TELECOMUNICAZIONI

FM

introduzione alla modulazione di frequenza

Ricordiamo qui che lo scopo del processo chiamato **modulazione** è quello di imprimere l'informazione contenuta in un segnale informativo — chiamato anche segnale **modulante** — su di un secondo segnale che faccia da supporto all'informazione stessa. Tale segnale viene chiamato **portante**.

Il segnale portante non contiene informazione in sé stesso, ed ha come unica ragione di esistenza quella di essere modellato dal segnale informativo. Quest'ultimo non è adatto ad essere inviato sul mezzo trasmissivo, ed ovviamente deve essere imprevedibile affinché contenga informazione.

Nel seguito invece si faranno delle ipotesi semplificative in base alle quali il segnale modulante si suppone prevedibile e determinato — addirittura una sinusoide od una cosinusoide, cioè quanto di più prevedibile si possa immaginare.

Queste ipotesi servono solo a semplificare l'analisi matematica del problema, che altrimenti sarebbe oltremodo difficoltosa.

Dunque la funzione della **portante** è simile a quella di una tavoletta di argilla fresca che aspetta solo di essere incisa.

Mentre la funzione della **modulante** è simile a quella di uno stilo che viene maneggiato da uno scrittore per incidere dei segni sulla tavoletta di argilla.

Il risultato del processo di scrittura è il segnale **modulato** ovvero una tavoletta incisa che contiene un brano letterario oppure la dimostrazione di un teorema, od altro contenuto di qualsiasi genere.

Quando un lettore osserva i segni sulla tavoletta apprende un contenuto che prima non conosceva. Quindi ha appena acquisito delle informazioni.

Queste informazioni erano racchiuse nel segnale modulante, ma ora sono contenute nel segnale modulato che è stato prodotto a partire dai due segnali di ingresso: quello modulante e quello portante.

Il processo di modulazione viene svolto da una apparecchiatura o dispositivo od apparato, che una volta era completamente HardWare ma oggi è sempre più SoftWare. Ormai l’uso dei DSP — Digital Signal Processor — è sempre più diffuso e dunque non possiamo più dire che il modulatore sia un dispositivo fatto di solo HW. Va da sé che l’uscita del modulatore è il segnale modulato.

Supponiamo per semplicità che il segnale modulante sia cosinusoidale:

$v_m(t) = A_m\cos(\omega_m t)$
e venga applicato all'ingresso del modulatore FM di figura 1.
Sia anche, per semplicità, che l’oscillatore produca un segnale portante cosinusoidale

$v_p(t) = A_p\cos(\omega_p t)$ [1]

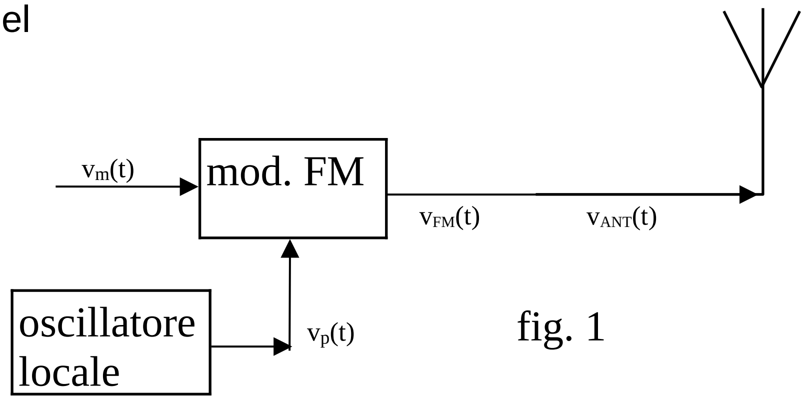


fig. 1

Il modulatore emette un segnale del quale non viene modulata **l’ampiezza** istantanea bensì la **frequenza** istantanea. Se il segnale modulante fosse nullo, se fosse cioè $v_m(t) = 0$ allora sarebbe:

$v_{FM}(t) = v_p(t) = A_p\cos(\omega_p t)$ [1]

e dunque la pulsazione del segnale modulato varrebbe:

$\omega_{FM}(t) = \omega_p = 2\pi \cdot f_p$ [2]

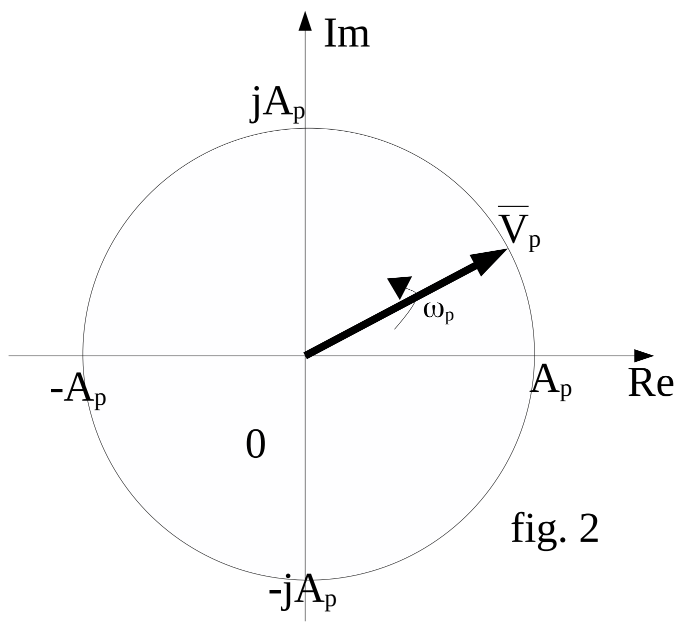


fig. 2

ed essa sarebbe dunque costante.
Non è neanche il caso di puntualizzare che cosa sia la pulsazione della portante ω_p — ovvero il numero di radianti che il vettore della portante percorre in un secondo. Ed ovviamente f_p è il numero di giri che il vettore della portante percorre in un secondo.

Come si può vedere dalla figura 2 nella quale è rappresentato, sul piano complesso, il vettore rotante $\overline{V}_p$.

L'ampiezza massima della portante —detta anche modulo della portante— è A_p mentre la proiezione del vettore portante sull'asse reale costituisce il segnale istantaneo $v_p(t)$. Possiamo considerare la portante sia come segnale istantaneo cosinusoidale $v_p(t)$, sia come un vettore $\overline{V}_p$ che ruota nel piano complesso con pulsazione ω_p e la cui ampiezza vale A_p . Ovviamente non è affatto detto che il vettore della portante abbia fase iniziale nulla. In generale potrà accadere che la fase istantanea della portante valga:

$$\boldsymbol{\theta_p(t) = \omega_p \cdot t + \theta_0} \qquad [3]$$

dove θ_0 è la fase della portante nell'istante iniziale (istante zero).

Ma per semplicità, è più comodo supporre che la fase iniziale della portante sia nulla e dunque si possa scrivere:

$$\boldsymbol{\theta_p(t) = \omega_p \cdot t} \qquad [4]$$

dove ω_p è la velocità angolare della portante, detta anche pulsazione.

Nella modulazione d'ampiezza non si modifica la frequenza (e dunque nemmeno la pulsazione) del segnale modulato, ma Edwin Howard Armstrong (1890-1954), l'inventore della Modulazione di Frequenza (FM) scoprì che si possono ottenere delle prestazioni migliori dal segnale modulato se anziché alterare l'ampiezza del segnale trasmesso se ne altera invece la frequenza. In pratica, anziché far variare la lunghezza del vettore di figura 2 (modulando l'ampiezza) facciamo variare la sua velocità di rotazione. Qualcosa di simile a ciò che accade con alcuni tipi di ventilatori, nei quali si può regolare la velocità di rotazione dell'elica.

Consideriamo dapprima il caso (banale) di frequenza costante.

Nel diagramma di figura 3 riportato alla pagina seguente abbiamo fatto l'ipotesi che sia f_p = 100 MHz e dunque ω_p = 628 Mr/s (628 milioni di radianti al secondo) cosicché dopo un tempo di 250 μsec (microsecondi) il vettore della portante ha percorso 25000 giri in senso antiorario nel piano complesso ruotando attorno all'origine, percorrendo così una fase di 157.1 Krad .

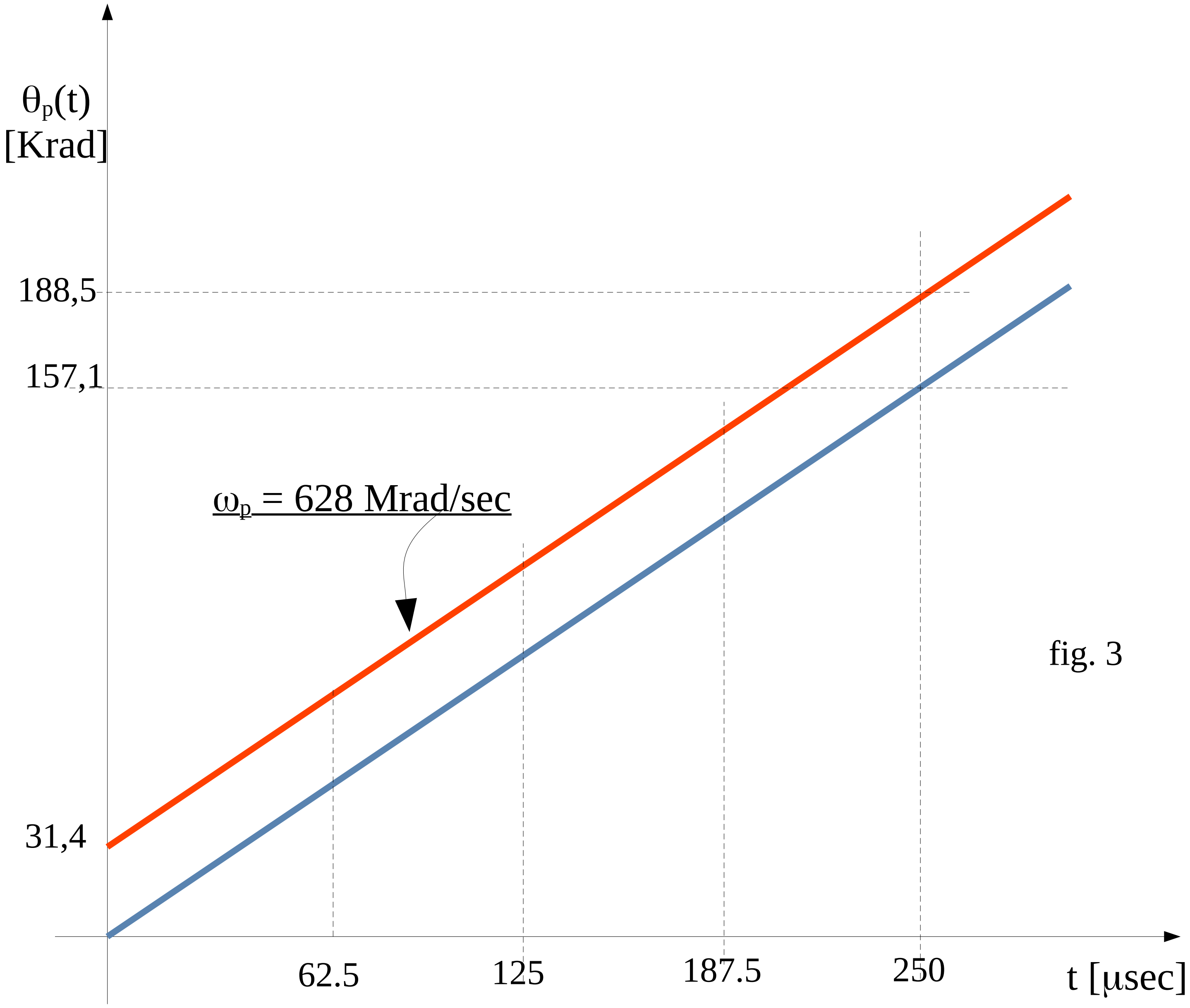


fig. 3

Nel diagramma in azzurro abbiamo fatto l'ipotesi che sia $\theta_0 = 0$ (fase iniziale nulla) mentre nel diagramma in rosso abbiamo fatto l'ipotesi che sia $\theta_0 = 5000$ ag (ovvero cinquemila giri ovvero una fase di 31,4 Krad). Entrambi sono caratterizzati dalla stessa pulsazione, ma hanno fasi iniziali diverse. La pulsazione è la pendenza della caratteristica. Ed è costante, dunque la caratteristica è **lineare**.

Bene. Quanto detto sopra è un caso particolarmente semplice. Abbiamo fatto l'ipotesi che il segnale modulante sia nullo, che sia cioè $v_m(t) = 0$. Allora risulta $\omega_{FM}(t) = \omega_p$ e dunque la pulsazione del segnale modulato **non** subisce alterazioni; cioè NON è modulato.

Potremmo anche dire che la frequenza del segnale modulato varrebbe: $f_{FM}(t) = f_p$; e sarebbe dunque costante. Cioè NON sarebbe modulata. Per inciso, potremmo parlare indifferentemente di frequenza oppure di pulsazione data la nota relazione esistente fra le due grandezze:

$$\omega_{FM}(t) = 2\pi \cdot f_{FM}(t) \qquad [5]$$

dove la prima grandezza è la pulsazione istantanea del segnale modulato mentre la seconda è la frequenza istantanea del segnale modulato.

Qualsiasi intervallo di osservazione volessimo scegliere, noteremmo che il segnale emesso dal modulatore impiega sempre lo stesso intervallo di tempo per compiere un ciclo, e questo vale: $T_p = 1/f_p$ e coincide con il periodo della portante. Nel nostro esempio, $T_p = 1/f_p = 1/100\text{MHz} = 10$ ns (nanosecondi). Perciò la forma del segnale modulato è quella di una sinusoide, ovvero il segnale NON è modulato.

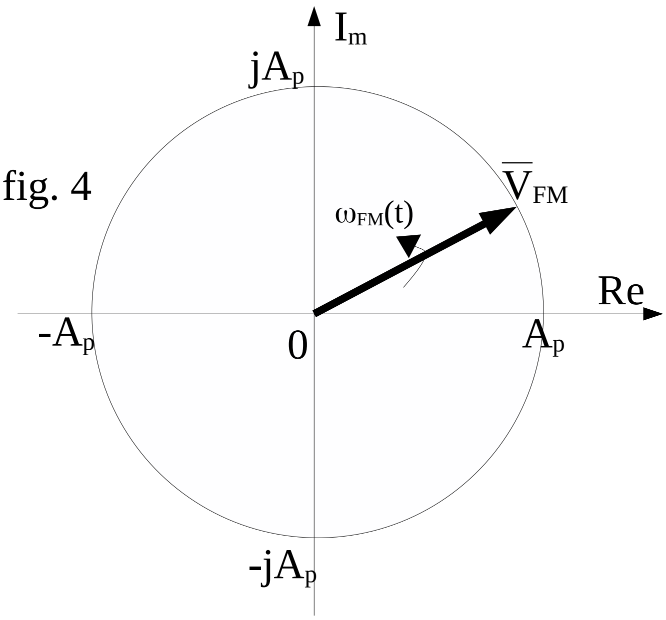
Quando invece il segnale modulante **non** è nullo, allora accade che la frequenza emessa dal modulatore non è più costante. Cioè non è più vero che sia: $f_{FM}(t) = f_p$ bensì la frequenza del segnale emesso in ogni istante dal modulatore dipende dal valore del segnale modulante in quello stesso istante:

$$f_{FM}(t) = f_p + K_f \cdot v_m(t) \qquad [6]$$

dove la costante K_f viene chiamata **sensibilità** del modulatore e lo caratterizza.

Non ci interessa per il momento sapere come ciò avvenga, in quale modo sia realizzato il circuito elettronico che esegue questo compito. Per ora diciamo solo che il modulatore funziona in questo modo: la frequenza istantanea del segnale modulato cambia in continuazione seguendo l'andamento istantaneo del segnale modulante, cioè seguendo le variazioni istantanee dell'ampiezza del segnale $v_m(t)$. Quando quest'ultimo ha valori di ampiezza positivi accade che la frequenza istantanea del segnale modulato è maggiore di f_p ovvero il vettore del segnale modulato gira nel piano complesso ad una velocità maggiore del normale. Mentre invece se dovesse

fig. 4



accadere che il segnale modulante diventa negativo, allora la frequenza istantanea del segnale modulato diventa minore di f_p .

Cioè il vettore del segnale modulato gira nel piano complesso ad una velocità minore del normale, se $v_m(t) < 0$. Si dice anche che f_p è la frequenza del segnale modulato a riposo, ovvero la frequenza di free-running oppure la frequenza emessa quando l'ingresso del modulatore è a massa ossia quando $v_m(t) = 0$. Ed ovviamente tale valore di frequenza coincide con la frequenza della portante. La situazione della figura 4 è simile alla precedente. L'ampiezza del vettore $\overline{V}_{FM}$ rimane costante e vale A_p ma ora la velocità angolare $\omega_{FM}(t)$ con la quale ruota il vettore del segnale modulato non è più costante, bensì cambia in continuazione poiché dipende dall'ampiezza che ha il segnale modulante $v_m(t)$ nell'istante in cui lo osserviamo.

Diamo ora un esempio che possa colpire l'immaginazione. Questo è quanto accadrebbe se usassimo un ventilatore con regolazione continua della velocità: agendo sulla apposita manopola potremmo far ruotare le pale dell'elica ora velocemente ed ora lentamente, a seconda del comando che noi impartiamo. Se poi immaginassimo di usare una cesoia per tagliare all'elica tutte le sue pale tranne una, ecco che avremmo un vettore rotante a velocità variabile. Il ventilatore viene appoggiato su di un tavolo, ed al di sopra di esso un lampadario proietta la sua luce sul tavolo. La pala superstite dell'elica proietta un'ombra sul tavolo. L'ombra costituisce un segmento che si allunga e si accorcia, estendendosi a destra ed anche a sinistra dell'origine. Ma non potremmo più dire che l'andamento della sua ampiezza istantanea nel tempo abbia forma sinusoidale. Per quale motivo? Perché una sinusoide (od anche una cosinusoide) ha un periodo costante, ma il nostro segnale modulato non ha più un periodo fisso. Infatti, l'intervallo di tempo impiegato dal vettore $\overline{V}_{FM}$ per compiere un giro completo attorno all'origine dipende da come noi vogliamo agire sulla manopola di regolazione del nostro ventilatore.

Detto fuori metafora: dipende dall'ampiezza istantanea del segnale modulante.

Perciò il tempo impiegato dal segnale modulato per compiere un ciclo (una semionda positiva seguita da una semionda negativa) non si può più dire costante, non vale più

$$T_p = 1/f_p = 1/100\text{MHz} = 10 \text{ ns}$$

come accadeva nell'esempio iniziale. Invece ora accade che il tempo impiegato per compiere un ciclo può variare tra un certo valore massimo ed un certo valore minimo. Ad esempio, potrebbe essere T_{max} = 12 ns e T_{min} = 8 ns e questo accadrebbe in dipendenza del fatto che il segnale modulante raggiunga la sua massima ampiezza positiva oppure la sua minima ampiezza negativa. Proviamo a rileggere la [6] ovvero l'espressione della frequenza istantanea del segnale modulato:

$$f_{FM}(t) = f_p + K_f \cdot v_m(t) \qquad [6]$$

Va da sé che la costante K_f presente nella [6] avrà come unità di misura Hertz/Volt dato che $v_m(t)$ è espresso in Volt ed entrambi gli addendi al secondo membro dell'equazione [6] devono essere espressi in Hertz. Volendo ottenere la pulsazione istantanea del segnale modulato basterà moltiplicare per 2π la sua frequenza istantanea ottenendo:

$$\omega_{FM}(t) = 2\pi \cdot f_{FM}(t) = 2\pi \cdot [f_p + K_f \cdot v_m(t)] = 2\pi \cdot f_p + 2\pi \cdot K_f \cdot v_m(t) = \omega_p + K_\omega \cdot v_m(t) \qquad [7]$$

dove la costante K_ω viene ancora chiamata sensibilità del modulatore. La differenza fra K_f e K_ω sta nel fatto che K_f ha come unità di misura Hertz/Volt mentre K_ω avrà come unità di misura (rad/sec)/Volt e sarà ovviamente :

$$K_\omega = 2\pi \cdot K_f \qquad [8]$$

Qual è il significato della sensibilità?

K_f indica di quanti Hertz aumenta la frequenza del segnale modulato per ogni Volt in più del segnale modulante. Mentre invece K_ω indica di quanti rad/sec aumenta la pulsazione del segnale modulato per ogni aumento di un Volt dell'ampiezza istantanea del segnale modulante.

Ora, poiché in ingresso si presenta un segnale $v_m(t) = A_m\cos(\omega_m t)$ la cui ampiezza istantanea cambia in continuazione, di conseguenza il segnale emesso dal modulatore NON ha una frequenza costante (potremmo anche parlare di pulsazione costante) bensì una frequenza che aumenta per poi diminuire, essendo il segnale modulante una cosinusoide il cui picco massimo vale $+A_m$ mentre il picco minimo vale $-A_m$.

Chiaramente questo NON è un caso reale: nessuno applicherebbe mai all'ingresso di un modulatore un segnale prevedibile come questo dato che non si trasmetterebbe alcuna informazione. Tutte queste ipotesi sono state fatte al solo scopo di semplificare i calcoli che verranno più avanti. Sempre nell'ipotesi semplificativa che sia

$v_m(t) = A_m\cos(\omega_m t)$ possiamo dire che quando $v_m(t)$ raggiunge il suo picco massimo positivo $+A_m$ allora la frequenza f_{FM} del segnale emesso dal modulatore raggiungerà anch'essa il valore massimo possibile, ed esso varrà:

$$f_{Max} = f_p + K_f \cdot A_m = f_p + \Delta f_{FM} \qquad [9]$$

$$\text{dove} \qquad \Delta f_{FM} = \Delta f = K_f \cdot A_m \qquad [10]$$

viene chiamata deviazione massima di frequenza del segnale modulato . Sarebbe più preciso indicarla come $\pm\Delta f_{FM}$ ma nel caso non vi sia possibilità di equivoco talvolta viene indicata semplicemente con Δf e viene chiamata deviazione di frequenza senza specificare altro. Ma solo nei casi in cui non vi sia pericolo di ambiguità. In effetti il segnale modulante $v_m(t)$ raggiunge talvolta anche il suo picco minimo negativo $-A_m$ ed in quel caso la frequenza f_{FM} del segnale emesso dal modulatore raggiungerà anch'essa il valore minimo possibile, ed esso varrà:

$$f_{min} = f_p - K_f \cdot A_m = f_p - \Delta f_{FM} = f_p - \Delta f \qquad [11]$$

Ecco per quale motivo sarebbe più preciso indicarla come $\pm\Delta f_{FM}$. In effetti la deviazione avviene sia in positivo che in negativo. Per inciso, nelle trasmissioni FM commerciali la deviazione di frequenza è limitata dalle norme a ± 75 KHz al massimo. È possibile tarare il trasmettitore in modo che Δf_{FM} abbia un valore minore, ad esempio 30 o 40 KHz ma in tal caso ne risentono le prestazioni. Si ottiene un rapporto segnale/rumore SNR inferiore ed ovviamente nessuno desidera questo. Va da sé che l'occupazione di banda di un segnale FM sarà certamente **molto** maggiore del caso AM. Come si può notare dalla tabella seguente, nella quale sono indicati i valori previsti dalle norme nazionali ed internazionali per i principali parametri dei segnali modulati nei due casi (AM ed FM).

Tab. 1

Parametri normati trasmissioni AM/FM	
AM	FM
$f_{min\ servizio} = 525KHz$	$f_{min\ servizio} = 87{,}5\ MHz$
$f_{max\ servizio} = 1615\ KHz$	$f_{max\ servizio} = 108\ MHz$
$f_{modulante} \leq 4{,}5KHz$	$f_{modulante} \leq 15KHz$
$m \leq 1$	$\Delta f_{FM} \leq 75KHz$
$B_{netta} \leq 9KHz$	$B_{netta} \leq 180KHz$
$B_{lorda} \leq 10KHz$	$B_{lorda} \leq 200KHz$

Nella tabella 1 sono riportati i principali parametri di riferimento dei due tipi fondamentali di modulazioni analogiche: AM ed FM ad uso commerciale, che devono essere rispettati.

Per il servizio AM è stato riservato l'intervallo di frequenze da circa 0,5MHz a circa 1,6MHz ed ogni canale radio AM può occupare una banda (detta banda netta) fino al massimo di 9KHz. Le portanti in AM sono distanziate fra loro di 10 KHz (detto passo di canalizzazione, od anche banda lorda) e ciò consente di evitare che due emittenti con portanti adiacenti possano disturbarsi a vicenda nel caso che uno od entrambi gli oscillatori dovessero slittare in frequenza e dunque non fornissero portanti con frequenze esattamente coincidenti con i valori nominali assegnati.

Infatti sia nel lato della USB che nel lato della LSB è prevista una GB (banda di guardia) di 500 Hz e ciò consente una certa tolleranza nella taratura del trasmettitore.

Per la FM la situazione è molto diversa. Per il servizio FM è stato riservato l'intervallo di frequenze da circa 88MHz a 108MHz ed ogni canale radio FM può occupare una banda (netta) fino al massimo di 180KHz. Le portanti in FM sono distanziate fra loro di 200 KHz (detto passo di canalizzazione o banda lorda) e ciò consente di evitare che due emittenti con portanti adiacenti possano disturbarsi a vicenda nel caso che uno od entrambi gli oscillatori dovessero slittare in frequenza e dunque non fornissero portanti con frequenze esattamente coincidenti con i valori nominali assegnati. Infatti sia nel lato della USB che nel lato della LSB è prevista una GB (banda di guardia) di 10KHz e ciò consente una certa tolleranza nella taratura del trasmettitore.

Ricapitolando: in FM quando il segnale modulante $v_m(t)$ assume valori positivi allora il segnale modulato $v_{FM}(t)$ aumenta la sua frequenza, ed il suo vettore $\overline{V}_{FM}$ ruota più velocemente del normale. Perciò il tempo impiegato per concludere un giro attorno all'origine è minimo ed in tale circostanza il segnale modulato $v_{FM}(t)$ impiegherà il minimo tempo possibile per compiere un ciclo, e tale tempo vale:

$$T_{min} = 1/f_{Max} \qquad [12]$$

dove $$f_{Max} = f_p + K_f \cdot A_m = f_p + \Delta f_{FM} \qquad [9]$$

Quando invece accade che $v_m(t)$ raggiunge il suo picco minimo negativo $-A_m$ allora la frequenza f_{FM} del segnale emesso dal modulatore raggiungerà anch'essa il valore minimo possibile, ed esso vale:

$$f_{min} = f_p - K_f \cdot A_m = f_p - \Delta f_{FM} = f_p - \Delta f \qquad [11]$$

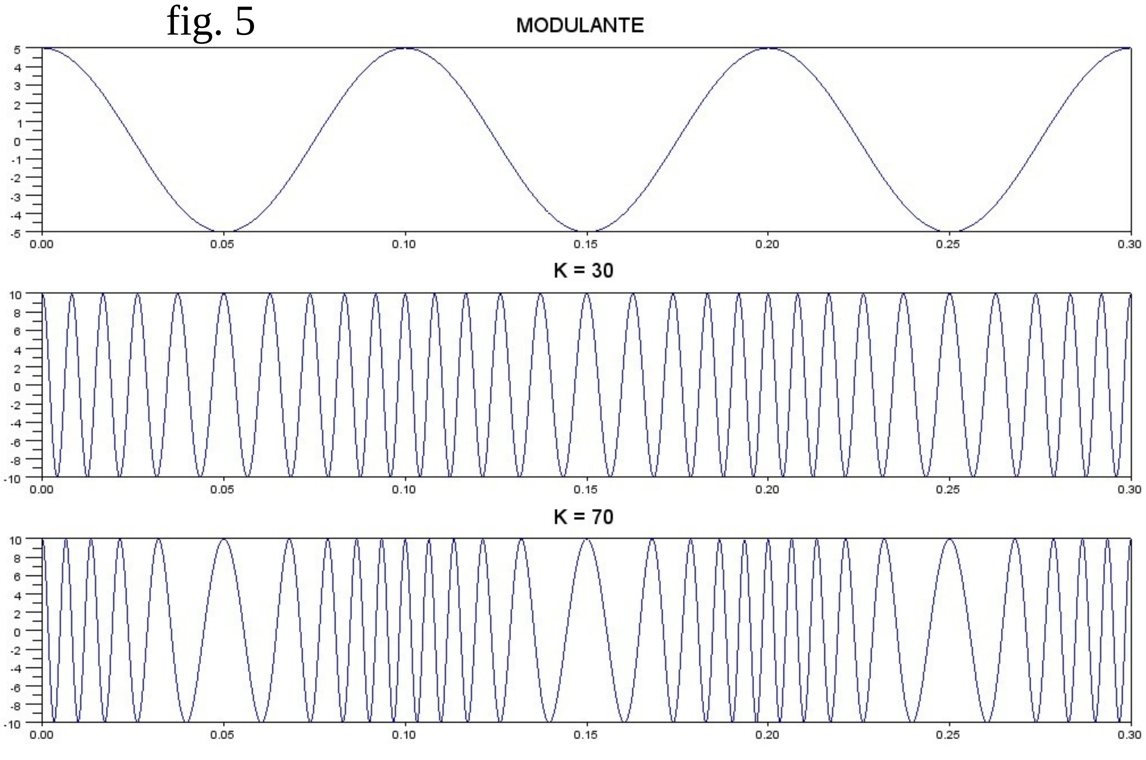
In tale circostanza il segnale modulato $v_{FM}(t)$ impiegherà il massimo tempo possibile per compiere un ciclo, e tale tempo vale:

$$T_{max} = 1/f_{min} \qquad [13]$$

$$\text{dove } f_{min} = f_p - K_f \cdot A_m = f_p - \Delta f_{FM} \qquad [11]$$

Possiamo dire che il segnale modulato NON è una sinusoide, dato che il tempo impiegato per compiere un ciclo (semionda positiva seguita da semionda negativa) NON è sempre lo stesso ma cambia in continuazione passando da un valore minimo T_{min} ad uno massimo T_{max} . Insomma guardando l'andamento del segnale modulato nel dominio del tempo possiamo dire che esso non assomiglia tanto ad una sinusoide, quanto piuttosto ad una specie di "fisarmonica" le cui spire si allargano e si restringono in continuazione. Come si può notare nelle figure alle pagine seguenti. Il fatto di avere una forma così particolare fa sì che calcolandone la serie di Fourier si scoprono moltissime armoniche e non certo una sola riga laterale superiore ed una sola riga laterale inferiore come accadeva in AM. É intuitivo che lo spettro del segnale FM avrà una banda molto più larga di quello AM. Sicuramente avere un segnale modulato a banda larga fa aumentare i costi, ma per fortuna abbiamo anche un risvolto positivo di cui parleremo più avanti.

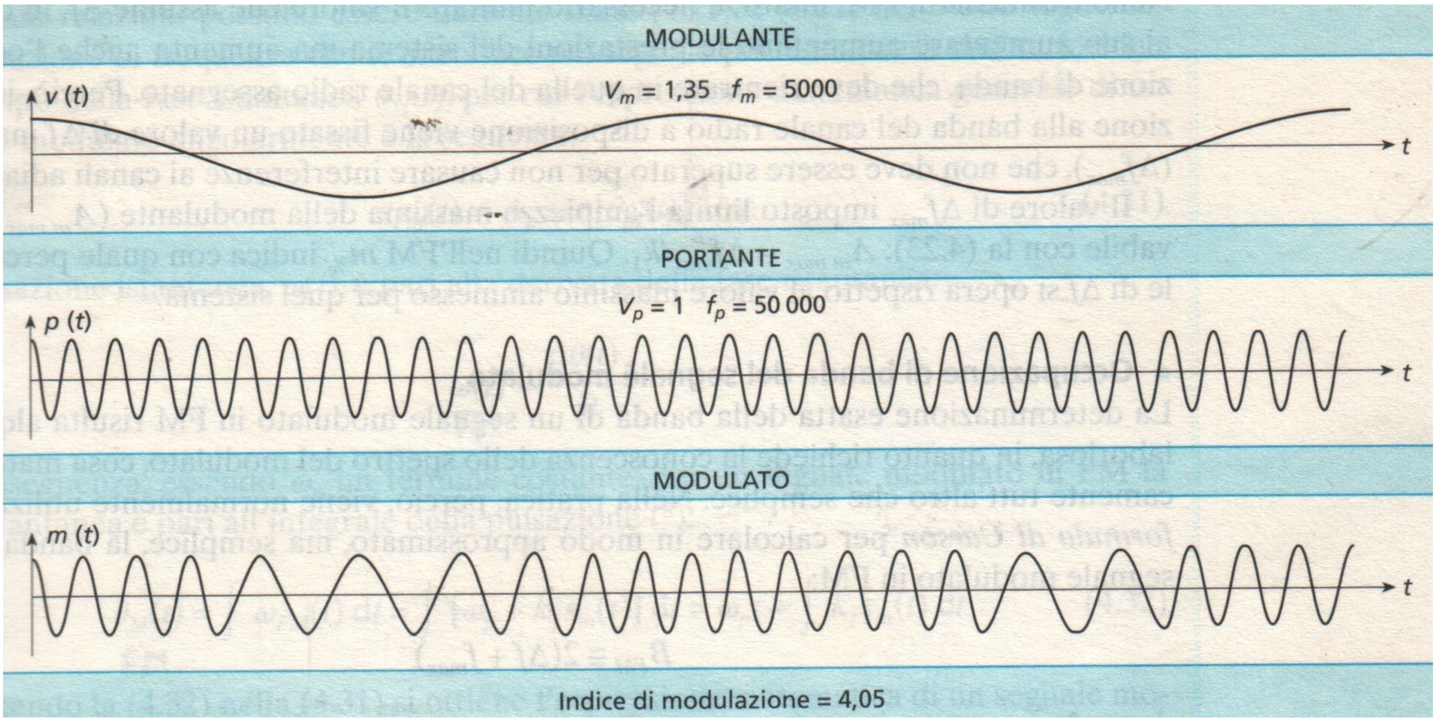
fig. 5



Nella figura 5 si può notare, in alto, l'andamento cosinusoidale a bassa frequenza del segnale modulante $v_m(t) = A_m\cos(\omega_m t)$ mentre in basso si può notare l'andamento istantaneo del segnale modulato $v_{FM}(t)$ ottenuto con una sensibilità piuttosto alta. Al centro invece abbiamo sempre l'andamento istantaneo del segnale modulato $v_{FM}(t)$ ma ottenuto con una sensibilità minore. Ed infatti la differenza fra T_{max} e T_{min} è meno evidente.

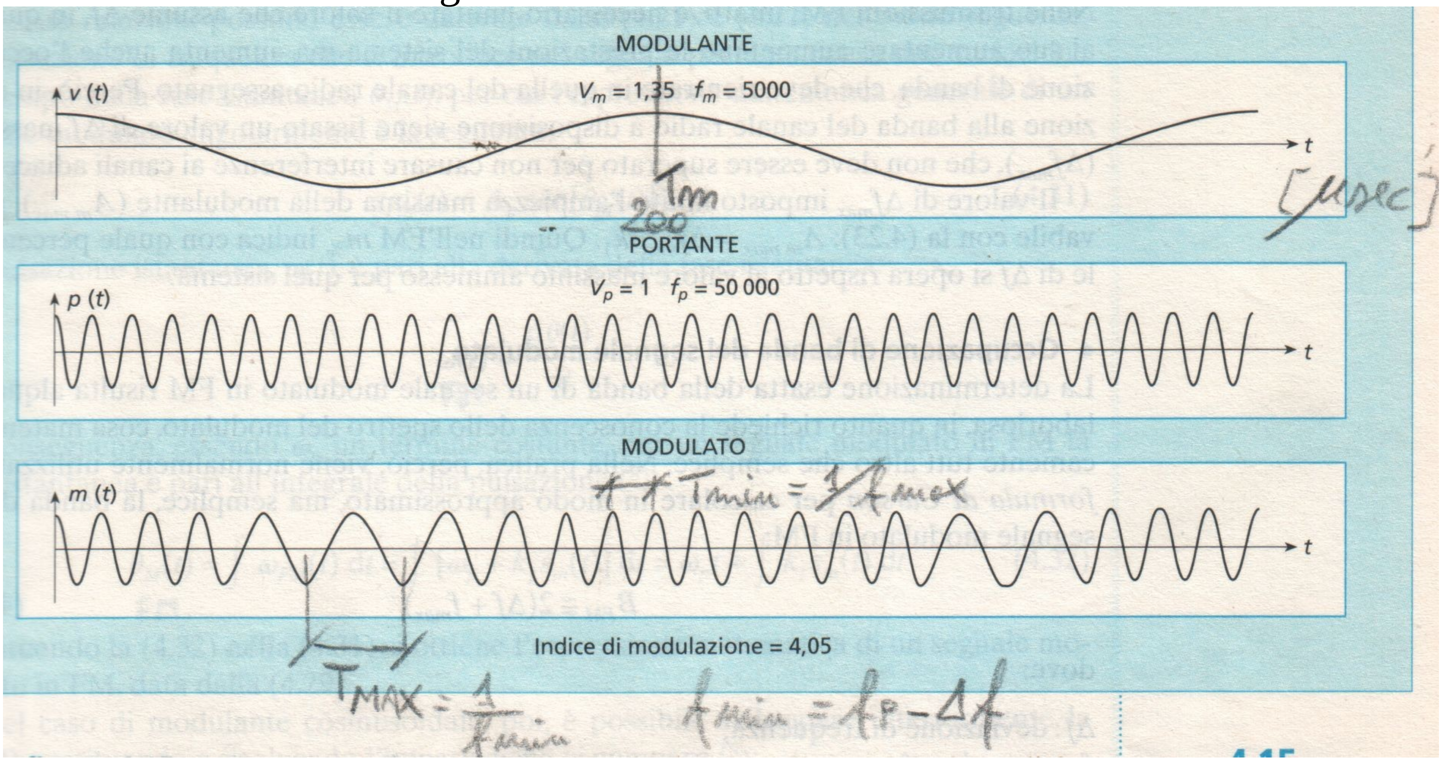
Invece nella figura seguente [fig. 6] si può notare, in alto, l'andamento cosinusoidale a bassa frequenza del segnale modulante $v_m(t) = A_m\cos(\omega_m t)$ mentre in basso si può notare l'andamento istantaneo del segnale modulato $v_{FM}(t)$ ed al centro abbiamo l'andamento istantaneo della portante $v_p(t)$. Purtroppo la nomenclatura dei segnali adottata nella figura 6 è assolutamente da sconsigliare.

fig. 6



Potremmo mettere in evidenza alcuni parametri aggiungendo qualche nota a matita sulla figura precedente.

fig. 7



Infatti nella figura qui sopra [fig. 7] si può notare che sono state aggiunte alcune indicazioni utili. Il segnale modulante $v_m(t) = A_m\cos(\omega_m t) = A_m\cos(2\pi f_m t)$ è caratterizzato dal valore della sua frequenza f_m (che è piuttosto bassa) oppure dal suo periodo:

$T_m = 1/f_m$ ed in questo esempio, evidentemente, abbiamo $T_m = 200$ microsecondi.

T_m è il periodo del segnale modulante mentre f_m è la frequenza del segnale modulante.

Qui la differenza fra la durata massima e minima del ciclo del segnale modulato (ovvero fra T_{max} e T_{min}) è ben visibile ed evidente.

Nella figura seguente [fig. 8] si può notare che nella parte superiore sono stati sovrapposti i grafici del segnale portante (carrier) e di quello modulante (signal) mentre in basso è stato riportato l’andamento istantaneo del segnale modulato (output). È immediato notare che il segnale modulante — in rosso — non è affatto sinusoidale o cosinusoidale ma ha un andamento arbitrario, e che sarebbe oltremodo difficile poterlo ricostruire a partire dal segnale modulato (in blu) anche se osservando quest’ultimo si può notare che durante i picchi negativi della modulante si ha la minima frequenza istantanea del modulato, mentre durante i picchi positivi della modulante si ha la massima frequenza istantanea del modulato.

Quanto poi ad effettuare l'operazione di demodulazione, questo richiederà una analisi molto più approfondita.
Nel seguito ci occuperemo di descrivere in modo più dettagliato il segnale modulato, ma per evitare di appesantire eccessivamente il problema dovremo ripristinare le ipotesi semplificative già fatte all'inizio e dunque rimandare casi più realistici come questo
[fig. 8] a più tardi.

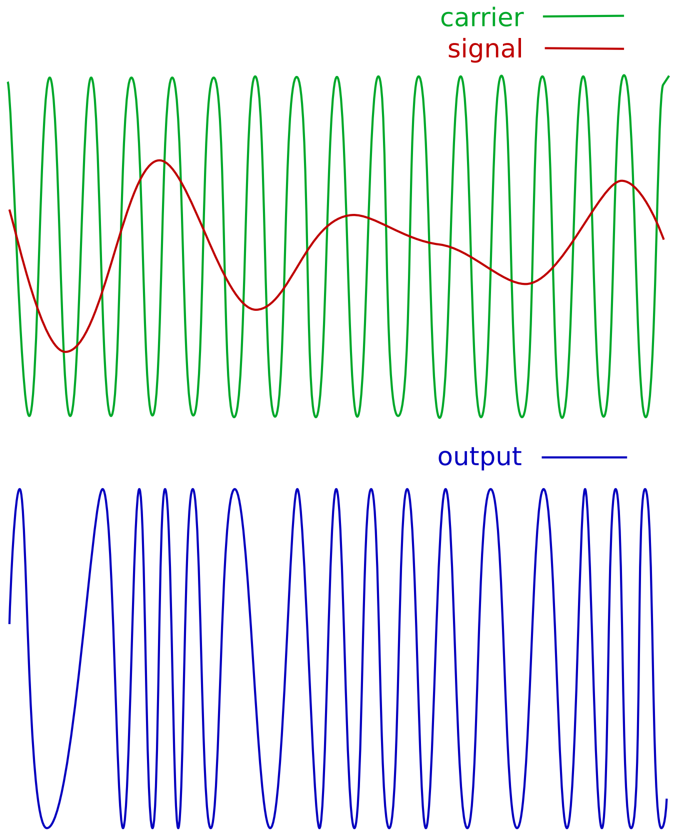


fig. 8

Possiamo notare una cosa, che è evidente dai diagrammi appena visti: i picchi massimi e minimi del segnale modulato FM hanno sempre la stessa ampiezza —come era facile prevedere dalle formule analitiche— e dunque la potenza del segnale modulato FM è uguale a quella del segnale non modulato, ossia della portante. Cosa che invece non avveniva nel caso della modulazione AM nella quale le bande laterali USB ed LSB si **aggiungevano** alla portante dando così un contributo alla potenza totale del segnale modulato. Questa è una differenza notevole fra i due tipi di modulazioni AM ed FM ma non certo l'unica. In seguito bisognerà spiegare come mai la potenza del segnale modulato FM non cambia anche aumentando o diminuendo l'ampiezza del segnale modulante.
Fino ad ora abbiamo visto cosa accade —dal punto di vista delle espressioni analitiche dei segnali— quando il segnale modulante $v_m(t)$ vale sempre zero: $v_m(t) = 0$ comporta come conseguenza che $\omega_{FM}(t) = \omega_p$ e dunque la fase del segnale modulato $\theta_{FM}(t)$ coincide sempre con la fase della portante ovvero:

$$\theta_{FM}(t) = \theta_p(t) = \omega_p \cdot t \qquad [14]$$

(nell'ipotesi che sia nulla la fase iniziale θ_0) e dunque l'andamento di $\theta_{FM}(t)$ è **lineare**, come già visto nel diagramma di fig. 3 ; ma se invece accade che sia:

$$v_m(t) = A_m\cos(\omega_m t)$$

allora **non** è più vero che sia $\theta_{FM}(t) = \theta_p$ ma accade invece che la [6] assuma una forma particolare ovvero:

$$\begin{aligned} f_{FM}(t) &= f_p + K_f \cdot v_m(t) = f_p + K_f \cdot A_m\cos(\omega_m t) = \\ &= f_p + \Delta f_{FM} \cdot \cos(\omega_m t) = f_p + \Delta f \cdot \cos(\omega_m t) \qquad [15] \end{aligned}$$

dove $\Delta f = K_f \cdot A_m$ è la (massima) **deviazione di frequenza** del segnale modulato; e di conseguenza avremo la pulsazione istantanea del segnale modulato:

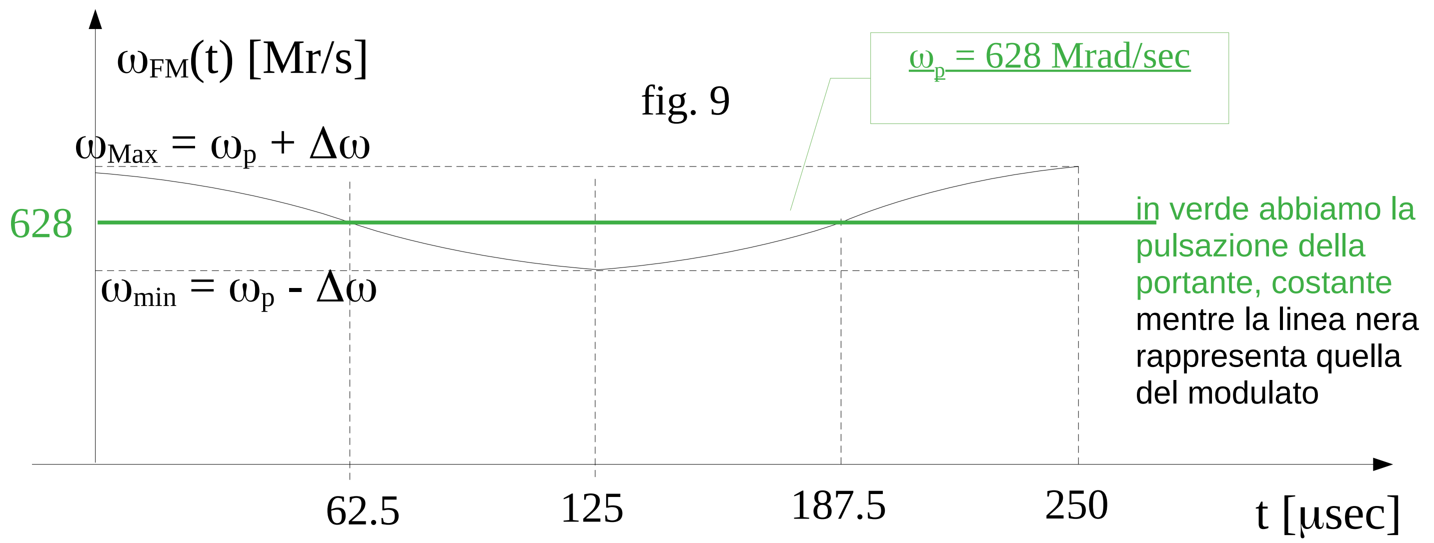
$$\begin{aligned} \omega_{FM}(t) &= \omega_p + K_\omega \cdot v_m(t) = \omega_p + K_\omega \cdot A_m\cos(\omega_m t) = \\ &= \omega_p + \Delta\omega_{FM} \cdot \cos(\omega_m t) = \omega_p + \Delta\omega \cdot \cos(\omega_m t) \qquad [16] \end{aligned}$$

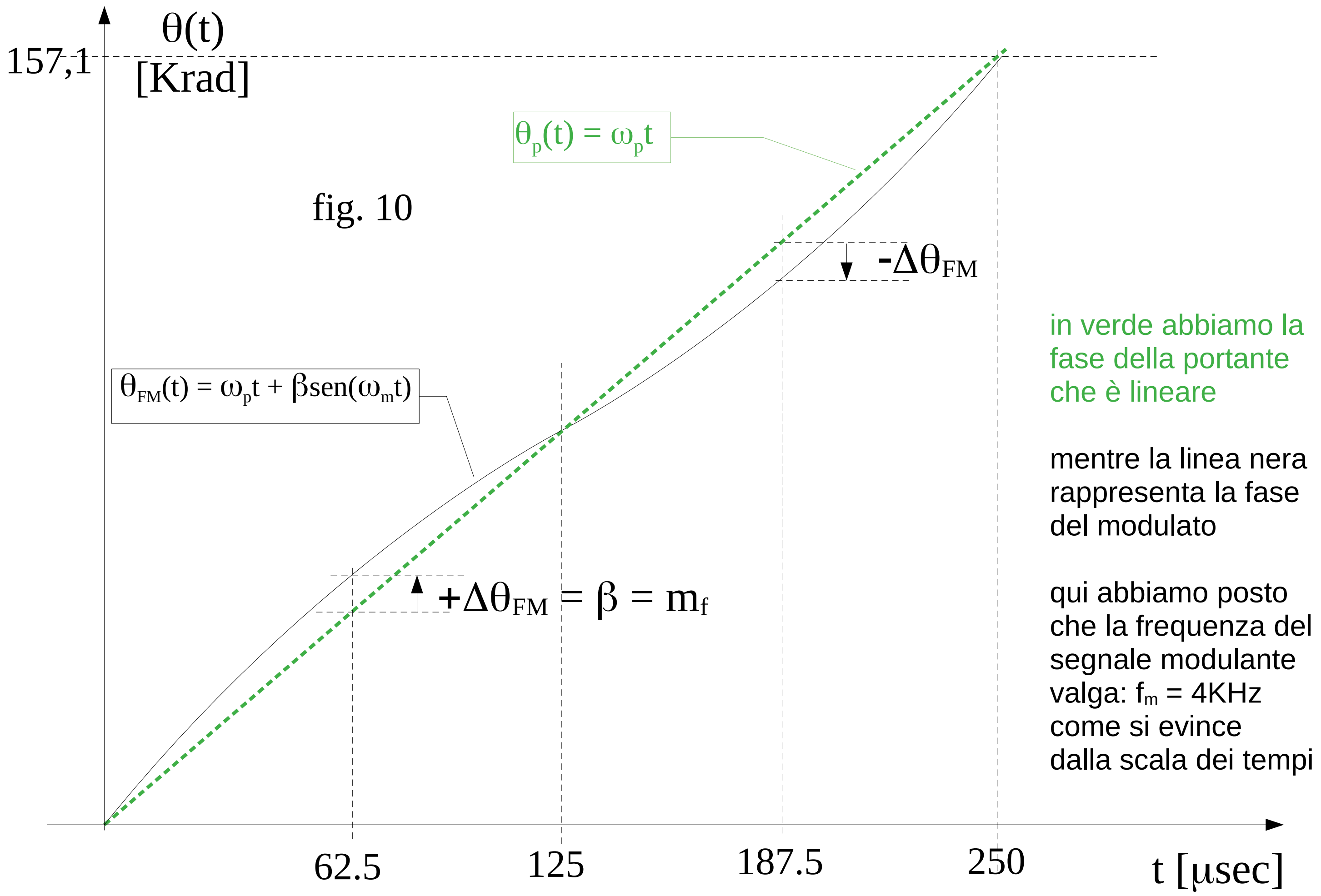
dove $\Delta\omega = K_\omega \cdot A_m$ è la deviazione (massima) di pulsazione del segnale modulato.

Nei diagrammi di fig. 9 e 10 alla pagina seguente abbiamo mantenuto le impostazioni fatte in precedenza nella fig. 3.

Ovviamente le grandezze $\theta_{FM}(t)$ ed $\omega_{FM}(t)$ —che rappresentano rispettivamente la fase e la pulsazione istantanee del segnale modulato— sono strettamente correlate fra loro, in quanto la pulsazione è la derivata della fase rispetto al tempo, mentre la fase è l'integrale della pulsazione nel tempo. Con una analogia evidente rispetto al caso di moto lineare di un oggetto, nel quale le grandezze s(t) e v(t) —che rappresentano rispettivamente la posizione e la velocità istantanea dell'oggetto— sono strettamente correlate fra loro, in quanto la velocità è la derivata della posizione rispetto al tempo, mentre la posizione è l'integrale della velocità nel tempo.

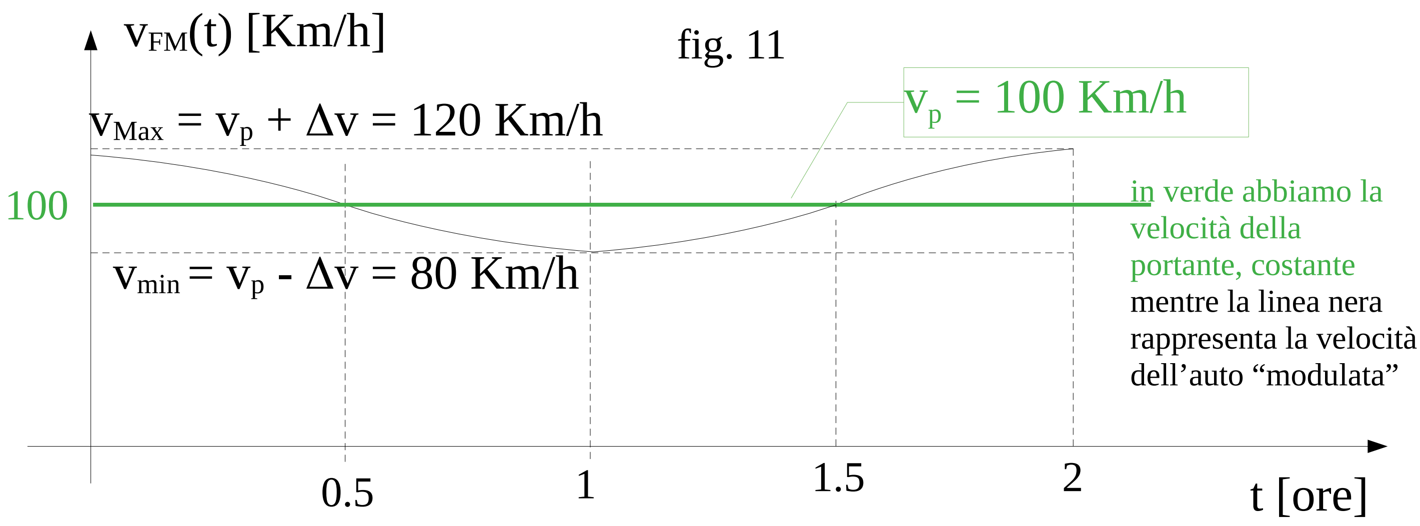
Ma è molto più intuitivo osservare direttamente gli andamenti delle grandezze caratteristiche (fase e pulsazione) dei segnali nei diagrammi di fig. 9 e 10 alla pagina seguente.

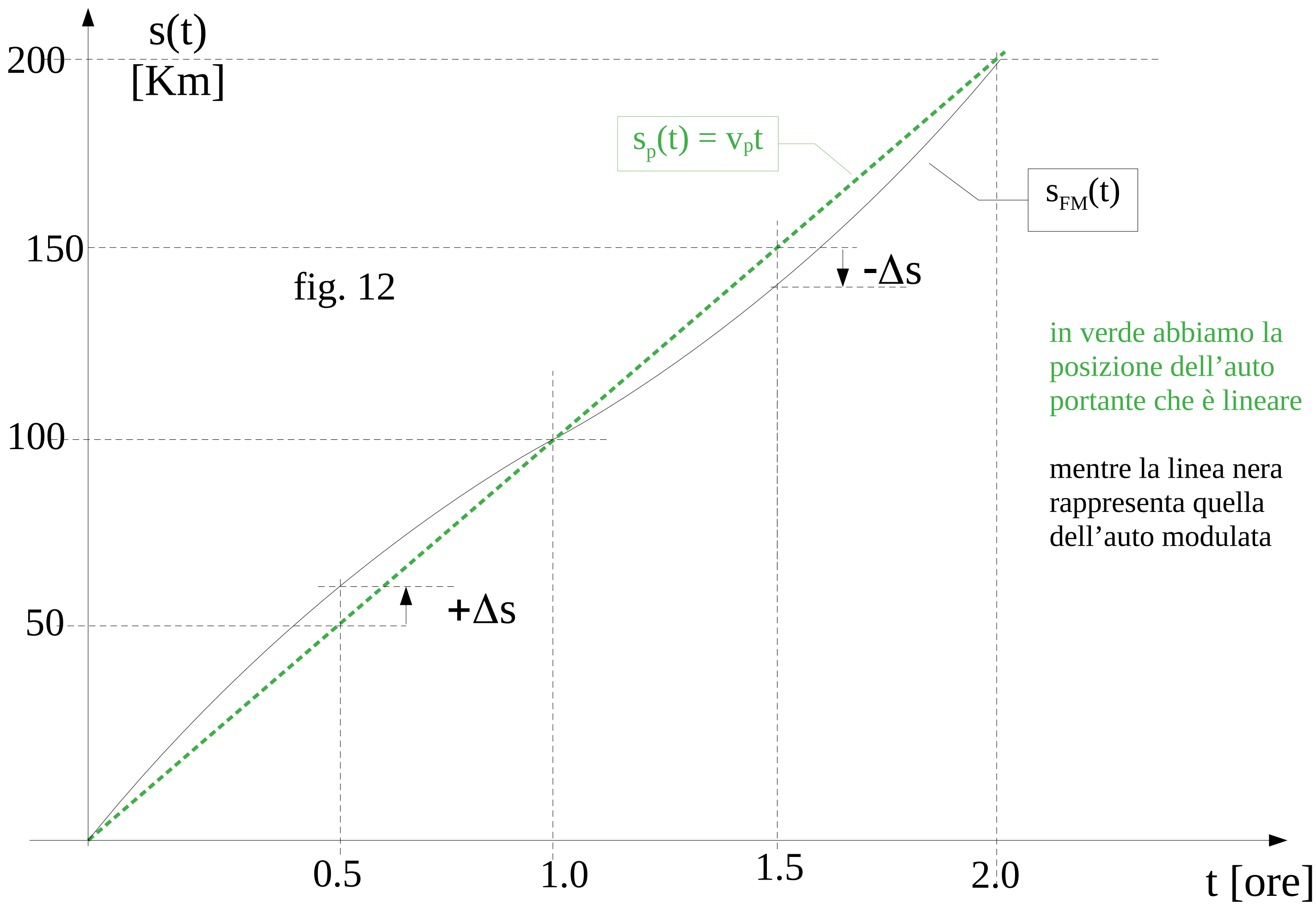




Esaminiamo ora più in dettaglio la correlazione fra le grandezze $\theta_{FM}(t)$ ed $\omega_{FM}(t)$ —che rappresentano rispettivamente la fase e la pulsazione istantanee del segnale modulato. Si tratta di una relazione di tipo differenziale in quanto la pulsazione è la derivata della fase rispetto al tempo, mentre la fase è l'integrale della pulsazione nel tempo.

Con una analogia evidente rispetto al caso di moto lineare di un oggetto, nel quale le grandezze s(t) e v(t) —che rappresentano rispettivamente la posizione e la velocità istantanea dell'oggetto— sono strettamente correlate fra loro, in quanto la velocità è la derivata della posizione rispetto al tempo, mentre la posizione è l'integrale della velocità nel tempo. I diagrammi di fig. 11 e 12 sono analoghi ai precedenti 9 e 10.





Immaginiamo di viaggiare da Rovereto a Milano su di una autostrada perfettamente diritta, con un'auto verde detta portante, alla velocità costante v_p = 100 Km/h ed accorgerci che dopo 2 ore siamo arrivati a destinazione, avendo percorso uno spazio di 200 Km.

Supponiamo che all'inizio del viaggio, dal casello autostradale di Rovereto parta anche un nostro amico sulla sua auto nera, il quale all'inizio schiaccia un po' di più l'acceleratore e parte a 120 Km/h anziché a 100 come facciamo noi. Ovviamente lo vediamo allontanarsi, e ben prima di Borghetto non lo vediamo più. Essendo un autista stravagante, il nostro amico rilascia pian piano l'acceleratore e dopo un'ora dalla partenza l'auto nera viaggia a soli 80Km/h in quanto la velocità dell'auto nera — detta anche auto modulata — non è costante bensì consiste di un addendo costante (pari a 100 Km/h) ed un addendo variabile in modo cosinusoidale, che nei momenti migliori arriva a $+\Delta v$ = +20 Km/h mentre nei momenti peggiori arriva a $-\Delta v$ = -20 Km/h . Facilmente possiamo intuire che dopo mezz'ora dall'istante zero (la partenza) il nostro amico viaggia alla nostra stessa velocità di 100 Km/h ma nel frattempo ha accumulato un vantaggio $+\Delta s$ di alcuni chilometri. Ora però rallenta a 99 e poi 98 … e dopo un'ora lo superiamo dato che la nostra auto verde mantiene sempre i 100 Km/h mentre quella nera viaggia a soli 80Km/h e si è fatta ormai raggiungere e superare.

Adesso, dopo un'ora dalla partenza, l'auto nera accelera fino a 81 Km/h e poi 82, 83, … ma noi sull'auto verde siamo più veloci (100Km/h) e riusciamo a distanziarlo di alcuni chilometri, tanto che dopo 1,5 h dalla partenza l'auto nera (modulata) è in ritardo di posizione $-\Delta s$ rispetto all'auto verde (portante). Inutile raccontare come finisce il viaggio: arriviamo a destinazione insieme al nostro amico, e dunque la sua velocità **media** vale esattamente quanto la nostra, e cioè 100 Km/h. Anche se lui taglia il traguardo a 120 Km/h e non a 100 come facciamo noi.

Possiamo notare un fatto: lo spazio percorso è l'area che sta al di sotto del grafico velocità/tempo e nel caso la velocità sia costante, ci ritroviamo a calcolare lo spazio percorso come l'area di un rettangolo: base per altezza.

Se invece la velocità è variabile allora per trovare lo spazio percorso dobbiamo fare una vera e propria integrazione, dobbiamo usare il calcolo integrale.

Nel caso non fosse il nostro forte, possiamo ripiegare sul calcolo differenziale per verificare se la soluzione che ci verrà proposta è plausibile oppure no.

Diciamo dunque che la velocità è la derivata della posizione rispetto al tempo, ossia è la derivata dello spazio percorso rispetto al tempo, ovvero:

$$v(t) = s'(t)$$

dove l'apice indica l'operatore di derivazione.

Oppure possiamo scrivere:

$$v(t) = ds(t)/dt$$

se vogliamo mettere in evidenza il rapporto incrementale.

Supponiamo di considerare la funzione

$$y = sen(x)$$

e volerne calcolare la derivata rispetto ad x: sarà:

$$y' = cos(x).$$

Supponiamo di considerare la funzione

$$y = sen(kx)$$

e volerne calcolare la derivata: sarà

$$y' = kcos(kx)$$

Per quale motivo abbiamo fatto l'esempio precedente delle due automobili che partono da Rovereto? Perché è più facile da comprendere rispetto al fare l'esempio di due vettori rotanti, ovvero il vettore della portante $\overline{V}_p$ e quello del segnale modulato $\overline{V}_{FM}$. In effetti abbiamo una notevole somiglianza tra le equazioni del moto lineare e quelle del moto rotatorio.

Moto lineare: $v(t) = s'(t)$

la velocità lineare è la derivata dello spazio percorso rispetto al tempo

Moto rotatorio: $\omega(t) = \theta'(t)$

la velocità angolare è la derivata della fase percorsa rispetto al tempo

Consideriamo dunque il vettore rotante del segnale modulato FM la cui pulsazione cambia in continuazione. Supponiamo che qualcuno ci dica che la sua fase vale:

$$\theta_{FM}(t) = \omega_p \cdot t + \beta sen(\omega_m \cdot t) \qquad [17]$$

dove $\beta = \Delta f/f_m = K_f \cdot A_m/f_m$

oppure anche $\beta = \Delta\omega/\omega_m = K_\omega \cdot A_m/\omega_m$

(e **β è un parametro sul quale discuteremo)**.

Supponiamo di voler verificare se questo suggerimento è vero oppure falso. Proviamo a calcolare la derivata della fase rispetto al tempo: $\theta'_{FM}(t) = ?$ Poiché $\theta_{FM}(t)$ è data dalla somma di due addendi possiamo calcolare la derivata di ciascun addendo. Ovviamente derivando il primo addendo ($\omega_p \cdot t$) rispetto al tempo otteniamo ω_p mentre per calcolare la derivata del secondo — cioè $\beta \mathrm{sen}(\omega_m \cdot t)$ — teniamo conto del fatto che β è una costante e dunque basta trovare la derivata rispetto al tempo della funzione $\mathrm{sen}(\omega_m \cdot t)$ che, ovviamente, vale: $\omega_m \cdot \cos(\omega_m \cdot t)$ ed a questo punto ci basta mettere insieme i diversi contributi ottenendo:

$$\theta'_{FM}(t) = d\theta_{FM}(t)/dt = \omega_p + \beta \cdot \omega_m \cdot \cos(\omega_m t) =$$
$$= \omega_p + (\Delta\omega/\omega_m) \cdot \omega_m \cdot \cos(\omega_m t) = \omega_p + \Delta\omega \cdot \cos(\omega_m t) \qquad [18]$$

e questa ci ricorda molto da vicino la:

$$\omega_{FM}(t) = \omega_p + K_\omega \cdot v_m(t) = \omega_p + K_\omega \cdot A_m \cos(\omega_m t) =$$
$$= \omega_p + \Delta\omega_{FM} \cdot \cos(\omega_m t) = \omega_p + \Delta\omega \cdot \cos(\omega_m t) \qquad [16]$$

che avevamo già visto in precedenza ed anzi vediamo che è proprio identica, e quindi il nostro suggeritore ci ha detto la soluzione giusta. Quando poi saremo in grado di padroneggiare il calcolo integrale, potremo ricavare direttamente la fase istantanea del segnale modulato a partire dalla sua pulsazione.
Resta da spiegare che cosa sia la grandezza chiamata beta:

$$\boldsymbol{\beta = \Delta f/f_m = K_f \cdot A_m/f_m} = \Delta\omega/\omega_m = K_\omega \cdot A_m/\omega_m = m_f = \Delta\theta_{FM} = \Delta\theta \qquad [19]$$

e quale sia il suo significato. Essa (β) è la deviazione (massima) di fase del segnale modulato rispetto alla portante, come si può vedere anche dal grafico di figura 10, e viene chiamato anche **indice di modulazione** di frequenza. Per distinguerlo dall'indice di modulazione di ampiezza si usa spesso il simbolo m_f contrapponendolo ad m_a e qui dobbiamo notare che non vi è alcun bisogno di mantenere m_f al di sotto dell'unità come accadeva per m_a al fine di evitare la sovramodulazione, perciò possiamo benissimo aumentare m_f ben oltre il valore 1. Purtroppo avere m_f elevato ci porta dei vantaggi ma anche dei notevoli costi come vedremo, e perciò è meglio non esagerare. Impostare ad esempio $m_f = 50$ comporterebbe una occupazione di banda intollerabilmente grande per applicazioni commerciali come la trasmissione di musica e notizie.

Adesso ci dobbiamo porre il problema di come sia fatto il segnale FM ma soprattutto di come sia fatto il suo spettro, cioè le sue armoniche o righe spettrali che dir si voglia. L'ampiezza massima del segnale $v_{FM}(t)$ è costante e vale A_p ; la sua espressione nel dominio del tempo è:

$$v_{FM}(t) = A_p \cdot \cos(\theta_{FM}(t)) \qquad [20]$$

dove però la sua fase istantanea $\theta_{FM}(t)$ non si evolve in modo lineare, dato che vale:

$$\theta_{FM}(t) = \omega_p \cdot t + \beta \mathrm{sen}(\omega_m \cdot t) \qquad [17]$$

ovvero è la somma di due addendi, uno lineare ed uno no.

Perciò avremo:

$$v_{FM}(t) = A_p \cdot \cos(\theta_{FM}(t)) = A_p \cdot \cos(\omega_p \cdot t + \beta \mathrm{sen}(\omega_m \cdot t)) \qquad [21]$$

e se provassimo a trovare uno sviluppo in serie di questa funzione dovremmo innanzitutto sfruttare le formule di addizione del coseno, che qui ricordiamo:

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \mathrm{sen}(x) \cdot \mathrm{sen}(y) \qquad [22]$$

e perciò:

$$v_{FM}(t) = A_p \cdot \cos(\theta_{FM}(t)) = A_p \cdot \cos(\omega_p \cdot t + \beta \mathrm{sen}(\omega_m \cdot t)) =$$
$$= A_p \cdot \cos(\omega_p \cdot t) \cdot \cos(\beta \mathrm{sen}(\omega_m \cdot t)) - A_p \cdot \mathrm{sen}(\omega_p \cdot t) \cdot \mathrm{sen}(\beta \mathrm{sen}(\omega_m \cdot t)) \qquad [23]$$

dove i termini evidenziati con le ellissi rosse sono esprimibili mediante le **funzioni di Bessel** di prima specie:

$$\cos(\beta \mathrm{sen}(\omega_m \cdot t)) = J_0(\beta) + 2 \cdot \sum_{n \text{ pari}} J_n \cdot \cos(n \omega_m t) [24]$$

Nelle quali la sommatoria si estende a tutti i valori pari di n da 2 ad infinito:

$$n = 2, 4, 6, 8, \ldots. \qquad [25]$$

ed anche:

$$\mathrm{sen}(\beta \mathrm{sen}(\omega_m \cdot t)) = 2 \cdot \Sigma\, J_n \cdot \mathrm{sen}(n \omega_m t)$$

con tutti i valori dispari di n da 1 ad infinito:

$$n = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots.. \qquad [26]$$

il che ci permette di esprimere il segnale modulato $v_{FM}(t)$ —o meglio il suo spettro espresso mediante i coefficienti di Fourier— con la formula seguente, nella quale la F maiuscola davanti alla parentesi quadra rappresenta l'operatore della trasformazione di

Fourier . L'argomento della trasformazione F è l'intero andamento della funzione $[v_{FM}(t)]$ e la trasformata viene calcolata in corrispondenza del valore di frequenza chiamato f ossia la variabile indipendente della funzione $V_{FM}(f)$:

$$V_{FM}(f) = F[v_{FM}(t) \,|f\,] \qquad [27]$$

Possiamo dunque esprimere il segnale modulato con una serie già pronta, grazie a Federico Guglielmo Bessel (1784-1846) che ci ha permesso di trovare le armoniche di un segnale prodotto grazie ad una tecnica sviluppata negli anni '30 da Edwin Howard Armstrong. Come al solito, la speculazione matematica e logica è arrivata molto in anticipo rispetto alle sue applicazioni tecnologiche. Un anticipo di oltre un secolo, in questo caso.

La serie di Fourier sviluppata mediante i coefficienti dati dalle funzioni di Bessel viene usualmente chiamata con il nome di quest'ultimo, dato che ci ha permesso di trovare la difficile soluzione al calcolo dei coefficienti di Fourier.

Lo spettro del segnale modulato FM è costituito da infinite righe spettrali distanziate fra loro di una quantità pari ad f_m ossia della frequenza del segnale modulante. Esse si estendono tanto al di sopra della frequenza portante, quanto al di sotto.

La frequenza della n-esima riga spettrale superiore vale:

$$f_{nU} = f_p + n \cdot f_m \qquad [28]$$

La frequenza della n-esima riga spettrale inferiore vale:

$$f_{nL} = f_p - n \cdot f_m \qquad [29]$$

L'ampiezza della n-esima riga spettrale vale:

$$A_n = A_p \cdot J_n(\beta) \qquad [30]$$

e la riga di frequenza f_p non si può più chiamare portante poiché la sua ampiezza non vale A_p bensì:

$$A_0 = A_p \cdot J_0(\beta) \qquad [31].$$

Esistono valori di β in corrispondenza dei quali si verifica che $J_0(\beta) = 0$ e dunque la potenza del segnale modulato FM risiede tutta nelle bande laterali USB ed LSB mentre non v'è alcuna riga spettrale alla frequenza f_p e ciò significa che la portante è scomparsa. Questo accade ad esempio, quando β vale 2,4 ed anche quando β vale 5,52 solo per fermarci ai primi valori. Si dice anche che in questi casi l'efficienza di modulazione è massima poiché non viene impiegata potenza per trasmettere la portante, la quale ha contenuto informativo nullo.

Le funzioni di Bessel di prima specie ed ordine n si possono trovare su ogni manuale tecnico, sia sotto forma di tabelle che sotto forma di grafici.

andamento grafico delle prime *Funzioni di Bessel*

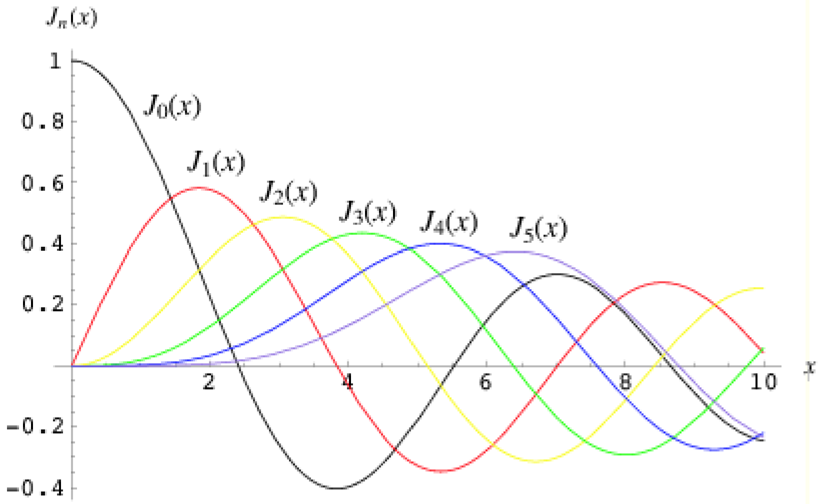


fig. 13

Le ampiezze delle armoniche convergono verso lo zero per valori elevati dell'ordine n dell'armonica ma non si azzerano mai, per nessun valore di n, quindi dal punto di vista matematico un segnale modulato in frequenza ha una banda infinitamente larga.

Però da un punto di vista tecnico/pratico si può benissimo considerare che le armoniche di $v_{FM}(t)$ che siano più piccole del rumore elettromagnetico ambientale sono trascurabili e dunque non dobbiamo considerare la banda del segnale modulato da un punto di vista logico/matematico considerando **tutte** le armoniche di $v_{FM}(t)$. Bensì da un punto di vista tecnico/pratico, considerando **solo** le armoniche **significative** del segnale modulato. Con quali criteri possiamo decidere se una certa armonica è significativa o meno?

Ad esempio se l'ampiezza di una certa armonica è minore dell'ampiezza efficace del rumore (inevitabile) presente all'ingresso del ricevitore, allora possiamo dire che quella data armonica non è significativa, e può essere trascurata. Come regolarsi nel caso (molto frequente) in cui non si conosca l'ampiezza del rumore in ingresso al ricevitore? In tal caso vengono trascurate le armoniche la cui ampiezza è inferiore ad una certa percentuale della portante. Supponiamo che sia A_p = 100 Volt ; diciamo ad esempio che le armoniche di ampiezza inferiore a 2 V sono trascurabili. Come si decide il valore di questa soglia percentuale, nel caso non sia definita in modo esplicito? Nel caso in cui, ad esempio, il nostro ricevitore si trovasse nel bel mezzo della zona industriale di Milano saremmo circondati da laminatoi, macchine utensili, linee elettriche e ferroviarie che ovviamente produrrebbero un elevato livello di rumore elettromagnetico. Perciò potremmo fissare una soglia convenzionale elevata, ad esempio il 4 od anche il 5%. Nel caso invece il nostro ricevitore si trovasse al centro del deserto del Sahara non vi sarebbe alcun generatore di rumore elettromagnetico nelle vicinanze del ricevitore (vi sarebbe solo il rumore EM dovuto all’irradiazione solare) e dunque potremmo fissare una soglia convenzionale bassa, ad esempio 1%. Nella zona residenziale di Rovereto potremmo fissare una soglia del 2 oppure del 3% a seconda di dove abbiamo effettivamente posto il nostro ricevitore radio FM.

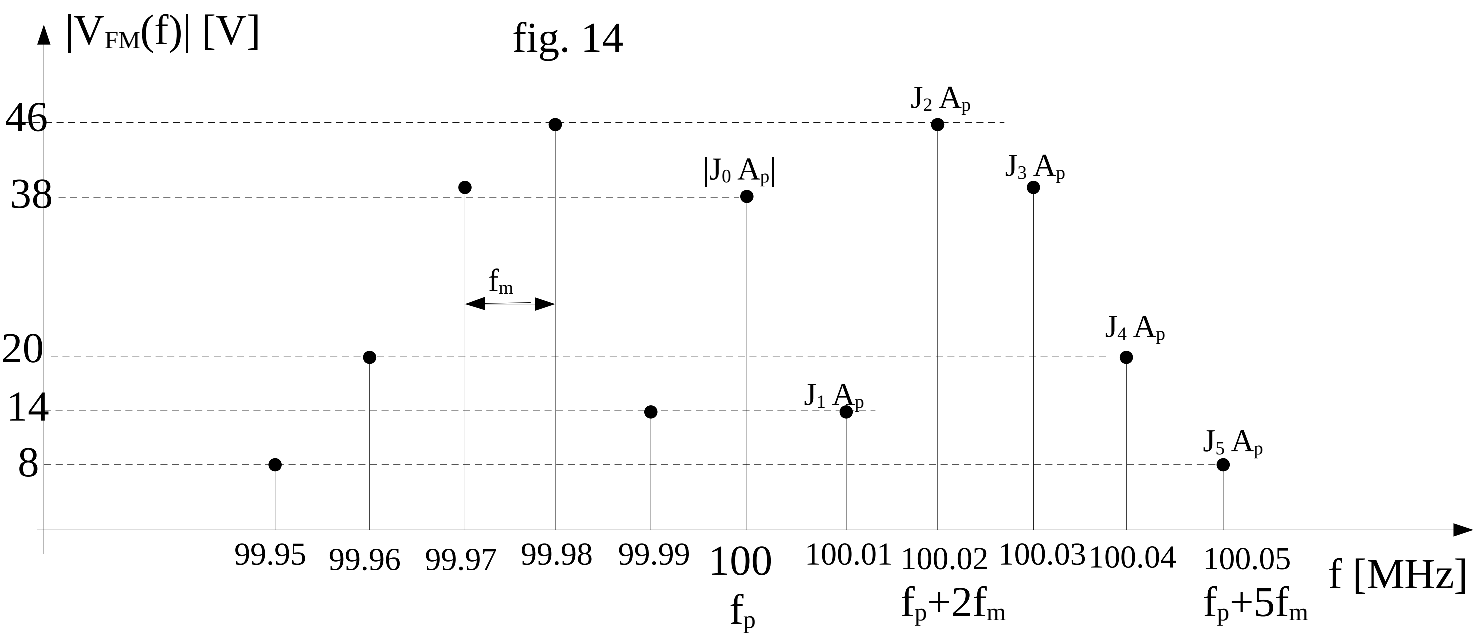
Tutte queste considerazioni ovviamente, valgono solo nel caso in cui **non** sia noto il valore effettivo del rumore elettromagnetico ambientale; mentre invece se il testo del problema proposto lo specificasse, ci dovremmo attenere a quel valore in quanto si tratterebbe di un **dato**. Sul quale non si può discutere.

VALORI DELLE FUNZIONI DI BESSEL

Tab. 2

β	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}
.00	1.00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
.25	.98	.12	-	-	-	-	-	-	-	-	-
.50	.94	.24	.03	-	-	-	-	-	-	-	-
.75	.86	.35	.07	.01	-	-	-	-	-	-	-
1.00	.77	.44	.11	.02	-	-	-	-	-	-	-
1.50	.51	.56	.23	.06	.01	-	-	-	-	-	-
2.00	.22	.58	.35	.13	.03	-	-	-	-	-	-
2.40	.00	.52	.43	.20	.06	.01	-	-	-	-	-
2.50	-.05	.50	.45	.22	.07	.02	.01	-	-	-	-
3.00	-.26	.34	.49	.31	.13	.04	.01	-	-	-	-
3.50	-.38	.14	.46	.39	.20	.08	.03	.01	-	-	-
4.00	-.40	-.07	.36	.43	.28	.13	.05	.02	-	-	-
4.50	-.32	-.23	.22	.42	.35	.19	.08	.03	.01	-	-
5.00	-.18	-.33	.05	.36	.39	.26	.13	.05	.02	.01	-
5.50	-.07	-.34	-.12	.26	.40	.32	.19	.09	.03	.01	-
5.52	.00	-.34	-.12	.25	.40	.32	.19	.09	.03	.01	-
6.00	.15	-.28	-.24	.11	.36	.36	.25	.13	.06	.02	.01
6.50	.26	-.15	-.31	-.04	.27	.37	.30	.18	.09	.04	.01
7.00	.30	.00	-.30	-.17	.16	.35	.34	.23	.13	.06	.02
7.50	.27	.14	-.23	-.26	-.02	.28	.35	.28	.17	.09	.04
8.00	.17	.23	-.11	-.29	-.10	.19	.34	.32	.22	.13	.06
8.50	.04	.27	.02	-.26	-.21	.07	.29	.34	.27	.17	.09
8.65	.00	.27	.06	-.24	-.23	.03	.27	.34	.28	.18	.10
9.00	-.09	.25	.14	-.18	-.27	-.06	.20	.33	.31	.21	.12
9.50	-.19	.16	.23	-.07	-27	-.16	.10	.29	.32	.26	.17
10.00	-.25	.04	.25	.06	-.22	-.23	-.01	.22	.32	.29	.21

Supponiamo che in un certo caso accada che l'indice di modulazione di frequenza valga 3.5 e che il testo del problema specifichi di poter trascurare le armoniche di ampiezza fino al 3% della portante. Sia anche che la frequenza della portante valga 100 MHz mentre quella della modulante è 10 KHz. E che sia A_p = 100 Volt . Come è fatto lo spettro del segnale modulato, in tal caso? Lo possiamo vedere nella figura seguente.



Dalla tabella è facile ricavare le ampiezze delle armoniche. Anche nel caso in cui risultino dei valori negativi delle funzioni di Bessel, a noi interessa il **modulo** delle armoniche; e sapere che ad esempio l'armonica centrale (una volta si chiamava portante) A_0 è invertita di fase (180°) rispetto alla portante originaria A_p a causa del fatto che $A_0 = A_p \cdot J_0(\beta)$ dove $J_0(\beta)$ è negativa, non ha alcun interesse per il momento. Per quale motivo? Perché a noi interessa l'occupazione di banda e dunque le **potenze** delle diverse armoniche. Ci interessa capire se una certa armonica la possiamo trascurare oppure no. Perciò, il fatto che un'armonica sia invertita di fase (la sua ampiezza sia negativa) non ci importa per nulla. Anche se in tabella i valori delle funzioni di Bessel sono riportati completi del relativo segno positivo o negativo, a noi non interessa e possiamo limitarci nei diagrammi degli spettri a riportare i **moduli** delle

diverse armoniche. Dal nostro punto di vista (tecnico) è tutto quello che occorre.
Abbiamo deciso di trascurare le armoniche aventi ampiezza pari od inferiore al 3% della portante e perciò non ci curiamo delle armoniche laterali al di là della quinta dato che hanno ampiezze trascurabili.
Dunque il numero di armoniche **significative** vale: $N_J = 5$ e la larghezza di banda vale:

$$B_{FM} = 2 \cdot N_j \cdot f_m = 2 \cdot 5 \cdot 10KHz = 100KHz \qquad [32]$$

anche se quella teorica è infinita.
Se non fosse stata specificata la soglia del 3% per considerare le armoniche come significative o trascurabili cosa avremmo potuto fare per determinare la banda? John Renshaw Carson ha fornito una formula approssimata ma realistica (dal punto di vista tecnico):

$$B_{FM} = 2 \cdot (f_m + \Delta f) = 2 \cdot f_m \cdot (1 + \beta) = 2 \cdot 10KHz \cdot (1 + 3{,}5) = 90KHz \qquad [33]$$

anche se quella teorica è infinita.
Quale delle due bande calcolate qui sopra è giusta? Entrambe, dal punto di vista tecnico. Nessuna, dal punto di vista logico/matematico. Ma noi viviamo nel mondo reale e non consideriamo certo i segnali da un punto di vista filosofico.
Quale delle due tecniche di calcolo applicare? Se fra i dati del problema ci viene fornita la soglia percentuale in base alla quale trascurare o meno le armoniche, allora usiamo la prima formula [32]. Se invece la soglia non fosse nota, allora useremo la formula di Carson [33]. Ma quest’ultima opzione, benché sia usata molto di frequente, va invece usata **solo** nel caso in cui **non** sia noto il valore effettivo del rumore elettromagnetico ambientale, o la sua influenza sulla soglia. Se invece quest’ultimo/a fosse noto/a dalle specifiche di calcolo, non dovremmo usare la formula di Carson bensì considerare

$$B_{FM} = 2 \cdot N_j \cdot f_m \qquad [34]$$

ed attenerci a quel valore (basato sul numero di armoniche significative) in quanto sui dati non si può discutere. Bisogna prenderne atto.
Vale la pena di fare qualche considerazione sul comportamento della modulazione FM riguardo al **rumore**. Quest’ultimo viene spesso descritto matematicamente come un segnale additivo indesiderato e casuale che si somma al segnale modulato e corrompe

così il suo contenuto informativo. Tralasciamo per un momento la descrizione del rumore da un punto di vista statistico. In effetti dovremmo considerarlo come un segnale aleatorio, ma questo ci complica molto la trattazione. Ovviamente nel ricevitore non entra il segnale FM “pulito” $v_{FM}(t)$ ma quello contaminato dal rumore ovvero $v_{FM}(t) + n(t)$ dove l’ultimo addendo è proprio l’andamento istantaneo del rumore, del quale conosciamo solo una descrizione statistica. L’analisi matematica necessaria per determinare le prestazioni ottenute in termini di rapporto segnale/rumore (SNR) in uscita dal ricevitore è purtroppo complicata e chi lo desidera può leggerla su questo articolo del prof. Kin K. Leung , facendo attenzione al fatto che la nomenclatura dei simboli è del tutto diversa sia da quella adottata qui, sia da quella del libro di testo. Ma anche senza addentrarci nell’analisi possiamo notare un fatto molto semplice:

— nella AM l’informazione viene riportata nelle variazioni d’ampiezza del segnale modulato, e dunque un rumore additivo ne degrada direttamente e pesantemente il contenuto informativo;

— nella FM l’informazione viene riportata nelle variazioni di frequenza del segnale modulato, tanto che l’ampiezza rimane costante. Il demodulatore si occupa di rilevare i passaggi per lo zero del segnale ricevuto misurando così continuamente la sua frequenza istantanea. Dunque un rumore additivo provoca solo delle piccole variazioni sugli istanti di passaggio attraverso il livello di zero Volt. Perciò l’influsso del rumore sull’informazione è molto meno dannoso che nel caso AM.

Purtroppo il miglioramento delle prestazioni inerenti il SNR non è affatto gratuito: l’altra faccia della medaglia è un pesante allargamento nella larghezza di banda occupata dal segnale FM. Come del resto abbiamo già visto, sia ragionando sulle formule teoriche [33] e [34] sia considerando i valori di banda ottenuti nei casi AM ed FM.

Dobbiamo notare una cosa: più l’indice β è elevato e più la banda occupata B_{FM} è larga. Perciò la nostra licenza di trasmissione ci costerà una cifra annua maggiore. Ma se usiamo un valore di β piccolo e dunque adottiamo la trasmissione cosiddetta Narrow-Band-Frequency-Modulation NBFM allora lo spettro del segnale FM assomiglia moltissimo allo spettro del segnale AM. Infatti se ad esempio fosse $\beta = 0,25$ allora dalla tabella delle funzioni di Bessel vediamo che il segnale FM è costituito da: 1) la portante, praticamente inalterata; 2) la prima riga laterale superiore ed inferiore. Tutte le altre righe spettrali sono trascurabili. Il nostro segnale FM è quasi uguale al vecchio segnale AM con la conseguenza che il SNR è praticamente lo stesso del caso AM ossia molto basso. Di fatto con la NBFM non c'è miglioramento di SNR rispetto ad AM. Se vogliamo ottenere un SNR elevato dobbiamo usare un valore elevato dell'indice β ossia dobbiamo scegliere la trasmissione di tipo Wide-Band-Frequency-Modulation WBFM sicché lo spettro del segnale FM non assomiglierà per nulla allo spettro del segnale AM con la conseguenza che il SNR sarà si elevato, ma sarà anche molto larga la banda occupata. Ecco per quale motivo le regolamentazioni internazionali pongono dei limiti, come quelli riportati nella tabella 1 di pag. 6. Non bisogna eccedere la banda netta di 180KHz stabilita dalle norme. Chi volesse eccedere i limiti dovrà richiedere una apposita licenza, che ovviamente costerà molto di più.

Anche senza addentrarci nell'analisi fatta dal prof. Kin K. Leung possiamo fare qualche considerazione sui risultati, condensati nel diagramma riportato alla pagina seguente. In ascissa sono riportati i valori del SNR in banda base, ovvero l'SNR che si otterrebbe nell'ipotesi di trasmettere il segnale informativo allo stato puro, senza alcuna modulazione. Chiaramente questo non è un caso realistico ma serve solo come termine di paragone per confrontare le prestazioni dei diversi tipi di modulazione rispetto al rumore.

Innanzitutto, ha senso osservare gli andamenti solo se l'SNR in banda base supera i 15 dB altrimenti in uscita il segnale demodulato non si riesce quasi a riconoscerlo. Osservando il diagramma più in basso di tutti, quello che definisce le prestazioni del demodulatore AM realizzato con il rivelatore di inviluppo, vediamo che quando l'SNR in banda base vale 20 dB otteniamo in uscita dal RI solo 15 dB e dunque abbiamo un peggioramento di 5 dB. Non possiamo certo gioire di questa prestazione. Utilizzando la DSB al posto della AM abbiamo un miglioramento, ma il vero salto lo otteniamo con la FM. Sul diagramma tale caso viene indicato come FM senza deenfasi.

Non addentriamoci nella descrizione particolareggiata dei processi di enfasi e deenfasi, bensì limitiamoci ad osservare che con 20 dB di SNR in banda base otteniamo in uscita dal demodulatore FM un SNR di 35 dB ossia circa 20 dB in più di quello che si può ottenere con la AM.

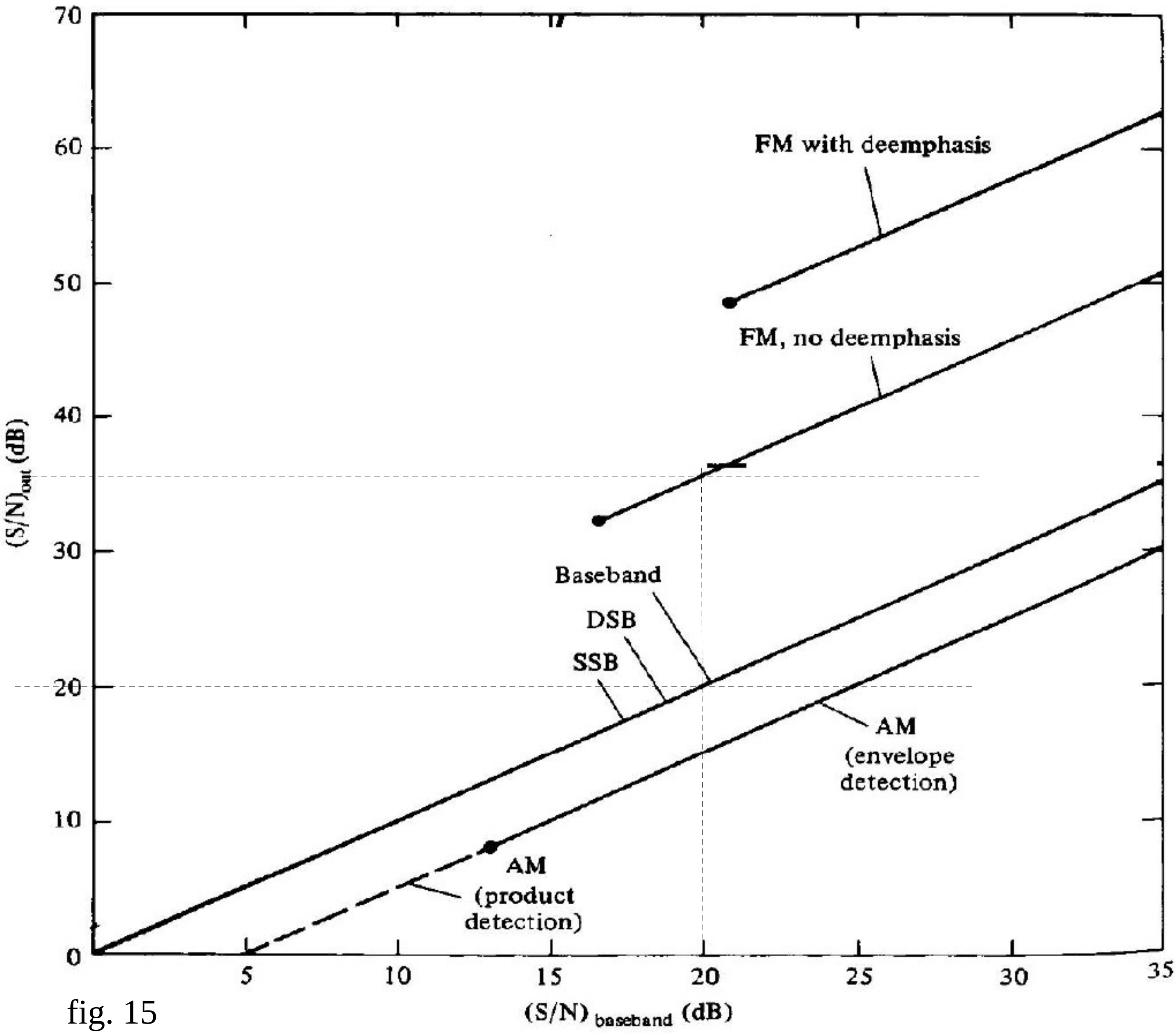


fig. 15

Questo è un buon risultato, anche se per raggiungerlo abbiamo dovuto pagare un alto prezzo: l'allargamento della banda occupata. Che è il vero punto dolente del sistema FM. Una parziale consolazione è data dal fatto che con il sistema FM possiamo permetterci di avere delle armoniche del segnale modulante che arrivino fino alla frequenza massima di 15KHz e dunque possiamo ad esempio trasmettere anche il suono di un violino. Mentre invece se usiamo il sistema AM possiamo permetterci di avere delle armoniche del segnale modulante che arrivino fino alla frequenza massima di 4,5KHz e dunque possiamo ad esempio trasmettere solo il parlato di una conversazione telefonica ma non certo un concerto di musica classica comprendente le voci dei soprani, e nemmeno un concerto Jazz con Ella Fitzgerald.

Rovereto, xx/yy/zzzz   Classe: 4^a Xi   prova di **TELECOMUNICAZIONI**

Cognome: Nome: **A**

N.B.1: In caso di mancanza del nome e/o cognome sul testo e/o sull'elaborato, si detrarrà un punto dal voto. N.B.2: Saranno **penalizzati** gli elaborati disordinati e svolti "a spezzatino". N.B.3: Tutti i diagrammi devono essere completi di scale. È obbligatorio sceglierle in modo opportuno: lineari o logaritmiche, con ampiezze massime oppure efficaci, ed ascisse spettrali tarate in Hz oppure in r/s. N.B.4 : Nel caso di confronto fra più grandezze significative (es.: fase e frequenza istantanea) i diagrammi devono essere sovrapposti o, meglio, posti uno in alto ed uno in basso. E **non** affiancati o, peggio, disposti lontani l'uno dall'altro. N.B.5: contrassegnate sull'elaborato ogni punto svolto, con il corrispondente numero del testo. **Le parti svolte ma prive di riferimento numerico al testo non produrranno alcun punteggio utile**. N.B.6: Si raccomanda di esplicitare e spiegare i passaggi matematici. N.B.7: Per quanto non specificato dal testo, si faccia ogni opportuna e/o necessaria ipotesi, semplificazione e considerazione. N.B.8: Per agevolare i calcoli, vengono allegati grafici e tabelle delle funzioni di Bessel.

Un segnale modulante cosinusoidale $v_m(t) = A_m\cos(\omega_m t)$ è applicato all'ingresso del modulatore FM di fig. 1.

Tutti i blocchi (compresa l'antenna) hanno impedenze d'ingresso e d'uscita pari a 40 Ω. L'oscillatore produce un segnale portante cosinusoidale $v_p(t) = A_p\cos(\omega_p t)$ di potenza P_p = 31dBmW (su 40Ω) e frequenza f_p = 91 MHz.

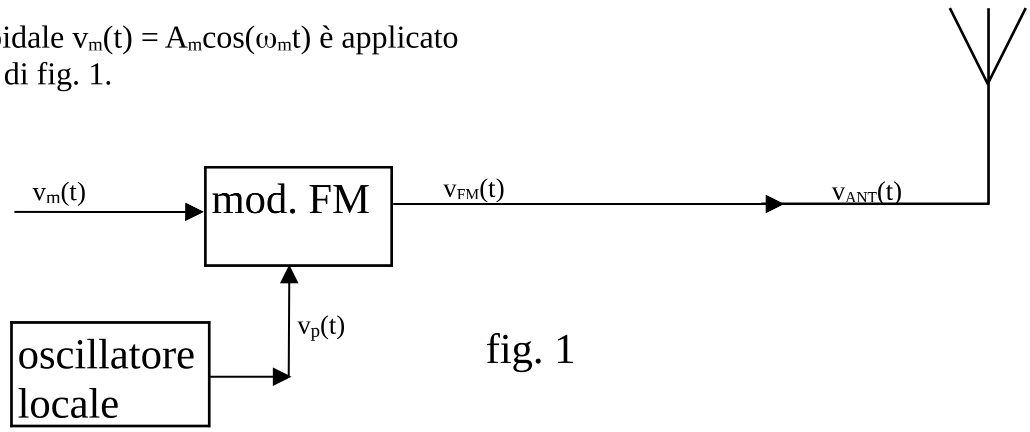


fig. 1

Il segnale modulante ha potenza P_m = 28,4703 dBmW (su 40Ω) e frequenza f_m = 12.5 KHz. Si intende ottenere una deviazione di frequenza Δf_{FM} pari a 75 KHz .

1) Dare adeguate spiegazioni nel calcolare le ampiezze massime (in volt) e le potenze (in W) dei segnali modulante e portante, ovvero A_m ed A_p nonché P_m e P_p .
2) Dare adeguate spiegazioni nel calcolare la sensibilità del modulatore K_f , le deviazioni di pulsazione $\Delta\omega_{FM}$ e di fase $\Delta\theta_{FM}$ ricavandone i valori completi delle unità di misura.
3) Ricavare l'espressione analitica di $f_{FM}(t)$, di $\omega_{FM}(t)$, e di $\theta_{FM}(t)$ spiegando il significato dei termini che vi compaiono nonché i valori con le relative unità di misura, e tracciandone i grafici (completi di scale). **NB4**
4) Spiegare che cos'è l'indice di modulazione di frequenza, β e da che cosa dipende, oltre alle analogie e differenze con il relativo indice per la AM. Calcolarne il valore per il caso in esame.
5) Dare adeguate spiegazioni nel disegnare l'andamento nel tempo del segnale modulato (in modalità didascalica) evidenziandone tutti i parametri. Ovviamente tale grafico dev'essere completo di scale.
6) Dare adeguate spiegazioni nel calcolare, in modo approssimato, l'occupazione di banda B_{FM} dal punto di vista pratico (convenzionale) trascurando le armoniche non significative.
7) È possibile aumentarne il valore, nel caso in esame, senza infrangere le Norme Ministeriali? Oppure è necessario modificare qualche parametro per non violare più le Norme? Specificare i motivi della risposta, e non limitarsi a scrivere Si/No . Qual è il massimo valore ammissibile di β ? β_{MAX} =?
8) (facoltativo): Dare adeguate spiegazioni nel tracciare il diagramma dello spettro del segnale in antenna, dopo aver calcolato le ampiezze delle diverse armoniche significative. Ovviamente tale grafico dev'essere completo di scale.

Rovereto, xx/yy/zzzz Classe: 4ª Xi prova di TELECOMUNICAZIONI

Cognome: Nome: **B**

N.B.1: In caso di mancanza del nome e/o cognome sul testo e/o sull'elaborato, si detrarrà un punto dal voto. N.B.2: Saranno **penalizzati** gli elaborati disordinati e svolti "a spezzatino". N.B.3: Tutti i diagrammi devono essere completi di scale. È obbligatorio sceglierle in modo opportuno: lineari o logaritmiche, con ampiezze massime oppure efficaci, ed ascisse spettrali tarate in Hz oppure in r/s. N.B.4 : Nel caso di confronto fra più grandezze significative (es.: fase e frequenza istantanea) i diagrammi devono essere sovrapposti o, meglio, posti uno in alto ed uno in basso. E **non** affiancati o, peggio, disposti lontani l'uno dall'altro. N.B.5: contrassegnate sull'elaborato ogni punto svolto, con il corrispondente numero del testo. **Le parti svolte ma prive di riferimento numerico al testo non produrranno alcun punteggio utile**. N.B.6: Si raccomanda di esplicitare e spiegare i passaggi matematici. N.B.7: Per quanto non specificato dal testo, si faccia ogni opportuna e/o necessaria ipotesi, semplificazione e considerazione. N.B.8: Per agevolare i calcoli, vengono allegati grafici e tabelle delle funzioni di Bessel.

Un segnale modulante cosinusoidale $v_m(t) = A_m\cos(\omega_m t)$ è applicato all'ingresso del modulatore FM di fig. 1.

Tutti i blocchi (compresa l'antenna) hanno impedenze d'ingresso e d'uscita pari a 50 Ω. L'oscillatore produce un segnale portante cosinusoidale $v_p(t) = A_p\cos(\omega_p t)$ di potenza P_p = 33dBmW (su 50Ω) e frequenza f_p = 105 MHz.

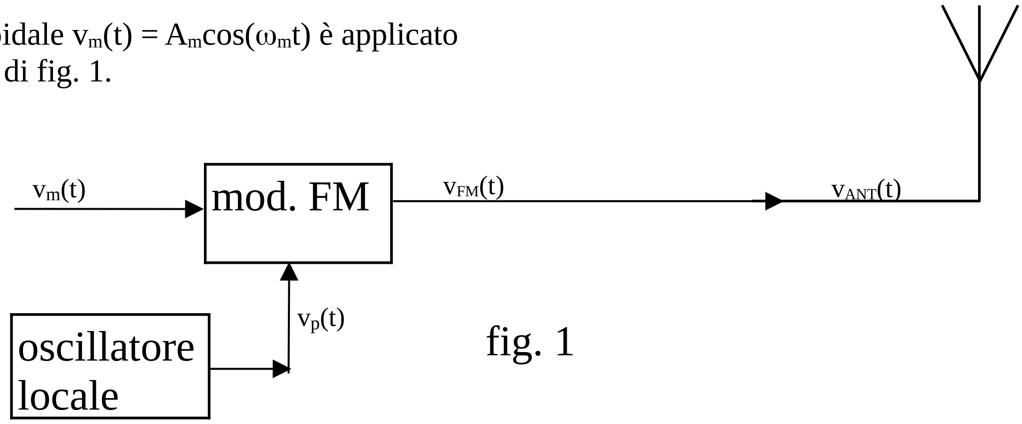


fig. 1

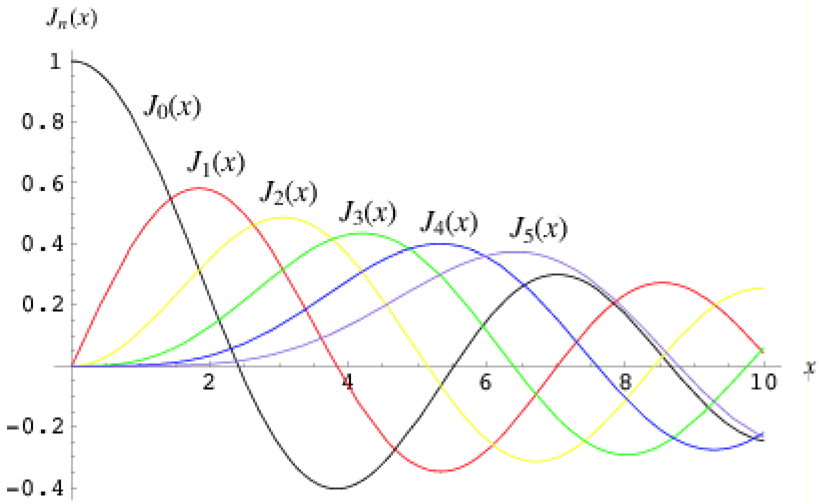
Il segnale modulante ha frequenza f_m = 10 KHz. La sensibilità del modulatore vale 58904,862 (r/s)/V. Si intende ottenere una deviazione di frequenza Δf_{FM} pari a 75 KHz imponendo l'opportuno valore all'ampiezza d'ingresso.

1) Dare adeguate spiegazioni nel calcolare le ampiezze massime (in volt) e le potenze (in W) dei segnali modulante e portante, ovvero A_m ed A_p nonché P_m e P_p .
2) Dare adeguate spiegazioni nel calcolare le deviazioni di pulsazione $\Delta\omega_{FM}$ e di fase $\Delta\theta_{FM}$ ricavandone i valori completi delle unità di misura.
3) Ricavare l'espressione analitica di $f_{FM}(t)$, di $\omega_{FM}(t)$, e di $\theta_{FM}(t)$ spiegando il significato dei termini che vi compaiono nonché i valori con le relative unità di misura, e tracciandone i grafici (completi di scale). **NB4**
4) Spiegare che cos'è l'indice di modulazione di frequenza, β e da che cosa dipende, oltre alle analogie e differenze con il relativo indice per la AM. Calcolarne il valore per il caso in esame.
5) Dare adeguate spiegazioni nel disegnare l'andamento nel tempo del segnale modulato (in modalità didascalica) evidenziandone tutti i parametri. Ovviamente tale grafico dev'essere completo di scale.
6) Dare adeguate spiegazioni nel calcolare, in modo approssimato, l'occupazione di banda B_{FM} dal punto di vista pratico (convenzionale) trascurando le armoniche non significative.
7) È possibile aumentarne il valore, nel caso in esame, senza infrangere le Norme Ministeriali? Oppure è necessario modificare qualche parametro per non violare più le Norme? Specificare i motivi della risposta, e non limitarsi a scrivere Si/No . Qual è il massimo valore ammissibile di β ? β_{MAX} =?
8) (facoltativo): Dare adeguate spiegazioni nel tracciare il diagramma dello spettro del segnale in antenna, dopo aver calcolato le ampiezze delle diverse armoniche significative. Ovviamente tale grafico dev'essere completo di scale.

VALORI DELLE FUNZIONI DI BESSEL

β	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}
.00	1.00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
.25	.98	.12	-	-	-	-	-	-	-	-	-
.50	.94	.24	.03	-	-	-	-	-	-	-	-
.75	.86	.35	.07	.01	-	-	-	-	-	-	-
1.00	.77	.44	.11	.02	-	-	-	-	-	-	-
1.50	.51	.56	.23	.06	.01	-	-	-	-	-	-
2.00	.22	.58	.35	.13	.03	-	-	-	-	-	-
2.40	.00	.52	.43	.20	.06	.01	-	-	-	-	-
2.50	-.05	.50	.45	.22	.07	.02	.01	-	-	-	-
3.00	-.26	.34	.49	.31	.13	.04	.01	-	-	-	-
3.50	-.38	.14	.46	.39	.20	.08	.03	.01	-	-	-
4.00	-.40	-.07	.36	.43	.28	.13	.05	.02	-	-	-
4.50	-.32	-.23	.22	.42	.35	.19	.08	.03	.01	-	-
5.00	-.18	-.33	.05	.36	.39	.26	.13	.05	.02	.01	-
5.50	-.07	-.34	-.12	.26	.40	.32	.19	.09	.03	.01	-
5.52	.00	-.34	-.12	.25	.40	.32	.19	.09	.03	.01	-
6.00	.15	-.28	-.24	.11	.36	.36	.25	.13	.06	.02	.01
6.50	.26	-.15	-.31	-.04	.27	.37	.30	.18	.09	.04	.01
7.00	.30	.00	-.30	-.17	.16	.35	.34	.23	.13	.06	.02
7.50	.27	.14	-.23	-.26	-.02	.28	.35	.28	.17	.09	.04
8.00	.17	.23	-.11	-.29	-.10	.19	.34	.32	.22	.13	.06
8.50	.04	.27	.02	-.26	-.21	.07	.29	.34	.27	.17	.09
8.65	.00	.27	.06	-.24	-.23	.03	.27	.34	.28	.18	.10
9.00	-.09	.25	.14	-.18	-.27	-.06	.20	.33	.31	.21	.12
9.50	-.19	.16	.23	-.07	-27	-.16	.10	.29	.32	.26	.17
10.00	-.25	.04	.25	.06	-.22	-.23	-.01	.22	.32	.29	.21

andamento grafico delle prime *Funzioni di Bessel*



soluzioni tipo B $P_p|dBm=33dBm$; $P_p=1mW \cdot 10^{(Pp|dBm/10)}=1mW \cdot 10^{(33/10)}=1{,}99526W$; $P_P=(A_{Peff})^2/R=(A_P/\sqrt{2})^2/R=(A_P)^2/2R$ da cui ricaviamo: $A_p=\sqrt{(2RP_p)}=\sqrt{(2 \cdot 50\Omega \cdot 2W)}=14{,}1254V$;
$A_p|dBmV = 20Log(A_p/1mV) = 20Log(14{,}125V/1mV) = 83$ dBmV ; $K_f=K\omega/2\pi = 58904{,}862$ (r/sV)/2π = 9,375KHz/V; $A_m=\Delta f/K_f = 75KHz/9{,}375KHz/V= 8V$; $A_m|dBmV = 20Log(A_m/1mV) = 20Log(8V/1mV)$ = 78,062 dBmV; $P_m=(A_m)^2/(2R) = (8V)^2/(2 \cdot 50\Omega)=0{,}64W$; $P_m|dBm = 10Log(P_m/1mW)=$

$= 10Log(0{,}64W/1mW) = 28{,}062$ dBm; $\Delta\omega=2\pi \cdot \Delta f= 2\pi \cdot 75KHz = 471{,}24Kr/s$;
$\Delta\theta_{FM} = \Delta f/f_m= 75KHz/10KHz = 7{,}5$;

$f_{FM}(t)=f_p+K_f \cdot v_m(t) = f_p+K_f \cdot A_m \cdot \cos(\omega_m t)=f_p+\Delta f \cdot \cos(\omega_m t)$;

$\omega_{FM}(t)=\omega_p+K_\omega \cdot A_m \cdot \cos(\omega_m t)= \omega_p+\Delta\omega \cdot \cos(\omega_m t)$;

$\theta_{FM}(t) = \int\omega_{FM}(t)dt = \omega_p t + \Delta\theta \cdot sen(\omega_m t)$; $\Delta\theta = m_f = \beta = 7{,}5 = 7{,}5rad$;

per tracciare i grafici dei valori istantanei di queste grandezze (frequenza, pulsazione, fase) dobbiamo impostare le scale per l'ascissa e le ordinate. Perciò ci calcoliamo innanzitutto il periodo della modulante: $T_m=1/f_m=1/10KHz=100\mu sec$; ci serve anche l'estremo superiore della fase per il grafico costruito in modo simile a quello della figura 10 di pagina 12:

$T_m \cdot \omega_p=\omega_p/f_m=2\pi \cdot f_p/f_m= 2\pi \cdot 105MHz/10KHz= 65973{,}44rad$; è ovvio che non potremo tracciare dei grafici realistici dato che le variazioni di frequenza e di fase del segnale modulato sono piccolissime. Dovremo tracciare dei diagrammi didascalici, ma con l'accortezza di mettere le scale corrette in ascissa ed in ordinata, e quotando i valori significativi.
Anche per la frequenza (o la pulsazione) bisogna riportare sul grafico il valore minimo, medio e massimo. Esso è costruito in modo simile a quello della figura 9 di pagina 12.
punto 5 — dobbiamo tracciare dei grafici simili a quelli della figura 7 di pag. 9.
Calcoliamoci dunque il periodo minimo e massimo del segnale "a fisarmonica":
$f_{max}=f_p+\Delta f= 105MHz+75KHz = 105{,}075MHz$; $T_{min} = 1/f_{max}= 1/(105{,}075MHz) = 9{,}517nsec$;
$f_{min}=f_p-\Delta f = 105MHz-75KHz = 104{,}925MHz$; $T_{max}=1/f_{min}= 1/(104{,}925MHz) = 9{,}5306nsec$;
ci basta rappresentare un ciclo di modulante, non ne servono due come nella fig. 7.
Conoscendo T_m possiamo tarare la scala delle ascisse.
Conoscendo A_m possiamo tarare la scala delle ordinate per la modulante.
Conoscendo A_p possiamo tarare la scala delle ordinate per il modulato.
punto 6 — Banda del segnale FM: non è nota l'ampiezza del rumore, dunque possiamo usare la formula di Carson.

$B_{FM}=2 \cdot (f_m+\Delta f) = 2 \cdot (10KHz + 75KHz) = 170KHz$;
punto 7 — possiamo aumentarla d'un poco fino a 180KHz di banda netta come previsto dalle norme.

$\beta_{max}= B/(2f_m) -1 = 180K/(2 \cdot 10K) – 1= 8$;
punto 8 — il grafico sarà costruito in modo simile a quello della figura 14 di pagina 19.
Calcoliamo ora le armoniche significative: poiché il testo non specifica il rumore elettromagnetico ambientale, facciamo l'ipotesi di poter trascurare le armoniche aventi ampiezza inferiore al 5% della portante. Sulla tabella allegata notiamo in corrispondenza di β = 7,5 che la decima armonica laterale (sia superiore che inferiore) è trascurabile dato che vale il 4% della portante. La riga centrale dello

spettro del segnale FM non si può chiamare portante perché la sua ampiezza non vale A_p bensì:

$A_0 = A_p \cdot J_0(\beta)$=14,125V·(0,27)=3,81V ed ovviamente ha frequenza pari ad f_p= 105MHz; mentre la prima riga laterale inferiore ha ampiezza $A_{1L}=A_p \cdot J_1(\beta)$=14,125V·(0,14)=1,98V; la sua frequenza vale $f_{1L}=f_p-f_m$= 105MHz - 10KHz = 104,9MHz ; ovviamente l'ampiezza della prima riga laterale superiore vale $A_{1U}= A_{1L}= A_1$ mentre la sua frequenza vale: $f_{1U}=f_p+f_m$ = 105MHz + 10KHz = 105,1MHz ; e così via possiamo calcolarci le ampiezze e le frequenze di tutte le altre armoniche laterali, sia superiori che inferiori rispetto alla portante. Sappiamo che sebbene la tabella dei valori delle funzioni di Bessel riporti anche numeri negativi, quando andremo a rappresentare sullo spettro le ampiezze efficaci delle armoniche potremo tranquillamente trascurare i segni negativi e rappresentarle come fossero tutte positive dato che la potenza delle armoniche non dipende dalla loro fase. $A_{2L}= A_{2U}= A_2= A_p \cdot J_2(\beta)$= - 3,25V (ma possiamo tralasciare il segno meno) ; $f_{2U}=f_p+2f_m$ = 105MHz + 20KHz = 105,2MHz ; $f_{2L}=f_p-2f_m$ = 105MHz -20KHz = 104,8MHz ; $A_{3L}= A_{3U}= A_3=A_p \cdot J_3(\beta)$= - 3,67V; $A_4=A_p \cdot J_4(\beta)$= - 0,28V; $A_5=A_p \cdot J_5(\beta)$= 3,96V; $A_6=A_p \cdot J_6(\beta)$=4,94V; $A_7=A_p \cdot J_7(\beta)$= 3,96V; $A_8=A_p \cdot J_8(\beta)$= 2,4V; $A_9=A_p \cdot J_9(\beta)$=1,27V ; ed analogamente possiamo calcolare le frequenze delle armoniche laterali.

fine soluzioni tipo B

soluzioni tipo A $P_p|_{dBm}$=31dBm; $P_p=1mW \cdot 10^{(P_p|dBm/10)}=1mW \cdot 10^{(31/10)}$=1,2589W; $P_P = (A_{Peff})^2/R= (A_P/\sqrt{2})^2/R= (A_P)^2/2R$ da cui ricaviamo: $A_p=\sqrt{(2RP_p)}= \sqrt{(2 \cdot 40\Omega \cdot 1{,}2589W)}$ = 10,036V; $A_p|_{dBmV}=20Log(A_p/1mV)$=20Log(10,036V/1mV)=80,03 dBmV ; $P_m|_{dBm}$=28,4703dBm da cui: $P_m=1mW \cdot 10^{(P_m|dBm/10)}= 1mW \cdot 10^{(28{,}4703/10)}$=0,7031W; $A_m= \sqrt{(2RP_m)}= \sqrt{(2 \cdot 40\Omega \cdot 0{,}7031W)}$ = =7,5V; Δf=75KHz ; $\Delta\omega=2\pi \cdot \Delta f$=471,24Kr/s ; $K_f=\Delta f/A_m$= 75KHz /7,5V = 10KHz/V; $K_\omega= 2\pi \cdot K_f$ = = $2\pi \cdot$(10KHz/V) =62,83K(r/s)/V; $\Delta\theta=\Delta f/f_m$=75KHz/12,5KHz=6; $f_{FM}(t)=f_p+K_f \cdot v_m(t)$ = $= f_p+K_f \cdot A_m \cdot cos(\omega_m t)=f_p+\Delta f \cdot cos(\omega_m t)$; $\omega_{FM}(t)=\omega_p+K_\omega \cdot A_m \cdot cos(\omega_m t)= \omega_p+\Delta\omega \cdot cos(\omega_m t)$; $\theta_{FM}(t)=\int\omega_{FM}(t)dt = \omega_p t + \Delta\theta \cdot sen(\omega_m t)$; $\Delta\theta = m_f = \beta = 6$ = 6rad; $\omega_p= 2\pi \cdot f_p =2\pi \cdot$ 91MHz = 571,77 Mr/s; calcoliamoci ora il periodo minimo e massimo del segnale “a fisarmonica”:
$f_{max}= f_p+\Delta f$ = 91MHz + 75KHz = 91,075MHz; $T_{min} = 1/f_{max}$= 1/(91,075MHz) = 10,97996nsec;
$f_{min}= f_p-\Delta f$ = 91MHz - 75KHz = 90,925MHz; $T_{max}=1/f_{min}$= 1/(90,925MHz) = 10,9981nsec;

periodo della modulante: $T_m=1/f_m$=1/12,5KHz=80μsec; $T_m \cdot \omega_p=\omega_p/f_m=2\pi \cdot f_p/f_m=2\pi \cdot$91MHz/12,5KHz = 45741,59rad; è ovvio che non potremo tracciare dei grafici realistici dato che le variazioni di frequenza e di fase del segnale modulato sono piccolissime. Dovremo tracciare dei diagrammi didascalici, ma con l'accortezza di mettere le scale corrette in ascissa ed in ordinata, e quotando i valori significativi. Banda del segnale FM: B_{FM}=2$\cdot$(f_m+Δf) = 2$\cdot$(12,5KHz + 75KHz) = 175KHz; possiamo aumentarla d'un pochino fino a 180KHz di banda netta; β_{max}= B/(2f_m) -1 = 180K/(2$\cdot$12,5K) – 1= 6,2; calcoliamo ora le armoniche significative: poiché il testo non specifica il rumore elettromagnetico ambientale, facciamo l'ipotesi di poter trascurare le armoniche aventi ampiezza inferiore al 5% della portante. Sulla tabella allegata notiamo in corrispondenza di β = 6 che la nona armonica laterale (sia superiore che inferiore) è trascurabile dato che vale il 2% della portante. La riga centrale dello spettro del segnale FM non si può chiamare portante perché la sua ampiezza non vale A_p bensì: A_0 = $A_p\cdot J_0(\beta)$=10,036V$\cdot$(0,15)=1,5V ed ovviamente ha frequenza pari ad f_p= 91MHz; mentre la prima riga laterale inferiore ha ampiezza A_{1L}=$A_p\cdot J_1(\beta)$=10,04V$\cdot$(-0,28)=-2,81V; la sua frequenza vale f_{1L}=f_p-f_m= 91MHz – 12,5KHz = 90,9875MHz ; ovviamente l'ampiezza della prima riga laterale superiore vale A_{1U}= A_{1L}= A_1 mentre la sua frequenza vale: f_{1U}=f_p+f_m = 91MHz + 12,5KHz = 91,0125MHz ; e così via possiamo calcolarci le ampiezze e le frequenze di tutte le altre armoniche laterali, sia superiori che inferiori rispetto alla portante. Sappiamo che sebbene la tabella dei valori delle funzioni di Bessel riporti anche numeri negativi, quando andremo a rappresentare sullo spettro le ampiezze efficaci delle armoniche potremo tranquillamente trascurare i segni negativi e rappresentarle come fossero tutte positive dato che la potenza delle armoniche non dipende dalla loro fase. A_{2L}= A_{2U}= A_2= $A_p\cdot J_2(\beta)$= -2,41V (ma possiamo tralasciare il segno meno) ; f_{2U} = f_p+2f_m = 91MHz + 25KHz = 91,025MHz ; f_{2L} = f_p- 2f_m = 91MHz - 25KHz = 90,975MHz ; A_{3L}= A_{3U}= A_3 = = $A_p\cdot J_3(\beta)$= 1,1V; A_4=$A_p\cdot J_4(\beta)$= 3,61V; A_5=$A_p\cdot J_5(\beta)$= 3,61V; A_6=$A_p\cdot J_6(\beta)$ = 2,51V; A_7=$A_p\cdot J_7(\beta)$= 1,3V; A_8=$A_p\cdot J_8(\beta)$= 0,6V; ed analogamente possiamo calcolare le frequenze delle armoniche laterali.

fine soluzioni tipo A