

# Ecuaciones diferenciales fundamentales de la teoría de la elasticidad

Michael Heredia Pérez  
[mherediap@unal.edu.co](mailto:mherediap@unal.edu.co)

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales  
Departamento de Ingeniería Civil  
Mecánica de Sólidos

2025a



## Advertencia

Estas diapositivas son solo una herramienta didáctica para guiar la clase, por si solas no deben tomarse como material de estudio y el estudiante debe dirigirse a la literatura recomendada.



## Derrotero

- Introducción
- 5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio
- 5.2. Ecuaciones de compatibilidad
- 5.3. Condiciones de frontera
- 5.4. Condiciones de equilibrio en la frontera
- 5.5. Equilibrio estático
- 5.6. Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones
- 5.7. Función de tensión de Airy
- 5.8. Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional
- 5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier
- 5.10. Unicidad de la solución
- 5.11. Principio de superposición
- Principio de Saint-Venant
- 5.13. El vector de Galerkin
- Ejemplo de aplicación de las EPDs de compatibilidad
- Material de apoyo

# Derrotero

## • Introducción

- 5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio
- 5.2. Ecuaciones de compatibilidad
- 5.3. Condiciones de frontera
- 5.4. Condiciones de equilibrio en la frontera
- 5.5. Equilibrio estático
- 5.6. Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones
- 5.7. Función de tensión de Airy
- 5.8. Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional
- 5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier
- 5.10. Unicidad de la solución
- 5.11. Principio de superposición
- Principio de Saint-Venant
- 5.13. El vector de Galerkin
- Ejemplo de aplicación de las EPDs de compatibilidad
- Material de apoyo

## Nota sobre la nomenclatura

Tengamos en cuenta que:

- Al sólido de estudio lo denotamos como  $\Omega$ .
- Estamos utilizando las funciones  $X, Y$  y  $Z$  para representar las funciones  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que describen la variación de las fuerzas básicas por unidad de volumen en el interior del sólido  $\Omega$ .
- Estamos empleando los símbolos  $\bar{X}, \bar{Y}$  y  $\bar{Z}$  para representar las funciones  $\delta\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que describen la variación de las fuerzas superficiales por unidad de área en el contorno  $\delta\Omega$  del sólido  $\Omega$ .
- $x := [x, y, z]^T$  representa la posición en el espacio referida a los tres ejes coordenados.
- $dS$  representará un diferencial de superficie ( $S$  mayúscula), mientras que  $ds$  representa un diferencial de longitud de arco, asociado al parámetro de longitud de arco ( $s$  minúscula).

## Nota sobre la nomenclatura

Tengamos en cuenta que:

- Al sólido de estudio lo denotamos como  $\Omega$ .
- Estamos utilizando las funciones  $X, Y$  y  $Z$  para representar las funciones  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que describen la variación de las fuerzas másicas por unidad de volumen en el interior del sólido  $\Omega$ .
- Estamos empleando los símbolos  $\bar{X}, \bar{Y}$  y  $\bar{Z}$  para representar las funciones  $\delta\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que describen la variación de las fuerzas superficiales por unidad de área en el contorno  $\delta\Omega$  del sólido  $\Omega$ .
- $x := [x, y, z]^T$  representa la posición en el espacio referida a los tres ejes coordenados.
- $dS$  representará un diferencial de superficie ( $S$  mayúscula), mientras que  $ds$  representa un diferencial de longitud de arco, asociado al parámetro de longitud de arco ( $s$  minúscula).

## Nota sobre la nomenclatura

Tengamos en cuenta que:

- Al sólido de estudio lo denotamos como  $\Omega$ .
- Estamos utilizando las funciones  $X, Y$  y  $Z$  para representar las funciones  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que describen la variación de las fuerzas básicas por unidad de volumen en el interior del sólido  $\Omega$ .
- Estamos empleando los símbolos  $\bar{X}, \bar{Y}$  y  $\bar{Z}$  para representar las funciones  $\delta\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que describen la variación de las fuerzas superficiales por unidad de área en el contorno  $\delta\Omega$  del sólido  $\Omega$ .
- $x := [x, y, z]^T$  representa la posición en el espacio referida a los tres ejes coordenados.
- $dS$  representará un diferencial de superficie ( $S$  mayúscula), mientras que  $ds$  representa un diferencial de longitud de arco, asociado al parámetro de longitud de arco ( $s$  minúscula).

## Nota sobre la nomenclatura

Tengamos en cuenta que:

- Al sólido de estudio lo denotamos como  $\Omega$ .
- Estamos utilizando las funciones  $X, Y$  y  $Z$  para representar las funciones  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que describen la variación de las fuerzas básicas por unidad de volumen en el interior del sólido  $\Omega$ .
- Estamos empleando los símbolos  $\bar{X}, \bar{Y}$  y  $\bar{Z}$  para representar las funciones  $\delta\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que describen la variación de las fuerzas superficiales por unidad de área en el contorno  $\delta\Omega$  del sólido  $\Omega$ .
- $x := [x, y, z]^T$  representa la posición en el espacio referida a los tres ejes coordenados.
- $dS$  representará un diferencial de superficie ( $S$  mayúscula), mientras que  $ds$  representa un diferencial de longitud de arco, asociado al parámetro de longitud de arco ( $s$  minúscula).

## Nota sobre la nomenclatura

Tengamos en cuenta que:

- Al sólido de estudio lo denotamos como  $\Omega$ .
- Estamos utilizando las funciones  $X, Y$  y  $Z$  para representar las funciones  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que describen la variación de las fuerzas básicas por unidad de volumen en el interior del sólido  $\Omega$ .
- Estamos empleando los símbolos  $\bar{X}, \bar{Y}$  y  $\bar{Z}$  para representar las funciones  $\delta\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que describen la variación de las fuerzas superficiales por unidad de área en el contorno  $\delta\Omega$  del sólido  $\Omega$ .
- $\mathbf{x} := [x, y, z]^T$  representa la posición en el espacio referida a los tres ejes coordenados.
- $dS$  representará un diferencial de superficie ( $S$  mayúscula), mientras que  $ds$  representa un diferencial de longitud de arco, asociado al parámetro de longitud de arco ( $s$  minúscula).

## Nota sobre la nomenclatura

Tengamos en cuenta que:

- Al sólido de estudio lo denotamos como  $\Omega$ .
- Estamos utilizando las funciones  $X, Y$  y  $Z$  para representar las funciones  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que describen la variación de las fuerzas básicas por unidad de volumen en el interior del sólido  $\Omega$ .
- Estamos empleando los símbolos  $\bar{X}, \bar{Y}$  y  $\bar{Z}$  para representar las funciones  $\delta\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que describen la variación de las fuerzas superficiales por unidad de área en el contorno  $\delta\Omega$  del sólido  $\Omega$ .
- $\mathbf{x} := [x, y, z]^T$  representa la posición en el espacio referida a los tres ejes coordenados.
- $dS$  representará un diferencial de superficie ( $S$  mayúscula), mientras que  $ds$  representa un diferencial de longitud de arco, asociado al parámetro de longitud de arco ( $s$  minúscula).

# Introducción

## Problema

Dado un cuerpo sólido elástico  $\Omega$ , se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto  $(x, y, z) \in \Omega$ , así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ( $b(x)$  y  $f(x)$ )

La variación de los esfuerzos dentro del sólido estará definida por:

- **EDPs de equilibrio:** describen leyes físicas universales como conservación de la masa y de la energía. Aplicables a todo material.
- **EDPs de compatibilidad:** Describen el comportamiento mecánico de materiales particulares.

# Introducción

## Problema

Dado un cuerpo sólido elástico  $\Omega$ , se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto  $(x, y, z) \in \Omega$ , así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ( $b(x)$  y  $f(x)$ )

La variación de los esfuerzos dentro del sólido estará definida por:

- **EDPs de equilibrio:** describen leyes físicas universales como conservación de la masa y de la energía. Aplicables a todo material.
- **EDPs de compatibilidad:** Describen el comportamiento mecánico de materiales particulares.

# Introducción

## Problema

Dado un cuerpo sólido elástico  $\Omega$ , se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto  $(x, y, z) \in \Omega$ , así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ( $b(x)$  y  $f(x)$ )

La variación de los esfuerzos dentro del sólido estará definida por:

- **EDPs de equilibrio:** describen leyes físicas universales como conservación de la masa y de la energía. Aplicables a todo material.
- **EDPs de compatibilidad:** Describen el comportamiento mecánico de materiales particulares.

# Introducción

## Problema

Dado un cuerpo sólido elástico  $\Omega$ , se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto  $(x, y, z) \in \Omega$ , así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ( $b(x)$  y  $f(x)$ )

La variación de los esfuerzos dentro del sólido estará definida por:

- **EDPs de equilibrio:** describen leyes físicas universales como conservación de la masa y de la energía. Aplicables a todo material.
- **EDPs de compatibilidad:** Describen el comportamiento mecánico de materiales particulares.

# Introducción

## Problema

Dado un cuerpo sólido elástico  $\Omega$ , se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto  $(x, y, z) \in \Omega$ , así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ( $b(x)$  y  $f(x)$ )

La variación de los esfuerzos dentro del sólido estará definida por:

- **EDPs de equilibrio:** describen leyes físicas universales como conservación de la masa y de la energía. Aplicables a todo material.
- **EDPs de compatibilidad:** Describen el comportamiento mecánico de materiales particulares.

# Introducción

## Problema

Dado un cuerpo sólido elástico  $\Omega$ , se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto  $(x, y, z) \in \Omega$ , así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ( $b(x)$  y  $f(x)$ )

La variación de los esfuerzos dentro del sólido estará definida por:

- **EDPs de equilibrio:** describen leyes físicas universales como conservación de la masa y de la energía. Aplicables a todo material.
- **EDPs de compatibilidad:** Describen el comportamiento mecánico de materiales particulares.

# Introducción

## Problema

Dado un cuerpo sólido elástico  $\Omega$ , se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto  $(x, y, z) \in \Omega$ , así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ( $b(x)$  y  $f(x)$ )

La variación de los esfuerzos dentro del sólido estará definida por:

- **EDPs de equilibrio:** describen leyes físicas universales como conservación de la masa y de la energía. Aplicables a todo material.
- **EDPs de compatibilidad:** Describen el comportamiento mecánico de materiales particulares.

# Introducción

## Problema

Dado un cuerpo sólido elástico  $\Omega$ , se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto  $(x, y, z) \in \Omega$ , así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ( $b(x)$  y  $f(x)$ )

La variación de los esfuerzos dentro del sólido estará definida por:

- **EDPs de equilibrio:** describen leyes físicas universales como conservación de la masa y de la energía. Aplicables a todo material.
- **EDPs de compatibilidad:** Describen el comportamiento mecánico de materiales particulares.

# Introducción

## Problema

Dado un cuerpo sólido elástico  $\Omega$ , se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto  $(x, y, z) \in \Omega$ , así como las reacciones en sus apoyos.

Del problema conocemos:

- La geometría del cuerpo
- Tipo y ubicación de los apoyos.
- Propiedades elásticas del material
- Cargas que actúan sobre el sólido ( $b(x)$  y  $f(x)$ )

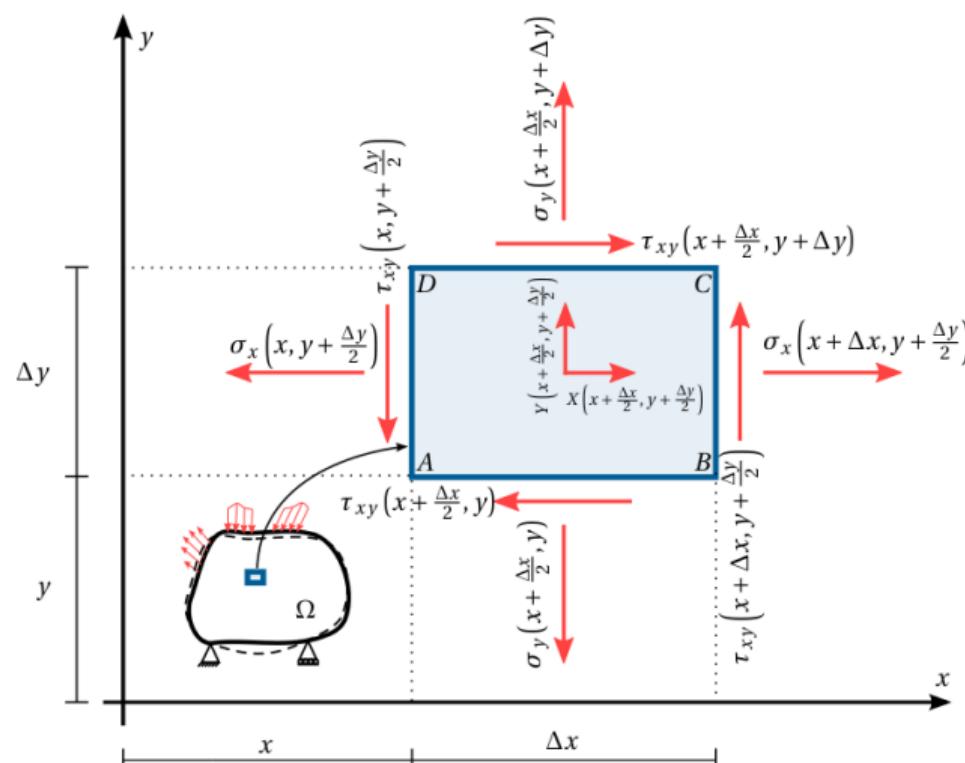
La variación de los esfuerzos dentro del sólido estará definida por:

- **EDPs de equilibrio:** describen leyes físicas universales como conservación de la masa y de la energía. Aplicables a todo material.
- **EDPs de compatibilidad:** Describen el comportamiento mecánico de materiales particulares.

# Derrotero

- Introducción
- **5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio**
- 5.2. Ecuaciones de compatibilidad
- 5.3. Condiciones de frontera
- 5.4. Condiciones de equilibrio en la frontera
- 5.5. Equilibrio estático
- 5.6. Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones
- 5.7. Función de tensión de Airy
- 5.8. Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional
- 5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier
- 5.10. Unicidad de la solución
- 5.11. Principio de superposición
- Principio de Saint-Venant
- 5.13. El vector de Galerkin
- Ejemplo de aplicación de las EPDs de compatibilidad
- Material de apoyo

## Ecuaciones diferenciales de equilibrio



## Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Para el caso bidimensional, encontramos el equilibrio mediante el siguiente par de ecuaciones:

$$\frac{\partial \sigma_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x, y)}{\partial y} + X(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x, y)}{\partial y} + Y(x, y) = 0$$

## Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Análogamente, en el caso tridimensional:

$$\frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x, y, z)}{\partial z} + X(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(x, y, z)}{\partial z} + Y(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(x, y, z)}{\partial z} + Z(x, y, z) = 0$$

## Ecuaciones diferenciales de equilibrio

### Ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio (interno)

$$\frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x, y, z)}{\partial z} + X(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(x, y, z)}{\partial z} + Y(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(x, y, z)}{\partial z} + Z(x, y, z) = 0$$

Expresan el equilibrio de fuerzas en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  en todos los puntos interiores del sólido.

- Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) en 1829, matemático e ingeniero civil.

### Comentarios

- Aplicables a cualquier sólido independiente del material constitutivo.
- Los esfuerzos son funciones derivables y continuas con respecto a la posición.
- El problema planteado es estáticamente indeterminado (o hiperestático)

## Ecuaciones diferenciales de equilibrio

### Ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio (interno)

$$\frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x, y, z)}{\partial z} + X(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(x, y, z)}{\partial z} + Y(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(x, y, z)}{\partial z} + Z(x, y, z) = 0$$

Expresan el equilibrio de fuerzas en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  en todos los puntos interiores del sólido.

- Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) en 1829, matemático e ingeniero civil.

### Comentarios

- Aplicables a cualquier sólido independiente del material constitutivo.
- Los esfuerzos son funciones derivables y continuas con respecto a la posición.
- El problema planteado es estáticamente indeterminado (o hiperestático)

# Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$

- En notación vectorial:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Cuando la única fuerza másica actuando es el peso propio:

$$\frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x, y, z)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(x, y, z)}{\partial z} - \rho(x, y, z)g = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(x, y, z)}{\partial z} = 0$$

## Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$

- En notación vectorial:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Cuando la única fuerza másica actuando es el peso propio:

$$\frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x, y, z)}{\partial z} = 0$$

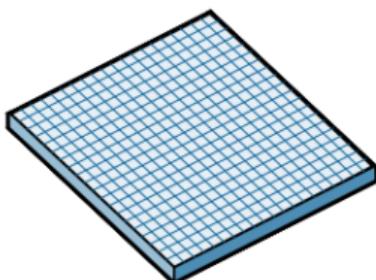
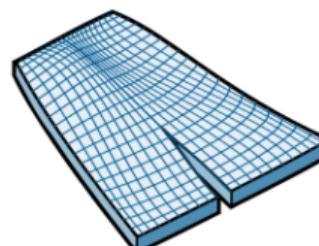
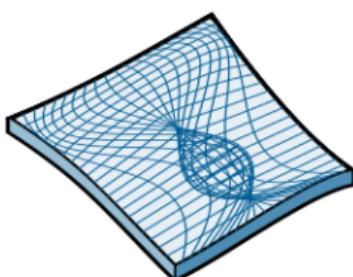
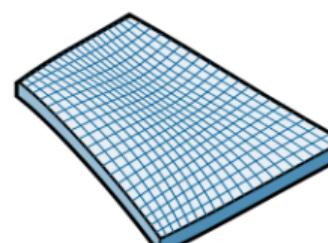
$$\frac{\partial \tau_{xy}(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(x, y, z)}{\partial z} - \rho(x, y, z)g = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(x, y, z)}{\partial z} = 0$$

# Derrotero

- Introducción
- 5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio
- 5.2. Ecuaciones de compatibilidad**
- 5.3. Condiciones de frontera
- 5.4. Condiciones de equilibrio en la frontera
- 5.5. Equilibrio estático
- 5.6. Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones
- 5.7. Función de tensión de Airy
- 5.8. Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional
- 5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier
- 5.10. Unicidad de la solución
- 5.11. Principio de superposición
- Principio de Saint-Venant
- 5.13. El vector de Galerkin
- Ejemplo de aplicación de las EPDs de compatibilidad
- Material de apoyo

# ¿Para qué?

(a)  
originaldeformación no compatible: grietas  
(b)deformación no compatible: traslapos  
(c)deformación compatible  
(d)

Las ecuaciones que desarrollaremos:

- EDPs de compatibilidad en términos de deformaciones para:
  - Caso bidimensional.
  - Caso tridimensional ([Saint-Venant](#)).
- EDPs de compatibilidad en términos de esfuerzos para:
  - Caso de Tensión plana.
  - Caso de Deformación plana.
  - Caso bidimensional general ([Lévy](#)).
  - Caso tridimensional ([Michell, Beltrami](#)).

## Ecuaciones de compatibilidad en dos dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Operando:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}\end{aligned}$$

Reemplazando:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

### Ecuación de compatibilidad bidimensional en términos de deformaciones

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

- Los desplazamientos  $u$  y  $v$  deben ser funciones continuas y derivables, cuyas primeras dos derivadas parciales mixtas son continuas.
- Únicamente aplicable cuando se presentan deformaciones pequeñas.

## Ecuaciones de compatibilidad en dos dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Operando:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

Reemplazando:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

### Ecuación de compatibilidad bidimensional en términos de deformaciones

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

- Los desplazamientos  $u$  y  $v$  deben ser funciones continuas y derivables, cuyas primeras dos derivadas parciales mixtas son continuas.
- Únicamente aplicable cuando se presentan deformaciones pequeñas.

## Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Conociendo:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

Sumando estas ecuaciones y organizando términos:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

## Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Intercambiando cíclicamente los índices  $x, y, y z$ , obtenemos:

### Ecuaciones de compatibilidad de Saint-Venant

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

(mismas anotaciones)

- Adhémar Jean Claude de Saint-Venant (1797-1886) en 1864, matemático e ingeniero mecánico.

Las ecuaciones de Saint-Venant se pueden resumir en una única ecuación usando notación tensorial:

$$\varepsilon_{ij,km} + \varepsilon_{mk,ji} - \varepsilon_{ik,jm} - \varepsilon_{mj,ki} = 0; \quad i, j, k, m = 1, 2, 3$$

## Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Intercambiando cíclicamente los índices  $x, y, y z$ , obtenemos:

### Ecuaciones de compatibilidad de Saint-Venant

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

(mismas anotaciones)

- Adhémar Jean Claude de Saint-Venant (1797-1886) en 1864, matemático e ingeniero mecánico.

Las ecuaciones de Saint-Venant se pueden resumir en una única ecuación usando notación tensorial:

$$\varepsilon_{ij,km} + \varepsilon_{mk,ji} - \varepsilon_{ik,jm} - \varepsilon_{mj,ki} = 0; \quad i, j, k, m = 1, 2, 3$$

## Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de deformaciones

Las ecuaciones anteriores son LD. Se pueden reducir al siguiente sistema de 3 EDPs LI:

$$2 \frac{\partial^4 \varepsilon_x}{\partial y^2 \partial z^2} = \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^4 \varepsilon_y}{\partial x^2 \partial z^2} = \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^4 \varepsilon_z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

Sin embargo, se emplea la formulación anterior (sistema 6x6) al ser matemáticamente más simple su uso.

## Ecuaciones de compatibilidad para el caso de tensión plana expresada en términos de esfuerzos

Condición de **tensión plana**:  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ . Las deformaciones (Eq. 4.35):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

Derivando:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{1}{E} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{1}{E} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{G} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad en dos dimensiones (Eq. 5.6) con  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ :

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu\sigma_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu\sigma_y) \right)$$

## Ecuaciones de compatibilidad para el caso de tensión plana expresada en términos de esfuerzos

Las ecuaciones diferenciales de equilibrio 2D:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

Derivando, sumando y despejando el término que contiene a  $\tau_{xy}$ :

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

Igualando y simplificando ambas expresiones:

### Ecuación de compatibilidad para el caso de tensión plana

En términos de esfuerzos:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

## Ecuaciones de compatibilidad para el caso de tensión plana expresada en términos de esfuerzos

Las ecuaciones diferenciales de equilibrio 2D:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

Derivando, sumando y despejando el término que contiene a  $\tau_{xy}$ :

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

Igualando y simplificando ambas expresiones:

### Ecuación de compatibilidad para el caso de tensión plana

En términos de esfuerzos:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

## Ecuaciones de compatibilidad para el caso de deformación plana expresada en términos de esfuerzos

**Condición de deformación plana:**  $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ . Las deformaciones (Eq. 4.38):

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}((1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad \varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}((1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

Aplicando derivadas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x(1-\nu) - \nu\sigma_y) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y(1-\nu) - \nu\sigma_x) \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{G} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

# Ecuaciones de compatibilidad para el caso de deformación plana expresada en términos de esfuerzos

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad en dos dimensiones (Eq. 5.6):

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{G(1+\nu)}{E} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x(1-\nu) - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y(1-\nu) - \nu \sigma_x) \right)$$

Igualando las ecuaciones:

$$\frac{G(1+\nu)}{E} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x(1-\nu) - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y(1-\nu) - \nu \sigma_x) \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

Simplificando:

## Ecuación de compatibilidad para el caso de deformación plana

En términos de esfuerzos:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\nu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

## Ecuaciones de compatibilidad para el caso de deformación plana expresada en términos de esfuerzos

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad en dos dimensiones (Eq. 5.6):

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{G(1+\nu)}{E} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x(1-\nu) - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y(1-\nu) - \nu \sigma_x) \right)$$

Igualando las ecuaciones:

$$\frac{G(1+\nu)}{E} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x(1-\nu) - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y(1-\nu) - \nu \sigma_x) \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

Simplificando:

### Ecuación de compatibilidad para el caso de deformación plana

En términos de esfuerzos:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\nu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

# Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

## Ecuación de compatibilidad general para el caso bidimensional

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

$$K_1 = \begin{cases} -(1 + \nu) & \text{para el caso de tensión plana} \\ -\frac{1}{1 - \nu} & \text{para el caso de deformación plana} \end{cases}$$

- Aplicable solo a sólidos con materiales elásticos (Ley de Hooke), lineales e isótropos.
- Materiales homogéneos:  $E(x, y, z) = \nu(x, y, z) = \text{cte.}$
- Deformaciones pequeñas.

# Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

Dos notaciones:

- En notación tensorial:

$$\nabla^2 \sigma_{ii} = K_1 b_{i,i}$$

- En notación vectorial:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \operatorname{div} \mathbf{b}$$

donde

$$\begin{cases} \nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \text{operador laplaciano bidimensional} \\ \operatorname{div} \mathbf{b} := \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} & \text{divergencia del campo vectorial } \mathbf{b} \end{cases}$$

## Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

¿Y si las fuerzas másicas son homogéneas?

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = 0;$$

### Ecuación de Lévy

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

La distribución de esfuerzos debe ser igual para todas las estructuras en tensión o deformación plana, siempre y cuando se trate de:

- Contornos idénticos: las estructuras deben tener la misma forma y dimensiones en sus fronteras, así como sus condiciones de frontera.
- Estructuras sometidas al mismo sistema de fuerzas superficiales y másicas, constantes.
- Materiales elásticos.
- Maurice Lévy (1838-1910), ingeniero y matemático francés

## Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

¿Y si las fuerzas másicas son homogéneas?

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = 0;$$

### Ecuación de Lévy

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

La distribución de esfuerzos debe ser igual para todas las estructuras en tensión o deformación plana, siempre y cuando se trate de:

- Contornos idénticos: las estructuras deben tener la misma forma y dimensiones en sus fronteras, así como sus condiciones de frontera.
- Estructuras sometidas al mismo sistema de fuerzas superficiales y másicas, constantes.
- Materiales elásticos.
- Maurice Lévy (1838-1910), ingeniero y matemático francés

## Ecuaciones de compatibilidad general para el caso bidimensional expresada en términos de esfuerzos

¿Y si las fuerzas másicas son homogéneas?

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = 0;$$

### Ecuación de Lévy

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

La distribución de esfuerzos debe ser igual para todas las estructuras en tensión o deformación plana, siempre y cuando se trate de:

- Contornos idénticos: las estructuras deben tener la misma forma y dimensiones en sus fronteras, así como sus condiciones de frontera.
- Estructuras sometidas al mismo sistema de fuerzas superficiales y másicas, constantes.
- Materiales elásticos.
- Maurice Lévy (1838-1910), ingeniero y matemático francés

## Fotoelasticidad

En el método fotoelástico, un material transparente se somete a una luz polarizada y a unas fuerzas; según la llamada *ley de Brewster* o *ley tenso-óptica*, el material responderá mostrando unas franjas del igual color, las cuales se pueden interpretar como curvas de esfuerzo cortante máximo  $\tau_{max}$  constante; esto siempre y cuando el esfuerzo fuera del plano sea el esfuerzo intermedio, es decir,  $\sigma_2$  en el caso tridimensional. ([ver video](#)).

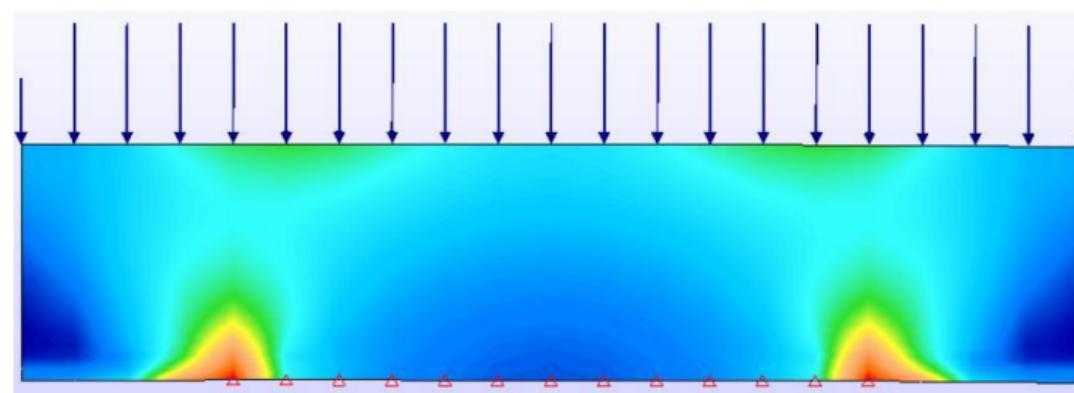


Figure: Estudio de la distribución de esfuerzos sobre un polímero sometido a compresión, utilizando la técnica de fotoelasticidad.  
Hilda Sofía Soto Lesmes, [ver](#).

# Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

Recordemos:

- Las Eqs. (4.3) dadas por la superposición de las deformaciones elásticas:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))$$

- Las EDPs de equilibrio interno (Eq. 5.2):

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{b} = 0$$

## Ecuaciones de Michell

$$\nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial X}{\partial x}$$

$$\nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial Y}{\partial y}$$

$$\nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial Z}{\partial z}$$

$$\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = - \left( \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} \right)$$

$$\nabla^2 \tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} = - \left( \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x} \right)$$

$$\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = - \left( \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \right)$$

- John Henry Michell (1863-1940) en 1900,

# Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

Recordemos:

- Las Eqs. (4.3) dadas por la superposición de las deformaciones elásticas:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))$$

- Las EDPs de equilibrio interno (Eq. 5.2):

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{b} = 0$$

## Ecuaciones de Michell

$$\nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial X}{\partial x}$$

$$\nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial Y}{\partial y}$$

$$\nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial Z}{\partial z}$$

$$\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = - \left( \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} \right)$$

$$\nabla^2 \tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} = - \left( \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x} \right)$$

$$\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = - \left( \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \right)$$

- John Henry Michell (1863-1940) en 1900,

# Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

En notación tensorial:

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\Theta_{,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}b_{k,k} - b_{i,j} - b_{j,i}$$

donde:

- $\Theta := \sigma_{kk} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$  es el primer invariante de esfuerzos  $I_1$
- $\nabla^2$  es el **operador laplaciano tridimensional**:

$$\nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

## Ecuaciones de Michell

$$\nabla^2\sigma_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial X}{\partial x}$$

$$\nabla^2\sigma_y + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial Y}{\partial y}$$

$$\nabla^2\sigma_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial Z}{\partial z}$$

$$\nabla^2\tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z} = -\left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y}\right)$$

$$\nabla^2\tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial z} = -\left(\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x}\right)$$

$$\nabla^2\tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y} = -\left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\right)$$

- Ecuaciones LI, en comparación con las de Saint-Venant.
- Su análogo bidimensional es la ecuación general bidimensional ( $K_1$ ).

## Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

¿Y si las fuerzas másicas son constantes?

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = [X(x, y, z) \quad Y(x, y, z) \quad Z(x, y, z)]^T = \text{cte}$$

### Ecuaciones de Beltrami

$$\nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0$$

$$\nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = 0$$

$$\nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0$$

$$\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\nabla^2 \tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = 0$$

- Válidas para materiales elásticos, lineales, homogéneos e isótropos (Ley de Hooke).
- Son análogas a  $\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$  (caso bidimensional).
- Eugenio Beltrami (1835-1900) en 1892, matemático italiano.

## Ecuaciones de compatibilidad en tres dimensiones expresadas en términos de esfuerzos

¿Y si las fuerzas másicas son constantes?

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = [X(x, y, z) \quad Y(x, y, z) \quad Z(x, y, z)]^T = \text{cte}$$

### Ecuaciones de Beltrami

$$\nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0$$

$$\nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = 0$$

$$\nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0$$

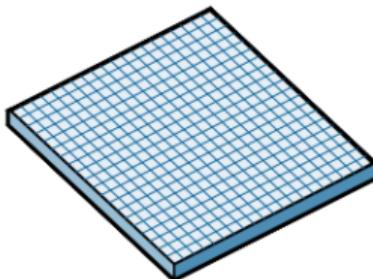
$$\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\nabla^2 \tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = 0$$

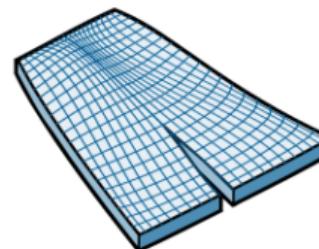
- Válidas para materiales elásticos, lineales, homogéneos e isótropos (Ley de Hooke).
- Son análogas a  $\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$  (caso bidimensional).
- Eugenio Beltrami (1835-1900) en 1892, matemático italiano.

# Interpretación física de las ecuaciones de compatibilidad



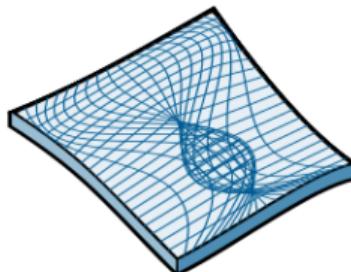
original

(a)



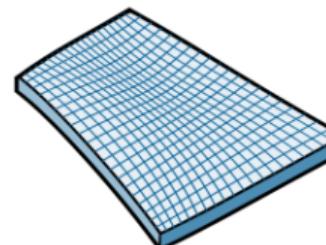
deformación no compatible: grietas

(b)



deformación no compatible: traslapos

(c)



deformación compatible

(d)

Las ecuaciones que desarrollamos:

- EDPs de compatibilidad en términos de deformaciones para:
  - Caso bidimensional.
  - Caso tridimensional ([Saint-Venant](#)).
- EDPs de compatibilidad en términos de esfuerzos para:
  - Caso de Tensión plana.
  - Caso de Deformación plana.
  - Caso bidimensional general ([Lévy](#))
  - Caso tridimensional ([Michell, Beltrami](#)).

## El uso

Estas ecuaciones se usan en análisis computacional. Al modelar, garantizamos un análisis elástico mediante estas relaciones.

# Interpretación física de las ecuaciones de compatibilidad

Sobre las ecuaciones de compatibilidad en términos de deformaciones

- Caso bidimensional:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

- Caso tridimensional (Saint-Venant):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

## Grietas y discontinuidades

No deben aparecer grietas o discontinuidades en el campo de deformaciones.

- $u, v, w$  son:
  - Funciones continuas y derivables.
  - Continuidad  $C^3(\Omega)$
- Válidas para materiales con cualquier tipo de comportamiento (elástico, plástico, anisótropo, lineal, no lineal, etc) siempre y cuando las deformaciones de este sean pequeñas.

# Interpretación física de las ecuaciones de compatibilidad

Sobre las ecuaciones de compatibilidad en términos de deformaciones

- Caso bidimensional:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

- Caso tridimensional (Saint-Venant):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

## En general: los traslapos

- Al imponer relaciones específicas entre las segundas derivadas de los desplazamientos  $u$ ,  $v$  y  $w$ . Esto asegura la continuidad espacial de las deformaciones.
- Estas ecuaciones imponen condiciones necesarias para que la deformación sea geométricamente compatible, es decir, que las partes del sólido se conecten de forma coherente y sin superposición de materia.

# Interpretación física de las ecuaciones de compatibilidad

Sobre las ecuaciones de compatibilidad en términos de esfuerzos

- Caso bidimensional:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right).$$

- Caso tridimensional (Michell, Beltrami):

- Caso bidimensional simplificado (Lévy):

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0.$$

## Admisibilidad

Sólo son válidas para materiales con comportamiento elástico, lineal, homogéneo e isotropo siempre y cuando las deformaciones sean pequeñas.

- En su deducción se empleó la Ley de Hooke.

## Ejemplo

### Ejemplo 5.1.

Considere una condición de tensión plana, en la cual  $\varepsilon_x(x, y) = a(x^2 + y^2)$  y  $\gamma_{x,y}(x, y) = 4xy$ , donde  $a$  es una constante. Encuentre la deformación longitudinal  $\varepsilon_y(x, y)$  correspondiente que sea físicamente válida, asumiendo una condición en la cual las fuerzas másicas se consideran nulas y que el material es elástico, lineal, homogéneo e isótropo.

Código en Python: [05\\_01\\_ejemplo.ipynb](#)

# Derrotero

- Introducción
- 5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio
- 5.2. Ecuaciones de compatibilidad
- **5.3. Condiciones de frontera**
- 5.4. Condiciones de equilibrio en la frontera
- 5.5. Equilibrio estático
- 5.6. Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones
- 5.7. Función de tensión de Airy
- 5.8. Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional
- 5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier
- 5.10. Unicidad de la solución
- 5.11. Principio de superposición
- Principio de Saint-Venant
- 5.13. El vector de Galerkin
- Ejemplo de aplicación de las EPDs de compatibilidad
- Material de apoyo

# Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera describen, por ejemplo, la forma como está soportado el sólido o las cargas superficiales aplicadas, y esto se modela matemáticamente definiendo ya sea los desplazamientos o los esfuerzos en los puntos del contorno del sólido.

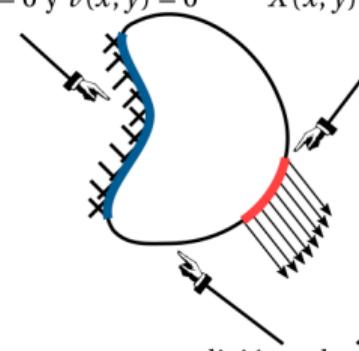
## Condición de frontera escencial

(de desplazamiento o cinemática) se especifican los desplazamientos.

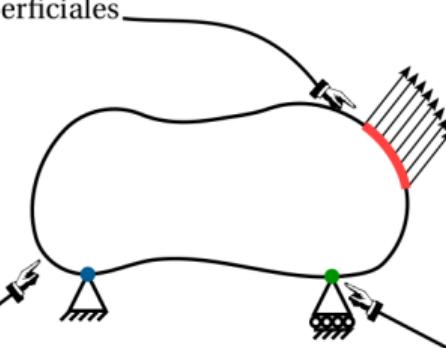
## Condición de frontera natural

(de fuerza o esfuerzo) describe los esfuerzos en el contorno del sólido.

condición de frontera donde se especifican los desplazamientos  
 $u(x, y) = 0$  y  $v(x, y) = 0$



condición de frontera donde se especifican las fuerzas superficiales  
 $\bar{X}(x, y)$  y  $\bar{Y}(x, y)$



condición de frontera donde se especifican las fuerzas superficiales  
 $\bar{X}(x, y) = 0$  y  $\bar{Y}(x, y) = 0$

condición de frontera mixta donde se especifican las fuerzas en una dirección y los desplazamientos en la otra

## Derrotero

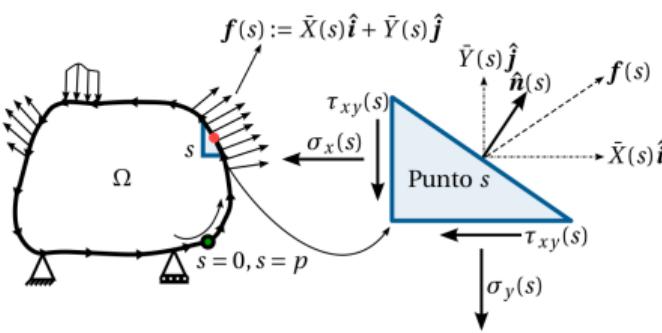
- Introducción
- 5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio
- 5.2. Ecuaciones de compatibilidad
- 5.3. Condiciones de frontera
- **5.4. Condiciones de equilibrio en la frontera**
- 5.5. Equilibrio estático
- 5.6. Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones
- 5.7. Función de tensión de Airy
- 5.8. Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional
- 5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier
- 5.10. Unicidad de la solución
- 5.11. Principio de superposición
- Principio de Saint-Venant
- 5.13. El vector de Galerkin
- Ejemplo de aplicación de las EPDs de compatibilidad
- Material de apoyo

## Condiciones de equilibrio en la frontera

- ¿Qué pasa en la frontera del sólido?
- ¿De qué forma las fuerzas superficiales se convierten en esfuerzos en el interior del sólido?

# Condiciones de equilibrio en la frontera

## Análisis en dos dimensiones



Descripción de la frontera como una curva paramétrica, con:

- $s \in D$ , parámetro longitud de arco de la curva.
- Incrementa en el sentido antihorario.

## Ecuaciones de equilibrio externo bidimensionales

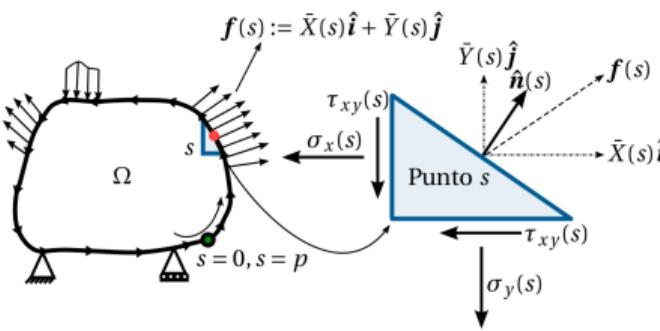
Partiendo de la ecuación de Cauchy. Parametrizando en  $s$  y relacionando con las cargas superficiales  $f$ :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{X}(s) \\ \bar{Y}(s) \end{pmatrix}}_{f(s)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x(s) & \tau_{xy}(s) \\ \tau_{xy}(s) & \sigma_y(s) \end{pmatrix}}_{\underline{\sigma}(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha(s) \\ \beta(s) \end{pmatrix}}_{\hat{n}(s)}$$

Se relacionan las cargas superficiales con la forma de la frontera y los esfuerzos en el interior del sólido para un punto  $s \in \delta\Omega$ .

# Condiciones de equilibrio en la frontera

## Análisis en dos dimensiones



Descripción de la frontera como una curva paramétrica, con:

- $s \in D$ , parámetro longitud de arco de la curva.
- Incrementa en el sentido antihorario.

## Ecuaciones de equilibrio externo bidimensionales

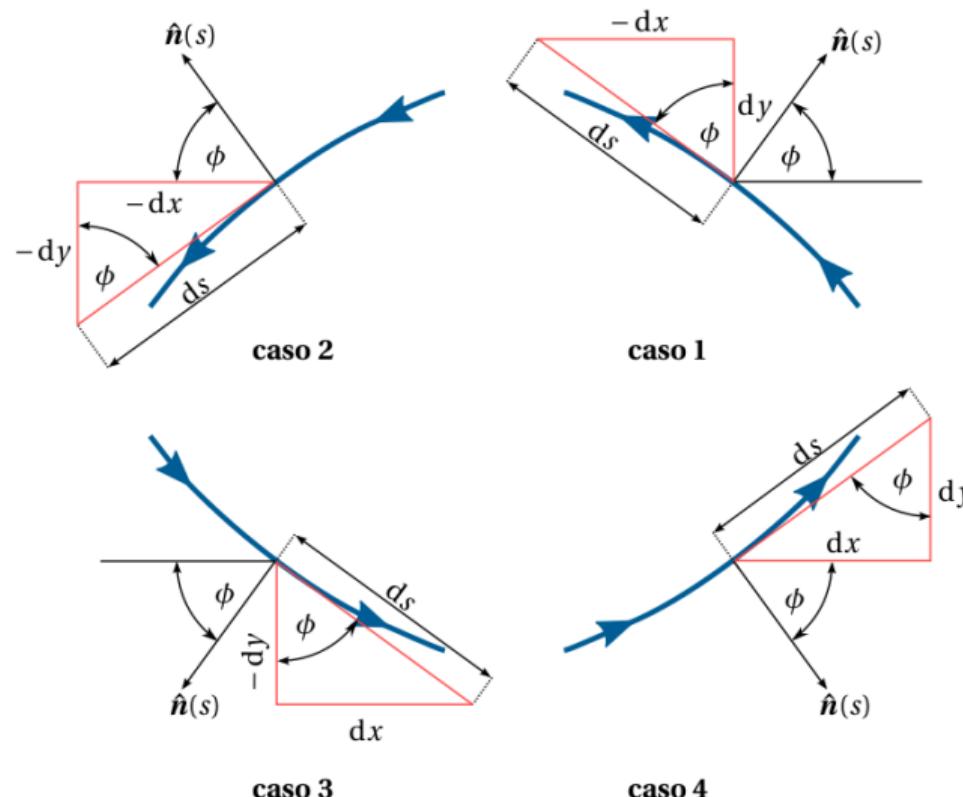
Partiendo de la ecuación de Cauchy. Parametrizando en  $s$  y relacionando con las cargas superficiales  $f$ :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{X}(s) \\ \bar{Y}(s) \end{pmatrix}}_{f(s)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x(s) & \tau_{xy}(s) \\ \tau_{xy}(s) & \sigma_y(s) \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha(s) \\ \beta(s) \end{pmatrix}}_{\hat{n}(s)}$$

Se relacionan las cargas superficiales con la forma de la frontera y los esfuerzos en el interior del sólido para un punto  $s \in \delta\Omega$ .

# Condiciones de equilibrio en la frontera

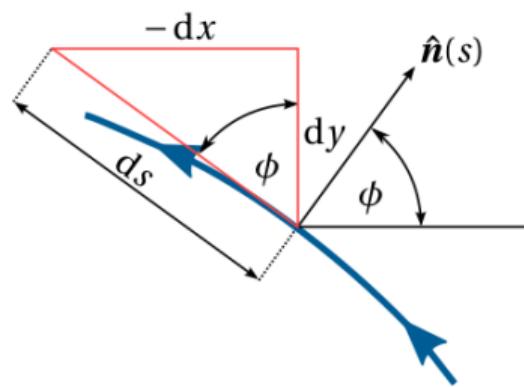
## Análisis en dos dimensiones



# Condiciones de equilibrio en la frontera

## Análisis en dos dimensiones

### Caso 1: (i cuadrante)

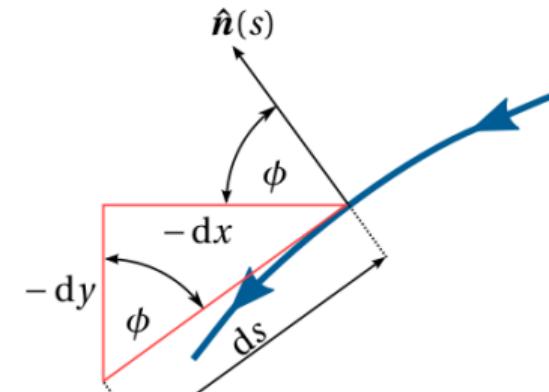


$\hat{\mathbf{n}} := [\cos \phi, \cos (\frac{\pi}{2} - \phi)]^T$ , por lo tanto:

$$\alpha = \cos \phi = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \phi \right) = \sin \phi = -\frac{dx}{ds}$$

### Caso 2: (ii cuadrante)



$\hat{\mathbf{n}} := [\cos(\pi - \phi), \cos (\frac{\pi}{2} - \phi)]^T$ , por lo tanto:

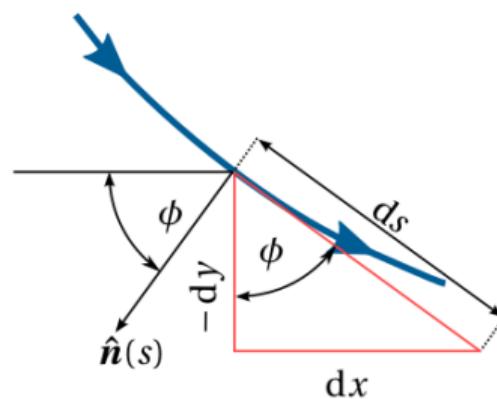
$$\alpha = \cos(\pi - \phi) = -\cos \phi = -\frac{-dy}{ds} = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \phi \right) = \sin \phi = -\frac{dx}{ds}$$

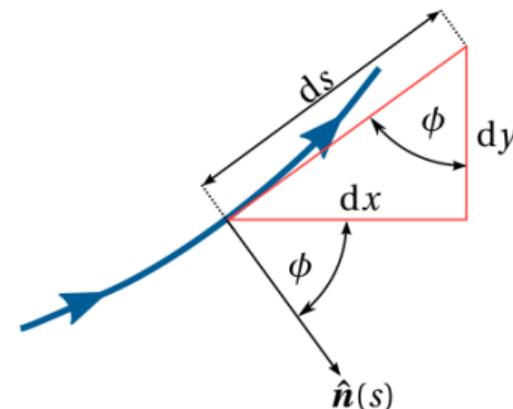
# Condiciones de equilibrio en la frontera

## Análisis en dos dimensiones

### Caso 3: (iii cuadrante)



### Caso 4: (iv cuadrante)



$\hat{n} := [\cos(\pi + \phi), \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)]^T$ , por lo tanto:

$$\alpha = \cos(\pi + \phi) = -\cos \phi = \frac{-dy}{ds} = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = -\sin \phi = -\frac{dx}{ds}$$

$\hat{n} := [\cos(2\pi - \phi), \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \phi\right)]^T$ , por lo tanto:

$$\alpha = \cos(2\pi - \phi) = \cos \phi = \frac{dy}{ds}$$

$$\beta = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \phi\right) = -\sin \phi = -\frac{dx}{ds}$$

# Condiciones de equilibrio en la frontera

## Análisis en dos dimensiones

### Vector normal y unitario al contorno (bidimensional)

$$\hat{\mathbf{n}} := \left[ \frac{dy(s)}{ds}, -\frac{dx(s)}{ds} \right]^T$$

- $\forall (x(s), y(s)) \in \delta\Omega$
- Se deduce que las componentes del vector  $\hat{\mathbf{n}}$  están relacionadas con la geometría del sólido
- Válida únicamente cuando la curva  $(x(s), y(s))$  esté parametrizada con respecto a la longitud de arco.

El vector tangente a la curva paramétrica  $(x(s), y(s))$  está dado por:

$$\hat{s} = \left[ \frac{dx(s)}{ds}, \frac{dy(s)}{ds} \right]^T.$$

Apunta en el mismo sentido de la curva y se grafica a medida que  $s$  aumenta.

# Condiciones de equilibrio en la frontera

## Análisis en dos dimensiones

### Vector normal y unitario al contorno (bidimensional)

$$\hat{n} := \left[ \frac{dy(s)}{ds}, -\frac{dx(s)}{ds} \right]^T$$

- $\forall (x(s), y(s)) \in \delta\Omega$
- Se deduce que las componentes del vector  $\hat{n}$  están relacionadas con la geometría del sólido
- Válida únicamente cuando la curva  $(x(s), y(s))$  esté parametrizada con respecto a la longitud de arco.

El **vector tangente** a la curva paramétrica  $(x(s), y(s))$  está dado por:

$$\hat{s} = \left[ \frac{dx(s)}{ds}, \frac{dy(s)}{ds} \right]^T.$$

Apunta en el mismo sentido de la curva y se grafica a medida que  $s$  aumenta.

# Condiciones de equilibrio en la frontera

## Análisis en dos dimensiones

### Ejemplo 5.2.

Determine la curva paramétrica asociada a un sólido con forma circular.

$$x(\theta) = r \cos(\theta) \quad y(\theta) = r \sin(\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

### Pregunta

¿Cómo se trabajaría una sección transversal rectangular? ¿y una sección elíptica?

# Condiciones de equilibrio en la frontera

## Análisis en dos dimensiones

### Ejemplo 5.2.

Determine la curva paramétrica asociada a un sólido con forma circular.

$$x(\theta) = r \cos(\theta) \quad y(\theta) = r \sin(\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

### Pregunta

¿Cómo se trabajaría una sección transversal rectangular? ¿y una sección elíptica?

# Condiciones de equilibrio en la frontera

## Análisis en tres dimensiones

Haciendo un análisis similar:

### Ecuaciones de equilibrio externo tridimensionales

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{X}(x) \\ \bar{Y}(x) \\ \bar{Z}(x) \end{pmatrix}}_{f(x,y,z)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x(x) & \tau_{xy}(x) & \tau_{xz}(x) \\ \tau_{xy}(x) & \sigma_y(x) & \tau_{yz}(x) \\ \tau_{xz}(x) & \tau_{yz}(x) & \sigma_z(x) \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}(x)} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha(x) \\ \beta(x) \\ \gamma(x) \end{pmatrix}}_{\hat{n}(x)}$$

- $\forall (x, y, z) \in \delta\Omega$
- Relaciona las cargas superficiales con la geometría de las fronteras del sólido y con los esfuerzos internos.
- En tres dimensiones no es posible describir la frontera como una curva paramétrica.

# Condiciones de equilibrio en la frontera

Mis apuntes

bidimensional	tridimensional
<p>Sólido bidimensional</p>	<p>Sólido tridimensional</p>
<p>El contorno es una <u>curva paramétrica</u>, parametrizada en <u>sentido antihorario</u></p> <p><math>(x(s), y(s))</math></p> <p><math>\int_{S0}^{Sp}</math></p> <p><math>s+δs</math></p> <p><math>(x(s+δs), y(s+δs))</math></p> <p>La puedo "extender"</p>	<p>El contorno es una <u>superficie</u>, y las superficies no se pueden parametrizar.</p> <p><math>\int_{S0}^{Sp}</math></p> <p><math>(x_0, y_0)</math></p> <p>To mismo</p>
<p>Tenemos: <math>\oint ds</math></p> <p>↑ parametro longitud de arco ("s" minúscula)</p> <p>✓ Debe respetar un sentido de parametrización</p>	<p>Tenemos <math>\oint dS</math></p> <p>↑ diferencial de superficie</p>

# Derrotero

- Introducción
- 5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio
- 5.2. Ecuaciones de compatibilidad
- 5.3. Condiciones de frontera
- 5.4. Condiciones de equilibrio en la frontera
- **5.5. Equilibrio estático**
- 5.6. Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones
- 5.7. Función de tensión de Airy
- 5.8. Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional
- 5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier
- 5.10. Unicidad de la solución
- 5.11. Principio de superposición
- Principio de Saint-Venant
- 5.13. El vector de Galerkin
- Ejemplo de aplicación de las EPDs de compatibilidad
- Material de apoyo

# Equilibrio estático

Un cuerpo se encuentra en **equilibrio estático** cuando:

$$\mathbf{f}_{\text{masicas}} + \mathbf{f}_{\text{superficiales}} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{m}_{\text{masicas}} + \mathbf{m}_{\text{superficiales}} = 0;$$

Medimos:

- Acciones producidas por las **fuerzas másicas**:
- Acciones producidas por las **fuerzas superficiales**:

$$\mathbf{f}_{\text{masicas}} = \iiint_{\Omega} \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV$$

$$\mathbf{m}_{\text{masicas}} = \iiint_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV$$

$$\mathbf{f}_{\text{superficiales}} = \oint_{\delta\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS$$

$$\mathbf{m}_{\text{superficiales}} = \oint_{\delta\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS$$

## Equilibrio estático

Un cuerpo se encuentra en **equilibrio estático** cuando:

$$\mathbf{f}_{\text{masicas}} + \mathbf{f}_{\text{superficiales}} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{m}_{\text{masicas}} + \mathbf{m}_{\text{superficiales}} = 0;$$

Medimos:

- Acciones producidas por las **fuerzas másicas**:

$$\mathbf{f}_{\text{masicas}} = \iiint_{\Omega} \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV$$

$$\mathbf{m}_{\text{masicas}} = \iiint_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV$$

- Acciones producidas por las **fuerzas superficiales**:

$$\mathbf{f}_{\text{superficiales}} = \oint_{\delta\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS$$

$$\mathbf{m}_{\text{superficiales}} = \oint_{\delta\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS$$

## Equilibrio estático

En conclusión, como tenemos equilibrio estático, resulta que:

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{b}(\mathbf{x})dV + \iint_{\delta\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x})dS = 0$$

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{b}(\mathbf{x})dV + \iint_{\delta\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{f}(\mathbf{x})dS = 0$$

Tenga en cuenta que las integrales  $\iint$  son integrales de contorno, que se efectúan sobre toda la “piel” de  $\Omega$ , es decir, sobre  $\delta\Omega$ .

# Equilibrio estático

## Particularización para el caso bidimensional

Tomando el espesor  $t \neq 0$  constante, el equilibrio de fuerzas:

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} X(\mathbf{x}) dA + \oint_{\delta\Omega} \bar{X}(\mathbf{s}) ds &= 0 \\ \iint_{\Omega} Y(\mathbf{x}) dA + \oint_{\delta\Omega} \bar{Y}(\mathbf{s}) ds &= 0\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que:  $[x, y, 0]^T \times [\bar{X}, \bar{Y}, 0]^T = [0, 0, x\bar{Y} - y\bar{X}]^T$ , el equilibrio de momentos:

$$\iint_{\Omega} (xY(\mathbf{x}) - yX(\mathbf{x})) dA + \oint_{\delta\Omega} (x(s)\bar{Y}(s) - y(s)\bar{X}(s)) ds = 0$$

## Equilibrio estático

### Ecuaciones integrales de equilibrio (postulado de Cauchy)

Sea un sólido  $\Omega$  el cual está sujeto a unas fuerzas másicas y de superficie representadas por los campos vectoriales  $b$  y  $f$ , respectivamente. Entonces cada subdominio  $V$  de un sólido  $\Omega$ , es decir, cada  $V \subseteq \Omega$  satisface las siguientes ecuaciones de equilibrio

$$\iiint_V b(x) dV + \oint_{\delta V} f(x) dS = 0$$

$$\iiint_V x \times b(x) dV + \oint_{\delta V} x \times f(x) dS = 0$$

- Tienen como dominio  $V \subseteq \Omega$ , por lo que son ecuaciones más generales que las vistas anteriormente.

• ¿Por qué  $V \subseteq \Omega$ ? Una condición más fuerte: se manifiesta en todo punto del dominio, no solo en el promedio.

## Un enfoque alternativo para deducir las ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio

Hay dos formas de determinar las EDPs de equilibrio en el sólido:

1. Al hacer sumatorias de fuerzas en un elemento diferencial de sólido.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

2. Según las **ecuaciones integrales de equilibrio**, considerando que cualquier  $V \subseteq \Omega$  está en equilibrio de fuerzas, y aplicando el *teorema de la divergencia*:

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{g} \, dV = \iint_{\partial V} \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS.$$

# Un enfoque alternativo para deducir las ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio

Procedimiento:

$$\iiint_V \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV + \iint_{\delta V} \underline{\underline{\sigma}} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) dS = 0$$

Tomando la primera ecuación integral

$$\iiint_V X(\mathbf{x}) dV + \iint_{\delta V} \begin{bmatrix} \sigma_x(\mathbf{x}) \\ \tau_{xy}(\mathbf{x}) \\ \tau_{xz}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) dS = 0$$

Aplicando el teorema de la divergencia

$$\begin{aligned} \iiint_V X(\mathbf{x}) dV + \iiint_V \operatorname{div}([\sigma_x(\mathbf{x}), \tau_{xy}(\mathbf{x}), \tau_{xz}(\mathbf{x})]^T) dV &= 0 \\ \iiint_V \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) dV &= 0 \end{aligned}$$

Siguiendo el *teorema de la localización*:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

## Un enfoque alternativo para deducir las ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio

### Pregunta de control 12, sección 5.16

En la sección 5.5.2 se parte del hecho de que el integrando en una integral es nulo si esta integral vale cero al ser evaluado en cualquier subconjunto sobre el dominio del integrando. En otras palabras, sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función que se integra sobre una región  $V$  y supongamos que su integral vale cero para todo  $V \subseteq \Omega$ , en otras palabras,

$$\int_V f(x) dx = 0 \quad \text{para todo } V \subseteq \Omega;$$

esto implica que  $f(x) = 0$  para todo  $x \in \Omega$ . ¿Es completamente claro lo que se acabó de decir?

## Derrotero

- Introducción
- 5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio
- 5.2. Ecuaciones de compatibilidad
- 5.3. Condiciones de frontera
- 5.4. Condiciones de equilibrio en la frontera
- 5.5. Equilibrio estático
- **5.6. Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones**
- 5.7. Función de tensión de Airy
- 5.8. Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional
- 5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier
- 5.10. Unicidad de la solución
- 5.11. Principio de superposición
- Principio de Saint-Venant
- 5.13. El vector de Galerkin
- Ejemplo de aplicación de las EPDs de compatibilidad
- Material de apoyo

# Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones

## Caso bidimensional

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(x, y) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \rightarrow \partial u(x, y) = \varepsilon_x(x, y) \partial x & \rightarrow u(x, y) = \int \varepsilon_x(x', y) dx' + f(y) \\ \varepsilon_y(x, y) &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \rightarrow \partial v(x, y) = \varepsilon_y(x, y) \partial x & \rightarrow v(x, y) = \int \varepsilon_y(x, y') dy' + g(x)\end{aligned}$$

Reemplazando en  $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\gamma_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \int \varepsilon_x(x', y) dx' + f(y) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \int \varepsilon_y(x, y') dy' + g(x) \right)$$

# Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones

## Caso bidimensional

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(x, y) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \rightarrow \partial u(x, y) = \varepsilon_x(x, y) \partial x & \rightarrow u(x, y) = \int \varepsilon_x(x', y) dx' + f(y) \\ \varepsilon_y(x, y) &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \rightarrow \partial v(x, y) = \varepsilon_y(x, y) \partial x & \rightarrow v(x, y) = \int \varepsilon_y(x, y') dy' + g(x)\end{aligned}$$

Reemplazando en  $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\gamma_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \int \varepsilon_x(x', y) dx' + f(y) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \int \varepsilon_y(x, y') dy' + g(x) \right)$$

# Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones

## Caso bidimensional

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(x, y) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \rightarrow \partial u(x, y) = \varepsilon_x(x, y) \partial x & \rightarrow u(x, y) = \int \varepsilon_x(x', y) dx' + f(y) \\ \varepsilon_y(x, y) &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \rightarrow \partial v(x, y) = \varepsilon_y(x, y) \partial x & \rightarrow v(x, y) = \int \varepsilon_y(x, y') dy' + g(x)\end{aligned}$$

Reemplazando en  $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\gamma_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \int \varepsilon_x(x', y) dx' + f(y) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \int \varepsilon_y(x, y') dy' + g(x) \right)$$

# Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones

## Caso bidimensional

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(x, y) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \rightarrow \partial u(x, y) = \varepsilon_x(x, y) \partial x & \rightarrow u(x, y) = \int \varepsilon_x(x', y) dx' + f(y) \\ \varepsilon_y(x, y) &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \rightarrow \partial v(x, y) = \varepsilon_y(x, y) \partial x & \rightarrow v(x, y) = \int \varepsilon_y(x, y') dy' + g(x)\end{aligned}$$

Reemplazando en  $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\gamma_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \int \varepsilon_x(x', y) dx' + f(y) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \int \varepsilon_y(x, y') dy' + g(x) \right)$$

# Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones

## Caso bidimensional

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(x, y) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \rightarrow \partial u(x, y) = \varepsilon_x(x, y) \partial x & \rightarrow u(x, y) = \int \varepsilon_x(x', y) dx' + f(y) \\ \varepsilon_y(x, y) &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \rightarrow \partial v(x, y) = \varepsilon_y(x, y) \partial x & \rightarrow v(x, y) = \int \varepsilon_y(x, y') dy' + g(x)\end{aligned}$$

Reemplazando en  $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\gamma_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \int \varepsilon_x(x', y) dx' + f(y) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \int \varepsilon_y(x, y') dy' + g(x) \right)$$

# Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones

## Caso bidimensional

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(x, y) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \rightarrow \partial u(x, y) = \varepsilon_x(x, y) \partial x & \rightarrow u(x, y) = \int \varepsilon_x(x', y) dx' + f(y) \\ \varepsilon_y(x, y) &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \rightarrow \partial v(x, y) = \varepsilon_y(x, y) \partial x & \rightarrow v(x, y) = \int \varepsilon_y(x, y') dy' + g(x)\end{aligned}$$

Reemplazando en  $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\gamma_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \int \varepsilon_x(x', y) dx' + f(y) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \int \varepsilon_y(x, y') dy' + g(x) \right)$$

# Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones

## Caso bidimensional

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(x, y) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \rightarrow \partial u(x, y) = \varepsilon_x(x, y) \partial x & \rightarrow u(x, y) = \int \varepsilon_x(x', y) dx' + f(y) \\ \varepsilon_y(x, y) &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \rightarrow \partial v(x, y) = \varepsilon_y(x, y) \partial x & \rightarrow v(x, y) = \int \varepsilon_y(x, y') dy' + g(x)\end{aligned}$$

Reemplazando en  $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

$$\gamma_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \int \varepsilon_x(x', y) dx' + f(y) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \int \varepsilon_y(x, y') dy' + g(x) \right)$$

# Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones

## Caso bidimensional

Organizando términos:

$$\frac{df(y)}{dy} + \frac{dg(x)}{dx} = \gamma_{xy}(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \int \varepsilon_x(x', y) dx' \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \int \varepsilon_y(x, y') dy' \right).$$

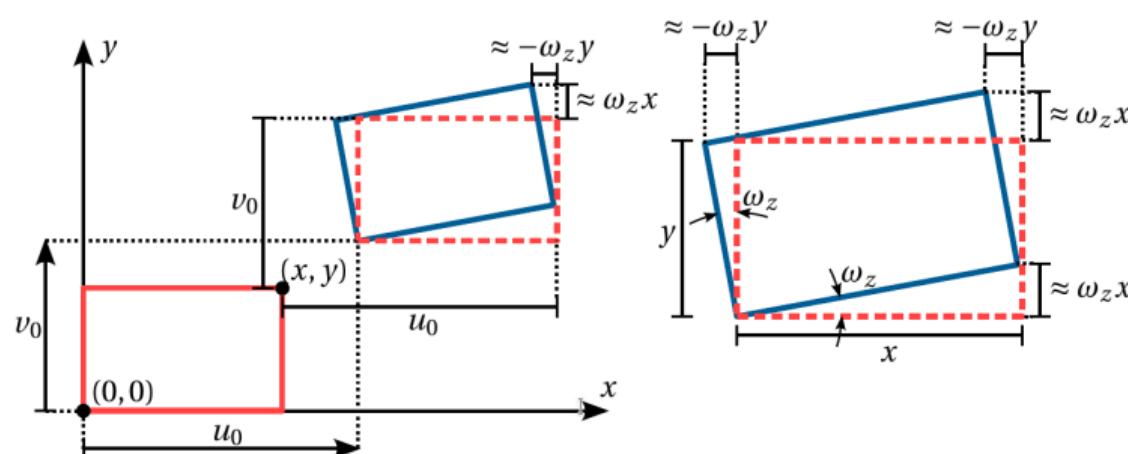
El desplazamiento depende de dos funciones  $f(y)$  y  $g(x)$ ; encontrarlas requiere de cierta pericia en el cálculo de la solución, ya que estas dos funciones contienen términos asociados a los desplazamientos y rotaciones rígidas del sólido.

# Ejemplo

Encontrando los desplazamientos asociados al desplazamiento y la rotación rígida |  $u_0$  y  $v_0$  desplazamiento rígido,  $\omega_0$  rotación rígida

## Ejemplo 5.3.

Calcule los desplazamientos asociados al movimiento rígido.



# Ejemplo

Encontrando los desplazamientos asociados al desplazamiento y la rotación rígida |  $u_0$  y  $v_0$  desplazamiento rígido,  $\omega_0$  rotación rígida

Ni el desplazamiento ni la rotación rígida producen deformaciones longitudinales o angulares en el sólido:

$$\varepsilon_x(x, y) = \varepsilon_{x,y} = \gamma_{xy}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Los desplazamientos vendrán dados por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ obtenemos } u(x, y) = c_1 + f(y),$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ obtenemos } v(x, y) = c_2 + g(x).$$

Reemplazando en  $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ , resulta:

$$\begin{aligned}\gamma_{xy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (c_1 + f(y)) + \frac{\partial}{\partial x} (c_2 + g(x)) \\ &= \frac{df(y)}{dy} + \frac{dg(x)}{dx} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Descomponemos en dos ecuaciones diferenciales:

$$\frac{df(y)}{dy} + \omega_z = 0 \quad \frac{dg(x)}{dx} - \omega_z = 0.$$

Resolviendo estas ecuaciones:

$$f(y) = -\omega_z y + d_1 \quad g(x) = \omega_z x + d_2.$$

Reemplazando

$$u(x, y) = c_1 + d_1 - \omega_z y \quad v(x, y) = c_2 + d_2 + \omega_z x.$$

Haciendo  $u_0 = c_1 + d_1$  y  $v_0 = c_2 + d_2$  obtenemos:

$$u(x, y) = u_0 - \omega_z y \quad v(x, y) = v_0 + \omega_z x.$$

# Derrotero

- Introducción
- 5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio
- 5.2. Ecuaciones de compatibilidad
- 5.3. Condiciones de frontera
- 5.4. Condiciones de equilibrio en la frontera
- 5.5. Equilibrio estático
- 5.6. Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones
- **5.7. Función de tensión de Airy**
- 5.8. Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional
- 5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier
- 5.10. Unicidad de la solución
- 5.11. Principio de superposición
- Principio de Saint-Venant
- 5.13. El vector de Galerkin
- Ejemplo de aplicación de las EPDs de compatibilidad
- Material de apoyo

## Función de tensión de Airy

### Uso

Se utiliza en mecánica de sólidos para deducir analíticamente muchas condiciones de esfuerzo presentes en sólidos con ciertas geometrías *bidimensionales*.

### Método

Se asume una función de tensión  $\phi$  que depende de unos coeficientes desconocidos y que satisfagan un operador llamado *el biarmónico*; luego, se estima el campo vectorial de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos y a partir de las condiciones de frontera, se estima el valor de los coeficientes desconocidos.

No existen las funciones de tensión de Airy para el caso tridimensional

# Función de tensión de Airy

Algunos ejemplos

## Muro en tablestaca

### Resultados

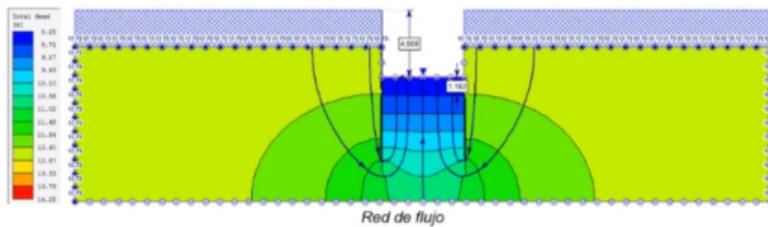


Figure: Flujo bidimensional, Geotecnia (De hecho, la ecuación de Laplace). [Video](#).

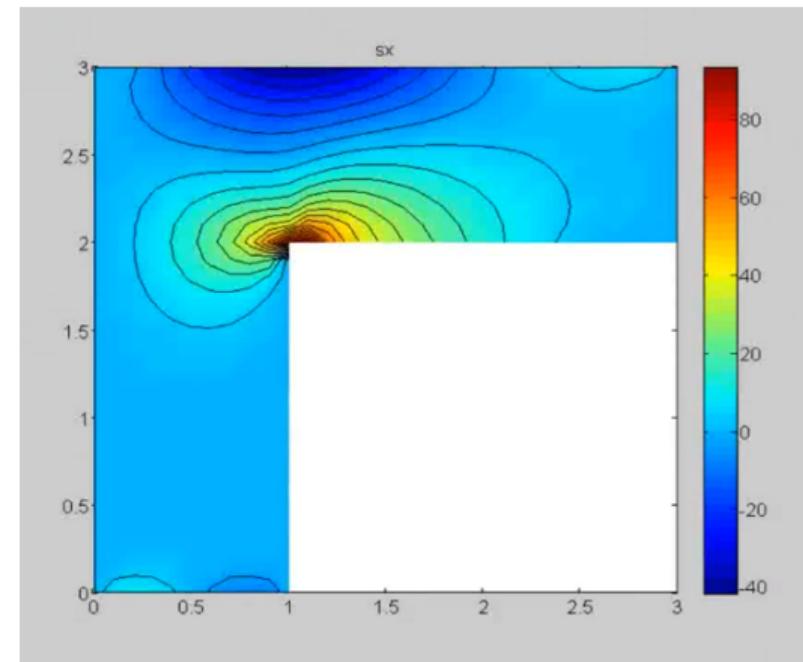


Figure: Esfuerzos en estructuras. [Video](#).

## Función de tensión de Airy

Sea  $V(x, y)$  una función tal que:

$$X(x, y) = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial x}$$

$$Y(x, y) = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial y}$$

y hágase

$$\sigma_x(x, y) = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} + V(x, y)$$

$$\sigma_y(x, y) = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} + V(x, y)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x \partial y}$$

## Función de tensión de Airy

$$X(x, y) = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial x}$$

$$Y(x, y) = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial y}$$

$$\sigma_x(x, y) = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} + V(x, y)$$

$$\sigma_y(x, y) = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} + V(x, y)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x \partial y}$$

- $\mathbf{b} = -\nabla V$  donde  $\mathbf{b} = [X, Y]^T$
- $V$  pertenece a un tipo especial de funciones conocidas como **funciones potenciales escalares**.
- $\phi$  se conoce como **la función de tensión de Airy (Airy stress function)**.
- George Bidell Airy (1801-1892) en 1862, matemático y astrónomo inglés.

## Función de tensión de Airy

Recordemos:

- Las ecuaciones diferenciales de equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

- La ecuación de compatibilidad general (5.13)

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = K_1 \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

Si reemplazamos las ecuaciones (5.36) y (5.37) en las ecuaciones diferenciales de equilibrio (5.1), veremos que la función de tensión de Airy satisface dichas ecuaciones (es decir, obtendremos  $0 = 0$ ).

## Función de tensión de Airy

Calculamos derivadas:

- Para  $\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + V$ :

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

- Para  $\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V$ :

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

- Para las fuerzas mágicas  $X = -\frac{\partial V}{\partial x}$  y  $Y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ :

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

## Función de tensión de Airy

Reemplazamos (5.36), (5.37a) y (5.37b) en la ecuación de compatibilidad (5.13) aplicando derivadas, llegamos a:

$$\underbrace{\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4}}_{\nabla^4 \phi} = K_2 \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}_{\nabla^2 V}$$

donde

$$K_2 := -2 - K_1 = \begin{cases} \nu - 1 & \text{para el caso de tensión plana} \\ -\frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} & \text{para el caso de deformación plana} \end{cases}$$

En notación tensorial:

$$\phi_{,1111} + 2\phi_{,1212} + \phi_{,2222} = K_2(V_{,11} + V_{,22})$$

## Función de tensión de Airy

La ecuación anterior de forma compacta:

$$\nabla^4 \phi = K_2 \nabla^2 V$$

- Tiene la forma de las **ecuaciones biarmónicas**
- A sus soluciones se les conoce como **funciones biarmónicas**
- $\nabla^4 \phi$  se llama **biarmónico** de  $\phi$
- $\nabla^2 V$  se le llama **laplaciano** de la función  $V$ .
- $V$  es una **función potencial**.

$$\nabla^4 \phi = \nabla^2(\nabla^2) \phi:$$

$$\underbrace{\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4}}_{\nabla^4 \phi} = \underbrace{\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)}_{\nabla^2(\nabla^2 \phi)} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)$$

## Función de tensión de Airy

¿Y si las fuerzas másicas son constantes?

$$\nabla^4 \phi = 0$$

La distribución de tensiones es la misma para el estado de tensión plana y para el estado de deformación plana.

Cuando la fuerza másica resultante se reduce al peso propio tenemos que la función potencial  $V$  es

$$V = \rho g y$$

y por lo tanto,

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\rho g,$$

Las ecuaciones (5.37) se reducen a

$$\sigma_x = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \rho g y \quad \sigma_y = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \rho g y \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

## Derrotero

- Introducción
- 5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio
- 5.2. Ecuaciones de compatibilidad
- 5.3. Condiciones de frontera
- 5.4. Condiciones de equilibrio en la frontera
- 5.5. Equilibrio estático
- 5.6. Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones
- 5.7. Función de tensión de Airy
- **5.8. Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional**
- 5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier
- 5.10. Unicidad de la solución
- 5.11. Principio de superposición
- Principio de Saint-Venant
- 5.13. El vector de Galerkin
- Ejemplo de aplicación de las EPDs de compatibilidad
- Material de apoyo

# Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional

- Parametrización de las fuerzas superficiales:

$$\bar{X}(s) = \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + V(s) \frac{dy(s)}{ds} \quad \bar{Y}(s) = - \left( \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + V(s) \frac{dx(s)}{ds} \right)$$

- Variación de la función de tensión de Airy (5.50):

$$\frac{\partial \phi(x(s), y(s))}{\partial y} = \int (\bar{X}(s) - V(s)\alpha(s)) ds + C_1$$

$$\frac{\partial \phi(x(s), y(s))}{\partial x} = - \int (\bar{Y}(s) - V(s)\beta(s)) ds + C_2$$

## Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional

- Haciendo  $V = 0$  con el objeto de no considerar los esfuerzos producidos por las fuerzas másicas, resulta (5.53):

$$\phi(x(s), y(s)) = x(s) \frac{\partial \phi}{\partial x} + y(s) \frac{\partial \phi}{\partial y} - \int (y(s) \bar{X}(s) - x(s) \bar{Y}(s)) ds + C$$

# Conclusión

## Determinar la distribución de tensiones

El problema para determinar la distribución de tensiones en un problema bidimensional, cuando no se tiene en cuenta la fuerza másica y se utiliza el enfoque de Airy, se reduce a encontrar la función  $\phi$  que cumple en todo punto interior al contorno, la ecuación (5.46,  $\nabla^4\phi = 0$ ), sujeto a las condiciones de frontera (5.50) y (5.53)

## Derrotero

- Introducción
- 5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio
- 5.2. Ecuaciones de compatibilidad
- 5.3. Condiciones de frontera
- 5.4. Condiciones de equilibrio en la frontera
- 5.5. Equilibrio estático
- 5.6. Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones
- 5.7. Función de tensión de Airy
- 5.8. Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional
- **5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier**
- 5.10. Unicidad de la solución
- 5.11. Principio de superposición
- Principio de Saint-Venant
- 5.13. El vector de Galerkin
- Ejemplo de aplicación de las EPDs de compatibilidad
- Material de apoyo

# Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

Ecuaciones de Navier-Cauchy, Ecuaciones de Navier-Lamé o simplemente Ecuaciones de Navier

¿Cómo calcular los desplazamientos del sólido?

## 1. Cálculo paso a paso:

- Calcular el tensor de esfuerzos con las Ecuaciones de Michell.
- Calcular las deformaciones con la Ley de Hooke.
- Calcular los desplazamientos por integración de las deformaciones.

## 2. Cálculo directo:

- Usando las EDPs de Cauchy-Navier, también conocidas como la ecuación fundamental de la elasticidad.

3. Claude Louis Henri Navier (1785 - 1836), matemático, físico e ingeniero civil francés.

# Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

Ecuaciones de Navier-Cauchy, Ecuaciones de Navier-Lamé o simplemente Ecuaciones de Navier

¿Cómo calcular los desplazamientos del sólido?

## 1. Cálculo paso a paso:

- Calcular el tensor de esfuerzos con las Ecuaciones de Michell.
- Calcular las deformaciones con la Ley de Hooke.
- Calcular los desplazamientos por integración de las deformaciones.

## 2. Cálculo directo:

- Usando las EDPs de Cauchy-Navier, también conocidas como la ecuación fundamental de la elasticidad.

3. Claude Louis Henri Navier (1785 - 1836), matemático, físico e ingeniero civil francés.

# Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

Ecuaciones de Navier-Cauchy, Ecuaciones de Navier-Lamé o simplemente Ecuaciones de Navier

¿Cómo calcular los desplazamientos del sólido?

## 1. Cálculo paso a paso:

- Calcular el tensor de esfuerzos con las Ecuaciones de Michell.
- Calcular las deformaciones con la Ley de Hooke.
- Calcular los desplazamientos por integración de las deformaciones.

## 2. Cálculo directo:

- Usando las EDPs de Cauchy-Navier, también conocidas como la ecuación fundamental de la elasticidad.

3. Claude Louis Henri Navier (1785 - 1836), matemático, físico e ingeniero civil francés.

# Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

Ecuaciones de Navier-Cauchy, Ecuaciones de Navier-Lamé o simplemente Ecuaciones de Navier

¿Cómo calcular los desplazamientos del sólido?

## 1. Cálculo paso a paso:

- Calcular el tensor de esfuerzos con las Ecuaciones de Michell.
- Calcular las deformaciones con la Ley de Hooke.
- Calcular los desplazamientos por integración de las deformaciones.

## 2. Cálculo directo:

- Usando las EDPs de Cauchy-Navier, también conocidas como la [ecuación fundamental de la elasticidad](#).

3. Claude Louis Henri Navier (1785 - 1836), matemático, físico e ingeniero civil francés.

# Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

Recordemos las EDPs de equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_x(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(\mathbf{x})}{\partial z} + X(\mathbf{x}) = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(\mathbf{x})}{\partial z} + Y(\mathbf{x}) = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(\mathbf{x})}{\partial z} + Z(\mathbf{x}) = 0$$

Asumiendo un sólido elástico, lineal, isótropo y homogéneo: las deformaciones y los esfuerzos están relacionados por la ley de Hooke:

$$\sigma_x = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_y = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_z = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\tau_{xy} = G \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xz} = G \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = G \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

## Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

Reemplazando en la primera EDPs de equilibrio:

$$(\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + X = 0$$

Siguiendo el mismo procedimiento en la dirección  $y$  y en la dirección  $z$ , deducimos:

$$(\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + G \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + Y = 0$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + G \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + Z = 0$$

Estas son las llamadas ecuaciones de Cauchy-Navier

## Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

Reemplazando en la primera EDPs de equilibrio:

$$(\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + X = 0$$

Siguiendo el mismo procedimiento en la dirección  $y$  y en la dirección  $z$ , deducimos:

$$(\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + G \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + Y = 0$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + G \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + Z = 0$$

**Estas son las llamadas ecuaciones de Cauchy-Navier**

# Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

Dos notaciones:

- Notación vectorial (**intrínseca**)

$$(\lambda + G)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + G\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

- Notación tensorial

$$(\lambda + G)u_{j,ij} + Gu_{i,jj} + b_i = 0$$

## Ecuaciones de Cauchy-Navier

$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial x} + G\nabla^2 u + X = 0$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial y} + G\nabla^2 v + Y = 0$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial z} + G\nabla^2 w + Z = 0$$

- Estas ecuaciones son solamente válidas para sólidos hechos con materiales elásticos, lineales, isótropos y homogéneos.
- En notación vectorial

$$(\lambda + G)\nabla e + G\nabla^2 u + b = 0$$

# Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

Dos notaciones:

- Notación vectorial (**intrínseca**)

$$(\lambda + G)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + G\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

- Notación tensorial

$$(\lambda + G)u_{j,ij} + Gu_{i,jj} + b_i = 0$$

## Ecuaciones de Cauchy-Navier

$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial x} + G\nabla^2 u + X = 0$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial y} + G\nabla^2 v + Y = 0$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial z} + G\nabla^2 w + Z = 0$$

- Estas ecuaciones son solamente válidas para sólidos hechos con materiales elásticos, lineales, isótropos y homogéneos.
- En notación vectorial

$$(\lambda + G)\nabla e + G\nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

## Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier

La solución de las ecuaciones de Navier requiere también plantear unas condiciones de frontera:

1. Especificar las deformaciones o los desplazamientos.
2. Especificar los esfuerzos en términos de los desplazamientos (ley de Hooke)

$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = \underbrace{\left( \begin{bmatrix} \lambda e & 0 & 0 \\ 0 & \lambda e & 0 \\ 0 & 0 & \lambda e \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \right)}_{\sigma} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

3. Especificar condiciones mixtas.

Las ecuaciones de Navier junto con las condiciones en la frontera definen completamente las tres componentes del desplazamiento  $u$ ,  $v$  y  $w$ .

## Particularización

Ecuaciones de Cauchy-Navier al caso bidimensional

### Deformación plana

$$G\nabla^2 u + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + X = 0$$

$$G\nabla^2 v + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + Y = 0$$

### Tensión plana

$$G\nabla^2 u + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + X = 0$$

$$G\nabla^2 v + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + Y = 0$$

## Derrotero

- Introducción
- 5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio
- 5.2. Ecuaciones de compatibilidad
- 5.3. Condiciones de frontera
- 5.4. Condiciones de equilibrio en la frontera
- 5.5. Equilibrio estático
- 5.6. Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones
- 5.7. Función de tensión de Airy
- 5.8. Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional
- 5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier
- **5.10. Unicidad de la solución**
- 5.11. Principio de superposición
- Principio de Saint-Venant
- 5.13. El vector de Galerkin
- Ejemplo de aplicación de las EPDs de compatibilidad
- Material de apoyo

## Unicidad de la solución

### Planteamiento de Kirchhoff

Si una solución existe, esta es *única* en términos de esfuerzos y deformaciones, y los desplazamientos son únicos dentro de los límites impuestos por un movimiento rígido arbitrario, es decir, **dos soluciones al mismo problema no pueden existir excepto para soluciones que únicamente difieren en rotaciones y traslaciones rígidas.**

Ver (Timoshenko y Goodier (1970, sección 96)).

- Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) físico alemán.

La unicidad y existencia de la solución no se garantiza en sólidos hechos de materiales con comportamiento no lineal, plástico o sujetos a grandes deformaciones.

## Derrotero

- Introducción
- 5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio
- 5.2. Ecuaciones de compatibilidad
- 5.3. Condiciones de frontera
- 5.4. Condiciones de equilibrio en la frontera
- 5.5. Equilibrio estático
- 5.6. Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones
- 5.7. Función de tensión de Airy
- 5.8. Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional
- 5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier
- 5.10. Unicidad de la solución
- **5.11. Principio de superposición**
- Principio de Saint-Venant
- 5.13. El vector de Galerkin
- Ejemplo de aplicación de las EPDs de compatibilidad
- Material de apoyo

# Principio de superposición

## Principio de superposición

Los esfuerzos, deformaciones y desplazamientos de un sólido en equilibrio sujeto a un conjunto de configuraciones de carga se pueden analizar como la suma de las soluciones que correspondan a cada una de dichas configuraciones, asumiendo que cada una de ellas se aplica independientemente.

## No aplicable cuando

- Sólidos con comportamiento no lineal.
- Cuándo haya un orden para la consideración de las acciones.

[Link to the post.](#)



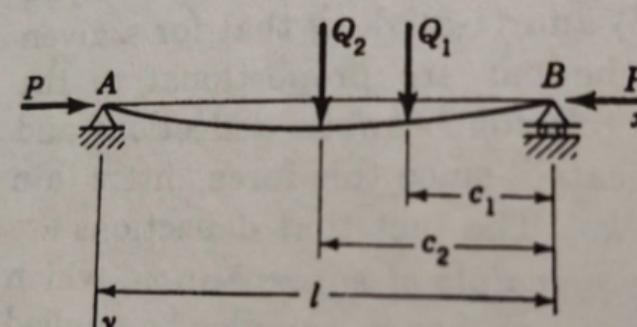
**Eric M. Hernandez, Ph.D.** • Following  
 Associate Professor of Structural Engineering, University of Vermont  
 2d • Edited • 

... X

**BACK-TO-BASICS:**

Does the principle of load superposition hold for this problem? If so, explain.

\*This problem is not just theoretical mechanics, it has serious practical engineering implications.



**FIG. 1-4**

 117
46 comments · 1 repost

## Principio de superposición

Podemos entender este problema desde las ecuaciones de Navier y sus condiciones de frontera:

$$(\lambda + G)\nabla e + G\nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

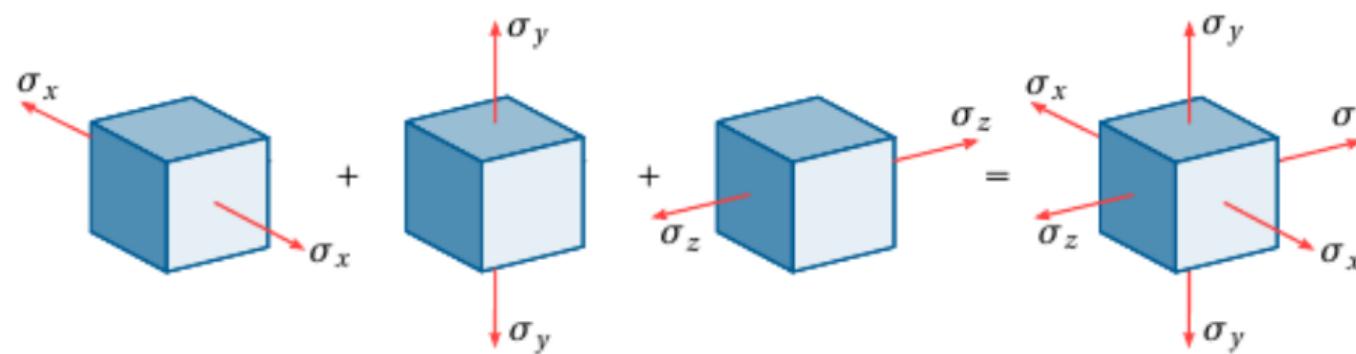
$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = \underbrace{\left( \begin{bmatrix} \lambda e & 0 & 0 \\ 0 & \lambda e & 0 \\ 0 & 0 & \lambda e \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \right)}_{\equiv} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Observe que la naturaleza lineal de las ecuaciones clásicas de la elasticidad es lo que establece el Principio de superposición.

# Principio de superposición

## 4 condiciones necesarias:

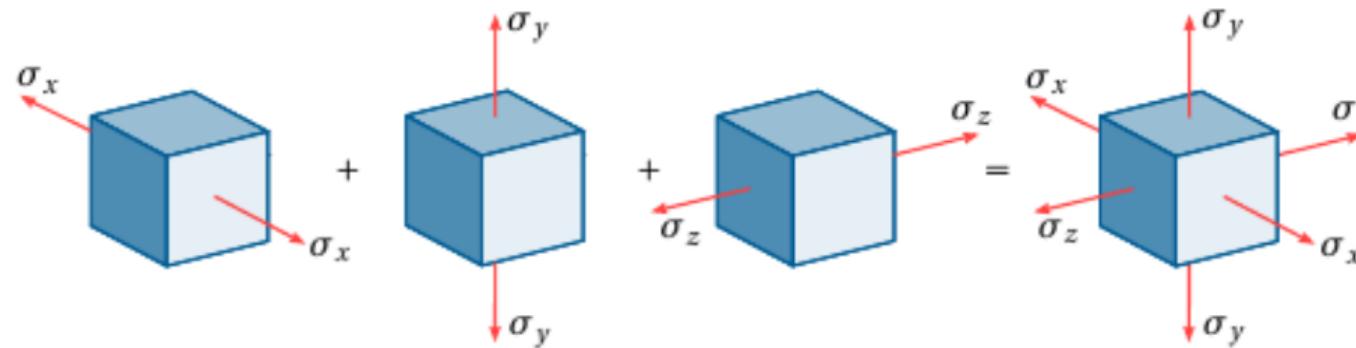
1. El sólido debe ser elástico y, bajo las acciones exteriores, el material no se agrieta ni se traslapa.
2. Las acciones exteriores producen en el sólido pequeños desplazamientos, deformaciones y giros. Esto se conoce como *principio de rigidez relativa*: se desprecia el cambio de geometría del sólido durante la deformación.
3. El material se debe regir por la ley de Hooke (es decir, debe haber una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones).
4. Las deformaciones son recuperables. Existe un estado de referencia del sólido, normalmente el estado original sin deformar, al cual vuelve el sólido al retirar las acciones exteriores.



# Principio de superposición

## 4 condiciones necesarias:

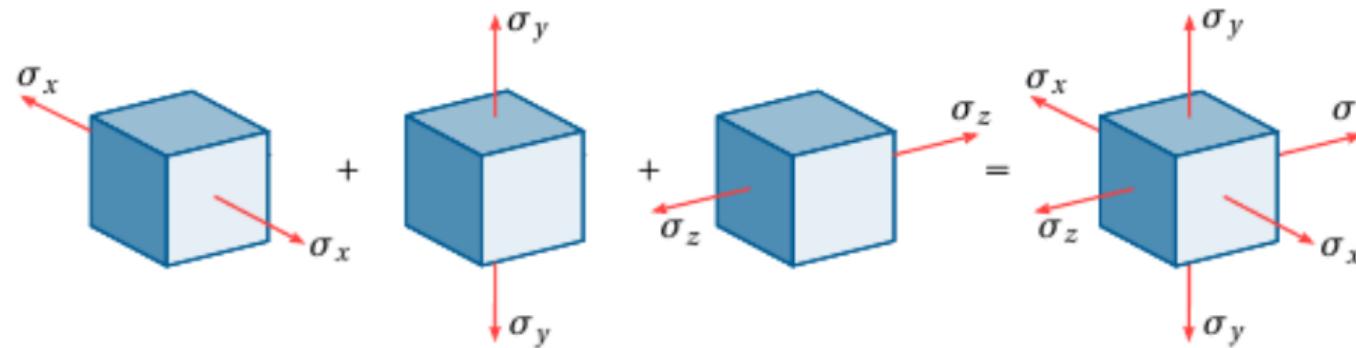
1. El sólido debe ser elástico y, bajo las acciones exteriores, el material no se agrieta ni se traslapa.
2. Las acciones exteriores producen en el sólido pequeños desplazamientos, deformaciones y giros. Esto se conoce como *principio de rigidez relativa*: se desprecia el cambio de geometría del sólido durante la deformación.
3. El material se debe regir por la ley de Hooke (es decir, debe haber una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones).
4. Las deformaciones son recuperables. Existe un estado de referencia del sólido, normalmente el estado original sin deformar, al cual vuelve el sólido al retirar las acciones exteriores.



# Principio de superposición

## 4 condiciones necesarias:

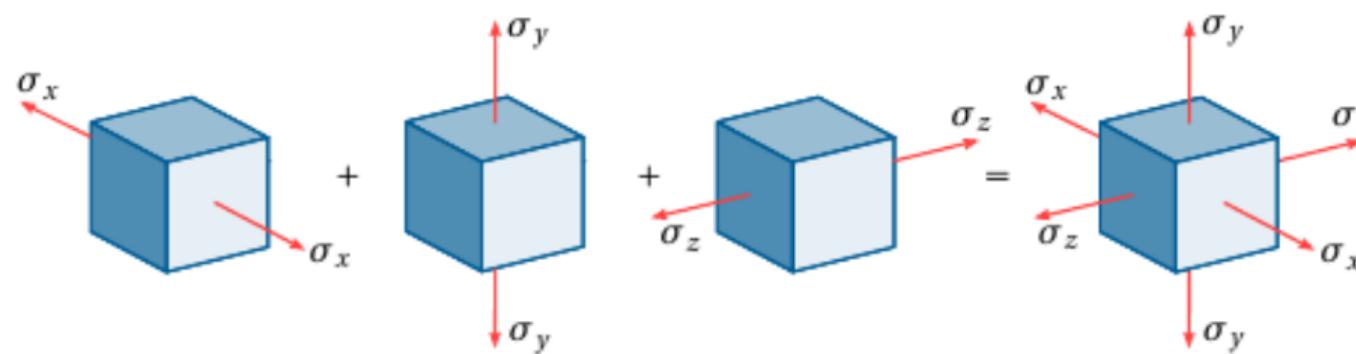
1. El sólido debe ser elástico y, bajo las acciones exteriores, el material no se agrieta ni se traslapa.
2. Las acciones exteriores producen en el sólido pequeños desplazamientos, deformaciones y giros. Esto se conoce como *principio de rigidez relativa*: se desprecia el cambio de geometría del sólido durante la deformación.
3. El material se debe regir por la ley de Hooke (es decir, debe haber una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones).
4. Las deformaciones son recuperables. Existe un estado de referencia del sólido, normalmente el estado original sin deformar, al cual vuelve el sólido al retirar las acciones exteriores.



# Principio de superposición

## 4 condiciones necesarias:

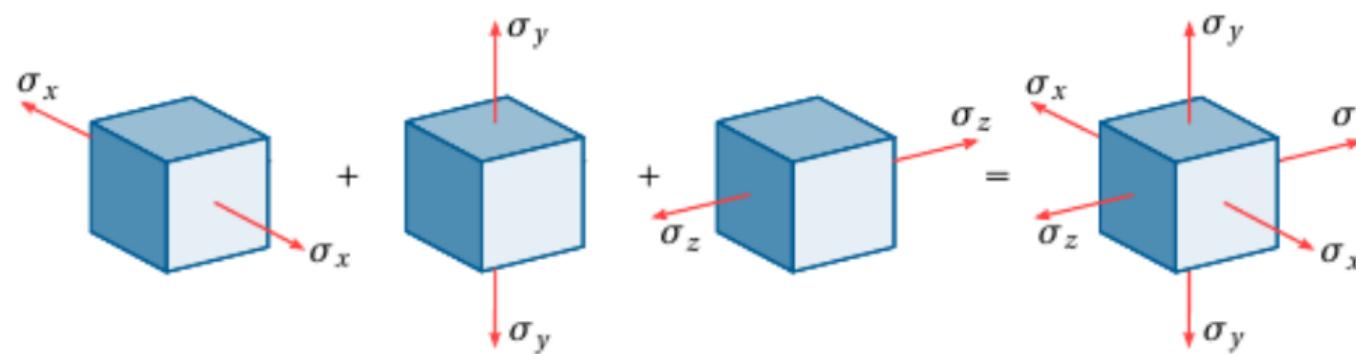
1. El sólido debe ser elástico y, bajo las acciones exteriores, el material no se agrieta ni se traslapa.
2. Las acciones exteriores producen en el sólido pequeños desplazamientos, deformaciones y giros. Esto se conoce como *principio de rigidez relativa*: se desprecia el cambio de geometría del sólido durante la deformación.
3. El material se debe regir por la ley de Hooke (es decir, debe haber una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones).
4. Las deformaciones son recuperables. Existe un estado de referencia del sólido, normalmente el estado original sin deformar, al cual vuelve el sólido al retirar las acciones exteriores.



# Principio de superposición

## 4 condiciones necesarias:

1. El sólido debe ser elástico y, bajo las acciones exteriores, el material no se agrieta ni se traslapa.
2. Las acciones exteriores producen en el sólido pequeños desplazamientos, deformaciones y giros. Esto se conoce como *principio de rigidez relativa*: se desprecia el cambio de geometría del sólido durante la deformación.
3. El material se debe regir por la ley de Hooke (es decir, debe haber una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones).
4. Las deformaciones son recuperables. Existe un estado de referencia del sólido, normalmente el estado original sin deformar, al cual vuelve el sólido al retirar las acciones exteriores.



# Conclusión

## Principio de superposición

Dos soluciones para el mismo sólido, con la misma geometría, pero con diferentes condiciones de frontera se pueden adicionar para obtener la solución al problema en el que ambos conjuntos de condiciones de frontera se están aplicando simultáneamente.

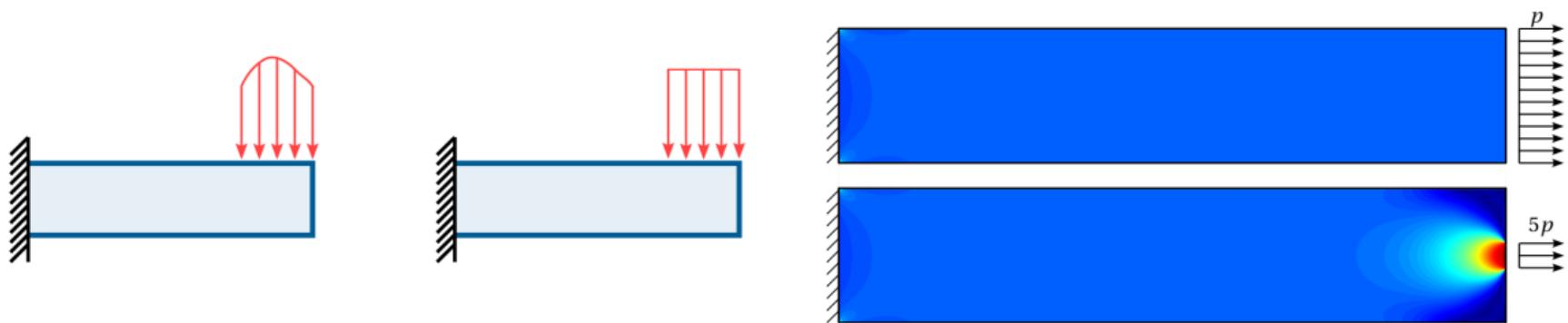
# Derrotero

- Introducción
- 5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio
- 5.2. Ecuaciones de compatibilidad
- 5.3. Condiciones de frontera
- 5.4. Condiciones de equilibrio en la frontera
- 5.5. Equilibrio estático
- 5.6. Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones
- 5.7. Función de tensión de Airy
- 5.8. Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional
- 5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier
- 5.10. Unicidad de la solución
- 5.11. Principio de superposición
- **Principio de Saint-Venant**
- 5.13. El vector de Galerkin
- Ejemplo de aplicación de las EPDs de compatibilidad
- Material de apoyo

## Principio de Saint-Venant

“Suponga que las fuerzas que actúan sobre un pequeño elemento de la superficie de un cuerpo elástico son reemplazadas por otro sistema de fuerzas actuando sobre la misma porción de superficie y que es estáticamente equivalente al anterior. Entonces, aunque esta distribución de fuerzas produce cambios sustanciales en los esfuerzos de forma local, esta distribución de fuerzas tiene un efecto despreciable en los esfuerzos que son producidos a distancias mayores comparadas con las dimensiones lineales de la superficie en la cual las fuerzas fueron cambiadas.”

- Adhemar Jean Calude Barré de Saint-Venant (1797-1886), ingeniero mecánico y matemático francés.



## Derrotero

- Introducción
- 5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio
- 5.2. Ecuaciones de compatibilidad
- 5.3. Condiciones de frontera
- 5.4. Condiciones de equilibrio en la frontera
- 5.5. Equilibrio estático
- 5.6. Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones
- 5.7. Función de tensión de Airy
- 5.8. Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional
- 5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier
- 5.10. Unicidad de la solución
- 5.11. Principio de superposición
- Principio de Saint-Venant
- **5.13. El vector de Galerkin**
- Ejemplo de aplicación de las EPDs de compatibilidad
- Material de apoyo

## El vector de Galerkin

# Derrotero

- Introducción
- 5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio
- 5.2. Ecuaciones de compatibilidad
- 5.3. Condiciones de frontera
- 5.4. Condiciones de equilibrio en la frontera
- 5.5. Equilibrio estático
- 5.6. Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones
- 5.7. Función de tensión de Airy
- 5.8. Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional
- 5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier
- 5.10. Unicidad de la solución
- 5.11. Principio de superposición
- Principio de Saint-Venant
- 5.13. El vector de Galerkin
- **Ejemplo de aplicación de las EPDs de compatibilidad**
- Material de apoyo

# Ejemplo de aplicación de las EPDs de compatibilidad

## El problema del sólido elástico

Dado un cuerpo sólido elástico  $\Omega$ , se desea conocer su estado de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en cada punto  $(x, y, z) \in \Omega$ , así como las reacciones en sus apoyos.

Debemos encontrar:

**Esfuerzos:**  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ .

**Deformaciones:**  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ .

**Desplazamientos:**  $u, v, w$ .

## Formulación basada en esfuerzos

### EDPs de compatibilidad (6)

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+v} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= -\frac{v}{1-v} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial X}{\partial x} \\ \nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+v} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= -\frac{v}{1-v} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+v} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= -\frac{v}{1-v} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial Z}{\partial z} \\ \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+v} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} &= - \left( \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} \right) \\ \nabla^2 \tau_{xz} + \frac{1}{1+v} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} &= - \left( \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \\ \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+v} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} &= - \left( \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

## Formulación basada en desplazamientos

### EDPs de Cauchy-Navier (3)

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u + X &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \nabla^2 v + Y &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G \nabla^2 w + Z &= 0 \end{aligned}$$

$$\sigma_x = \lambda e + 2G\epsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2G\epsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2G\epsilon_z$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\epsilon_x(x, y, z) := \frac{\partial u}{\partial x}|_{(x,y,z)}$$

$$\epsilon_y(x, y, z) := \frac{\partial v}{\partial y}|_{(x,y,z)}$$

$$\epsilon_z(x, y, z) := \frac{\partial w}{\partial z}|_{(x,y,z)}$$

$$\gamma_{xy}(x, y, z) := \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}|_{(x,y,z)}$$

$$\gamma_{xz}(x, y, z) := \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}|_{(x,y,z)}$$

$$\gamma_{yz}(x, y, z) := \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}|_{(x,y,z)}$$

Ecuaciones de Lamé  
(Ley de Hooke)

Deformaciones

Desplazamientos

# Ejemplo de aplicación de las EPDs de compatibilidad

Diferentes situaciones de cargas

## Cargas moderadas *Comportamiento lineal*

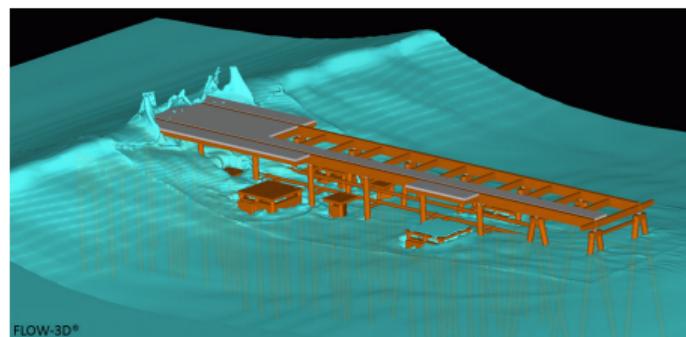


Figure: Modelo de estación marítima.

- Maquinarias
- Tránsito peatonal o vehicular
- Tránsito vehicular
- Oleaje y vientos

## Cargas destructivas *Comportamiento no lineal*



Figure: Terremoto de Kobe, 1995.

- Terremotos y sismos
- Explosiones
- Huracanes o ciclones

# Ejemplo de aplicación de las EPDs de compatibilidad

## Instrumentación



Figure: Video: *What is structural monitoring?*

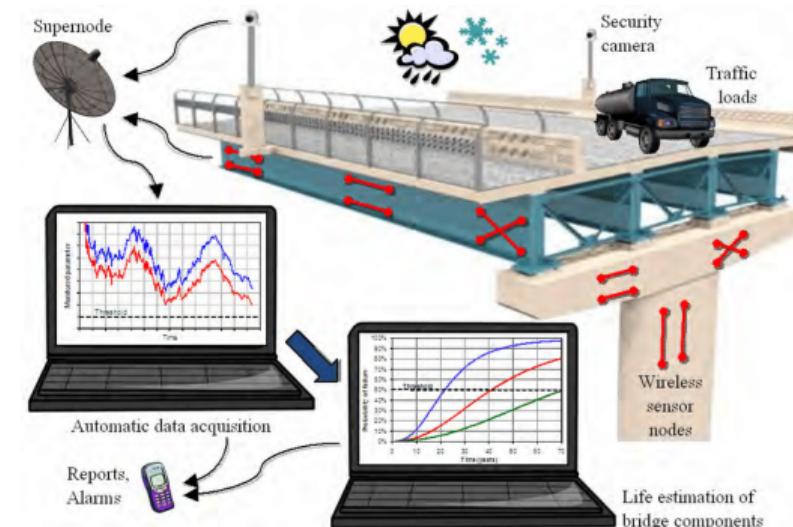


Figure: Tomado de: *Concept of structural health monitoring of bridge structures.*

## Ejemplo de aplicación de las EPDs de compatibilidad

### Enunciado

INVIAS decidió instrumentar un puente para medir sus deformaciones debidas a la acción del tránsito vehicular; sin embargo, no pagó el software del proveedor sino que programó el suyo propio (software A). Un ingeniero no conforme programó otro (software B). Luego de analizar los datos de la instrumentación, el software A verifica las siguientes funciones de deformación:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

mientras que el software B verifica estas:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

donde  $k$  es una constante muy pequeña. Respecto a este problema, responda:

1. ¿Cómo podemos decidir cuál programa está en lo correcto? Explique, demuestre y concluya.

## Solución

### ¿Qué nos está pidiendo el problema?

R//. Verificar la compatibilidad de las ecuaciones que definen las deformaciones.

Veamos que ambos softwares indican un comportamiento simplificado a deformación plana:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

El tránsito vehicular puede ser una carga moderada: análisis lineal.

Debemos emplear las ecuaciones de compatibilidad bidimensionales en términos de deformaciones:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

## Solución

**¿Qué nos está pidiendo el problema?**

R//. Verificar la compatibilidad de las ecuaciones que definen las deformaciones.

Veamos que ambos softwares indican un comportamiento simplificado a deformación plana:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

El tránsito vehicular puede ser una carga moderada: análisis lineal.

Debemos emplear las ecuaciones de compatibilidad bidimensionales en términos de deformaciones:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

## Solución

**¿Qué nos está pidiendo el problema?**

R//. Verificar la compatibilidad de las ecuaciones que definen las deformaciones.

Veamos que ambos softwares indican un comportamiento simplificado a deformación plana:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

El tránsito vehicular puede ser una carga moderada: análisis lineal.

Debemos emplear las ecuaciones de compatibilidad bidimensionales en términos de deformaciones:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

## Solución

**¿Qué nos está pidiendo el problema?**

R//. Verificar la compatibilidad de las ecuaciones que definen las deformaciones.

Veamos que ambos softwares indican un comportamiento simplificado a deformación plana:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

El tránsito vehicular puede ser una carga moderada: análisis lineal.

Debemos emplear las ecuaciones de compatibilidad bidimensionales en términos de deformaciones:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

## Solución

**¿Qué nos está pidiendo el problema?**

R//. Verificar la compatibilidad de las ecuaciones que definen las deformaciones.

Veamos que ambos softwares indican un comportamiento simplificado a deformación plana:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

El tránsito vehicular puede ser una carga moderada: análisis lineal.

Debemos emplear las ecuaciones de compatibilidad bidimensionales en términos de deformaciones:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

# Solución

## Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} (2kx - y) \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

## Solución

### Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} (2kx - y) \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

# Solución

## Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} (2kx - y) \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

## Solución

### Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} (2kx - y) \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

## Solución

### Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} (2kx - y) \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

## Solución

### Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} (2kx - y) \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

## Solución

### Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} (2kx - y) \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

## Solución

### Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} (2kx - y) \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

# Solución

## Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} (2kx - y) \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

## Solución

### Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} (2kx - y) \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

## Solución

### Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} (2kx - y) \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

## Solución

### Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} (2kx - y) \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

# Solución

## Software A:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x + xy^2) \quad \varepsilon_y = kx^2y \quad \gamma_{xy} = 2kx - y \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} (2kx - y) \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x + xy^2) = 2kx$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} kx^2y = 2ky$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$0 = 2kx + 2ky$$

# Solución

## Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} 2kxy \right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

## Solución

### Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} 2kxy \right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

## Solución

### Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} 2kxy \right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

## Solución

### Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} 2kxy \right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

## Solución

### Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} 2kxy \right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

## Solución

### Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} 2kxy \right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

## Solución

### Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} 2kxy \right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

## Solución

### Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} 2kxy \right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

## Solución

### Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} 2kxy \right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

## Solución

### Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} 2kxy \right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

## Solución

### Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} 2kxy \right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

## Solución

### Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} 2kxy \right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

## Solución

### Software B:

- Las deformaciones están medidas por:

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2) \quad \varepsilon_y = ky^2 \quad \gamma_{xy} = 2kxy \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Calculando las derivadas respectivas:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} 2kxy \right) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} k(x^2 + y^2) = 2k$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} ky^2 = 0$$

- Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$2k = 2k + 0$$

## Solución

En conclusión:

- Las deformaciones medidas por el **software A** no son compatibles, pues

$$0 = 2kx + 2ky$$

- Las deformaciones medidas por el **software B** si son compatibles, pues

$$2k = 2k$$

¿Cuál software mide adecuadamente las deformaciones?

R//. El software B.

## Solución

En conclusión:

- Las deformaciones medidas por el **software A** no son compatibles, pues

$$0 = 2kx + 2ky$$

- Las deformaciones medidas por el **software B** si son compatibles, pues

$$2k = 2k$$

**¿Cuál software mide adecuadamente las deformaciones?**

R//. El software B.

## Solución

En conclusión:

- Las deformaciones medidas por el **software A** no son compatibles, pues

$$0 = 2kx + 2ky$$

- Las deformaciones medidas por el **software B** si son compatibles, pues

$$2k = 2k$$

**¿Cuál software mide adecuadamente las deformaciones?**

R//. El software B.

## Derrotero

- Introducción
- 5.1. Ecuaciones diferenciales de equilibrio
- 5.2. Ecuaciones de compatibilidad
- 5.3. Condiciones de frontera
- 5.4. Condiciones de equilibrio en la frontera
- 5.5. Equilibrio estático
- 5.6. Cálculo de los desplazamientos a partir de las deformaciones
- 5.7. Función de tensión de Airy
- 5.8. Cálculo de la función de tensión de Airy y sus derivadas parciales en la frontera de un sólido bidimensional
- 5.9. Ecuaciones diferenciales parciales de Cauchy-Navier
- 5.10. Unicidad de la solución
- 5.11. Principio de superposición
- Principio de Saint-Venant
- 5.13. El vector de Galerkin
- Ejemplo de aplicación de las EPDs de compatibilidad
- **Material de apoyo**

# Material de apoyo



- Lista de reproducción: [05 - Ecuaciones diferenciales fundamentales de la teoría de la ...](#)
- Repositorio del curso: [github/medio\\_continuo](https://github.com/diegodariva/medio_continuo)