CB0589 ÁLGEBRA LINEAR

Álgebra de Matrizes e Invertibilidade

O que é uma Matriz?

Uma matriz é um arranjo retangular de números, símbolos ou expressões, organizados em linhas e colunas.

Representação:
Uma matriz A com m linhas e n colunas (ordem $m \times n$) é representada como:

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O elemento a_{ij} está na linha i e na coluna j.

Uma **matriz** também pode ser formalmente definida como uma **função** que associa cada par ordenado de índices a um número (ou elemento) em um conjunto, como os números reais.

Seja $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ e $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ os conjuntos de índices das linhas e colunas, respectivamente.

Chamamos matriz A de ordem $m \times n$ a função:

$$A : I \times J \to \mathbb{R}$$

tal que, para cada par (i, j) com $i \in I$ e $j \in J$, temos um elemento $a_{ij} = A(i, j)$.

Interpretação

- i indica a **linha** e j indica a **coluna**.
- O valor a_{ij} é o **elemento da matriz** na posição (i, j).
- Assim, a matriz nada mais é do que uma **tabela organizada** de valores, mas formalmente descrita como uma função de dois índices.

Por exemplo, para uma matriz 2×3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix},$$

temos:

- $I = \{1, 2\}$,
- $J = \{1, 2, 3\}$,
- e cada entrada a_{ij} é dada por $A(i, j)$.

Exemplos:

$$A : \{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} \to \mathbb{R}, \quad A(i, j) = i + 2j$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$I_n : \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}, \quad A(i, j) = \delta_{ij}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definição: Adição e Subtração de Matrizes

Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ duas matrizes de mesma ordem $m \times n$.

- A **soma** $A + B$ é a matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m \times n$ onde cada elemento é a soma dos elementos correspondentes:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

- A **diferença** $A - B$ é definida de forma análoga:

$$(A - B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Exemplo: Adição e Subtração

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Soma:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Subtração:

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-5 & 2-6 \\ 3-7 & 4-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

Definição: Multiplicação por Escalar

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem $m \times n$ e k um número real (escalar).

- O **produto por escalar** kA é a matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m \times n$ onde cada elemento é o produto do elemento correspondente de A pelo escalar k:

$$c_{ij} = k \cdot a_{ij}$$

Exemplo: Multiplicação por Escalar

Seja a matriz A e o escalar $k = 3$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Multiplicação (kA):

$$3A = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Matriz × Vetor (coluna única)

Se $A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, então

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} x_k\, a_k \;\in\; \mathbb{R}^m.$$

Ax **é combinação linear das colunas** de A com pesos dados pelas entradas de x

.

Exemplo:

Dimensões: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow Ax \in \mathbb{R}^m$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow Ax = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Vetor (linha única) × Matriz

Se $A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (linhas) e $y = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times m}$, então

$$yA = \sum_{i=1}^{m} y_i\, a_i \ \in\ \mathbb{R}^{1\times n},$$

isto é, yA **é combinação linear das linhas** de A com pesos dados pelas entradas de y.

Exemplo:

Dimensões: $y \in \mathbb{R}^{1\times m}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow yA \in \mathbb{R}^{1\times n}$.

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow\ yA = 1\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \end{bmatrix}.$$

Definição: Multiplicação de Matrizes

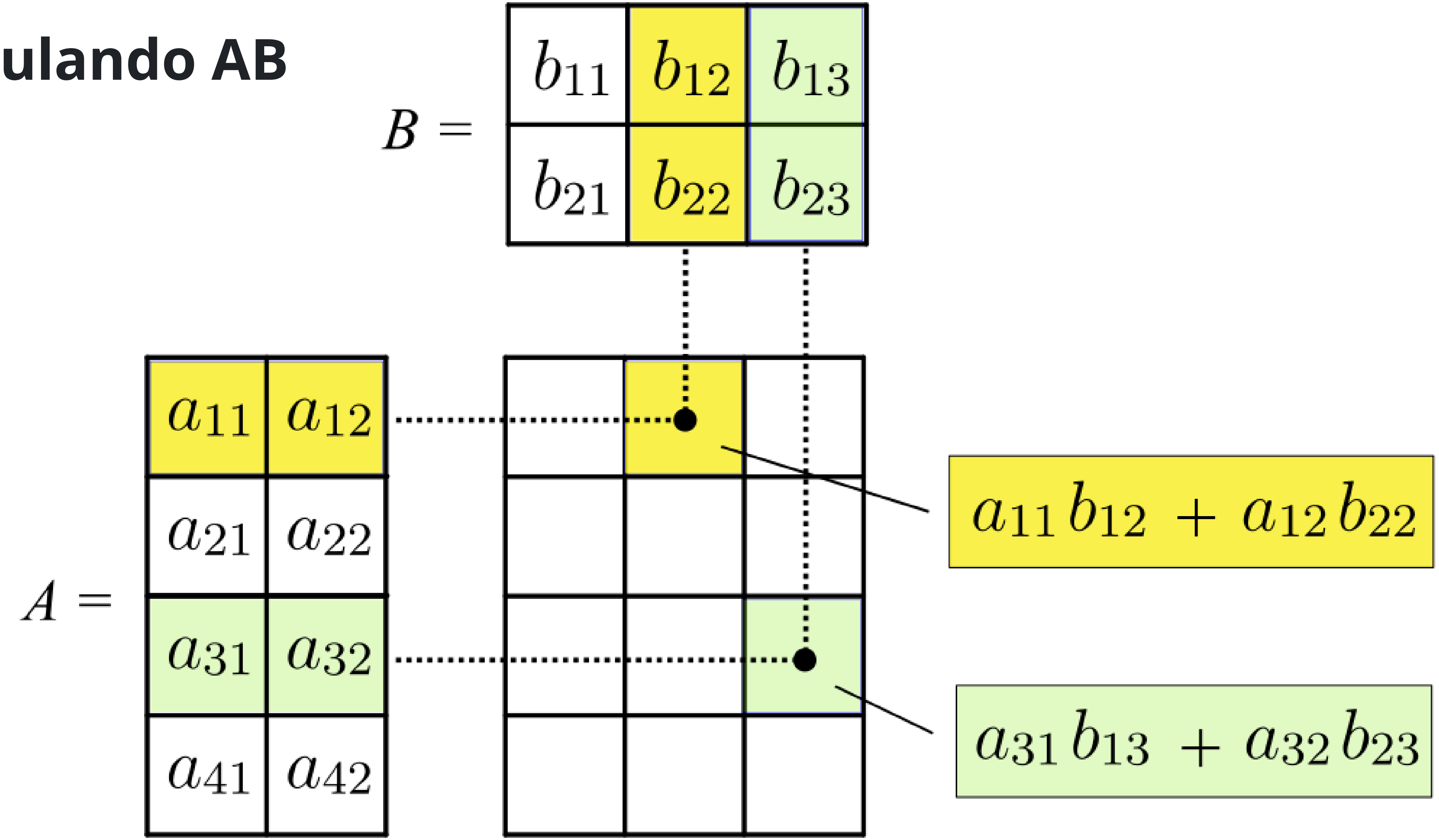
Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem $m \times n$ e $B = (b_{ij})$ de ordem $n \times p$.

- O **produto** AB é a matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m \times p$.
- O elemento c_{ij} é obtido pela soma dos produtos dos elementos da linha i de A pelos elementos da coluna j de B:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Atenção: O número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda.

Calculando AB



Exemplo: Multiplicação de Matrizes

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} (1\cdot 5 + 2\cdot 7) & (1\cdot 6 + 2\cdot 8) \\ (3\cdot 5 + 4\cdot 7) & (3\cdot 6 + 4\cdot 8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

A multiplicação de matrizes NÃO é comutativa!

$$BA = \begin{bmatrix} (5\cdot 1 + 6\cdot 3) & (5\cdot 2 + 6\cdot 4) \\ (7\cdot 1 + 8\cdot 3) & (7\cdot 2 + 8\cdot 4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix} \neq AB$$

Interpretação do Produto: Combinação de Colunas

Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ com b_j colunas,

$$AB = \begin{bmatrix} Ab_1 & \cdots & Ab_p \end{bmatrix}, \qquad Ab_j = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\, a_k,$$

onde a_k é a k-ésima **coluna** de A.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},\ a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2a_1 + 3a_2 & -a_1 + 4a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Definição: Matriz Transposta

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem $m \times n$.

- A **matriz transposta** de A, denotada por A^T, é a matriz de ordem $n \times m$ obtida pela troca de linhas por colunas:

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}$$

Exemplo: Matriz Transposta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \implies A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Propriedades:

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(kA)^T = kA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Definição: Matriz Identidade

Matriz Identidade (I_n):
É a matriz quadrada de ordem n que é o elemento neutro da multiplicação:

$$AI_n = I_nA = A$$

$$(I_n)_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Definição: Matriz Inversa (A^{-1})

Uma matriz quadrada A de ordem n é **invertível** (ou não singular) se existe matriz A^{-1} de ordem n tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Se tal matriz A^{-1} não existe, A é dita **não invertível** (ou singular). Uma condição necessária e suficiente para A ser invertível é que $\det(A) \neq 0$.

Teoremas e Propriedades da Matriz Inversa

Para matrizes A e B invertíveis de mesma ordem n, e um escalar $k \neq 0$:

1. **Unicidade da Inversa:** Se uma matriz tem inversa, ela é única.

2. **Inversa de um Produto:** O produto AB também é invertível, e sua inversa é:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

3. **Inversa da Transposta:** A transposta de uma matriz invertível também é invertível, e sua inversa é:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

4. **Inversa da Inversa:** A inversa da inversa de uma matriz é a própria matriz:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

5. **Inversa de um Múltiplo Escalar:** A matriz kA é invertível, e sua inversa é:

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$$

Exemplo: Identidade e Inversa

A identidade de ordem 2 é $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, sua inversa é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Verificação:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (6-5) & (-10+10) \\ (3-3) & (-5+6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Definição: Matrizes Especiais

Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ é dita:

Classe	Definição
Diagonal	se $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$
Triangular Superior	se $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$
Triangular Inferior	se $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$
Simétrica	se $A = A^T$, ou seja, $a_{ij} = a_{ji}$ para todos i, j
Ortogonal	se sua inversa é sua transposta, $A^{-1} = A^T$

Exemplos de Matrizes Especiais

Diagonal	Triangular Superior
$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$
Simétrica	**Ortogonal**
$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 7 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Exercícios

Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Calcule (se possível):

1. $A + B$
2. $3A - 2B$
3. AB e BA
4. AC
5. C^T
6. $(A+B)^T$ e $A^T + B^T$

Aplicações de Matrizes

Exemplo: Grafo ponderado

$G = (V, E, w)$

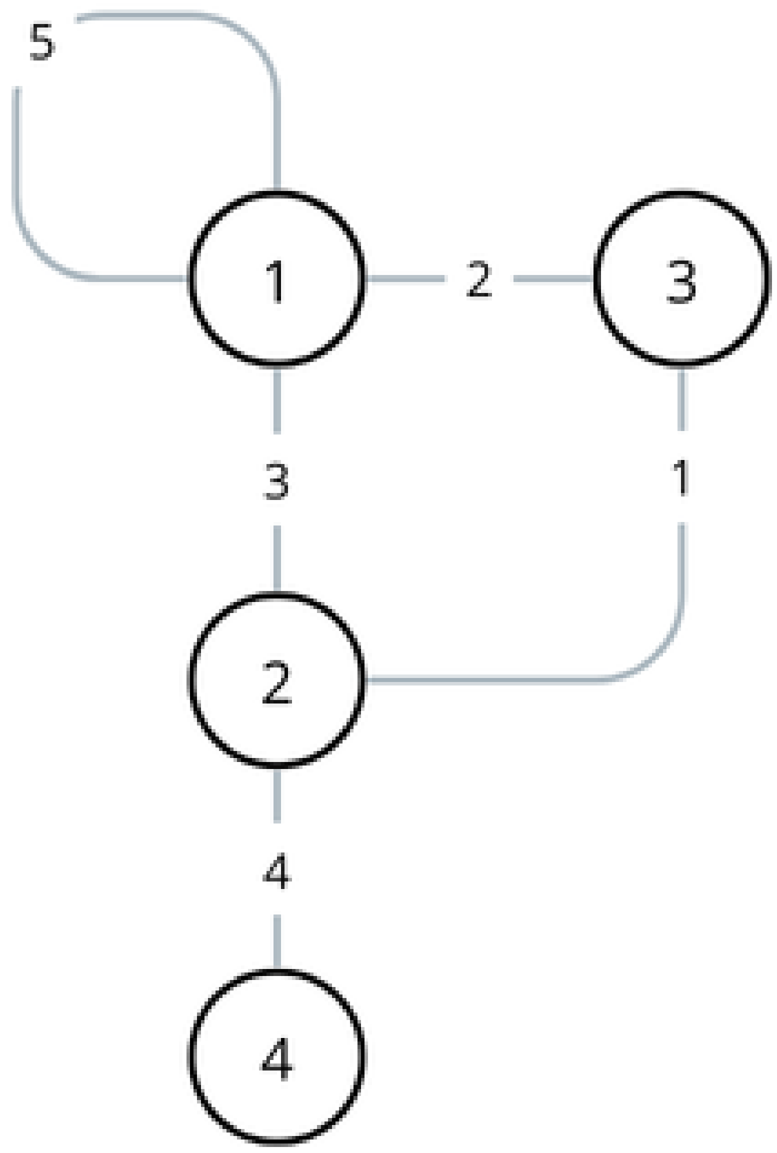
$V = \{1, 2, 3, 4\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

$w = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$

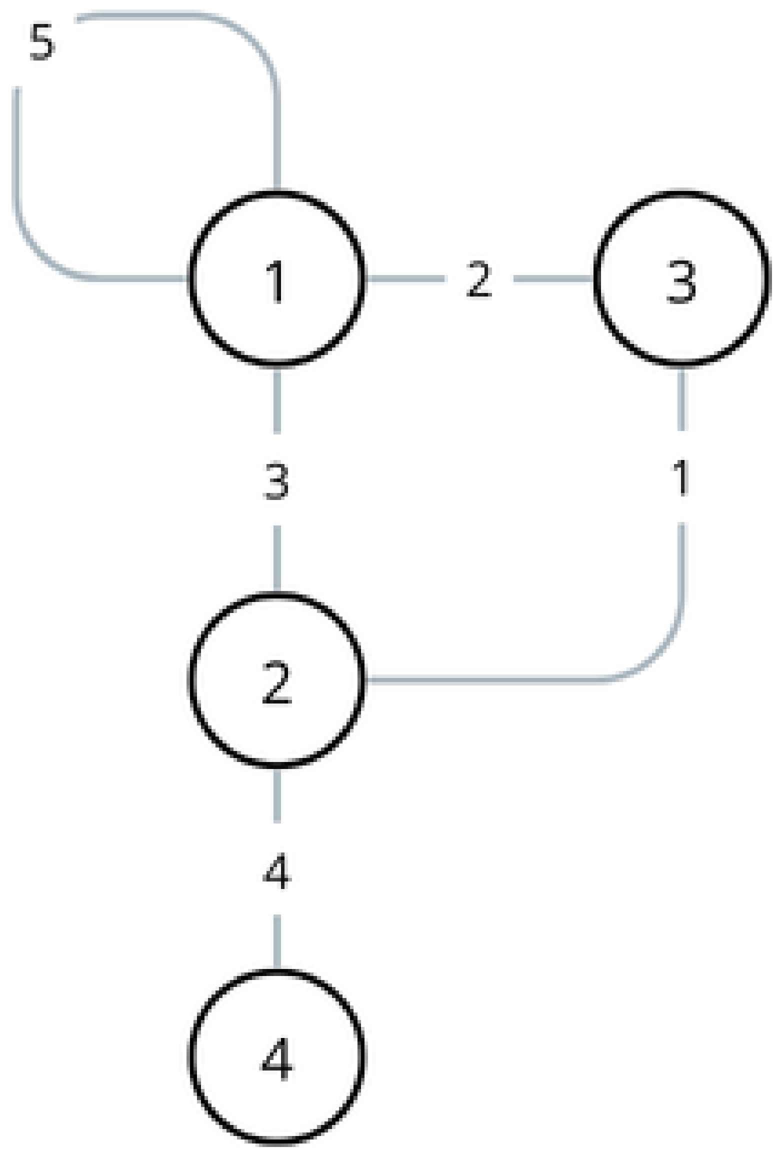
Arestas e pesos:

- $e_1 = \{1, 1\},\ w_1 = 5$
- $e_2 = \{1, 2\},\ w_2 = 3$
- $e_3 = \{1, 3\},\ w_3 = 2$
- $e_4 = \{2, 3\},\ w_4 = 1$
- $e_5 = \{2, 4\},\ w_5 = 4$



Representação Matricial

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Exemplo: Da EDO para um Sistema Linear

Equação Diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = -y + x, \quad y(0) = 1$$

- Intervalo: $[0, 1]$
- Dividido em 4 pontos: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.50$, $x_3 = 0.75$, $x_4 = 1.00$
- Passo $h = 0.25$

Queremos aproximar $y(x)$ nesses pontos.

Euler Implícito (Backward Euler)

Aproximação da derivada:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = -y_{i+1} + x_{i+1}$$

Reorganizando:

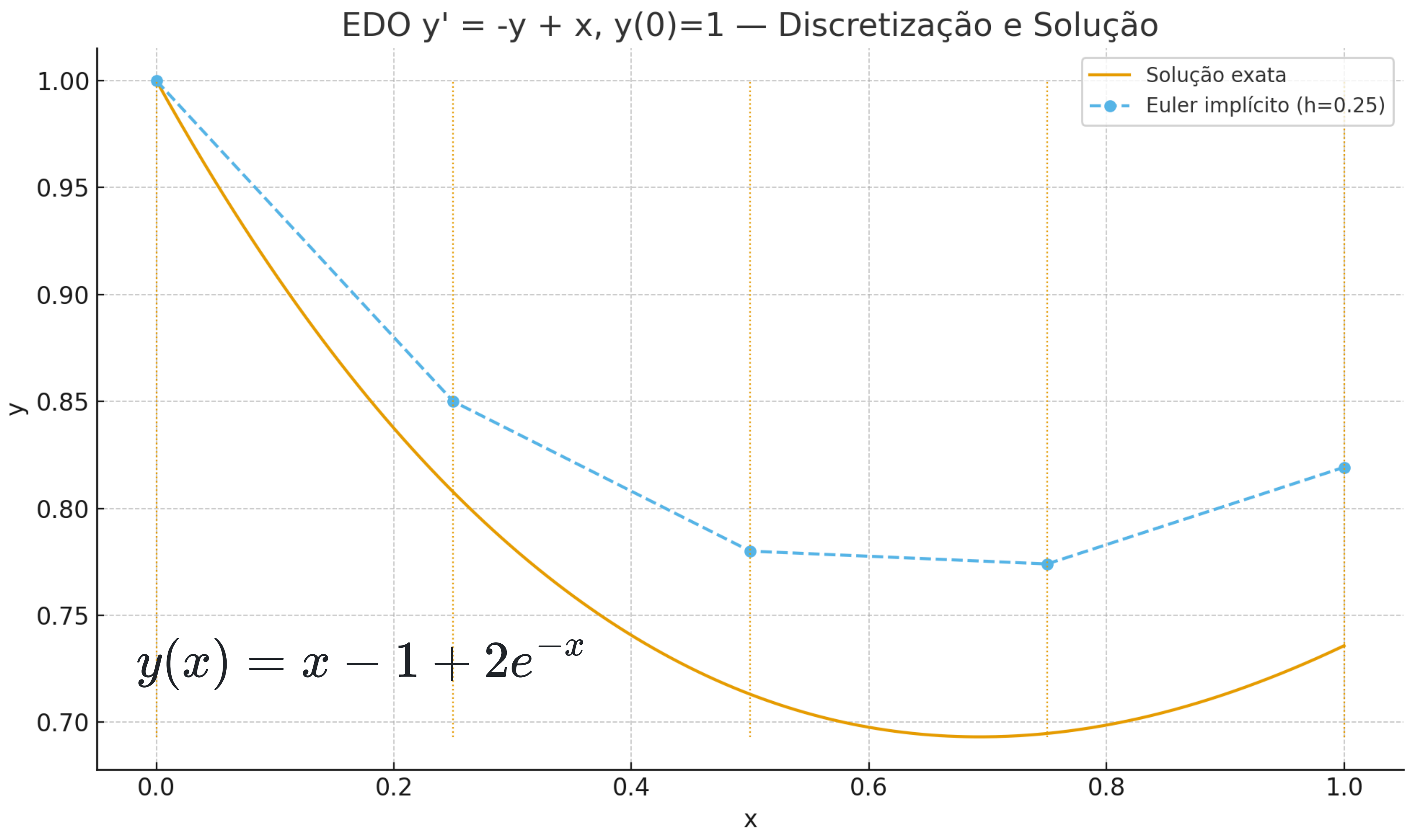
$$(1 + h)y_{i+1} - y_i = hx_{i+1}$$

Essa equação é **linear** em y_{i+1} e pode ser montada em um sistema.

Sistema Linear Resultante

$$\begin{bmatrix} 1+h & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+h & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1+h & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1+h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Com $y_0 = 1$ e $h = 0.25$.


EDO y' = -y + x, y(0)=1 — Discretização e Solução
Solução exata
Euler implícito (h=0.25)
$y(x) = x - 1 + 2e^{-x}$
1.00
0.95
0.90
0.85
0.80
0.75
0.70
y
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x