CC0323: Elementos de Cálculo

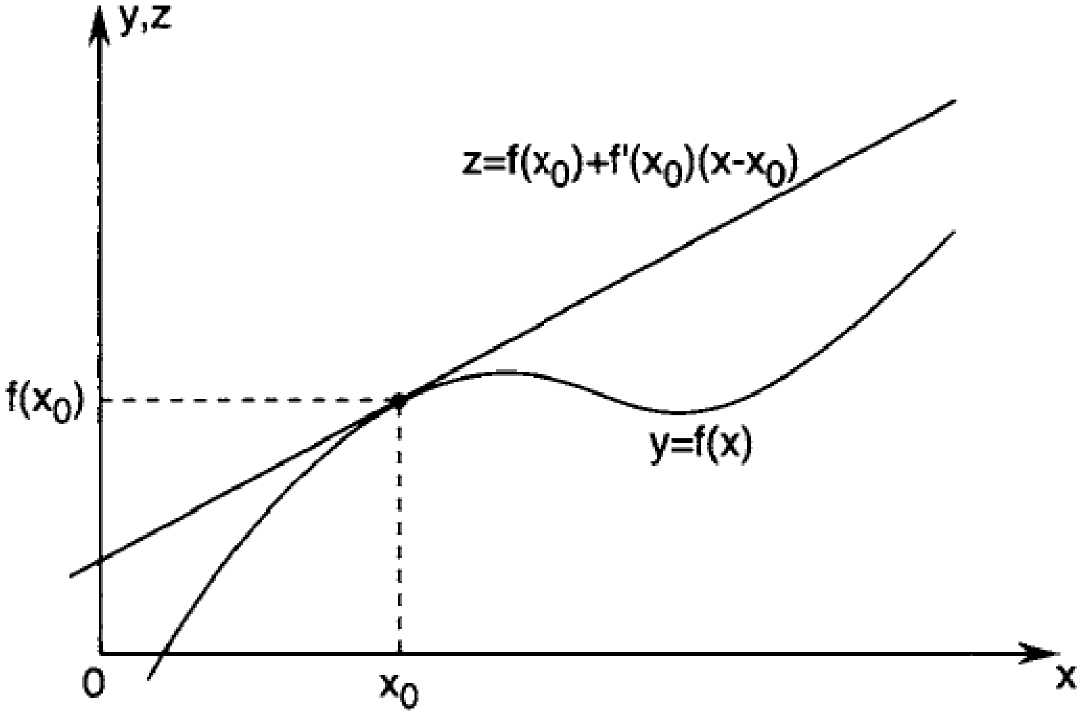
Michael Souza

michael@ufc.br

O que é uma derivada?

Interpretações

1. Geométrica
2. Aproximativa
3. Variacional



Norma de um vetor

A norma de um vetor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é dada por:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Exemplo:

Em $\mathbb{R}^2$, para $x = (3, 4)$, temos $\|x\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Em $\mathbb{R}$, a norma é dada por $\|x\| = |x|$ (módulo).

Distância Norma-Induzida

Toda norma em $\mathbb{R}^n$ induz uma métrica, que é a distância entre dois pontos x e y dada por:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Exemplo:

Em $\mathbb{R}^2$, a distância entre $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ é dada por:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Para $x = (3, 4)$ e $y = (1, 3)$, temos $d(x, y) = \sqrt{(3-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{5}$.

Sequências e Limites

Sequência de números reais

Uma sequência de números reais é uma função $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $a(k) \in \mathbb{R}$

.

Exemplo:

A sequência gerada por $a(k) = 1/k$ é dada por $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$.

Limite

Dizemos que a sequência $a(k)$ converge para o número real L se, para todo $\epsilon > 0$, existe um número natural k_0 tal que $|a(k) - L| < \epsilon$ para todo $k \geq k_0$.

Escrevemos de modo abreviado:

$$\lim_{k \to \infty} a(k) = L \text{ ou } a_k \to L$$

Exemplo:

A sequência $a_k = 1/k$ converge para $L = 0$.

Teorema

Uma sequência convergente tem um único limite.

Prova: Por contradição, suponha que $a_k \to L$ e $a_k \to M$. Então, para $\epsilon = |L - M|/2$, existem k_1 e k_2 tais que $|a_k - L| < \epsilon$ e $|a_k - M| < \epsilon$ para $k \geq k_1$ e $k \geq k_2$, respectivamente.

Neste caso, para $k > \max\{k_1, k_2\}$, devemos ter

$$\epsilon = \frac{|L - M|}{2} = \frac{|L - a_k + a_k - M|}{2} \leq \frac{|a_k - L| + |a_k - M|}{2} < \frac{\epsilon + \epsilon}{2} = \epsilon.$$

Mas isto é obviamente impossível.

Teorema

Toda sequência convergente é limitada.

Prova: Se $a_k \to L$, então existe k_0 tal que $|a_k - L| < 1$ para $k \geq k_0$. Assim, para $k \geq k_0$, temos $|a_k| = |a_k - L + L| \leq |a_k - L| + |L| < 1 + |L|$. Portanto, $|a_k| < 1 + |L|$ para $k \geq k_0$.

Agora, tome $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{k_0-1}|, 1 + |L|\}$. Então, $|a_k| \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e, portanto, a sequência é limitada.

Supremo

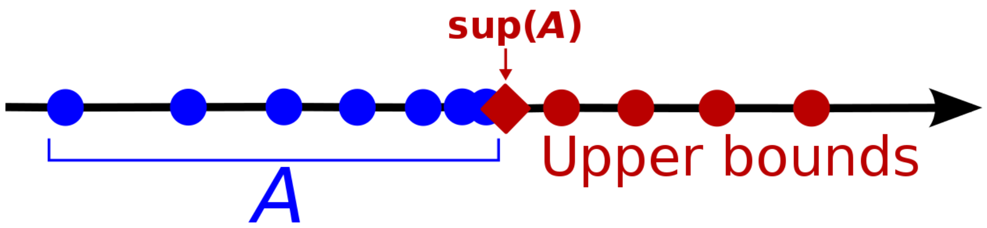
Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio e limitado superiormente. O número real L é o **supremo** de A, denotado por $L = \sup\{A\}$, se:

1. L é um limitante superior de A;
2. Para todo $\epsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $L - \epsilon < a \leq L$.

Exemplo:

a. $\sup\{1 - 1/n\} = 1$

b. $\sup\{\cos(x)\} = 1$



De modo análogo, podemos definir o conceito de **ínfimo** de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$.

Ínfimo

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio e limitado inferiormente. O número real L é o **ínfimo** de A, denotado por $L = \inf\{A\}$, se:

1. L é um limitante inferior de A;
2. Para todo $\epsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $L \leq a < L + \epsilon$.

Exemplo:

a. $\inf\{1 - 1/n\} = 0$

b. $\inf\{\cos(x)\} = -1$

Teorema

Toda sequência monótona limitada em $\mathbb{R}$ é convergente.

Prova: Seja a_k uma sequência monótona crescente e limitada. Então, existe $L = \sup\{a_k\}$. Dado $\epsilon > 0$, existe k_0 tal que $L - \epsilon < a_{k_0} \leq L$. Como a_k é crescente, temos $L - \epsilon < a_k \leq L$ para $k \geq k_0$. Portanto, $a_k \to L$.

Diferenciabilidade

O cálculo diferencial é baseado na ideia de aproximar uma função qualquer $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por uma função afim $\mathcal{F}$.

Função Afim

Uma função $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é afim se existe uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e um vetor $b \in \mathbb{R}^m$ tais que:

$$\mathcal{F}(x) = Ax + b, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Desejamos encontrar a melhor aproximação afim $\mathcal{F}$ para f em um ponto x_0.

Primeiro, impomos a condição natural de que $\mathcal{F}(x_0) = f(x_0)$ e obtemos

$$\mathcal{F}(x_0) = Ax_0 + b = f(x_0) \Rightarrow b = f(x_0) - Ax_0$$

Pela linearidade de A, temos que

$$\mathcal{F}(x) + b = Ax + f(x_0) - Ax_0 = A(x - x_0) + f(x_0)$$

Agora, exigimos que $\mathcal{F}(x)$ se aproxime de $f(x)$ mais rápido que x se aproxima de x_0

,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - \mathcal{F}(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

Função Diferenciável

Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se existe uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - \mathcal{F}(x)\|}{\|x - x_0\|} = \lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - (A(x - x_0) - f(x_0))\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

Além disso, uma função é dita diferenciável em um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se é diferenciável em todo ponto de D.

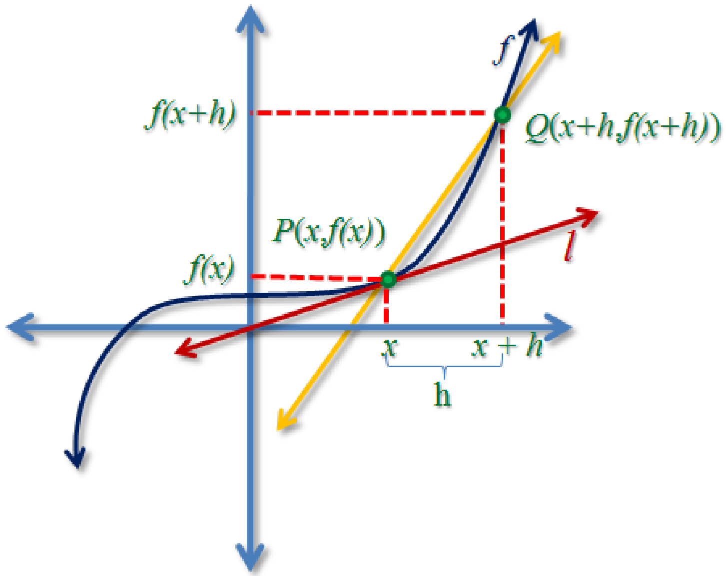
Em uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - (A(x - x_0) - f(x_0))|}{|x - x_0|} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)|}{|x - x_0|} \\
&= \lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A \frac{x - x_0}{x - x_0} \right| \\
&= \lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A \right|
\end{aligned} \quad \Rightarrow A = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Exemplo:

Em $\mathbb{R}$, se $\mathcal{F}(x) = ax + b$ aproxima $f(x)$ em x_0, então quando $x \to x_0$ temos

$$f(x) \approx A(x - x_0) + b = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



Vetor Gradiente

Quando $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a derivada de f em $u \in \mathbb{R}^n$ é um vetor coluna chamado de **vetor gradiente** de f em u e é denotado por $\nabla f(u)$.

O vetor gradiente é dado por:

$$\nabla f(u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(u) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(u) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(u) \end{bmatrix},$$

onde

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(u) = \lim_{h \to 0} \frac{f(u + he_i) - f(u)}{h},$$

onde e_i é o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$ e $h \in \mathbb{R}$.

Exemplo:

a) Considere a função $f(x,y) = x^2 + y^2$. O vetor gradiente de f é dado por:

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \end{bmatrix}$$

b) Considere a função $f(x,y) = x^2 + 2xy^3 + y^2$. O vetor gradiente de f em $(3,4)$ é dado por:

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(3,4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 2y^3 & 6xy^2 + 2y \end{bmatrix}$$

Agora, tomando $(x,y) = (3,4)$, temos $\nabla f(3,4) = \begin{bmatrix} 134 & 296 \end{bmatrix}$.

Matriz Hessiana

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável em x_0, então a matriz jacobiana de ∇f é chamada de **matriz hessiana** de f em x_0 e é denotada por $\nabla^2 f(x_0)$.

A matriz hessiana é dada por:

$$\nabla^2 f(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{bmatrix}$$

Exemplo:

a) Considere a função $f(x,y) = x^2 + y^2$. A matriz hessiana de f é dada por:

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Considere a função $f(x,y) = x^3 + 3xy + 2y^3$. A matriz hessiana de f é dada por:

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 12y \end{bmatrix}$$

Em $(x,y) = (1,2)$ temos $\nabla^2 f(1,2) = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 24 \end{bmatrix}$.

Teorema de Clairaut

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável em u, então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(u) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(u)$$

para todo $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Alexis Claude Clairaut
(1713-1765)

Ou seja, a matriz hessiana de f de uma função diferenciável é ***simétrica***.

Vimos que a aproximação afim de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ em $u \in \mathbb{R}^n$ é dada por:

$$F(x) \approx f'(u)(x-u) + f(u)$$

Esta aproximação tem as seguintes propriedades:

1. $F(u) = f(u)$;
2. $F'(u) = \frac{\partial F}{\partial x}(u) = f'(u)$;

O que obteremos se impusermos $F''(u) = f''(u)$?

Como $F''(u)$ é afim (polinômio do 1º grau), teremos $F''(u) = 0$. 😟

Mas e se ***aumentarmos o grau*** de F? 🤔

Vamos supor que $F(x) = ax^2 + bx + c$ é um polinômio de grau 2 e impor que, para $u \in \mathbb{R}$ fixado, temos:

1. $F(u) = f(u)$;
2. $F'(u) = \frac{\partial F}{\partial x}(u) = f'(u)$;
3. $F''(u) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u) = f''(u)$;

Quais são as variáveis deste sistema?

Estes sistema é linear ou não-linear?

Temos quantas equações e quantas variáveis?

Este sistema é determinado ou indeterminado?

A solução deste sistema é dada por

$$F(x) = f(u) + f'(u)(x-u) + \frac{1}{2}f''(u)(x-u)^2$$

Verifique se esta afirmação é verdadeira. 🤔

De modo geral, o sistema dado por

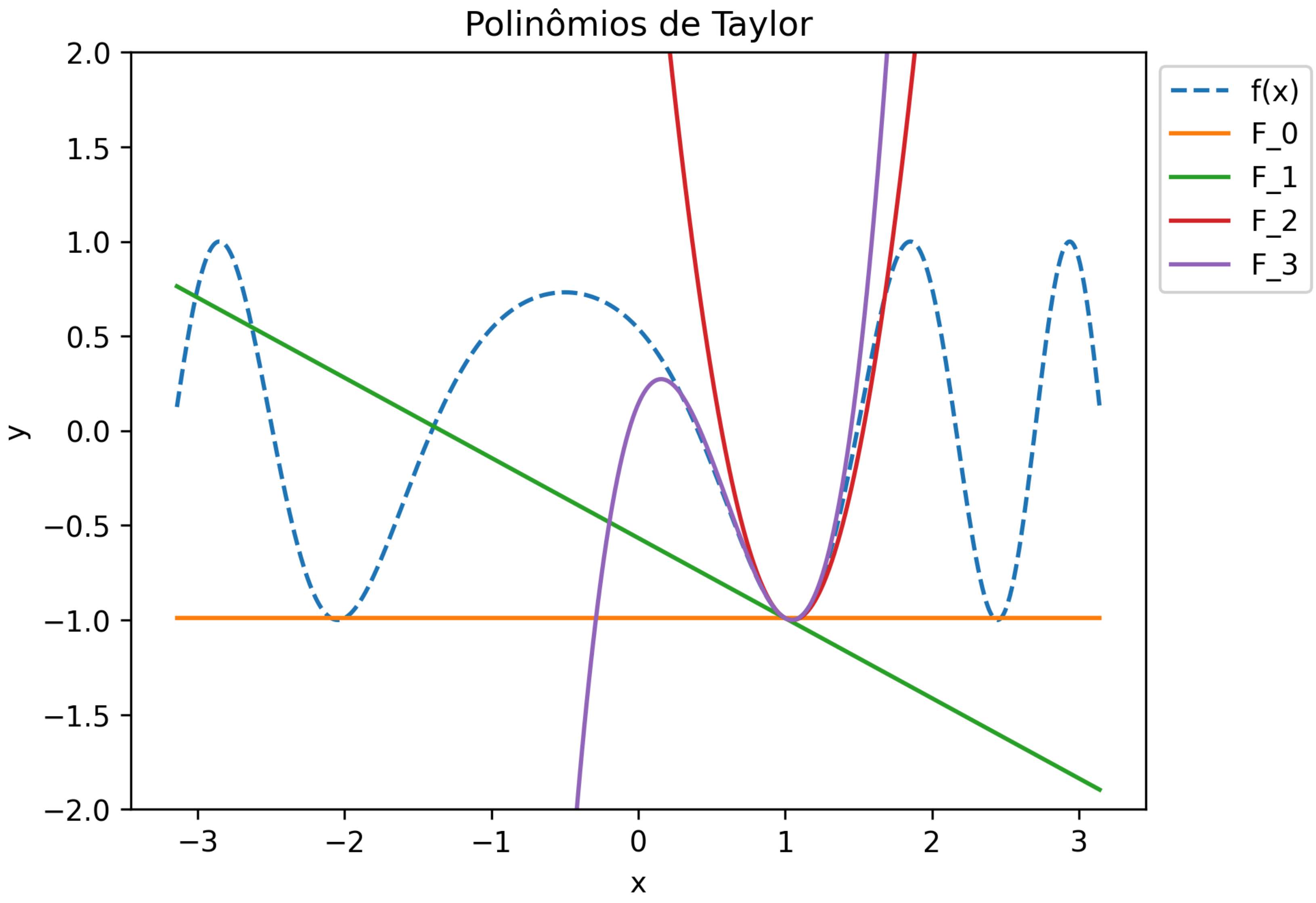
$$\begin{cases} F(u) = f(u) \\ F'(u) = f'(u) \\ \dots \\ F^{(k)}(u) = f^{(k)}(u) \end{cases}$$

com $F(x) = a_0 + a_1 x + a_k x^k$ sempre terá solução dada por um ***Polinômio de Taylor***.

Polinômio de Taylor

O polinômio de Taylor de ordem k de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em $u \in \mathbb{R}$ é dado por:

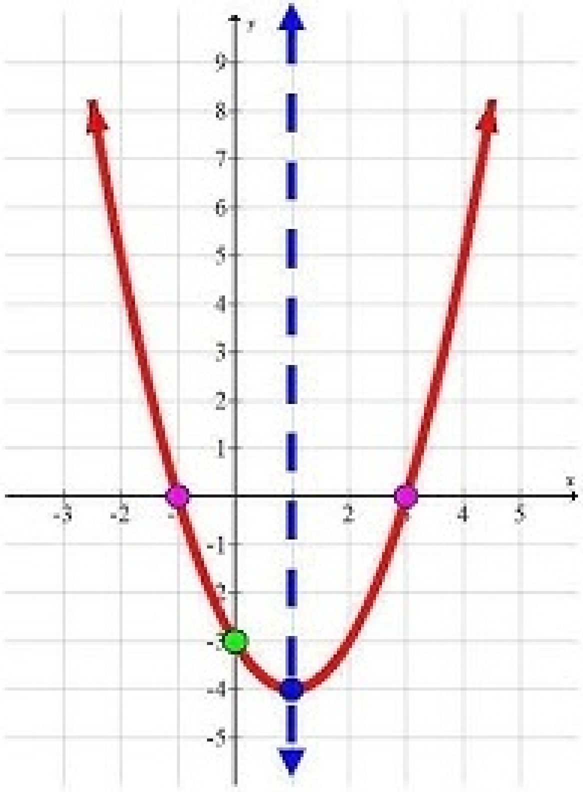
$$F_k(x) = f(u) + f'(u)(x-u) + \frac{1}{2!} f''(u)(x-u)^2 + \cdots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(u)(x-u)^k$$


Polinômios de Taylor
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
y
−3
−2
−1
0
1
2
3
x
f(x)
F_0
F_1
F_2
F_3

Podemos definir o polinômio de Taylor para funções de várias variáveis.

Nesta disciplina de otimização, estaremos interessados em funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e aproximações de ordem 2.

Por quê? 🤔



Polinômio de Taylor de ordem 2

O polinômio de Taylor de ordem 2 de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ em $u \in \mathbb{R}^n$ é dado por:

$$F(x) = f(u) + \nabla f(u)(x-u) + \frac{1}{2}(x-u)^T \nabla^2 f(u)(x-u)$$

Exemplos:

a) Considerando a função $f(x, y) = 3x^5 + 2xy + y^2$, calcule o polinômio de Taylor de ordem 2 de f em $(1, 2)$.

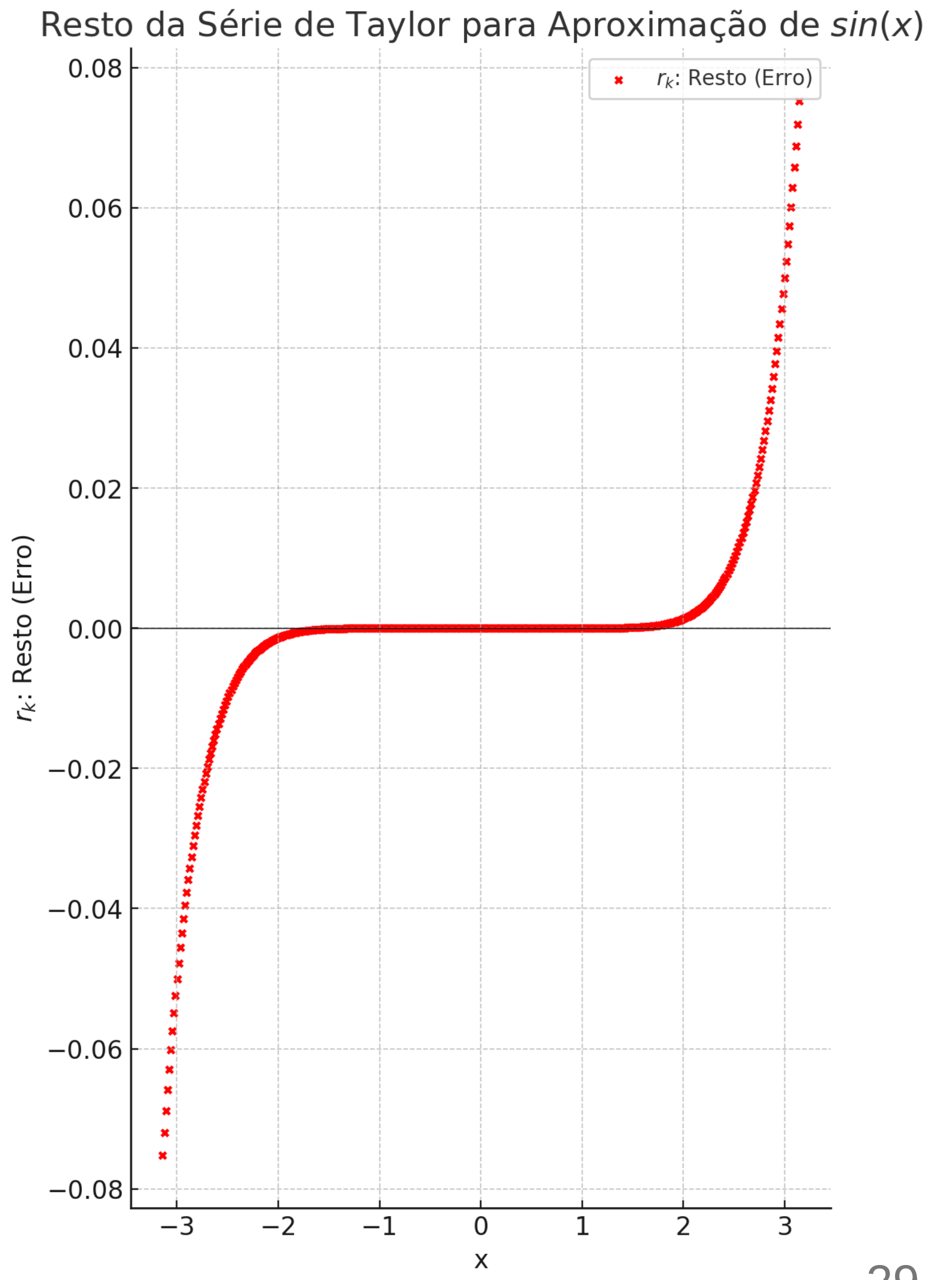
Resto da Série de Taylor

Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e seu polinômio de Taylor de grau k, F_k, no ponto $u \in \mathbb{R}$, definimos o resto de F_k por

$$r_k(x) = f(x) - F_k(x).$$

Estimando a magnitude do resto

Como o polinônio de Taylor é uma aproximação local (em torno de u), uma pergunta de interesse é sobre a magnitude do resto.



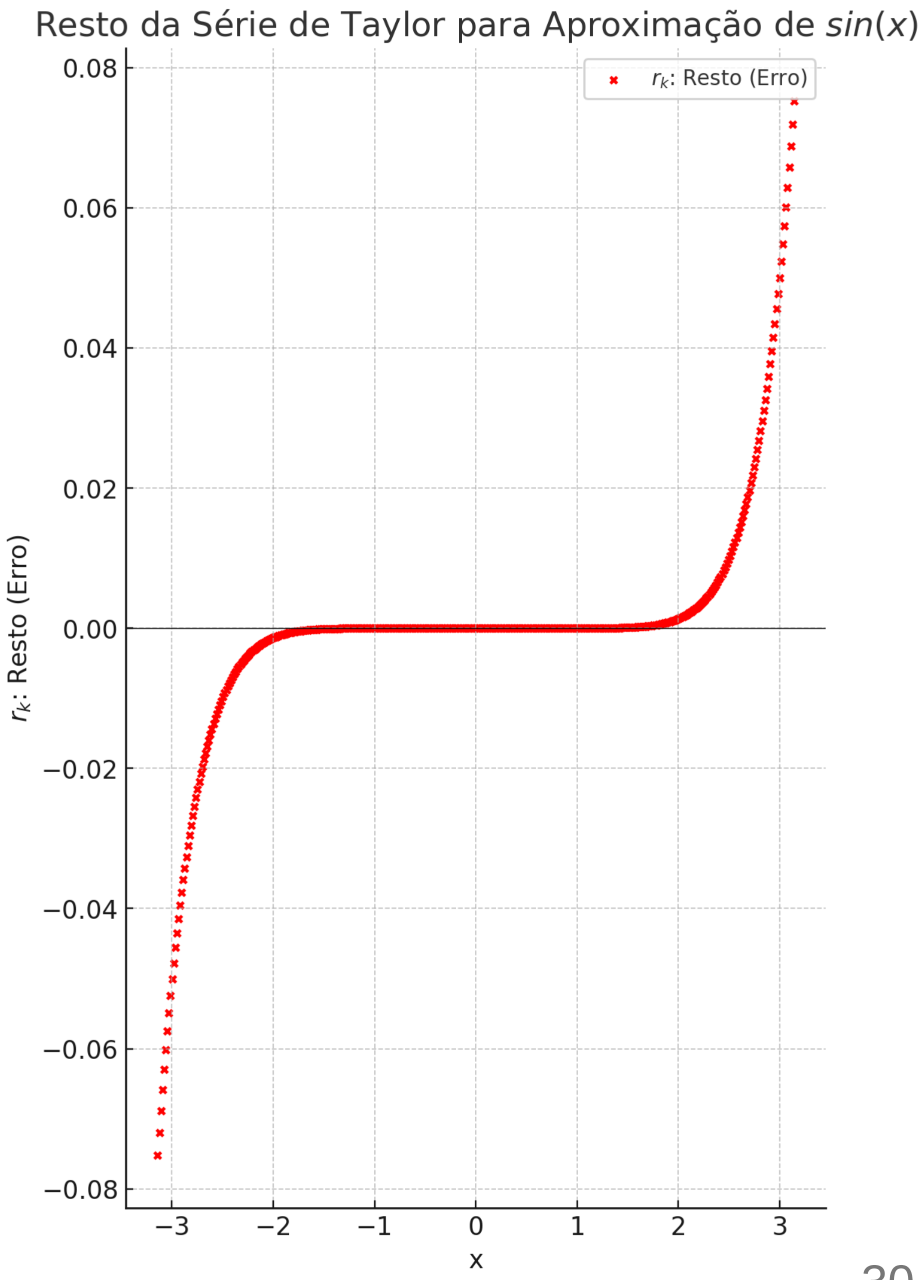
Teorema

Se todas as derivadas de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em u formam um conjunto limitado, então

$$\lim_{x \to u} r_k(x) = 0.$$

Observação

Isto significa que, na vizinhança de u, f pode ser *"substituída"* por F_k.



Prova

Primeiro, vamos provar que

$$\lim_{x \to u} |f(x) - F_\infty(x)| = 0.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to u} |f(x) - F_\infty(x)| &= \lim_{x \to u} \left| f(x) - \left(f(u) + f'(u)(x-u) + \frac{f''(u)}{2}(x-u)^2 + \dots \right) \right| \\
&= \lim_{x \to u} \left| f'(u)(x-u) + \frac{f''(u)}{2}(x-u)^2 + \dots \right|
\end{aligned}$$

Uma vez que $\{f'(u), f''(u), \dots,\}$ é um conjunto limitado, podemos considerar M tal que $|f^{(i)}(u)/i!| \leq M$ para todo i. Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to u} |f(x) - F_\infty(x)| &\leq \lim_{x\to u} \left| f'(u)(x-u) + \frac{f''(u)}{2}(x-u)^2 + \dots \right| \\
&\leq \lim_{x\to u} |f'(u)(x-u)| + \lim_{x\to u} \left| \frac{f''(u)}{2}(x-u)^2 \right| + \dots \\
&\leq \lim_{x\to u} M|x-u| + \lim_{x\to u} M|x-u|^2 + \dots \\
&\leq M\left(\lim_{x\to u} |x-u| + \lim_{x\to u} |x-u|^2 + \dots \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por isso, uma vez que

$$r_k(x) = f(x) - F_k(x),$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}\lim_{x\to u} |r_k(x)| &= \lim_{x\to u} |F_\infty(x) - F_k(x)| \\ &= \lim_{x\to u} \left| \frac{f^{k+1}(u)}{(k+1)!}(x-u)^{k+1} + \frac{f^{k+2}(u)}{(k+2)!}(x-u)^{k+2} + \dots \right|\end{aligned}$$

E, novamente pela limitação das derivadas,

$$\lim_{x\to u} |r_k(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to u} r_k(x) = 0.$$

Observação: Este teorema nos diz que, na vizinhança de u, f pode ser substituída por F_k, pois o resíduo $r_k(x)$ tende a zero quando x tende a u.

Agora, vamos estimar ***quão rápido*** $r_k(x)$ ***tende a zero***. Uma forma de fazer isso é considerar o limite

$$\lim_{x \to u} \frac{r_k(x)}{g(x)}$$

para alguma função $g(x)$.

Se a função $g(x)$ for a zero mais rápido que $r_k(x)$, então o limite será infinito, se for mais devagar, o limite será zero.

Se encontrarmos uma função $g(x)$ que ***converge na mesma magnitude que*** $r_k(x)$***, então o limite será um número finito.***

Teorema

Na vizinhança de u, o resíduo $r_k(x)$ é da ordem (mesma magnitude) de $(x-u)^{k+1}$. Ou seja,

$$\lim_{x\to u}\frac{r_k(x)}{(x-u)^{k+1}}=\frac{f^{(k+1)}(u)}{(k+1)!}=\text{constante}.$$

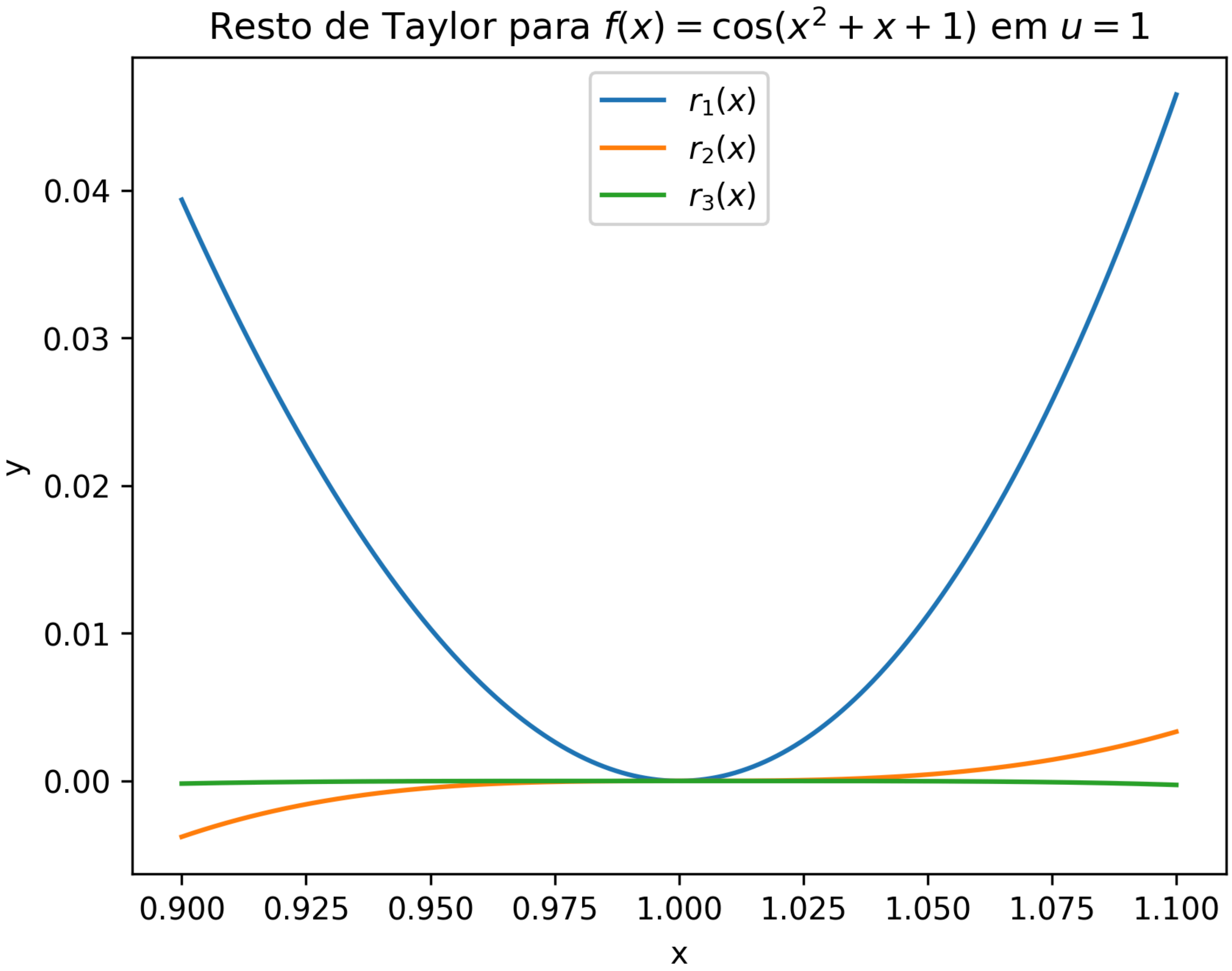
Prova

A prova é direta, pois

$$\frac{r_k(x)}{(x-u)^{k+1}}=\frac{f^{(k+1)}(x)}{(k+1)!}+\frac{f^{(k+2)}(x)}{(k+2)!}(x-u)+\dots$$

Agora, tomando o limite e considerando que as derivadas são limitadas, temos

$$\lim_{x\to u}\frac{r_k(x)}{(x-u)^{k+1}}=\frac{f^{(k+1)}(u)}{(k+1)!}.$$


Resto de Taylor para $f(x) = \cos(x^2 + x + 1)$ em $u = 1$
$r_1(x)$
$r_2(x)$
$r_3(x)$
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
y
0.900
0.925
0.950
0.975
1.000
1.025
1.050
1.075
1.100
x

Perguntas?