Unità
3
Tema F

Calcolo combinatorio

- Con GeoGebra
- Videolezioni
- Esercizi interattivi

1. Introduzione al calcolo combinatorio

In questa Unità presentiamo le tecniche di base del **calcolo combinatorio**, ovvero di quella parte della matematica che ha come oggetto il calcolo dei modi con i quali possono essere raggruppati o ordinati, secondo date regole, gli elementi di un insieme finito.

Che cosa si sta contando?

La maggior parte dei problemi di calcolo combinatorio sono riconducibili al seguente: quante «parole» di k caratteri si possono costruire con un alfabeto di n simboli distinti? La risposta dipende dalle due caratteristiche seguenti del problema in esame:
1. è importante l'*ordine* dei caratteri nelle «parole» che si vogliono contare?
2. sono consentite *ripetizioni* dei caratteri, ovvero, uno stesso simbolo può comparire nella «parola» più di una volta oppure no?

Ragioniamo su alcuni problemi per familiarizzare con questi aspetti.

Problema	Analisi	Modello
La mattinata di un corso di formazione prevede quattro ore di lezione: un'ora di diritto, una di inglese, una di gestione del personale e una di informatica. In quanti modi diversi si possono alternare i quattro relatori?	I diversi modi in cui possono succedersi i quattro relatori dipendono dall'*ordine* in cui avvengono le quattro lezioni. I relatori **non** possono *ripetersi*, perché è prevista una sola ora di lezione per ogni materia.	1. Parole ordinate, senza ripetizioni.
Una targa di automobile è costituita da due lettere iniziali, tre numeri e due lettere finali. Quante targhe diverse si possono costruire con questo sistema?	Nelle targhe delle automobili è *importante* l'*ordine* dei numeri e delle lettere. Inoltre sia le lettere sia i numeri possono *ripetersi* (per esempio, nella targa BR 808 RW la lettera R è ripetuta 2 volte, così come il numero 8).	2. Parole ordinate, con ripetizioni.
Quanti sono i possibili terni che si possono giocare al lotto?	Nel gioco del lotto, ai fini della vincita, hanno importanza soltanto i numeri estratti, non l'ordine di estrazione. Nel conteggio dei terni **non** ha quindi importanza l'*ordine* dei numeri. Inoltre tra i numeri che formano un terno **non** possono esserci *ripetizioni*, perché le estrazioni al lotto avvengono senza reimmissione.	3. Parole non ordinate, senza ripetizioni.
Quanti possibili tipi di confezioni diverse di 10 caramelle ai gusti di menta, fragola o limone si possono confezionare?	Ogni possibile confezione si può assimilare a un raggruppamento di 10 lettere, scelte tra M, F, L (M = menta, F = fragola, L = limone). Le lettere possono essere *ripetute* (perché in una confezione possono essere inserite più caramelle dello stesso tipo) e l'*ordine* **non** ha importanza (per stabilire se due confezioni sono o meno uguali confronteremo soltanto il numero di caramelle di ciascun tipo in esse contenute).	4. Parole non ordinate, con ripetizioni.

Una volta individuate le caratteristiche fondamentali del problema in esame in relazione all'ordine e alla possibilità di ripetizione, resta da effettuare il calcolo effettivo. Gli schemi di ragionamento da applicare per effettuare i conteggi in ciascuno dei quattro casi presentati in tabella verranno presentati nei prossimi paragrafi; alla base di tutti questi schemi di ragionamento c'è però *un solo principio fondamentale* che ora illustriamo.

Il principio fondamentale del calcolo combinatorio

Consideriamo il seguente problema.

◆ **PROBLEMA**

Si vuole preparare una colonna sonora per una presentazione multimediale: si è deciso di assemblare tre pezzi di musica classica in successione. Il primo brano sarà scelto fra *primavera*, *estate, autunno o inverno* di Vivaldi; il secondo fra le tre ultime sinfonie di Mozart (sinfonie in *mi bemolle,* in *sol minore* e in *do maggiore*) e l'ultimo tra l'*ottava* o la *nona* sinfonia di Beethoven. Quante colonne sonore si possono ottenere?

Possiamo ragionare secondo uno schema di *scelte successive*, visualizzato nel diagramma ad albero in **Fig. 1**.

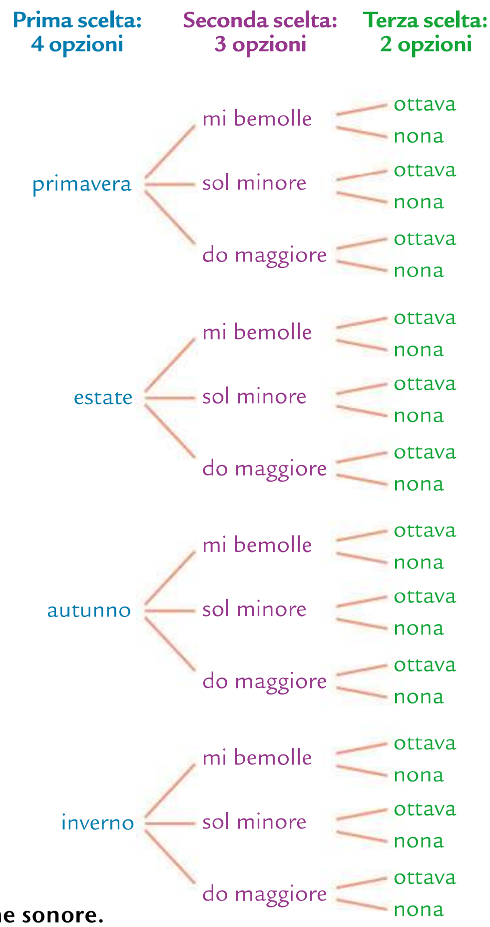


Figura 1 Diagramma ad albero delle colonne sonore.

Il diagramma ci permette di visualizzare come si calcola il numero complessivo di colonne sonore possibili:

– nella prima scelta abbiamo 4 opzioni;
– dopo avere effettuato anche la seconda scelta (3 opzioni) il numero complessivo di possibilità è diventato uguale a $12 = 4 \cdot 3$;
– dopo avere effettuato ulteriormente la terza scelta (2 opzioni), vediamo che il numero complessivo di colonne sonore disponibili diventa $24 = 12 \cdot 2$.

In sostanza, dopo ogni scelta, il numero complessivo di possibilità diviene uguale a quello ottenuto al passo precedente moltiplicato per il numero di opzioni dell'ultima scelta effettuata. In generale vale il seguente principio.

PRINCIPIO | Principio fondamentale del calcolo combinatorio

Se un oggetto è univocamente individuato da una sequenza di n scelte successive, tali che vi siano k_1 possibilità per la prima scelta, k_2 per la seconda, ..., k_n per la n-esima, il numero totale di oggetti che si possono formare con tali scelte è il prodotto:

$$k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$$

ESEMPIO Password

Una password è formata da 4 caratteri, che possono essere cifre (0,1, ..., 9) o lettere minuscole dell'alfabeto italiano (21 lettere). Inoltre cifre e lettere non possono essere ripetuti. Quante password di questo tipo si possono generare?

Per costruire una password dobbiamo effettuare quattro scelte successive:

1. per la scelta del primo carattere abbiamo 31 possibilità (le 10 cifre oppure una delle 21 lettere dell'alfabeto);
2. per la scelta del secondo carattere abbiamo 30 possibilità: infatti, poiché non sono ammesse ripetizioni di cifre e lettere, dobbiamo escludere il carattere scelto al passo precedente;
3. per la scelta del terzo carattere, per le stesse motivazioni del passo precedente, abbiamo 29 possibilità;
4. per la scelta del quarto carattere abbiamo, analogamente, 28 possibilità.

Per il principio fondamentale del calcolo combinatorio, possiamo costruire complessivamente:

$$31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 = 755\,160$$

password diverse.

Gli errori più frequenti nell'applicazione del principio fondamentale del calcolo combinatorio derivano dal non tenere conto di una ipotesi fondamentale: le sequenze di scelte devono individuare *univocamente* gli oggetti da contare. Ciò significa che a ogni sequenza di scelte deve corrispondere uno e un solo oggetto e, *viceversa*, a ogni oggetto deve corrispondere una e una sola sequenza di scelte. In modo equivalente, si può dire che per potere applicare il principio fondamentale del calcolo combinatorio deve esserci una *corrispondenza biunivoca* tra le sequenze di scelte e gli oggetti da contare.

ESEMPIO Applicazione impropria del principio di moltiplicazione

Quante squadre di due persone aventi come componenti Antonio, Massimo o Alberto si possono formare?

- Potremmo essere tentati di ragionare come segue. Una squadra può essere costruita tramite due scelte successive: prima scegliamo uno dei tre componenti (abbiamo 3 possibilità), quindi scegliamo il secondo componente tra le due persone rimaste (abbiamo 2 possibilità). Per il principio di moltiplicazione, concludiamo che si possono formare:

  $$3 \cdot 2 = 6 \text{ squadre}$$

- In realtà questo ragionamento non tiene conto del fatto che due squadre formate dagli stessi individui si reputano generalmente uguali indipendentemente dall'ordine degli individui; pertanto è corretto dire che si possono formare soltanto 3 squadre che hanno come componenti Antonio, Massimo o Alberto:

  $$\{\text{Antonio, Massimo}\}, \{\text{Antonio, Alberto}\}, \{\text{Massimo, Alberto}\}.$$

Come mai, applicando il principio di moltiplicazione, abbiamo ottenuto una *sovrastima* del numero di squadre? Il motivo risiede nel fatto che il risultato trovato tiene conto dell'*ordine* delle scelte e quindi ciascuna squadra è stata contata due volte: per esempio, è stato considerato sia il caso della squadra formata, *nell'ordine*, da Antonio e Massimo, sia il caso della squadra formata, *nell'ordine*, da Massimo e Antonio. Per correggere la sovrastima ottenuta dobbiamo dividere 6 per 2, ottenendo così la risposta corretta: 3.

Riflettendo sull'utilizzo che abbiamo fatto del principio di moltiplicazione, ci rendiamo conto che l'errore è consistito nell'averlo applicato troppo superficialmente, senza controllare *se* una sequenza di scelte definisce *univocamente* una squadra.

In effetti è vero che a ogni sequenza di due scelte corrisponde una e una sola squadra, ma **non** è vero che, *viceversa*, a ogni squadra corrisponde una e una sola sequenza di scelte.
Per esempio, la squadra formata da Antonio e Massimo può ottenersi scegliendo prima Antonio e poi Massimo, *oppure* scegliendo prima Massimo e poi Antonio.
Non erano dunque soddisfatte tutte le ipotesi necessarie per potere applicare il principio fondamentale del calcolo combinatorio.

Esercizi p. 116

2. Disposizioni e permutazioni

In questo paragrafo, vogliamo costruire dei modelli generali di riferimento, per risolvere problemi che si possono assimilare al conteggio di «parole» *ordinate*.

Disposizioni semplici e permutazioni

Consideriamo il seguente problema.

◆ PROBLEMA
A una gara cui partecipano 10 concorrenti, quante sono le possibili classifiche dei primi 3?

Osserviamo che:
- per il primo posto possiamo scegliere tra 10 possibilità;
- per il secondo posto possiamo scegliere tra 9 $(10 - 1)$ possibilità;
- per il terzo posto possiamo scegliere tra 8 $(10 - 2)$ possibilità.

Il numero complessivo di classifiche possibili, per il principio fondamentale del calcolo combinatorio, è quindi:

$$10 \cdot 9 \cdot 8$$

Ogni classifica si può assimilare a una *sequenza ordinata* di 3 atleti scelti tra 10, ammettendo che ogni atleta possa essere scelto una e una sola volta.
Più in generale si pone il problema seguente: «dati n oggetti, quante sono le possibili sequenze ordinate di k oggetti, scelti tra gli n assegnati con il vincolo di non ripetere gli oggetti?».
Alle sequenze di questo tipo si dà un nome particolare.

DEFINIZIONE | Disposizioni semplici

Dati n oggetti distinti, si chiama **disposizione semplice** (o semplicemente **disposizione**) degli n oggetti in k posti, con $k \leq n$, ogni sequenza *ordinata* di k oggetti scelti tra quelli assegnati con il vincolo di non ripetere gli oggetti.

MODI DI DIRE
Le disposizioni di n oggetti in k posti si chiamano anche disposizioni di n oggetti **di classe** k.

Ragionando come nel problema poc'anzi esaminato si giunge a formulare il seguente teorema.

TEOREMA 1 | Numero di disposizioni semplici

Il numero complessivo di **disposizioni di n oggetti in k posti**, indicato con il simbolo $D_{n,k}$, è dato dalla formula:

$$D_{n,k} = \underbrace{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots\ldots \cdot (n-k+1)}_{\text{prodotto di } k \text{ fattori decrescenti}} \qquad [1]$$

CON LA CALCOLATRICE
Le calcolatrici scientifiche consentono il calcolo delle disposizioni semplici con l'apposito tasto, spesso denotato con nPr, che ha lo stesso significato di $D_{n,r}$.

Per esempio:

$$D_{5,3} = \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3}_{\text{3 fattori decrescenti}} = 60$$

$$D_{7,4} = \underbrace{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}_{\text{4 fattori decrescenti}} = 840$$

ESEMPI Problemi che hanno come modello le disposizioni semplici

a. A una corsa di cavalli ci sono 15 cavalli in gara. Quante classifiche possibili dei primi tre ci possono essere?

Ogni classifica dei primi tre cavalli si può assimilare a una disposizione di 15 oggetti in 3 posti, quindi il numero totale di tutte le possibili classifiche è:

$$D_{15,3} = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$$

b. Un'urna contiene 10 palline numerate 1, 2, 3, ..., 10. Se ne estraggono successivamente quattro, senza rimettere la pallina estratta nell'urna prima di estrarre la successiva. Quante diverse estrazioni sono possibili, tenendo conto dell'ordine delle estrazioni?

Ogni estrazione delle quattro palline si può assimilare a una disposizione di 10 oggetti in 4 posti, quindi il numero complessivo di estrazioni possibili è:

$$D_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

RICORDA
Le disposizioni (semplici) sono i modelli adatti ad affrontare problemi combinatori in cui:
– *è importante l'ordine*
– *gli oggetti non possono ripetersi.*

Nel caso particolare in cui $n = k$, una disposizione di n oggetti in k posti equivale a un *ordinamento* degli n oggetti e viene chiamata **permutazione**.

DEFINIZIONE | Permutazione

Si chiama **permutazione** di n oggetti distinti ogni **ordinamento** degli n oggetti dati.

Dalla formula [1] segue subito che il numero di permutazioni di n oggetti, indicato solitamente con il simbolo P_n, è dato da:

$$P_n = D_{n,n} = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Il prodotto $n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ si indica a sua volta con il simbolo $n!$, che si legge «**fattoriale** di n» o «n **fattoriale**». Il simbolo $n!$ resta così definito per ogni n intero positivo, mentre per $n = 0$ si pone, per definizione, $0! = 1$.

OSSERVA
Il simbolo $n!$ è definito per ogni $n \in \mathbb{N}$ e non è mai nullo.

TEOREMA 2 | Numero di permutazioni

Il numero complessivo di **permutazioni di n oggetti** distinti è dato dalla formula:

$$P_n = n!$$

Per esempio:

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad \text{e} \quad 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

ESEMPI Problemi che hanno come modello le permutazioni

a. In quanti modi possibili 6 persone possono essere disposte in fila indiana?

Ci sono tanti modi di disporre le persone in fila indiana quante le permutazioni di 6 oggetti; quindi il numero complessivo di modi di disporre le persone è uguale a:

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

b. Quanti sono i possibili anagrammi (anche privi di significato) della parola «cielo»?

Sono tanti quante le permutazioni delle cinque lettere *c*, *i*, *e*, *l*, *o* quindi sono:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

c. Al corso di balli sudamericani sono iscritti 4 ragazzi e 4 ragazze. Calcola tutti i possibili accoppiamenti per il prossimo samba.

Il primo ballerino può avere come partner una qualsiasi delle 4 ballerine, il secondo ballerino una qualsiasi delle rimanenti 3, e così via. Perciò il numero degli accoppiamenti possibili è dato da:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Disposizioni con ripetizione

Continuiamo la nostra analisi, ragionando sul seguente problema.

◆ **PROBLEMA**
In quanti modi diversi è possibile riempire una colonna del totocalcio?

Ogni colonna è costituita da 14 caselle, ciascuna delle quali deve essere riempita con uno dei tre simboli 1, 2 o X.
Dunque:
- per la prima casella abbiamo 3 possibilità di scelta (1, 2, X);
- per la seconda casella possiamo ancora scegliere tra 3 possibilità;
- e così via, fino alla quattordicesima casella.

Complessivamente una colonna può essere riempita in:

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 3}_{\text{14 volte}} = 3^{14}$$

modi diversi.

La differenza di questo problema rispetto a quelli considerati nel precedente sottoparagrafo, è che qui gli oggetti (i simboli 1, 2, X) *possono essere scelti più di una volta, ossia possono essere ripetuti.*
Più in generale si pone il seguente problema: «dati n oggetti, quante sono le possibili *sequenze ordinate* di k oggetti, scelti tra quelli assegnati ammettendo che *sia possibile ripetere* gli oggetti?».
Alle sequenze di questo tipo si dà un nome particolare.

DEFINIZIONE | Disposizioni con ripetizione

Dati n oggetti distinti, si chiama **disposizione con ripetizione** degli n oggetti in k posti, ogni sequenza *ordinata* di k oggetti, scelti tra quelli assegnati ammettendo che sia possibile ripetere gli oggetti.

OSSERVA
Poiché è ammesso ripetere gli oggetti, può essere $k \geq n$.

Ragionando come nel problema iniziale si giunge al seguente teorema.

TEOREMA 3 | Numero di disposizioni con ripetizione

Il numero complessivo di **disposizioni con ripetizione** di n oggetti in k posti, indicato con il simbolo $D^*_{n,k}$ è dato dalla formula:

$$D^*_{n,k} = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n \cdot n}_{\text{prodotto di } k \text{ fattori uguali a } n} = n^k$$

RICORDA
Le disposizioni con ripetizione sono i modelli adatti ad affrontare problemi combinatori in cui:
– *è importante l'ordine*
– *gli oggetti possono ripetersi.*

ESEMPI Problemi che hanno come modello le disposizioni con ripetizione

a. Un numero di telefono di cellulare di dieci cifre inizia con 347. Quanti numeri di telefono di questo tipo ci possono essere?

Le sette cifre rimanenti, dopo 347, possono essere ciascuna un numero qualsiasi tra 0 e 9 (per ogni cifra ci sono dunque dieci possibilità). Esistono perciò tanti numeri di cellulare quante le disposizioni con ripetizione di 10 oggetti in 7 posti, cioè 10^7.

b. Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla: A, B, C, oppure D. In quanti modi può essere compilato il test?

Ciascuna delle 10 domande prevede 4 possibili risposte, quindi il numero cercato è $4^{10} = 1\,048\,576$.

Permutazioni con ripetizioni

Consideriamo il seguente problema.

◆ **PROBLEMA**
Quanti sono gli anagrammi della parola «mamma»?

ATTENZIONE!
Salvo avviso contrario, quando parleremo di «anagramma» intenderemo riferirci anche agli anagrammi privi di significato.

Il problema si presenta differente da quello che abbiamo affrontato nel precedente sottoparagrafo, quando abbiamo calcolato gli anagrammi della parola «cielo» perché in quest'ultima parola le lettere sono tutte *distinte*, mentre nella parola «mamma» la lettera «m» è ripetuta 3 volte e la lettera «a» è ripetuta 2 volte.
Più in generale si pone il seguente problema: «quante sono le possibili permutazioni di n oggetti, nell'ipotesi che essi **non** siano tutti *distinti*?».

DEFINIZIONE | Permutazioni con ripetizione

Si chiama **permutazione con ripetizione** ogni permutazione di n oggetti **non** tutti distinti tra loro.

Come possiamo calcolare il numero delle permutazioni con ripetizione? Ragioniamo sul problema da cui siamo partiti di trovare il numero totale, diciamo x, degli anagrammi della parola «mamma».
Cominciamo con il distinguere con un indice le tre lettere «m»:

$$\mathrm{m_1am_2m_3a} \quad [2]$$

e osserviamo che, per ognuna delle x permutazioni della parola mamma, possiamo costruire 3! permutazioni della parola $\mathrm{m_1am_2m_3a}$, permutando tra loro le 3 lettere $\mathrm{m_1}$, $\mathrm{m_2}$, $\mathrm{m_3}$. Dunque le possibili permutazioni della parola [2] sono $x \cdot 3!$.
Distinguiamo ora con un indice anche le 2 lettere «a»:

$$\mathrm{m_1a_1m_2m_3a_2} \quad [3]$$

Ragionando come nel caso precedente, concludiamo che le permutazioni della parola [3] saranno $x \cdot 3! \cdot 2!$. D'altra parte le permutazioni della [3] non sono altro che le permutazioni di 5 oggetti distinti, quindi il loro numero totale deve essere 5!. Ne viene l'equazione seguente, da cui è possibile ricavare il numero incognito x:

$$x \cdot 3! \cdot 2! = 5! \Rightarrow x = \frac{5!}{3! \cdot 2!}$$

Il ragionamento poc'anzi esposto può essere generalizzato e conduce al seguente teorema.

TEOREMA 4 | Numero di permutazioni con ripetizione

Dati n oggetti, di cui a_1 uguali tra loro, a_2 uguali tra loro (e distinti dai precedenti); a_k uguali tra loro (e distinti dai precedenti) con $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$, le permutazioni distinte di questi n oggetti sono:

$$\frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_k!}$$

ESEMPI Problemi che hanno come modello permutazioni con ripetizione

a. Quanti sono gli anagrammi della parola «matematica»?

La parola matematica è formata da 10 lettere, di cui la m si ripete 2 volte, la a si ripete 3 volte, la t si ripete 2 volte, mentre la e, la c e la i compaiono 1 sola volta. Quindi il numero dei possibili anagrammi è

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151\,200$$

b. In quanti modi diversi una colonna della schedina può essere riempita con 4 segni 1, 6 segni X e 4 segni 2?

Ogni modo di riempire la colonna si può assimilare a una permutazione di 14 elementi di cui 4 coincidenti con 1, 6 coincidenti con X e 4 coincidenti con 2; pertanto il numero complessivo di modi è:

$$\frac{14!}{4! \cdot 6! \cdot 4!} = 2\,101\,210$$

Esercizi p. 118

3. Combinazioni

In questo paragrafo, vogliamo costruire dei modelli generali di riferimento, per risolvere problemi che si possono assimilare al conteggio di «parole» **non** *ordinate*.

Combinazioni

Consideriamo il seguente problema.

PROBLEMA
Gioco al lotto i cinque numeri: 1, 2, 3, 4, 5. In quanti modi posso fare terno?

Rispondere alla domanda posta da questo problema equivale a determinare quanti terni è possibile costruire utilizzando i cinque numeri giocati: 1, 2, 3, 4, 5. I terni devono considerarsi **non** ordinati e in essi non possono esserci numeri ripetuti: per esempio, alcuni possibili terni sono $\{1, 2, 3\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 5\}$, ... Ai raggruppamenti di oggetti non ordinati e senza ripetizioni si dà un nome particolare.

DEFINIZIONE | Combinazione

Dati n oggetti distinti, si chiama **combinazione** degli n oggetti di classe k, ogni raggruppamento **non** *ordinato* di k oggetti scelti tra quelli assegnati, con il vincolo di **non** ripetere gli oggetti.

Come è noto, dato un *insieme* di oggetti (dove il termine «insieme» è da intendersi nell'accezione matematica), gli oggetti **non** possono essere ripetuti e **non** viene preso in considerazione l'ordine degli oggetti: una combinazione di n oggetti di classe k si può perciò identificare con un *sottoinsieme* di k elementi dell'insieme formato dagli n oggetti considerati.

ATTENZIONE!
Il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ è definito a condizione che $n \geq 1$ e $0 \leq k \leq n$.

DEFINIZIONE | Coefficiente binomiale

Il numero complessivo di combinazioni di n oggetti di classe k viene indicato con il simbolo $C_{n,k}$ o con il simbolo $\binom{n}{k}$ che prende il nome di **coefficiente binomiale** e si legge «n su k».

Quali sono i valori di $\binom{n}{k}$? Proviamo a ragionare inizialmente sul caso particolare proposto all'inizio, cioè sul problema di determinare tutti i sottoinsiemi di 3 elementi dell'insieme $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; in altri termini ci poniamo l'obiettivo di determinare $C_{5,3}$, ovvero $\binom{5}{3}$.

Non possiamo applicare lo schema delle scelte successive (ossia il principio fondamentale del calcolo combinatorio) perché un insieme è determinato soltanto dai suoi elementi, a *prescindere dall'ordine*. Possiamo però osservare che, costruendo le permutazioni di *tutti* i sottoinsiemi di 3 elementi di S (ci sono 3! permutazioni per ogni sottoinsieme), si ottengono *tutte* le disposizioni dei cinque elementi di S in 3 posti (che sappiamo essere uguali a $D_{5,3}$). Pertanto:

RIFLETTI
Il principio fondamentale del calcolo combinatorio non può essere utilizzato perché tre scelte successive di un elemento da un insieme di 5 elementi non determinano in modo *univoco* un sottoinsieme di 3 elementi dell'insieme originario. È vero infatti che le tre scelte individuano un unico sottoinsieme di 3 elementi, ma **non** è vero che, *viceversa*, ogni sottoinsieme è individuato soltanto dalle tre scelte effettuate (scelte che differiscono solo per l'ordine determinano infatti lo stesso sottoinsieme).

$$\underbrace{C_{5,3}}_{\text{il numero complessivo dei sottoinsiemi di 3 elementi dell'insieme } S} \cdot \underbrace{3!}_{\text{il numero di permutazioni di ciascun sottoinsieme}} \underbrace{=}_{\text{è uguale al}} \underbrace{D_{5,3}}_{\text{numero complessivo di terne ordinate che si possono costruire con gli elementi dell'insieme } S}$$

$$\Rightarrow C_{5,3} = \frac{D_{5,3}}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$$

Questo ragionamento si può generalizzare e porta a concludere che:

$$\boxed{C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!}}$$

Possiamo enunciare pertanto il teorema seguente.

TEOREMA 5 | Numero di combinazioni di n oggetti di classe k

Il numero complessivo di **combinazioni** di n oggetti di classe k, indicato con il simbolo $C_{n,k}$ è dato dalla formula:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots\ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \qquad [4]$$

CON LA CALCOLATRICE
Puoi calcolare rapidamente il valore di un coefficiente binomiale tramite la calcolatrice di solito premendo il tasto nCr che ha il significato di $C_{n,r}$.

Per esempio:

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

È importante mettere in rilievo alcune *proprietà* dei coefficienti binomiali.

1. Il simbolo $\binom{n}{0}$ rappresenta il numero dei sottoinsiemi di 0 elementi di un insieme di n elementi; poiché l'unico sottoinsieme di 0 elementi di qualunque insieme è l'insieme vuoto, risulta:

$$\boxed{\binom{n}{0} = 1} \qquad \text{per ogni } n \in \mathbf{N} - \{0\}$$

2. Analogamente, il simbolo $\binom{n}{1}$ rappresenta il numero dei sottoinsiemi di 1 elemento di un insieme di n elementi; poiché di sottoinsiemi siffatti ne esistono esattamente n, risulta:

$$\binom{n}{1} = n \qquad \text{per ogni } n \in \mathbf{N} - \{0\}$$

3. In base alla definizione di fattoriale, è immediato verificare che risulta:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad [5]$$

Infatti l'espressione al secondo membro della [5] si semplifica e si ottiene la [4]. La [5] è detta *formula dei 3 fattoriali* (di De Moivre).

4. Dalla [5] si deduce immediatamente che:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad [6]$$

Questa proprietà è utile per velocizzare il calcolo dei coefficienti binomiali quando $k > \frac{n}{2}$. Per esempio, per calcolare $\binom{10}{8}$ conviene procedere così:

$$\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2!} = 45$$

OSSERVA

Per $k = 0$ la [5] fornisce: $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = \frac{1}{0!}$, che è uguale a 1 perché abbiamo posto per definizione $0! = 1$. Si comprende quindi il motivo di questa definizione: è necessaria per far sì che la [5] valga anche per $k = 0$.

MODI DI DIRE

La [6] è anche detta *legge delle classi complementari.*

ESEMPI Problemi che hanno come modello combinazioni

a. Una grossa azienda deve inviare 2 dei suoi 8 ispettori a controllare una filiale lontana. In quanti modi possibili il capo dell'ufficio può determinare la delegazione di 2 ispettori?

Determinare una delegazione equivale a determinare un sottoinsieme di 2 elementi dell'insieme formato dagli 8 ispettori. Quindi il capo dell'ufficio ha $\binom{8}{2}$ possibilità di scelta. Le delegazioni possibili sono quindi:

$$\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2!} = \frac{56}{2} = 28$$

b. Quanti sono i possibili terni che si possono giocare al gioco del lotto?

Un terno al gioco del lotto equivale a un sottoinsieme di 3 numeri dell'insieme $\{1, 2, 3, \ldots, 90\}$.
I possibili terni che si possono giocare sono dunque complessivamente:

$$\binom{90}{3} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 30 \cdot 89 \cdot 44 = 117\,480$$

RICORDA

Le combinazioni (semplici) sono i modelli adatti a descrivere problemi in cui:
– *non è importante l'ordine*
– *gli oggetti non possono ripetersi.*

Combinazioni con ripetizione

Riconsideriamo uno dei problemi proposti nel **Paragrafo 1**:

◆ **PROBLEMA**

Quanti possibili tipi di confezioni diverse di 10 caramelle ai gusti di menta, fragola o limone si possono confezionare (ammettendo che le caramelle dello stesso gusto siano tutte dello stesso tipo e quindi indistinguibili l'una dall'altra)?

Ogni possibile confezione si può assimilare a un raggruppamento di 10 lettere, scelte tra M, F, L (M = menta, F = fragola, L = limone). Per esempio, una confezione contenente 5 caramelle alla menta, 2 al limone e 3 alla fragola potrà essere identificata dal raggruppamento:

MMMMMLLFFF **[7]**

Osserviamo che in ogni raggruppamento di lettere di questo tipo:

1. le lettere possono essere *ripetute* (perché in una confezione possono essere inserite più caramelle dello stesso tipo) oppure qualche lettera può non comparire (per esempio è possibile che la confezione non contenga caramelle alla menta);

2. l'*ordine* delle lettere **non** ha importanza; per esempio il raggruppamento:

   MMMLLFFFMM

   rappresenta ancora una confezione contenente 5 caramelle alla menta, 2 al limone e 3 alla fragola, confezione da considerarsi *uguale* a quella rappresentata dal raggruppamento **[7]**.

In sostanza si possono determinare tanti tipi di confezioni quanti i raggruppamenti di 10 lettere, ciascuna scelta nell'insieme $\{M, F, L\}$, considerando *uguali* due raggruppamenti che differiscono *solo per l'ordine* e ammettendo che sia possibile *ripetere* le lettere. Un problema di questo tipo si inquadra nell'ambito del calcolo di *combinazioni* in cui gli elementi possono essere *ripetuti*.

DEFINIZIONE | Combinazioni con ripetizione

Dati n oggetti distinti, si chiama **combinazione con ripetizione** degli n oggetti **di classe k**, ogni raggruppamento **non** *ordinato* di k oggetti, scelti tra quelli assegnati, ammettendo la possibilità di ripetere gli oggetti.

È importante osservare che, essendo ammesso ripetere gli oggetti, può essere $k \geq n$.
Per stabilire *quante sono* le combinazioni con ripetizione di n oggetti di classe k, ritorniamo a ragionare sul problema da cui siamo partiti, che chiedeva in pratica di determinare le combinazioni con ripetizione di $n = 3$ oggetti (le lettere M, F, L) di classe $k = 10$. Osserviamo che una confezione resta univocamente individuata una volta che vengano stabiliti i numeri x_1, x_2 e x_3, rispettivamente di caramelle alla menta, alla fragola e al limone che deve contenere. Poiché ogni confezione deve contenere 10 caramelle i numeri x_1, x_2 e x_3 devono soddisfare l'equazione:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \qquad \textbf{[8]}$$

Dunque il problema di determinare il numero di tutti i possibili tipi di confezioni equivale a quello di stabilire il numero di terne (x_1, x_2, x_3), con $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{N}$, che soddisfano l'equazione **[8]**.
Per risolvere quest'ultimo problema ragioniamo come segue.
Sia (x_1, x_2, x_3) una soluzione dell'equazione **[8]**, per esempio (3, 2, 5).
Rappresentiamo questa soluzione con una sequenza di asterischi e barre come segue:

$$\underbrace{*\,*\,*}_{x_1}\,|\,\underbrace{*\,*}_{x_2}\,|\,\underbrace{*\,*\,*\,*\,*}_{x_3}$$

Gli asterischi * servono a rappresentare i valori di x_1, x_2, x_3 e le barre | a separarli

Viceversa, ogni sequenza costituita da 10 asterischi e 2 barre verticali individua una terna soluzione; per esempio la sequenza:

$$| * * * * | * * * * * *$$

individua la soluzione (0, 4, 6).
Dunque l'insieme delle terne cercate è in corrispondenza biunivoca con le permutazioni di 12 oggetti, di cui 10 uguali tra loro (gli asterischi) e 2 uguali tra loro e distinti dai precedenti (le barre).
Le terne cercate sono dunque in totale:

$$\frac{12!}{10! \cdot 2!} = \binom{12}{10} = 66$$

Il ragionamento precedente si può generalizzare. Il numero di combinazioni con ripetizione di n oggetti di classe k equivale al numero di n-uple $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, con $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{N}$, che soddisfano l'equazione:

$$x_1 + \dots + x_n = k$$

Le n-uple soluzioni di questa equazione sono in corrispondenza biunivoca con le permutazioni di $k + (n - 1)$ oggetti, di cui k uguali tra loro (gli asterischi) e $(n - 1)$ uguali tra loro e distinti dai precedenti (le barre). Il numero totale di queste permutazioni è uguale a:

$$\frac{(n + k - 1)!}{k!(n - 1)!} = \binom{n + k - 1}{k}$$

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema.

TEOREMA 6 | Combinazioni con ripetizione di *n* oggetti di classe *k*

Il numero di combinazioni con ripetizione di n oggetti di classe k, che indichiamo con $C^*_{n,k}$, equivale al numero di n-uple di interi non negativi $(x_1, \dots, x_n)$ soluzioni dell'equazione:

$$x_1 + \dots + x_n = k$$

ed è assegnato dalla formula:

$$C^*_{n,k} = \binom{n + k - 1}{k}$$

RIFLETTI

L'idea alla base della risoluzione del problema delle confezioni di caramelle è la costruzione di opportune *corrispondenze biunivoche* che consentono di tradurre il problema iniziale nel conteggio di oggetti che già sappiamo calcolare; schematicamente abbiamo osservato che:

Il numero di confezioni di caramelle

↕ è in corrispondenza biunivoca con

Le soluzioni dell'equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 10$

↕ sono in corrispondenza biunivoca con

Le sequenze ordinate costituite da 10 asterischi e 2 barre

↕ sono in corrispondenza biunivoca con

Le permutazioni di 12 oggetti, di cui 10 uguali tra di loro e 2 uguali tra loro e diversi dai precedenti

ESEMPIO Problemi che hanno come modello combinazioni con ripetizione

Quanti tipi di confezioni diverse di 10 caramelle ai gusti di menta, fragola o limone si possono confezionare, contenenti almeno tre caramelle di gusto diverso?

Diversamente dal caso del problema precedente, ora si vuole assicurare almeno un assaggio di tutti e tre i gusti. Occorre dunque inserire inizialmente nel sacchetto le tre caramelle richieste (una per ciascuno dei tre gusti); a questo punto potremo completare il sacchetto in tanti modi quante sono le possibili confezioni contenenti $10 - 3 = 7$ caramelle ai gusti menta, fragola o limone.
Applicando la formula otteniamo:

$$C^*_{3,7} = \binom{9}{7} = \binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2!} = 36$$

In conclusione le possibili confezioni contenenti 10 caramelle, di cui una almeno per ciascuno dei tre gusti, sono in tutto 36.

RICORDA

Le combinazioni con ripetizione sono i modelli adatti a descrivere problemi in cui:
– *non è importante l'ordine*
– *gli oggetti possono ripetersi.*

COLLEGHIAMO I CONCETTI Formule e problemi di calcolo combinatorio

- Abbiamo via via trovato le formule di conteggio relative a tutti e quattro i modelli di riferimento introdotti nel **Paragrafo 1**.

Numero di «parole» di k caratteri costruite da un alfabeto di n simboli distinti	senza ripetizioni	con ripetizioni
ordinate	$D_{n,k} = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ Nel caso particolare in cui $n = k$: $D_{n,n} = P_n = n!$	$D^*_{n,k} = n^k$
non ordinate	$C_{n,k} = \binom{n}{k}$	$C^*_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$

- Il numero di parole ordinate di n caratteri, costruite a partire da un alfabeto di n simboli **non** tutti distinti, di cui a_1 uguali tra loro, a_2 uguali tra loro (e distinti dai precedenti), ..., a_k uguali tra loro (e distinti dai precedenti) con $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$, è assegnato dalla formula delle permutazioni con ripetizione:

$$\frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_k!}$$

- Alcuni problemi di calcolo combinatorio richiedono l'esecuzione di vari conteggi «intermedi» per giungere alla soluzione. In questi casi occorre prestare attenzione a stabilire se i vari conteggi «intermedi» alla fine vanno *moltiplicati* o *sommati*. Rifletti sui seguenti due esempi.

Esempio	Metodo
Supponiamo di estrarre 5 carte (una mano) da un mazzo di 32 carte: quante mani contengono esattamente due donne ed esattamente un fante? Ricorda che un mazzo di 32 carte contiene 8 carte di ogni seme: 7, 8, 9, 10, fante, donna, re e asso.	Una mano come quella richiesta è univocamente determinata effettuando le seguenti scelte: – 2 donne (tra le quattro disponibili); – 1 fante (tra i quattro disponibili); – 2 carte (tra quelli che restano escludendo le donne e i fanti). Le tre scelte possono avvenire rispettivamente in: $\binom{4}{2}, \binom{4}{1}, \binom{24}{2}$ modi. Per il principio fondamentale del calcolo combinatorio, il numero totale di mani che soddisfano le condizioni richieste è: $\underbrace{\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{24}{2}}_{\text{i conteggi iniziali vanno moltiplicati}} = 6 \cdot 4 \cdot 276 = 6624$
Supponiamo di estrarre 5 carte (una mano) da un mazzo di 32 carte: quante mani contengono almeno tre re?	Una mano contiene almeno tre re se e solo se contiene esattamente 3 re o esattamente 4 re. Le mani che contengono esattamente 3 re (e quindi altre 2 carte che non sono re) sono: $\binom{4}{3} \cdot \binom{28}{2}$ Le mani che contengono esattamente 4 re (e quindi 1 altra carta che non sia un re) sono: $\binom{4}{4} \cdot \binom{28}{1}$ L'insieme A costituito dalle mani contenenti esattamente 3 re e l'insieme B costituito dalle mani contenenti esattamente 4 re sono *disgiunti*, quindi il numero totale di mani che contengono almeno tre re è la *somma* degli elementi di A e di quelli di B: $\underbrace{\binom{4}{3} \cdot \binom{28}{2} + \binom{4}{4} \cdot \binom{28}{1}}_{\text{i conteggi iniziali vanno sommati}} = 4 \cdot 378 + 1 \cdot 28 = 1540$

Esercizi p. 124

4. Il teorema del binomio di Newton

Lo sviluppo della potenza del binomio con il triangolo di Tartaglia

Hai già visto nei tuoi studi precedenti la regola per calcolare lo sviluppo della potenza di un binomio basata sul triangolo di Tartaglia e il modo in cui si costruisce tale triangolo. Ricordiamo brevemente i punti fondamentali.

1. Le prime righe del triangolo di Tartaglia sono riportate qui sotto:

1	← riga 0
1 1	← riga 1
1 2 1	← riga 2
1 3 3 1	← riga 3
1 4 6 4 1	← riga 4
1 5 10 10 5 1	← riga 5
1 6 15 20 15 6 1	← riga 6

2. Il procedimento per costruire il triangolo di Tartaglia è molto semplice.
Se indichiamo con x e y due numeri successivi posti su di una stessa riga, l'elemento posto fra di essi, nella riga immediatamente al di sotto è la loro somma:

$$\begin{array}{ccc} x & & y \\ & x+y & \end{array}$$

Per esempio, la riga 5 può essere dedotta dalla riga 4 come segue:

1	4	6	4	1		← riga 4
1	1 + 4	4 + 6	6 + 4	4 + 1	1	
1	5	10	10	5	1	← riga 5

Continuando con questo procedimento si possono costruire tante righe quante si vogliono del triangolo di Tartaglia. Per esempio, puoi ricavare la settima riga e verificare che coincide con:

1 7 21 35 35 21 7 1

3. Lo sviluppo della potenza $(a+b)^n$, può essere eseguito secondo la seguente regola, che chiede la costruzione della n-esima riga del triangolo di Tartaglia:

REGOLA | Potenza n-esima di un binomio

Lo sviluppo di $(a+b)^n$ è un polinomio **omogeneo** di grado n, **ordinato** secondo le potenze **decrescenti** di $\boldsymbol{a}$ (a partire da quella di grado n) e **crescenti** di $\boldsymbol{b}$ (a partire da quella di grado 0), i cui **coefficienti** sono quelli della n-esima riga del **triangolo di Tartaglia**.

ESEMPIO Sviluppo di un binomio secondo la regola del triangolo di Tartaglia

Calcoliamo $(a+b)^5$.

Lo sviluppo della potenza sarà un polinomio *omogeneo* di quinto grado, ordinato secondo le potenze decrescenti di a (iniziando da quella di grado 5) e crescenti di b (a partire da quella di grado 0); si tratterà quindi di un polinomio del tipo:

$$\ldots\, a^5b^0 + \ldots\, a^4b^1 + \ldots\, a^3b^2 + \ldots\, a^2b^3 + \ldots\, ab^4 + \ldots\, a^0b^5 \qquad [10]$$

DALLA STORIA

Sembra che il triangolo di Tartaglia sia apparso per la prima volta in lavori di matematici islamici e cinesi del secolo XI. Tuttavia esso è diventato noto come «triangolo di Tartaglia», dal soprannome del matematico italiano *Nicolò Fontana* (1500-1559) che per primo lo usò sistematicamente, o come «triangolo di Pascal», dal nome del matematico francese *Blaise Pascal* (1623-1662) che ne scoprì molte proprietà.

Con GeoGebra
Potenza n-esima di un binomio

Restano da determinare i coefficienti che abbiamo provvisoriamente lasciato in sospeso ponendo dei puntini. In base alla regola enunciata poc'anzi, essi coincidono con i numeri della *quinta riga* del triangolo di Tartaglia. Dal momento che la quinta riga del triangolo di Tartaglia è:

1 5 10 10 5 1

possiamo completare il polinomio [10], ottenendo così che:

$$(a+b)^5 = 1 \cdot a^5 b^0 + 5 \cdot a^4 b^1 + 10 \cdot a^3 b^2 + 10 \cdot a^2 b^3 + 5 \cdot ab^4 + 1 \cdot a^0 b^5$$

Lo sviluppo della potenza del binomio secondo la formula di Newton

Il metodo dello sviluppo di $(a+b)^n$ basato sul triangolo di Tartaglia è efficiente per piccoli valori di n, ma diventa scomodo al crescere del valore di n, perché la costruzione dell'n-esima riga del triangolo di Tartaglia richiede la costruzione di *tutte* le righe precedenti l'ennesima. Ora che abbiamo presentato le prime nozioni di calcolo combinatorio, possiamo introdurre un nuovo metodo, che permette di superare questo inconveniente. Cominciamo con il ragionare su un caso semplice, lo sviluppo di $(a+b)^3$:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Ciascun termine dello sviluppo di $(a+b)^3$ si ottiene dalla somma algebrica dei prodotti ottenuti scegliendo o a o b da ciascuno dei tre fattori:

$$(a+b)(a+b)(a+b)$$

e moltiplicando tra loro le variabili scelte.
Il coefficiente di a^3 è 1 perché a^3 è ottenuto solo dal prodotto aaa (corrispondente alla scelta della variabile a da ciascuno dei tre fattori).
Il coefficiente di a^2b, invece, è 3 perché a^2b si ottiene da tre prodotti: aab, aba e baa. In altre parole, i modi in cui può ottenersi a^2b sono tanti quante le permutazioni di 3 lettere, di cui due uguali ad a e una uguale a b: tali modi sono quindi $\frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$.

Questo ragionamento può essere generalizzato: lo sviluppo di $(a+b)^n$ ha come termini monomi di grado n, la cui parte letterale è della forma $a^{n-k}b^k$, con $k = 0, 1, \ldots, n$: il coefficiente del monomio $a^{n-k}b^k$ è uguale al numero delle possibili permutazioni di n lettere, di cui $n-k$ uguali ad a e k uguali a b, quindi è uguale a:

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

Ne segue il seguente teorema.

TEOREMA 7 | Formula del binomio di Newton

Sia n un numero intero positivo; allora per ogni $a, b \in \mathbf{R}$:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n \quad [11]$$

L'uguaglianza [11] può essere espressa sinteticamente nella forma:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$$

La formula del binomio di Newton spiega perché il numeri $\binom{n}{k}$ vengono chiamati coefficienti *binomiali*: il motivo risiede nel fatto che questi numeri sono i coefficienti dello sviluppo della potenza n-esima del *binomio* $(a+b)$.

OSSERVA

Il coefficiente del monomio $a^{n-k}b^k$ è uguale a $\binom{n}{k}$, dove:

– n è il *grado* del monomio;
– k è l'esponente di b.

In modo equivalente, si sarebbe potuto sostituire k con l'esponente di a, in virtù della proprietà:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

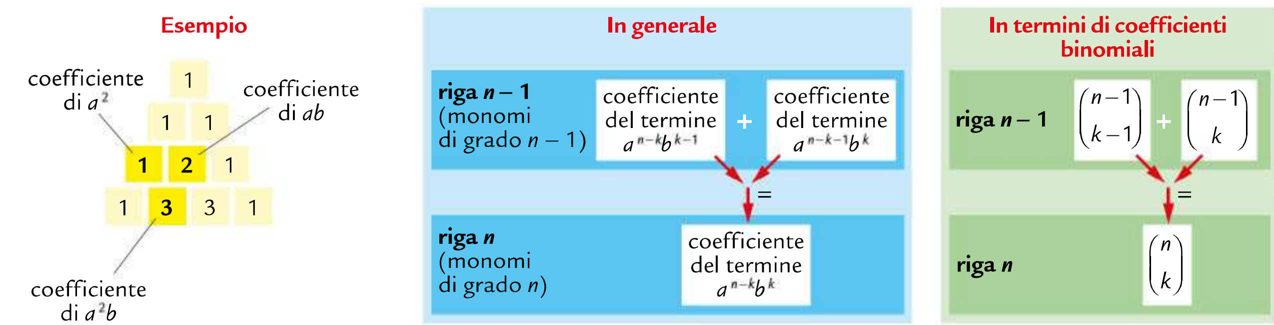
ESEMPIO Sviluppo di un binomio secondo la formula del binomio di Newton

Calcoliamo $(a+b)^5$, secondo la formula del binomio di Newton.

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5 =$$

$$= 1\,a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5\,ab^4 + b^5$$

La regola di costruzione del triangolo di Tartaglia può essere riletta in termini di coefficienti binomiali, come illustrato nel seguente schema.



Se ne deduce la seguente proprietà, che ti invitiamo a dimostrare algebricamente per esercizio, utilizzando la definizione di coefficiente binomiale:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad [12]$$

MODI DI DIRE

L'uguaglianza [12] è anche nota come «formula di Stifel» in omaggio al matematico tedesco Michael Stifel (1487-1567).

IN UN ALTRO MODO **Una diversa deduzione dell'identità [12]**

Si può dedurre la [12] anche ragionando da un diverso punto di vista che ora illustriamo.

Consideriamo un insieme A di n elementi e fissiamo uno di questi elementi, che chiamiamo a; osserviamo ora che:

Numero dei sottoinsiemi di k elementi di A	=	Numero dei sottoinsiemi di k elementi di A che contengono l'elemento a	+	Numero dei sottoinsiemi di k elementi di A che **non** contengono l'elemento a
↓		↓		↓
Sappiamo essere uguale a $\binom{n}{k}$		Sono tanti quanti i modi di scegliere i $(k-1)$ elementi del sottoinsieme diversi da a tra gli $(n-1)$ elementi di A diversi da a, quindi: $\binom{n-1}{k-1}$		Sono tanti quanti i modi di scegliere i k elementi del sottoinsieme tra gli $(n-1)$ elementi di A diversi da a, quindi: $\binom{n-1}{k}$

Dunque traducendo lo schema in termini di coefficienti binomiali, come spiegato nelle note in rosso, otteniamo l'identità [12].

Esercizi p. 130