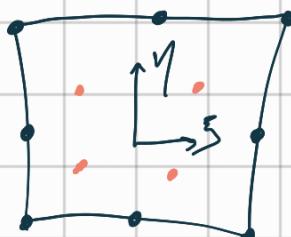


Michael Henedia Pérez
Apuntes de estudio
Análisis no lineal.

Dicembre 2021

Con EF Isoparamétricos de 8 nodos



Bhatti Cap8

8.3. Material Nonlinearity in General Solids.

- indeed: "The incremental elasto-plastic stress-strain relationship"

Elastic PTV:

$$W = \underset{V}{\iiint} \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\Sigma} dV - \underset{S}{\iint} \delta \underline{\mu}^T \underline{q} ds - \underset{V}{\iiint} \delta \underline{\mu}^T \underline{b} dV = 0$$

T.V. de las esfuerzos internos sobre las deformaciones internas

T.V. de las fuerzas de superficie sobre los desplazamientos

T.V. de las fuerzas másticas sobre los desplazamientos

Considerando el caso No lineal ($T \neq E$), se debe linearizar al T.V.I.

↓
aplicación de la derivada direccional.

Δp y Δq : Vectores de incrementos

$$D_{\Delta \mu} W = \int \int \int \delta \varepsilon^T C_T \Delta \varepsilon dV$$

Motriz constitutiva
tañencial
relaciona los
movimientos

Los incrementos $\underline{\Delta \mu} = \underline{N^T \Delta d}$; $d = [u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2]^T$; N : funciones de forma.

$$\underline{\Delta \varepsilon} = \underline{B^T \Delta d} ; B: \text{Matriz cinemática.}$$

y entonces el vector de incrementos de esfuerzos para el elemento es:

$$\underline{\Delta \tau} = \underline{C_T \Delta \varepsilon} = \underline{C_I B^T \Delta d}$$

definiendo los valores virtuales $\underline{\delta \mu} = \underline{N^T}$ y $\underline{\delta \varepsilon^T} = \underline{B^T}$

Sustituyendo en la forma débil del PTV:

$$\iiint_V \underline{B} \underline{C_I} \underline{B^T} \underline{\Delta d} dV = - \iiint_V \underline{B} \underline{\tau} dV + \iint_S \underline{N_q} ds + \iiint_V \underline{N_b} dV$$

Previamente:

$$W(\mu) + D_{\mu\mu} W = 0 : \text{Se opera la linearización del T.V.I}$$

$$\iiint_V \underline{\delta \varepsilon^T} \underline{C_I} \underline{\Delta \varepsilon} dV = - \iiint_V \underline{\delta \varepsilon^T} \underline{\tau} dV + \iint_S \underline{\delta \mu^T} \underline{q} ds + \iiint_V \underline{\delta \mu^T} \underline{b} dV$$

Simplificando en:

$$\underline{K_I} \underline{\Delta d} = - \underline{r_I} + \underline{r_q} + \underline{r_b}$$

Lo calculo en el ensamblaje matricial

Magnitud nueva
diferencia con el planteamiento elástico

→ Fuerzas internas de la solución actual
→ Vector de cargas distribuidas equivalentes
→ Vector de fuerzas másticas equivalentes

Debo hacer equivalente esta formulación con la del Código de EF lineales

Los esfuerzos son calculados a partir de la determinación del estado

8.3.2. Formulación general para el incremento de esfuerzos-deformación y sus ecuaciones

- Indicando los amplitudes como diferenciales y no como una cantidad finita $\rightarrow \underline{\Delta \tau} = \underline{C_T \Delta \varepsilon}$
- Se define una superficie de fluencia

$$\begin{cases} \text{dentro} \rightarrow \text{elástico} & C_T = C \text{ constitutiva} \\ \text{borde} \rightarrow \text{plástico} & \\ \text{fuera} \rightarrow \text{No existe} & \end{cases}$$

(rotura)

- ↳ formas específicas para
- No hardening
 - Isotropic hardening
 - Kinematic hardening

Introducir endurecimiento por deformación \rightarrow Garantizar en la Superficie de fluencia } expandirse \rightarrow Isotropic hardening
 } trasladarse \rightarrow Kinematic hardening

$$F(\Sigma, w^P, \alpha) = 0$$

Σ : Vector de esfuerzos

w^P : escalar que expresa el trabajo plástico hecho.

"backstress Vector" $\leftarrow \alpha$: traslaciones de la superficie de fluencia $\alpha = [\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \dots]^T_{6 \times 1}$

Q.O. Kinematic $\rightarrow w^P = 0 \rightarrow$ con translación, sin expansión
 Isotropic $\rightarrow \alpha = 0 \rightarrow$ Sin translación, con expansión

El diferencial de la función $dF = \left(\frac{\partial F}{\partial \Sigma} \right)^T d\Sigma + \frac{\partial F}{\partial w^P} dw^P + \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} \right) d\alpha$

Reglas: } $F = 0$ y $dF = 0 \rightarrow$ Carga Continua. (Sobre la curva, flujo plástico).
 "Consistency Conditions" } $F = 0$ y $dF < 0 \rightarrow$ descarga (Dentro de la curva)
 } $F = 0$ y $dF > 0 \rightarrow$ No es posible (Fuera de la curva).

Función Potencial plástico: Razón de cambio de una función de esfuerzos actuales.

$(Q) = F$, tal que:

$$d\Sigma^P = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \Sigma}$$

Constante de proporcionalidad
 relaciona las deformaciones plásticas con el potencial plástico

$F < 0 \rightarrow \lambda = 0$
 rango elástico

$F = 0 \rightarrow \lambda \neq 0$
 flujo plástico

$Q = F$ usualmente, "Asociativa"
 $Q \neq F$, "No asociativa".

• El incremento en el esfuerzo es causado solamente por la parte elástica del incremento de deformaciones $d\Sigma = \underline{C} d\Sigma^P$ (Larga)

Constitutiva elástica.

pag 440 \rightarrow formulación general de λ y C_P

C_P Simétrica $F = Q$
 No simétrica, $F \neq Q$

• Modelo de fluencia de Proger: α dependiente de incrementos de deformaciones plásticas

Similar al parámetro "H".

en forma tensorial

$$d\alpha = C d\Sigma^P$$

C : del material

8.3.3. Proceso para la determinación del estado.

Regla de incrementos elastoelásticos T-E

- i) Solucionar eq. y calcular Δd
- ii) $\Delta \varepsilon = B^T \Delta d$
- iii) $\Delta \tau$
- iv) $\tau_{\text{nuevo}} = \tau + \Delta \tau$

Análisis hecho sobre cada uno de los puntos de Gauss
A cada uno se le determina su estado.

Procedimiento general:

- estado previo \rightarrow "estado", $\tau, \varepsilon^P, \alpha$
- incremento $\Delta \varepsilon$

① Asumir comportamiento elástico $\rightarrow \Delta s = C \Delta \varepsilon \rightarrow$ C constitutiva
strain increment.
"trial stress" $\leftarrow S = \tau + \Delta s$

② Calcular F con $\tau = s$, para verificar s se mira al estado anterior del pto de Gauss:

a) Previo = elástico \rightarrow $\begin{cases} \cdot \text{Continua elástico } F(s) \leq 0 \rightarrow \tau_{\text{nuevo}} = s \\ \cdot \text{Cambia a plástico } F(s) > 0 \rightarrow \text{hay que localizar al punto } \beta \text{ donde ocurre el cambio, cuando} \end{cases}$

$$F = \sqrt{3 J_2 - \tau_y^2} = 0$$

$$J_2 = \frac{\tau_y^2}{3}$$

Solución Adelante

$$F(\tau + \beta \Delta s) = 0$$

b) Previo = plástico \rightarrow $\begin{cases} \cdot \text{Continua plástico } \rightarrow \left(\frac{\partial F(\tau)}{\partial \tau} \right)^T \Delta s > 0, \beta = 0 \\ \cdot \text{descarga elástica } \rightarrow F(s) \leq 0, \tau_{\text{nuevo}} = s \\ \cdot \text{descarga fallida } \rightarrow \text{Calcular } \beta \end{cases}$
Se descarga entrando en la superficie pero termina por fuera

③ Esfuerzos en el estado plástico

i) Calcular esfuerzos para el incremento de deformaciones $(1-\beta) \Delta \varepsilon$ / está en estado plástico

Las ecuaciones para incrementos son ED y se resuelven por métodos de numéricos (Runge-Kutta o método de Euler).

los de la pag 440.

Integración de Euler en el rango plástico.

Cálculo del punto de intersección

Método de la Secante (Secant Iteration): buscando la convergencia, con:

$$\beta^{(i+1)} = \beta^{(i)} - \frac{F(\tau + \beta^{(i)} \Delta s)}{F(\tau + \beta^{(i-1)} \Delta s) - F(\tau + \beta^{(i)} \Delta s)} (\beta^{(i-1)} - \beta^{(i)}) \quad i = 1, 2, \dots$$

puntos iniciales: } $\begin{cases} \beta^{(0)} = 0 \\ \beta^{(1)} = \frac{F(\tau)}{F(\tau) - F(\tau + \Delta s)} \end{cases}$

Integración de Euler en el rango Plástico

Eq. general $d\tau = (C - C_p) d\varepsilon$, donde

C: Constitutiva elástica

C_p: "Constitutiva Plástica"

Eq. pag 440 $\begin{cases} C_p = \frac{1}{a} \subseteq \frac{\partial Q}{\partial \tau} \left(\frac{\partial F}{\partial \tau} \right)^T \subseteq \\ a = \left(\frac{\partial F}{\partial \tau} \right)^T \subseteq \frac{\partial Q}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial w_p} \tau^T \frac{\partial Q}{\partial \tau} - c \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} \right)^T \subseteq \frac{\partial Q}{\partial \tau} \end{cases}$

Posicionando cuidado a estas ecuaciones: $\begin{cases} d\varepsilon^p = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \tau} \text{ con } \lambda = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial F}{\partial \tau} \right)^T \subseteq d\varepsilon \\ d w^p = \tau^T d\varepsilon^p \text{ esto es un producto punto.} \\ d\alpha = c \subseteq d\varepsilon^p \end{cases}$

$$\begin{cases} d\varepsilon^p = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \tau} \text{ con } \lambda = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial F}{\partial \tau} \right)^T \subseteq d\varepsilon \\ d w^p = \tau^T d\varepsilon^p \\ d\alpha = c \subseteq d\varepsilon^p \end{cases}$$

Empleando esta notación para las derivadas:

$$\begin{cases} f^\tau = \frac{\partial F}{\partial \tau} ; f^w = \frac{\partial F}{\partial w_p} ; f^\alpha = \frac{\partial F}{\partial \alpha} \\ q^\tau = \frac{\partial Q}{\partial \tau} \end{cases}$$

yield function gradients

Reescribiendo las ecuaciones así: $\begin{cases} \lambda = \frac{1}{a} (f^\tau)^T \subseteq d\varepsilon \\ a = (f^\tau)^T \subseteq q^\tau - f^w \tau^T q^\tau - c (f^\alpha)^T \subseteq q^\tau \end{cases}$

Sistema 6x6 de E.D.

Condiciones de frontera en el estado anterior: $\tau_0, \varepsilon_0,$

$\varepsilon_0^p, w_0^p, \alpha_0$

$$\begin{cases} d\varepsilon^p = \lambda q^\tau \\ d w^p = \tau^T d\varepsilon^p \\ d\alpha = c \subseteq d\varepsilon^p \\ d\tau = C(d\varepsilon - d\varepsilon^p) \end{cases}$$

Forward Euler Integration—Explicit Method The simplest method is the explicit forward Euler's method. In this method we divide the strain increment into several subincrements:

$$de = \frac{(1 - \beta)\Delta\epsilon}{\text{total number of steps}}$$

*Se supone que ya hemos Calculado
incremento de deformaciones en
de entrada.*

Assuming that we know the solution at step n , the solution at the next step, $n+1$, is obtained as follows:

Total strains: $\epsilon_{n+1} = \epsilon_n + de;$

Plastic multiplier: $\lambda_n = \frac{1}{a_n}(f_n^\sigma)^T C de$

$$a_n = (f_n^\sigma)^T C q_n^\sigma - f_n^w \sigma_n^T q_n^\sigma - c(f_n^\alpha)^T L q_n^\sigma$$

Stresses: $\sigma_{n+1} = \sigma_n + C(de - \lambda_n q_n^\sigma)$

Plastic strains: $\epsilon_{n+1}^p = \epsilon_n^p + \lambda_n q_n^\sigma$

Backstresses: $\alpha_{n+1} = \alpha_n + c \lambda_n L q_n^\sigma$

Plastic work: $w_{n+1}^p = w_n^p + \lambda_n \sigma_n^T q_n^\sigma$

The method clearly is straightforward. However, it has two major drawbacks. There is no error control, and hence any errors will continue to accumulate, causing the solution to drift away from the yield surface. Also, there are no guidelines as to the reasonable number of steps that must be used. A practical method that incorporates rules related to these issues is presented later in this section.

Control del error en la página 446

8.3.4. Criterio de fluencia de von Mises y modelos de endurecimiento asociados

- Comúnmente para metales
- Cuando el esfuerzo efectivo $\bar{\sigma}_e$ alcanza el esfuerzo de fluencia del material en tracción uniaxial.

$$\bar{\sigma}_e = \sqrt{J_2} \quad ; \quad J_2 : \text{Segundo Invariante del tensor de esfuerzos deviatorios.}$$

J_2 expresado de

Varias formas:

- En términos de esfuerzos deviatorios:

$$J_2 = \frac{1}{2} ((\bar{\sigma}_x^d)^2 + (\bar{\sigma}_y^d)^2 + (\bar{\sigma}_z^d)^2) + \bar{\tau}_{xy}^2 + \bar{\tau}_{yz}^2 + \bar{\tau}_{zx}^2$$

where the deviatoric stresses are defined as

$$\sigma_x^d = \sigma_x - p; \quad \sigma_y^d = \sigma_y - p; \quad \sigma_z^d = \sigma_z - p; \quad \text{where } p = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^d \\ \sigma_y^d \\ \sigma_z^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x - p \\ \sigma_y - p \\ \sigma_z - p \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z \\ 2\sigma_y - \sigma_z - \sigma_x \\ 2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \tau_{xy}^d \\ \tau_{yz}^d \\ \tau_{zx}^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}$$

La p.
o. T.

- En términos de esfuerzos

$$J_2 = \frac{1}{6} ((\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_y)^2 + (\bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_z)^2 + (\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_x)^2) + \bar{\tau}_{xy}^2 + \bar{\tau}_{yz}^2 + \bar{\tau}_{zx}^2$$

- En términos de esfuerzos principales

$$J_2 = \frac{1}{6} ((\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)^2 + (\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_3)^2 + (\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_1)^2)$$

Función de fluencia $\rightarrow F = \sqrt{3J_2} - \bar{\sigma}_y$

$F = 0 \rightarrow J_2 = \frac{1}{3}\bar{\sigma}_y^2$ en la superficie de falla.

Para un problema de tensión plana $\rightarrow J_2 = \frac{1}{3}(\bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2)$

$$\bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_y^2$$

Eq. de una Elipse.

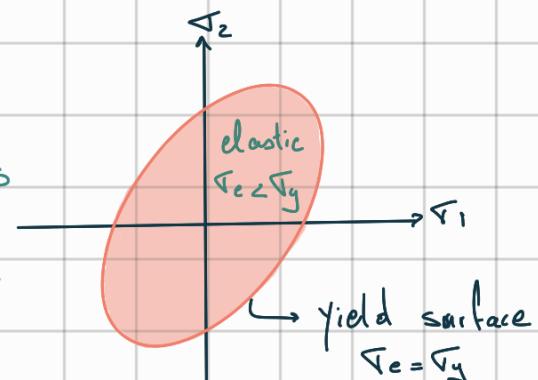
Casos de carga y descarga

i) Sin endurecimiento

ii) endurecimiento isotrópico

iii) endurecimiento cinemático.

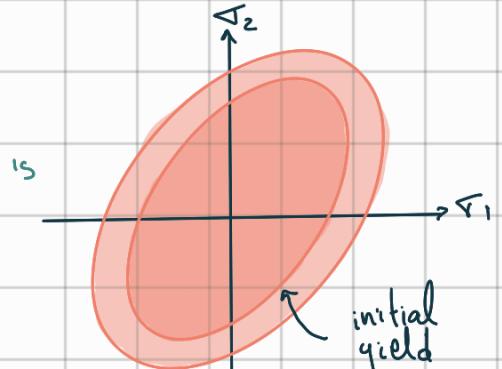
Para hacer un análisis con von Mises, la histeresis del acero es isotrópica.



Incremental Stress-Strain Equations with Isotropic Hardening

- La superficie de fluencia se asume expandiéndose uniformemente, sin tracciones $\alpha = 1$
- Función de fluencia: $F(\bar{\tau}, w^p) = 0$

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{\tau}} \right)^T d\bar{\tau} + \frac{\partial F}{\partial w^p} dw^p$$



- Asumiendo un flujo asociativo ($\dot{Q} = F$)

$$C_p = \frac{1}{\alpha} \subseteq \frac{\partial F}{\partial \bar{\tau}} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{\tau}} \right)^T \subseteq$$

$$\alpha = \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{\tau}} \right)^T \subseteq \frac{\partial F}{\partial \bar{\tau}} - \frac{\partial F}{\partial w^p} \nabla^T \frac{\partial F}{\partial \bar{\tau}}$$

y la función de fluencia de Von Mises $F = \sqrt{3J_2} - \bar{\tau}_y$

Fluencia del estado actual.
Inicialmente $\bar{\tau}_y = \tau_y$.

Considerando una cantidad llamada "deformación plástica efectiva ϵ_e^p "

$$\epsilon_e^p = \sqrt{\frac{2}{3} \left((\epsilon_x^p)^2 + (\epsilon_y^p)^2 + (\epsilon_z^p)^2 \right) + \frac{1}{3} \left((\gamma_{xy}^p)^2 + (\gamma_{xz}^p)^2 + (\gamma_{yz}^p)^2 \right)}$$

Similar del J_2 pero con las deformaciones plásticas.

y el nuevo esfuerzo de fluencia

$$\bar{\tau}_y = \tau_y + H \epsilon_e^p$$

$$H = \frac{d\bar{\tau}_y}{d\epsilon_e^p}$$

Cómo se calculó en el tema de cerchas.

Comparando la forma general de la función de fluencia:

$$F(\bar{\tau}, w^p) = \sqrt{3J_2} - \bar{\tau}_y \rightarrow w^p = -\bar{\tau}_y$$

Así que $\frac{\partial F}{\partial w^p}$ se simplifica en:

$$\frac{\partial F}{\partial w^p} = -\frac{\partial \bar{\tau}_y}{\partial w^p} = \frac{\partial \bar{\tau}_y}{\partial \epsilon_e^p} \frac{\partial \epsilon_e^p}{\partial w^p}$$

trabajo hecho en la fase plástica

$$\frac{\partial \bar{\tau}_y}{\partial \epsilon_e^p}$$

similar a $H = \frac{\partial \bar{\tau}_y}{\partial \epsilon_e^p}$

y sabiendo que $dw^p = \nabla^T d\epsilon^p$, se puede reescribir para este caso como

$$\partial w^p = \bar{\tau}_y \partial \bar{\epsilon}_e^p \rightarrow \frac{\partial \epsilon_e^p}{\partial w^p} = \frac{1}{\bar{\tau}_y}$$

Así que: $\frac{\partial F}{\partial w^p} = -H \frac{1}{\bar{\sigma}_y} \rightarrow \boxed{\frac{\partial F}{\partial w^p} = -\frac{H}{\bar{\sigma}_y}}$

y del caso de no endurecimiento, la derivada de F respecto a ∇ , es la misma:

$$\frac{\partial F}{\partial \nabla} = \frac{1}{2\bar{\sigma}_y} \begin{bmatrix} 2\nabla_x - \nabla_y - \nabla_z \\ 2\nabla_y - \nabla_x - \nabla_z \\ 2\nabla_z - \nabla_y - \nabla_x \\ 6\tau_{xy} \\ 6\tau_{xz} \\ 6\tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{3}{2\bar{\sigma}_y} \begin{bmatrix} \nabla_x^d \\ \nabla_y^d \\ \nabla_z^d \\ 2\tau_{xy} \\ 2\tau_{xz} \\ 2\tau_{yz} \end{bmatrix}$$

\hookrightarrow esfuerzos ∇ \hookrightarrow esfuerzos deviatorios

Consideraciones para el análisis con esfuerzos deviatorios:

Furthermore, during plastic flow there is no volume change and hence C is replaced by the following constitutive matrix used for the deviatoric stresses:

$$C_d = 2GL ; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \rightarrow \text{módulo de corte}$$

Thus, the scalar a can be evaluated as

$$a = \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T 2GL \frac{\partial F}{\partial \sigma} + \frac{H}{\bar{\sigma}_y} \sigma^T \frac{\partial F}{\partial \sigma}$$

After carrying out matrix multiplications, we have

$$a = 3G + H$$

Substituting C_d and $\partial F/\partial \sigma$ and carrying out matrix multiplications, the matrix C_p can be written as

$$C_p = \frac{1}{a} C_d \frac{\partial F}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T C_d = \frac{9G^2}{(3G+H)\bar{\sigma}_y^2} \boxed{\sigma^d (\sigma^d)^T} = C_p$$

where σ^d is the vector of deviatoric stresses:

$$\sigma^d = (\sigma_x^d \quad \sigma_y^d \quad \sigma_z^d \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx})^T$$

Carrying out multiplication of the deviatoric stress vector and its transpose, we have the following explicit expression for the C_p matrix:

$$C_p = \frac{9G^2}{(3G+H)\bar{\sigma}_y^2} \begin{pmatrix} \sigma_x^{d^2} & \sigma_x^d \sigma_y^d & \sigma_x^d \sigma_z^d & \sigma_x^d \tau_{xy} & \sigma_x^d \tau_{yz} & \sigma_x^d \tau_{zx} \\ \sigma_x^d \sigma_y^d & \sigma_y^{d^2} & \sigma_y^d \sigma_z^d & \sigma_y^d \tau_{xy} & \sigma_y^d \tau_{yz} & \sigma_y^d \tau_{zx} \\ \sigma_x^d \sigma_z^d & \sigma_y^d \sigma_z^d & \sigma_z^{d^2} & \sigma_z^d \tau_{xy} & \sigma_z^d \tau_{yz} & \sigma_z^d \tau_{zx} \\ \sigma_x^d \tau_{xy} & \sigma_y^d \tau_{xy} & \sigma_z^d \tau_{xy} & \tau_{xy}^2 & \tau_{xy} \tau_{yz} & \tau_{xy} \tau_{zx} \\ \sigma_x^d \tau_{yz} & \sigma_y^d \tau_{yz} & \sigma_z^d \tau_{yz} & \tau_{xy} \tau_{yz} & \tau_{yz}^2 & \tau_{yz} \tau_{zx} \\ \sigma_x^d \tau_{zx} & \sigma_y^d \tau_{zx} & \sigma_z^d \tau_{zx} & \tau_{xy} \tau_{zx} & \tau_{yz} \tau_{zx} & \tau_{zx}^2 \end{pmatrix}$$

(6x1) · (1x6)
6x6

Note that this matrix reduces to the one without strain-hardening case when $H = 0$.

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial \nabla} \right)^T d\nabla + \frac{\partial F}{\partial w^p} dw^p$$

Determinación del estado para plasticidad de von Mises.

Mismo procedimiento descrito anteriormente, aunque puede simplificarse el cálculo de β mediante la solución analítica de una función cuadrática:

$$F(\sigma + \beta \Delta s) = 0 \quad ; \quad \Delta s = C \Delta \epsilon$$

where

$$\sigma + \beta \Delta s = (\sigma_x + \beta \Delta \sigma_x \quad \sigma_y + \beta \Delta \sigma_y \quad \sigma_z + \beta \Delta \sigma_z \quad \tau_{xy} + \beta \Delta \tau_{xy} \quad \tau_{yz} + \beta \Delta \tau_{yz} \quad \tau_{zx} + \beta \Delta \tau_{zx})^T$$

Substituting this into the square of the yield function, we get the following quadratic equation in β :

$$a_1 \beta^2 + a_2 \beta + a_3 = 0 \rightarrow \beta = \frac{-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3}}{2a_1}$$

where for isotropic hardening

$$a_1 = \Delta \sigma_x^2 - \Delta \sigma_y \Delta \sigma_x - \Delta \sigma_z \Delta \sigma_x + \Delta \sigma_y^2 + \Delta \sigma_z^2 + 3\Delta \tau_{xy}^2 + 3\Delta \tau_{yz}^2 + 3\Delta \tau_{zx}^2 - \Delta \sigma_y \Delta \sigma_z$$

$$a_2 = 2\Delta \sigma_x \sigma_x - \Delta \sigma_y \sigma_x - \Delta \sigma_z \sigma_x - \Delta \sigma_x \sigma_y + 2\Delta \sigma_y \sigma_y - \Delta \sigma_z \sigma_y - \Delta \sigma_x \sigma_z - \Delta \sigma_y \sigma_z \\ + 2\Delta \sigma_z \sigma_z + 6\Delta \tau_{xy} \tau_{xy} + 6\Delta \tau_{yz} \tau_{yz} + 6\Delta \tau_{zx} \tau_{zx}$$

$$a_3 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{yz}^2 + 3\tau_{zx}^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_x \sigma_z - \sigma_y \sigma_z - \bar{\sigma}_Y^2$$

Esto no está
Calculado con los
esfuerzos desviadores.



Sistema matricial

Solución

$$\underline{K_T} \underline{\Delta d} = -\underline{R_I} + \underline{R_E}$$

hasta que $\underline{\Delta d} \approx \underline{0}$

o sea $R_E - R_I \rightarrow 0$

$$\underline{K_T} \underline{\Delta d} = \underline{R}$$

$$\underline{R} = \underline{R_E} - \underline{R_I} \rightarrow \underline{0}$$

$$\underline{\Delta d} = \underline{K_T}^{-1} \underline{R}$$

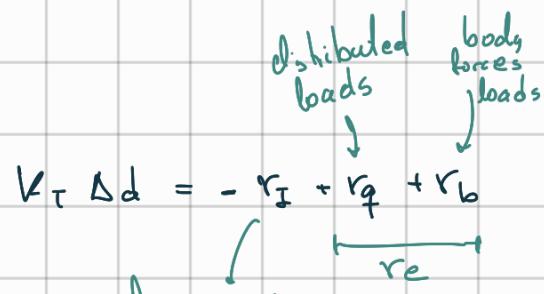
Revisión rápida: (Comentarios y Anotaciones)

- The yield stress during subsequent loading and unloading cycles depends on the type of "strain hardening" model.
- H: "strain-hardening" parameter. Calculado en laboratorio.
 - Defines the slope of the strain-hardening portion of the stress-strain curve after removal of the elastic strain component.
- Ciclo de análisis strain-stress law increment

$$\underline{\Delta \tau} = \underline{C_T} \underline{\Delta \epsilon}$$

$$\underline{\Delta u} = \underline{N^T} \underline{\Delta d} ; \text{ ver que lo eq:}$$

$$\underline{\Delta \epsilon} = \underline{B^T} \underline{\Delta d}$$



Depende del estado de esfuerzos actuales.

- The incremental stress-strain equation during plastic phase can be written as follows $\underline{d\tau} = (\underline{C} - \underline{C_p}) \underline{d\epsilon}$; $\tau_{\text{new}} = \tau + \Delta \tau$

$\underline{C_T}$
matriz constitutiva tangente

matriz constitutiva "plástica"

Lo único que varía entre reglas / modelos de endurecimiento.

- Eipse de Fluencia

$$\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 - \tau_1 \tau_2} = \tau_y$$

Eipse graficada anteriormente

- Actualización del esfuerzo de fluencia en el modelo de endurecimiento isotrópico, función de fluencia $F(\underline{\sigma}) = \sqrt{3 J_2} - \bar{\sigma}_y$

$$\bar{\sigma}_y = \sigma_y + H \varepsilon_e^P$$

\downarrow

deformación plástica efectiva

en el estado anterior

- Incremento de deformaciones plásticas:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \rightarrow \text{Incremento total de deformación.}$$

$$\left. \begin{array}{l} i) \quad d\varepsilon^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \\ ii) \quad \Delta \varepsilon^p = (\lambda - \beta) \Delta \varepsilon \end{array} \right\}, \quad \lambda = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right)^T \leq d\varepsilon$$

Concluir mejor sobre el cálculo del incremento de deformaciones plásticas.