

4200687 - Mecánica Tensorial

Unidad 4. Relación entre tensiones y deformaciones

**Michael Heredia Pérez
Ing., Esp., MSc.**

mherediap@unal.edu.co

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales
Departamento de Ingeniería Civil



2026a

Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada.



Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortotropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Material de apoyo

Derrotero

● Preámbulo

- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortótropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Material de apoyo

Observación

Las ecuaciones deducidas en las unidades 2 (esfuerzos) y 3 (deformaciones) solo tienen en cuenta factores geométricos y se ha aplicado equilibrio estático, por lo tanto son independientes del material.

Observaciones

La deformación de un sólido con esfuerzos aplicados depende de:

- La velocidad de aplicación de estos.
- La historia de carga.
- La temperatura.
- Las propiedades del material.

Observaciones

La deformación de un sólido con esfuerzos aplicados depende de:

- La velocidad de aplicación de estos.
- La historia de carga.
- La temperatura.
- Las propiedades del material.

Observaciones

La deformación de un sólido con esfuerzos aplicados depende de:

- La velocidad de aplicación de estos.
- La historia de carga.
- La temperatura.
- Las propiedades del material.

Observaciones

La deformación de un sólido con esfuerzos aplicados depende de:

- La velocidad de aplicación de estos.
- La historia de carga.
- La temperatura.
- Las propiedades del material.

Observaciones

La deformación de un sólido con esfuerzos aplicados depende de:

- La velocidad de aplicación de estos.
- La historia de carga.
- La temperatura.
- Las propiedades del material.

Modelos constitutivos

Modelos matemáticos que relacionan los esfuerzos y las deformaciones, teniendo en cuenta las variables anteriores.

velocidad, historia de carga, temperatura y propiedades del material

Modelos constitutivos

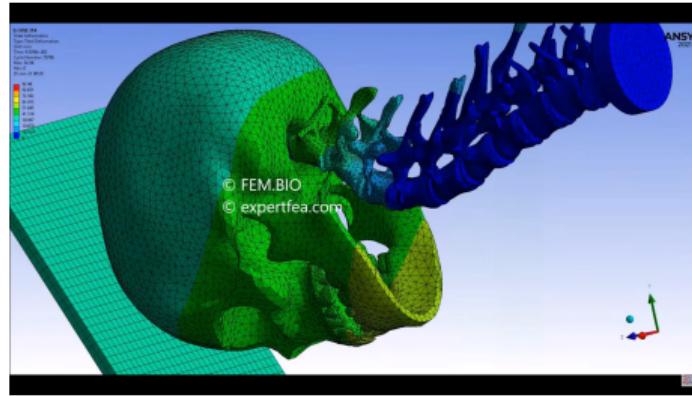


Figure: Simulation of Compression Shock of Skull with Brain Missing Meninges - ANSYS Explicit Dynamics. [Video](#).

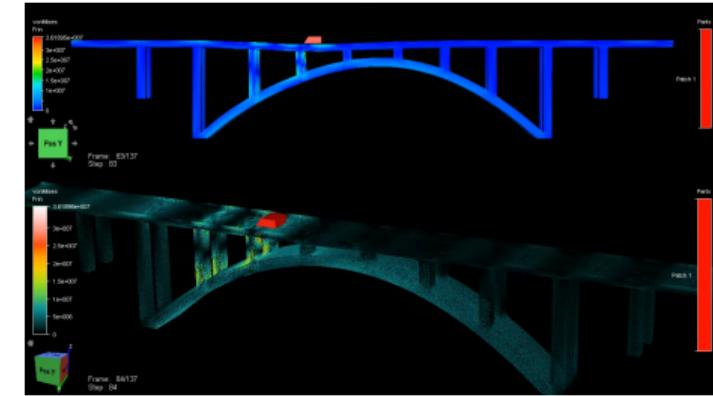


Figure: Linear Elasticity Problem using FEM (Bridge model). [Video](#).

Modelos constitutivos

Analizaremos el modelo constitutivo de los llamados sólidos con comportamiento “*elástico lineal*”, asumiendo que **la velocidad de aplicación de la carga en el ensayo de carga-desplazamiento, no tiene ningún efecto en dicha relación elástica lineal.**

Definiciones Importantes

- **Resistencia:** Oposición a la rotura.
[Seguridad](#)
- **Rigidez:** Oposición a la deformación.
[Funcionalidad](#)
- **Ductilidad:** Capacidad de deformarse (plásticamente) sin romperse.

Derrotero

- Preámbulo
- **4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles**
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortotropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Material de apoyo

Materiales frágiles y materiales dúctiles

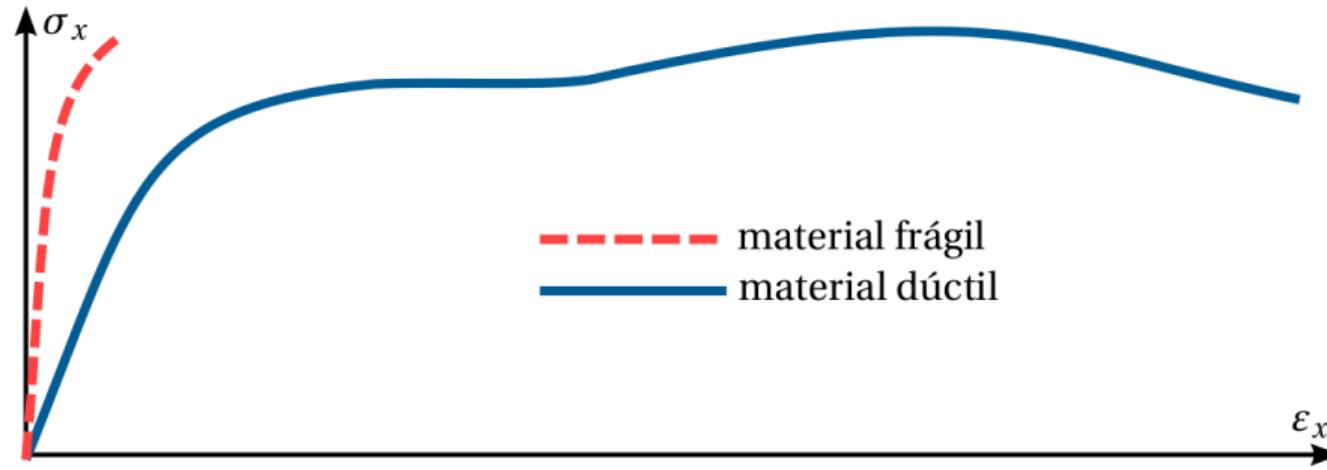


Figure: Curva esfuerzo-deformación para materiales dúctiles y frágiles.

Curvas esfuerzo-deformación

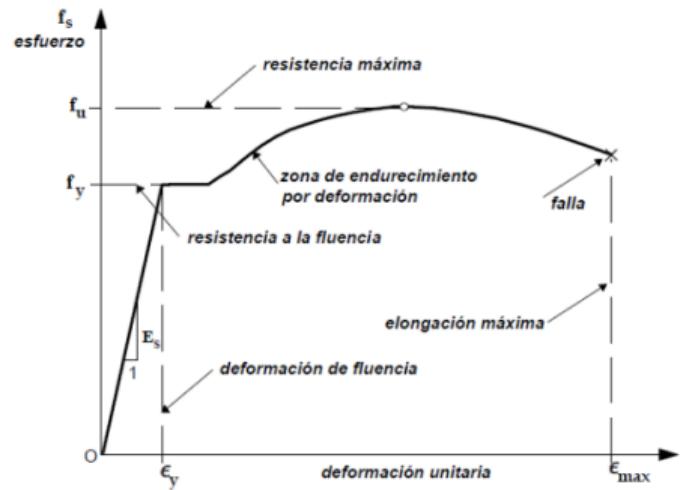


Figura 6-2(a) - Curva esfuerzo-deformación del acero de refuerzo

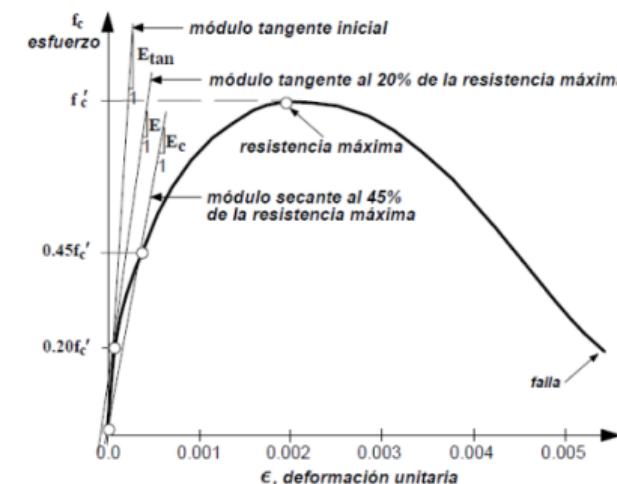


Figura 6-2(b) - Curva esfuerzo-deformación del concreto no confinado

Figure: Tomado de [garciareyes](#). No comparar escalas.

Curvas esfuerzo-deformación

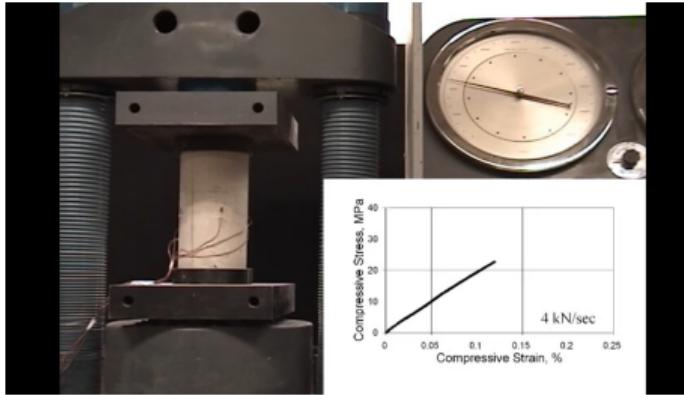


Figure: Compression testing of concrete. [Video](#).

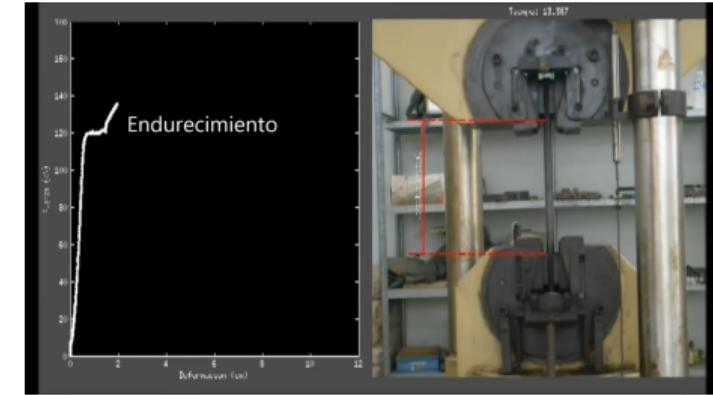
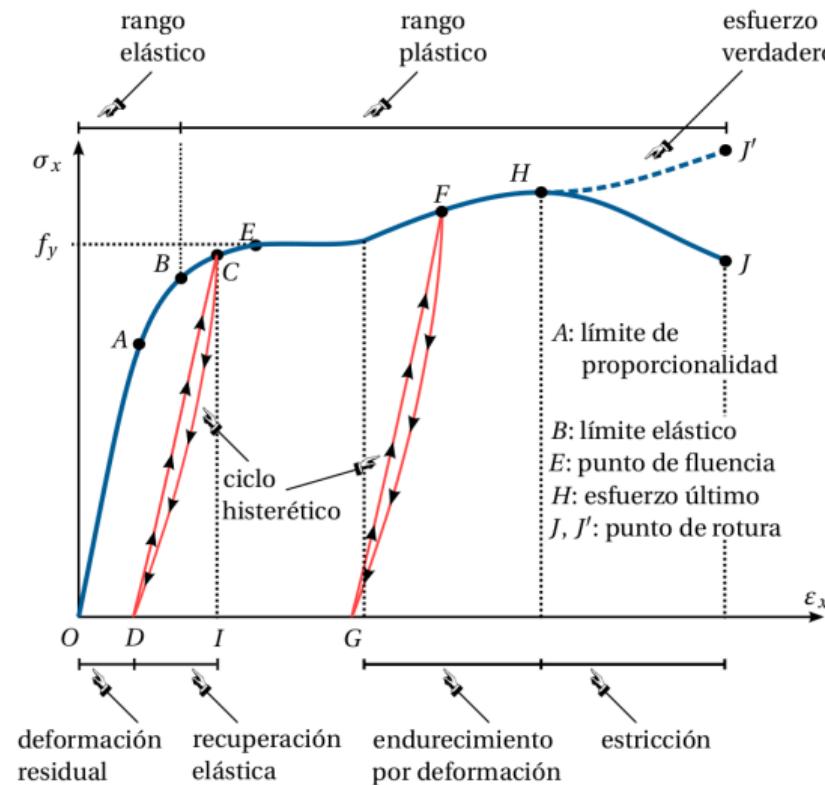


Figure: Ensayo de tracción - Resistencia de materiales. [Video](#).

Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- **4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles**
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortótropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Material de apoyo

Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles



Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles (Sin claridad del límite de fluencia)

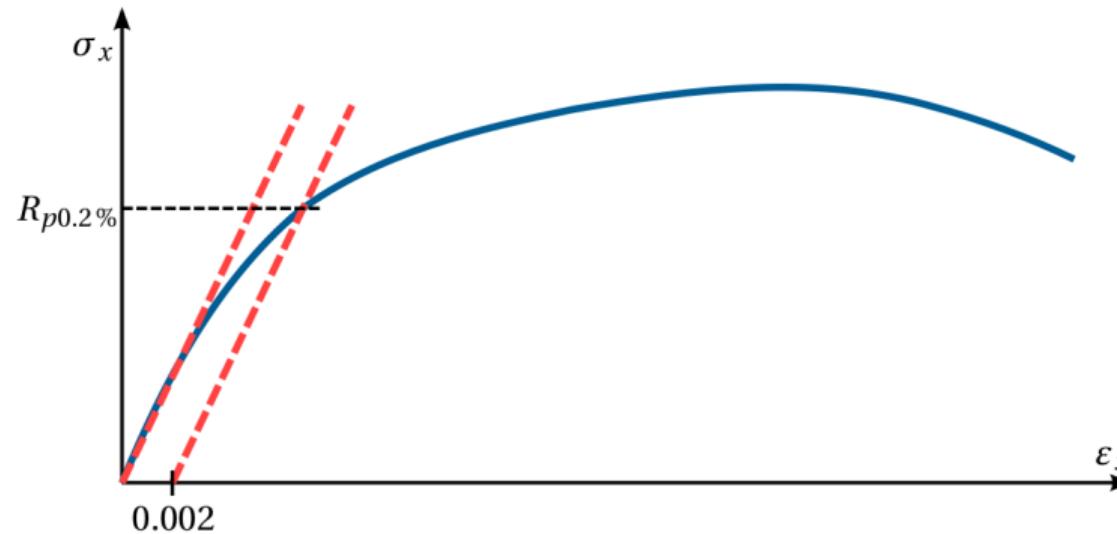


Figure: Método de la compensación o corregimiento ASTM A370.

Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles (Sin claridad del límite de fluencia)

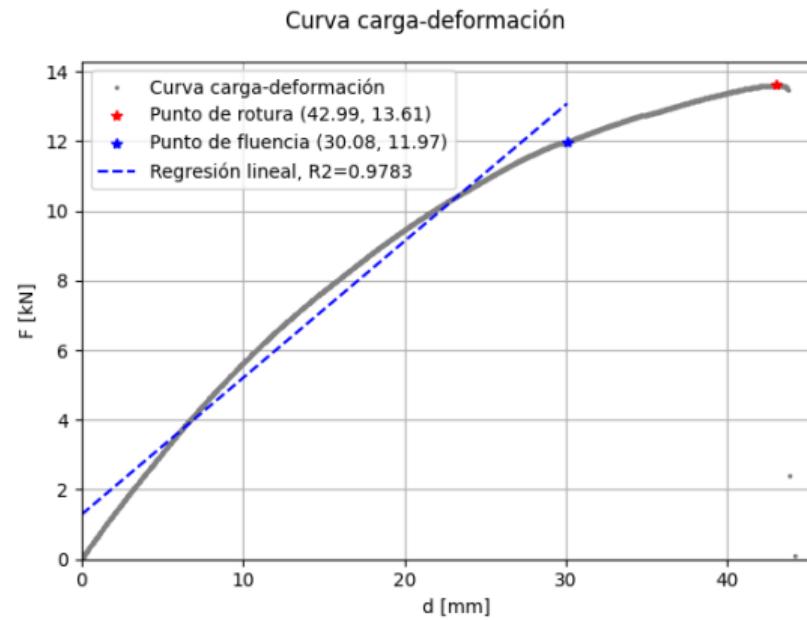


Figure: Ensayo de madera plástica (plastic lumber en inglés) realizado en el Laboratorio de Ingeniería Estructural y Sísmica de la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales.

Comportamiento del acero

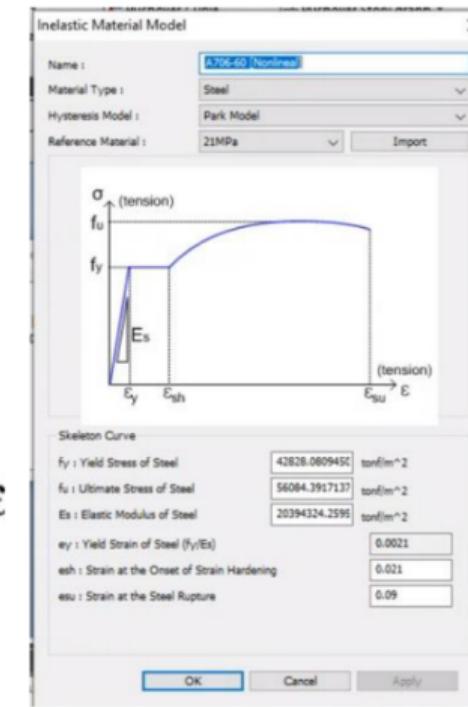
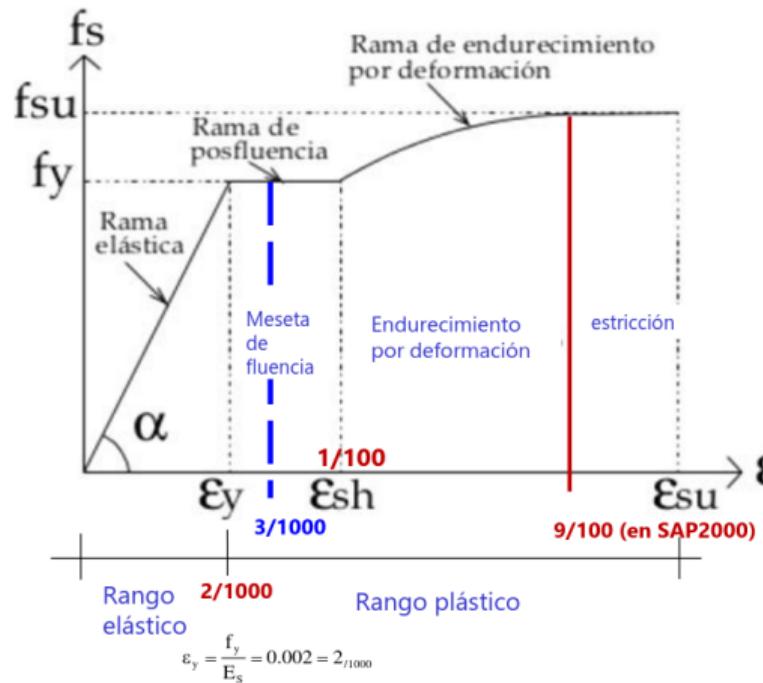


Figure: *Curso de Diseño Sísmico de Concreto Reforzado; [Bedoya, 2022]*.

Comportamiento del concreto reforzado

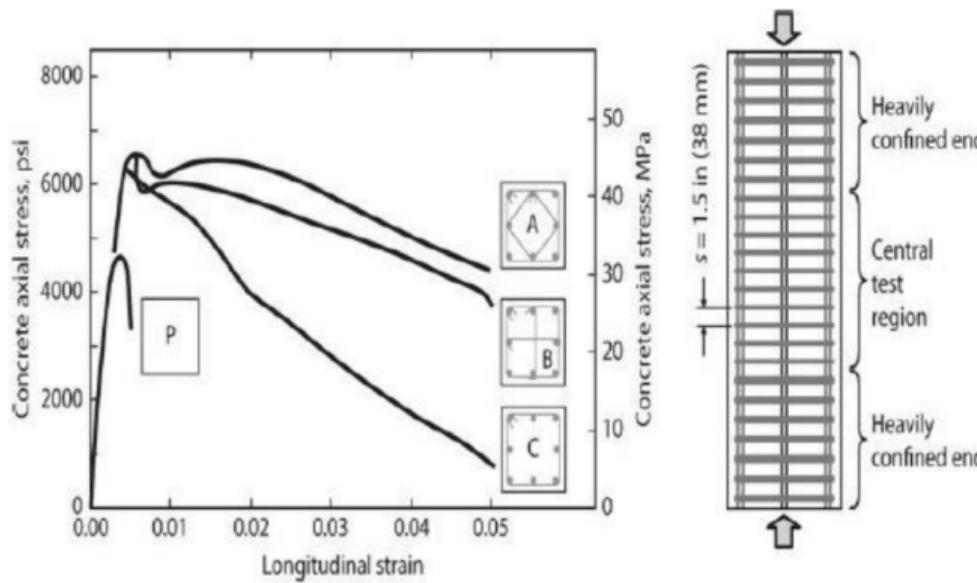


FIGURE 4.1 Stress-strain response of plain concrete (P) and three confined concrete cross sections.
(After Moehle and Cavanagh, 1985, used with permission from ASCE.)

Figure: *Curso de Diseño Sísmico de Concreto Reforzado*; [Bedoya, 2022].

Ciclo de histéresis (hysteresis loop)

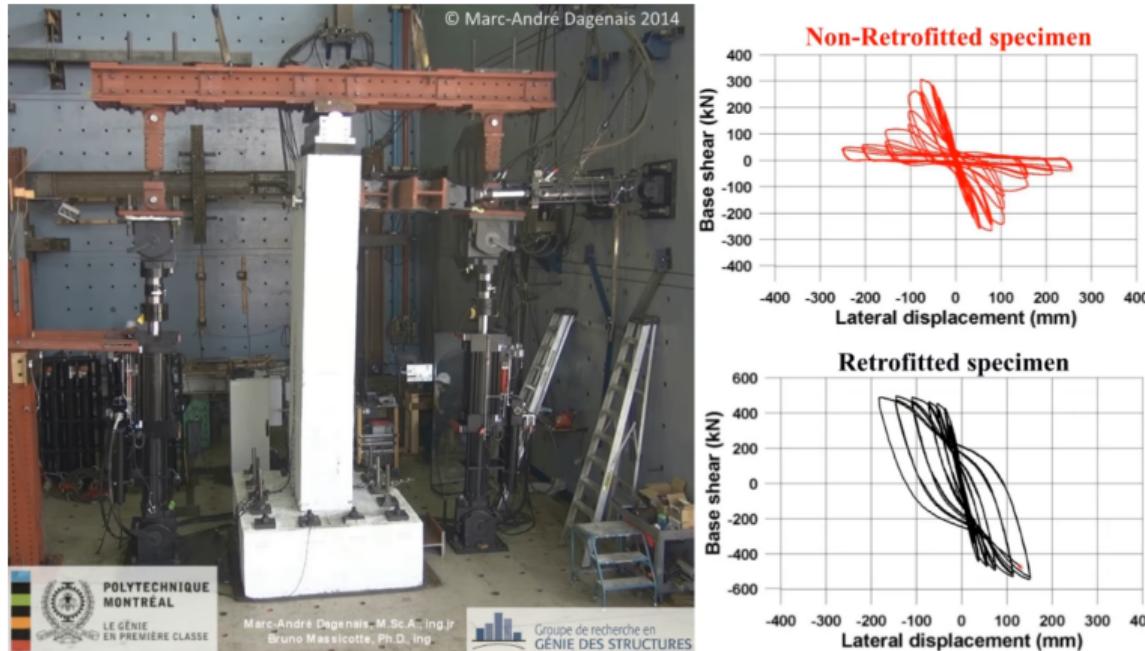


Figure: Hysteretic Behavior of non-retrofitted and retrofitted bridge piers reinforced by UHPFRC. [Video](#).

Ciclo de histéresis

(*hysteresis loop*)

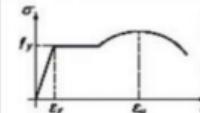
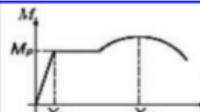
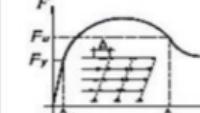
TIPO DE DUCTILIDAD	REPRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA	DEFINICIÓN
DUCTILIDAD DEL MATERIAL (AXIAL)		$\mu_\epsilon = \frac{\epsilon_u}{\epsilon_y}$
DUCTILIDAD DE LA SECCIÓN (CURVATURA)		$\mu_x = \frac{X_u}{X_y}$
DUCTILIDAD DEL MIEMBRO (ROTACIÓN)		$\mu_\theta = \frac{\theta_u}{\theta_y}$
DUCTILIDAD DE LA ESTRUCTURA (DESLAZAMIENTO)		$\mu_\Delta = \frac{\Delta_u}{\Delta_y}$

Figura 7. Tipos de ductilidad, adaptado de ATC-40 [9], 19

Figure: *Curso de Diseño Sísmico de Concreto Reforzado; [Bedoya, 2022]*.

Ciclo de histéresis

(hysteresis loop)

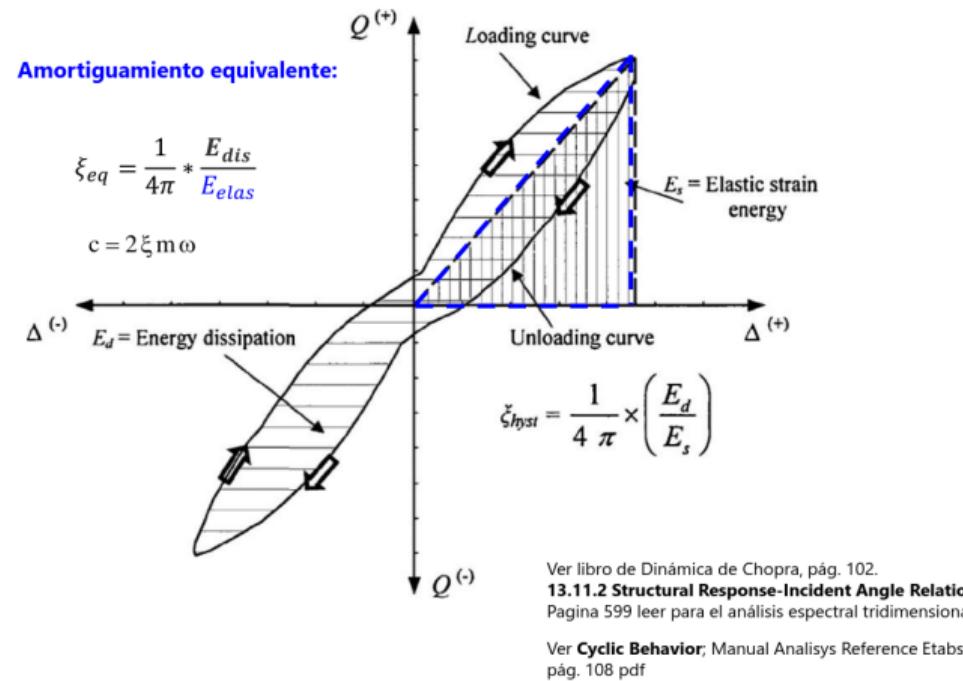


Figure: *Curso de Diseño Sísmico de Concreto Reforzado; [Bedoya, 2022].*

Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- **4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson**
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortótropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Material de apoyo

La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson

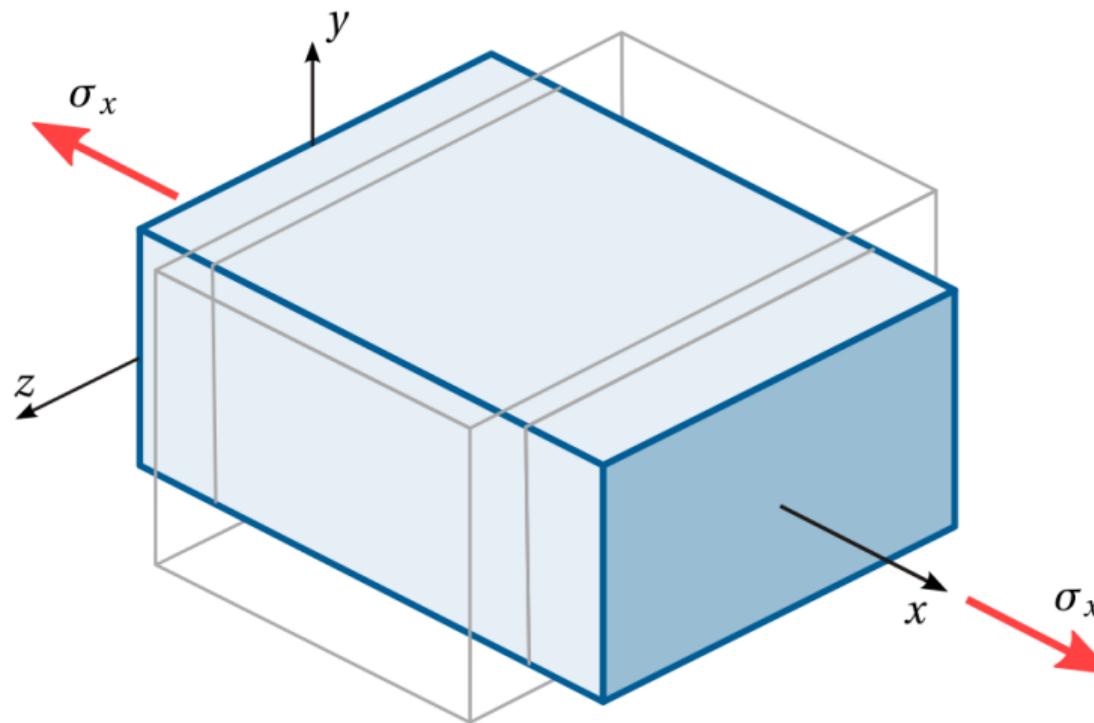


Figure: Forma deformada de un diferencial de sólido sometido a la contracción lateral que se produce por el efecto de Poisson.

Ley de Hooke

Robert Hooke (1635-1703) científico inglés

Si el elemento es sometido a un esfuerzo de tracción (o compresión) en la dirección x, el elemento se estira (o contrae) en esta misma dirección. Dicha ley relaciona los esfuerzos normales σ_x y las deformaciones longitudinales ε_x , por medio de la expresión

$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$

Cuando el comportamiento de un sólido elástico sigue la ley de Hooke, se dice que el sólido tiene un comportamiento elástico lineal.

Efecto de Poisson

Siméon Denis Poisson (1781-1840), matemático y físico francés

Si sobre el cuerpo de la figura se aplica una fuerza de tracción en dirección x, se produce un alargamiento relativo (deformación longitudinal) ε_x en esa dirección y un acortamiento, encogimiento o contracción relativa ε_y y ε_z en las dos direcciones transversales.

$$\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x ; \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x$$

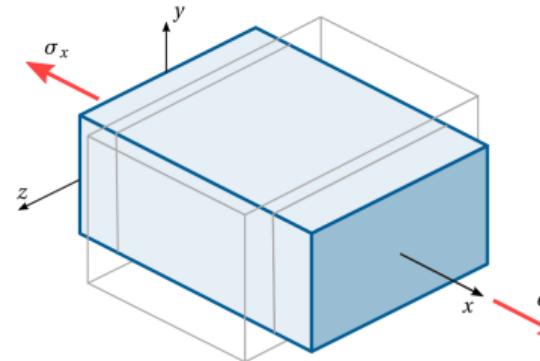


Figure: Forma deformada de un diferencial de sólido sometido a la contracción lateral que se produce por el efecto de Poisson.

Módulo de Young, E

Thomas Young (1773-1829), científico y egiptólogo inglés

- Indica qué tan rígido es un material, es decir, cuál es la oposición que ofrece al ser estirado o contraído.
- Disminuye con el aumento de la temperatura.
- f_y también disminuye con el aumento de la temperatura.

Coeficiente de Poisson, ν

Siméon Denis Poisson (1781-1840), matemático y físico francés

- Expresa una relación entre las deformaciones transversales y longitudinales.
- Varían con las variaciones de la temperatura.
- f_y también disminuye con el aumento de la temperatura.

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{transversal}}{\varepsilon_{longitudinal}}$$

La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson

Tabla 4.1: Módulos de Young y coeficientes de Poisson para diferentes materiales.

Material	Módulo de Young (GPa) E	Coeficiente de Poisson ν
Acero	200	0.27 – 0.30
Arcilla saturada	4 – 20	0.40 – 0.499
Caucho	0.01 – 0.1	≈ 0.499
Concreto	21.5 – 39	0.20
Corcho	0.032	≈ 0
Material augético		negativo
Nanotubos de carbono	1000 – 5000	-0.2 – 0.06

Materiales augéticos

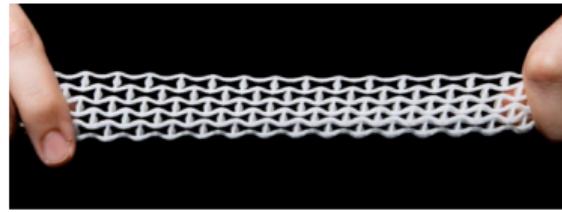


Figure: Auxetic MetaMaterials. [Video](#).



Figure: Material Conexión Bilbao, espuma augética. [Link](#).

4.3.1]4.3.1. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales

Principio de superposición

Dice que para un sistema lineal, la respuesta neta, para una posición y tiempo dados, causada por dos o más estímulos, es la suma de las respuestas que causan cada uno de los estímulos individualmente.

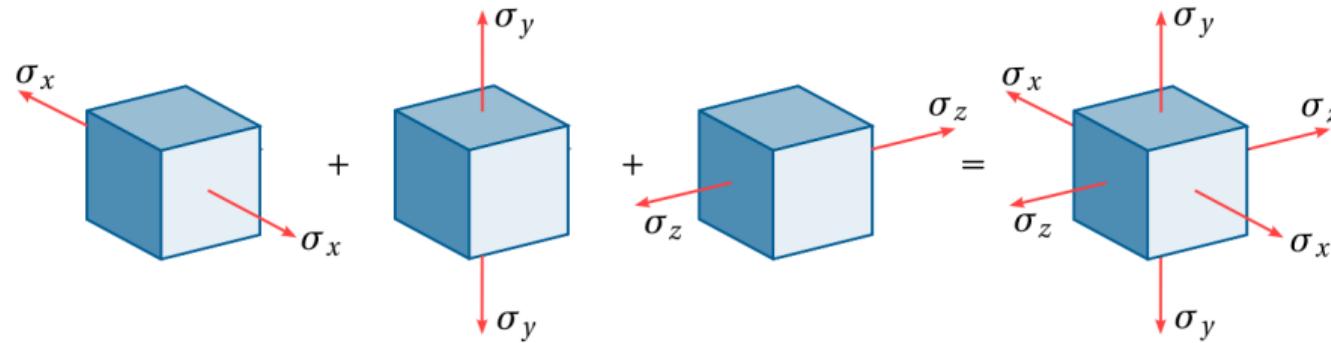


Figure: Aplicación del principio de superposición.

Principio de superposición

Legitimidad:

- Deformaciones y desplazamientos pequeños.
- Los desplazamientos no afectan sustancialmente la acción de las fuerzas externas.

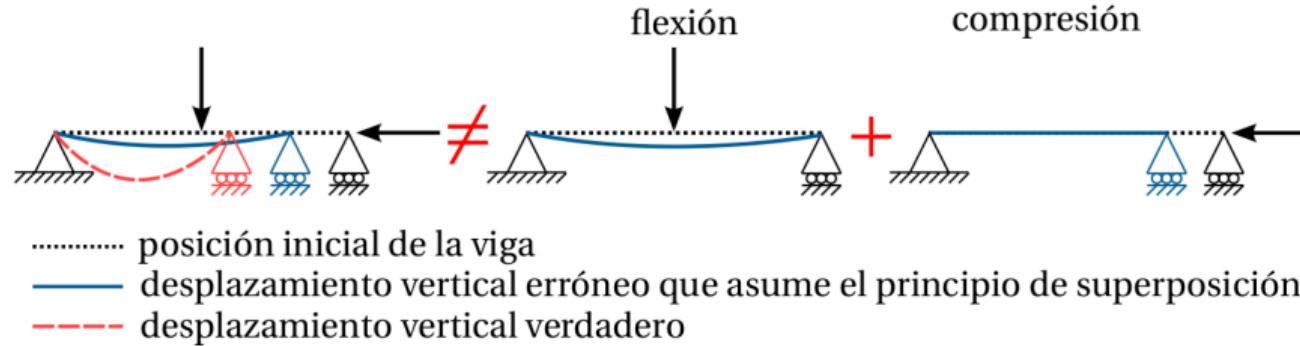


Figure: Barra esbelta sometida a flexo-compresión. En este caso no se debe emplear el principio de superposición.

Deformación de un sólido sometido a esfuerzos normales en las direcciones x, y, z

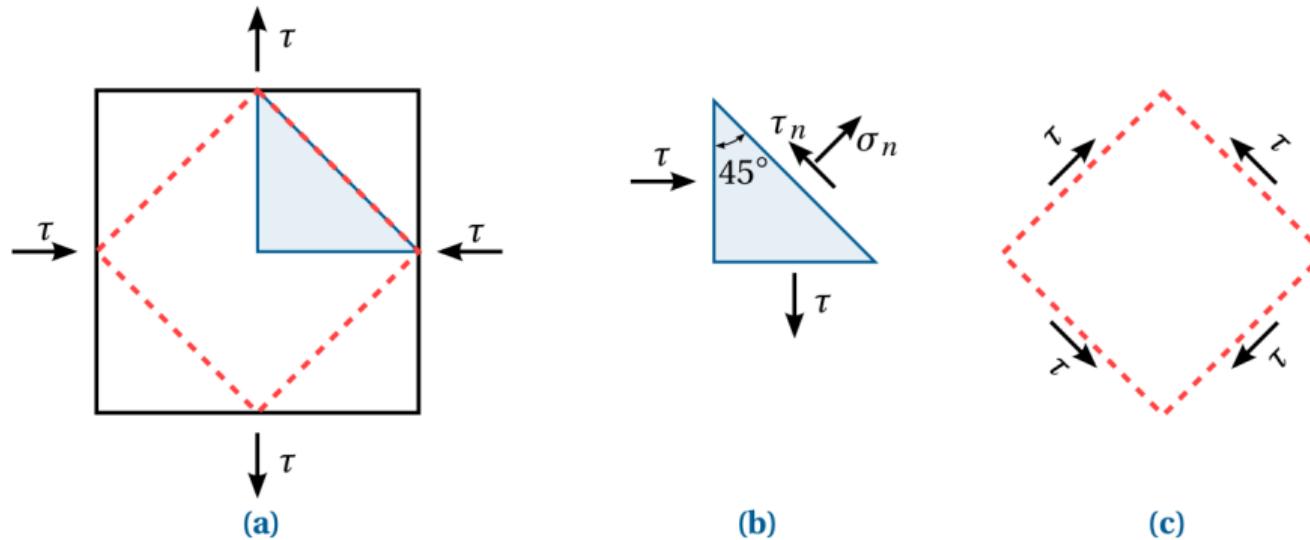
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z))$$

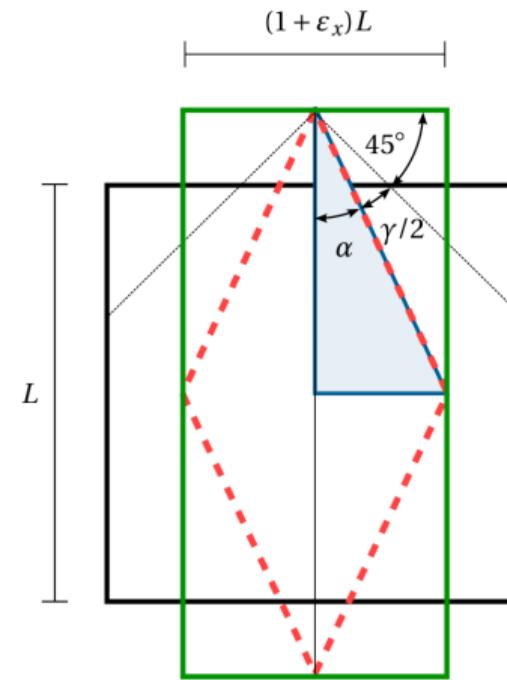
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y))$$

4.3.2]4.3.2. Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales

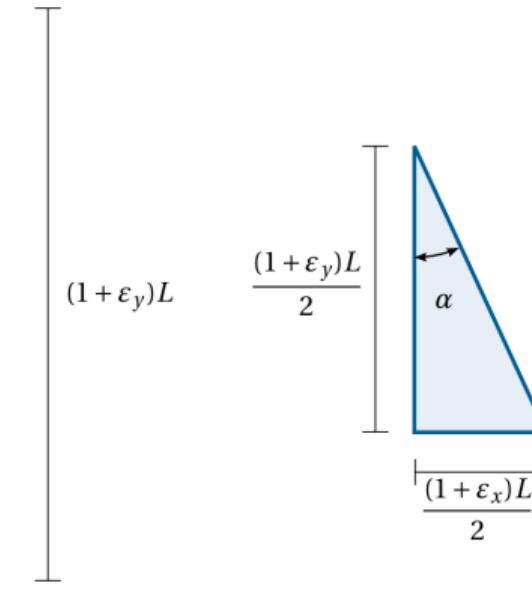
Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales



Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales



(a)



(b)

Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales

Buscamos obtener una constante llamada **Módulo de corte**, G .

$$G := \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

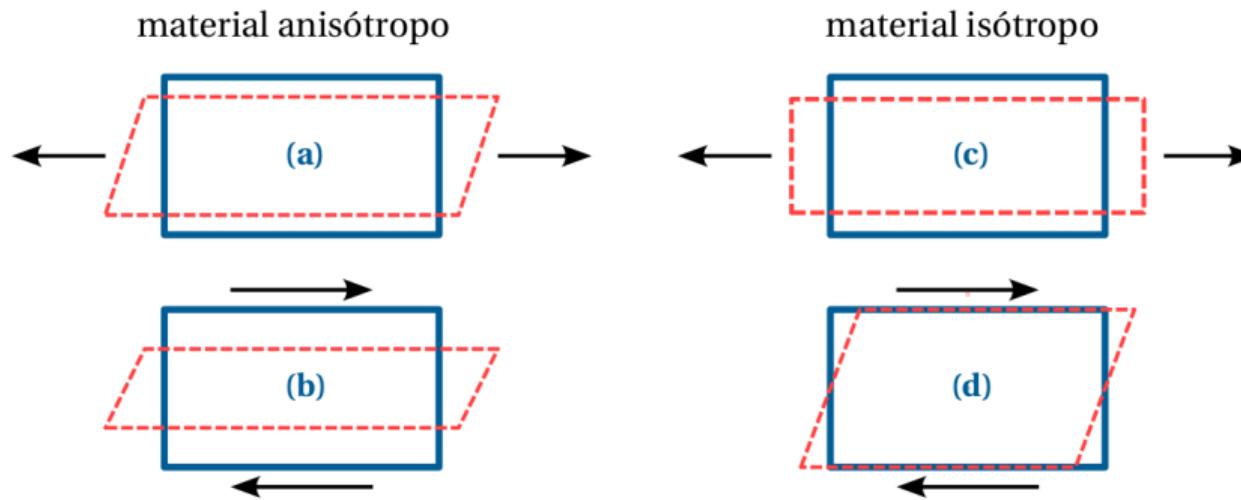
- **Código:** [04_03_02.ipynb](#)

Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}.$$

Para un material con comportamiento lineal, elástico, e isotropo, las deformaciones longitudinales no están afectadas por las deformaciones angulares y no existe un efecto de Poisson para el esfuerzo cortante.

Deformación de un sólido sometido a esfuerzos tangenciales



Formulación de las deformaciones

- Las deformaciones:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y))$$

- En notación indicial:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk}]$$

Formulación de las deformaciones

Ejemplo

A partir de la formulación en notación indicial:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk}]$$

veamos para ε_y :

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \sigma_{22} - \nu \delta_{22} \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk} \right] \\ &= \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)]\end{aligned}$$

Materiales isótropos, anisótropos y ortótropos

Isótropos

- Acero
- Aluminio
- Concreto

Anisótropos

- Maderas
- Tejido humano
- Fibras de carbono
- Placas metálicas roladas
- Estructura interna a partir de fibras alineadas o cuyo proceso de elaboración induce alteraciones en las estructuras atómicas (cristales).

Ortótropos

- Maderas
- Reforzados con fibras
- Algunos cristales
- Metales laminados

4.3.3]4.3.3. Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos

Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos

Isótropo: propiedades mecánicas iguales en todas las direcciones del análisis.

Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos

Partimos de las deformaciones longitudinales y angulares:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y))$$

Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos

Despejando los esfuerzos:

Ecuaciones de Lamé

$$\sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2G\varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

- Père de Gabriel Jean Baptiste Lamé (1795-1870), matemático francés.

Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos

Las ecuaciones de Lamé:

$$\sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2G\varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

- La dilatación cúbica:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

- Constante de Lamé:

$$\lambda := \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos

Formulación matricial

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_D \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

- Código: [04_03_03.ipynb](#)

Ley de Hooke generalizada para materiales isótropos

Tenemos:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_D \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

- **D** es la **matriz constitutiva** o **matriz de constantes elásticas** para un material isótropo.
- Relación entre la matriz de tensiones y la de deformaciones matemáticas:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \mathbf{I} + 2G \underline{\underline{\varepsilon}}$$

4.3.4]4.3.4. Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos

Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos

Anisótropo: propiedades mecánicas diferentes según la dirección del análisis.

Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos

En el caso general de un material anisótropo, lineal y elástico, una componente del esfuerzo se asume como combinación lineal de las seis componentes de deformación; por ejemplo:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= d_{1111}\varepsilon_x + d_{1122}\varepsilon_y + d_{1133}\varepsilon_z + d_{1123}\gamma_{yz} + d_{1113}\gamma_{xz} + d_{1112}\gamma_{xy} \\ &= d_{1111}\varepsilon_x + d_{1122}\varepsilon_y + d_{1133}\varepsilon_z + 2d_{1123}\varepsilon_{yz} + 2d_{1113}\varepsilon_{xz} + 2d_{1112}\varepsilon_{xy}.\end{aligned}$$

A.5. Notación tensorial de Voigt

repaso del apéndice

Woldemar Voigt

Esta notación se emplea para representar un tensor simétrico como uno de orden menor.

Woldemar Voigt

La matriz de esfuerzos de Cauchy:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Se puede expresar como un vector de dimensión 6:

$$\underline{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}]^T \equiv [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6]^T$$

Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos

Empleando la notación de Voigt:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}$$

Aquí el orden de los elementos del esfuerzo cortante y de la deformación angular es el que se asume en mecánica de sólidos. Su elección no es arbitraria, sino que está dada bajo el criterio de que $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ y que $\sigma_{ij} = \sigma_k$ para $i, j, k = 1, 2, \dots, 6$ de tal modo que $i + j + k = 9$. Por ejemplo, si $i = 2$ y $j = 3$, entonces $k = 4$. Esto explica el porqué de la relación $\tau_{yz} = \sigma_{23} = \sigma_4$.

Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\begin{pmatrix} d_{1111} & d_{1122} & d_{1133} & d_{1123} & d_{1113} & d_{1112} \\ d_{2211} & d_{2222} & d_{2233} & d_{2223} & d_{2213} & d_{2212} \\ d_{3311} & d_{3322} & d_{3333} & d_{3323} & d_{3313} & d_{3312} \\ d_{2311} & d_{2322} & d_{2333} & d_{2323} & d_{2313} & d_{2312} \\ d_{1311} & d_{1322} & d_{1333} & d_{1323} & d_{1313} & d_{1312} \\ d_{1211} & d_{1222} & d_{1233} & d_{1223} & d_{1213} & d_{1212} \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

- Notación tensorial:

$$\sigma_{ij} = d_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

d_{ijkl} es un tensor de orden 4 ($3^4 = 81$) con propiedades de simetría:

$$\begin{aligned} d_{ijkl} &= d_{jikl}, & \sigma_{ij} &= \sigma_{ji} \\ d_{ijkl} &= d_{jilk}, & \varepsilon_{kl} &= \varepsilon_{lk} \end{aligned}$$

Ley de Hooke generalizada para materiales anisótropos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\begin{pmatrix} d_{1111} & d_{1122} & d_{1133} & d_{1123} & d_{1113} & d_{1112} \\ d_{2211} & d_{2222} & d_{2233} & d_{2223} & d_{2213} & d_{2212} \\ d_{3311} & d_{3322} & d_{3333} & d_{3323} & d_{3313} & d_{3312} \\ d_{2311} & d_{2322} & d_{2333} & d_{2323} & d_{2313} & d_{2312} \\ d_{1311} & d_{1322} & d_{1333} & d_{1323} & d_{1313} & d_{1312} \\ d_{1211} & d_{1222} & d_{1233} & d_{1223} & d_{1213} & d_{1212} \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

- D matriz constitutiva o de constantes elásticas para un material anisótropo (caso más general).
- D es una matriz ($6^2 = 36$) **definida positiva** y **simétrica**: $d_{ijkl} = d_{klji}$
- $D^{-1} = S$ es la **matriz de conformidad**, tal que:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = S\boldsymbol{\sigma}$$

Matriz definida positiva (Repaso)

Se dice que una matriz \mathbf{K} es definida positiva si:

$$\mathbf{x} \mathbf{K} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i K_{ij} x_j > 0$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

- Alternativamente, una matriz es definida positiva si todos sus valores propios son números reales positivos.
- Toda matriz definida positiva \mathbf{K} es invertible, su inversa \mathbf{K}^{-1} existe.

Explicación de las componentes

- De las 81 componentes del tensor d_{ijkl} (o de las 36 componentes de la matriz D) se requieren únicamente 21 constantes para describir un material **anisótropo lineal elástico** (los términos en la diagonal y encima de la diagonal de la matriz D).
- Para materiales **isótropos**, solo se necesitan dos constantes a saber: Módulo de Young E y coeficiente de Poisson ν .
- Generalmente, los materiales anisótropos presentan ciertos ejes de simetría, por lo que las constantes se reducen de 21 a un número entre 2 y 21.

4.3.5]4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortótropos

Ley de Hooke generalizada para materiales ortótropos

Ortótropo: propiedades mecánicas diferentes en tres direcciones mutuamente ortogonales alineadas con la estructura del material.

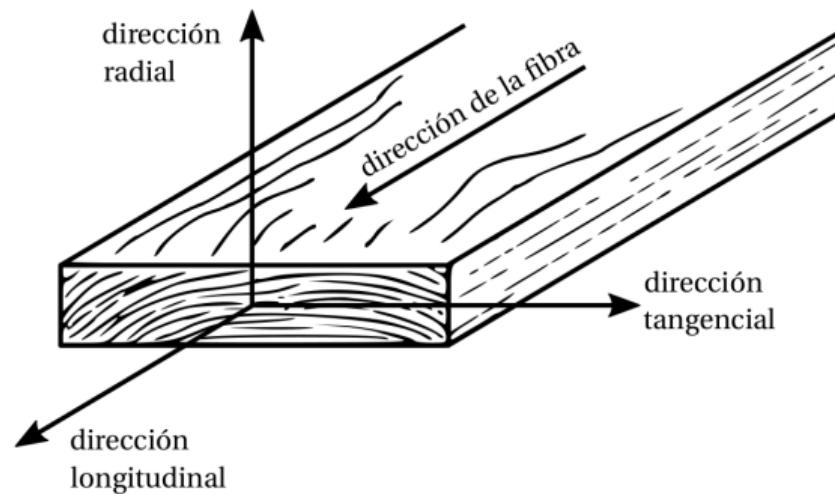


Figure: Direcciones de ortotropía de la madera.

Ley de Hooke generalizada para materiales ortótropos

- Sin interacción entre ε y γ , ni entre σ y τ .
- En el caso tridimensional, requieren de 9 constantes elásticas:

- E_i módulo de elasticidad a lo largo del eje i :

$$E_x, E_y, E_z;$$

- ν_{ij} coeficiente de Poisson que corresponde a la contracción en la dirección j cuando se aplica un estiramiento en la dirección i :

$$\nu_{yz}, \nu_{xz}, \nu_{xy};$$

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_{transversal}}{\varepsilon_{longitudinal}} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}$$

- G_{ij} módulo de cortante en el plano ij :

$$G_{yz}, G_{xz}, G_{xy}.$$

4.3.5. Ley de Hooke generalizada para materiales ortótropos

Deformaciones longitudinales y angulares son independientes

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E_x} \sigma_x - \frac{v_{yx}}{E_y} \sigma_y - \frac{v_{zx}}{E_z} \sigma_z \\ \epsilon_y = -\frac{v_{xy}}{E_x} \sigma_x + \frac{1}{E_y} \sigma_y - \frac{v_{zy}}{E_z} \sigma_z \\ \epsilon_z = -\frac{v_{xz}}{E_x} \sigma_x - \frac{v_{yz}}{E_y} \sigma_y + \frac{1}{E_z} \sigma_z \\ \gamma_{yz} = \frac{1}{G_{yz}} \tau_{yz} \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G_{xy}} \tau_{xy} \\ \gamma_{xz} = \frac{1}{G_{xz}} \tau_{xz} \end{cases}$$

Ley de Hooke generalizada para materiales ortótropos

10/16/2022

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{v_{yx}}{E_y} & -\frac{v_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{v_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{xz}}{E_x} & -\frac{v_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}$$

$$v_{yx} = \frac{E_y}{E_x} v_{xy}, \quad v_{zx} = \frac{E_z}{E_x} v_{xz}, \quad v_{zy} = \frac{E_z}{E_y} v_{yz}.$$

Simetría

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}}_{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{1-v_{yz}v_{zy}}{E_x E_z \Delta} & \frac{v_{yz}v_{zx}+v_{yx}}{E_y E_z \Delta} & \frac{v_{yz}v_{zy}+v_{zx}}{E_x E_y \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v_{xz}v_{zy}+v_{xy}}{E_y E_z \Delta} & \frac{1-v_{yz}v_{zx}}{E_x E_y \Delta} & \frac{v_{zy}+v_{xy}v_{zx}}{E_x E_y \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v_{xy}v_{yz}+v_{xz}}{E_x E_y \Delta} & \frac{v_{yz}+v_{xz}v_{yx}}{E_x E_z \Delta} & \frac{1-v_{xy}v_{yx}}{E_x E_y \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{yz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}}_{\epsilon}$$

$$\Delta = \frac{1 - v_{yz}v_{zy} - v_{xz}v_{zx} - v_{xy}v_{yx} - 2v_{yx}v_{zy}v_{xz}}{E_x E_y E_z}$$

Matriz constitutiva de un material ortótropo

40

Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
- **4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortotropos**
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Material de apoyo

Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortotropos

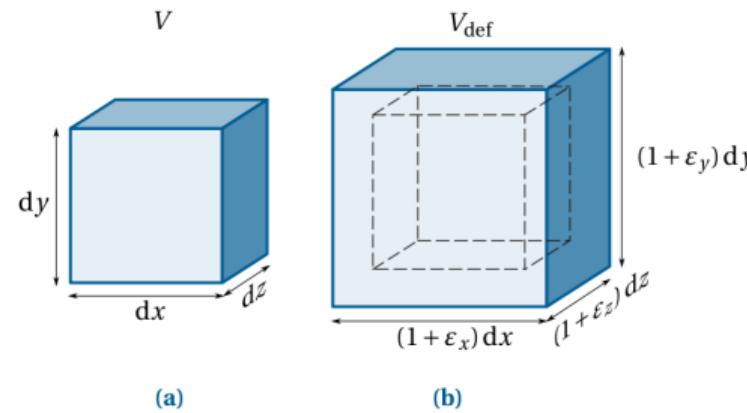
Estudio autónomo

Se concluye que ambas direcciones principales coinciden en el caso de tener un material **elástico, lineal, isótropo y ortotropo**.

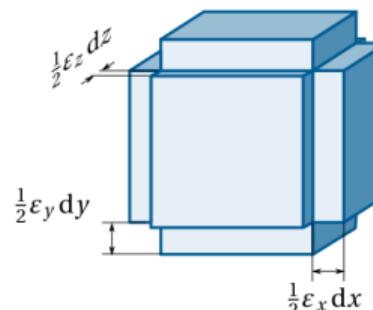
Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortotropos
- **4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica**
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Material de apoyo

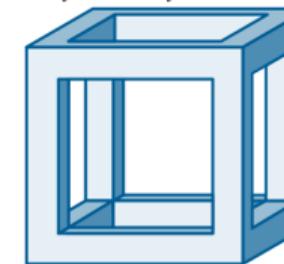
Cambios de volumen y dilatación cúbica



$$V + (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) V$$



$$(\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z) V$$



Cambios de volumen y dilatación cúbica

La dilatación cúbica o deformación volumétrica es el cambio de volumen por unidad de volumen.

$$e := \frac{V_{\text{def}-V}}{V} \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$e(x, y, z) = \operatorname{div} \boldsymbol{u}(x, y, z) = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z}$$

Cambios de volumen y dilatación cúbica

Se ha demostrado matemáticamente que:

1. Los cambios de volumen en el sólido son producidos por los esfuerzos normales.
2. Un elemento sometido solo a fuerzas cortantes no cambia de volumen.
3. Si el elemento está sometido a esfuerzos normales y cortantes, su cambio de volumen se puede aproximar mediante $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$.

Cambios de volumen y dilatación cúbica

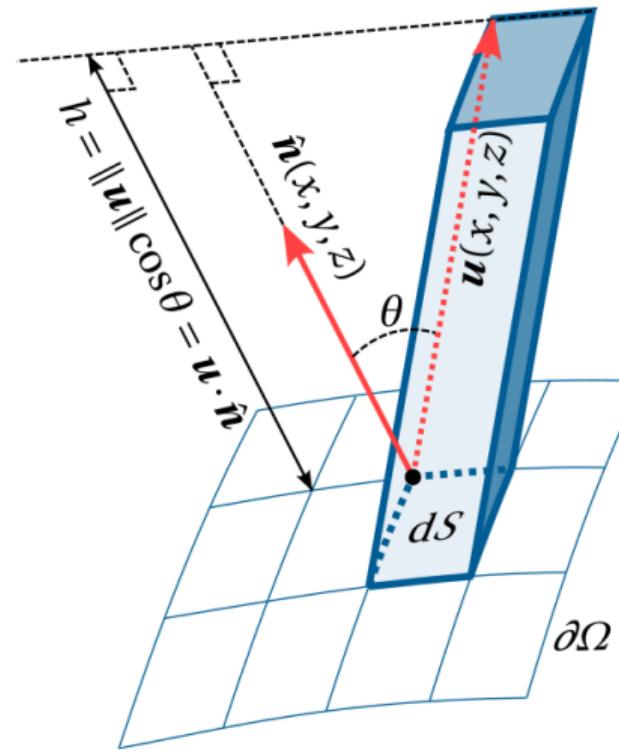
El cambio de volumen en todo el sólido Ω :

$$\begin{aligned}\Delta V &\approx \iiint_{\Omega} e(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} (\varepsilon_x(x, y, z) + \varepsilon_y(x, y, z) + \varepsilon_z(x, y, z)) dx dy dz\end{aligned}$$

Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortótropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- **4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia**
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- Material de apoyo

Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia



Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia

Teorema de la divergencia, de Gauss o de Ostrogradsky

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}(x, y, z) dV = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{u}(x, y, z) \cdot \hat{\mathbf{n}}(x, y, z) dS$$

Nos permite calcular el cambio de volumen de un material ya sea como la suma de los pequeños cambios de volumen de cada uno de los diferenciales dV que lo conforman o mediante el flujo del material a través del contorno del sólido.

- Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) en 1762, matemático y astrónomo.
- Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) en 1813, matemático y físico.
- Mikhail Vasilyevich Ostrogradsky (1801-1862) en 1826, matemático y físico.

Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia

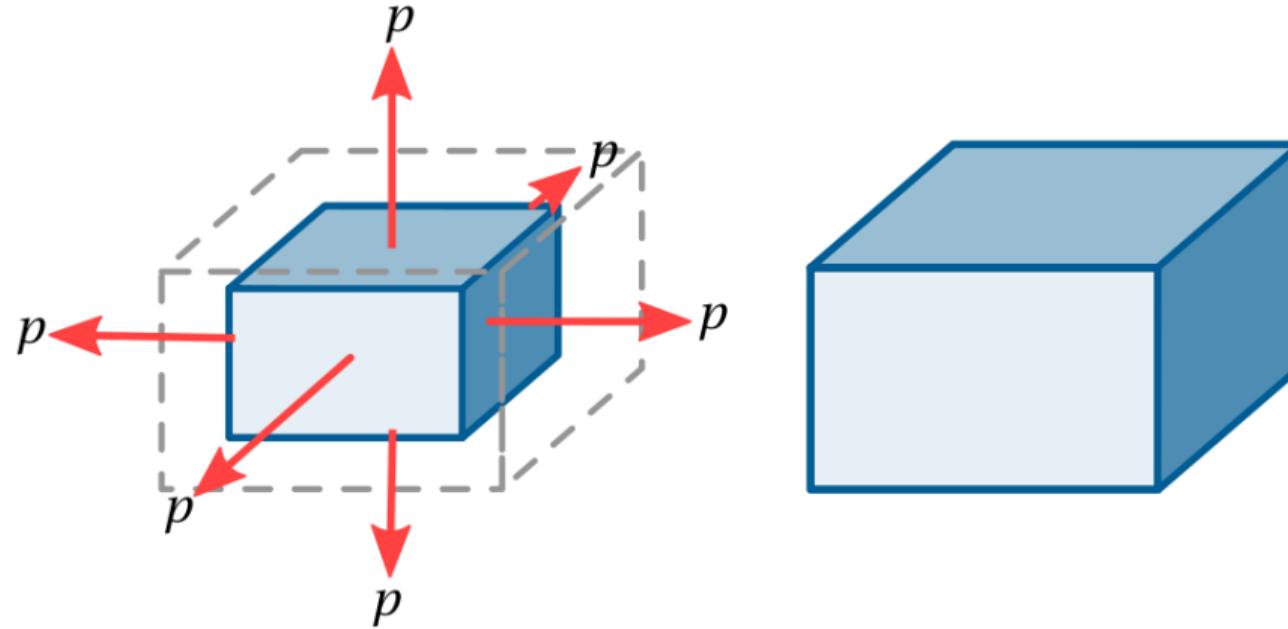
Video para complementar

- Gauss's Divergence Theorem

Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortótropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- **4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad**
- Material de apoyo

Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad



Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad

$$K := \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

Es una propiedad del material que determina su incompresibilidad y es una medida de la capacidad de una sustancia de soportar cambios de volumen cuando se somete a esfuerzos normales en todas las direcciones.

- Entre más tienda $\nu \rightarrow 0$ más incompresible es el sólido.
- Un suelo saturado tiene un ν cercano a 0.5.

Derrotero

- Preámbulo
- 4.1. Materiales frágiles y materiales dúctiles
- 4.2. Comportamiento elástico y plástico de los materiales dúctiles
- 4.3. La ley de Hooke y los módulos de Young y Poisson
- 4.4. Relación entre las direcciones principales asociadas a los esfuerzos y a las deformaciones para materiales isótropos u ortótropos
- 4.5. Cambios de volumen y dilatación cúbica
- 4.6. Entendiendo el cambio de volumen de un sólido mediante el teorema de la divergencia
- 4.7. Módulo de expansión volumétrica o módulo de compresibilidad
- **Material de apoyo**