

# Matematikk

# Prosjekt

Stupebrett

Magomed Bakhmadov, Marius Fridheim, Håkon Dalen

Hestnes, Michael Mellemseter

19.03.2019

## Innhold

1. Innledning.....	3
2. Teori .....	3
2.1 Euler-Bernoullibjelken.....	3
2.2 Taylorpolynom med restledd.....	4
2.3 Systemet av den lineære ligninger for forskyvninger $y_i = y(x_i)$ .....	4
2.4 Alternativ tilnærming på uthengende stråle. ....	5
2.5 Kondisjonstall .....	6
2.6 Machine Epsilon .....	6
2.7 Bakgrunn for likning 2.34 .....	7
3 Resultater .....	10
3. 1 Oppgave 1 .....	10
5.1.21a .....	10
5.1.22 a .....	13
3.2 Oppgave 2 .....	16
3.3 Oppgave 3 .....	16
3.4 Oppgave 4 .....	17
a) .....	17
b) .....	18
c).....	19
d) .....	19
3.5 Oppgave 5 .....	22
3.6 Oppgave 6 .....	23
a) .....	23
b) .....	26
c).....	27
d) .....	28
e) .....	28
f) .....	29
3.7 Oppgave 7 .....	30
4 Konklusjon .....	31
5 Referanseliste.....	32
6 Vedlegg .....	32
Oppgave 2 .....	32
Oppgave 3 .....	33
Oppgave 4 .....	33
c).....	33

d) .....	34
Oppgave 5 .....	36
Oppgave 6 .....	37
b) .....	37
c) .....	38
d) .....	39
f) .....	39
Oppgave 7 .....	40

# 1. Innledning

Oppgaven som skal løses vil dreie seg om Euler-Bernoullilikningen, som beskriver en bjelke som belastes, og på grunn av dette forskyves. Vi skal reflektere rundt denne likningen, se på sammenhenger og bevise ulike elementer som er relevant for bjelken. Vi skal også se på noen konkrete tilfeller, blant annet ett der bjelken belastes av en haug, og ett annet der bjelken belastes av en person.

## 2. Teori

### Konstanter

$$E = 1,3 \cdot 10^{10}$$

$$L = 2$$

$$w = 0,3$$

$$d = 0,03$$

$$g = 9,81$$

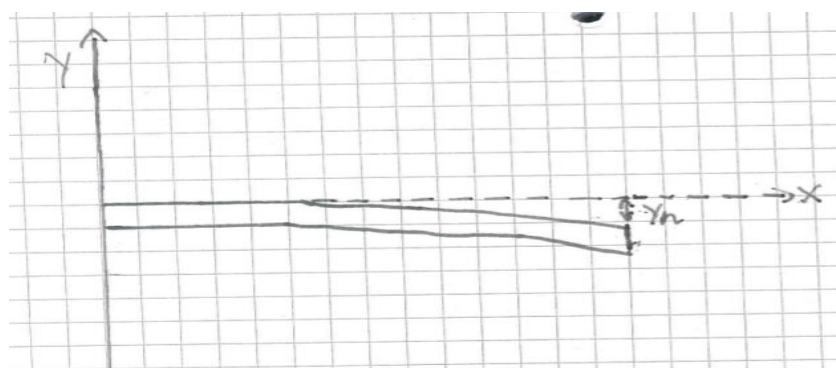
$$I = \frac{wd^3}{12}$$

$$f = -480wdg$$

$$h = \frac{L}{n}$$

### 2.1 Euler-Bernoullibjelken

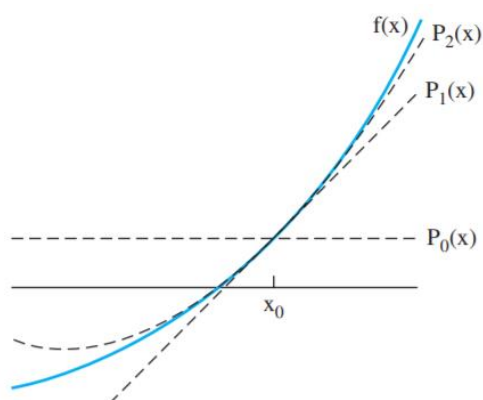
Euler-Bernoullibjelken er en modell for materialer som bøyes under belastning, inkludert egenvekten av bjelken (referere til oppgaven). Formelen for denne typen bjelker er  $EIy'''' = f(x)$  hvor E er Youngmodulsen som er en materialkonstant, I er et arealmoment til bjelkens tversnitt normalt på lengderetningen. For bjelken er denne konstant langs hele lengden.  $y(x)$  er forskyvningen vertikalt for bjelken, og  $f(x)$  er kraften som virker på bjelken, målt i Newton per meter. Vekten til bjelken er inkludert i denne kraften.



## 2.2 Taylorpolynom med restledd

Taylorpolynom er et viktig teorem for å løse oppgavene, spesielt oppgave 1. Det går ut på å finne en tilnærming av en funksjon med polynom. Dette gjør vi med å la  $f$  være  $k+1$  ganger (k er antall ledd du har med i Taylorpolynomet) kontinuerlig differensierbar i intervallet  $[x_0, x]$ . Da finnes et tall  $c$  i intervallet slik at:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots \\ + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}.$$



Bildet over er hentet fra [1].  $P_0(x)$  vil være en tilnærming der man bare tilnærmer til  $k = 0$ , altså bare første ledd. Deretter kan du se at jo flere ledd man tar med jo nærmere kommer man grafen  $f(x)$ . Hvorfor vi gjør dette er fordi maskiner er veldig gode på å regne polynomer, som er nettopp det vi skal gjøre i mange av oppgavene under.

Når vi lager en Taylorpolynom tilnærming  $P$  av en funksjon  $f$ , er forskjellen på  $f$  og  $P$

restleddet, som vil bli  $R_k = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}$ , dette kan også skrives som en funksjon av  $O(h^{k+1})$ , der  $f$  er  $k+1$  ganger kontinuerlig differensierbar.

## 2.3 Systemet av den lineære ligninger for forskyvninger $y_i = y(x_i)$

I oppgave 5.1.21 beviser vi formel 2.28:  $y^{iv}(x) = \frac{y(x-2h) - 4y(x-h) + 6y(x) - 4y(x+h) + y(x+2h)}{h^4}$ , og

vi har formel 2.27:  $EI y^{iv} = f(x)$ , kan vi kombinere disse til å få formel 2.29:

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{h^4}{EI} f(x_i)$$

Vi deler  $h$  jevnt utover der  $h = \frac{L}{n}$ .  $L$  er lengden til strålen, og  $n \in \mathbb{N}$ .  $x_0 = 0$   $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$

$$\sum_{i=0}^n x_i = L \Rightarrow h = x_i - x_{i-1} \text{ når } 0 < i \leq n$$

Da kan vi f.eks skrive  $y(h - 2h)$  som  $y(x_{i-2})$ , som vi igjen skriver som  $y_{i-2}$

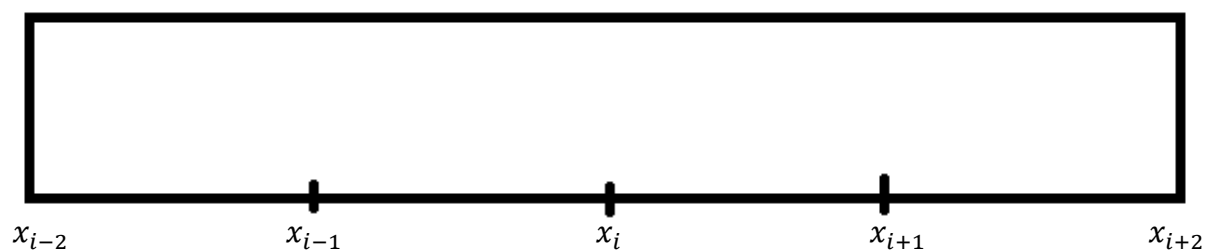
$$\text{Nå kan vi skrive 2.28 om til } y^{iv} = \frac{y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}}{h^4}$$

Så slår vi denne sammen med 2.27 og får  $EI \frac{y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}}{h^4} = f(x_i)$

Så gjør vi den om til 2.29:

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{h^4}{EI} f(x_i)$$

Her har vi en liten tegning av en bjelke/stupebrettet vi skal bruke senere i oppgaven. Som vist over er avstanden mellom hver  $x$  verdi  $h$ , og  $x_{i+z}$  (der  $z \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ) er lengden fra starten av bjelken til punket  $x_{i+z}$ .



## 2.4 Alternativ tilnærming på uthengende stråle.

Med å bruke oppgave 5.1.22 a og 2.29 kan vi videre bevise formel 2.31:  $y''''(x_1) =$

$$\frac{16y(x_1) - 9y(x_1+h) + \frac{8}{3}y(x_1+2h) - \frac{1}{4}y(x_1+3h)}{h^4} + O(h^2)$$

Vi har bevist i 5.1.22 a at når  $f(x) = f'(x) = 0$  er:

$$f^{iv}(x+h) - \frac{16f(x+h) - 9f(x+2h) + \frac{8}{3}f(x+3h) - \frac{1}{4}f(x+4h)}{h^4} = O(h^2)$$

Da kan vi skrive dette om til:

$$f^{iv}(x) = \frac{16f(x) - 9f(x+h) + \frac{8}{3}f(x+2h) - \frac{1}{4}f(x+3h)}{h^4} + O(h^2)$$

Som vi igjen kan gjøre om til:

$$y''''(x_1) = \frac{16y(x_1) - 9y(x_1+h) + \frac{8}{3}y(x_1+2h) - \frac{1}{4}y(x_1+3h)}{h^4} + O(h^2)$$

Når feilen er på  $O(h^2)$  går den mot null når  $h$  er liten, og da har vi formel 2.31.

Så kan vi kombinere 2.28 og 2.31, og sette  $i = 1$ , da kan vi skrive:

$$16y_1 - 9y_2 + \frac{8}{3}y_3 - \frac{1}{4}y_4 = \frac{h^4}{EI} f(x_1)$$



Fra referanse [2].

## 2.5 Kondisjonstall

Kondisjonstallet defineres som

$$k(A) = \|A\| * \|A^{-1}\|$$

Kondisjonstallet gir en grense for unøyaktigheten til løsningen av  $x$  til ligningen  $Ax = b$  ved approksimering. Det er verdt å nevne at unøyaktigheten det er snakk om bare kommer av selve matrisen, ikke eventuelle avrundingsfeil som kan dukke opp ved senere utregninger. Kondisjonstallet til en matrise avhenger altså av innholdet og størrelsen til matrisen. Et stort kondisjonstall vil tilsa at en minimal endring i  $b$  kan skape store endringer i  $x$ , for ligningen  $Ax = b$ . Det er ønskelig å ha et kondisjonstall så nærme som mulig 1, siden dette er den laveste verdien den kan ha. Jo større dette tallet blir, jo dårligere kondisjonert blir matrisen, som betyr at løsningen av ligningen vil ha potensiale for å inneholde store feil.

## 2.6 Machine Epsilon

Machine Epsilon,  $\epsilon_{mach}$ , gir oss en øvre grense på den relative feilen som kommer av avrunding av flyttall. Definisjonen fra læreboka[1] er: The number machine epsilon, denoted  $\epsilon_{mach}$ , is the distance between 1 and the smallest floating point number greater than 1.

I Matlab, som er programvaren vi bruker, er  $\text{eps}(\epsilon_{\text{mach}})$  avstanden fra 1.0 til neste største doblepresisjonsnummer. For eksempel  $\text{eps}(1) = 2^{-52}$ . Vi kan også få Matlab til å gi single presisjon  $\text{eps}(\text{single}(1)) = 2^{-23}$ , men det er doble vi som oftest vil bruke.

## 2.7 Bakgrunn for likning 2.34

På side 104 i boka har vi likning 2.34 som sier at vi har denne sammenhengen:

$$\begin{bmatrix} 16 & -9 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{4} & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & & \frac{16}{17} & -\frac{60}{17} & \frac{72}{17} & -\frac{28}{17} \\ & & & & & & -\frac{12}{17} & \frac{96}{17} & -\frac{156}{17} & \frac{72}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \frac{h^4}{EI} \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Altså at  $Ay_e = \frac{h^4}{EI} f(x)$ . Her skal vi se litt nærmere på hvorfor dette er sånn.

I avsnitt 2.4 så viste vi at vi har følgende sammenheng:

$$y_{i-2}, -4y_{i-1}, 6y_i, -4y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{h^4}{EI} f(x)$$

Vi ser at høyresiden her tilsvarer høyresiden til likning 2.34 (se bilde). Vi skal nå se litt nærmere på venstresiden av likningen. Koeffisientene på venstresiden av likningen over gir oss koeffisientmatrisen A som er brukt i 2.34. Men vi kan åpenbart se at A ikke bare er bestående av disse koeffisientene (1, -4, 6, -4, 1). Vi kan se at de første og siste radene i matrisen er bestående andre koeffisienter. Dette kommer av at vi må ta hensyn til randbetingelsene; Bjelken vil ha andre egenskaper ved starten og slutten. Dette sees nærmere på i avsnitt 2.5, og der ser vi at starten av bjelken er beskrevet slik:

$$16y_1 - 9y_2 + \frac{8}{3}y_3 - \frac{1}{4}y_4 = \frac{h^4}{EI} f(x_1)$$

Som vi kan se gir dette oss andre koeffisienter i første rad av matrisen A.

Legger så også merke til at rad 2 i matrisen A også skiller seg ut, ved at den ikke har den første koeffisienten 1, men heller 4. Dette har vi ettersom at vi i andre intervall av bjelken ikke har punktet  $y_{i-2}$ , og dermed bruker vi heller ikke dens koeffisient.



Vi har også at koeffisientene er annerledes for de siste radene av A, på grunn av andre randbetingelser ved slutten. Det gir disse likningene som er hentet fra boka:

$$y''''(x_{n-1}) \approx \frac{-28y_n + 72y_{n-1} - 60y_{n-2} + 16y_{n-3}}{17h^4} \quad (2.32)$$

$$y''''(x_n) \approx \frac{72y_n - 156y_{n-1} + 96y_{n-2} - 12y_{n-3}}{17h^4} \quad (2.33)$$

Ved multiplikasjon av  $h^4$ , av begge likninger, gir dette oss videre følgende sammenheng:

$$-\frac{28}{17}y_n + \frac{72}{17}y_{n-1} - \frac{60}{17}y_{n-2} + \frac{16}{17}y_{n-3} = \frac{h^4}{EI}f(x_{n-1}) \quad (2.32)$$

$$-\frac{72}{17}y_n - \frac{156}{17}y_{n-1} + \frac{96}{17}y_{n-2} - \frac{12}{17}y_{n-3} = \frac{h^4}{EI}f(x_{n-1}) \quad (2.33)$$

Bruker så sammenhengen  $EIy'''' = f(x)$  for å sette inn  $\frac{f(x)}{EI}$  for  $y''''$ , og gjør samt en

multiplikasjon av  $h^4$ , på begge likninger. Da har vi:

$$-\frac{28}{17}y_n + \frac{72}{17}y_{n-1} - \frac{60}{17}y_{n-2} + \frac{16}{17}y_{n-3} = \frac{h^4}{EI}f(x_{n-1}) \quad (2.32)$$

$$-\frac{72}{17}y_n - \frac{156}{17}y_{n-1} + \frac{96}{17}y_{n-2} - \frac{12}{17}y_{n-3} = \frac{h^4}{EI}f(x_{n-1}) \quad (2.33)$$

I disse likningene har vi punktene fra  $y_n$  til  $y_{n-3}$ , som her står i «motsatt rekkefølge» i forhold til hvordan vi har hatt de i likninger over. Men vi kan se, om vi leser av koeffisientene i likningene 2.32 og 2.33 fra venstre til høyre, at de er brukt i koeffisientmatrisen A for de siste radene:

$$\begin{array}{cccc} \frac{16}{17} & -\frac{60}{17} & \frac{72}{17} & -\frac{28}{17} \\ -\frac{12}{17} & \frac{96}{17} & -\frac{156}{17} & \frac{72}{17} \end{array}$$

Koeffisientene for radene i midten vil riktignok være de som ble utledet uten randbetingelser for  $y''''(x)$ , nemlig koeffisientene 1, -4, 6, -4, 1.

Vi har dermed matriselikningen som vi finner på side 104 i boka, der vi bruker koeffisientmatrisen A.

$$\begin{bmatrix}
16 & -9 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{4} & & & & & \\
-4 & 6 & -4 & 1 & & & & & \\
& 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\
& & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\
& & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\
& & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\
& & & & & & \frac{16}{17} & -\frac{60}{17} & \frac{72}{17} & -\frac{28}{17} \\
& & & & & & -\frac{12}{17} & \frac{96}{17} & -\frac{156}{17} & \frac{72}{17}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
y_1 \\
y_2 \\
\vdots \\
\vdots \\
\vdots \\
y_{n-1} \\
y_n
\end{bmatrix}
= \frac{h^4}{EI}
\begin{bmatrix}
f(x_1) \\
f(x_2) \\
\vdots \\
\vdots \\
\vdots \\
f(x_{n-1}) \\
f(x_n)
\end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

## 3 Resultater

### 3.1 Oppgave 1

#### 5.1.21a

21. Prove the second-order formula for the fourth derivative

$$f^{(iv)}(x) = \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 6f(x) - 4f(x+h) + f(x+2h)}{h^4} + O(h^2).$$

This formula is used in Reality Check 2.

Hvis vi bruker taylor-teoremet og hvis  $f(x)$  er fem ganger kontinuerlig differensierbar kan vi bruke femte grads taylorpolynom slik at vi kan finne uttrykk for  $f(x-2h)$ ,  $4f(x-h)$ ,  $6f(x)$ ,  $4f(x+h)$  og  $f(x+2h)$ . Vi ser at erroren  $O(h^2)$  vil komme fra  $O(h^6)/h^4$ , som vil si at vi må bruke femte grads taylorpolynom med  $O(h^6)$  som error.

Setter  $\Delta x = h$  og  $x_0 = x$

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)(x+h-x) + \frac{f''(x)}{2!}(x+h-x)^2 \\ &+ \frac{f'''(x)}{3!}(x+h-x)^3 + \frac{f^{(iv)}(x)}{4!}(x+h-x)^4 + \frac{f^{(v)}(x)}{5!}(x+h-x)^5 + O(h^6) \\ f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + h^2 \frac{f''(x)}{2} + h^3 \frac{f'''(x)}{6} + h^4 \frac{f^{(iv)}(x)}{24} \\ &+ h^5 \frac{f^{(v)}(x)}{120} + O(h^6) \\ 4f(x+h) &= 4f(x) + 4hf'(x) + 2h^2 f''(x) + \frac{2h^3 f'''(x)}{3} + h^4 \frac{f^{(iv)}(x)}{6} \\ &+ h^5 \frac{f^{(v)}(x)}{30} + O(h^6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x-h) &= f(x) + f'(x)(x-h-x) + \frac{f''(x)}{2!}(x-h-x)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(x-h-x)^3 \\ &+ \frac{f^{(iv)}(x)}{4!}(x-h-x)^4 + \frac{f^{(v)}(x)}{5!}(x-h-x)^5 + O(h^6) \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + h^2 \frac{f''(x)}{2} - h^3 \frac{f'''(x)}{6} + h^4 \frac{f^{(iv)}(x)}{24} - h^5 \frac{f^{(v)}(x)}{120} + O(h^6) \\ \text{ganger med 4 fordi } 4f(x-h) \text{ er det vi skal ha i vårt resultat} \\ 4f(x-h) &= 4f(x) - 4hf'(x) + 2h^2 f''(x) - \frac{2h^3 f'''(x)}{3} + h^4 \frac{f^{(iv)}(x)}{6} \\ &- h^5 \frac{f^{(v)}(x)}{30} + O(h^6) \end{aligned}$$

Nå har vi:

$$4f(x+h) = 4f(x) + 4hf'(x) + 2h^2f''(x) + 2h^3\frac{f'''(x)}{3} + h^4\frac{f^{iv}(x)}{6} + h^5\frac{f^{v}(x)}{30} + O(h^6)$$

$$4f(x-h) = 4f(x) - 4hf'(x) + 2h^2f''(x) - 2h^3\frac{f'''(x)}{3} + h^4\frac{f^{iv}(x)}{6} - h^5\frac{f^{v}(x)}{30} + O(h^6)$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2f''(x) + 4h^3\frac{f'''(x)}{3} + 2h^4\frac{f^{iv}(x)}{3} + 4h^5\frac{f^{v}(x)}{15} + O(h^6)$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + 2h^2f''(x) - 4h^3\frac{f'''(x)}{3} + 2h^4\frac{f^{iv}(x)}{3} - 4h^5\frac{f^{v}(x)}{15} + O(h^6)$$

Så legger vi sammen  $4f(x+h)$  og  $4f(x-h)$

$$\begin{aligned} 4f(x+h) + 4f(x-h) &= 4f(x) + 4hf'(x) + 2h^2f''(x) + 2h^3\frac{f'''(x)}{3} + h^4\frac{f^{iv}(x)}{6} + h^5\frac{f^{v}(x)}{30} + O(h^6) \\ &+ 4f(x) - 4hf'(x) + 2h^2f''(x) - 2h^3\frac{f'''(x)}{3} + h^4\frac{f^{iv}(x)}{6} - h^5\frac{f^{v}(x)}{30} + O(h^6) \\ &= 8f(x) + 4h^2f''(x) + h^4\frac{f^{iv}(x)}{3} + O(h^6) \end{aligned}$$

Vi ønsker nå å fjerne  $4h^2f''(x)$ , men vi kan ikke det enda så vi flytter  $4h^2f''(x)$  til venstre side av ligningen og resten på høyre.

$$4h^2f''(x) = 4f(x+h) + 4f(x-h) - 8f(x) - h^4\frac{f^{iv}(x)}{3} + O(h^6)$$

$$\begin{aligned} f(x+2h) + f(x-2h) &= f(x) + 2hf'(x) + 2h^2f''(x) + 4h^3\frac{f'''(x)}{3} + 2h^4\frac{f^{iv}(x)}{3} + 4h^5\frac{f^{v}(x)}{15} + O(h^6) \\ &+ f(x) - 2hf'(x) + 2h^2f''(x) - 4h^3\frac{f'''(x)}{3} + 2h^4\frac{f^{iv}(x)}{3} - 4h^5\frac{f^{v}(x)}{15} + O(h^6) \\ &= 2f(x) + 4h^2f''(x) + 4h^4\frac{f^{iv}(x)}{3} + O(h^6) \end{aligned}$$

Finnes uttrykk for  $4h^2f''(x)$

$$4h^2f''(x) = f(x+2h) + f(x-2h) - 2f(x) - 4h^4\frac{f^{iv}(x)}{3} + O(h^6)$$

Nå har vi to uttrykk for  $4h^2f''(x)$  som inneholder  $f(x+h)$ ,  $f(x-h)$ ,  $f(x+2h)$ ,  $f(x-2h)$  og  $f^{iv}(x)$ . Så for å få vekk  $4h^2f''(x)$  setter vi  $4h^2f''(x) = 4h^2f''(x)$ .

$f(x+h)$ ,  $f(x-h)$ ,  $f(x+2h)$  og  $f(x-2h)$ , og  $f^{(iv)}(x)$

$$4h^2 f''(x) = 4h^2 f''(x)$$

$$\begin{aligned} & 4f(x+h) + 4f(x-h) - 8f(x) - h^4 \frac{f^{(iv)}(x)}{3} + O(h^6) \\ &= f(x+2h) + f(x-2h) - 2f(x) - 4h^4 \frac{f^{(iv)}(x)}{3} + O(h^6) \end{aligned}$$

Så flytter vi  $f^{(iv)}(x)$  til venstre side av ligningen, og vi får uttrykket vi skulle bevise

$$h^4 f^{(iv)}(x) = f(x+2h) + f(x-2h) - 2f(x) + O(h^6) - 4f(x+h) - 4f(x-h) + 8f(x) + O(h^6)$$

$$h^4 f^{(iv)}(x) = f(x+2h) + f(x-2h) - 4f(x+h) - 4f(x-h) + 6f(x) + O(h^6)$$

$$f^{(iv)}(x) = \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) - 4f(x+h) + f(x+2h) + 6f(x) + O(h^6)}{h^4}$$

$$f^{(iv)}(x) = \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 6f(x) - 4f(x+h) + f(x+2h)}{h^4} + O(h^2)$$

Da har vi bevist:  $f^{(iv)}(x) = \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 6f(x) - 4f(x+h) + f(x+2h)}{h^4} + O(h^2)$



### 5.1.22 a

22. This exercise justifies the beam equations (2.33) and (2.34) in Reality Check 2. Let  $f(x)$  be a six-times continuously differentiable function.

(a) Prove that if  $f(x) = f'(x) = 0$ , then

$$f^{(iv)}(x+h) - \frac{16f(x+h) - 9f(x+2h) + \frac{8}{3}f(x+3h) - \frac{1}{4}f(x+4h)}{h^4} = O(h^2).$$

(Hint: First show that if  $f(x) = f'(x) = 0$ , then

$f(x-h) - 10f(x+h) + 5f(x+2h) - \frac{5}{3}f(x+3h) + \frac{1}{4}f(x+4h) = O(h^6)$ . Then apply Exercise 21.)

Først legger vi inn  $f^{iv}(x+h)$  med å bruke oppgave 5.1.22 og finner et uttrykk.

2.  $f^{(iv)}(x+h) = \frac{f(x-h) - 4f(x) + 6f(x+h) - 4f(x+2h) + f(x+3h)}{h^4} + O(h^2)$  = 0 Fordi  $f(x) = f'(x) = 0$

$- \frac{16f(x+h) - 9f(x+2h) + \frac{8}{3}f(x+3h) - \frac{1}{4}f(x+4h)}{h^4}$

$= \frac{f(x-h) - 10f(x+h) + 5f(x+2h) - \frac{5}{3}f(x+3h) + \frac{1}{4}f(x+4h)}{h^4} + O(h^2)$

Nå ser vi at hvis vi bruker hintet i oppgaven:

(Hint: First show that if  $f(x) = f'(x) = 0$ , then

$$f(x-h) - 10f(x+h) + 5f(x+2h) - \frac{5}{3}f(x+3h) + \frac{1}{4}f(x+4h) = O(h^6).$$

Så blir hele stykket lik  $O(h^2)$ , fordi  $\frac{O(h^6)}{h^4} = O(h^2)$ , og  $O(h^2) + O(h^2) = O(h^2)$ .

Så vi bruker samme fremgangsmåte som oppgave 5.1.21 og finner uttrykk for

$f(x-h), f(x+h), f(x+2h), f(x+3h)$  og  $f(x+4h)$ , der  $f(x) = f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} & \text{La } f(x-h) - 10f(x+h) + 5f(x+2h) - \frac{5}{3}f(x+3h) + \frac{1}{4}f(x+4h) = \\ & f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) - \frac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + O(h^6) \\ & - 10\left(f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + O(h^6)\right) \\ & + 5\left(f(x) + 2hf'(x) + 2h^2f''(x) + \frac{8h^3}{6}f'''(x) + \frac{16h^4}{24}f^{(4)}(x) + \frac{32h^5}{120}f^{(5)}(x) + O(h^6)\right) \\ & - \frac{5}{3}\left(f(x) + 3hf'(x) + 9h^2f''(x) + \frac{27h^3}{6}f'''(x) + \frac{81h^4}{24}f^{(4)}(x) + \frac{243h^5}{120}f^{(5)}(x) + O(h^6)\right) \\ & + \frac{1}{4}\left(f(x) + 4hf'(x) + 16h^2f''(x) + 64h^3f'''(x) + \frac{256h^4}{24}f^{(4)}(x) + \frac{1024h^5}{120}f^{(5)}(x) + O(h^6)\right) \\ & = -\frac{65}{12}f(x) - 5f'(x) + 0 + 0 + 0 + 0 + O(h^6) \\ & \quad \left(f(x) = f'(x) = 0\right) \\ & = \underline{O(h^6)} \end{aligned}$$

Nå har vi vist at når  $f(x) = f'(x) = 0$

$$1. \quad f(x-h) - 10f(x+h) + 5f(x+2h) - \frac{5}{3}f(x+3h) + \frac{1}{4}f(x+4h) = O(h^6)$$

og at:

$$f^{(iv)}(x+h) = \frac{16f(x+h) - 9f(x+2h) + \frac{8}{3}f(x+3h) - \frac{1}{4}f(x+4h)}{h^4}$$

$$= \frac{f(x-h) - 10f(x+h) + 5f(x+2h) - \frac{5}{3}f(x+3h) + \frac{1}{4}f(x+4h)}{h^4} + O(h^2)$$

Vi skal nå vise at dette er lik  $O(h^2)$  så vi setter inn uttrykk på likning markert med 1.:

bevis  $O(h^2)$   $\Rightarrow \frac{O(h^6)}{h^4} + O(h^2) = O(h^2) + O(h^2) = \underline{\underline{O(h^2)}}$

Da har vi bevist at når  $f(x) = f'(x) = 0$  er:

$$f^{iv}(x+h) = \frac{16f(x+h) - 9f(x+2h) + \frac{8}{3}f(x+3h) - \frac{1}{4}f(x+4h)}{h^4} = O(h^2)$$



### 3.2 Oppgave 2

Denne oppgaven, som gikk ut på å lage strukturmatrisen A fra 2.34 i boka, danner grunnlaget for mange av de senere utregningene. Med kodeblokken vi hadde fått, var det bare å fylle inn verdiene fra boka på de tilsvarende plassene.

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -9 & 2.6667 & -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9412 & -3.5294 & 4.2353 & -1.6471 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7059 & 5.6471 & -9.1765 & 4.2353 \end{bmatrix}$$

Verdiene i matrisen over er fra utregningen i MATLAB for  $n=10$ , og vi ser at de avrundede verdiene tilsvarer de i boka.

### 3.3 Oppgave 3

Her finner vi  $y_c$  ved å bruke koden fra forrige oppgave og at  $y = A \backslash b$ . Vi har A, men  $b$  må regnes ut. Det gjør vi ved å lage en  $n \times 1$  – matrise, og multiplisere hvert element med  $f$  og brøken  $\frac{h^4}{EI}$ . Til slutt kan vi bruke  $y = A \backslash b$  for å finne  $y_c$ . Resultatet virker rimelig, siden det viser at bjelken bøyer seg mer jo lenger ut man går fra utgangspunktet. Resultatet ble følgende verdier (avrundet til 6 desimaler).

$$y_c = \begin{bmatrix} -0.0001806 \\ -0.0006748 \\ -0.0014170 \\ -0.0023491 \\ -0.0034209 \\ -0.0045900 \\ -0.0058215 \\ -0.0070885 \\ -0.0083715 \\ -0.0096591 \end{bmatrix}$$

### 3.4 Oppgave 4

a)

$$y(x) = \left(\frac{f}{24EI}\right) x^2(x^2 - 4Lx + 6L^2)$$

Vi legger først og fremst merke til at  $\left(\frac{f}{24EI}\right)$  er konstant, da det i oppgaven er gitt at  $f$  er konstant, mens  $E$  (elastisitetsmodulen) og  $I$  (det annet arealmoment) er konstante langs bjelken.

**Finner førstederiverte:**

$$y'(x) = \left(\frac{f}{24EI}\right) [x^2(x^2 - 4Lx + 6L^2)]'$$

$$y'(x) = \left(\frac{f}{24EI}\right) [x^2(x^2 - 4Lx + 6L^2)]'$$

Bruker produktregelen for derivasjon for  $[x^2(x^2 - 4Lx + 6L^2)]'$ :

$$y'(x) = \left(\frac{f}{24EI}\right) [(2x(x^2 - 4Lx + 6L^2)) + (x^2(2x - 4L))]$$

**Finner andrederiverte:**

$$y''(x) = \left(\frac{f}{24EI}\right) [(2x(x^2 - 4Lx + 6L^2)) + (x^2(2x - 4L))]'$$

Bruker produktregelen på begge ledd i  $[(2x(x^2 - 4Lx + 6L^2)) + (x^2(2x - 4L))]$

$$y''(x) = \left(\frac{f}{24EI}\right) [(2(x^2 - 4Lx + 6L^2) + 2x(2x - 4L)) + (2x(2x - 4L) + 2x^2)]$$

$$y''(x) = \left(\frac{f}{24EI}\right) [(2(x^2 - 4Lx + 6L^2) + 2x(2x - 4L)) + (2x(2x - 4L) + 2x^2)]$$

$$y''(x) = \left(\frac{f}{24EI}\right) (2x^2 - 8Lx + 12L^2 + 4x^2 - 8Lx + 4x^2 - 8Lx + 2x^2)$$

$$y''(x) = \left(\frac{f}{24EI}\right) (12x^2 - 24Lx + 12L^2)$$

**Finner tredjederiverte:**

$$y'''(x) = \left( \frac{f}{24EI} \right) (12x^2 - 24Lx + 12L^2)'$$

$$y'''(x) = \left( \frac{f}{24EI} \right) (24x - 24L)$$

**Finner fjerdederiverte**

$$y''''(x) = \left( \frac{f}{24EI} \right) (24x - 24L)'$$

$$y''''(x) = \frac{f}{24EI} \cdot 24$$

$$y''''(x) = \frac{f}{EI}$$

$$EIy''''(x) = f$$

Vi setter inn  $f = f(x)$  og ser at vi får en riktig løsning:

$$EIy'''' = f(x)$$

Vi kan derfor se at  $y(x)$  er den korrekte løsningen av likningen.

**b)**

Dette feilleddet fikk vi ved utregning av 4-deriverte i oppgave 1. Der så vi at feilleddet var

$O(h^6)$ , som vi fra Taylors formel vet tilsvarer  $\frac{y^{(6)}(c)}{6!} h^6$ .

I forrige oppgave fant vi fjerdederiverte av  $y$ , og kan dermed bruke dette som grunnlag for videre derivering.

$$y^{(6)} = (y''''')' = \left( \frac{f}{EI} \right)'$$

Både  $f$ ,  $E$  og  $I$  er konstanter, og dermed er  $\left( \frac{f}{EI} \right)$  også en konstant. Den deriverte av en konstant gir null:

$$y^{(5)} = \left( \frac{f}{EI} \right)' = 0$$

$$y^{(6)} = (0)' = 0$$

Feilleddet nulles derfor ut, ettersom at  $y^{(6)} = 0$  er i telleren og vi får  $\frac{0}{6!} = 0$ . Den numeriske metoden for den 4-deriverte er dermed, som sagt i oppgaven, eksakt.

**c)**

Årsaken til at vi har den numeriske deriverte  $\frac{1}{h^4} Ay_e$  kommer av at vi kan bruke likningen

$Ay_e = \frac{h^4}{EI} \cdot f(x)$ , som er en likning som vi har fra tidligere utledninger. Vi gjør følgende:

$$Ay_e = \frac{h^4}{EI} \cdot f(x) \Leftrightarrow \frac{Ay_e}{h^4} = \frac{f(x)}{EI}$$

Euler-Bernoullilikningen sier at  $y''''(x) = \frac{f}{EI}$  og dermed har vi at

$$\frac{Ay_e}{h^4} = y''''(x) \Leftrightarrow y''''(x) = \frac{Ay_e}{h^4} = \frac{1}{h^4} Ay_e$$

$$y''''(x) = \frac{1}{h^4} Ay_e$$

Vi kan dermed bruke  $\frac{1}{h^4} Ay_e$  for å regne ut den numeriske fjerdederiverte.

Denne oppgaven er gjort i MATLAB. Vi får dette resultatet:

`ans =`

```
0.004829538461538
0.004829538461538
0.004829538461537
0.004829538461542
0.004829538461534
0.004829538461538
0.004829538461538
0.004829538461540
0.004829538461536
0.004829538461543
```

Her har vi da altså den numeriske fjerdederiverte.

**d)**

Skal her sammenlikne den numeriske fjerdederiverte fra 4c) med vektoren  $\left(\frac{f}{EI}\right) (1, 1, \dots, 1)$

Vi fant at den numeriske fjerdederiverte er som følger:

ans =

```
0.004829538461538
0.004829538461538
0.004829538461537
0.004829538461542
0.004829538461534
0.004829538461538
0.004829538461538
0.004829538461540
0.004829538461536
0.004829538461543
```

Vi finner  $\left(\frac{f}{EI}\right)(1,1, \dots, 1)$  i MATLAB, og får:

ans =

```
0.004829538461538
0.004829538461538
0.004829538461538
0.004829538461538
0.004829538461538
0.004829538461538
0.004829538461538
0.004829538461538
0.004829538461538
0.004829538461538
```

Vi har nå en approksimering  $x_a$  og et eksakt kvantum  $x$ .

Foroverfeilen vil være den maks-normen til differansen mellom  $x_a$  og  $x$ :

$$||x - x_a||_{\infty}$$

Maks-normen vil være den største differansen vi finner. Altså det største tallet blant absoluttverdiene av verdiene i matrisen. Vi bruker MATLAB for å finne dette, og det gir oss følgende resultat:

ans =

```
4.90753271353839e-15
```

Foroverfeilen er feilen vi har på «output-siden». Altså er dette hvor mye vi endring vi måtte gjort på den approksimerte løsningen for å få den til å bli helt riktig.

Relativ foroverfeil vil være  $\frac{||x - x_a||_{\infty}}{||x||_{\infty}}$ , altså foroverfeil dividert på den maks-normen til  $x$ :

$$\frac{||x - x_a||_{\infty}}{||x||_{\infty}} = \frac{4.90753271353839 \cdot 10^{-15}}{0.00482953846153846} = 1.01614942144494 \cdot 10^{-12}$$

Som oppgaven sier, så antar nå at relativ bakoverfeil er  $\varepsilon_{mach} = 2^{-52}$ . Vil nå finne feilforstørringen, som er relativ foroverfeil delt på relativ bakoverfeil. Dette gjør vi i MATLAB og får resultatet:

`ans =`

`4576.33015576798`

Vil nå finne kondisjonstallet til A,  $\text{cond}(A)$ . Dette vil være den maksimale feilforstørringen, altså hvor stor feilforstørring vi kan få. I verste fall, så vil feilforstørringen vi fant være like stort som kondisjonstallet. Finner nå kondisjonstallet i MATLAB:

`ans =`

`33254.3749999939`

Ser at vi har et kondisjonstall som er mye større enn feilforstørringen vi fant. Altså har vi *ikke* verste mulige tilfelle.

### 3.5 Oppgave 5

Vi kjører utregningene fra oppgave 3 om igjen, og finner feilen for hver oppgitte n-verdi, ved å subtrahere den nøyaktige løsningen med det numeriske estimatet vårt. Feilen er størst i  $n = 10240$ , tett etterfulgt av  $n=20480$ . Vi ser at etter hvert som  $n$  øker, så øker også feilen, men noe små variasjoner. Hvis vi f.eks. sjekker feilen når  $n = 40960$  så ser vi at feilen fortsatt øker. Grunnen til at feilen øker, er at kondisjonstallet til A også øker etter hvert som den blir større. Resultatet blir altså påvirket av at utregningen blir mer unøyaktig.

n	Feil	Kondisjonstall
20	1.3759826611448e-14	530302.499998998
40	1.47331799538186e-13	8449279.99985676
80	6.66359328826971e-13	134821259.980659
160	-8.60994955886873e-12	2153877317.45886
320	1.72876280998824e-10	34434645510.4922
640	-8.31952881585885e-10	550730030029.797
1280	-2.22848915917839e-08	8809861144987.75
2560	1.0388145760612e-07	140942568348747
5120	1.66558323965241e-06	2.25488634226904e+15
10240	-4.36949342139965e-05	3.60725725331037e+16
20480	-3.18512163212936e-05	5.77022291760934e+17

### 3.6 Oppgave 6

a)

#### Oppgave 6

a)

$$EI y'''' = f(x)$$

$$y(x) = \frac{f}{24EI} x^2 (x^2 - 4Lx + 6L^2) - \frac{pgL}{EI\pi}$$

$$\left( \frac{L^3}{\pi^3} \sin \frac{\pi}{L} x - \frac{x^3}{6} + \frac{Lx^2}{2} - \frac{L^2x}{\pi^2} \right)$$

legger til  $s(x)$

$$EI y'''' = f(x) - pg \sin \frac{\pi}{L} x$$

Derivere  $y(x)$  fire ganger

$$y'(x) = \frac{f}{24EI} (4x^3 - 12Lx^2 + 12L^2x) - \dots$$

$$\dots \frac{pgL}{EI\pi} \left( \frac{L^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi}{L} x - \frac{x^2}{2} + Lx - \frac{L^2}{\pi^2} \right)$$

$$y''(x) = \frac{f}{24EI} (12x^2 - 24Lx + 12L^2) - \dots$$

$$\dots \frac{pgL}{EI\pi} \left( -\frac{L}{\pi} \sin \frac{\pi}{L} x - x + L \right)$$

$$y'''(x) = \frac{f}{24EI} (24x - 24L) - \frac{pgL}{EI\pi} \left( -\cos \frac{\pi}{L} x - 1 \right)$$



$$y''''(x) = \frac{f}{24EI} (24) - \frac{pgL}{EI\pi} \left( \frac{\pi}{L} \sin \frac{\pi}{L} x \right)$$

$$y''''(x) = \frac{f}{EI} - \frac{pg}{EI} \sin \frac{\pi}{L} x$$

$$\underline{EI y''''(x) = f - pg \sin \frac{\pi}{L} x}$$

Derfor tilfredstiller  $y(x)$  (gitt i oppgaven) Euler-Bernoulli likningen

Setter inn  $x=0$  i  $y(x)$

$$y(0) = \frac{f}{24EI} \cdot 0^2 (0 - 4L \cdot 0 + 6L^2) - \dots$$

$$\dots - \frac{pgL}{EI\pi} \left( \frac{L^3}{\pi^3} \sin \frac{\pi}{L} \cdot 0 - \frac{0^3}{6} + \frac{L}{2} \cdot 0^2 - \frac{L}{\pi^2} \cdot 0 \right)$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

Setter inn  $x=0$  i  $y'(x)$

$$y'(0) = \frac{f}{24EI} (4 \cdot 0^3 - 12L \cdot 0^2 + 12L^2 \cdot 0) - \dots$$

$$\dots - \frac{pgL}{EI\pi} \left( \frac{L^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi}{L} \cdot 0 - \frac{0^2}{2} + L \cdot 0 - \frac{L^2}{\pi^2} \right)$$

$$= - \frac{pgL}{EI\pi} \left( \frac{L^2}{\pi^2} \cdot 1 - \frac{L^2}{\pi^2} \right) = - \frac{pgL}{EI\pi} \cdot 0$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

Setter inn  $x=L$  i  $y'''(x)$

$$y'''(L) = \frac{f}{24EI} (12L^2 - 24L^2 + 12L^2) - \dots$$

$$\dots \frac{pgh}{EI\pi} \left( -\frac{L}{\pi} \sin \pi - L + L \right)$$

$$= \frac{f}{24EI} \cdot 0 - \frac{pgh}{EI\pi} \left( -\frac{L}{\pi} \cdot 0 \right)$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

Setter inn  $x=L$  i  $y'''(x)$

$$y'''(L) = \frac{f}{24EI} (24L - 24L) - \frac{pgh}{EI\pi} \left( -\cos \frac{\pi}{L} \cdot L - 1 \right)$$

$$= \frac{f}{24EI} \cdot 0 - \frac{pgh}{EI\pi} (-(-1) - 1)$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

Derfor tilfredstiller  $y(x)$  randbetingelsene

$$y(0) = 0$$

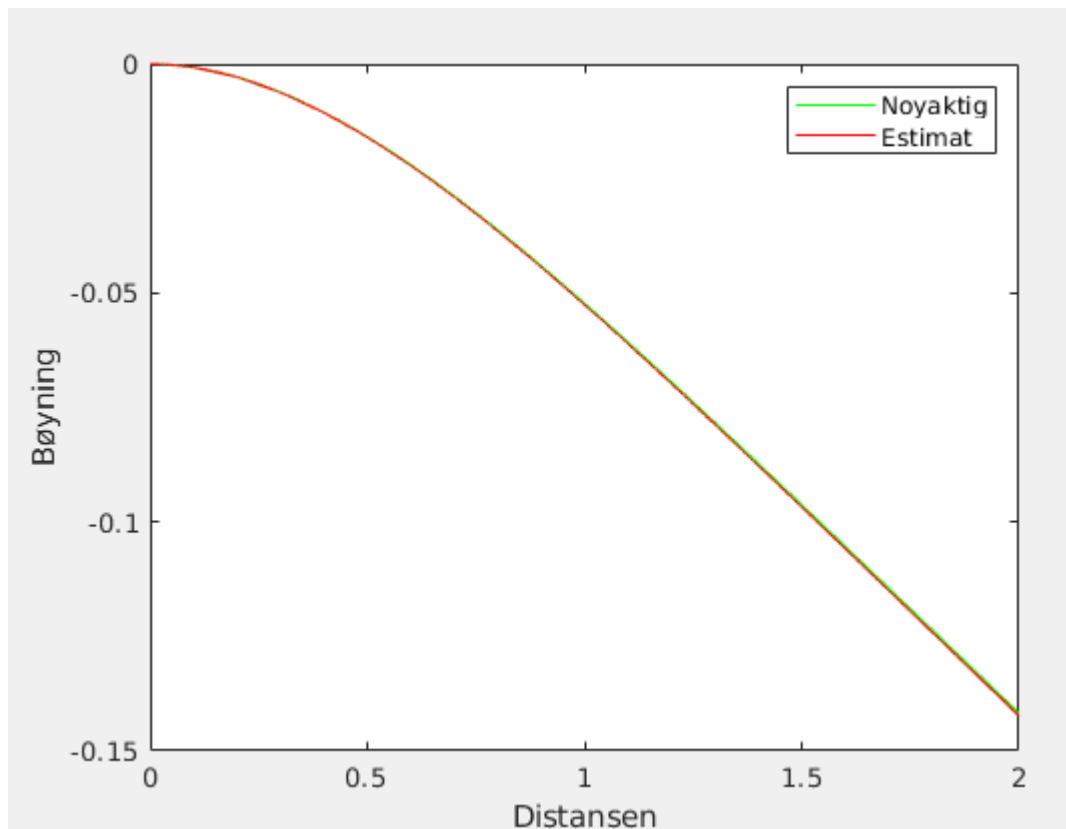
$$y'(0) = 0$$

$$y''(L) = 0$$

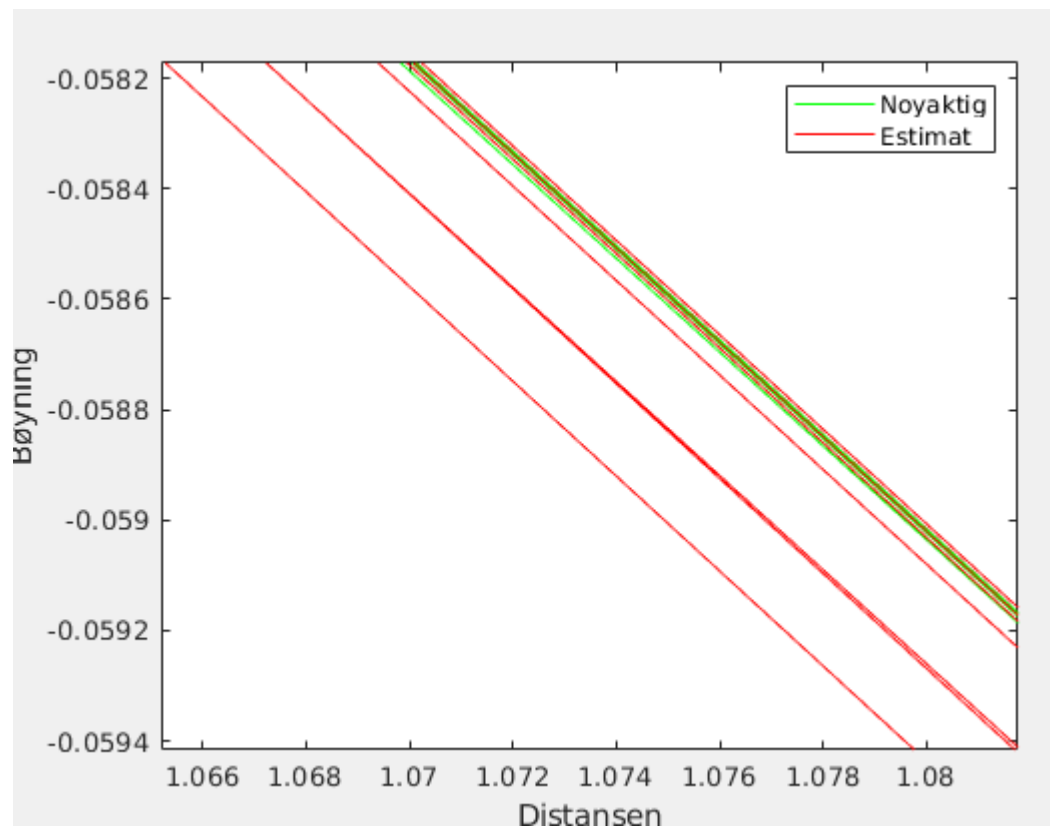
$$y'''(L) = 0$$

b)

I denne oppgaven har vi lagt til en sinusformet haug på stupebrettet. Siden vi fikk oppgitt formlene for den ekstra belastningen, trengte vi bare å endre den eksakte formelen, samtidig som vi sørget for at den numeriske utregningen også tok hensyn til sinushaugen. Ved å plote verdiene til den numeriske løsningen opp mot den eksakte løsningen, får vi følgende graf.

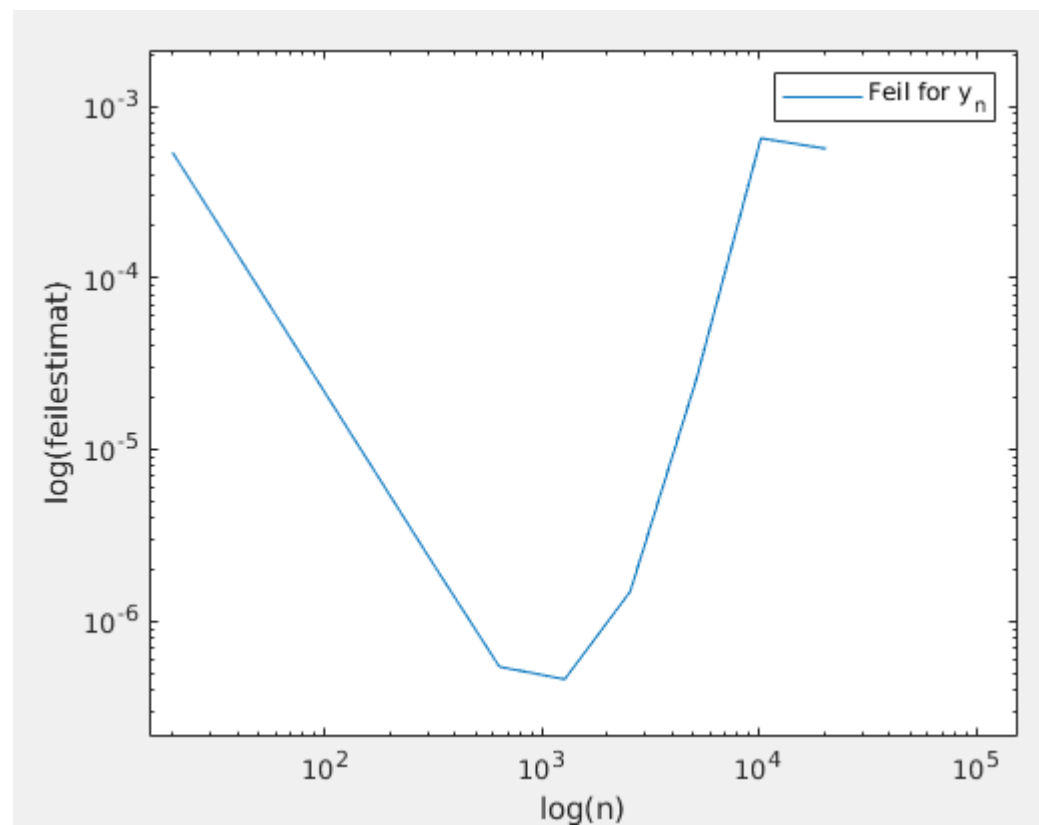


Vi ser at den numeriske løsningen og den eksakte er svært like. Løsningen virker også rimelig, da grafen gir en rimelig visualisering av hvordan et stupebrett bøyer seg. Ved å zoomme inn på grafen, får vi også sett spredningen på resultatene for de forskjellige  $n$ -verdiene.



c)

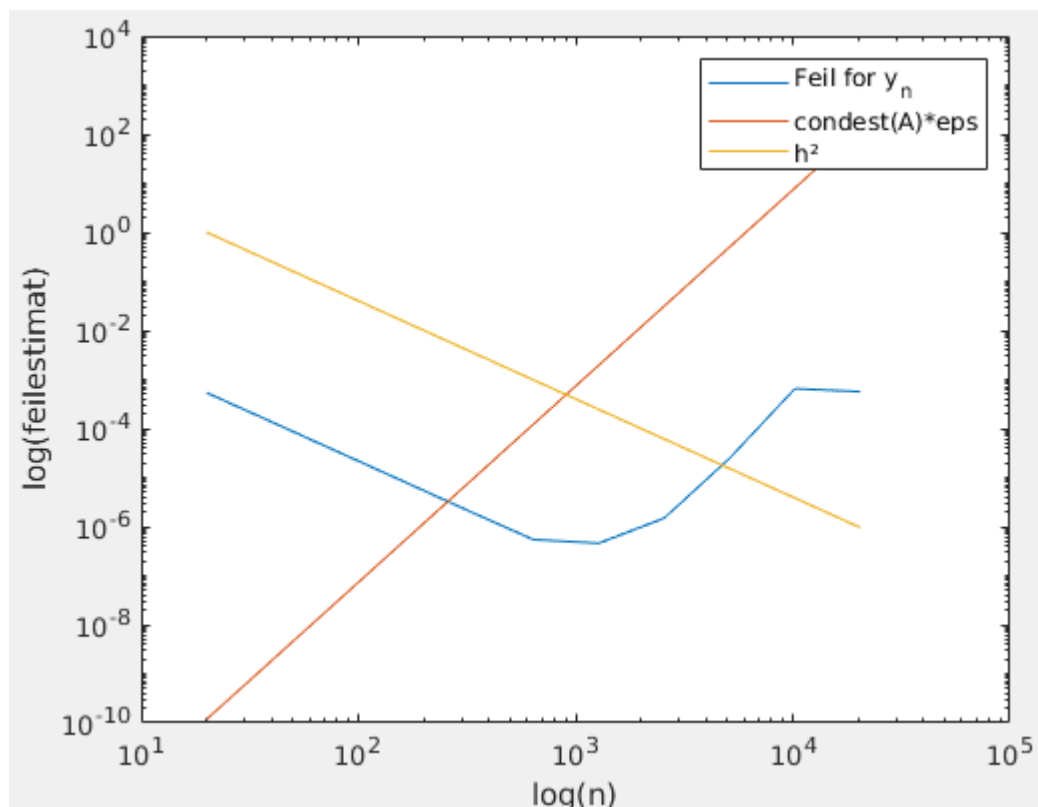
Vi plottes en graf for feilen fra forrige deloppgave, ved å bruke loglog-kommandoen i MATLAB. Det gir oss følgende graf.



Vi valgte å bruke  $\log(n)$  langs x-aksen, siden det ikke var oppgitt nøyaktig hva den skulle følge. Et annet alternativ kunne vært at x-aksen følger  $\log(h)$ , som ville resultert i samme graf, bare rotert horisontalt. Vi valgte å bruke  $\log(n)$ , fordi det virket som den mest intuitive verdien til å ha langs x-aksen. Vi kan se hvordan feilen på estimatet vårt endrer seg etter hvert som  $n$  øker. Feilen synker frem til et punkt hvor den flater litt ut, før den begynner å vokse igjen. Grunnen til at feilen øker etter å ha sunket en stund, er at kondisjonstallet fra dette punktet og utover har blitt veldig stort. I den siste delen av grafen kan vi se at feilestimatet vårt flater litt ut, men som vi nevnte i oppgave 5 vil den fortsette å øke ekstremt.

d)

Ved å plotte linjer for kondisjonstallet til A multiplisert med  $\epsilon_{\text{mach}}$  og den teoretiske feilen  $h^2$ , får vi tydeligere sett hvordan disse verdiene påvirker nøyaktigheten i estimeringen vår.



Vi ser i grafen at den teoretiske feilen synker i takt med feilen på estimeringen vår frem til et vist punkt. Det er i det punktet at verdien til kondisjonstallet er blitt så stor at den øker unøyaktigheten i matriseutregningen.

e)

Om vi minsker  $n$  vil det si at vi deler opp stupebrettet i mindre og mindre deler. Dette vil i teorien si at feilen  $h^2$  minker og vil gå mot 0, siden den komplette utregningen blir mer og



mer presis. Om man derimot får for høy  $n$  så vil dette føre til at kondisjonstallet også øker. Når kondisjonstallet øker, øker usikkerheten ved utregningen, og den vil til slutt bli større enn den synkende feilen. Dette skjer fordi matrisen er dårlig kondisjonert, som betyr at vi ender opp med ett mindre presist resultat siden kondisjonstallet er såpass høyt. Som vi regnet ut i forrige oppgave synker feilen frem til  $n = 1280$ , som vil si at feilen er synkende når  $n < 1280$ , men økende når  $n \geq 1280$ .

f)

Den optimale verdien av  $n$ , vil være den verdien som har minst mulig unøyaktighet i utregningen og dermed minst feil. Hvis vi ser på grafen fra oppgave 6d, vil vi se at den optimale verdien burde ligge rundt der feilestimeringen fortsatt følger  $h^2$  så langt den kan før kondisjonstallet blir for stort og dermed bryter av nøyaktigheten. I forrige deloppgave kom vi frem til at feilen synker frem til  $n=1280$ , før den øker igjen etter det. Under ser vi utskriften i kommandofeltet for oppgave 6.

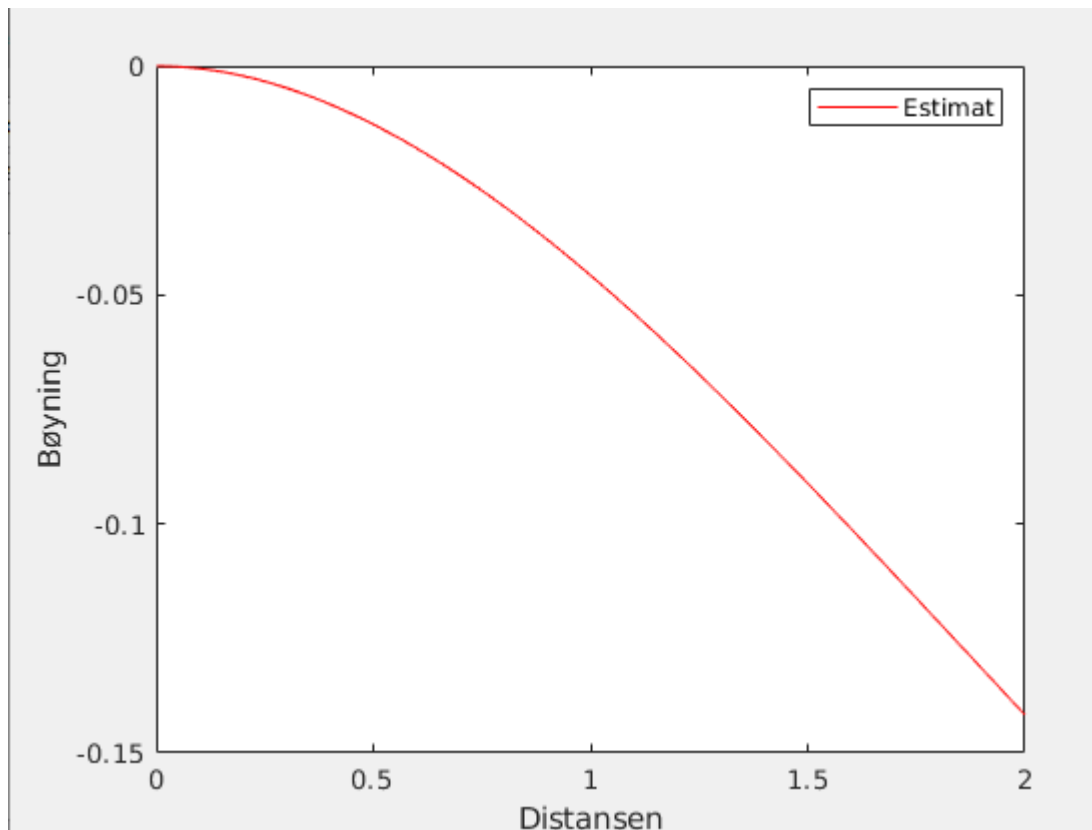
Tabell med feilverdi for  $x=L$  for hver  $n$

$n$	Estimat	feil
20	-0.142296743307195	0.000537696008039074
40	-0.1418945121698	0.000135464870643753
80	-0.141792978212208	3.39309130518439e-05
160	-0.141767534194243	8.48689508675671e-06
320	-0.141761166684077	2.11938492103436e-06
640	-0.141759590234614	5.42935457786831e-07
1280	-0.141759506430763	4.59131606594942e-07
2560	-0.141757559154381	1.4881447752968e-06
5120	-0.141734330163997	2.47171351593911e-05
10240	-0.142408995016724	0.000649947717567517
20480	-0.142323531837645	0.000564484538488896

Vi kan se at blant de  $n$ -verdiene vi har valgt, er det ved  $n=1280$  at feilen er minst. Den optimale verdien til  $n$  er derfor 1280.

### 3.7 Oppgave 7

Her gjentar vi mye av det som ble gjort i oppgave 6, bare at sinushaugen byttes ut med en person. Vi bruker den beste verdien av  $n$  som vi fant tidligere, som var  $n = 1280$ , til å finne ut at stupebrettet bøyes til rundt  $-0.1417$  ved tuppen. Dette kan vi se visualisert i grafen under.



## 4 Konklusjon

Gjennom prosjektet har vi utført oppgaver relatert til Euler-Bernoullibjelken, en modell for hvordan materialer bøyer seg under belastning. Vi har lært teori om hvordan stupebrettet blir forskjøvet med bare sin egen vekt, og ved tilsetning av to andre former for belastning.

Oppgave 5, 6 og 7 fokuserte på hvordan stupebrettet bøyer seg ved forskjellig belastning, og vi fikk lært om hvordan vi deler brettet inn i  $n$  deler og hvordan vi studerer forskyvningen med disse delene. Ut i fra teorien forventet vi at feilen matriseutregningen vår gir ville blitt mindre og mindre jo større  $n$  ble, men vi fikk sett spesielt i oppgave 6 hvorfor dette ikke er tilfellet.

Det var her en av de større formålene med prosjektet kom, altså å forstå hvorfor den teoretiske feilen i praksis ikke alltid blir mindre jo mer nøyaktig vi deler opp stupebrettet. Dette observerte vi når vi ble bedt om å sammenligne feilen vi får i nøyaktigheten. Denne feilen fant vi ved å subtrahere den tilnærmede løsningen vi fikk ved matrisekalkulasjon med løsningen ved bruk av formelen for den eksakte løsningen. Vi fikk videre utforsket denne feilestimeringen i oppgave 6, der vi lagde graf over hvordan den estimerte feilen, den teoretiske feilen og kondisjonstall multiplisert med  $\epsilon_{\text{mach}}$  endret seg for forskjellige verdier av  $n$ .

Vi fikk dermed sett at årsaken til at feilen ved matriseregning øker etter en viss  $n$ , på grunn av kondisjonstallet og  $\epsilon_{\text{mach}}$ . Kondisjonstallet er som sagt et tall på hvordan en feil forstørres i matrisekalkulasjoner. Vi observerte at denne ble større og større jo større  $n$  ble, nettopp fordi større  $n$  betyr større matrise  $A$ . Grunnen til at  $\epsilon_{\text{mach}}$  er relevant for økningen i feil, er at dette tallet viser grensen for nøyaktigheten i et svar. Flere utregninger førte til flere avrundinger, som igjen førte til at feilen ble større.

Noe som kunne vært interessant å undersøke videre, kunne vært svingningene til stupebrettet etter at belastningen i oppgave 7 fjernes. Men teorien rundt dette omfatter mer enn teorien rundt Euler-Bernoullibjelkemodellen.



## 5 Referanseliste

- [1] Timothy Sauer, 2012, "Numerical Analysis", 2<sup>nd</sup> ed
- [2] Michael A. Karls and Brenda M. Skoczelas, 2009, "Modeling a Diving Board", Mathematics Magazine, Vol. 82, No. 5, pp. 343-353
- [3] Documentation Center, 07.08.2013, Hentet 25.03.2019, <https://web.archive.org/web/20130807071540/http://www.mathworks.de/de/help/matlab/ref/eps.html>
- [4] Steve Haak, Simon Goodwill, Ben Heller, Dave Schorah and Jose Gomez, 2010, "Dynamic modeling of a spring board during a 3 m dive" 1<sup>st</sup> ed

## 6 Vedlegg

### Oppgave 2

Setter inn  $n = 10$  i `losAy.m` programmet for å få verdiene for matrise A.

(1,1)	16
(2,1)	-4
(3,1)	1
(1,2)	-9
(2,2)	6
(3,2)	-4
(4,2)	1
(1,3)	2.66666666666667
(2,3)	-4
(3,3)	6
(4,3)	-4
(5,3)	1
(1,4)	-0.25
(2,4)	1
(3,4)	-4
(4,4)	6
(5,4)	-4
(6,4)	1
(3,5)	1
(4,5)	-4
(5,5)	6
(6,5)	-4
(7,5)	1
(4,6)	1
(5,6)	-4
(6,6)	6
(7,6)	-4
(8,6)	1
(5,7)	1
(6,7)	-4
(7,7)	6
(8,7)	-4
(9,7)	0.941176470588235
(10,7)	-0.705882352941177
(6,8)	1
(7,8)	-4
(8,8)	6
(9,8)	-3.52941176470588
(10,8)	5.64705882352941
(7,9)	1
(8,9)	-4
(9,9)	4.23529411764706
(10,9)	-9.17647058823529
(8,10)	1
(9,10)	-1.64705882352941
(10,10)	4.23529411764706

### Oppgave 3

y =

```
-0.000180624738461544  
-0.000674847507692329  
-0.00141698658461543  
-0.00234908750769238  
-0.00342092307692317  
-0.00458999335384627  
-0.0058215256615386  
-0.00708847458461555  
-0.00837152196923095  
-0.00965907692307711
```

### Oppgave 4

c)

>> y\_e

ans =

```
-0.000180624738461539  
-0.000674847507692308  
-0.00141698658461539  
-0.00234908750769231  
-0.00342092307692308  
-0.00458999335384616  
-0.00582152566153846  
-0.00708847458461539  
-0.00837152196923077  
-0.00965907692307692
```

d)

```
>> numerisk_fjerdederivert
```

```
ans =
```

```
-0.004829538461538  
-0.00482953846153844  
-0.00482953846153666  
-0.00482953846154155  
-0.00482953846153356  
-0.00482953846153755  
-0.00482953846153755  
-0.00482953846154022  
-0.00482953846153578  
-0.00482953846154288
```

```
>> vec
```

```
ans =
```

```
-0.00482953846153846  
-0.00482953846153846  
-0.00482953846153846  
-0.00482953846153846  
-0.00482953846153846  
-0.00482953846153846  
-0.00482953846153846  
-0.00482953846153846  
-0.00482953846153846  
-0.00482953846153846
```

```
>> foroverfeil

ans =

    4.90753271353839e-15

>> relativ_foroverfeil

ans =

    1.01614942144401e-12

>> feilforstopping

ans =

    4576.33015576798

>> kondisjonstall

ans =

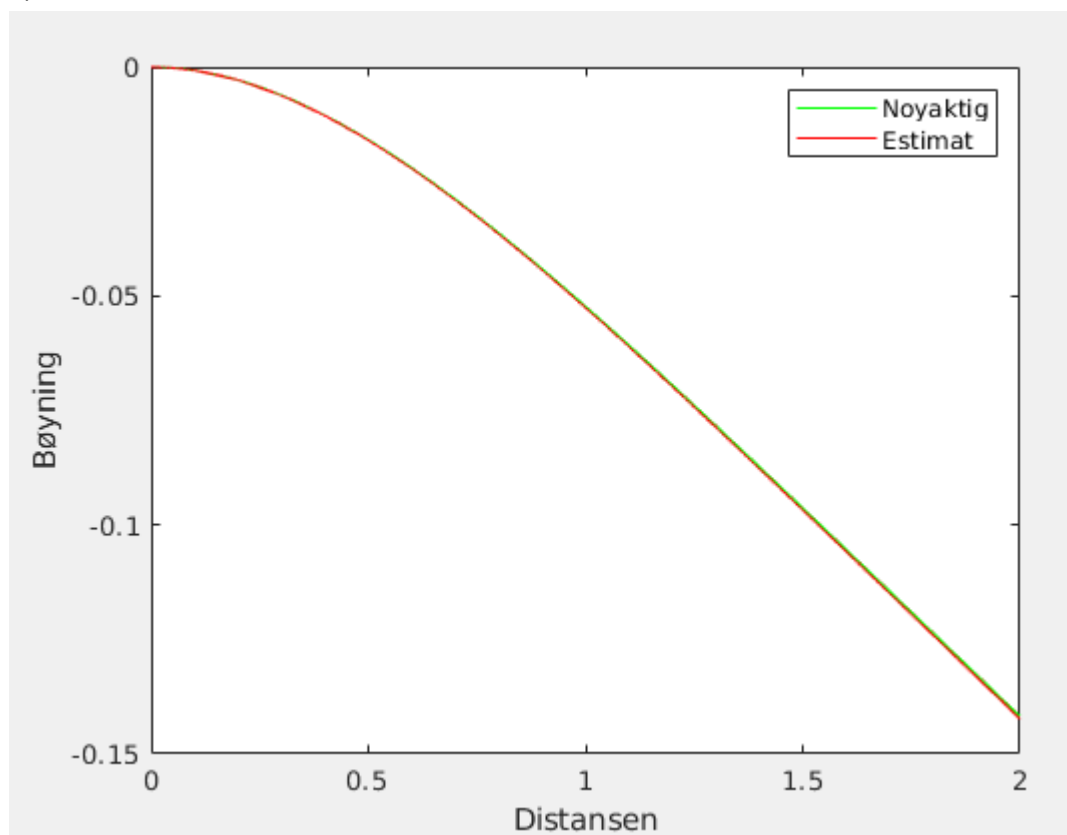
    33254.3749999939
```

## Oppgave 5

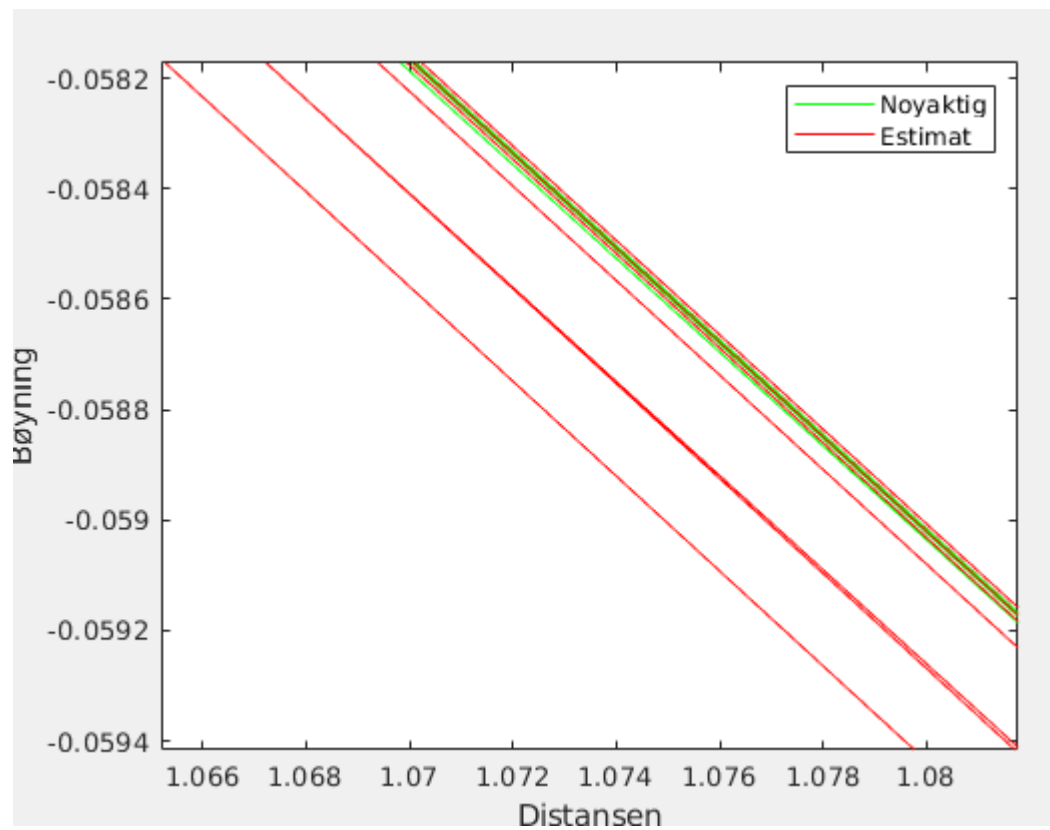
n	Feil	Kondisjonstall
20	1.3759826611448e-14	530302.499998998
40	1.47331799538186e-13	8449279.99985676
80	6.66359328826971e-13	134821259.980659
160	-8.60994955886873e-12	2153877317.45886
320	1.72876280998824e-10	34434645510.4922
640	-8.31952881585885e-10	550730030029.797
1280	-2.22848915917839e-08	8809861144987.75
2560	1.0388145760612e-07	140942568348747
5120	1.66558323965241e-06	2.25488634226904e+15
10240	-4.36949342139965e-05	3.60725725331037e+16
20480	-3.18512163212936e-05	5.77022291760934e+17

## Oppgave 6

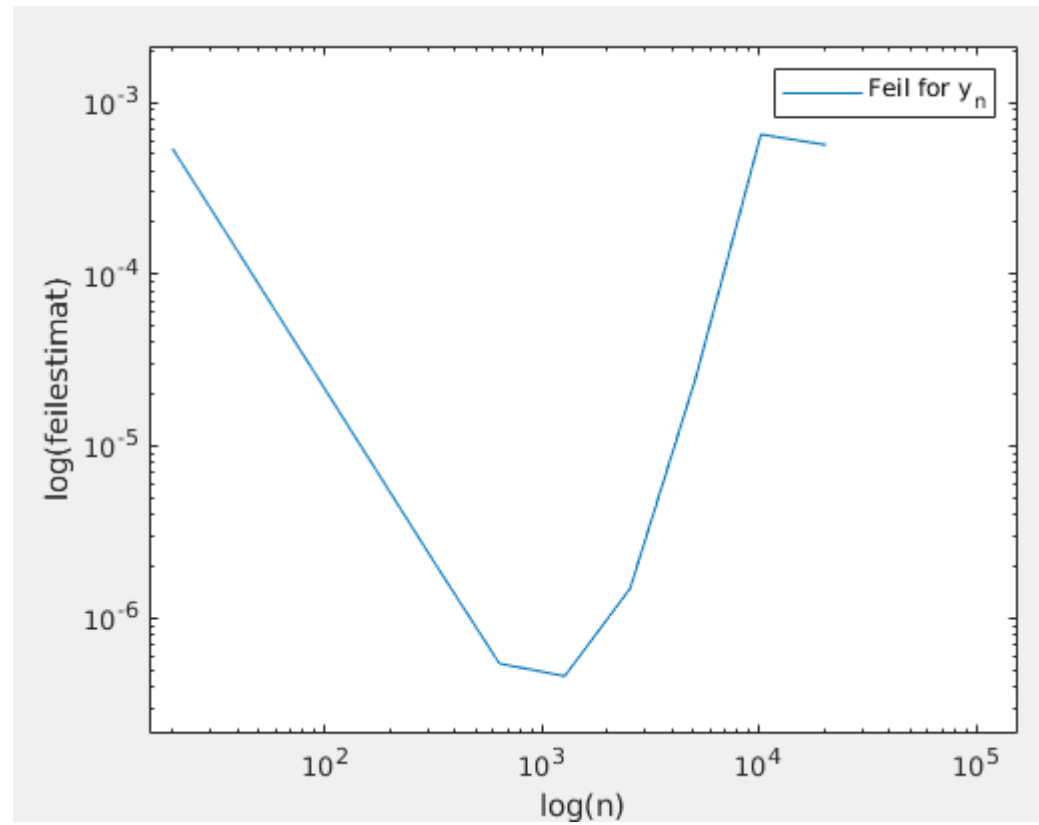
b)



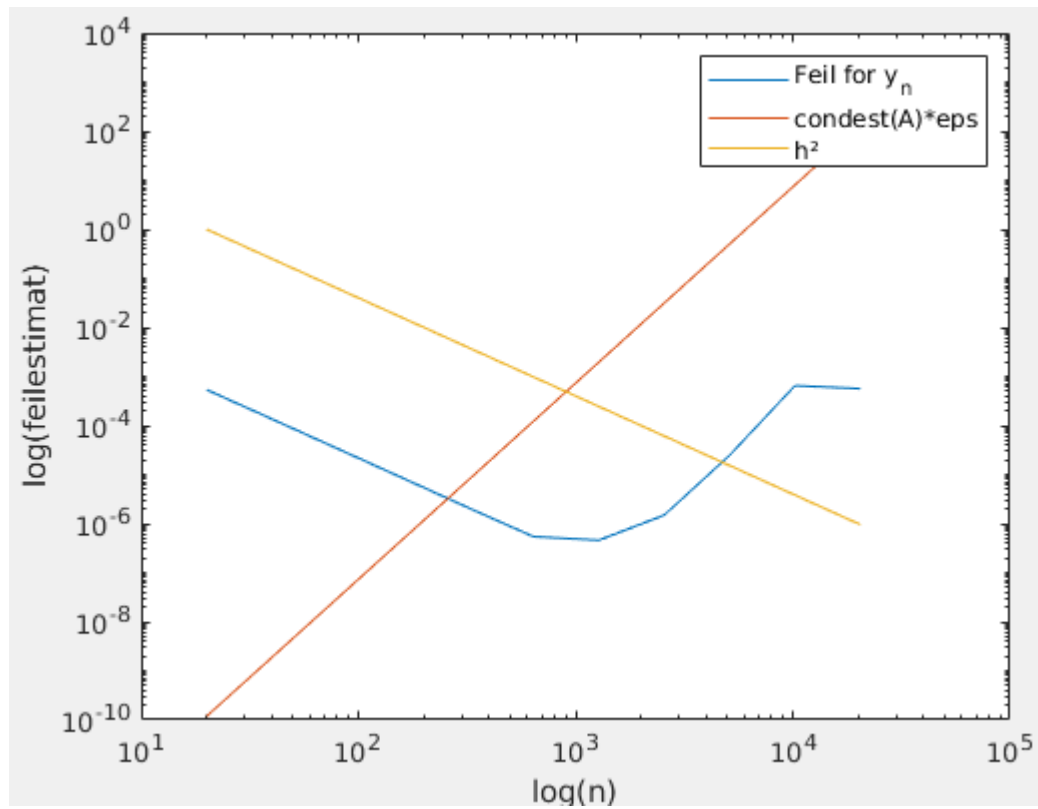
Zoomer inn for å se spredningen



c)



d)



f)

Tabell med feilverdi for  $x=L$  for hver  $n$

$n$	Estimat	feil
20	-0.142296743307195	0.000537696008039074
40	-0.1418945121698	0.000135464870643753
80	-0.141792978212208	3.39309130518439e-05
160	-0.141767534194243	8.48689508675671e-06
320	-0.141761166684077	2.11938492103436e-06
640	-0.141759590234614	5.42935457786831e-07
1280	-0.141759506430763	4.59131606594942e-07
2560	-0.141757559154381	1.4881447752968e-06
5120	-0.141734330163997	2.47171351593911e-05
10240	-0.142408995016724	0.000649947717567517
20480	-0.142323531837645	0.000564484538488896



## Oppgave 7

