxial fracture data for gray cast iron. (The steel data are from [Lessells 40] and [Davis 45], the aluminum data from [Naghdi 58] and [Marin 40], and the cast iron data from [Coffin 50] and [Grassi 49].)

Figure

## Observaciones:

1. Fácil comparación con los datos experimentales pero no predice bien su falla. Ejemplo: hierro fundido (cast iron).
2. **No es un criterio válido.** De ser cierto, se produciría la rotura por compresión hidrostática ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_c$ ), lo cual está en desacuerdo con los resultados experimentales (*Recordar los ensayos de Bridgman y otros*).

# Criterio de Mohr-Coulomb

## Criterio de Mohr-Coulomb

Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806) en 1776 | Christian Otto Mohr (1835-1918) finales del siglo XIX



Figure: Charles-Augustin de Coulomb

Figure: Christian Otto Mohr

- Describe la respuesta de materiales frágiles a la acción combinada de los esfuerzos normales y cortantes.
- Se aplica a los materiales para los cuales la resistencia a la compresión es mucho mayor que la resistencia a la tracción y para modelar materiales cuya resistencia depende de la presión de confinamiento,  $\sigma_M$ .
- Empleado en mecánica de suelos, por:
  - Robustez
  - Parámetros de origen experimental
  - Fácil interpretación física

## Criterio de Mohr-Coulomb

Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806) en 1776 | Christian Otto Mohr (1835-1918) finales del siglo XIX



Figure: Charles-Augustin de Coulomb

Figure: Christian Otto Mohr

- Describe la respuesta de materiales frágiles a la acción combinada de los esfuerzos normales y cortantes.
- Se aplica a los materiales para los cuales la resistencia a la compresión es mucho mayor que la resistencia a la tracción y para modelar materiales cuya resistencia depende de la presión de confinamiento,  $\sigma_M$ .
- Empleado en mecánica de suelos, por:
  - Robustez
  - Parámetros de origen experimental
  - Fácil interpretación física

## Criterio de Mohr-Coulomb

Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806) en 1776 | Christian Otto Mohr (1835-1918) finales del siglo XIX



Figure: Charles-Augustin de Coulomb



Figure: Christian Otto Mohr

- Describe la respuesta de materiales frágiles a la acción combinada de los esfuerzos normales y cortantes.
- Se aplica a los materiales para los cuales la resistencia a la compresión es mucho mayor que la resistencia a la tracción y para modelar materiales cuya resistencia depende de la presión de confinamiento,  $\sigma_M$ .
- Empleado en mecánica de suelos, por:
  - Robustez
  - Parámetros de origen experimental
  - Fácil interpretación física

## Criterio de Mohr-Coulomb

Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806) en 1776 | Christian Otto Mohr (1835-1918) finales del siglo XIX



Figure: Charles-Augustin de Coulomb

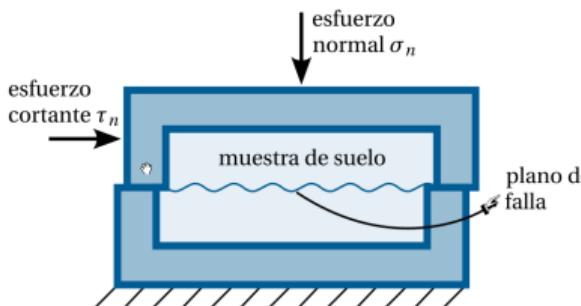


Figure: Christian Otto Mohr

- Describe la respuesta de materiales frágiles a la acción combinada de los esfuerzos normales y cortantes.
- Se aplica a los materiales para los cuales la resistencia a la compresión es mucho mayor que la resistencia a la tracción y para modelar materiales cuya resistencia depende de la presión de confinamiento,  $\sigma_M$ .
- Empleado en mecánica de suelos, por:
  - Robustez
  - Parámetros de origen experimental
  - Fácil interpretación física

# Criterio de Mohr-Coulomb

Motivación en el ensayo de corte directo



(a) Esquema del ensayo de corte directo.



(b) Video: ensayo de corte directo ASTM D3080.  
[Link](#).

Figure

## Pruebas de laboratorio para medir $\tau$

Los ensayos tradicionales que se realizan tradicionalmente para el estudio de la resistencia al corte ( $\tau$ ) son: corte directo, compresión simple, uniaxial o inconfinada y compresión triaxial

Prueba	Compresión triaxial	Compresión confinada (lateral)	Compresión lateral	Corte directo
Condición básica				
Tipo de deformación	Volumétrica	Volumétrica sin volumen constante con rigidez dinámica	Dimensional y rotacional	Dimensional principalmente, con cierta deformación rotacional

Pruebas para medir resistencia al corte - Modificado de Lambe y Whitman (1967)

El fin básico de las pruebas de resistencia al corte, es determinar los parámetros de cohesión ( $c$ ) y ángulo de fricción ( $\phi$ )

(c) Video: El ensayo de corte directo [Link](#) (échale una mirada a los demás video del canal).

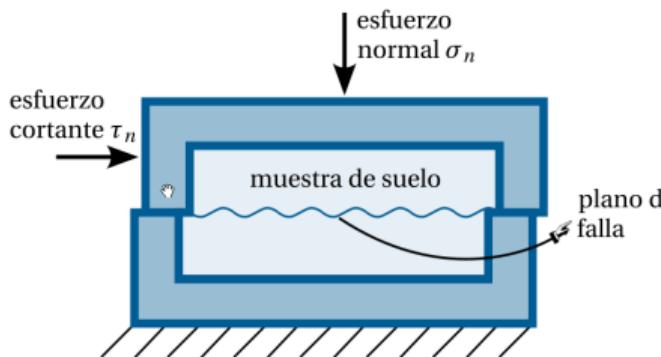
## Criterio de Mohr-Coulomb

Entendiendo la interpretación de la Mecánica de Suelos | Braja M. Das ([FECHA](#))

Colocar aquí información de Braja M. Das

# Criterio de Mohr-Coulomb

Motivación en el ensayo de corte directo



Figure

Procedimiento:

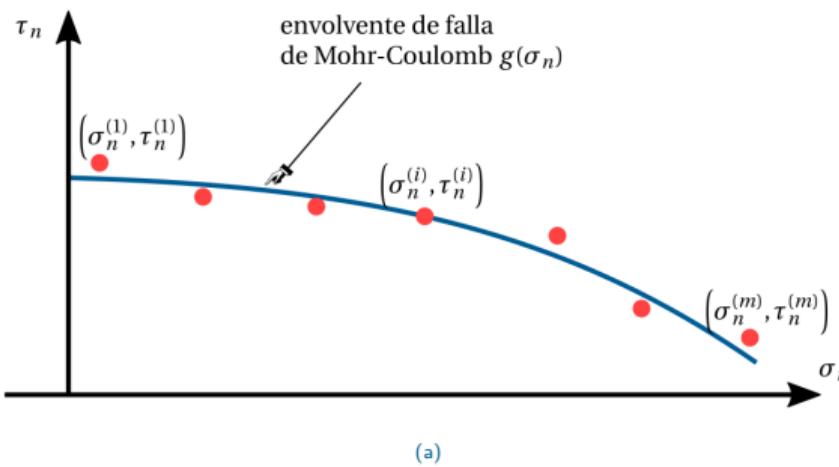
- $(\sigma_n^{(i)}, \tau_n^{(i)})$ : conjunto de esfuerzos normal–esfuerzo cortante para el cual la muestra  $i$ –ésima se rompe.
- El ensayo se repite para  $m$  muestras de suelo. Graficamos el conjunto de combinaciones  $(\sigma_n^{(i)}, \tau_n^{(i)})$  para  $i = 1, 2, \dots, m$  en un diagrama.
- Los puntos siguen la forma de la curva

$$f(\underline{\sigma}) = |\tau_n| - g(\sigma_n) = 0.$$

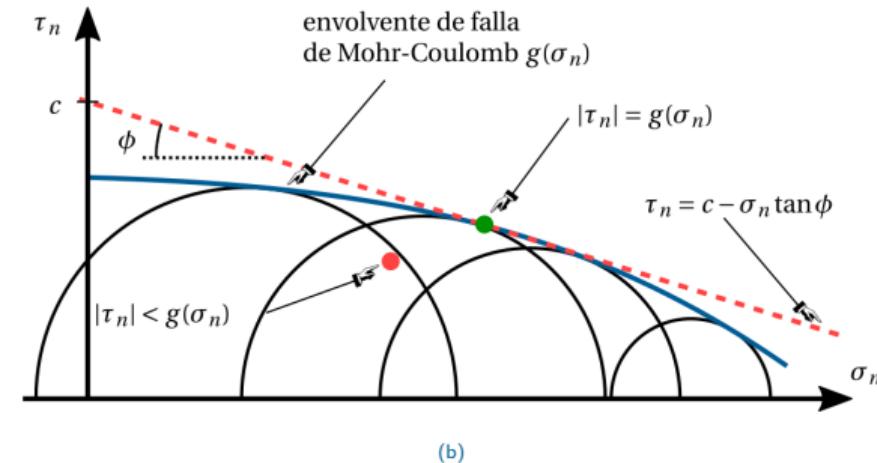
donde  $g$  es la **envolvente de falla de Mohr-Coulomb** o curva intrínseca de Caquot.

# Criterio de Mohr-Coulomb

Motivación en el ensayo de corte directo



(a)



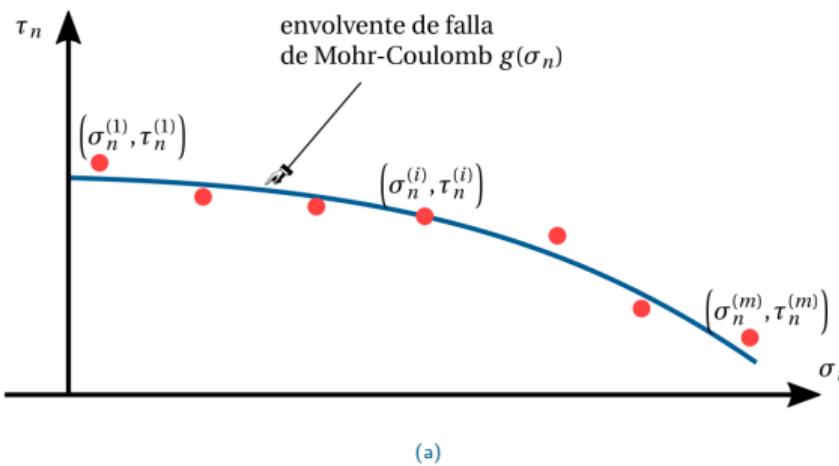
(b)

Figure

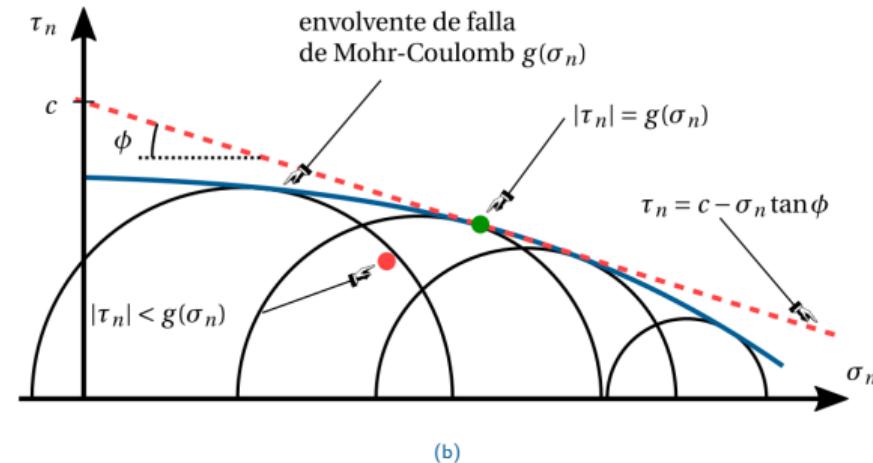
- $c \geq 0$ : **Cohesión**. Resistencia al corte cuando  $\sigma_n = 0$ .
- $\phi \in [0^\circ, 90^\circ]$ : **Ángulo de fricción interna**. Determina cuánto aumenta la resistencia al corte por cada unidad de aumento en el esfuerzo normal de compresión.

# Criterio de Mohr-Coulomb

Motivación en el ensayo de corte directo



(a)



(b)

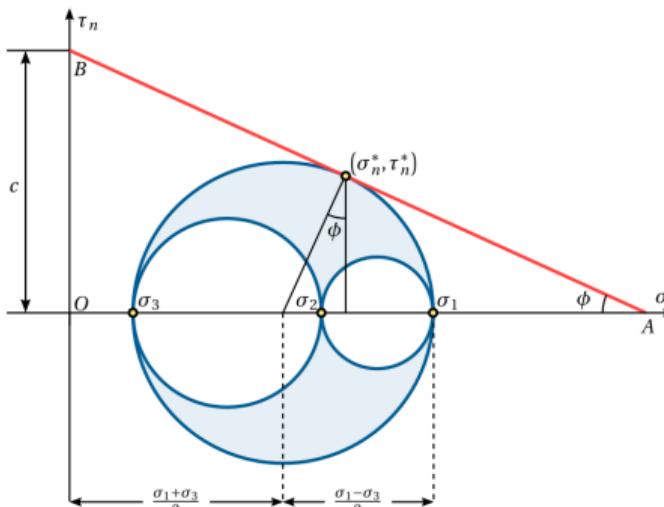
Figure

Observaciones:

1. La envolvente representa la máxima resistencia al corte del suelo para diferentes niveles de esfuerzo normal.
2. Es una característica mecánica del material obtenida a partir de ensayos.

# Criterio de Mohr-Coulomb

Desde la perspectiva del Círculo de Mohr 3D



Figure

Aproximemos la función  $g$  por la línea recta

$$g(\sigma_n) = c - \sigma_n \tan \phi.$$

Considerando una condición de esfuerzo crítico t.q.  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ :

1. Encontramos  $(\sigma_n^*, \tau_n^*)$ .
2. Reemplazamos en  $f(\underline{\sigma})$ .
3. Simplificamos:

Superficie de falla de Mohr-Coulomb

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \phi - c \cos \phi = 0.$$

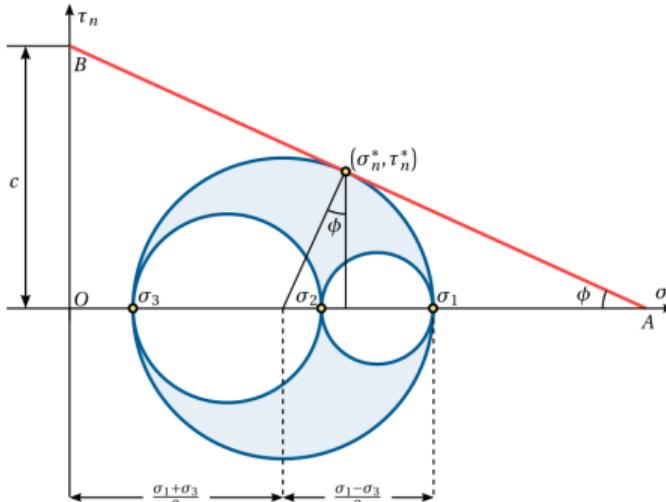
# Criterio de Mohr-Coulomb

Desde la perspectiva del Círculo de Mohr 3D

Alternativamente:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_2 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_3 - c \cos \phi = 0.$$

Considerando las 6 posibles permutaciones de esfuerzos principales:



Figure

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_1 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_3 - c \cos \phi = 0$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2 \quad \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_1 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_2 - c \cos \phi = 0$$

$$\sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3 \quad \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_2 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_3 - c \cos \phi = 0$$

$$\sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_1 \quad \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_2 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_1 - c \cos \phi = 0$$

$$\sigma_3 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \quad \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_3 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_2 - c \cos \phi = 0$$

$$\sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1 \quad \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_3 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_1 - c \cos \phi = 0$$

# Criterio de Mohr-Coulomb

La delgada línea de un criterio único...

Alternativamente:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_2 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_3 - c \cos \phi = 0.$$

Considerando las 6 posibles permutaciones de esfuerzos principales:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_1 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_3 - c \cos \phi = 0$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2 \quad \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_1 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_2 - c \cos \phi = 0$$

$$\sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3 \quad \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_2 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_3 - c \cos \phi = 0$$

$$\sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_1 \quad \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_2 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_1 - c \cos \phi = 0$$

$$\sigma_3 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \quad \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_3 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_2 - c \cos \phi = 0$$

$$\sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1 \quad \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_3 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_1 - c \cos \phi = 0$$

De Mohr-Coulomb a Tresca:

- Tome  $\phi = 0^\circ$  y  $c = f_y/2$
- Multiplique las combinaciones por 2 y compare con las ecuaciones de Tresca.  
(¿Cómo afecta aquí que la compresión sea tomada positiva?)

De Mohr-Coulomb a Rankin:

- Tome  $\phi = 90^\circ$
- Haga  $\sigma_t = 0$  y  $\sigma_c \rightarrow \infty$  en la gráfica de Rankin.

# Criterio de Mohr-Coulomb

La delgada línea de un criterio único...

Alternativamente:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_2 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_3 - c \cos \phi = 0.$$

Considerando las 6 posibles permutaciones de esfuerzos principales:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_1 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_3 - c \cos \phi = 0$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2 \quad \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_1 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_2 - c \cos \phi = 0$$

$$\sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3 \quad \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_2 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_3 - c \cos \phi = 0$$

$$\sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_1 \quad \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_2 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_1 - c \cos \phi = 0$$

$$\sigma_3 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \quad \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_3 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_2 - c \cos \phi = 0$$

$$\sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1 \quad \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_3 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_1 - c \cos \phi = 0$$

## De Mohr-Coulomb a Tresca:

- Tome  $\phi = 0^\circ$  y  $c = f_y/2$
- Multiplique las combinaciones por 2 y compare con las ecuaciones de Tresca.  
**(¿Cómo afecta aquí que la compresión sea tomada positiva?)**

## De Mohr-Coulomb a Rankin:

- Tome  $\phi = 90^\circ$
- Haga  $\sigma_t = 0$  y  $\sigma_c \rightarrow \infty$  en la gráfica de Rankin.

# Criterio de Mohr-Coulomb

La delgada línea de un criterio único...

Alternativamente:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_2 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_3 - c \cos \phi = 0.$$

Considerando las 6 posibles permutaciones de esfuerzos principales:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_1 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_3 - c \cos \phi = 0$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2 \quad \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_1 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_2 - c \cos \phi = 0$$

$$\sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3 \quad \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_2 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_3 - c \cos \phi = 0$$

$$\sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_1 \quad \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_2 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_1 - c \cos \phi = 0$$

$$\sigma_3 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \quad \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_3 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_2 - c \cos \phi = 0$$

$$\sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1 \quad \frac{\sin \phi + 1}{2} \sigma_3 + \frac{\sin \phi - 1}{2} \sigma_1 - c \cos \phi = 0$$

## De Mohr-Coulomb a Tresca:

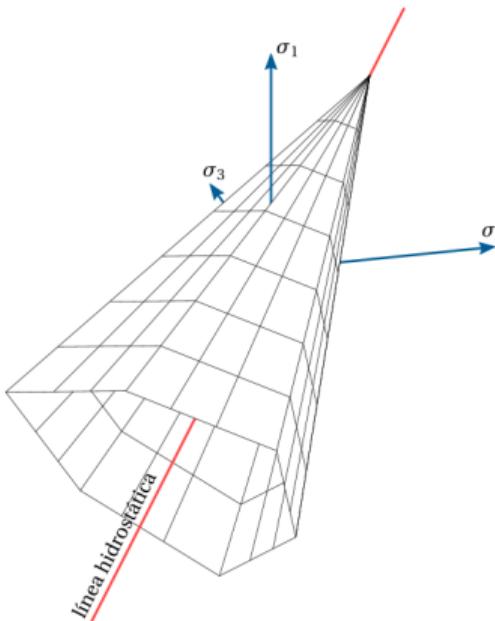
- Tome  $\phi = 0^\circ$  y  $c = f_y/2$
- Multiplique las combinaciones por 2 y compare con las ecuaciones de Tresca.  
(*¿Cómo afecta aquí que la compresión sea tomada positiva?*)

## De Mohr-Coulomb a Rankin:

- Tome  $\phi = 90^\circ$
- Haga  $\sigma_t = 0$  y  $\sigma_c \rightarrow \infty$  en la gráfica de Rankin.

# Criterio de Mohr-Coulomb

## Visualizando la superficie de falla



Mediante cambio de coordenadas, en el sistema de coordenadas cilíndricas de Haigh-Westergaard:

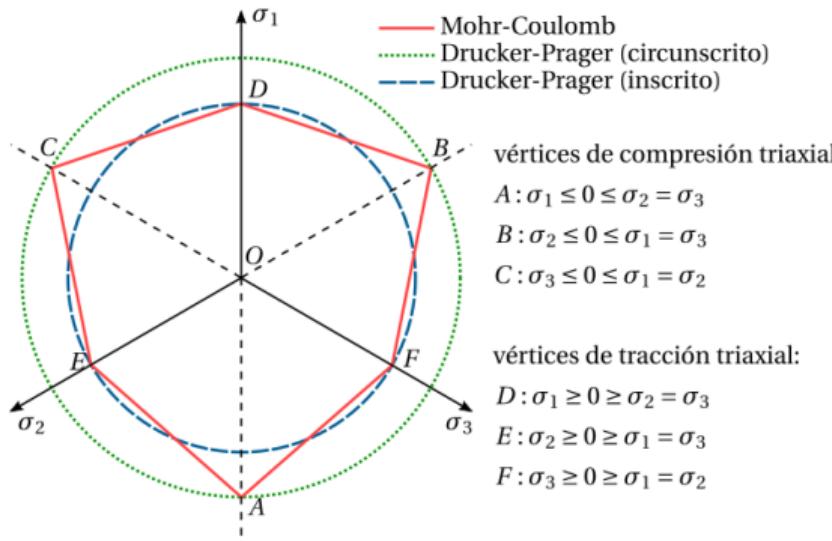
$$f(\rho, \theta, \xi) = \frac{\xi}{\sqrt{3}} \sin \phi + \frac{\rho}{\sqrt{2}} \left[ \sin(\theta + 60^\circ) + \frac{\sin \phi}{\sqrt{3}} \cos(\theta + 60^\circ) \right] - c \cos \phi = 0.$$

- Válida para  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , es decir,  $\theta \in [0^\circ, 60^\circ]$ .
- Para otros valores de theta la superficie se obtiene utilizando la simetría del espacio.

Figure

# Criterio de Mohr-Coulomb

Visualizando del corte de la superficie de falla con el plano desviador *pi*



Figure

Al hacer  $\xi = 0$ : la intersección de la superficie de fluencia con el plano  $\pi$ , observamos:

## Vértices mayores

Ilustran condicioneas de esfuerzo en los cuales dos esfuerzos principales son iguales y el tercero es **menor** que los otros dos.

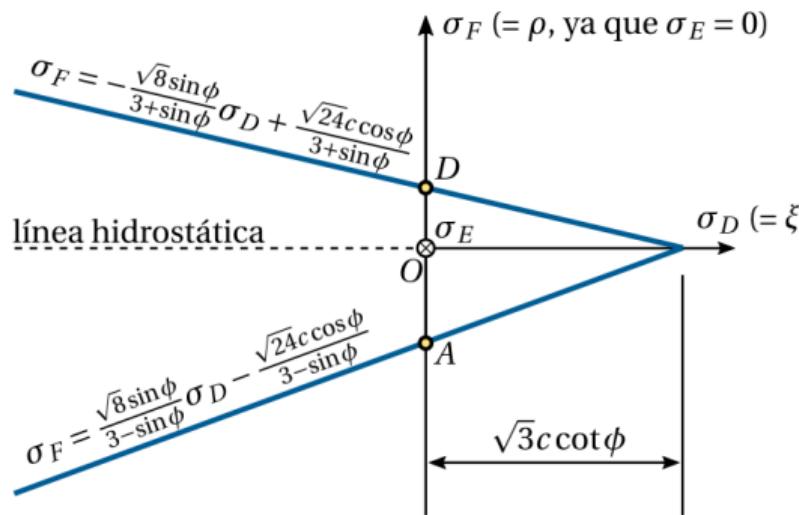
## Vértices menores

Ilustran condicioneas de esfuerzo en los cuales dos esfuerzos principales son iguales y el tercero es **mayor** que los otros dos.

**Observación:** El material soporta mayores esfuerzos desviadores en un ensayo triaxial de compresión, ya que los vértices mayores están más alejados del punto  $O$  que los vértices menores.

# Criterio de Mohr-Coulomb

El perfil meridional: la intersección de la superficie de fluencia con el plano  $\sigma_E = 0$



Figure

- Las líneas rectas que describen el perfil meridional:

$$\theta = 0^\circ \Rightarrow \sigma_F = -\frac{\sqrt{8} \sin \phi}{3 + \sin \phi} \sigma_D + \frac{\sqrt{24} c \cos \phi}{3 + \sin \phi}$$

$$\theta = 60^\circ \Rightarrow \sigma_F = \frac{\sqrt{8} \sin \phi}{3 - \sin \phi} \sigma_D - \frac{\sqrt{24} c \cos \phi}{3 - \sin \phi}.$$

- Se obtiene que el máximo esfuerzo hidrostático a tracción es

$$\sigma_D = \sqrt{3}c \cot \phi.$$

como  $\xi = \sigma_D = \sqrt{3}\sigma_M$ , el mayor esfuerzo teórico a tracción es  $\sigma_M = c \cot \phi$ .

# Criterio de Drucker-Prager

## Criterio de Drucker-Prager

# Criterio de Matsuoka-Nakai

## Criterio de Matsuoka-Nakai

## Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaédricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distorsión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- **16.8. Graficando las superficies de fluencia**
- 16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos



## Derrotero

- Introducción
- 16.1. Esfuerzos medios y esfuerzos desviadores
- 16.2. Esfuerzos octaédricos
- 16.3. El espacio de esfuerzos principales, la superficie de fluencia y la región elástica
- 16.4. Comportamiento de los materiales isótropos en el rango plástico cuando se les somete a una condición de esfuerzos tridimensionales
- 16.5. Energía de dilatación y energía de distorsión
- 16.6. Criterios de fluencia en materiales dúctiles
- 16.7. Criterios de falla en materiales frágiles
- 16.8. Graficando las superficies de fluencia
- **16.9. Criterios de falla en materiales elásticos anisótropos**



Fin.