

ZDM

Výroková logika, jazyk a formule predikátové logiky. Kombinatorika, relace, teorie množin. Základy teorie grafů.

Výroková logika

- **Výrok** – tvrzení o němž lze v principu rozhodnout, zda je pravdivé nebo nepravdivé. Výrok nemůže být současně pravdivý i nepravdivý.
- **Výrok** je: Delfín je savec. Kruh je buď čtverec nebo trojúhelník.
- **Výrok není**: Kolikátko je dnes? Okamžitě vypadněte. Tato věta není pravdivá.

Definice 1. Abeceda výrokové logiky je tvořena symboly uvedenými v následující tabulce.

Symbol	Název	Význam
(,)	závorky	
¬	negace	ne
∧	konjunkce	a
∨	disjunkce	nebo (nevylučovací)
⇒	implikace	jestliže ..., pak
↔	ekvivalence	právě, když
P, Q, R, \dots	výrokové proměnné	výroky
$P_n, Q_n, R_n, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$	výrokové proměnné	výroky

Symboly $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \text{and } \Leftrightarrow$ se nazývají logické spojky. Výrokové proměnné označují jednotlivé výroky a jejich význam je na rozdíl od logických spojek v různých situacích různý. Množinu všech výrokových proměnných budeme značit \mathcal{V} .

Výroky ve tvaru implikace $P \Rightarrow Q$ jsou v matematice velmi časté a užívá se pro ně celá řada různých ekvivalentních vyjádření:

Definice 2. Formule výrokové logiky je konečná posloupnost symbolů abecedy vyhovující následující induktivní konstrukci.

- (i) Výroková proměnná je formule.
- (ii) Jsou-li φ a ψ formule, pak $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \Rightarrow \psi), (\varphi \Leftrightarrow \psi)$ a $(\neg \varphi)$ jsou formule.

Množinu všech formulí označíme \mathcal{V}^* .

Definice 3. Ohodnocení výrokových proměnných je každé zobrazení ν z množiny \mathcal{V} do množiny $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, $\nu: \mathcal{V} \rightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.

Zápis $\nu(P) = \mathbf{1}$ čteme, že P je pravdivý výrok a $\nu(P) = \mathbf{0}$ čteme, že P je nepravdivý výrok.

Rádi bychom ohodnocení výrokových proměnných rozšířili z množiny \mathcal{V} na množinu \mathcal{V}^* všech formulí. Toto rozšíření však musí respektovat následující pravidla. Jsou-li φ a ψ formule, pak

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\varphi \Leftrightarrow \psi$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$

Logický důsledek

Nyní zavedeme pojem, který odráží naši představu o logickém vyplývání.

Definice 6. Mějme formuli φ a množinu formulí Σ . Řekneme, že φ je logický důsledek formulí z množiny Σ (nebo Σ logicky implikuje φ), je-li formule φ pravdivá v každém ohodnocení, ve kterém jsou pravdivé všechny formule v množině Σ . Značíme $\Sigma \models \varphi$.

Okomentoval(a): [sd1]: Tady je chyba v poslední větě.
Poslední písmeno by mělo odpovídat názvu formule z první věty

dvojitá negace: $\neg\neg P \models P$

nahrazení implikace: $(\varphi \Rightarrow \psi) \models \neg\varphi \vee \psi$

kontrapozice: $(\varphi \Rightarrow \psi) \models (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$

de Morganova pravidla: $\neg(\varphi \wedge \psi) \models \neg\varphi \vee \neg\psi$
 $\neg(\varphi \vee \psi) \models \neg\varphi \wedge \neg\psi$

distributivní zákony: $\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \models (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$
 $\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \models (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$

Příklad. Uvažujme množinu $\Sigma = \{P, P \Rightarrow Q\}$. Ukážeme, že $\Sigma \models Q$.

Pravdivostní tabulka je následující:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$

Jediný případ, kdy jsou obě formule v Σ interpretovány jako pravdivé, je poslední řádek. Ale tam je pravdivá i formule Q . Proto platí, že $\Sigma \models Q$.

Definice 7. Formule φ se nazývá tautologie, pokud $\nu(\varphi) = \mathbf{1}$ pro každé pravdivostní ohodnocení ν . Zápis je $\models \varphi$.

Asi nejjednoduší tautologie je $(P \vee \neg P)$. Opak tautologie je formule zvaná kontradikce.

Definice 8. Formule φ se nazývá kontradikce, pokud $\nu(\varphi) = \mathbf{0}$ pro každé pravdivostní ohodnocení ν . Zápis je $\models \neg\varphi$.

Příklad kontradikce je $(P \wedge \neg P)$. Je rovněž zřejmé, že negace tautologie je kontradikce a negace kontradikce je tautologie. Když si připomeneme, že dvě formule jsou logicky ekvivalentní právě, když mají identické pravdivostní tabulky, ihned vidíme, že všechny tautologie jsou mezi sebou logicky ekvivalentní a rovněž všechny kontradikce jsou mezi sebou logicky ekvivalentní.

Definice 10. Mějme množinu Σ formulí. Řekneme, že je splnitelná (nebo že má model), jestliže existuje pravdivostní ohodnocení, ve kterém jsou všechny formule v Σ pravdivé.

Je zřejmé, že každá podmnožina splnitelné množiny je rovněž splnitelná. Speciálně, prázdná množina je splnitelná.

Uvažujme množinu formulí. Přiřadíme-li formulím nějaký význam, stanou se z nich výroky. Pak splnitelnost množiny formulí znamená, že příslušné výroky jsou konzistentní, tj. nejsou navzájem ve sporu. V rovině formulí je tedy splnitelnost to samé jako konzistence v rovině výroků.

Příklad. Zjistěte, zda je splnitelná množina

$$\Sigma = \{(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R, \neg P \vee R, \neg P \wedge Q \wedge R, Q \Leftrightarrow (P \vee R)\}.$$

Formule obsahují jen tři proměnné, proto je možné úlohu řešit pravdivostní tabulkou.

P	Q	R	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$	$\neg P \vee R$	$\neg P \wedge Q \wedge R$	$Q \Leftrightarrow (P \vee R)$
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0	1

Ze čtvrtého řádku vyvozujeme, že množina Σ je splnitelná.

Věta 11. Mějme formuli φ a množinu formulí Σ . Následující je ekvivalentní:

- (i) $\Sigma \models \varphi$,
- (ii) $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ není splnitelná.

Důkaz. Předpokládejme, že $\Sigma \models \varphi$ a že ν je pravdivostní ohodnocení, ve kterém jsou všechny formule v Σ pravdivé. Protože φ je logickým důsledkem Σ , je $\nu(\varphi) = 1$. Pak je ale množina $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ nesplnitelná.

Nyní naopak předpokládejme, že $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ je nesplnitelná. Mějme ohodnocení ν , ve kterém jsou všechny formule v Σ pravdivé. Pak nutně musí platit, že $\nu(\neg\varphi) = \mathbf{0}$, neboť v opačném případě by byla množina $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ splnitelná. Odtud plyne, že $\nu(\varphi) = \mathbf{1}$. \square

Definice 12. Každá funkce $B: \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^n \rightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ se nazývá (n -ární) booleovská funkce, $n \in \mathbb{N}$.

V případě $n = 1$ a $n = 2$ užíváme názvy „unární“ a „binární“. Příklad unární booleovské funkce je

$$B(\mathbf{0}) = \mathbf{1}, \quad B(\mathbf{1}) = \mathbf{0}.$$

Binární booleovská funkce je např.

$$B(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{1}, \quad B(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = \mathbf{1}, \quad B(\mathbf{1}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad B(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = \mathbf{0}.$$

Obecně, n -ární booleovská funkce je funkce n proměnných, které nabývají hodnot pouze $\mathbf{0}$ a $\mathbf{1}$.

Důležitý případ nastává, když je booleovská funkce odvozena z nějaké formule φ . Je-li např. $\varphi = P \wedge Q$, můžeme utvořit pravdivostní tabulku a pomocí ní booleovskou funkci definovat.

P	Q	$P \wedge Q$	$B(X_1, X_2)$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$B(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$B(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = \mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$B(\mathbf{1}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$B(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = \mathbf{1}$

Booleovskou funkci odvozenou z formule φ budeme značit B_φ a říkat, že B_φ je realizována formulí φ . Obecná definice je následující:

Definice 13. Mějme formuli $\varphi = \varphi(P_1, \dots, P_n)$ obsahující výrokové proměnné P_1, \dots, P_n . Booleovská funkce $B_\varphi(X_1, \dots, X_n)$ realizovaná formulí φ je funkce, pro kterou platí

$$B_\varphi(\nu(P_1), \dots, \nu(P_n)) = \nu(\varphi)$$

pro všechna pravdivostní ohodnocení ν .

+

Mějme booleovskou funkci B zadanou:

$$\begin{aligned} B(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) &= \mathbf{0}, \\ B(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}) &= \mathbf{1}, \\ B(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}) &= \mathbf{0}, \\ B(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) &= \mathbf{1}, \\ B(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) &= \mathbf{1}, \\ B(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}) &= \mathbf{0}, \\ B(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}) &= \mathbf{0}, \\ B(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) &= \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Jedna možnost, jak sestrojit formuli φ , že $B_\varphi = B$, je následující.

Metoda A:

Sestavíme seznam všech trojic (X_1, X_2, X_3) , ve kterých je $B(X_1, X_2, X_3) = \mathbf{1}$. Ke každé trojici napíšeme vhodnou konjunkci, která má hodnotu $\mathbf{1}$ právě pro ohodnocení dané touto trojicí pravdivostních hodnot.

$$\begin{aligned} \mathbf{001} \quad & \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3, \\ \mathbf{011} \quad & \neg P_1 \wedge P_2 \wedge P_3, \\ \mathbf{100} \quad & P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3, \\ \mathbf{111} \quad & P_1 \wedge P_2 \wedge P_3. \end{aligned}$$

Když nyní položíme

$$\begin{aligned} \varphi = & (\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3) \vee (\neg P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \\ & \vee (P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3) \vee (P_1 \wedge P_2 \wedge P_3), \end{aligned}$$

pak φ je pravdivá jen pro výše vypsané trojice hodnot a nepravdivá ve všech ostatních. Jinými slovy, $B_\varphi = B$.

Nemáme žádný apriorní důvod preferovat trojice (X_1, X_2, X_3) , kde hodnota funkce $B(X_1, X_2, X_3) = \mathbf{1}$. Můžeme provést podobnou konstrukci i pro trojice, ve kterých je $B(X_1, X_2, X_3) = \mathbf{0}$.

Metoda B:

Zde vytvoříme seznam trojic, pro které je $B(X_1, X_2, X_3) = \mathbf{0}$. Napravo od každé trojice napíšeme disjunkci, která má hodnotu $\mathbf{0}$ právě pro ohodnocení dané touto trojicí.

$$\begin{aligned} \mathbf{000} \quad & P_1 \vee P_2 \vee P_3, \\ \mathbf{010} \quad & P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3, \\ \mathbf{101} \quad & \neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3, \\ \mathbf{110} \quad & \neg P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3. \end{aligned}$$

Položíme-li

$$\begin{aligned} \varphi = & (P_1 \vee P_2 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3) \\ & \wedge (\neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3), \end{aligned}$$

pak bude φ nepravdivá jen pro trojice vypsané výše a pravdivá ve všech ostatních případech. Tj. $B_\varphi = B$.

Věta 14. *Mějme n -ární booleovskou funkci B . Pak existuje formule φ závislá na n proměnných, která realizuje funkci B , $B = B_\varphi$.*

Tvary DNF a CNF

Z důkazu Věty 14 plyne ještě jedno poučení. Formule, která realizuje danou booleovskou funkci je velmi specifického tvaru. Jediné logické spojky, které obsahuje, jsou \neg , \wedge a \vee . Dvě metody užité při konstrukci nám dávají dva kanonické tvary formulí.

Definice 15. *Formule, která je rovna pouze výrokové proměnné nebo negaci výrokové proměnné, se krátce nazývá literál.*

Formule φ je v disjunktivním normálovém tvaru (DNF), když

$$\varphi = \psi_1 \vee \psi_2 \vee \cdots \vee \psi_k,$$

kde všechny ψ_i jsou konjunkcemi literálů, tj. $\psi_i = \theta_{i1} \wedge \theta_{i2} \wedge \cdots \wedge \theta_{in_i}$ a θ_{ij} jsou literály.

Podobně formule φ je v konjunktivním normálovém tvaru (CNF), když

$$\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_k,$$

kde všechny ψ_i jsou disjunkcemi literálů, tj. $\psi_i = \theta_{i1} \vee \theta_{i2} \vee \cdots \vee \theta_{in_i}$ a θ_{ij} jsou literály.

Dvě metody užité v důkaze Věty 14 dávají

Důsledek. *Každá formule je logicky ekvivalentní formuli ve tvaru DNF i CNF.*

Převedeme formuli $(\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \Rightarrow P)$ do CNF i do DNF. Při tomto převodu nemusíme jít cestou přes booleovské funkce a Metodu A a B. Mnohem kratší je aplikovat pravidla, která zachovávají logickou ekvivalence.

$(\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \Rightarrow P)$	\models	eliminace krajních implikací
$(\neg \neg P \vee Q) \Rightarrow (\neg R \vee P)$	\models	odstranění dvojité negace
$(P \vee Q) \Rightarrow (\neg R \vee P)$	\models	eliminace implikace
$\neg(P \vee Q) \vee (\neg R \vee P)$	\models	de Morganovo pravidlo
$(\neg P \wedge \neg Q) \vee \neg R \vee P$	\models	distributivní zákon
$(\neg P \vee \neg R \vee P) \wedge (\neg Q \vee \neg R \vee P)$		

Poslední řádek je tvar CNF dané formule. Tvar DNF máme dokonce už v předposledním řádku.

Každá tautologie má CNF i DNF tvar jednoduchý: $P \vee \neg P$. Obdobně každá kontradikce má CNF i DNF tvar $P \wedge \neg P$.

Protože každá booleovská funkce může být realizována formulí užívající pouze spojky $\{\neg, \wedge, \vee\}$, říkáme, že množina spojek $\{\neg, \wedge, \vee\}$ je **úplná**. Úplnost této množiny může být ještě zlepšena:

Věta 16. Množiny $\{\neg, \wedge\}$ a $\{\neg, \vee\}$ jsou úplné.

Důkaz. Protože $\{\neg, \wedge, \vee\}$ je úplná množina spojek, stačí, pro první případ, modelovat disjunkci pomocí nějaké kombinace negace a konjunkce. Toho dosáhneme de Morganovým pravidlem $P \vee Q \models \neg(\neg P \wedge \neg Q)$. Stejně postupujeme i ve druhém případě. \square

Můžeme jít ještě dále a ptát se, zda existuje nějaká zvláštní logická spojka, která sama o sobě tvoří úplnou množinu? Taková opravdu existuje, značí se $|$ a nazývá se Shefferův operátor. Je definován $P|Q := \neg(P \wedge Q)$ nebo následující tabulkou.

P	Q	P Q
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Rezoluční metoda

K popisu rezoluční metody potřebujeme několik nových termínů. **Klauzule** je každá disjunkce literálů, $\theta_1 \vee \dots \vee \theta_n$. S klauzulí jsme se už setkali (i když jsme tento termín nepoužívali) ve tvaru CNF. Tvar CNF je vlastně konjunkcí klauzulí.

Mějme klauzuli $\psi = \theta_1 \vee \theta_2 \vee \dots \vee \theta_n$. Můžeme ji rovněž psát ve tvaru

$$\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\},$$

kde čárka nahrazuje logickou spojku \vee . Tak se můžeme na klauzuli dívat jako na množinu literálů $\psi = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$. To nám umožní mluvit např. o sjednocení klauzulí nebo množinovém rozdílu klauzulí či o prázdné klauzuli. Navíc tato konvence eliminuje jak pořadí literálů, tak jejich opakování v klauzuli: $\theta_1 \vee \theta_2 \vee \theta_1$ je jednoduše $\{\theta_1, \theta_2\}$.

Algoritmus rezoluční metody.

1. Všechny formule v množině $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m, \neg\varphi\}$ přepíšeme do CNF a vytvoříme množinu $\Sigma = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ klauzulí.
2. Redukce počtu klauzulí:
 - (a) Klauzule, které jsou tautologiemi, vynecháme.
 - (b) Obsahuje-li nějaká klauzule ψ' jinou klauzuli ψ , $\psi \subset \psi'$, klauzuli ψ' vynecháme.
 - (c) Obsahuje-li klauzule ψ takový literál θ , že opačný literál $\neg\theta$ se ve zbylých klauzulích nevyskytuje, klauzuli ψ vynecháme.
3. Zvolíme si literál θ , podle kterého lze vytvářet rezolventy a k množině Σ přidáme všechny možné rezolventy podle θ .
4. Odebereme všechny klauzule obsahující θ nebo $\neg\theta$, výslednou množinu označíme jako Σ a vracíme se do bodu 2.

Jazyk a formule predikátové logiky

Definice 19. Abeceda predikátové logiky je tvořena symboly uvedenými v následující tabulce.

Symbol	Název	Význam
(,)	závorky	
$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$	logické spojky	
\exists	existenční kvantifikátor	existuje ...
\forall	obecný kvantifikátor	pro všechny ...
x, y, z, \dots	proměnné	proměnné
a, b, c, \dots	konstanty	individuální objekty
f, g, h, \dots	funkční symboly	objekty
F, G, H, \dots	predikáty	vlastnosti objektů

Podíváme se na nové prvky abecedy podrobněji. Význam kvantifikátorů je jasný z tabulky. Obecný kvantifikátor se často reprezentuje i frázemi „každý“, „jakýkoli“ nebo „kdykoli“. Existenční kvantifikátor může mít kromě významu „existuje“ i interpretaci „nějaký“ nebo „pro nějaký“.

Proměnné zastupují jednotlivé objekty. Můžeme je indexovat, např. x_1, x_2, \dots , takže jich je v principu nekonečné mnoho. Je možné také předem specifikovat, v jaké množině proměnné uvažujeme. Tato množina se pak nazývá **univerzum**. Např. řekneme-li, že univerzum je množina \mathbb{R} reálných čísel, pak všechny proměnné budou reálná čísla. Řekneme-li, že univerzum je množina všech lidí, pak proměnné x, y, z, \dots budou označovat lidi. Univerzum je definiční obor kvantifikátorů. Není-li univerzum předem určené, pak je tvořeno všemi objekty.

Některé prvky v univerzu můžeme odlišit od ostatních tím, že jim dáme specifická jména. Takové objekty se nazývají konstanty. V případě univerza \mathbb{R} to mohou být čísla $0, \pi, e$ atd. Je-li univerzum množina lidí, pak konstanty mohou být např. $a = Julius Caesar$ nebo $b = Ema Destinová$ apod.

V matematice se pracuje s funkcemi. V predikátové logice se nazývají funkční symboly. Funkční symbol f o n proměnných je zobrazení

$$f: \mathcal{U}^n \longrightarrow \mathcal{U},$$

kde \mathcal{U} je univerzum. Máme-li zvoleno $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, pak funkční symboly jsou např.

$$f(x) = x^2, \quad g(x, y) = x + y, \quad h(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \text{ atd.}$$

Je-li $\mathcal{U} = \{\text{lidé}\}$, pak $f(x)$ může označovat otce člověka x , $g(x, y, z)$ nejchytřejšího z osob x, y, z apod.

Formalizace výroků

I v predikátové logice existuje analogie de Morganových pravidel, zde se týká záměny negace a kvantifikátoru. Je-li φ formule, pak

$$\neg(\forall x \varphi) \text{ je to samé jako } \exists x \neg\varphi.$$

Analogicky,

$$\neg(\exists x \varphi) \text{ je to samé jako } \forall x \neg\varphi.$$

Následuje-li několik kvantifikátorů za sebou, uvedená pravidla aplikujeme opakováně. Např.

$$\neg(\forall x \forall y \exists z \varphi) \text{ je to samé jako } \exists x \exists y \forall z \neg\varphi.$$

Podívejme se nyní nakolik je důležité pořadí kvantifikátorů ve formuli. Jedná-li o kvantifikátory stejného typu, lze pořadí libovolně měnit.

$$\forall x \forall y F(x, y) \text{ je to samé jako } \forall y \forall x F(x, y).$$

Analogicky,

$$\exists x \exists y F(x, y) \text{ je to samé jako } \exists y \exists x F(x, y).$$

V případě různých kvantifikátorů je situace naprosto odlišná. Kromě kvantifikátorů lze totiž zaměnit i proměnné. Tím vzniknou čtyři možné kombinace a každá z nich má obecně jiný význam. Jako ilustrace poslouží následující příklad.

Příklad. Mějme univerzum $\mathcal{U} = \{\text{lidé}\}$ a predikát $O(x, y)$ s významem „ x oklamal y “. Vypíšeme si všechny čtyři varianty pořadí a k nim jejich významy.

$$\forall x \exists y O(x, y) \text{ Každý někoho oklamal.}$$

$$\forall y \exists x O(x, y) \text{ Každého někdo oklamal.}$$

$$\exists x \forall y O(x, y) \text{ Někdo oklamal všechny.}$$

$$\exists y \forall x O(x, y) \text{ Někoho oklamali všichni.}$$

+

Přesný význam kvantifikátoru \exists je „existuje alespoň jeden“. Často je třeba kvantifikovat také formulace „existuje právě jeden“ nebo „existuje nejvýše jeden“. Ukážeme si jakou formalizaci mají taková slovní spojení. Označme si predikátem $V(x)$ nějakou obecnou vlastnost objektu x . Výrok „Existuje alespoň jeden objekt s vlastností V “ má jednoduchou formalizaci,

$$\exists x \ V(x).$$

O něco složitější je „Existuje nejvýše jeden objekt s vlastností V “. Znamená to, že buď neexistuje žádný objekt s vlastností V nebo existuje právě jeden objekt s vlastností V . Nejfektivnější způsob formalizace spočívá v tom, že vyloučíme existenci dvou *různých* objektů s vlastností V :

$$\forall x \forall y \ V(x) \wedge V(y) \Rightarrow (x = y).$$

Kombinatorika

11a.1. Sčítací princip

- Jestliže je možné jistý proces rozdělit na dva disjunktní případy, kdy si proces vždy vybere právě jeden z těchto případů, první případ je možno provést n_1 způsoby a druhý n_2 způsoby, pak je proces možno provést $n_1 + n_2$ způsoby.

Zobecnění: Jestliže je možno jistý proces rozdělit na N případů, kdy si proces vždy vybere právě jeden z těchto případů, a i -tý případ je možno provést n_i způsoby, pak je proces možno provést $\sum_{i=1}^N n_i$ způsoby.

- Uvažujme množinu M objektů. Jestliže existuje rozklad $M = \bigcup_{i=1}^N M_i$ (tedy M_i jsou navzájem disjunktní), pak $|M| = \sum_{i=1}^N |M_i|$.

11a.2. Násobící princip

- Předpokládejme, že jistý proces lze rozložit do dvou po sobě následujících fází. Jestliže je první fázi možné udělat vždy n_1 způsoby a druhou vždy (nezávisle na výsledku první fáze) n_2 způsoby, pak je celý proces možno udělat $n_1 \cdot n_2$ způsoby.

Zobecnění: Je-li N fází, každá vždy n_i způsoby, pak je celý proces možno provést $\prod_{i=1}^N n_i$ způsoby.

- Uvažujme množinu M počítaných objektů. Jestliže je $M = M_1 \times M_2$, pak $|M| = |M_1| \cdot |M_2|$.

11a.3. Doplňkový princip

- Předpokládejme, že jistý proces lze provést dvěma způsoby, speciálním a nespeciálním. Pak je počet speciálních způsobů roven počtu všech způsobů provedení sníženým o počet nespeciálních způsobů provedení.
- Uvažujme množinu M počítaných objektů. Pak pro $M_1 \subseteq M$ platí $|M_1| = |M| - |M - M_1|$.

Definice

Nechť $k \leq n \in \mathbb{N}_0$. Definujeme jejich **kombinaciční číslo** nebo **binomický koeficient** jako

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Čteme to „ n nad k “.

Věta 11a.5.

Uvažujme množinu o n různých prvcích.

(i) Je $n!$ způsobů, jak je seřadit (neboli je $n!$ permutací).

(ii) Jestliže na pořadí záleží a opakování není povoleno, pak je $\frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!$ různých způsobů, jak vybrat k prvků z této množiny.

(iii) Jestliže na pořadí záleží a opakování je povoleno, pak je n^k různých způsobů, jak vybrat k prvků z této množiny.

(iv) Jestliže na pořadí nezáleží a opakování není povoleno, pak je $\binom{n}{k}$ různých způsobů, jak vybrat k prvků z této množiny.

(v) Jestliže na pořadí nezáleží a opakování je povoleno, pak je $\binom{n+k-1}{k}$ různých způsobů, jak vybrat k prvků z této množiny.

Ony dva parametry, zda se opakuje a zda na pořadí záleží, patří k tomu hlavnímu, co určuje metodu zpracování kombinatorické situace. Je důležité umět situace (ii)–(iv) rozpozнат a přinejmenším pro ty dvě poslední znát příslušné vzorce. Někdo si pamatuje vzorce i pro první dvě z nich, ale jak už jsme viděli, dá se bez toho obejít. Výběrům „uspořádaným“, kde na pořadí záleží, se říká **variace**, zatímco výběrům „neuspořádaným“, kde na pořadí nezáleží, říkáme **kombinace**. Zde to nebudeme příliš používat. Shrňme si to v tabulce.

	bez opakování	s opakováním
s pořadím (variace)	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
bez pořadí (kombinace)	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

Věta 11a.6.

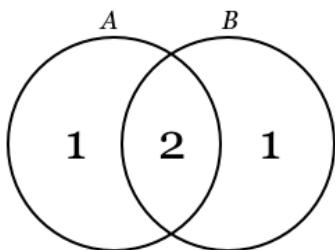
Mějme n objektů, z toho n_1 je typu 1 (jsou nerozlišitelné), n_2 typu 2 až n_k je typu k , tedy $\sum_{i=0}^k n_i = n$.

Pak je $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$ různých permutací těchto objektů.

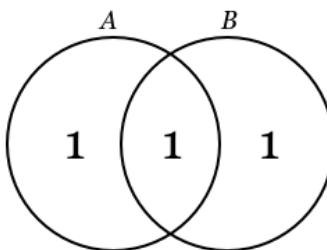
Věta 11b.1. (Princip inkluze a exkluze, principle of inclusion and exclusion)

Jsou-li A_i pro $i = 1, 2, \dots, n$ konečné množiny, pak

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right| \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|. \end{aligned}$$



$$|A| + |B|$$



$$|A| + |B| - |A \cap B|$$

The number in each subset represents how many times that subset is counted.
Note that by adding the elements in sets A and B , their intersection is counted twice.

Věta 11c.3. (binomická věta, binomial theorem)

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\ &= x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}y^2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2} x^2y^{n-2} + nxy^{n-1} + y^n.\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \binom{0}{0} & & & & 1 & & \\ & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & 1 & 1 & \\ & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & 1 & 2 & 1 \\ & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1\end{array}$$

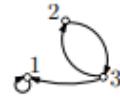
Věta 18. Počet nezáporných celočíselných řešení rovnice $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ je roven

$$\binom{n+k-1}{n-1}.$$

Tahák na relace, zobrazení a uspořádání

Definice: Binární relace R je množina uspořádaných dvojic. Jsou-li X a Y množiny, nazývá se libovolná podmnožina kartézského součinu $X \times Y$ relací mezi X a Y . Často nás bude zajímat relace mezi prvky té samé množiny. Pak mluvíme o relaci na množině X , tedy libovolné podmnožině $R \subseteq X \times X = X^2$. To, že je prvek x v relaci s prvkem y často zkráceně zapisujeme xRy .

Příklad: Mějme množinu $X = \{1, 2, 3\}$ a relaci $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$. Tuto relaci můžeme mimo množinového zápisu reprezentovat i tabulkou, či maticí sousednosti. Nula na pozici (x, y) reprezentuje, že prvky x a y nejsou v relaci, jednička že v relaci jsou. Další možností je reprezentovat jednotlivé prvky množiny X body v rovině a kreslit mezi nimi šipky z x do y , pokud je x s y v relaci.



	1	2	3
1	1	0	0
2	0	0	1
3	1	1	0

Vlastnosti relace

Vlastnost	Definice	Příklad pro $X = \{a, b, c\}$
reflexivita	Relace R na mn. X je reflexivní právě tehdy, když $\forall x \in X : xRx$.	$R = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$
symetrie	Relace R na mn. X je symetrická právě tehdy, když $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$	$R = \{(a, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\}$
antisymetrie	Relace R na mn. X je antisymetrická právě tehdy, když $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$	$R = \{(a, a), (b, c), (a, c), (b, a), (c, c)\}$
tranzitivita	Relace R na mn. X je tranzitivní právě tehdy, když $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$	$R = \{(a, b), (b, c), (a, c), (b, b)\}$

Ještě jednou a lidsky: Relace je *reflexivní*, pokud je každý prvek z X v relaci sám se sebou. Pokud pro každé x v relaci s y platí, že i y je v relaci s x , relace je *symetrická*. Relace je *tranzitivní*, pokud když vede šipka mezi x a y i mezi y a z , tak vede i šipka mezi x a z .

Antisimetrie je o trochu základnější. Ve skutečnosti rozlišujeme dva druhy antisimetrie – silnou a slabou. *Silná antisimetrie* znamená přesný opak symetrie – je-li x v relaci s y , nemůže být y v relaci s x . *Slabá antisimetrie*, kterou obvykle nazýváme jen *antisimetrie* znamená skoro to samé, ale připomíná, aby byl prvek v relaci sám se sebou.

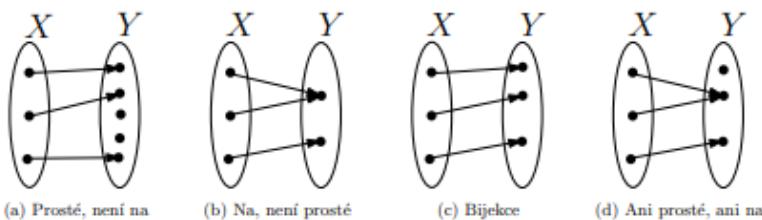
Může být relace zároveň symetrická i antisymetrická? Ano! Uvažme relaci $R = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$. Může být relace zároveň symetrická i silně antisymetrická? Ano, ale taková je pouze jedna a to prázdňá relace $R = \{\}$.

Zobrazení

Definice: Zobrazení z množiny X do množiny Y je relace $f \subseteq X \times Y$, kde platí, že pro každý prvek $x \in X$ existuje právě jeden prvek $y \in Y$ tž. $(x, y) \in f$.

Zobrazení f z množiny X do množiny Y obvykle značíme $f : X \rightarrow Y$. Symbolem $f(x)$ značíme právě to jediné $y \in Y$ s nímž je prvek $x \in X$ v relaci.

Vlastnost	Definice
prosté zobrazení	Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je prosté, jestliže pro $x \neq y$ je $f(x) \neq f(y)$.
zobrazení na	Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je na, jestliže pro každý $y \in Y$ existuje $x \in X$ tž. $f(x) = y$.
bijekce	Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je bijekce, jestliže je prosté a na.



Ekvivalence

Definice: Řekneme, že relace R na mn. X je *ekvivalence*, jestliže je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Jestliže prvky x a y jsou spolu v relaci, pak také patří do stejné *třídy ekvivalence*. Třída ekvivalence je maximální (co do inkluze) množina prvků takových, že jsou spolu všechny po dvou navzájem v relaci. Třídami ekvivalence je relace ekvivalence jednoznačně určena.

Částečná a lineární uspořádání

Definice: Řekneme, že relace R na mn. X je uspořádání na X , jestliže je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Takové uspořádání pak značíme (X, R) .

Definice: Řekneme, že relace R na mn. X je lineární uspořádání, jestliže je to uspořádání a navíc pro každé $x, y \in X$ je xRy nebo yRx .

Samotnému uspořádání, které nemusí být nutně lineární říkáme také částečné uspořádání. Lineární uspořádání je takové uspořádání, v němž jsou každé dva prvky porovnatelné. Nemůže ovšem pro různé x a y platit $xRy \wedge yRx$, protože taková relace by nebyla antisymetrická a tudíž by se vůbec nejdalo o uspořádání.

Příklad Rozhodnutí

Příklad	Rozhodnutí
(\mathbb{N}, \leq)	Je uspořádání (splňuje, reflexivitu, antisymetrii a tranzitivitu) i lineární uspořádání (všechny prvky jsou navzájem porovnatelné).
$(\mathbb{N}, <)$	Není uspořádání (nesplňuje reflexivitu) a tím pádem ani lineární uspořádání.
$(\mathbb{N},)$	Je uspořádání, ale není lineární (např. 5 nedělí 7, ani 7 nedělí 5, tedy 5 a 7 jsou neporovnatelné).

Pro názornost budeme nadále říkat, že prvek x je v relaci R pod prvkem y , pokud je xRy . Analogicky budeme říkat, že prvek x je v relaci R nad prvkem y , pokud je yRx .

Maximální a největší prvky, suprema, řetězce, antiřetězce

Definice: Prvek a je největším prvkem uspořádání (X, \preceq) , jestliže $\forall x \in X$ platí $x \preceq a$.

Tedy, prvek a je největším prvkem uspořádání, pokud jsou všechny ostatní prvky pod ním. Všimněte si, že nemusíme řešit, zda je x různé od a , protože v uspořádání musí platit reflexivita, tedy vždy platí $a \preceq a$.

Definice: Prvek b je maximálním prvkem uspořádání (X, \preceq) , jestliže neexistuje $x \in X$ různé od b takový, že $b \preceq x$.

Tedy, prvek b je maximálním prvkem uspořádání, jestliže žádný prvek není nad ním. Z definice je zjevné, že maximálních prvků může existovat i více. Pokud existuje pouze jeden, je zároveň prvek největším. Pokud existuje více maximálních prvků, největší neexistuje. Analogicky můžeme definovat i nejmenší a minimální prvek.

Definice: Mějme uspořádání (X, \preceq) . Horní závorou množiny $Y \subseteq X$ rozumíme prvek $a \in X$ takový, že $\forall y \in Y : x \preceq a$. Supremum je nejmenší (ve smyslu uspořádání) horní závorou.

Horními závory jsou tedy prvky, které jsou nad všemi prvky z množiny Y . Z nich nejmenší (ve smyslu nejmenšího prvku uspořádání, tak jak byl definován výše) je supremum. Podobně definujeme i infimum, které je naopak největší dolní závorou. Může se nám stát, že množina horních závor je neprázdná, ale žádná z nich nemí nejmenší – pak supremum dané množiny v uspořádání (X, \preceq) neexistuje. Zvláštní pozornost je třeba věnovat prázdné množině. Horními závory prázdné množiny jsou všechny prvky uspořádání a supremem prázdné množiny je pak nejmenší prvek uspořádání (existuje-li). Stejně tak infimum prázdné množiny je největší prvek uspořádání.

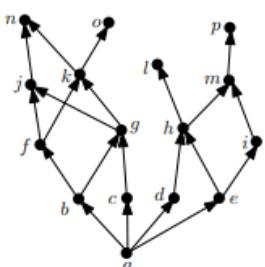
Definice: Řetězec v uspořádání (X, \preceq) je množina navzájem porovnatelných prvků.

Definice: Množinu A v uspořádání (X, \preceq) nazveme nezávislou, jestliže pro žádnou dvojici různých prvků $x, y \in A$ neplatí $x \preceq y$. Nezávislou množinu též nazýváme antifetězec.

Nezávislá množina, či antifetězec je tedy množina po dvou neporovnatelných prvcích.

Příklad: Obrázek nalevo znázorňuje částečné uspořádání (tranzitivní hrany vynecháváme). Uspořádání má jen jeden minimální prvek, který je zároveň nejmenším – prvek a . Má čtyři maximální prvky – n, o, l a p , největší prvek neexistuje. Supremem množiny $\{b, c, g\}$ je prvek g , infimum prvek a . Množina $\{f, g\}$ nemá definované supremum, její infimum je b . Množina $\{j, k, o\}$ nemá definované supremum, ani infimum.

Nejdelším řetězcem je např. množina $\{a, b, g, k, n\}$, ale existuje více stejně dlouhých řetězců. Nejdelším antifetězcem je např. množina $\{j, k, h, i\}$.



k

Teorie množin

Značení a operace.

Připomeneme si standardní a obvyklé značení.

- \emptyset prázdná množina,
- $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ přirozená čísla,
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ celá čísla,
- $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = m/n, \text{ kde } m \in \mathbb{Z} \text{ a } n \in \mathbb{N}\}$ racionální čísla,
- $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ reálná čísla.

Je-li A množina a V nějaká vlastnost, pak symbol $\{x \in A \mid x \text{ má vlastnost } V\}$ označuje množinu všech prvků z A , které mají vlastnost V .

Příklad 1. $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ není dělitelné žádným přirozeným číslem}\} = \emptyset$. Prázdnou množinu můžeme jednodušeji zapsat i jako $\{x \in A \mid x \neq x\}$.

Jiný příklad je množina

$$P = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ je dělitelné právě dvěma z čísel } 1, 2, \dots, m\},$$

což je množina všech prvočísel.

Dále si připomeneme základní množinové vztahy a operace.

- $B \subset A$, inkluze. Čteme: B je podmnožina množiny A . Ověření inkluze spočívá v tom, že dokážeme o každém prvku z B , že náleží i do A . Vždy platí $A \subset A$ a $\emptyset \subset A$. Pokud chceme zdůraznit, že $B \subset A$, ale $B \neq A$, píšeme $B \subsetneq A$ a řekneme, že B je vlastní podmnožina množiny A .

Rovnost dvou množin $A = B$ je definována jako současné splnění dvou podmínek: $A \subset B$ a $B \subset A$, tj. prvek patří do množiny A právě, když patří do množiny B . Např. Množina $\{a\}$ je jednoprvková množina obsahující prvek a . Ale $\{a, a\}$ je ta samá množina: Stačí ověřit rovnost $\{a, a\} = \{a\}$ podle definice.

- $A_1 \cup A_2 = \{x \mid x \in A_1 \text{ nebo } x \in A_2\}$, sjednocení množin A_1 a A_2 . Pro sjednocení většího počtu množin užíváme značení analogické sumaci

$$\bigcup_{k=1}^m A_k = A_1 \cup \dots \cup A_m, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots$$

Např. $\bigcup_{k=1}^{\infty} (-k, k) = \mathbb{R}$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} (2^{-k}, k) = (0, \infty)$.

- $A_1 \cap A_2 = \{x \mid x \in A_1 \text{ a } x \in A_2\}$, průnik množin A_1 a A_2 . Pro průnik většího počtu množin užíváme podobně

$$\bigcap_{k=1}^m A_k = A_1 \cap \dots \cap A_m, \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \dots$$

$$\text{Např. } \bigcap_{k=1}^{\infty} (0, \frac{1}{k}) = \emptyset, \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} (0, k^{-2}) = \{0\}.$$

Množiny A a B se nazývají disjunktní, jestliže $A \cap B = \emptyset$.

- $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$, množinový rozdíl.
- $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, kartézský součin množin A a B . Pro součin více množin píšeme

$$\prod_{k=1}^m A_k = A_1 \times \cdots \times A_m, \quad \prod_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \times A_2 \times \dots.$$

Jsou-li všechny množiny stejné, $A_1 = A_2 = \dots = A$, pak součin budeme zkracovat symbolickým zápisem A^m v případě součinu m množin a $A^{\mathbb{N}}$ v případě nekonečného součinu. Jako příklady si uvedeme

$$\langle 0, 1 \rangle^2 = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle = \{(x, y) \mid x, y \in \langle 0, 1 \rangle\},$$

což je jednotkový čtverec v rovině. Podobně $\langle 0, 1 \rangle^3$ je jednotková krychle a $\langle 0, 1 \rangle^4$ je zápis čtyřrozměrné jednotkové krychle. Množina \mathbb{R}^n je množina všech n -tic reálných čísel, tj. n -rozměrných vektorů, a nazývá se n -rozměrný euklidovský prostor. Dále,

$$\prod_{k=1}^{\infty} A_k = \{(a_1, a_2, \dots) \mid a_k \in A_k, k \geq 1\}$$

je množina všech posloupností takových, že na k -té místě stojí prvek z množiny A_k . Speciálně $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ je množina všech posloupností vytvořených z nul a jedniček. Podobně $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ je množina všech posloupností přirozených čísel.

- Množinu všech podmnožin dané množiny A nazýváme potenční množinou množiny A a značíme

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subset A\}.$$

Je-li množina A n -prvková, pak $\mathcal{P}(A)$ má 2^n prvků.

Mějme $A = \{a\}$ a $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Co je $\mathcal{P}(A)$ a $\mathcal{P}(B)$?

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}, \quad \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.$$

Příklad 2. Uvažujme následující tři množiny:

$$A = \{\{0\}, \{\{0\}\}\}, \quad B = \{\{\{0\}\}, \{0\}\} \quad \text{a} \quad C = \{\{\{0\}\}, \{0\}, \{\{0\}\}\}.$$

Jsou všechny tři množiny navzájem různé? Který z následujících vztahů platí: $0 \in A$, $0 \subset A$, $\{0\} \in A$ nebo $\{0\} \subset A$?

Množiny A, B, C jsou totožné, neboť obsahují stejné prvky. Ze čtyř uvedených možností platí pouze $\{0\} \in A$.

Obrátíme pozornost k základním vztahům mezi množinovými operacemi.

Věta 3. (de Morganova pravidla) Mějme množiny B, A_1, A_2, \dots . Pak platí

- (i) $B \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (B \setminus A_k)$,
- (ii) $B \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} (B \setminus A_k)$.

Mohutnost množin.

Chceme nalézt způsob, jak porovnávat velikosti obecných množin. V případě konečných množin porovnáme počet jejich prvků. Pojem počet prvků je však zcela nevhodný pro srovnávání nekonečných množin.

Máme-li např. množiny $A = \mathbb{N}$ a $B = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, kterou z nich prohlásíme za větší? Jeden argument by mohl být, že B obsahuje pouze sudá čísla, a proto je menší než A , neboť je to jen „polovina“ množiny A . Na druhou stranu, prvky množiny B jsou popsány tvarom $2n$, kde parametr n probíhá celou množinou A , a tak musí mít A i B stejný počet prvků. Na stejný problém bychom narazili např. i při porovnávání množin racionálních a iracionálních čísel: Základní vlastností obou množin je, že mezi každými dvěma racionálními čísly leží číslo iracionální a mezi každými dvěma iracionálními čísly leží racionální. Ze symetrie těchto vlastností bychom mohli usuzovat, že obě množiny jsou stejně velké. Jak uvidíme později, byl to chybný závěr.

K porovnávání velikostí obecných množin použijeme speciální typ zobrazení nazvaný *bijekce*.

Definice 4. Mějme zobrazení $f: A \rightarrow B$. Řekneme, že

- (i) f je prosté (injektivní), jestliže $f(a_1) \neq f(a_2)$, kdykoli $a_1, a_2 \in A$ a $a_1 \neq a_2$;
- (ii) f je na množinu B (surjektivní), je-li obor hodnot roven množině B , $f(A) = B$;
- (iii) f je bijekce, je-li prosté a na množinu B .

Protože bijekce je speciellě prosté zobrazení, existuje inverzní a platí, že $f: A \rightarrow B$ je bijekce právě, když inverzní $f^{-1}: B \rightarrow A$ je rovněž bijekce.

Můžeme si představovat, že bijekce zprostředkovává kopírování jedné množiny na druhou. Existuje-li mezi množinami A a B bijekce, je jedna množina kopí druhé. Jsou-li navíc obě množiny konečné, mají stejný počet prvků. Výhodou takového porovnání je, že nemusíme vědět kolik mají příslušné množiny prvků, abychom je prohlásili za stejně velké. Proto se tento způsob hodí i pro porovnávání velikostí obecných množin, nejen konečných.

Definice 5. Množiny A a B mají stejnou mohutnost, existuje-li bijekce $f: A \rightarrow B$ množiny A na množinu B . Zápis je $|A| = |B|$.

Existuje-li bijekce množiny A na nějakou podmnožinu $C \subset B$, $f: A \rightarrow C$, pak budeme tento fakt značit $|A| \leq |B|$.

Místo názvu mohutnost se také často používá slovo *kardinalita*. V případě konečné množiny označuje symbol $|A|$ skutečně počet prvků množiny A . Pro nekonečné množiny to je zatím jen značka, kterou můžeme číst „mohutnost množiny“. Později se o ní dovíme více.

Nastane-li případ, že $|A| \leq |B|$ a přitom neplatí $|A| = |B|$, budeme psát $|A| < |B|$. Slovy to znamená, že sice existuje bijekce množiny A na nějakou podmnožinu množiny B , ale neexistuje žádná bijekce množiny A na celou B .

Příklad 6. Množiny \mathbb{N} a $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ mají stejnou mohutnost. Důvodem je existence bijekce $f: \mathbb{N} \rightarrow (\mathbb{N} \setminus \{1\})$ daná $f(n) = n + 1$.

Podobný argument říká, že \mathbb{N} a $\mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, k\}$ mají stejnou mohutnost. Zde je bijekce $f(n) = n + k$. Odebereme-li od \mathbb{N} jakoukoli konečnou množinu, mohutnost se nezmění.

Bijekce $f(n) = 2n$ množiny \mathbb{N} na množinu sudých přirozených čísel ukazuje, že mají stejnou množinu, $|\mathbb{N}| = |\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}|$.

Všechny neprázdné otevřené intervaly $(a, b) \subset \mathbb{R}$ mají navzájem stejnou mohutnost: K tomu stačí ukázat, že $|(a, b)| = |(0, 1)|$ pro každý interval (a, b) . Za bijekci nám poslouží např. lineární funkce

$$f(x) = (b - a)x + a.$$

Je to rostoucí funkce (tedy prostá) a zobrazí interval $(0, 1)$ na interval (a, b) . Platí dokonce i více. Funkce $\operatorname{tg}(x)$ je bijekce intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ na \mathbb{R} , proto $|(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)| = |\mathbb{R}|$. Spolu s předchozím máme

$$|(0, 1)| = |(a, b)| = |\mathbb{R}|.$$

Následující důležité tvrzení, tzv. Schröder-Bernsteinova věta, nám umožňuje ukázat, že dvě množiny mají stejnou mohutnost, aniž bychom museli explicitně sestrojit příslušnou bijekci.

Věta 7. *Mějme množiny A a B takové, že existuje prosté zobrazení množiny A do množiny B a také prosté zobrazení množiny B do množiny A . Pak A a B mají stejnou mohutnost.*

Definice 9. *Množina A je nekonečná, jestliže existuje bijekce na její vlastní podmnožinu.*

Je na místo ověřit, že pojem nekonečná množina zavedený v definici opravdu koresponduje s tím, co za nekonečné množiny obvykle považujeme. Množina \mathbb{N} je podle výše uvedené definice nekonečná, neboť např. zobrazení $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dané $f(n) = n + 1$ je bijekce celé množiny \mathbb{N} na vlastní podmnožinu $\{2, 3, \dots\}$. Rovněž bijekce $f(n) = 2n$ přirozených čísel na množinu sudých čísel opět ukazuje, že množina \mathbb{N} je nekonečná. Stejně tak každý neprázdný interval $(a, b) \subset \mathbb{R}$ splňuje požadavky kladené na nekonečnou množinu: Pro jakýkoli jeho neprázdný podinterval $(c, d) \subsetneq (a, b)$ platí, že $|(c, d)| = |(a, b)|$, tj. existuje bijekce (a, b) na (c, d) .

Spočetné množiny.

Množina \mathbb{N} přirozeých čísel má v teorii množin privilegované postavení. Proto její více či méně skryté kopie si zaslouží vlastní pojmenování.

Definice 10. Množina A se nazývá spočetná, má-li stejnou mohutnost jako množina přirozených čísel, $|A| = |\mathbb{N}|$.

Výše vedené příklady ukazují, že $\{2, 3, \dots\}$ i množina sudých čísel jsou spočetné. Následující věta obsahuje prostředek výhodný pro dokazování spočetnosti.

Věta 11. Množina A je spočetná právě, když se všechny její prvky dají seřadit do prosté posloupnosti. Speciálně, nekonečná podmnožina spočetné množiny je rovněž spočetná.

Věta 12. Je-li $f: A \rightarrow B$ zobrazení spočetné množiny A na množinu B , pak je B konečná nebo spočetná.

Věta 13. Každá nekonečná množina obsahuje spočetnou podmnožinu.

Příklad 14. Množina \mathbb{Z} celých čísel. Tuto množinu můžeme seřadit do prosté posloupnosti např. následujícím způsobem:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$$

Podle Věty 11 je množina \mathbb{Z} spočetná. Kdybychom chtěli najít vzorec pro odpovídající bijekci množiny \mathbb{N} na množinu \mathbb{Z} , tak má tvar

$$f(n) = (-1)^n \left[\frac{n}{2} \right],$$

kde $[x]$ značí celou část (reálného) čísla x . Můžeme si pro zajímavost uvést i vztah pro inverzní zobrazení

$$f^{-1}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f^{-1}(m) = \begin{cases} 2m, & m > 0; \\ -2m + 1, & m \leq 0. \end{cases}$$

Věta 16. Mějme spočetné množiny A_1, A_2, \dots . Pak

- (i) $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ je opět spočetná množina.
- (ii) Kartézský součin $\prod_{k=1}^n A_k$ je spočetná množina pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Přímá aplikace Věty 16(i) o spočetném sjednocení spočetných množin ukazuje, že množina \mathbb{Q} racionálních čísel je spočetná. Pišme

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

kde A_n je množina všech zlomků se jmenovatelem n , tj.

$$A_n = \left\{ \dots, -\frac{2}{n}, -\frac{1}{n}, \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots \right\}.$$

Protože množiny A_n jsou spočetné (mají stejnou mohutnost jako \mathbb{Z}), je množina \mathbb{Q} spočetná.

Nespočetné množiny.

Zatím to vypadá, že každá nekonečná množina, kterou jsme až dosud zkoumali, je spočetná. Jsou snad všechny nekonečné množiny spočetné? Pokud by tomu tak bylo, tento text by končil předcházející sekcí. Velkým objevem Georga Cantora je, že nespočetné množiny opravdu existují. Tento objev byl mohutným impulsem pro rozvoj teorie množin, pro její hloubku a rozmanitost.

Věta 19. *Množina reálných čísel v intervalu $(0, 1)$ není spočetná.*

Příklad 20. Ukážeme, že žádný spočetný systém přímek nepokryje celou rovinu \mathbb{R}^2 .

Mějme spočetný systém \mathcal{L} přímek v rovině. Podle Věty 11 si přímky v \mathcal{L} můžeme vypsat do prosté posloupnosti

$$\mathcal{L} = \{l_1, l_2, \dots\}.$$

Označíme si $\alpha_i \in (0, \pi)$ úhel, který svírá přímka l_i s vodorovným směrem. Protože množina $(0, \pi)$ je nespočetná, existuje úhel $\alpha \in (0, \pi)$ různý od všech úhlů α_i , $i \in \mathbb{N}$. Uvažujme nyní přímku l svírající s vodorovným směrem úhel α . Žádná z přímek v \mathcal{L} není rovnoběžná s l , proto protínají přímku l v právě jednom bodě. Bodů na přímce l je nespočetně, ale přímek v \mathcal{L} jen spočetně mnoho. Nemohou proto pokrýt všechny body na přímce l . Tento argument ukazuje nejen, že žádný spočetný systém přímek nepokryje \mathbb{R}^2 , ale navíc že množina nepokrytých bodů je nespočetná.

Věta 21. *Množina $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ všech podmnožin přirozených čísel není spočetná.*

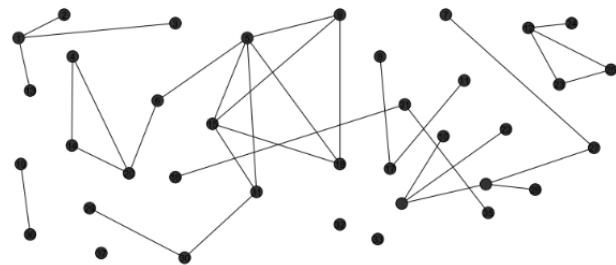
Věta 22. $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| = |(0, 1)|$.

Věta 23. *Pro každou množinu A platí, že $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.*

Základy teorie grafů

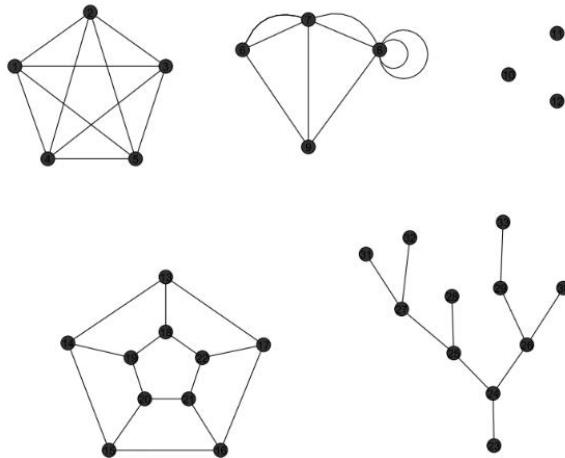
Příklad 2. Na party je lichý počet lidí. Pak tam musí být někdo, kdo byl představen sudému počtu přítomných účastníků.

Než si dokážeme platnost tvrzení v příkladu, znázorníme si graficky situaci lidí na party s ohledem na jejich vzájemné představení. Na obrázku body označují účastníky a spojnice mezi nimi vyznačuje fakt, že si byli navzájem představeni. Nespojené body znamenají, že tito účastníci si představeni nebyli.



Definice. Graf $G = (V, E)$ se skládá z neprázdné množiny V , jejíž prvky nazýváme vrcholy a konečného souboru E dvojic $\{u, v\}$, $u, v \in V$ (nemusí být nutně $u \neq v$), které se nazývají hrany grafu G .

Předchozí obrázek je tedy graf, jehož vrcholy jsou účastníci party a dva vrcholy jsou spojeny hranou právě, když odpovídající účastníci si byli představeni. Na dalším obrázku jsou ukázky jiných možných grafů.



Jsou-li $u, v \in V$ dva vrcholy, pak hrana, která je spojuje, je $e = \{u, v\}$. Pro jednoduchost budeme kroucené závorky vynechávat a hranu mezi vrcholy u, v značit $e = uv$.

Mezi dvěma vrcholy může vést více hran nebo hrana může vycházet a končit v témže vrcholu (tzv. smyčka), jak je to vidět u druhého grafu na předchozím obrázku. Graf, který neobsahuje smyčky a kde dva různé vrcholy mohou být spojeny nejvíce jednou hranou, se nazývá *jednoduchý*.

Definice. Mějme graf $G = (V, E)$. Stupeň vrcholu $v \in V$ je počet hran obsahujících vrchol v . Značí se $d(v)$.

Smyčka ve vrcholu v přispívá ke stupni $d(v)$ hodnotou 2. Má-li jednoduchý graf n vrcholů, pak maximální stupeň každého vrcholu je $n - 1$. Graf, u něhož je této maximální hodnoty stupně dosaženo ve všech vrcholech se nazývá *úplný* a budeme ho značit K_n . Na obrázku níže jsou grafy K_2 , K_3 a K_6 . Je-li G jednoduchý graf s n vrcholy, $|V| = n$, pak pro počet hran platí odhad $|E| \leq \binom{n}{2}$ a rovnost nastává právě, když $G = K_n$. Je to proto, že hrana je určena dvojicí různých vrcholů a počet hran je tak omezen počtem dvouprvkových podmnožin n -prvkové množiny, což je $\binom{n}{2}$.

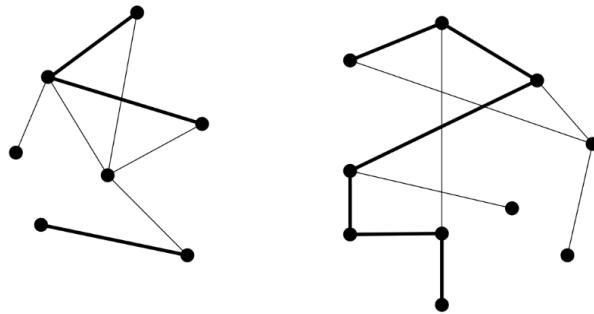
Doplňek (komplement) G^c grafu G je graf se stejnými vrcholy, kde dva vrcholy jsou spojeny hranou v grafu G^c právě, když nejsou spojeny v původním grafu G . Doplňek K_n^c úplného grafu je graf tvořený pouze vrcholy. Někdy se takový graf nazývá *diskrétní*. Na předchozím obrázku je K_3^c třetí graf v horní řadě.

Věta 3. Mějme graf $G = (V, E)$. Součet stupňů všech vrcholů grafu je roven dvojnásobku počtu hran, tj.

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Definice. Graf $G' = (V', E')$ nazýváme podgraf grafu $G = (V, E)$, jestliže $V' \subset V$ a $E' \subset E$. Zapisujeme $G' \subset G$.

Příklady podgrafů jsou na následujícím obrázku.



Druhý podgraf je velmi speciální neboť tvoří jakousi cestu příslušným grafem od jednoho vrcholu ke druhému. Dva druhy takových podgrafů si označíme jménem.

Definice. Cesta P v grafu $G = (V, E)$ je posloupnost střídajících se vrcholů a hran,

$$P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k),$$

kde $e_i = v_{i-1}v_i$ jsou hrany a $\{v_0, v_1, \dots, v_k\} \subset V$ jsou navzájem různé vrcholy. Přidáme-li k P navíc hranu v_kv_0 , vznikne uzavřená cesta nazývaná kružnice nebo také cyklus.

Tah W v grafu G je posloupnost střídajících se vrcholů a hran,

$$W = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k),$$

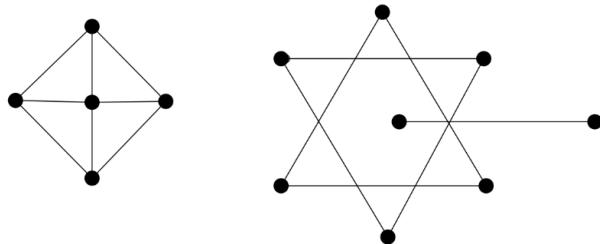
kde $e_i = v_{i-1}v_i$ jsou navzájem různé hrany.

Protože cesta v grafu prochází navzájem různými vrcholy, nemůže použít žádnou hranu dvakrát. Každá cesta je tedy i tah.

Pomocí pojmu cesta v grafu můžeme zavést jinou důležitou charakteristiku, a to je souvislost grafu.

Definice. Graf G je souvislý, jestliže pro každé dva vrcholy existuje cesta v G , která je spojuje. Každý maximální souvislý podgraf grafu G se nazývá komponenta souvislosti.

Na obrázku je příklad souvislého a nesouvislého grafu. Nesouvislý graf má tři komponenty souvislosti.



Aby graf byl souvislý, musí mít dostatečný počet hran. Položme si otázku, jaký je vztah mezi souvislostí grafu a počtem jeho hran. Jsou dvě možné varianty. Je-li graf souvislý, kolik musí mít nutně hran? A naopak, jaký počet hran grafu si vynutí jeho souvislost? Odpovědi jsou v následující Větě 5.

Věta 5. Mějme graf $G = (V, E)$ s n vrcholy, $|V| = n$.

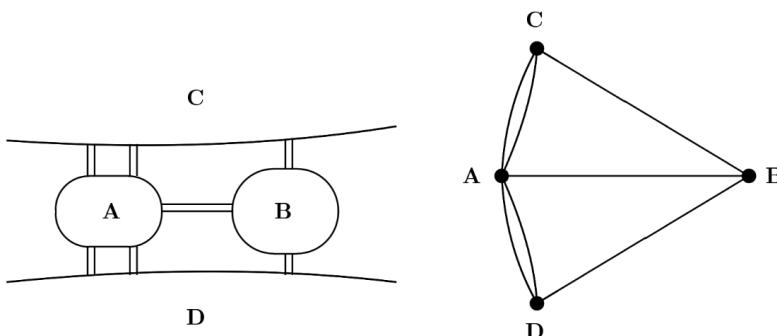
- (i) Je-li G souvislý, pak $|E| \geq n - 1$.
- (ii) Je-li G jednoduchý a má-li počet hran $|E| > \binom{n-1}{2}$, je souvislý.

Eulerovské grafy.

Definice. Graf nazveme eulerovský, jestliže v něm existuje tah obsahující všechny hrany. Takový tah někdy označujeme jako eulerovský tah.

Eulerovský graf si můžeme intuitivně představit jako graf, který lze nakreslit jedním tahem, aniž bychom nějakou hranu museli projít vícekrát.

Eulerovský graf je nazván po Leonhardu Eulerovi, který v roce 1736 charakterizoval právě takové grafy. K této otázce ho přivedla hádanka o sedmi mostech v městě Königsberg. V řece protékající městem jsou dva ostrovy a mezi nimi a břehy je sedm mostů. Měšťané Königsbergu se snažili zjistit, zda je možné si naplánovat procházku po všech mostech tak, aby prošli všechny mosty právě jednou. Situace je na obrázku níže, vlevo „reálná“ situace a vpravo schématické znázornění, kde hrany reprezentují mosty mezi břehy a ostrovů.



Řešení této hádanky je obsaženo v následující větě.

Věta 6. Souvislý graf je eulerovský právě, když všechny vrcholy mají sudý stupeň s jedinou možnou výjimkou dvou vrcholů.

Odpověď na hádanku o procházce po sedmi mostech v Königsbergu je negativní, neboť příslušný graf má vrcholy pouze lichého stupně. Chceme-li se projít po všech mostech, musíme přes jeden jít dvakrát. (Můžeme si ho dokonce předem určit.)

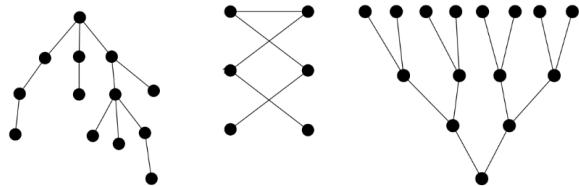
Stromy

Stromy tvoří důležitou třídu grafů mající široké použití nejen v computer science. Běžný příklad stromu je tzv. genealogický strom, který zachycuje posloupnost a rozvětvování členů rodiny od zakladatele k potomkům. Rovněž se tímto grafem mohou modelovat výherní či rozhodovací strategie při studiu jistých typů her, procesů apod.

Název strom je odvozen od vzhledu, který tento graf obvykle má. Definice stromu je jednoduchá.

Definice. Strom je souvislý graf bez kružnic.

Někdy se grafům bez kružnic říká acyklické, ale terminologie není zcela ustálená. Příklady stromů jsou na následujícím obrázku.



Můžeme si povšimnout, že graf G , který neobsahuje kružnice a není souvislý, má za komponenty souvislosti stromy. Plyne to z toho, že komponenta jako podgraf grafu bez kružnic nemůže obsahovat kružnice a přitom je souvislá. Takový graf G se pak nazývá les.

Strom lze ekvivalentě popsat i jinými vlastnostmi, které jsou o něco názornější.

Věta 7. *Mějme graf $G = (V, E)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (i) *G je strom.*
- (ii) *G je minimální souvislý, tj. G je souvislý a vynecháním jakékoli hrany vznikne ne-souvislý graf.*
- (iii) *Mezi každými dvěma vrcholy existuje jediná cesta, která je spojuje.*
- (iv) *G je maximální graf bez kružnic, tj. G neobsahuje kružnice a přidáním jakékoli nové hrany vznikne kružnice.*

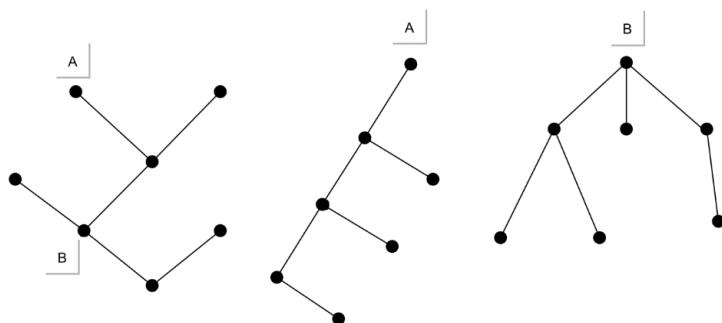
Věta 8. *Ve stromu s alespoň dvěma vrcholy existují alespoň dva vrcholy se stupněm jedna.*

Věta 9. *Každý strom s n vrcholy má $n - 1$ hran.*

V mnoha aplikacích se jeden z vrcholů stromu vybere jako vyjímečný a nazve se kořen. Tak vznikne kořenový strom.

Definice. *Kořenový strom je strom, u kterého je jeden vrchol označen jako kořen.*

Tím, že označíme jeden vrchol za kořen, zavádíme automaticky do stromu následující uspořádání mezi vrcholy. Protože podle Věty 7(iv) vede z kořene do jakéhokoli vrcholu právě jediná cesta, máme mezi vrcholy na této cestě zavedeny pojmy *následník* vrcholu a *předchůdce* vrcholu. Obvykle pak kreslíme kořenové stromy tak, že kořen umístíme nahoru a hrany směřují od něj dolů. Vrchol, který nemá následníka se nazývá list. Je třeba podotknout, že různými volbami kořene v témže stromě vznikají různé kořenové stromy, viz obrázek.



Kořenové stromy slouží jako modely v mnoha situacích. Nejběžnější jsou např. struktura organizace, kde vrchol označuje pozici v dané organizaci a hrany pak nadřízenost či podřízenost těchto pozic. Jiný příklad je usporádání souborů v paměti počítače. Kořen odpovídá hlavnímu adresáři, vrcholy podadresářům a listy jednotlivým souborům.

Definice. Kořenový strom se nazývá *n-ární*, jestliže každý vrchol má nejméně n následníků. Má-li každý vrchol, který není list, přesně n následníků, nazýváme takový strom plně *n-ární*.

Mezi počtem vrcholů a počtem listů plně *n-árního* stromu je jednoduchý vztah.

Věta 10. Plně *n-ární* strom s l listy má $v = (nl - 1)/(n - 1)$ vrcholů.

Definice. Kostra grafu G je každý strom $T \subset G$ obsahující všechny vrcholy grafu G .

Snadno vidíme, že pokud G má kostru, je nutně souvislý. Obráceně, máme-li souvislý graf G pak nejmenší (tj. s minimálním počtem hran) souvislý podgraf T obsahující všechny vrcholy je hledaná kostra. Shrnutu: graf G má kostru právě, když je souvislý.

Kostra představuje nejekonomičtější propojení všech vrcholů grafu. Takových kostér je v grafu více a jsou v zásadě rovnocenné. Situace se změní, pokud každé hraně $e \in E$ grafu připíšeme jisté ohodnocení, tj. nezáporné číslo $w(e)$, a budeme chtít nalézt kostru pro níž je součet ohodnocení jejich hran minimální. Praktický význam takové situace je zřejmý: v předešlém příkladu může hodnota $w(e)$ znamenat náklady na prohrnutí silnice e . Obecně mohou vrcholy grafu představovat komunikační uzly a ohodnocení hran náklady vynaložené k vybudování jejich propojení. Matematický popis je v následující definici.

Definice. Mějme graf $G = (V, E)$. Zobrazení $w: E \rightarrow (0, \infty)$ se nazývá ohodnocení grafu G a číslo

$$w(G) = \sum_{e \in E} w(e)$$

váhou grafu G . Kostru grafu G s minimální váhou budeme nazývat minimální kostrou.

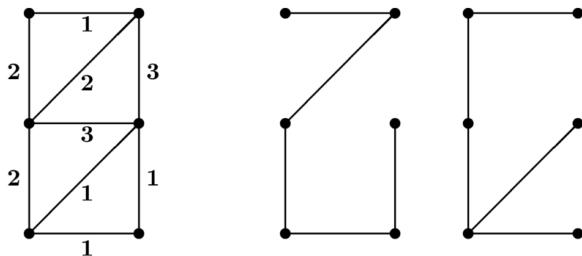
Existence minimální kostry je jasná, neboť v grafu G je pouze konečně mnoho kostér a jedna (nebo i více) z nich musí mít minimální váhu. Co však není jasné je důležitá optimalizační úloha, jak v daném souvislému grafu minimální kostru nalézt.

Věta 12. (Kruskalův algoritmus) Mějme souvislý graf $G = (V, E)$ s ohodnocením w . Následující algoritmus vytváří minimální kostru T grafu G .

- (1) Zvol jakoukoli hranu e_0 s minimálním ohodnocením, která netvoří smyčku.
- (2) Jsou-li vybrány hrany e_0, e_1, \dots, e_{k-1} , vyber mezi zbývajícími $E \setminus \{e_0, e_1, \dots, e_{k-1}\}$ hranu e_k s minimálním ohodnocením takovou, aby jejím přidáním k vybraným hranám nevznikla kružnice.
- (3) Aplikuj bod (2) dokud to lze.

Zatímco váha minimální kostry je jednoznačně určena, samotná minimální kostra níkoli. Vyplývá to mimo jiné i z volnosti, kterou nám Kruskalův algoritmus poskytuje při výběru hrany.

Příklad 13. Nalezněte minimální kostru následujícího ohodnoceného grafu.



Napravo jsou dvě minimální kostry ohodnoceného grafu vlevo. Obě kostry jsou výsledkem Kruskalova algoritmu a obě mají váhu $w(T) = 7$.

Minimální kostru dávají i další algoritmy. Např. Primův algoritmus, který se liší od Kruskalova tím, že další hrana s minimálním ohodnocením se navíc bere jen z hran vycházejících z vrcholů už částečně vytvořeného stromu. Za výhodu Primova algoritmu můžeme považovat to, že při jeho přerušení nám dá minimální kostru alespoň té části, kterou jsme stihli algoritmem projít. Kruskalův algoritmus při přerušení nemusí dát jako výstup strom.

Je možné rovněž Kruskalův postup v jistém smyslu obrátit: Z grafu postupně vynecháváme hrany s nejvyšším ohodnocením, pokud jejich vypuštěním zůstává graf souvislý. Na konci dostaneme minimální kostru.

Párování

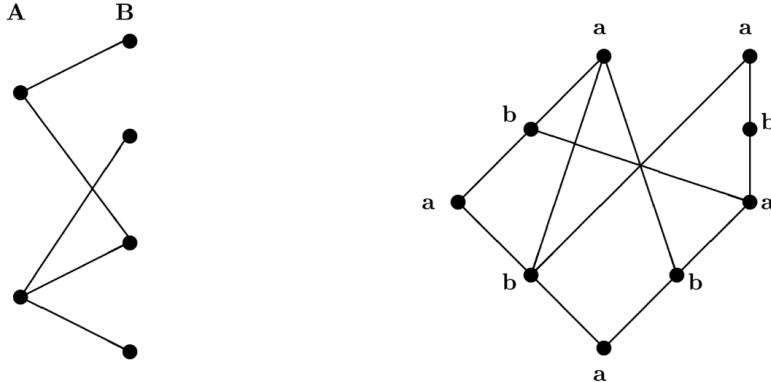
Příklad 14. Na promočním večírku je 150 studentů. Víme, že každá dívka se zná s 20 hochy a každý hoch se zná s 20 dívkami. Je možné ze všech účastníků sestavit taneční páry tak, aby se tanečníci znali?

Povšimněme si, že ani nevíme, zda je počet dívek stejný jako počet hochů. K vyřešení tohoto problému bude vhodné si graf, který danou situaci znázorňuje, nějak pojmenovat.

Definice. Graf $G = (V, E)$ se nazývá bipartitní, jestliže množina vrcholů se dá rozložit na dvě části, $V = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, a každá hrana spojuje vrchol z A s vrcholem z B , tj. každá hrana je tvaru $e = ab$, kde $a \in A$ a $b \in B$.

V definici nepožadujeme, aby graf byl souvislý. Např. graf , který nemá žádné hrany, je bipartitní a každý rozklad jeho množiny vrcholů vyhovuje požadavku definice.

Na obrázku jsou příklady souvislých bipartitních grafů.



Je-li graf bipartitní, znamená to např., že je možné všechny vrcholy obarvit dvěma barvami tak, že každá hrana spojuje vrcholy různých barev. Uvedeme si ještě jednu charakterizaci bipartitního grafu, která nemí tak přímočará.

Věta 15. *Graf je bipartitní právě, když neobsahuje kružnice liché délky.*

Jako důsledek máme, že strom je bipartitní graf, neboť neobsahuje kružnice (a tedy ani kružnice liché délky).

Vrátíme se k Příkladu 14. Situace je reprezentována bipartitním grafem s množinou vrcholů $V = A \cup B$, kde prvky A jsou dívky a prvky B jsou hoši. Hrana pak znázorňuje, že daná dívka a hoch se znají. Chceme mezi hranami vybrat ty, které by vyznačily hledané taneční páry.

Definice. *Párování v $G = (V, E)$ je taková podmnožina hran $F \subset E$, že žádné dvě hrany z F nemají společný vrchol.*

Je-li graf $G = (V, E)$ bipartitní, $V = A \cup B$, pak úplné párování z A do B je takové párování $F \subset E$, že z každého vrcholu množiny A vede nějaké hrana párování F .

Grafy na obrázku za definicí bipartitního grafu mají párování, avšak zatímco první z nich má úplné párování z A do B , u druhého takové úplné párování neexistuje. (Důvodem je, že vrcholů typu **a** je více než vrcholů typu **b**.) Pro jednodušší formulaci věty o existenci úplného párování bude hodné si zavést následující označení. Mějme podmnožinu $S \subset V$ množiny vrcholů. Symbol $N(S)$ označuje všechny vrcholy, které jsou hranou spojeny s nějakým vrcholem v množině S :

$$N(S) = \{v \in V \mid \text{existuje } u \in S, \text{že } uv \in E\}.$$

Volně řečeno, do $N(S)$ dáme všechny vrcholy, které jsou sousedy nějakého vrcholu z S .

Věta 16. *Mějme bipartitní graf $G = (V, E)$, kde $V = A \cup B$. Pak existuje úplné párování z A do B právě, když pro každou podmnožinu $S \subset A$ platí*

(*)

$$|S| \leq |N(S)|.$$

Z Věty II.6 vyplývá konečně poznatek, který nám pomůže při vyřešení situace v motivičním příkladu na začátku sekce.

Věta 17. *Mějme bipartitní graf $G = (V, E)$, kde $V = A \cup B$, takový, že všechny vrcholy mají stejný stupeň $d \geq 1$. Pak $|A| = |B|$ a existuje úplné párování z A do B .*

Řešení Příkladu II.4: Situace je znázorněna bipartitním grafem, kde množina A představuje dívky a množina B hochy. Hrany indikují vzájemnou známost. Stačí nyní aplikovat Větu II.7 s $d = 20$.