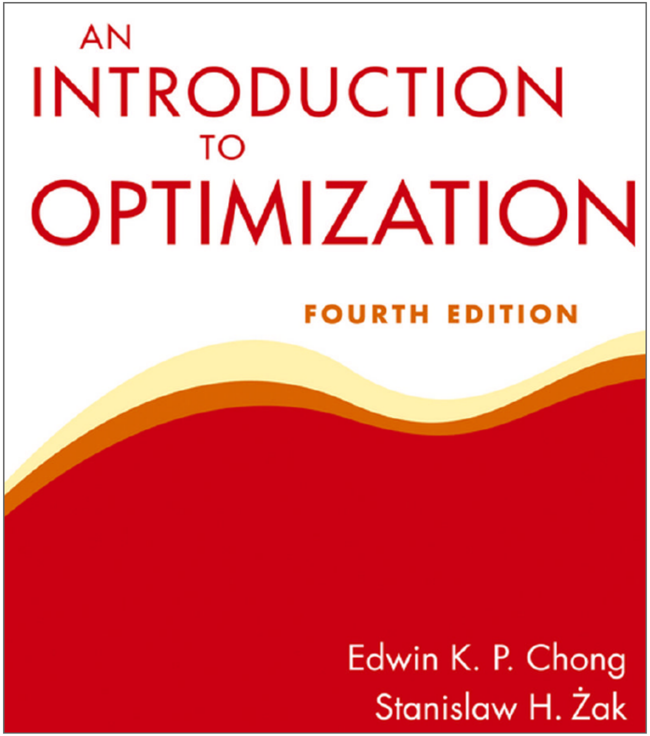


OTIMIZAÇÃO CONVEXA

CAPÍTULO 22

Def. gráfico de uma função

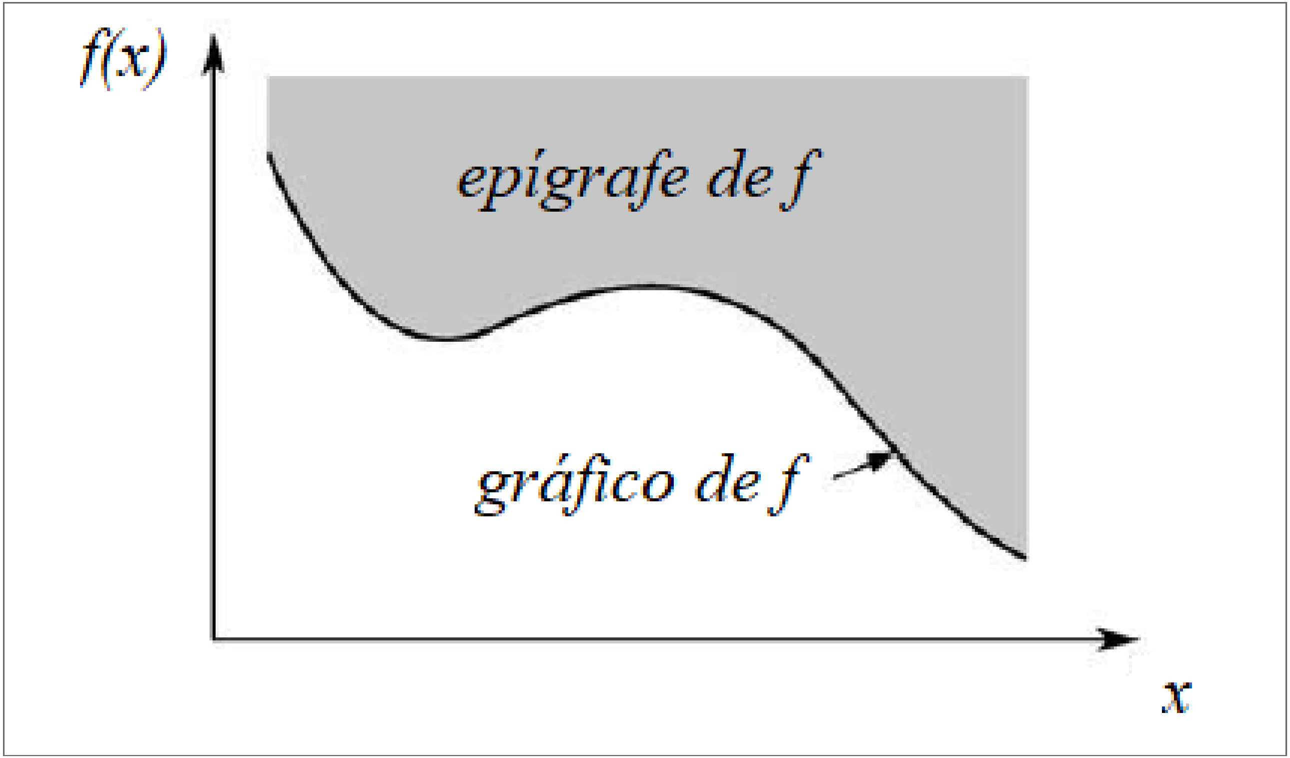
O gráfico de $f : \Omega \to \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^n$, é o conjunto de pontos em $\Omega \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} : x \in \Omega \right\}$$

Def. epígrafe de uma função

A epígrafe de uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^n$, representada por $epi(f)$, é o conjunto de pontos em $\Omega \times \mathbb{R}$ dado por

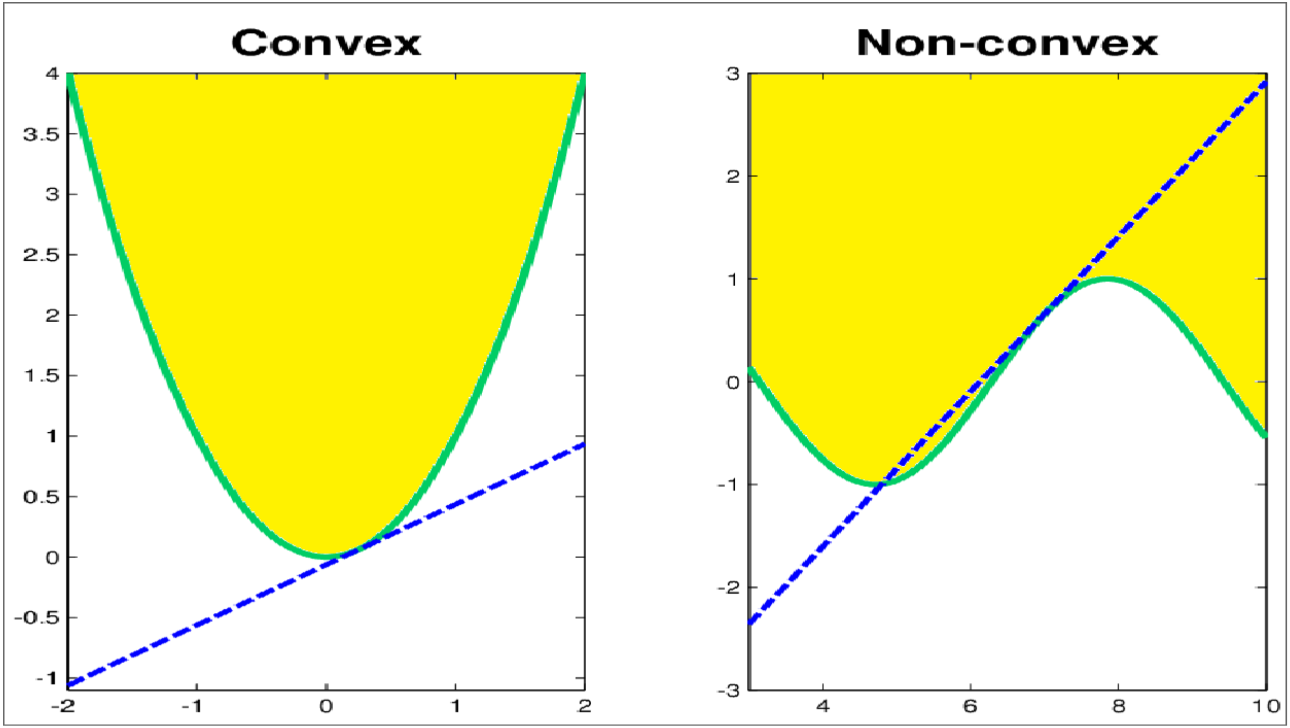
$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ \beta \end{pmatrix} : x \in \Omega, \beta \in \mathbb{R}, \beta \geq f(x) \right\}$$



f(x)
epígrafe de f
gráfico de f
x

Def. função convexa

Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^n$, será *convexa em* Ω se $epi(f)$ for um conjunto convexo.

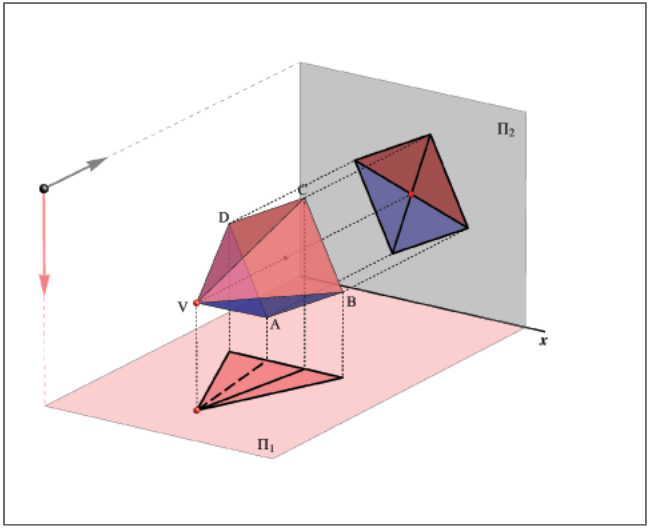


Teorema

Se uma função $f:\Omega \to \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^n$, for *convexa em* Ω*, então* Ω *é um conjunto convexo*.

Obs 1: Toda projeção orthogonal de um conjunto convexo é um conjunto convexo.

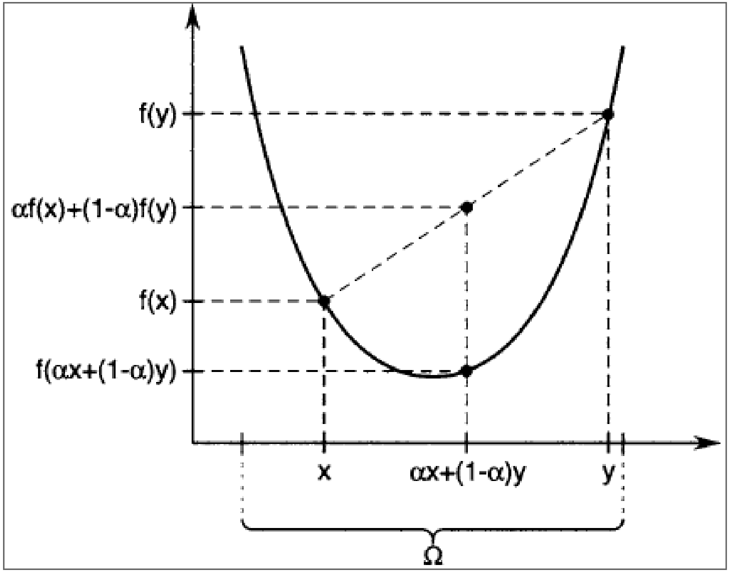
Obs 2: O conjunto Ω, domínio de f, é a projeção orthogonal de $epi(f)$ sobre $\mathbb{R}^n$.



Teorema

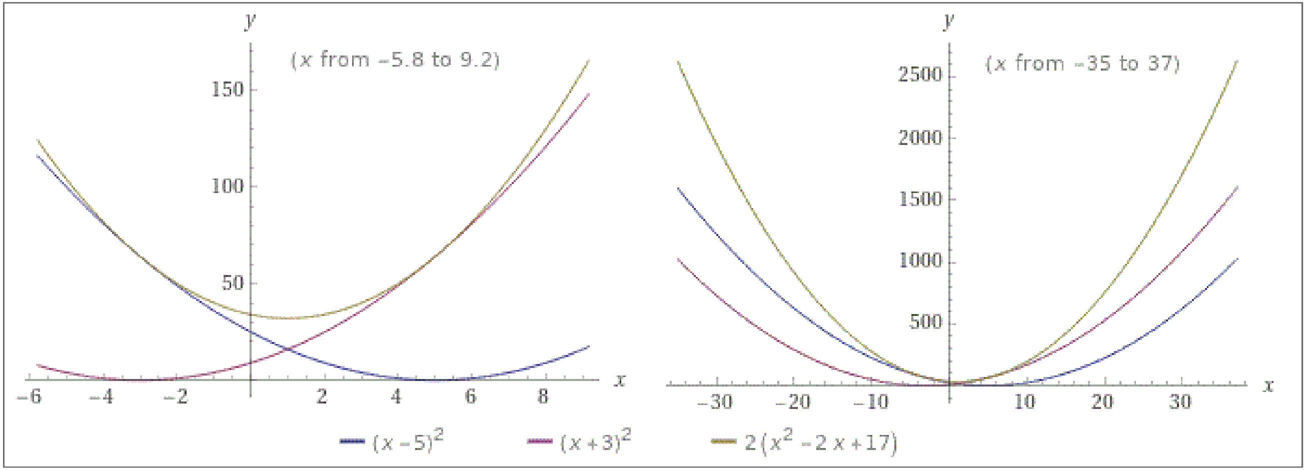
Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$, definida em um conjunto convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ será convexa se, e somente se, $\forall x, y \in \Omega$ e $\forall \alpha \in (0, 1)$, tivermos

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$



Teorema

Suponha que f e g sejam funções convexas, então, para qualquer $\kappa \geq 0$, as funções κf e $f + g$ também são convexas.



Def. função estritamente convexa

Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$, definida em um conjunto convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, será estritamente convexa se $\forall x, y \in \Omega, x \neq y$ e $\alpha \in (0,1)$, tivermos

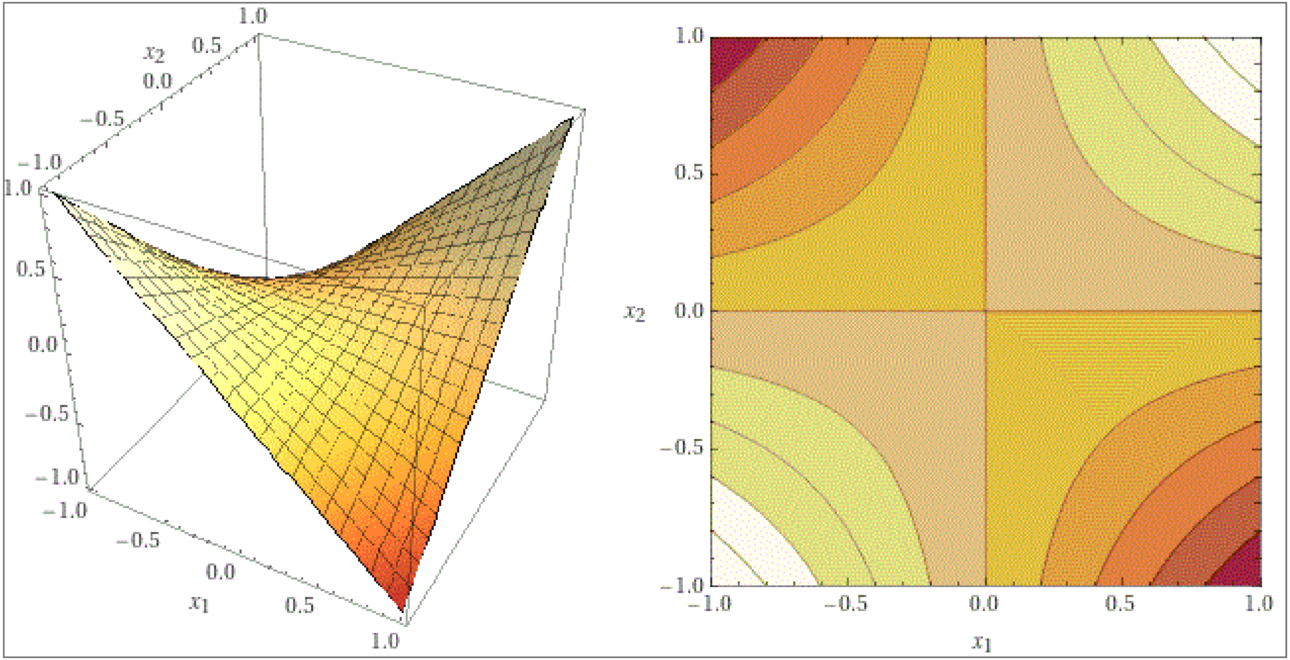
$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Def. função côncava

Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$, definida em um conjunto convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, será (estritamente) côncava se $-f$ for (estritamente) convexa.

Exercício:

A função $f(x) = x_1 x_2$ é convexa em $\Omega \equiv \{x : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$?



Proposição.
Uma forma quadrática $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dada por $f(x) = x^t Q x$ com

$$Q \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{e} \quad Q = Q^t \;\; \text{(matriz simétrica)},$$

será convexa em Ω se, e somente se, $\forall x, y \in \Omega$, tivermos

$$(x-y)^t Q (x-y) \geq 0,$$

ou seja, Q é uma matriz semidefinida positiva.

Exercício:

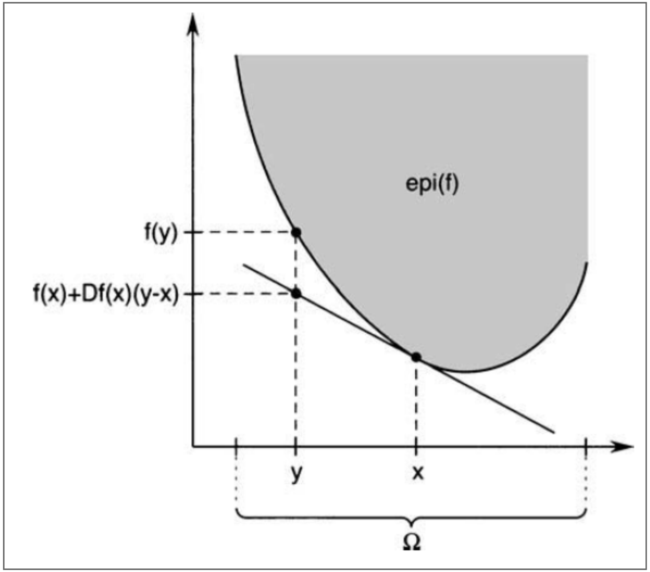
Retornando à função $f(x) = x_1 x_2$, mostre que f pode ser escrita como

$$f(x) = x^t Q x \ \ \text{(forma quadrática)},$$

mas Q não será uma matriz semidefinida positiva.

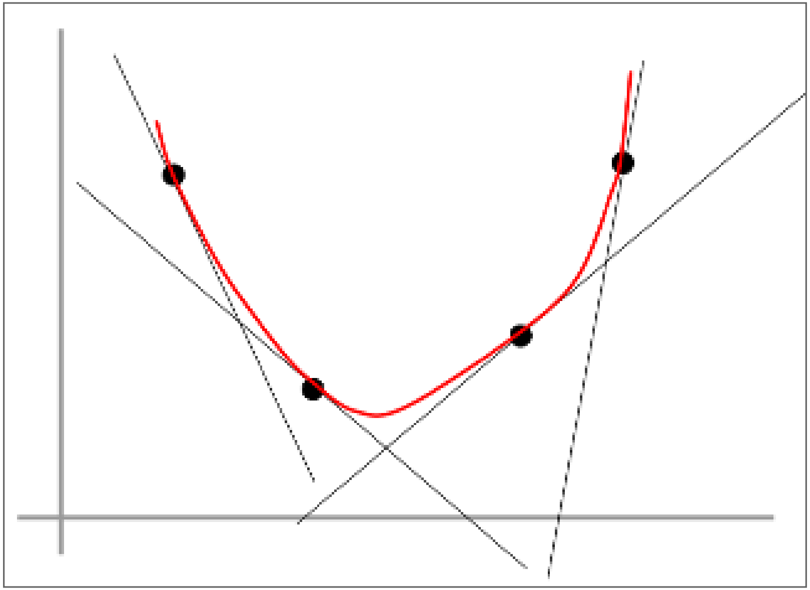
Teorema.
Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1$, definida em um conjunto aberto e convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Então, f será convexa em Ω se, e somente se, $\forall x, y \in \Omega$, tivermos

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)(y - x).$$



Teorema.

Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2$, definida em um conjunto aberto e convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Então, f será convexa em Ω se, e somente se, $\forall x \in \Omega$, a matriz hessiana $\nabla^2 f(x)$ for semidefinita positiva.



Exercício:

Determine se as funções abaixo são convexas, côncavas ou nenhuma das duas.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = -8x^2.$$

(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_1x_2 + x_1x_3 - 3x_1 - 2x_2 + 15.$$

(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2.$$

Teorema.
Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é função convexa, então, em Ω, todo minimizador local de f também será um minimizador global.
Lema.
Se $g : \Omega \to \mathbb{R}$ for uma função convexa, então, para cada $c \in \mathbb{R}$, o conjunto $\Gamma_c = \{x \in \Omega : g(x) \leq c\}$ será convexo.
Corolário.
Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ for uma função convexa, então o conjunto de minimizadores globais de f em Ω será convexo.

Lema.
Sejam $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função convexa de classe $\mathcal{C}^1$ em um conjunto aberto contendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que $x^* \in \Omega$ é tal que, $\forall x \in \Omega$, $x \neq x^*$, temos

$$\nabla f(x^*)(x - x^*) \geq 0.$$

Então, x^* é um minimizador global de f em Ω.

Teorema.
Sejam $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função convexa de classe $\mathcal{C}^1$ em um conjunto aberto contendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que $x^* \in \Omega$ é tal que, para qualquer direção viável d em x^*, temos

$$d^t \nabla f(x^*) \geq 0.$$

Então, x^* é um minimizador global de f em Ω.

Corolário.

Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função convexa de classe $\mathcal{C}^1$. Suponha que $x^* \in \Omega$ é tal que

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Então, x^* é um minimizador global de f em Ω.

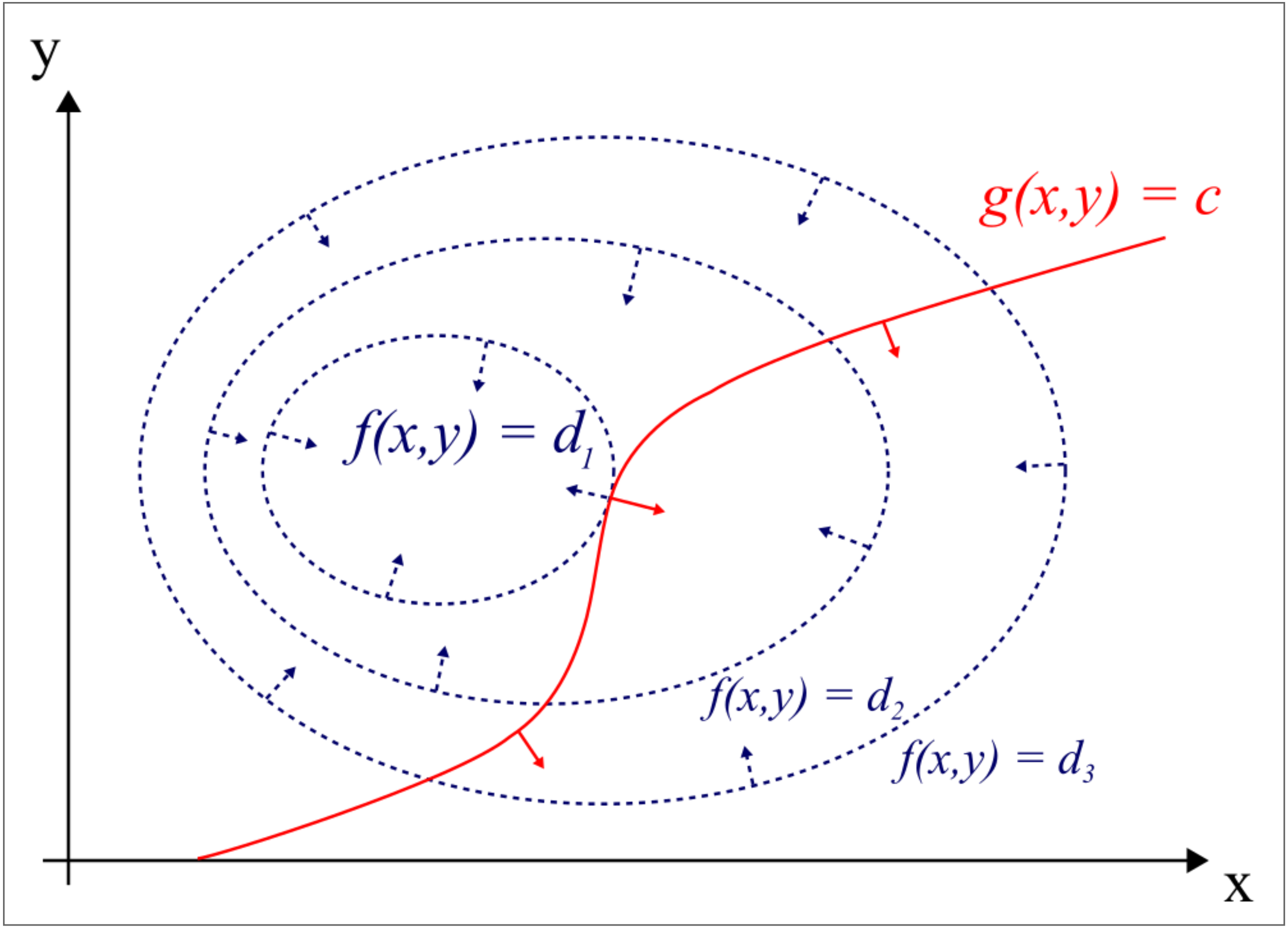
Teorema.
Sejam $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função convexa de classe $\mathcal{C}^1$ em

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\},$$

onde $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h \in \mathcal{C}^1$. Suponha que existam $x^* \in \Omega$ e $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tais que

$$\nabla f(x^*) + (\lambda^*)^t \nabla h(x^*) = 0.$$

Então, x^* é um minimizador global de f em Ω.


y
x
g(x,y) = c
f(x,y) = d1
f(x,y) = d2
f(x,y) = d3

Teorema. Condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)
Sejam $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função convexa de classe $\mathcal{C}^1$ em

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\},$$

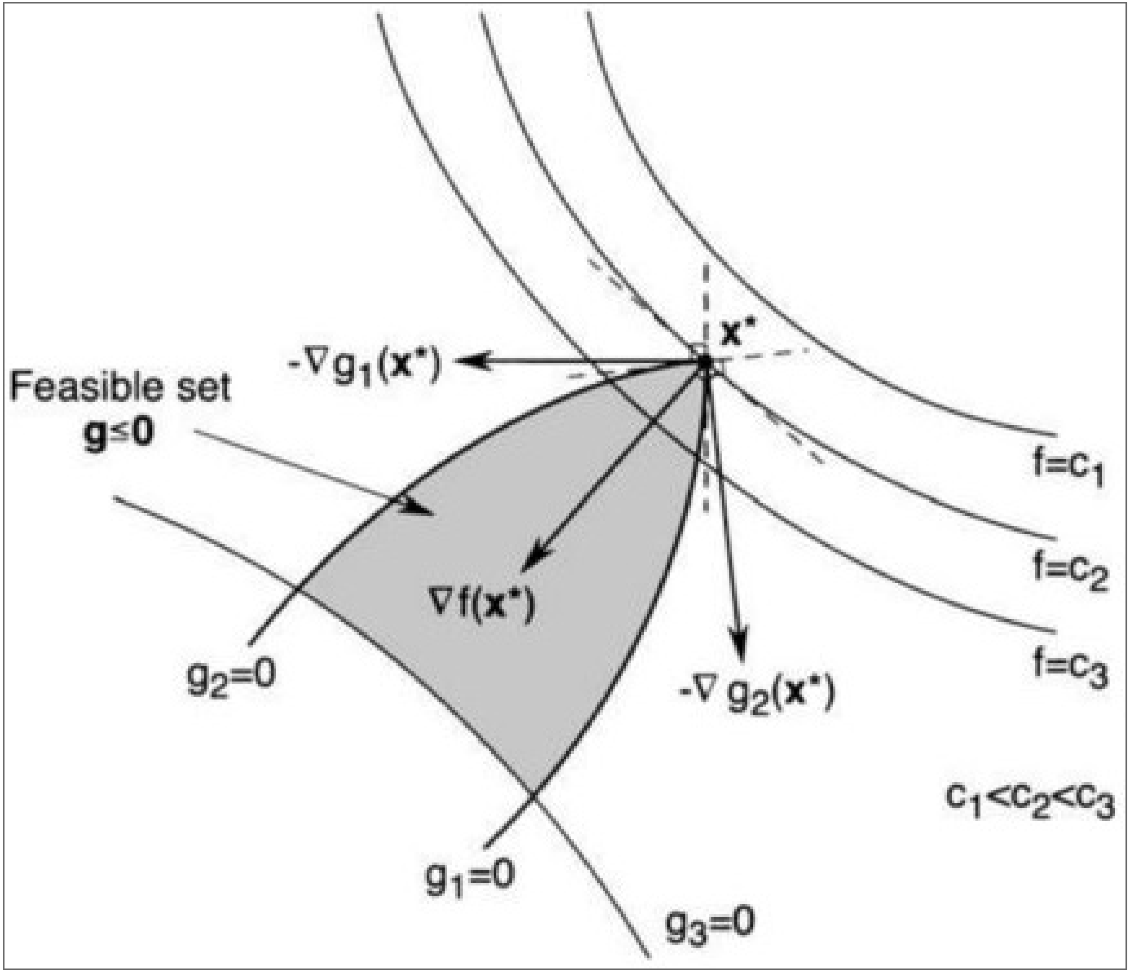
onde $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $h, g \in \mathcal{C}^1$. Suponha que existam $x^* \in \Omega$, $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ e $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ tais que

(1) $\mu^* \geq 0$.

(2) $\nabla f(x^*) + (\lambda^*)^t \nabla h(x^*) + (\mu^*)^t \nabla g(x^*) = 0$.

(3) $(\mu^*)^t g(x^*) = 0$.

Então, x^* é um minimizador global de f em Ω.



x*
-∇g₁(x*)
Feasible set
g≤0
∇f(x*)
-∇ g₂(x*)
f=c₁
f=c₂
f=c₃
g₂=0
g₁=0
g₃=0
c₁<c₂<c₃

FIM