CB0589 ÁLGEBRA LINEAR

Álgebra de Matrizes e Invertibilidade

O que é uma Matriz?

Uma matriz é um arranjo retangular de números, símbolos ou expressões, organizados em linhas e colunas.

Representação:

Uma matriz A com m linhas e n colunas (ordem $m \times n$) é representada como:

$$A = (a_{ij})_{m imes n} = egin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \ dots & dots & \ddots & dots \ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O elemento a_{ij} está na linha i e na coluna j.

Uma **matriz** também pode ser formalmente definida como uma **função** que associa cada par ordenado de índices a um número (ou elemento) em um conjunto, como os números reais.

Seja $I=\{1,2,\ldots,m\}$ e $J=\{1,2,\ldots,n\}$ os conjuntos de índices das linhas e colunas, respectivamente.

Chamamos matriz A de ordem m imes n a função:

$$A:I imes J o \mathbb{R}$$

tal que, para cada par (i,j) com $i\in I$ e $j\in J$, temos um elemento $a_{ij}=A(i,j)$.

Interpretação

- i indica a **linha** e j indica a **coluna**.
- O valor a_{ij} é o **elemento da matriz** na posição (i,j).
- Assim, a matriz nada mais é do que uma **tabela organizada** de valores, mas formalmente descrita como uma função de dois índices.

Por exemplo, para uma matriz 2 imes 3:

$$A = egin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix},$$

temos:

- $I = \{1, 2\}$,
- $J = \{1, 2, 3\}$,
- e cada entrada a_{ij} é dada por A(i,j).

Exemplos:

$$A:\{1,2\} imes\{1,2,3\} o\mathbb{R},\quad A(i,j)=i+2j$$

$$A = egin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$I_n:\{1,\ldots,n\} imes\{1,\ldots,n\} o \mathbb{R}, \quad A(i,j)=\delta_{ij}$$

$$I_3 = egin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ 0 & 1 & 0 \ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definição: Adição e Subtração de Matrizes

Sejam $A=(a_{ij})$ e $B=(b_{ij})$ duas matrizes de mesma ordem $m\times n$.

• A **soma** A+B é a matriz $C=(c_{ij})$ de ordem m imes n onde cada elemento é a soma dos elementos correspondentes:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

• A **diferença** A-B é definida de forma análoga:

$$(A-B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Exemplo: Adição e Subtração

Sejam

$$A=egin{bmatrix}1&2\3&4\end{bmatrix},\quad B=egin{bmatrix}5&6\7&8\end{bmatrix}$$

Soma:

$$A+B=egin{bmatrix}1+5&2+6\3+7&4+8\end{bmatrix}=egin{bmatrix}6&8\10&12\end{bmatrix}$$

Subtração:

$$A - B = egin{bmatrix} 1 - 5 & 2 - 6 \ 3 - 7 & 4 - 8 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} -4 & -4 \ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

Definição: Multiplicação por Escalar

Seja $A=(a_{ij})$ uma matriz de ordem m imes n e k um número real (escalar).

• O **produto por escalar** kA é a matriz $C=(c_{ij})$ de ordem m imes n onde cada elemento é o produto do elemento correspondente de A pelo escalar k:

$$c_{ij} = k \cdot a_{ij}$$

Exemplo: Multiplicação por Escalar

Seja a matriz A e o escalar k=3:

$$A = egin{bmatrix} 1 & 2 \ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Multiplicação (kA):

$$3A = egin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} 3 & 6 \ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Matriz × Vetor (coluna única)

Se
$$A=[\,a_1\,\cdots\,a_n\,]\in\mathbb{R}^{m imes n}$$
 e $x=egin{bmatrix}x_1\ dots\ x_n\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^n$, então $Ax=\sum_{k=1}^nx_k\,a_k\,\in\,\mathbb{R}^m.$

Ax $\acute{\mathbf{e}}$ combinação linear das colunas de A com pesos dados pelas entradas de x

Exemplo:

Dimensões: $A \in \mathbb{R}^{m imes n}$, $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow Ax \in \mathbb{R}^m$.

$$A = egin{bmatrix} 1 & 2 \ 3 & 4 \ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad x = egin{bmatrix} 2 \ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \ Ax = 2 egin{bmatrix} 1 \ 3 \ 5 \end{bmatrix} - 1 egin{bmatrix} 2 \ 4 \ 6 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} 0 \ 2 \ 4 \end{bmatrix}.$$

Vetor (linha única) × Matriz

Se
$$A = [\,a_1\,\cdots\,a_m\,] \in \mathbb{R}^{m imes n}$$
 (linhas) e $y = [y_1\,\,\cdots\,\,y_m] \in \mathbb{R}^{1 imes m}$, então

$$yA = \sum_{i=1}^m y_i\,a_i \;\in\; \mathbb{R}^{1 imes n},$$

isto é, yA **é combinação linear das linhas** de A com pesos dados pelas entradas de y.

Exemplo:

Dimensões: $y \in \mathbb{R}^{1 imes m}$, $A \in \mathbb{R}^{m imes n} \Rightarrow yA \in \mathbb{R}^{1 imes n}$.

$$y = [1 \quad -2 \quad 0], \ A = egin{bmatrix} 1 & 2 \ 3 & 4 \ 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \ yA = 1[1 \quad 2] - 2[3 \quad 4] = [-5 \quad -6].$$

Definição: Multiplicação de Matrizes

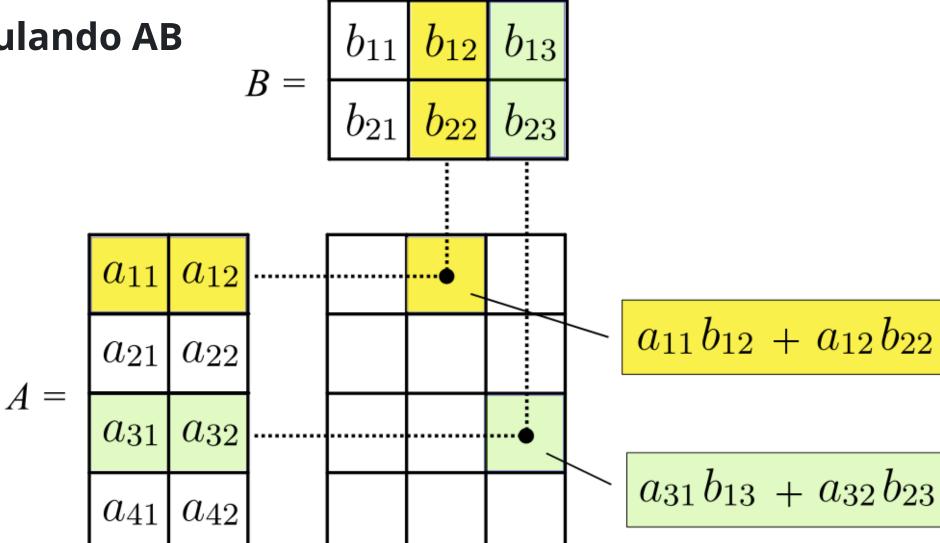
Seja $A=(a_{ij})$ uma matriz de ordem m imes n e $B=(b_{ij})$ de ordem n imes p.

- O **produto** AB é a matriz $C=(c_{ij})$ de ordem m imes p.
- O elemento c_{ij} é obtido pela soma dos produtos dos elementos da linha i de A pelos elementos da coluna j de B:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Atenção: O número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda.

Calculando AB



Exemplo: Multiplicação de Matrizes

$$A_{2 imes2} = egin{bmatrix} 1 & 2 \ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_{2 imes2} = egin{bmatrix} 5 & 6 \ 7 & 8 \end{bmatrix} \ C = AB = egin{bmatrix} (1 \cdot 5 + 2 \cdot 7) & (1 \cdot 6 + 2 \cdot 8) \ (3 \cdot 5 + 4 \cdot 7) & (3 \cdot 6 + 4 \cdot 8) \end{bmatrix} = egin{bmatrix} 19 & 22 \ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

A multiplicação de matrizes NÃO é comutativa!

$$BA = egin{bmatrix} (5 \cdot 1 + 6 \cdot 3) & (5 \cdot 2 + 6 \cdot 4) \ (7 \cdot 1 + 8 \cdot 3) & (7 \cdot 2 + 8 \cdot 4) \end{bmatrix} = egin{bmatrix} 23 & 34 \ 31 & 46 \end{bmatrix}
eq AB$$

Interpretação do Produto: Combinação de Colunas

Se
$$A \in \mathbb{R}^{m imes n}$$
 e $B = [\,b_1 \, \cdots \, b_p\,] \in \mathbb{R}^{n imes p}$ com b_j colunas,

$$AB = ig[\, Ab_1 \, \cdots \, Ab_p \, ig], \qquad Ab_j = \sum_{k=1}^n b_{kj} \, a_k,$$

onde a_k é a k-ésima **coluna** de A.

Exemplo:

$$A = egin{bmatrix} 1 & 0\$\$2pt \end{bmatrix} 2 & 1\$\$2pt \end{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \ B = egin{bmatrix} 2 & -1\$\$2pt \end{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = egin{bmatrix} 1 \ 2 \ 0 \end{bmatrix}, \ a_2 = egin{bmatrix} 0 \ 1 \ 1 \end{bmatrix} \ AB = egin{bmatrix} 2a_1 + 3a_2 & -a_1 + 4a_2 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} 2 & -1\$\$2pt \end{bmatrix} 7 & 2\$\$2pt \end{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Definição: Matriz Transposta

Seja $A=(a_{ij})$ uma matriz de ordem m imes n.

• A **matriz transposta** de A, denotada por A^T , é a matriz de ordem $n \times m$ obtida pela troca de linhas por colunas:

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}$$

Exemplo: Matriz Transposta

$$A = egin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \implies A^T = egin{bmatrix} 1 & 4 \ 2 & 5 \ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Propriedades:

$$\bullet \ (A^T)^T = A$$

$$\bullet \ (A+B)^T = A^T + B^T$$

•
$$(kA)^T = kA^T$$

$$\bullet \ (AB)^T = B^T A^T$$

Definição: Matriz Identidade

Matriz Identidade (I_n):

É a matriz quadrada de ordem n que é o elemento neutro da multiplicação:

$$AI_n = I_n A = A$$

$$(I_n)_{ij} = \delta_{ij} = egin{cases} 1 & ext{se } i = j \ 0 & ext{se } i
eq j \end{cases}$$

Definição: Matriz Inversa (A^{-1})

Uma matriz quadrada A de ordem n é **invertível** (ou não singular) se existe matriz A^{-1} de ordem n tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Se tal matriz A^{-1} não existe, A é dita **não invertível** (ou singular). Uma condição necessária e suficiente para A ser invertível é que $\det(A) \neq 0$.

Teoremas e Propriedades da Matriz Inversa

Para matrizes A e B invertíveis de mesma ordem n, e um escalar $k \neq 0$:

- 1. **Unicidade da Inversa:** Se uma matriz tem inversa, ela é única.
- 2. **Inversa de um Produto:** O produto AB também é invertível, e sua inversa é:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

3. **Inversa da Transposta:** A transposta de uma matriz invertível também é invertível, e sua inversa é:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

4. **Inversa da Inversa:** A inversa da inversa de uma matriz é a própria matriz:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

5. Inversa de um Múltiplo Escalar: A matriz kA é invertível, e sua inversa é:

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$$

Exemplo: Identidade e Inversa

A identidade de ordem 2 é $I_2 = egin{bmatrix} 1 & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Dada a matriz
$$A=egin{bmatrix} 2 & 5 \ 1 & 3 \end{bmatrix}$$
, sua inversa é $A^{-1}=egin{bmatrix} 3 & -5 \ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Verificação:

$$AA^{-1} = egin{bmatrix} 2 & 5 \ 1 & 3 \end{bmatrix} egin{bmatrix} 3 & -5 \ -1 & 2 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} (6-5) & (-10+10) \ (3-3) & (-5+6) \end{bmatrix} = egin{bmatrix} 1 & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Definição: Matrizes Especiais

Uma matriz quadrada $A=\left(a_{ij}
ight)$ é dita:

Classe	Definição		
Diagonal	se $a_{ij}=0$ para todo $i eq j$		
Triangular Superior	se $a_{ij}=0$ para todo $i>j$		
Triangular Inferior	se $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$		
Simétrica	se $A=A^T$, ou seja, $a_{ij}=a_{ji}$ para todos i,j		
Ortogonal	se sua inversa é sua transposta, $A^{-1}=A^{T}$		

Exemplos de Matrizes Especiais

Diagonal		ıal	Triangular Superior	
$\lceil 2 \rceil$	0	[0	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$	
0	-1	0	$oxed{0}$ 4 -2	
	0	5	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$	
Simétrica		ica	Ortogonal	
Γ1	7	3]	Γο 17	
7	4	-5		
_3	-5	6		

Exercícios

Dadas as matrizes:

$$A=egin{bmatrix}1&0\2&3\end{bmatrix},\quad B=egin{bmatrix}-1&4\1&2\end{bmatrix},\quad C=egin{bmatrix}3&-1&0\2&5&-4\end{bmatrix}$$

Calcule (se possível):

1.
$$A + B$$

2.
$$3A - 2B$$

3.
$$AB \in BA$$

5.
$$C^T$$

6.
$$(A+B)^T$$
 e A^T+B^T

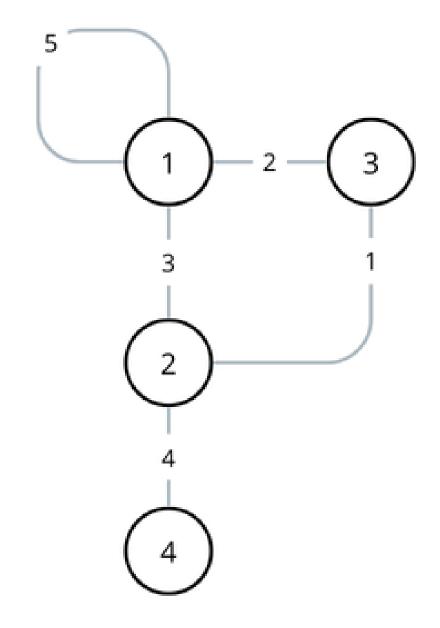
Aplicações de Matrizes

Exemplo: Grafo ponderado

$$G = (V, E, w)$$
 $V = \{1, 2, 3, 4\}$
 $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$
 $w = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$

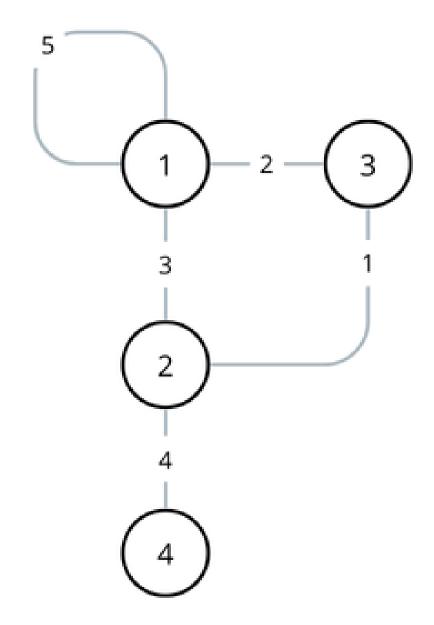
Arestas e pesos:

- $e_1 = \{1, 1\}, \ w_1 = 5$
- $e_2 = \{1, 2\}, \ w_2 = 3$
- $e_3 = \{1, 3\}, \ w_3 = 2$
- $e_4 = \{2,3\}, \ w_4 = 1$
- $e_5 = \{2,4\}, \ w_5 = 4$



Representação Matricial

$$B = egin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 0 \ 3 & 0 & 1 & 4 \ 2 & 1 & 0 & 0 \ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Exemplo: Da EDO para um Sistema Linear

Equação Diferencial:

$$rac{dy}{dx} = -y + x, \quad y(0) = 1$$

- Intervalo: [0,1]
- Dividido em 4 pontos:

$$x_0 = 0, \, x_1 = 0.25, \, x_2 = 0.50, \, x_3 = 0.75, \, x_4 = 1.00$$

• Passo h=0.25

Queremos aproximar y(x) nesses pontos.

Euler Implícito (Backward Euler)

Aproximação da derivada:

$$rac{y_{i+1}-y_i}{h} = -y_{i+1} + x_{i+1}$$

Reorganizando:

$$(1+h)y_{i+1}-y_i=hx_{i+1}$$

Essa equação é **linear** em y_{i+1} e pode ser montada em um sistema.

Sistema Linear Resultante

$$egin{bmatrix} 1+h & -1 & 0 & 0 \ -1 & 1+h & -1 & 0 \ 0 & -1 & 1+h & -1 \ 0 & 0 & -1 & 1+h \end{bmatrix} egin{bmatrix} y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4 \end{bmatrix} = h egin{bmatrix} x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \end{bmatrix} + egin{bmatrix} y_0 \ 0 \ 0 \ 0 \end{bmatrix}$$

 $\mathsf{Com}\ y_0 = 1\ \mathsf{e}\ h = 0.25.$

