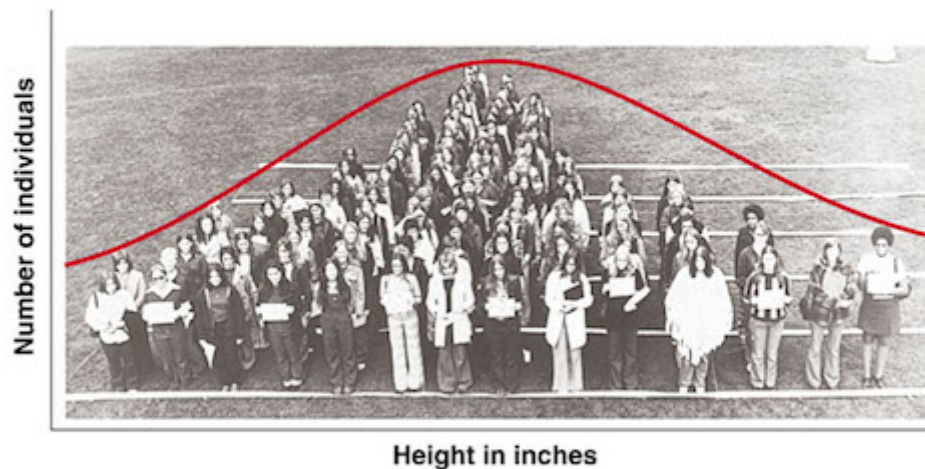


# 如何理解无偏估计量？

怎样通过抽样数据进行推断才算是“好”？

现实中常常有这样的问题，比如，想知道全体女性的身高均值  $\mu$ ，但是没有办法把每个女性都进行测量，只有抽样一些女性来估计全体女性的身高：

Tobin/Dusheck, Asking About Life, 2/e  
Figure 16.6



Copyright © 2001 by Harcourt, Inc. All rights reserved.

那么根据抽样数据怎么进行推断？什么样的推断方法可以称为“好”？

## 1 无偏性

比如说我们采样到的女性身高分别为：

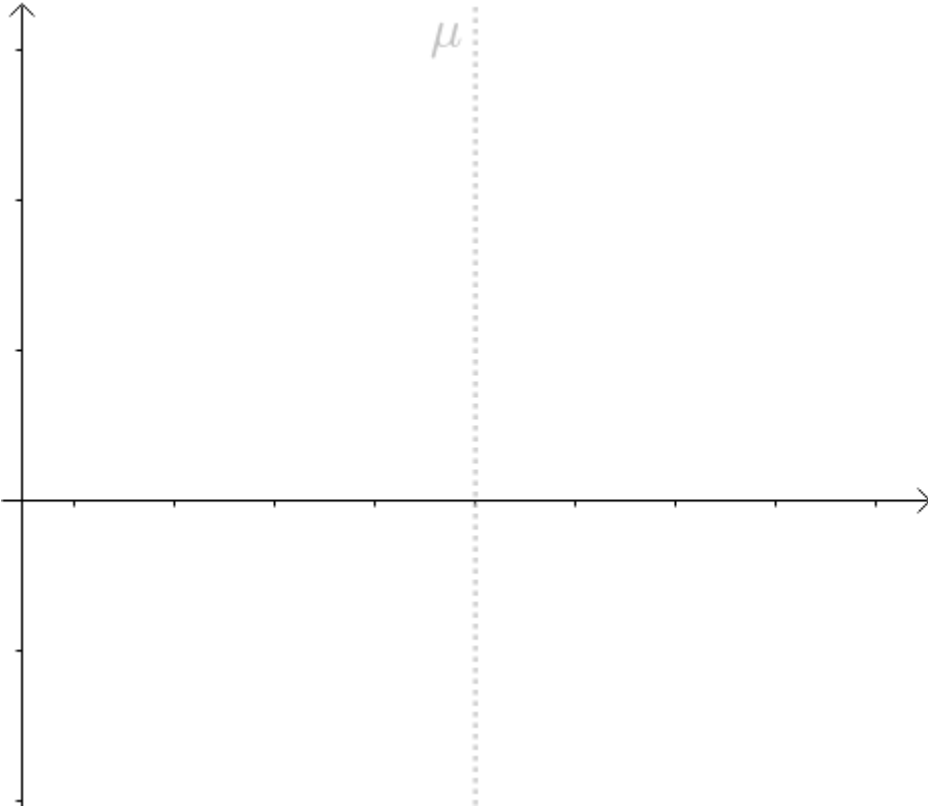
$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

那么：

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

是对  $\mu$  不错的一个估计，为什么？因为它是无偏估计。

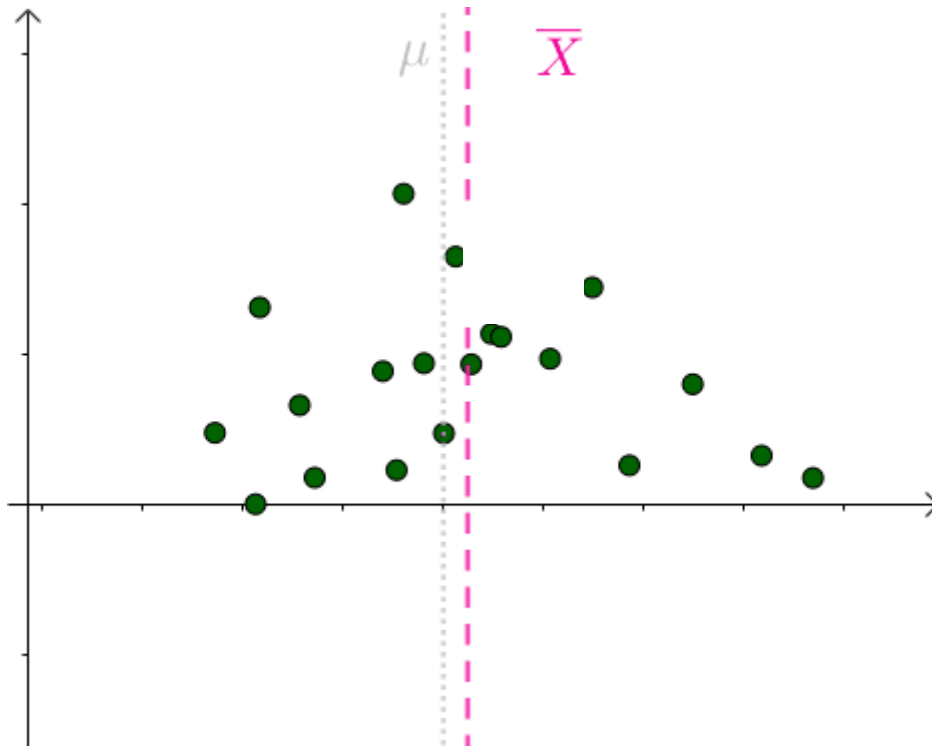
首先，真正的全体女性的身高均值  $\mu$ ，我们是不知道，只有上帝才知道，在图中就画为虚线：



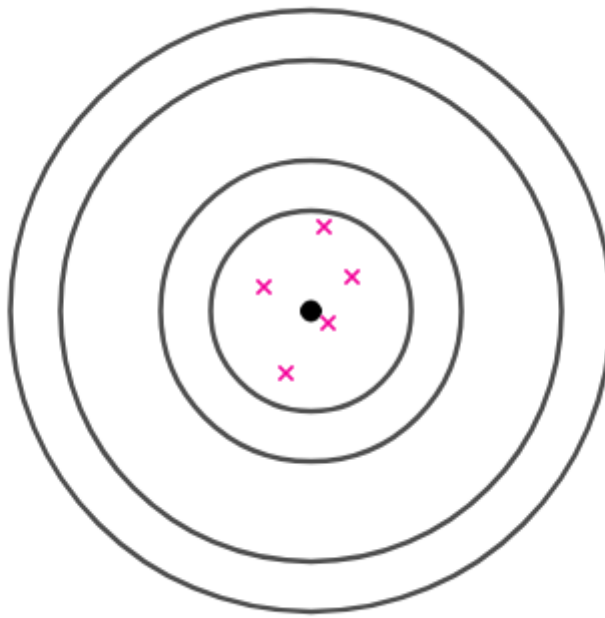
我们通过采样计算出  $\bar{X}$ ：



会发现，不同采样得到的  $\bar{X}$  是围绕  $\mu$  左右波动的：



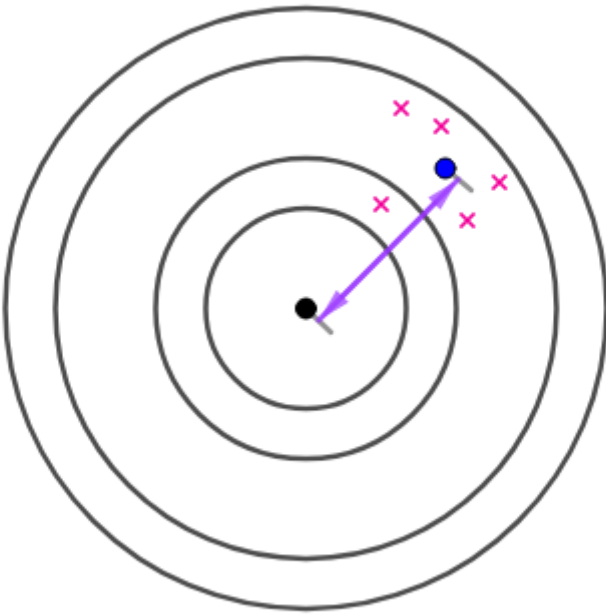
这有点像打靶，只要命中在靶心周围，还算不错的成绩：



如果用以下式子去估计方差  $\sigma^2$ ：

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

根据“[为什么样本方差的分母是 n-1?](#)”的解释，就会产生偏差：



这个偏差经过计算，就是：

$$\frac{1}{n}\sigma^2$$

这种偏差就好像瞄准镜歪了，是系统性的：

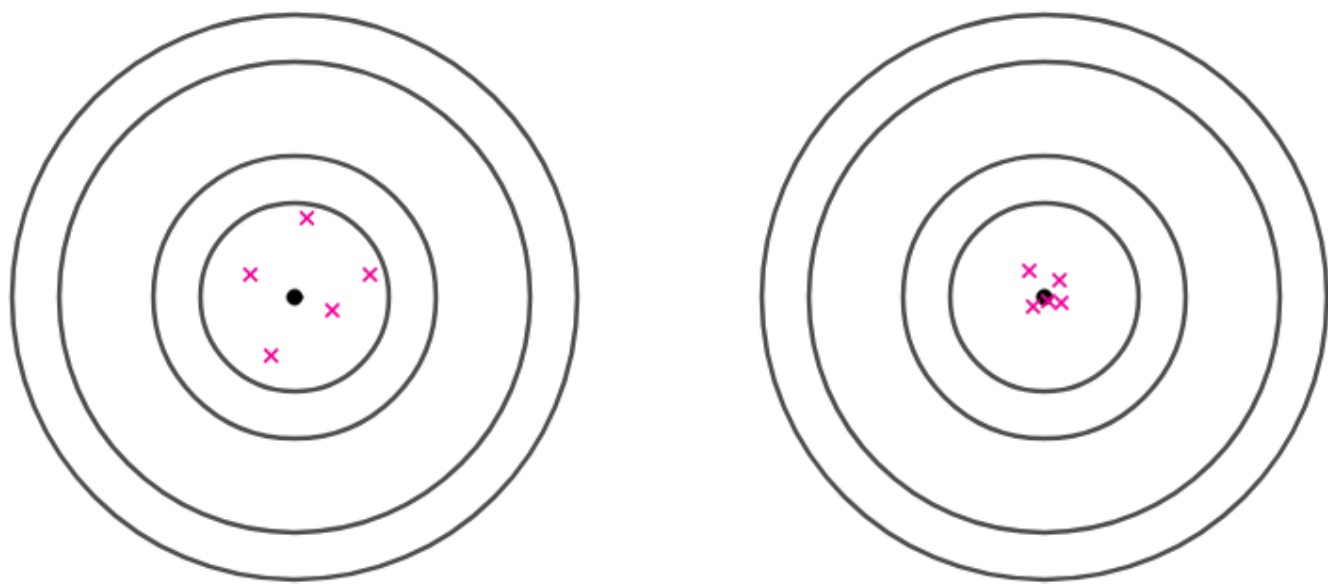


就此而言，无偏估计要好于有偏估计。

## 2 有效性

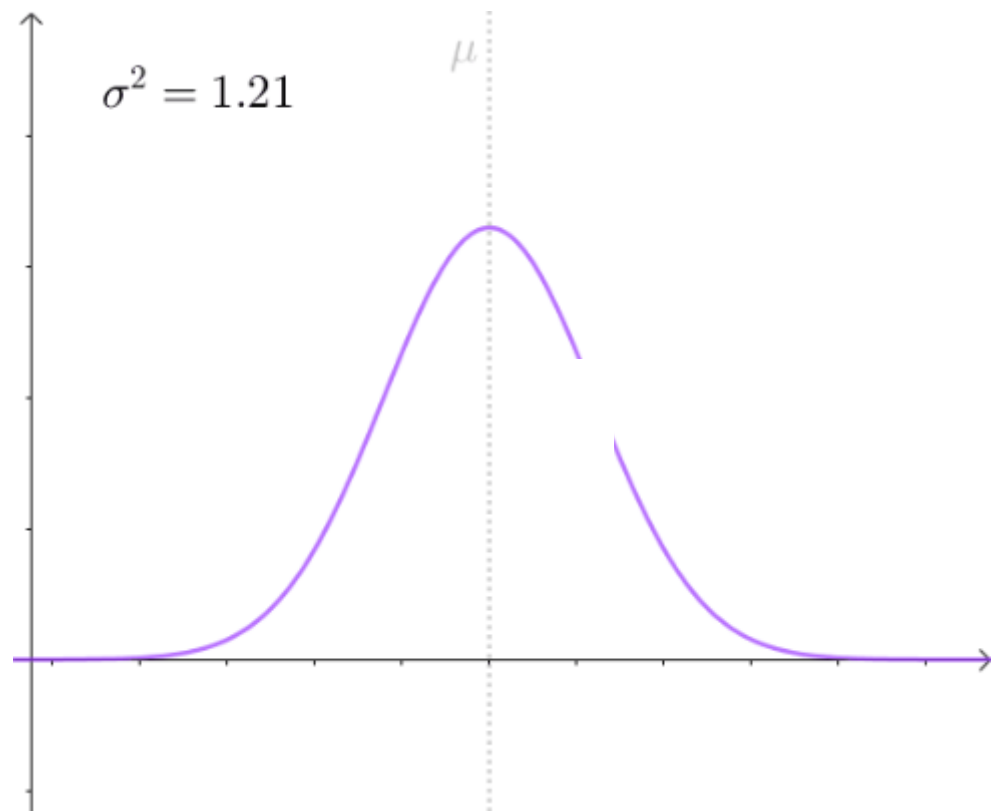
打靶的时候，右边的成绩肯定更优秀：

更优秀



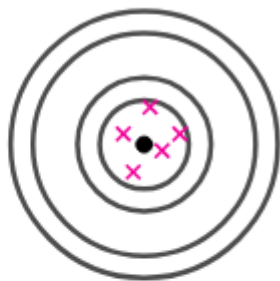
进行估计的时候也是，估计量越靠近目标，效果越“好”。这个“靠近”可以用方差来衡量。

比如，仍然对  $\mu$  进行估计，方差越小，估计量的分布越接近  $\mu$ ：

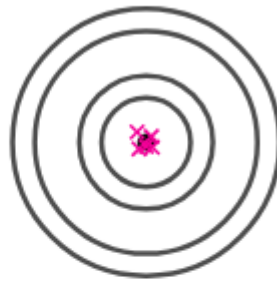


有效估计和无偏估计是不相关的：

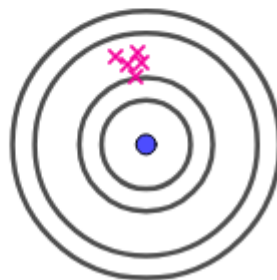
无偏



更有效



有偏



举个例子，从  $N(\mu, \sigma^2)$  中抽出10个样本：

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

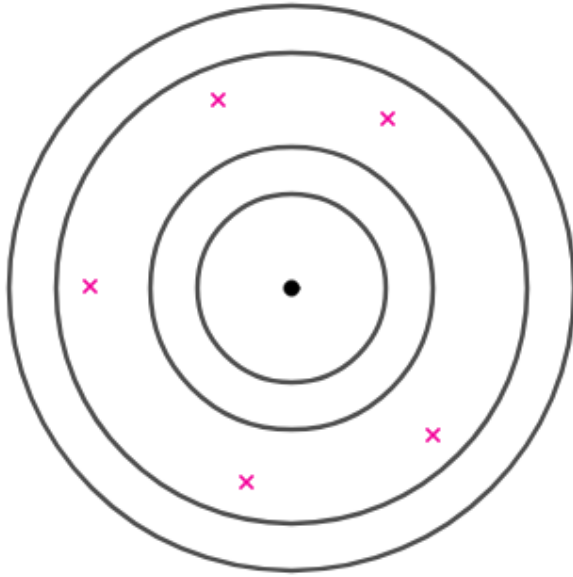
下面两个都是无偏估计量：

$$T_1 = \frac{x_1 + x_3 + 2x_{10}}{4} \quad T_2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i$$

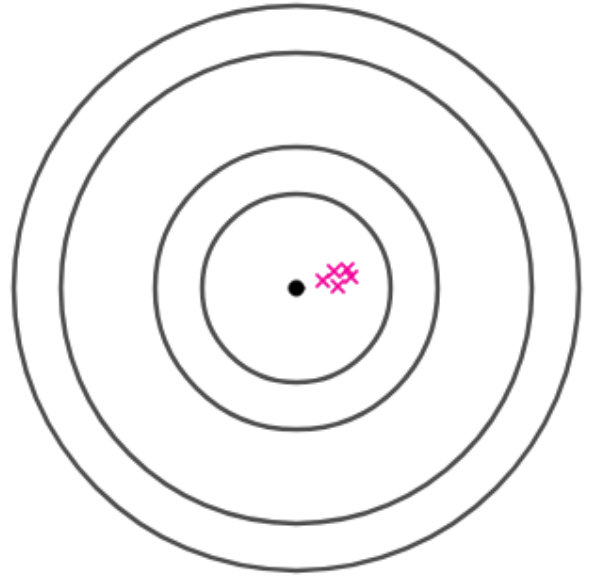
但是后者比前者方差小，后者更有效。

并且在现实中不一定非要选无偏估计量，比如：

## 无偏，有效性差



## 有偏，有效性好



如果能接受点误差，我倒觉得选择右边这个估计量更好。

### 3 一致性

之前说了，如果用以下式子去估计方差  $\sigma^2$ ：

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

会有一个偏差：

$$\frac{1}{n} \sigma^2$$

可以看到，随着采样个数  $n$  的增加，这个偏差会越来越小。那么这个估计就是“一致”的。

如果样本数够多，其实这种有偏但是一致的估计量也是可以选的。

### 4 总结

判断一个估计量“好坏”，至少可以从以下三个方面来考虑：

- 无偏
- 有效
- 一致

实际操作中，要找到满足三个方面的量有时候并不容易，可以根据情况进行取舍。

标签：

无偏估计

声明： 原创内容，未经授权请勿转载，内容合作意见反馈联系公众号: matongxue314

关注马同学



微信公众号：matongxue314

©2018 成都十年灯教育科技有限公司 | 蜀ICP备16021378