Esercizi

1. Introduzione al calcolo combinatorio

Teoria p. 98

Esercizi introduttivi

Per ciascuno dei seguenti problemi, stabilisci se si può assimilare al conteggio di parole ordinate o non ordinate, con o senza ripetizioni. Non è richiesto di risolvere il problema.

1 Un club ha 50 membri, di cui 30 uomini e 20 donne. Si vuole costruire una delegazione di membri del club, costituita da 5 uomini e 5 donne. Quante sono le delegazioni possibili?

2 Quanti numeri interi ci sono, compresi tra 100 e 999, aventi cifre tutte distinte?

3 La combinazione di una cassaforte è costituita da cinque cifre (ciascuna delle quali può essere un numero qualsiasi compreso tra 0 e 9). Quante combinazioni sono possibili?

4 Quanti sono i sottoinsiemi di 3 elementi di un insieme di 10 elementi?

5 Quanti sono i possibili anagrammi (anche privi di significato) della parola «computer»?

6 A una gara partecipano 10 atleti, in quanti modi si può presentare la classifica dei primi tre?

7 In un torneo ogni squadra affronta ciascuna delle altre una e una sola volta. Nel torneo quante partite vengono disputate?

8 Si deve confezionare un sacchetto contenente 20 caramelle, ai gusti di limone, fragola o arancia. In quanti modi si può confezionare il sacchetto, ammettendo che le caramelle in esso contenute possano essere sia di un solo gusto, sia di due gusti, sia di tutti e tre i gusti?

Risolvi i seguenti problemi, utilizzando un diagramma ad albero.

9 Per raggiungere una data località si ha a disposizione il treno o l'aereo. Nel primo caso, per arrivare a destinazione, alla stazione si può scegliere tra un pullman o il taxi o 2 km a piedi. Nel secondo caso all'aeroporto si può noleggiare un'auto o prendere un taxi. In quanti modi diversi si può giungere a destinazione? [5]

10 Il menu di una trattoria offre le seguenti possibilità di scelta. Primi: penne al pesto, risotto ai funghi o gnocchi di patate; secondi: frittura di pesce, braciola di maiale, pollo allo spiedo; infine come dessert si può scegliere tra torta o macedonia. Quanti sono i pranzi completi distinti che la trattoria offre? [18]

11 Il tenente Colombo ama i ragionamenti articolati. O il sospettato confessa o non confessa. Se confessa, si può arrestare; se non confessa, o si contraddice o è coerente. Se si contraddice, si può arrestare; se è coerente o ha un alibi o non ha un alibi. Se ha un alibi si può scagionare; se non ha un alibi si sottoporrà al test del DNA. Se questo è positivo, il sospettato sarà arrestato, altrimenti sarà liberato. In quanti casi si arriva all'arresto? [3]

Problemi sul principio fondamentale del calcolo combinatorio

12 ESERCIZIO GUIDATO

Quante sono le password formate da 5 lettere dell'alfabeto italiano che iniziano con una consonante e finiscono con due vocali, ammettendo che le lettere possano essere ripetute?

Puoi costruire la password con cinque scelte successive:

- per la prima scelta hai 16 possibilità (le 16 consonanti)
- per la seconda scelta hai 21 possibilità (le 21 lettere dell'alfabeto italiano)
- per la terza scelta hai .... possibilità
- per la quarta scelta hai .... possibilità
- per la quinta scelta hai .... possibilità

Per il principio fondamentale del calcolo combinatorio le parole che soddisfano le condizioni richieste sono in totale: $16 \cdot 21^2 \cdot \ldots\ldots = 176\,400$

13 Il comandante di un plotone di 12 soldati deve garantire un turno di guardia all'ingresso principale, all'armeria, all'autorimessa e all'ingresso secondario. In quanti modi diversi può disporre i suoi uomini? [11 880]

14 Il signor Aristide, partendo per una gita, porta con sé quattro magliette di colore diverso, due giacche e tre paia di pantaloni. In quanti modi diversi può vestirsi il sig. Aristide? [24]

15 **E se?** La targa di un motorino è costituita da due lettere, due numeri e due lettere. Supponendo che le lettere possano essere scelte a caso dalle 26 dell'alfabeto anglosassone e che ciascun numero possa essere una cifra qualsiasi tra 0 e 9, quanti motorini diversi si possono immatricolare?

▸ Come cambia la risposta se si considerano le autovetture? Ricorda che la targa di un'auto, rispetto a quella di un motorino, ha tre numeri anziché due. [45 697 600; 456 976 000]

16 Quante password diverse di otto caratteri si possono generare utilizzando per ciascun carattere una cifra compresa tra 0 (incluso) e 9 (incluso)? Aumentando il numero dei caratteri da 8 a 9, di quanto aumenta il numero delle password possibili? [10^8; $9 \cdot 10^8$]

17 Quante diverse password di otto caratteri si possono generare utilizzando per ciascun carattere una lettera (scelta dalle 26 dell'alfabeto anglosassone) o una cifra (compresa tra 0 e 9, incluso 0 e 9)? Aumentando il numero dei caratteri da 8 a 9, di quanto aumenta il numero delle password possibili? [36^8; $35 \cdot 36^8$]

18 Quanti numeri di quattro cifre puoi formare con le cifre 0, 1, 2, 3, 4 e 5?
(*Suggerimento*: presta attenzione al fatto che un numero **non** può iniziare per zero) [$5 \cdot 6^3$]

19 Quanti numeri di tre cifre, tutte dispari, si possono scrivere? E quanti numeri dispari, costituiti da tre cifre? [125; 450]

20 Quanti numeri costituiti da sei cifre distinte possono essere scritti, utilizzando le cifre da 0 a 9? [136 080]

21 Quanti numeri di cinque cifre, tutte pari e diverse da zero, si possono scrivere? [1024]

22 Quanti anagrammi che iniziano con la lettera «G» possono essere composti dalla parola «gesto»? [24]

23 Una segretaria, che ha un'età compresa tra 45 e 50 anni (potendo anche essere uguale a 45 o a 50 anni), dice a tutti che è del segno della Bilancia. Se usa la sua data di nascita come password, quanti tentativi al massimo bisogna fare per scoprirla?
(Ricorda che cadono sotto il segno della Bilancia i nati dal 23 settembre (incluso) al 22 ottobre (incluso)). [180]

24 Si vuole scrivere un numero di tre cifre, con le seguenti caratteristiche: la prima cifra a partire da sinistra deve essere dispari, la seconda pari (0 incluso) e l'ultima deve essere un multiplo di 3 (diverso da zero). Quanti numeri distinti si possono scrivere con queste caratteristiche? [75]

25 **Realtà e modelli** Per evitare che gli utenti usino password insicure, come date di nascita o nomi propri di persona, i sistemi di sicurezza informatica normalmente riconoscono password alfanumeriche solo se contenenti *sia* lettere dell'alfabeto *sia* cifre.

a. Calcola il numero delle password costituite da 6 caratteri (26 lettere dell'alfabeto anglosassone e 10 cifre) e riconosciute come valide (cioè sicure). Non distinguere tra carattere minuscolo e maiuscolo.

b. Nel complesso delle password alfanumeriche costituite da 6 caratteri, qual è la percentuale di quelle respinte perché contenenti caratteri solo alfabetici o solo numerici? [**a.** $36^6 - (26^6 + 10^6)$; **b.** circa il 14%]

26 Un'urna contiene 10 biglie numerate da 1 a 10. In quanti modi diversi si possono estrarre 3 biglie dall'urna, tenendo conto dell'ordine di estrazione, in ciascuno dei seguenti tre casi:

a. ciascuna biglia, dopo essere estratta, viene rimessa nell'urna prima dell'estrazione successiva;

b. ciascuna biglia, dopo esser estratta, **non** viene rimessa nell'urna prima dell'estrazione successiva;

c. la prima biglia estratta viene rimessa nell'urna prima della seconda estrazione, mentre la seconda biglia estratta **non** viene rimessa nell'urna prima della terza estrazione. [**a.** 1000; **b.** 720; **c.** 900]

27 Un'urna contiene 8 biglie numerate da 1 a 8. In quanti modi diversi si possono estrarre 4 biglie dall'urna, tenendo conto dell'ordine di estrazione, in ciascuno dei seguenti tre casi:

a. ciascuna biglia, dopo essere estratta, viene rimessa nell'urna prima dell'estrazione successiva;

b. ciascuna biglia, dopo esser estratta, **non** viene rimessa nell'urna prima dell'estrazione successiva;

c. la prima biglia estratta viene rimessa nell'urna prima della estrazione successiva, mentre la seconda e la terza biglia estratta **non** vengono rimesse nell'urna prima della estrazione successiva. [**a.** 4096; **b.** 1680; **c.** 2688]

Collegamenti **Calcolo combinatorio e aritmetica**

28 Il numero 189, scomposto in fattori primi, è uguale a $3^3 \cdot 7$. Servendoti del principio fondamentale del calcolo combinatorio, indica quanti sono i divisori di 189. [8]

29 Il numero 3240, scomposto in fattori primi, è uguale a $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$. Servendoti del principio fondamentale del calcolo combinatorio, indica quanti sono i divisori di 3240. [40]

Matematica e informatica

30 Nei calcolatori elettronici la memoria è costituita da tanti «bit», essendo un «bit» un dispositivo che può assumere due stati differenti (per esempio: essere o non essere magnetizzato). Rappresentando i due stati che può assumere un bit con «0» e «1», un bit si può assimilare a «cella» di memoria che può assumere, di volta in volta, o il valore 0 o il valore 1. Una sequenza (ordinata) di 8 bit costituisce un «byte».

a. Quanti diversi «valori» può assumete un byte (ovvero quante diverse sequenze ordinate di otto simboli, costituiti da 0 o 1, è possibile costruire)?

b. Quanti sono i byte il cui primo bit è uguale a 0?

c. Quanti sono i byte che terminano con 11?

d. Quanti sono i byte che iniziano con 0 oppure terminano con 11? [**a.** 256; **b.** 128; **c.** 64; **d.** 160]

31 Ciascuna «informazione» viene rappresentata in un computer tramite una sequenza di bit che la identifica in modo univoco (ossia tramite una sequenza di simboli, ciascuno dei quali può essere soltanto 0 o 1). Il processo che fa corrispondere a una informazione una sequenza di bit prende il nome di *codifica* dell'informazione.

a. Qual è il massimo numero di differenti informazioni che si possono codificare tramite 6 bit (ovvero quante diverse sequenze ordinate di sei simboli, costituiti da 0 o 1, è possibile costruire)?

b. Qual è il massimo numero di differenti informazioni che si possono codificare tramite 2 byte (vedi la definizione di byte nell'esercizio precedente)?

c. Nel sistema di codifica «unicode» (nella sua prima formulazione) ciascun simbolo dell'alfabeto anglosassone era codificato tramite una sequenza di 16 bit; in questo sistema di codifica, quanti byte occupa la parola «matematica»?

d. Quanti bit sono necessari, come minimo, per poter codificare 8000 informazioni differenti?

[**a.** 64; **b.** 2^{16}; **c.** 20 ; **d.** 13]

2. Disposizioni e permutazioni

Teoria p. 101

Esercizi introduttivi

Test

32 **Vero o falso?**

a. le disposizioni di n oggetti in n posti sono le permutazioni degli n oggetti V F

b. le disposizioni di 5 oggetti in 4 posti si indicano con il simbolo $D_{5,4}$ V F

c. gli anagrammi della parola «cielo» sono 5 V F

d. gli anagrammi della parola «cielo» sono 5!, tanti quanti gli anagrammi della parola «terra», perché entrambe le parole sono costituite da cinque lettere V F

e. la scrittura $D_{3,5}$ non ha significato V F

[3 affermazioni vere e 2 false]

33 Quanto vale $D_{5,3}$, ovvero quante sono le disposizioni di 5 oggetti in 3 posti?

A 5^3 B 3^5 C $5 \cdot 4 \cdot 3$ D $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

34 Quanto vale 5!?

A 5^5 B $5 \cdot 4 \cdot 3$ C $5 \cdot 5$ D $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

35 Sapendo che $9! = 362\,880$, quanto vale 10!?

A 3 628 800 B 725 760 C 36 288 000 D nessuno dei precedenti

36 Quanto vale $\dfrac{n!}{(n-1)!}$?

A $n-1$ B n C $n+1$ D $2n$

37 Quanto vale $n! + (n+1)!$?

A $(2n+1)!$ B $(n+2)n!$ C $(n+2)!$ D $(2n+1)n!$

Le disposizioni

38 ESERCIZIO SVOLTO

Calcoliamo i seguenti numeri:

a. $D_{7,3}$ **b.** $D_{10,6}$ **c.** $D^*_{4,3}$

a. $D_{7,3} = \underbrace{7 \cdot 6 \cdot 5}_{\text{3 fattori decrescenti}} = 210$ **b.** $D_{10,6} = \underbrace{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}_{\text{6 fattori decrescenti}} = 151\,200$ **c.** $D^*_{4,3} = 4^3$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

39 $D_{10,4}$ [5040]

40 $D_{6,4}$ [360]

41 $D^*_{5,3}$ [125]

42 $D^*_{3,4}$ [81]

43 $D^*_{6,5} : D_{6,5}$ [10,8]

44 $D_{10,3} : D_{6,2}$ [24]

45 Si sa che le disposizioni di n elementi in 2 posti sono 132. Quanto vale n? [12]

46 ESERCIZIO GUIDATO

a. In quanti modi diversi possono essere sistemati su una libreria 6 libri, scelti tra 10, a disposizione?

b. Quanti numeri di 4 cifre, tutte dispari, si possono scrivere?

a. Si tratta di disporre 10 libri in 6 posti, quindi il numero totale di disposizioni possibili è dato da:

$D_{10,6} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

In alternativa, puoi ragionare applicando il principio fondamentale del calcolo combinatorio, osservando che ci sono 10 possibilità per il primo libro, 9 per il secondo, ... per il terzo, ... per il quarto, ... per il quinto, ... per il sesto.

b. I numeri descritti si possono assimilare alle *disposizioni con ripetizione* dei cinque numeri 1, 3, 5, 7, 9 in quattro posti; quindi sono in totale:

$D^*_{5,4} = 5^4 = \dots\dots$

In alternativa, puoi ragionare applicando il principio fondamentale del calcolo combinatorio, osservando che ci sono 5 possibili scelte per ciascuna delle 5 cifre.

47 In quanti modi quattro insegnanti possono coprire due ore di lezione in una classe (possono esserci anche due ore dello stesso insegnante)? [16]

48 In una società di 30 persone si devono eleggere un coordinatore, un segretario e un tesoriere. Quante sono le scelte possibili? [24 360]

49 Videolezione Un club ha 15 membri. In quanti modi possono essere scelti un presidente, un vice-presidente e un segretario (supponendo che nessun membro possa avere più di una carica)? [2730]

50 Lanciando un dado per 5 volte consecutive, quante sono le possibili sequenze ordinate di numeri che si possono ottenere? [6^5]

51 In un cinema, una fila di poltrone ha 20 posti. Arrivano solo 6 persone a sedersi su quella fila. In quanti modi possono disporsi? [27 907 200]

52 In quanti modi si possono sistemare quattro ospiti in un albergo che ha cinque stanze singole libere? [120]

53 Videolezione Quanti numeri di 6 cifre, tutte pari e diverse da zero, si possono scrivere? [4096]

54 Quanti numeri di 4 cifre distinte, tutte pari e diverse da zero, si possono scrivere? [24]

Permutazioni

55 ESERCIZIO SVOLTO

Calcoliamo i seguenti numeri:

a. $P_2 \cdot P_5$ b. $\dfrac{10!}{8!}$

a. $2! \cdot 5! = (2 \cdot 1) \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 2 \cdot 120 = 240$

b. $\dfrac{10!}{8!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

56 $P_8 : P_6$ [56]

57 $P_4 \cdot P_3$ [144]

58 $\dfrac{18!}{16!}$ [306]

59 $\dfrac{7!}{5!2!}$ [21]

60 $\dfrac{10!}{6!4!}$ [210]

61 Videolezione $\dfrac{P_6}{D_{5,3}}$ [12]

62 $\dfrac{P_6}{P_4} : D_{6,2}$ [1]

A mente

63 $3!;\ 4!$

64 $\dfrac{10!}{9!};\ \dfrac{8!}{6!}$

65 $0! + 1! + 2!$

66 $\dfrac{5001!}{5000!};\ \dfrac{999!}{1000!}$

67 M.C.D. (12!, 15!, 20!)

68 La cifra delle unità di 999!

Verifica le seguenti identità.

69 $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = n(n+1)$

70 $\dfrac{(2n-2)!}{(2n+1)!} = \dfrac{1}{2n(4n^2-1)}$

71 $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!} = 4n^2 + 2n$

72 $\dfrac{(n-1)!}{n!} - \dfrac{(n-1)!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1}$

73 $\dfrac{(n-1)!}{n!} - \dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n^2+n}$

74 $\dfrac{(n+2)!}{n!} - \dfrac{(n+2)!}{(n+1)!} = n^2 + 2n$

75 $\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{(n-1)!} + \dfrac{1}{(n-2)!} = \dfrac{n^2+1}{n!}$

76 ESERCIZIO SVOLTO

Risolviamo l'equazione $(n+2)! - 4(n+1)! = 8(n+1)!$.

- Affinché siano definiti tutti i fattoriali che compaiono nell'equazione n deve essere un numero intero tale che $n \geq -1$.
- In base alla definizione di fattoriale l'equazione equivale a:

$$(n+2)(n+1)! - 4(n+1)! = 8(n+1)!$$

- Poiché il fattoriale di un numero è sempre *diverso da zero*, è possibile dividere entrambi i membri dell'equazione per $(n+1)!$, ottenendo l'equazione equivalente seguente, che risolviamo:

$$(n+2) - 4 = 8 \Rightarrow n = 10$$

- La soluzione trovata è *accettabile*, perché soddisfa la condizione $n \geq -1$.

Risolvi le seguenti equazioni.

77 $(n+1)! - 2n! = 4n!$ [5]

78 $n! - 4(n-1)! = 10(n-1)!$ [14]

79 $(n+2)! - 4(n+1)! = 4(n+1)!$ [6]

80 $(n+3)! - (n+2)! = 9(n+2)!$ [7]

81 $(n+1)! - n! = 16(n-1)!$ [4]

82 $4(n+1)! - 8(n-1)! = 35n!$ [8]

83 $n! - (n-1)! = (n-1)!(n^2 - 6n + 5)$ [1, 6]

84 $\dfrac{[(n+1)!]^2 - (n!)^2}{(n!)^2} = \dfrac{3(n^2+4n)}{4}$ [0, 4]

85 $\dfrac{(n+4)(n+3)!}{(n+5)!} = \dfrac{n-9}{15}$ [10]

86 $\dfrac{3!(n+7)!}{(n+6)!} = 5n + 100$ [58]

87 $\dfrac{2!(n+6)!}{(n+5)(n+4)!} = 3n - 3$ [15]

88 $\dfrac{(n+5)! - (n+3)!}{(n+3)!} = n^2 + 37$ [2]

89 ESERCIZIO GUIDATO

a. **Abbiamo 8 palline, di colori tutti diversi tra loro, e altrettante scatole numerate da 1 a 8. In quanti modi si possono disporre le 8 palline nelle 8 scatole, in modo che ogni scatola contenga esattamente una pallina?**

b. **Quanti anagrammi, anche privi di significato, si possono costruire con la parola «canotto»?**

a. Disporre le palline nelle scatole equivale a definire un *ordinamento* delle 8 palline, in modo che la *prima* pallina sia inserita nella scatola 1, la seconda pallina sia inserita nella scatola 2, e così via... Quindi il numero totale di modi di disporre le palline è:

$$P_8 = 8! = ...$$

b. Il problema equivale a calcolare il numero di *permutazioni* di 7 lettere, di cui la «o» è *ripetuta* 2 volte, la «t» è *ripetuta* 2 volte mentre le rimanenti compaiono una sola volta. Il numero totale di anagrammi è dunque:

$$\frac{7!}{2!2!} = ...$$

90 In quanti modi possono essere disposti su una libreria 6 libri distinti? [720]

91 Quante diverse classifiche finali può avere una gara ciclistica alla quale partecipano 8 atleti (escludendo che ci siano *ex-aequo*)? [40 320]

92 Trova il numero di anagrammi della parola «remo». [24]

93 Trova il numero di anagrammi della parola «Milano». [720]

94 Trova il numero di anagrammi della parola «Toronto». [420]

95 Trova il numero di anagrammi della parola «Sandra». [360]

96 Su uno scaffale di una libreria ci sono 6 libri di cui 2 sono copie identiche dello stesso libro, mentre gli altri libri sono tutti differenti. In quanti modi diversi è possibile disporre i sei libri sullo scaffale? [360]

97 Determina quanti numeri di cinque cifre esistono aventi le stesse cifre del numero 16 306 (ciascuna cifra deve comparire nel numero lo stesso numero di volte con cui compare nel numero 16 306). [48]

98 **E se?** Una partita di calcio tra la squadra A e la squadra B è finita 3 a 2. In quanti modi diversi possono essersi succedute le reti?

▶ Come cambierebbe la risposta sapendo che la squadra A è sempre stata in vantaggio (a parte lo 0-0 iniziale, ovviamente)? E sapendo che nel corso della partita la squadra A si è trovata in svantaggio almeno una volta? [10; 2; 5]

99 **ESERCIZIO GUIDATO**

5 italiani, 4 francesi e 2 tedeschi devono sedersi in fila. Le persone di stessa nazionalità devono rimanere vicine. In quanti modi si possono disporre?

- Ci sono 3! permutazioni possibili dei tre *gruppi* costituiti dagli italiani, dai francesi e dai tedeschi.
- All'interno di ciascun gruppo, si devono poi ordinare le persone: ci sono 5! permutazioni degli italiani, 4! dei francesi e 2! dei tedeschi.
- In totale i modi di disporsi sono: $3! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 2! =$ ....

100 Sei amici, tra cui Paola e Marco, si recano al cinema e si dispongono su una stessa fila, in posti adiacenti. In quanti modi possono disporsi, se Paola vuole stare vicina a Marco? [240]

101 Cinque amici, tra cui Valeria e Luisa, si recano al cinema e si dispongono su una stessa fila, in posti adiacenti. Valeria e Luisa però hanno litigato, per cui non vogliono stare vicine. In quanti modi possono disporsi? [72]

102 Tre italiani, due francesi e due inglesi devono sedersi in fila. In quanti modi possono farlo se le persone della stessa nazionalità devono stare vicine? [144]

103 Barbara vuole sistemare su un ripiano vuoto della sua libreria 8 libri (tutti diversi tra loro). Fra gli otto libri ci sono i tre libri della trilogia del Signore degli anelli. Determina in quanti modi Barbara può disporre i libri:

a. se essi possono essere sistemati in ordine qualunque;

b. se i tre libri della trilogia devono essere messi vicini tra loro ed esattamente nell'ordine della trilogia;

c. se i tre libri della trilogia devono essere messi vicini tra loro, ma possono essere disposti in qualsiasi ordine.

[**a.** 40 320; **b.** 720; **c.** 4320]

104 Paolo vuole sistemare su un ripiano vuoto della sua libreria 4 libri di letteratura, 3 libri di storia e 1 libro di matematica. Determina in quanti modi può disporre i libri:

a. se essi possono essere sistemati in qualunque ordine;

b. se i libri di letteratura vanno messi vicini tra loro e i libri di storia vanno messi vicini tra loro;

c. se i libri di letteratura vanno messi vicini tra loro, mentre gli altri libri possono essere sistemati in qualunque ordine.

[**a.** 40 320; **b.** 864; **c.** 2880]

105 Un gioco per bambini è costituito da 10 blocchi di legno. Determina in quanti modi il bambino può allineare i 10 blocchi:

a. supponendo che sono tutti di colori diversi;

b. supponendo che, tra i 10 pezzi di legno, 5 sono gialli, 3 sono rossi, 2 sono blu e che i pezzi dello stesso colore sono indistinguibili uno dall'altro;

c. supponendo che i 10 pezzi siano dei colori descritti al punto **b**, e che i pezzi dello stesso colore debbano essere posti vicini tra loro;

d. supponendo che i 10 pezzi siano dei colori descritti al punto **b**, e che soltanto i pezzi gialli debbano essere posti vicini tra loro.

[**a.** 3 628 800; **b.** 2520; **c.** 6; **d.** 60]

Esercizi riassuntivi: disposizioni e permutazioni

106 In una società di 20 soci, devono essere scelti un presidente, un vicepresidente e un segretario. In quanti modi si può fare la scelta? [6840]

107 Nonno Anselmo va al mare in treno: ricorda che dopo Firenze ci sono quattro fermate, ha in mente i nomi delle stazioni, ma non ricorda in quale ordine si succedono. In quanti modi possibili nonno Anselmo può incontrare le quattro stazioni? [24]

108 Considera i risultati di 14 partite di calcio: per ogni partita se vince la prima squadra si segna 1, se le due squadre pareggiano si segna X, se vince la seconda squadra si segna 2. Si ottiene, in questo modo, una sequenza di 14 segni che chiamiamo colonna. Quante colonne si possono ottenere? [3^{14}]

109 A una manifestazione si schierano sotto il palco 10 militari: 2 bersaglieri, 3 artiglieri, 2 avieri e 3 marinai. I militari che appartengono alla stessa specialità hanno la stessa altezza e divise identiche, perciò si possono supporre indistinguibili uno dall'altro. In quanti modi i 10 militari si possono disporre? [25 200]

110 Si vogliono dipingere quattro pareti di una stanza con quattro colori diversi, scelti fra azzurro, arancione, verde, giallo, bianco. In quanti modi è possibile farlo? [120]

111 Quanti sono i possibili risultati che si possono ottenere eseguendo cinque lanci successivi di un dado? [7776]

112 Cinque ballerini e altrettante ballerine si accingono a ballare una polka (ballo a due). Quanti accoppiamenti sono possibili? [120]

113 Nella prima fila di un'aula devono sedersi sei studenti: quattro ragazzi e due ragazze. Determina in quanti modi possono disporsi:

a. se possono sistemarsi in ordine qualunque;

b. se i ragazzi devono stare vicini tra loro e le ragazze devono stare vicine tra loro;

c. se le ragazze devono stare vicine tra loro, mentre i ragazzi possono disporsi in ordine qualunque.

[**a.** 720; **b.** 96; **c.** 240]

114 Considera dieci carte, cinque di cuori e cinque di picche, tutte di valori diversi. Quante sono le permutazioni di queste dieci carte tali che due carte consecutive comunque scelte hanno sempre colori differenti? [28 800]

115 Un vigile che vede un automobilista commettere una grave infrazione non riesce a fermare l'autoveicolo ma si accorge che la macchina è di colore grigio, che le prime due lettere della targa sono C e A e che gli ultimi due numeri della targa sono 3 e 5. La targa è costituita da due lettere, seguite da tre cifre, seguite da altre due lettere; ciascuna lettera può essere una qualsiasi dell'alfabeto inglese di 26 lettere a eccezione di I, O, Q e U, mentre ciascuna delle cifre può essere un numero intero qualsiasi compreso tra 0 e 9 (inclusi 0 e 9). Supponendo che le macchine grigie siano un quarto del parco circolante, quanti sono approssimativamente i possibili colpevoli dell'infrazione? [1210]

Collegamenti **Calcolo combinatorio e funzioni**

116 ESERCIZIO GUIDATO

a. **Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, quante diverse funzioni $f : A \to B$ è possibile definire?**

b. **Quante funzioni *iniettive* $f : A \to B$ è possibile definire?**

c. **Quante sono le funzioni *biettive* $f : A \to A$?**

---

a. Abbiamo 5 possibili modi di assegnare a $x_1 = 1$ la sua immagine tramite f; altri 5 modi di assegnare l'immagine a $x_2 = 2$ e così via. Pertanto il numero delle funzioni da A a B è $D^*_{5,4} = \ldots = \ldots$

b. Abbiamo 5 possibili modi di assegnare a $x_1 = 1$ la sua immagine tramite f; abbiamo 4 modi (non più 5, dal momento che per definizione una funzione iniettiva associa ad elementi distinti del dominio elementi distinti del codominio) di assegnare a $x_2 = 2$ la sua immagine, e così via. Pertanto il numero delle funzioni iniettive da A a B è $D_{5,4} = \ldots\ldots = \ldots$

c. Una funzione biettiva $f : A \to A$ deve avere come insieme delle immagini l'insieme A stesso; dunque per definire la funzione è sufficiente ordinare gli elementi di A in modo che il primo elemento sia il corrispondente di x_1, il secondo sia il corrispondente di x_2 e così via. Perciò il numero delle funzioni biettive $f : A \to A$ è uguale al numero delle permutazioni degli elementi di A, cioè: $\ldots = \ldots = \ldots$ [**a.** 625; **b.** 120; **c.** 24]

117 Quante funzioni si possono definire aventi come dominio l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e come insieme delle immagini un sottoinsieme di $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$? [625]

118 Quante funzioni biettive si possono definire aventi come dominio e codominio l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$? [120]

119 Quante funzioni iniettive si possono definire aventi come dominio l'insieme $A = \{1, 2, 3\}$ e come codominio l'insieme $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$? [120]

120 Quante funzioni suriettive si possono definire aventi come dominio l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e come codominio l'insieme $B = \{1, 2, 3\}$? [36]

3. Combinazioni

Teoria p. 105

Esercizi introduttivi

Test

121 Il numero $\binom{5}{3}$ è uguale a:

A $\dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3!}$ B $\dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!}$ C $\dfrac{5 \cdot 4}{3!}$ D $\dfrac{5!}{2!}$

122 Quale dei seguenti coefficienti binomiali è uguale a n, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$?

A $\binom{n}{0}$ B $\binom{n}{1}$ C $\binom{n}{n}$ D Nessuno dei precedenti

123 Il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$:

A non è mai uguale a 0

B è uguale a 1 se e solo se $k = n$

C se $k = 0$, non è definito

D se $n > k$, non è definito

124 Il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ è uguale a:

A $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ B $\dfrac{n!(n-k)!}{k!}$ C $\dfrac{n!}{k!}$ D $\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$

125 Quale delle seguenti espressioni esprime il numero dei sottoinsiemi di 3 elementi di un insieme di 6 elementi?

A $\dfrac{6!}{3!}$ B $\binom{6}{3}$ C $\dfrac{6!}{3}$ D $\binom{3}{6}$

Combinazioni semplici

126 ESERCIZIO SVOLTO

Calcoliamo:

a. $\binom{6}{3}$ **b.** $C_{10,4}$

---

a. $\binom{6}{3} = \dfrac{D_{6,3}}{3!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$

b. $C_{10,4} = \binom{10}{4} = \dfrac{D_{10,4}}{4!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$

Calcola il valore dei seguenti coefficienti binomiali.

127 $\binom{8}{3}$ [56]

128 $\binom{10}{6}$ [210]

129 $\binom{12}{7}$ [792]

130 $\binom{15}{10}$ [3003]

131 $C_{8,2}$ [28]

132 $C_{9,3}$ [84]

133 $C_{12,5}$ [792]

134 **Vero o falso?**

a. $\binom{13}{0} = 0$ V F

b. $\binom{n}{k}$ è definito per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ V F

c. $\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$ V F

d. $\binom{11}{10} = 11$ V F

e. $\binom{7}{3} = \dfrac{7!}{3!4!}$ V F

[3 affermazioni vere e 2 false]

A mente

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

135 $\binom{100}{0}$; $\binom{100}{1}$

136 $\binom{10}{9}$; $\binom{157}{156}$

137 $\binom{3}{2}$; $\binom{10}{2}$

138 $\binom{11}{9}$; $\binom{21}{19}$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

139 $\dfrac{C_{6,1} \cdot C_{7,3} - C_{10,7}}{C_{6,3} + C_{8,4}}$ [1]

140 $\dfrac{(C_{4,2})^2 + C_{5,3} - C_{8,2}}{C_{6,2} - C_{4,2}}$ [2]

Metodi a confronto

141 Calcola il valore delle seguenti espressioni in due modi: prima per via diretta, poi riconoscendo che l'espressione **a** rappresenta il numero complessivo di sottoinsiemi di un insieme avente una cardinalità opportuna, mentre l'espressione **b** il numero complessivo di sottoinsiemi propri di un insieme avente una opportuna cardinalità.

a. $\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3}$

b. $\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4}$

[**a.** 8; **b.** 30]

142 Calcola il valore delle seguenti espressioni in due modi: prima per via diretta, poi riconoscendo che ciascuna di esse rappresenta il numero complessivo di sottoinsiemi aventi almeno 2 elementi di un insieme avente una opportuna cardinalità.

a. $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$

b. $\binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}$

[**a.** 26; **b.** 57]

Verifica le seguenti identità.

143 $3\binom{n}{3} = n\binom{n-1}{2}$

144 $\binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \binom{n+1}{3}$

145 $5\binom{n+1}{5} = (n+1)\binom{n}{4}$

146 $\binom{n-1}{4} + \binom{n-1}{5} = \binom{n}{5}$

147 ESERCIZIO SVOLTO

Risolviamo l'equazione $\binom{n}{2} = \binom{n}{4}$.

- Poniamo anzitutto le condizioni affinché l'equazione abbia significato: deve essere $n \in \mathbf{N}$ e $n \geq 4$, affinché siano definiti i due coefficienti binomiali.
- In base alla definizione di coefficiente binomiale l'equazione si traduce nella seguente:

$$\frac{n(n-1)}{2!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

Poiché deve essere $n \geq 4$, possiamo supporre $n(n-1) \neq 0$ e dividere entrambi i membri dell'equazione per $n(n-1)$; siamo condotti così all'equazione

$$\frac{1}{2!} = \frac{(n-2)(n-3)}{4!}$$

che fornisce come soluzioni:

$$n = -1 \vee n = 6$$

- Delle due soluzioni trovate, l'unica che soddisfa le condizioni iniziali e che risulta quindi accettabile è $n = 6$.

Risolvi le seguenti equazioni.

148 $\binom{n}{3} = 5\binom{n}{2}$ [17]

149 $\binom{n}{3} = 2\binom{n}{4}$ [5]

150 $\binom{n}{5} = \binom{n-1}{4}$ [5]

151 $5\binom{n}{3} = \binom{n+2}{3}$ [4]

ESERCIZI

152 $\binom{n+1}{4} + \binom{n}{4} = 3n^2 - 6n$ [7]

153 $\binom{n}{3} - \binom{n-1}{3} = 21$ [8]

154 $\binom{n}{3} + \binom{n}{n-3} = 2\binom{n}{4}$ [7]

155 $\binom{n}{6} + \binom{n}{n-6} = 2$ [6]

156 $\binom{n-1}{4} = \frac{n}{20}\binom{n}{5}$ [10]

157 $\binom{2n}{2} - \binom{n}{2} = n^2 + 15$ [6]

Problemi sulle combinazioni semplici

158 ESERCIZIO GUIDATO

Un gruppo di 8 dipendenti di un'azienda decide di mandare una delegazione di 3 di loro a esporre delle lamentele alla direzione.

a. Quante delegazioni diverse sono possibili?

b. Supposto che debba fare parte della delegazione il rappresentante sindacale, che è uno degli 8 dipendenti, quante delegazioni sono possibili?

a. Scegliere una delegazione equivale a scegliere un sottoinsieme di 3 elementi dall'insieme degli otto dipendenti. Le delegazioni possibili sono quindi: $\binom{8}{3} = \ldots$

b. La delegazione deve contenere, oltre al rappresentante sindacale, 2 dei restanti 7 dipendenti, quindi le possibilità sono in totale $\binom{7}{2} = \ldots$ [**a.** 56; **b.** 21]

159 Quanti sono i sottoinsiemi di 3 elementi dell'insieme $E = \{a, b, c, d, e\}$? [10]

160 Un professore decide di interrogare a caso 4 studenti in una classe di 20 studenti. Quanti diversi insiemi di studenti può interrogare? [4845]

161 In quanti modi diversi è possibile scegliere i due rappresentanti degli studenti in una classe di 24 alunni? [276]

162 A un'estrazione del lotto vengono estratti i numeri 5, 6, 8, 60, 74. Verifica che gli ambi vincenti (cioè gli ambi che si possono formare con i numeri estratti) sono tanti quanti i terni vincenti. [10]

163 Quanti diversi incontri di pugilato possono essere organizzati tra 6 pugili? [15]

164 Calcola il numero di strette di mano che possono scambiarsi 8 persone, nell'ipotesi che ciascuno stringa la mano una e una sola volta a tutti gli altri. [28]

165 Una scuola organizza dei corsi pomeridiani di approfondimento in italiano, inglese, matematica, elettronica, informatica e scienze. Se uno studente vuole seguire solo 3 corsi, in quanti modi può sceglierli? [20]

166 Quante coppie non ordinate (ambi) puoi formare con i 90 numeri del lotto? [4005]

167 Quante terne non ordinate (terni) puoi formare con i 90 numeri del lotto? [117 480]

168 Considera cinque punti distinti del piano A, B, C, D, E. Quanti segmenti distinti esistono aventi come estremi due dei cinque punti A, B, C, D, E? [10]

169 Quante sono le diagonali di un poligono avente 10 lati? [35]

170 Considera un pentagono $ABCDE$.

a. Quanti triangoli distinti esistono aventi come vertici tre dei vertici del pentagono?

b. Quanti quadrilateri distinti esistono aventi come vertici quattro dei vertici del pentagono? [**a.** 10; **b.** 5]

171 Dato un parallelepipedo, quanti triangoli possono essere formati aventi come vertici tre dei vertici del parallelepipedo? [56]

Metodi a confronto

172 Determina il numero di tutti i possibili anagrammi della parola «mamma»:

a. utilizzando le permutazioni con ripetizione

b. utilizzando le combinazioni.

(*Suggerimento*: osserva che un anagramma resta univocamente individuato una volta scelti i tre posti dove inserire la lettera «m» oppure i due posti dove inserire la lettera «a») [10]

173 Determina il numero di tutti i possibili anagrammi della parola «pappa»:

a. utilizzando le permutazioni con ripetizione;

b. utilizzando le combinazioni. [10]

174 Ho dieci libri che non ho ancor letto e voglio sceglierne almeno due, ma non più di tre, da portare in vacanza. Quante sono le scelte possibili? [165]

175 I 20 membri di uno sci club decidono di mandare una delegazione di 5 di loro a disputare una gara.

a. Quante delegazioni diverse sono possibili?

b. Supposto che debbano fare parte della delegazione il presidente e il vicepresidente dello sci club, che fanno parte dei 20 membri, quante delegazioni sono possibili? [a. 15 504; b. 816]

176 **ESERCIZIO GUIDATO**

I 21 studenti di una classe devono essere divisi in 3 gruppi di 7 studenti, ciascuno dei quali lavorerà indipendentemente a una ricerca. Supponendo le tre ricerche diverse, in quanti modi si possono costruire i tre gruppi?

Diciamo A, B, C le tre diverse ricerche che l'insegnante vuole assegnare.

- Osserva che:
  - il gruppo di studenti cui assegnare la ricerca A può essere scelto in $\binom{21}{\dots}$ modi;
  - il gruppo di studenti cui assegnare la ricerca B può essere scelto in $\binom{\dots}{7}$ modi;
  - il gruppo cui assegnare la ricerca C dovrà essere costituito dagli studenti rimanenti.
- Per il principio fondamentale del calcolo combinatorio, le scelte possibili sono in tutto:

$$\binom{21}{\dots}\cdot\binom{\dots}{7} = \dots\dots$$

[399 072 960]

177 Un equipaggio di un treno è costituito da due macchinisti, un capotreno e un bigliettaio. In una certa unità operativa sono in forza 50 macchinisti, 30 capotreno e 80 bigliettai. Quanti equipaggi diversi si possono formare con il personale di quel compartimento? [2 940 000]

178 Due sposi devono scegliere quattro testimoni per il loro matrimonio: due per lui e due per lei. La sposa può scegliere tra 12 amici, lo sposo tra 10. In quanti modi possibili i due sposi possono scegliere i quattro testimoni? [2970]

179 In una compagnia di alpini sono a disposizione 4 ufficiali, 8 sottoufficiali e 20 soldati. In quanti modi si può scegliere un plotone da mandare a una manifestazione se questo deve essere costituito da 1 ufficiale, 2 sottoufficiali e 10 soldati? [20 692 672]

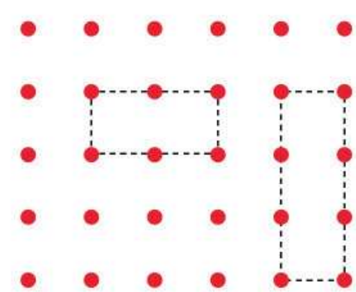
180 In una scuola vi sono 18 insegnanti di materie scientifiche e 30 insegnanti di materie letterarie. In quanti modi si può costituire una commissione di cinque professori, due di materie scientifiche e tre di materie letterarie? [621 180]

181 Un lotto di 15 telefoni cellulari ne contiene 3 difettosi. Viene scelto a caso un campione di 4 telefoni tra i 15 del lotto. Quanti dei possibili campioni contengono almeno un pezzo difettoso? [870]

182 Supponiamo di estrarre 5 carte (una mano) da un mazzo di 32 carte: quante mani contengono almeno tre fanti? [1540]

183 Quante coppie di angoli opposti al vertice sono formate da 8 rette distinte, tutte passanti per uno stesso punto? [56]

184 Considera tutti i possibili rettangoli aventi come vertici quattro dei punti colorati in rosso in figura, tali che i lati dei rettangoli siano orizzontali o verticali (due di tali rettangoli sono rappresentati come esempio). Quanti sono complessivamente tali rettangoli? [150]



185 Ciascuno dei 30 supermercati di una catena ha 2 rappresentanti sindacali. Quante delegazioni di tre rappresentanti sindacali si possono formare, con il vincolo che a una delegazione non possano appartenere due rappresentanti dello stesso supermercato? [32 480]

Problemi sulle combinazioni con ripetizione

186 **ESERCIZIO GUIDATO**

a. In quanti modi si possono assegnare 15 scrivanie uguali a 4 uffici (ammettendo anche il caso che a qualche ufficio non venga assegnata alcuna scrivania)?

b. Come cambia la risposta al problema precedente se a ogni ufficio deve essere assegnata almeno una scrivania?

a. Si tratta di determinare i numeri x_1, x_2, x_3, x_4 di scrivanie che vengono assegnate a ciascun ufficio, ossia di determinare quante quaterne (x_1, x_2, x_3, x_4) di interi non negativi soddisfano l'equazione:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$$

La suddivisione delle scrivanie può quindi essere fatta in $\binom{18}{15}$ modi.

b. Poiché a ogni ufficio deve essere assegnata almeno una scrivania, si tratta ora di suddividere 11 scrivanie tra 4 uffici. [**a.** 816; **b.** 364]

187 **E se?** Quanti possibili tipi di confezioni diverse di 20 caramelle ai gusti di menta, fragola o limone si possono confezionare, ammettendo il caso di confezioni costituite da caramelle di un solo gusto o di due gusti?

▸ Come cambierebbe la risposta considerando solo le confezioni contenenti caramelle di tutti e tre i gusti? [231; 171]

188 Si lanciano contemporaneamente 5 dadi. Quante sono le possibili combinazioni di numeri che si possono ottenere? [252]

189 **E se?** Determina il numero di terne (x_1, x_2, x_3), con $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{N}$, che soddisfano l'equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 12$. [91]

▸ Che cosa accadrebbe se considerassimo le terne (x_1, x_2, x_3) in cui $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{Z}$?

190 Venti lavagne interattive uguali devono essere suddivise tra 10 scuole. In quanti modi può avvenire la suddivisione (ammettendo anche il caso che a qualche scuola non venga assegnata alcuna lavagna)? E se a ogni scuola deve essere assegnata almeno una lavagna? [10 015 005; 92 378]

191 Il signor Bianchi ha a disposizione la somma di 40 000 euro, che vuole investire, in tranche da 5000 euro, scegliendo tra quattro società. In quanti modi diversi possono essere investiti i soldi del sig. Bianchi, se almeno una tranche deve essere investita in ciascuna delle quattro società?
(*Suggerimento*: si tratta di distribuire in sostanza 8 oggetti identici (le 8 tranche da 5000 euro) tra le 4 possibili società, con il vincolo che almeno 1 tranche deve andare a ciascuna società) [35]

Collegamenti Calcolo combinatorio e algebra

192 **ESERCIZIO GUIDATO**

Considera il polinomio $(a + b + c)^4$ e determina:

a. quanti termini contiene il suo sviluppo ridotto;

b. qual è il coefficiente del monomio simile ad a^2bc nel suo sviluppo ridotto.

---

a. Lo sviluppo ridotto di $(a + b + c)^4$ è un polinomio omogeneo, i cui termini hanno grado 4. Pertanto ogni termine del polinomio ridotto è simile a un monomio della forma $a^{x_1}b^{x_2}c^{x_3}$ dove x_1, x_2, x_3 sono interi non negativi tali che:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4 \qquad [*]$$

Viceversa, a ogni terna di interi non negativi che risolve l'equazione [*] corrisponde uno e un solo termine del polinomio ridotto. Il problema equivale quindi a determinare il numero di terne di interi non negativi che soddisfano la [*]. In base al **Teorema 6**, tali terne sono in totale $C^*_{3,4}$.

b. Osserva che i monomi *aabc*, *abac*, *cbaa*, ... (che si otterrebbero effettuando la moltiplicazione di quattro fattori uguali ad $a + b + c$) sono simili e quindi nello sviluppo ridotto saranno rappresentati da un *unico* monomio, la loro somma. Il coefficiente di a^2bc, insomma, è quindi uguale al numero complessivo di *tutti* questi monomi simili, cioè al numero di tutti i possibili anagrammi della «parola» *aabc*. [**a.** 15; **b.** 12]

193 Quanti termini può contenere al massimo un polinomio omogeneo di grado 8, nelle variabili a, b e c? [45]

194 Supponiamo di sviluppare la potenza $(a + b + c + d)^7$ e di ridurre i termini simili. Quanti termini contiene il polinomio così ottenuto? [120]

195 Qual è il coefficiente di AB^2C^2 nello sviluppo ridotto di $(A + B + C)^5$? [30]

196 Qual è il coefficiente di x^3y^2 nello sviluppo ridotto di $(2x - y + 3)^7$?
(*Suggerimento*: poni $2x = X$, $-y = Y$ e $3 = Z$ e determina inizialmente il coefficiente di $X^3Y^2Z^2$ nello sviluppo ridotto di $(X + Y + Z)^7$) [15 120]

Esercizi riassuntivi: combinazioni semplici o con ripetizioni

197 Un'associazione ha 20 membri. Se tra essi deve essere formato un comitato di 5 persone, quanti comitati diversi sono possibili? [15 504]

198 Quante partite diverse possono disputare 22 ragazzi, suddividendosi in due squadre da 11 e supponendo che ogni coppia di squadre giochi una sola partita? [352 716]

199 Dei 40 dipendenti di una piccola azienda, 20 sono laureati, 10 sono diplomati e 10 hanno la licenza di scuola media. Per un'indagine interna si vuole utilizzare un campione in cui sia rappresentato casualmente il 10% di ognuno dei gruppi individuato dal titolo di studio. Quanti sono i possibili campioni distinti? [19 000]

200 Quante commissioni d'esame formate da 3 professori si possono formare scegliendo i professori da un insieme di cinque insegnanti? [10]

201 Si hanno vernici di colore rosso, blu e verde. Mescolando 3 parti uguali di tali vernici, con la possibilità di ripetere eventualmente uno o più colori, quante diverse sfumature di colore si possono ottenere? [10]

202 Quanti sono i possibili risultati che si potrebbero ottenere in una estrazione del Lotto, se l'estrazione delle cinque palline avvenisse con reimmissione? [54 891 018]

---

203 **Zoom sull'enunciato** Lanciamo *contemporaneamente* 4 dadi; quante sono le possibili combinazioni di numeri che si possono ottenere? Cambierebbe la risposta se, invece di lanciare contemporaneamente 4 dadi, effettuassimo 4 lanci *successivi* di uno stesso dado? [126; 1296]

Guida alla comprensione del testo
L'espressione «contemporaneamente» indica che non è possibile distinguere un ordine tra i numeri ottenuti; se invece si effettuano quattro lanci «successivi» è definito un preciso ordine nei risultati, che va tenuto in considerazione.

204 Quanti sono i monomi di grado 8, nelle tre variabili x, y e z? [45]

205 Per stabilire il migliore a briscola in quattro, sei amici al bar intendono giocare tante partite quanti sono i possibili accoppiamenti tra di loro (due coppie si sfidano, una riposa): chi vincerà più partite sarà riconosciuto come il migliore del gruppo. Quante partite giocheranno in tutto, i sei? E quante partite ciascuno? [45; 30]

206 Una sede produttiva di una casa automobilistica ha nella propria catena produttiva 5 tipi diversi di automobili. In quanti modi diversi può giungere alla sede un ordine di 50 automobili? [316 251]

207 Si deve formare un comitato costituito da 2 uomini e 3 donne, scegliendone i componenti da un gruppo di 6 uomini e 5 donne.

a. In quanti modi si può formare il comitato?

b. In quanti modi si può formare il comitato, se tra le cinque donne ce ne sono due che hanno litigato e perciò non vogliono appartenere al comitato insieme? [**a.** 150; **b.**105]

208 Cinque amici devono ripartirsi 10 caramelle uguali.

a. In quanti modi possono farlo (ammettendo anche il caso in cui qualcuno non riceva nessuna caramella)?

b. In quanti modi possono farlo se ciascuno deve ricevere almeno una caramella? [**a.** 1001; **b.** 126]

209 **Caccia all'errore.** Barbara deve risolvere il problema seguente: «Supponiamo di estrarre 5 carte (una mano) da un mazzo di 32 carte: quante mani contengono almeno un asso?». Ragiona così:

«Posso costruire una mano contenente almeno un asso effettuando due scelte successive:

- prima scelgo uno dei quattro assi: ho 4 possibilità;
- poi scelgo 4 carte tra le 31 restanti: ho $\binom{31}{4}$ possibilità.

Il numero totale di mani che contengono almeno un asso è allora:

$$4 \cdot \binom{31}{4} = 125\,860$$

in forza del principio fondamentale del calcolo combinatorio»

Individua l'errore che ha commesso Barbara nel suo ragionamento e determina la risposta corretta del problema.

[103 096]

210 **Inventa tu.** Scrivi il testo di un problema che può essere risolto calcolando $\binom{15}{5} \cdot \binom{5}{3}$.

211 **Inventa tu.** Scrivi il testo di un problema che può essere risolto calcolando $\binom{10}{3} \cdot \binom{7}{2}$.

4. Il teorema del binomio di Newton

Teoria p. 111

212 ESERCIZIO SVOLTO

Sviluppiamo la potenza $(2x + y)^4$.

Utilizziamo la formula del binomio di Newton relativa ad $(a + b)^4$, sostituendo $2x$ al posto di a e y al posto di b:

$$(2x + y)^4 = \binom{4}{0}(2x)^4 + \binom{4}{1}(2x)^3 y + \binom{4}{2}(2x)^2(y)^2 + \binom{4}{3}(2x)y^3 + \binom{4}{4}y^4 =$$

$$= 16x^4 + 32x^3y + 24x^2y^2 + 8xy^3 + y^4$$

Sviluppa le seguenti potenze di binomi.

213 $(2x - 1)^4$ **214** $(x + 2)^5$ **215** $\left(\frac{1}{2}x^2 - y^3\right)^4$ **216** $(x - 3y)^5$

217 ESERCIZIO SVOLTO

Calcoliamo il coefficiente di x^8y^2 nello sviluppo di $(x - 2y)^{10}$.

- Per la formula del binomio di Newton:

$$(x - 2y)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^{10-k}(-2y)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-2)^k x^{10-k} y^k$$

- Confrontando x^8y^2 con $x^{10-k}y^k$, ci accorgiamo che siamo interessati a calcolare il coefficiente del termine corrispondente a $k = 2$. Il coefficiente di tale termine è allora:

$$\binom{10}{2}(-2)^2 = 180$$

218 Calcola il coefficiente di a^6b^2 nello sviluppo di $(a+b)^8$. [28]

219 Calcola il coefficiente di a^7b^3 nello sviluppo di $(a+b)^{10}$. [120]

220 Calcola il coefficiente di x^6 nello sviluppo di $(x+3)^8$. [252]

221 Calcola il coefficiente di x^3 nello sviluppo di $(x-1)^{10}$. [-120]

222 Calcola il coefficiente di x^4y nello sviluppo di $(2x-3y)^5$. [-240]

223 Calcola il coefficiente di x^4y^2 nello sviluppo di $(2x-3y)^6$. [2160]

224 Calcola il coefficiente di x^3y^2 nello sviluppo di $(3x+4y)^5$. [4320]

225 Utilizzando lo sviluppo di $(a+b)^5$ e sostituendo in esso opportuni valori di a e b, verificare che:

$$\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=2^5$$

226 Utilizzando lo sviluppo di $(a+b)^6$ e sostituendo in esso opportuni valori di a e b, verificare che:

$$\binom{6}{0}-\binom{6}{1}+\binom{6}{2}-\binom{6}{3}+\binom{6}{4}-\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=0$$

227 Utilizzando il teorema del binomio di Newton, dimostra che:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n.$$

228 Utilizzando il teorema del binomio di Newton, dimostra che:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0.$$

Determina il valore delle seguenti somme.

229 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ [1]

230 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+3}(1-x)^{n-k}$ [x^3]

231 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$ [0]

232 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k$ [4^n]

233 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}5^n$ [10^n]

234 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}5^k$ [6^n]

Esercizi di riepilogo

Esercizi interattivi

235 **Vero o falso?**

a. $D_{10,3} > D^*_{8,3}$ V F

b. $C_{20,4} > P_7$ V F

c. se $D_{n,2} = C_{n,3}$, allora $n = 8$ V F

d. con le lettere della parola "invincibili" si possono formare 166 320 anagrammi V F

e. nel gioco del poker, il numero di modi in cui si può servire a un giocatore cinque carte dello stesso seme, estratte da un mazzo di 52, è 1287 V F

f. il quarto termine dello sviluppo della potenza $\left(a^2 - \frac{1}{a^3}\right)^6$ è $\frac{15}{a^8}$ V F

Test

236 Nel magazzino di un'azienda, per contrassegnare i prodotti, viene utilizzato un codice formato, in sequenza, da quattro caratteri alfabetici, tre numerici (da 0 a 9) e due alfabetici. Quale calcolo è necessario eseguire per trovare il numero di prodotti diversi che si possono così contrassegnare? Supponi che i caratteri possano essere ripetuti.

A $D_{26,4} \cdot D_{10,3} \cdot D_{26,2}$

B $C_{26,4} \cdot C_{10,3} \cdot C_{26,2}$

C $D^*_{26,4} \cdot D^*_{10,3} \cdot D^*_{26,2}$

D $C_{26,4} \cdot D_{10,3} \cdot C_{26,2}$

237 Dello sviluppo della potenza $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^n$ sappiamo che il nono termine è un numero puro. Quanto vale questo termine?

A 7920 B $7920 \cdot 3^8$ C $7920 \cdot 2^3$ D 9!

238 Un fioraio ha a disposizione rose gialle, arancione e rosse. In quanti modi diversi può confezionare un mazzo con 13 rose (supponendo indistinguibili le rose dello stesso colore)?

A $\frac{13!}{3!}$ B 13! C 105 D $D^*_{13,3}$

239 Quale delle seguenti uguaglianze è vera?

A $\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k-1} = \binom{n}{k}$

B $(n+1)\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{k}(n+1)$

C $\binom{n+1}{k} = n\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

D $\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k-1} = n\binom{n-1}{k}$

240 Un tavolo rettangolare ha 10 posti, 5 su un lato e 5 sul lato opposto. In quanti modi possibili vi si possono sedere 3 uomini e 3 donne in modo tale che le donne stiano su di un lato, gli uomini sull'altro e che di fronte a ogni donna ci sia sempre un uomo?

A $D_{5,3} \cdot P_3$

B $C_{5,3} \cdot P_3$

C $2 \cdot C_{5,3} \cdot P_3$

D $2 \cdot D_{5,3} \cdot P_3$

241 Una scatola contiene 8 palline numerate. Se ne estraggono 3 e si vuole sapere quante sono le possibili configurazioni a seconda che: l'estrazione sia simultanea, l'estrazione avvenga in sequenza con reimmissione, l'estrazione avvenga in sequenza senza reimmisione.

A $D_{8,3};\ D^*_{8,3};\ C_{8,3}$

B $C_{8,3};\ D^*_{8,3};\ D_{8,3}$

C $C_{8,3};\ D_{8,3};\ D^*_{8,3}$

D $C_{8,3};\ C^*_{8,3};\ D_{8,3}$

242 A una corsa podistica partecipano 500 persone. In quanti modi sarà possibile in teoria redigere la classifica dei primi 20 (escludendo ex-aequo)?

A $\frac{500!}{20! \cdot 480!}$

B $500 \cdot 499 \cdot 498 \cdot \ldots \cdot 481 \cdot 480$

C $500 \cdot 499 \cdot 498 \cdot \ldots \cdot 481$

D $\frac{500!}{20!}$

243 Facendo riferimento all'esercizio precedente e supponendo che i partecipanti alla gara siano 180 donne e 320 uomini, in quanti modi possibili la classifica dei primi 20 potrebbe vedere occupate da uomini le posizioni dispari e da donne quelle pari?

A $\frac{320!}{10!} \cdot \frac{180!}{10!}$

B $\frac{320!}{310!} \cdot \frac{180!}{170!}$

C $\binom{320}{10} \cdot \binom{180}{10}$

D $500 \cdot 499 \cdot 498 \cdot \ldots \cdot 481$

244 Nel gioco del poker ogni giocatore riceve 5 carte, estratte da un mazzo di 32. In quanti modi diversi il giocatore può ricevere le carte? [201 376]

245 Quanti sono i numeri di cinque cifre che si possono costruire scegliendo le cifre nell'insieme $\{0, 1, 2, 5, 6, 7\}$ e ammettendo di poter ripetere le cifre? [6480]

246 Sono di più i sottoinsiemi di 2 elementi in un insieme di 10 elementi oppure i sottoinsiemi di 4 elementi in un insieme di 8 elementi?
[I sottoinsiemi di 4 elementi di un insieme di 8]

247 Ci sono dieci ambasciatori senza sede e tre posti da coprire: Città del Vaticano, Parigi e Vienna. In quanti modi possibili i tre ambasciatori possono essere assegnati? [720]

248 Un professore di storia non chiede le date degli eventi, ma è molto severo nella richiesta dell'ordine cronologico: per ogni domanda elenca cinque fatti e chiede che essi siano ordinati cronologicamente. Quante sono le risposte possibili per ogni domanda? [120]

249 Quanti numeri di 6 cifre è possibile costruire, aventi cifre tutte diverse da zero e multiple di 3? [729]

250 Un magazzino di una casa editrice ha in giacenza 10 titoli di libri (il numero di copie di ciascuno è più che sufficiente a far fronte a qualunque richiesta). In quanti modi possibili quel magazzino può ricevere un ordine di 15 volumi? [1 307 504]

251 Quattro amici partono per un viaggio con un'automobile a quattro posti. Solo tre dei quattro amici hanno la patente. In quanti modi diversi possono disporsi i quattro amici all'interno dell'auto? [18]

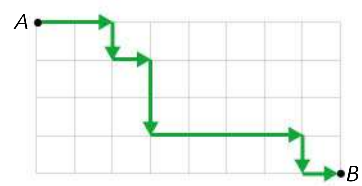
252 Quanti sono i numeri di 3 cifre che si possono scrivere senza mai utilizzare lo zero? Fra di essi, sono in numero maggiore quelli in cui compare almeno 1 volta la cifra 1 o quelli in cui non compare? [9^3; i numeri in cui compare la cifra 1 almeno una volta sono 217 e sono minori di quelli in cui non compare, che sono 512]

253 Quanti sono gli anagrammi della parola «anagramma»? [7560]

254 Sette persone hanno a disposizione cinque sedie numerate da 1 a 5: cinque persone si siedono e due restano in piedi. In quanti modi diversi possono occupare le cinque sedie? [2520]

255 Una classe è formata da 20 alunni. In quanti modi la classe può essere suddivisa in due gruppi ugualmente numerosi (considerando irrilevante l'ordine dei due gruppi)? [92 378]

256 In riferimento alla figura, calcola il numero dei cammini lungo la quadrettatura che conducono dal punto A al punto B, supponendo che sia possibile muoversi soltanto verso destra o verso il basso. Un possibile cammino è, per esempio, quello indicato in verde in figura.
(*Suggerimento*: ci si può ricondurre al calcolo di una permutazione con ripetizioni) [495]



Realtà e modelli

257 **Esame di stato.** La commissione d'esame di stato (o maturità) è costituita da 7 membri: tre docenti interni (cioè in servizio presso lo stesso istituto dei candidati), tre docenti esterni e un presidente. Nel corso delle prove orali, i sette commissari si dispongono in fila lungo il lato di un tavolo, riservando l'altro allo studente esaminato.

a. In quanti modi possono accomodarsi i sette membri della commissione?
b. In quanti modi, se i commissari interni vogliono sedere affiancati e così pure i commissari esterni?
c. In quanti modi, se il presidente intende occupare la posizione centrale della fila, mentre gli altri sei possono accomodarsi liberamente?
d. In quanti modi, se il presidente vuole sedere al centro della fila, i membri interni affiancati e così pure i membri esterni?
[**a.** 5040; **b.** 216; **c.** 720; **d.** 72]

258 **E se?** La squadra di calcio di Pietro conta esattamente 2 portieri, 8 difensori, 7 centrocampisti e 5 attaccanti. Per una questione di equità, l'allenatore seleziona i giocatori titolari casualmente, ma in coerenza con lo schema di gioco: per esempio, scegliendo lo schema 4-5-1 giocano 4 difensori, 5 centrocampisti e 1 attaccante, oltre a 1 portiere. Calcola tutte le possibili formazioni secondo lo schema 4-3-3. Occorre distinguere i ruoli all'interno dello stesso reparto (per esempio, terzino sinistro e terzino destro vanno considerati ruoli diversi, anche se appartenenti allo stesso reparto difensivo).

▸ Come cambierebbe la risposta considerando tutti i possibili schieramenti secondo lo schema 5-3-2? [42 336 000; 56 448 000]

259 Nel gioco del poker ogni giocatore riceve 5 carte (una «mano»), estratte da un mazzo di 32.
 a. Quante mani contengono esattamente tre fanti?
 b. Quante mani contengono 2 donne e 3 re? [**a.** 1512; **b.** 24]

260 Una password è costituita da sei caratteri, ciascuno dei quali può essere una delle 21 lettere dell'alfabeto italiano.
 a. Quante password diverse si possono costruire, formate da lettere tutte distinte tra loro?
 b. Quante password diverse si possono costruire, ammettendo di poter ripetere le lettere?
 c. Quante password si possono costruire, che iniziano con una consonante, terminano con una vocale e sono formate da lettere tutte distinte tra loro? [**a.** 39 070 080; **b.** 21^6; **c.** 7 441 920]

261 L'investigatore Colombo, per concludere un'indagine su un omicidio, deve scoprire un certo numero di telefono. Due testimoni hanno sentito il numero, ma non concordano su di esso. Sono però entrambi d'accordo su quanto segue:
 a. il numero è composto da cinque cifre e termina con la cifra 0;
 b. la seconda cifra è dispari;
 c. tutte le cifre sono diverse;
 d. la cifra più grande è 6.
Quanti numeri telefonici deve controllare l'investigatore Colombo? [108]

262 Una cassetta contiene 20 mele, di cui 5 sono marce.
 a. Quanti campioni diversi di 3 mele possono essere presi dalla cassetta?
 b. Quanti campioni diversi di 3 mele possono essere presi, in cui tutte e tre le mele siano marce?
 c. Quanti campioni diversi di 3 mele possono essere presi, in cui 2 mele siano sane e 1 sia marcia? [**a.** 1140; **b.** 10; **c.** 525]

263 Anna ha dieci amici.
 a. In quanti modi può invitarne 5 a pranzo?
 b. In quanti modi può invitarne 5 a pranzo, se due dei dieci amici sono sposati e partecipano alla cena solo insieme?
 c. In quanti modi può invitarne 5 a pranzo, se due di essi hanno litigato e partecipano solo separatamente?
[**a.** 252; **b.** 112; **c.** 196]

264 Sia A un sottoinsieme di un insieme X. Supponiamo che $|A| = k$ e $|X| = n$, con $k \leq n$. Quanti sono i sottoinsiemi di X che contengono A? [2^{n-k}]

265 In una classe di 24 studenti, di cui 10 femmine e 14 maschi, si deve formare un gruppo per una ricerca costituito da 3 maschi e 3 femmine. In quanti modi può essere costituito il gruppo se tra i 14 maschi ci sono due gemelli e si decide che non possano stare insieme? [42 240]

266 In quanti modi è possibile suddividere 12 penne in 6 cassetti, ammettendo che le 12 penne siano indistinguibili e che qualche cassetto possa restare vuoto? [6188]

Realtà e modelli

267 **Comitato direttivo.** In un gruppo di 26 persone, 10 donne e 16 uomini, deve essere scelto un comitato direttivo costituito da un presidente, un vicepresidente e un segretario. Uno dei 16 uomini è il sig. Bianchi.
 a. In quanti modi diversi è possibile scegliere il comitato?
 b. In quanti modi diversi è possibile scegliere il comitato, se il posto di segretario deve essere occupato da una donna?
 c. In quanti modi diversi è possibile scegliere il comitato, se si decide di assegnare il posto di presidente al sig. Bianchi?
 d. In quanti modi diversi è possibile scegliere il comitato, se si decide di assegnare il posto di presidente a un uomo e il posto di vicepresidente a una donna?
 e. In quanti modi diversi è possibile scegliere il comitato, se si vuole che presidente e vicepresidente siano di sesso diverso? [**a.** 15 600; **b.** 6000; **c.** 600; **d.** 3840; **e.** 7680]

268 **Giuria.** Si vuole formare una giuria composta da 6 persone. I membri della giuria sono da scegliere tra 6 uomini e 7 donne. Una delle 7 donne è la signora Verdi.
 a. In quanti modi diversi è possibile comporre la giuria?
 b. In quanti modi diversi è possibile comporre la giuria, se essa deve essere composta da 3 uomini e 3 donne?
 c. In quanti modi diversi è possibile comporre la giuria, se essa deve essere composta da 3 uomini e 3 donne e tra le tre donne deve necessariamente essere presente la signora Verdi? [**a.** 1716; **b.** 700; **c.** 300]

269 Un'urna contiene 10 palline: 5 nere numerate da 1 a 5, 3 rosse numerate da 6 a 8, e 2 bianche numerate 9 e 10. Supponendo di estrarre dall'urna cinque palline, successivamente e rimettendo nell'urna l'ultima pallina estratta prima dell'estrazione successiva, determina:

a. in quanti modi è possibile estrarre le cinque palline;

b. in quanti modi è possibile estrarre cinque palline, di cui esattamente 2 rosse.

Rispondi poi nuovamente alle domande **a** e **b**, sia nel caso in cui le cinque palline siano estratte successivamente ma senza reimmissione sia nel caso in cui siano estratte contemporaneamente. [**a.** 10^5; **b.** 30 870; nel caso di estrazioni successive senza reimmissione le risposte ad **a.** e **b.** diventano rispettivamente 30 240 e 12 600; nel caso di estrazione contemporanea, le risposte ad **a.** e **b.** diventano rispettivamente 252 e 105]

---

270 Si estraggono contemporaneamente 5 carte da un mazzo di 32: un mazzo di questo tipo è costituito da 8 carte per ciascuno dei quattro semi (cuori, quadri, picche e fiori): 7, 8, 9, 10, fante, donna, re, asso. In quanti modi diversi è possibile estrarre 5 carte contenenti:

a. nessun asso;

b. esattamente 2 donne;

c. almeno 3 fanti;

d. 2 carte di picche e 3 di cuori;

e. 2 carte di un colore e 3 di un altro;

f. almeno un fante;

g. esattamente 3 carte di cuori ed esattamente 2 re.

[**a.** 98 280; **b.** 19 656; **c.** 1540; **d.** 1568; **e.** 134 400; **f.** 103 096; **g.** 1428]

271 Un'urna contiene 10 palline: tre bianche, numerate da 1 a 3 e sette nere, numerate da 4 a 10.
Si estraggono successivamente senza reimmissione 4 palline. In quanti modi diversi è possibile estrarre:

a. 4 palline nere;

b. 3 palline nere e 1 bianca, in quest'ordine;

c. 3 palline nere e 1 bianca, in ordine qualsiasi;

d. 2 palline bianche e 2 palline nere, in ordine qualsiasi;

e. almeno 3 palline nere;

f. al massimo 3 palline nere.

[**a.** 840; **b.** 630; **c.** 2520; **d.** 1512; **e.** 3360; **f.** 4200]

272 Un'associazione di n persone deve eleggere un comitato direttivo di k persone (k fissato, con $k \leq n$), una delle quali sarà il presidente dell'associazione. In quanti modi diversi l'associazione può eleggere il comitato direttivo e il presidente? Rispondi a questa domanda determinando nei due modi diversi seguenti il numero delle possibili scelte dell'associazione:

a. supponendo che l'associazione scelga prima il comitato direttivo e poi il comitato direttivo elegga, all'interno di quest'ultimo, il presidente;

b. supponendo che l'associazione elegga prima il presidente, poi il presidente scelga gli altri membri del comitato direttivo.

Quale identità puoi dedurre dal confronto dei risultati ottenuti in **a** e in **b**? Dimostra questa identità algebricamente. $\left[\mathbf{a.}\ k\binom{n}{k};\ \mathbf{b.}\ n\binom{n-1}{k-1}\right]$

273 Un'associazione di n persone deve eleggere un comitato direttivo formato da un numero qualunque di persone e un presidente del comitato. In quanti modi diversi l'associazione può eleggere il comitato direttivo e il presidente? Rispondi a questa domanda determinando in due modi diversi il numero delle possibili scelte dell'associazione:

a. supponendo che l'associazione scelga prima il comitato direttivo e poi il comitato direttivo elegga, all'interno di quest'ultimo, il presidente;

b. supponendo che l'associazione elegga prima il presidente, poi il presidente scelga gli altri membri del comitato direttivo.

Quale identità puoi dedurre dal confronto dei risultati ottenuti in **a** e in **b**? $\left[\mathbf{a.}\ \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k};\ \mathbf{b.}\ n \cdot 2^{n-1}\right]$

Giustificare e argomentare

Per ciascuna delle seguenti uguaglianze stabilisci se è un'identità; in caso affermativo, dimostrala, altrimenti fornisci un controesempio.

274 $(2n)!(3n)! = (6n^2)!$

275 $3\binom{n}{3} = n\binom{n-1}{2}$

276 $\dfrac{(4n)!}{n!} = 4!$

277 $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$

278 $\binom{n}{3}\binom{5}{2} = \binom{5n}{6}$

279 $\binom{n}{5} = \binom{n-1}{4} + \binom{n-1}{5}$

Esercizi *più*

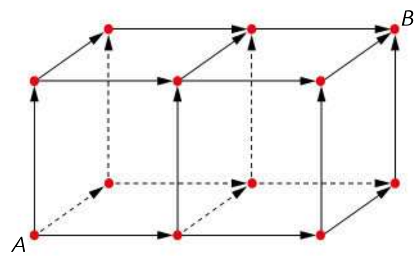
280 Vogliamo disporre 5 pennarelli di colori diversi (giallo, verde, rosso, blu, viola) in quattro cassetti vuoti numerati da 1 a 4.

a. In quanti modi diversi è possibile farlo (ammettendo anche i casi in cui uno o più cassetti rimangano vuoti)?
b. In quanti modi diversi è possibile farlo, se si vuole lasciare il quarto cassetto vuoto?
c. In quanti modi diversi è possibile farlo, se si vogliono lasciare vuoti sia il terzo che il quarto cassetto?
d. In quanti modi diversi è possibile farlo, se si vuole che il terzo o il quarto cassetto non siano vuoti?
e. In quanti modi diversi è possibile farlo, se si vuole che il terzo e il quarto cassetto non siano vuoti?
f. In quanti modi diversi è possibile farlo, se si vuole che nessun cassetto resti vuoto?

[**a.** $4^5 = 1024$; **b.** $3^5 = 243$; **c.** $2^5 = 32$; **d.** 992; **e.** 570; **f.** 240]

Dalle gare

281 Osserva la figura. Quanti diversi cammini consentono di andare da A a B muovendosi lungo gli spigoli e rispettandone il verso indicato?



A 6 B 8 C 9 D 10 E 12

(Kangourou 2013) [E]

282 Dividiamo il numero $(1! + 2! + 3! + ... + 100!)^2$ per 5: qual è il resto?

A 0 B 1 C 2 D 3 E 4

(Kangourou 2013) [E]

283 Carla si è dimenticata la password di accesso al suo nuovissimo computer! Si ricorda però che è una sequenza di 4 vocali, non necessariamente distinte, di cui due sono maiuscole e due sono minuscole. Quante passwords diverse deve provare Carla, al massimo, per accedere al suo computer?

A $3 \cdot 5^4$ B 5^5 C $6 \cdot 5^4$ D 5^6 E $3 \cdot 5^6$

(Giochi di Archimede 2009) [C]

284 Dieci amici decidono di giocare una partita di calcetto, cinque contro cinque. Sapendo che vi sono due terne di fratelli e che i tre fratelli Ambrosio desiderano giocare tutti nella squadra A mentre i tre fratelli Bianchi desiderano giocare tutti nella squadra B, in quanti modi si possono formare le due squadre?

A 3 B 6 C 15 D 24 E 30

(Giochi di Archimede 2004) [B]

285 Un ladro spia Marco mentre chiude la sua valigia con un lucchetto con una combinazione di 3 cifre (ciascuna cifra va da 0 a 9). Non ha potuto vedere la combinazione, ma è riuscito a capire che due cifre consecutive sono uguali e la terza è diversa. Qual è il massimo numero di combinazioni che il ladro dovrà provare per aprire la valigia di Marco?

A 180 B 190 C 200 D 210 E 220

(Giochi di Archimede 2000) [A]

286 Quante parole di quattro lettere (anche prive di senso compiuto) si possono scrivere utilizzando solo le lettere A, B, E, M, O (ammettendo che le lettere possano essere ripetute) in modo che nessuna delle lettere successive a una B (andando da sinistra verso destra) sia una M? (Quindi, per esempio, *ABEB* deve essere contata, ma *OBAM* no)

A $4^3 \cdot 5$ B $4^2 \cdot 5^2$ C $4 \cdot 5^3$ D 2^9 E 5^4

(Giochi di Archimede 2005) [D]

287 In un torneo di tennis, 8 persone decidono di giocare degli incontri di doppio (cioè due contro due) in tutti i modi possibili. Quanti incontri ci sono nell'intero torneo?

A 1680 B 126 C 1260 D 210 E 64

(Olimpiadi della Matematica, gara senior 1993) [D]

Calcolo combinatorio

1 **Vero o falso?**

a. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ per ogni n e k numeri naturali con $1 \leq k \leq n$ V F

b. $D^*_{7,6} = D^*_{6,7}$ V F

c. $(n+1)! - n! = n \cdot n!$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ V F

d. L'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ha 10 sottoinsiemi di cardinalità 2 V F

2 Risolvi l'equazione $3\binom{n+2}{n} = \binom{n+3}{n+1}$.

3 L'insegnante di matematica vuole interrogare tre dei 24 studenti della classe di Paolo.

a. Quanti sono i possibili gruppi?

b. E quanti, se l'insegnante ha annunciato che uno dei «prescelti» sarà proprio Paolo?

4 Cinque soci del circolo di tennis intendono eleggere il migliore giocatore di doppio tra di loro. Convengono che la maniera più equa per farlo è disputare tante partite quanti sono tutti i modi possibili di accoppiare 4 dei 5 amici (le prime 2 coppie scenderanno in campo mentre il quinto riposerà). Quante partite in tutto verranno disputate? E quante giocate da ciascun tennista?

5 Martina deve svolgere un test costituito da 8 domande a risposta multipla: A, B, C o D.

a. Calcola in quanti modi possibili Martina potrebbe compilare il test.

b. Come cambierebbe la risposta, sapendo in anticipo che le risposte giuste sono equamente divise: due «A», due «B» e così via?

6 L'allenatore di calcio di Nicola ha le idee piuttosto confuse sullo schema di gioco da adottare: il solo punto certo è che, portiere escluso, ciascuno dei tre reparti (difesa, centrocampo, attacco) deve essere occupato da almeno due dei 10 giocatori in campo. Per esempio: 4-4-2, 3-5-2 ecc.
Quanti schemi di gioco sono possibili per la squadra di Nicola? Attenzione: è richiesto il numero degli schemi di gioco, non tutte le possibili disposizioni dei giocatori in campo. In altre parole: i calciatori sono indistinguibili, senza ruolo.

7 Calcola il coefficiente del monomio x^3 nello sviluppo di $(2x-1)^7$.

Valutazione

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	**Totale**
Punteggio	1	1,25	$0,75 \cdot 2 = 1,5$	1,5	$0,75 + 1 = 1,75$	1,5	1,5	10
Punteggio ottenuto								

Tempo indicativo: 1 h

Risposte p. 219