

Métodos Numéricos para Autovalores

Principais Teoremas

Teorema dos Círculos de Gershgorin

- Autovalores estão dentro dos discos de Gershgorin:

$$D(a_{ii}, R_i) \quad \text{com} \quad R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

- Maneira rápida de estimar onde os autovalores podem estar.

Significado:

O teorema diz que cada autovalor está em pelo menos um dos discos centrados em cada entrada da diagonal com raio igual à soma dos valores absolutos na mesma linha.

Relevância:

É uma maneira rápida de limitar ou adivinhar onde os autovalores podem estar, para que você não entre em uma busca desenfreada por eles.

Teorema Espectral

- Para matrizes reais simétricas (ou Hermitianas):
 - Autovalores são reais.
 - Autovetores podem ser escolhidos ortonormais.

Relevância:

Matrizes reais simétricas aparecem frequentemente (como matrizes de covariância em PCA). Saber que os autovalores são todos reais e os autovetores são ortonormais torna as coisas mais estáveis e fáceis de calcular.

Decomposição de Schur

- Toda matriz quadrada A pode ser transformada unitariamente:

$$A = QUQ^*$$

com U triangular superior.

- Autovalores estão na diagonal de U .

Significado:

Qualquer matriz pode ser "quase" diagonalizada. Em vez de diagonal, você obtém uma forma triangular superior com os mesmos autovalores na diagonal.

Relevância:

É a base de muitos algoritmos de autovalores (como o método QR) que dependem da redução de uma matriz a algo mais simples, mas preservando os autovalores.

Principais Algoritmos

Método da Potência

O Básico

- **Processo:** Repetidamente faça $v_{k+1} = Av_k / \|Av_k\|$.
- **Resultado:** Converge para o autovetor com o maior autovalor em magnitude.
- **Advertência:** Não funciona se seu vetor inicial for ortogonal ao autovetor principal, mas isto é improvável.

Quando Usar

- Matrizes enormes e esparsas.
- Precisa apenas do autovalor dominante.

Justificativa:

Seja $v_0 = \sum_{j=1}^n c_j v_j$, onde v_j são os autovetores de A com $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. Então:

$$A^k v_0 = \lambda_1^k \left(c_1 v_1 + \sum_{j=2}^n c_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^k v_j \right).$$

Para $k \rightarrow \infty$, os termos com $j \geq 2$ decaem, de modo que a normalização de $A^k v_0$ aproxima v_1 .

Autovalores de A^{-1}

Se A é uma matriz invertível e v é um autovetor com autovalor λ , então

$$Av = \lambda v.$$

Multiplicando ambos os lados por A^{-1} , temos

$$v = \lambda A^{-1}v \quad \implies \quad A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v.$$

Ou seja, os autovalores de A^{-1} são os inversos dos autovalores de A .

Deflação

Podemos remover a influência de um autopar já calculado da matriz para encontrar os autovalores subsequentes.

Para matrizes simétricas:

Dado um autopar (λ_1, v_1) com $\|v_1\| = 1$, defina a matriz deflacionada

$$A_1 = A - \lambda_1 v_1 v_1^T.$$

1. O autovalor λ_1 é eliminado (ou reduzido a zero) em A_1 .
2. Ao aplicarmos o Método da Potência a A_1 , obtemos o próximo autovalor dominante da matriz original.
3. Repita o processo para calcular mais autopares:

$$A_2 = A_1 - \lambda_2 v_2 v_2^T = A - \lambda_1 v_1 v_1^T - \lambda_2 v_2 v_2^T.$$

Deslocamento (Shift)

Podemos calcular um autovalor de A que não seja o dominante, modificando o espectro (distribuição dos autovalores).

Justificativa

Ideia: Para um dado deslocamento escalar σ , forme a matriz deslocada

$$B = A - \sigma I.$$

Resolva

$$(A - \sigma I)^{-1} x_{k+1} = x_k,$$

O autovalor mais próximo de σ será o autovalor dominante de $(A - \sigma I)^{-1}$.

Após a convergência, recupere o autovalor de A através de

$$\lambda \approx \sigma + \frac{1}{\mu},$$

onde μ é o autovalor dominante de $(A - \sigma I)^{-1}$.

Algoritmo QR

A Ideia

1. Fatore $A_k = Q_k R_k$.
2. Forme $A_{k+1} = R_k Q_k$.
3. Repita até que A_k seja triangular superior (autovalores na diagonal).

Relevância

- Padrão ouro para matrizes densas.
- Detalhe de implementação: "Shifts" aceleram a convergência.

Justificativa

A cada iteração, temos

$$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^* A_k Q_k,$$

o que indica uma similaridade:

$$A_{k+1} \sim A_k$$

Se A for diagonalizável, o processo converge para uma matriz triangular U com os autovalores de A na diagonal.

Caso: 2×2

Suponha

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \epsilon \\ \delta & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

com $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ e ϵ, δ pequenos. Desejamos rastrear a entrada subdiagonal δ .

Passo 1. Fatoração QR via uma Rotação de Givens:

Defina $r = \sqrt{\lambda_1^2 + \delta^2}$, $\cos \theta = \frac{\lambda_1}{r}$, $\sin \theta = \frac{\delta}{r}$, e faça

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Então, a fatoração é

$$A = QR \quad \text{com} \quad R = Q^T A.$$

Um breve cálculo resulta em:

- $r_{11} = \cos \theta \lambda_1 + \sin \theta \delta = r$,
- $r_{21} = -\sin \theta \lambda_1 + \cos \theta \delta = 0$ (por construção),
- $r_{22} = -\sin \theta \epsilon + \cos \theta \lambda_2$.

Passo 2. Forme a Próxima Iteração:

A próxima iteração é definida como $A' = RQ$.

Multiplicando, a entrada $(2, 1)$ de A' é $\delta' = r_{22} \sin \theta$.

Passo 3. Aproximação:

Assumindo que ϵ é pequeno, aproxime

$$r_{22} \approx \cos \theta \lambda_2.$$

Assim,

$$\delta' \approx \cos \theta \lambda_2 \sin \theta.$$

Usando

$$\sin \theta = \frac{\delta}{r} \quad \text{e} \quad \cos \theta = \frac{\lambda_1}{r},$$

e notando que para δ pequeno, $r \approx \lambda_1$, obtemos $\delta' \approx \lambda_2 \frac{\delta}{\lambda_1}$.

Tomando valores absolutos, concluímos que

$$|c'| = |\delta'| \approx |c| \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|.$$

Como $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, temos uma contração do termo $c = A_{2,1}$ localizado abaixo da diagonal.

Método de Jacobi (para simétricas)

Esboço

- Rotacione pares de eixos para zerar as entradas fora da diagonal.
- Converge para uma matriz diagonal com autovalores na diagonal.

Uso Real

- Fácil de entender para ensino.
- Não é o mais rápido para problemas de grande escala, mas conceitualmente simples.

Iteração do Quociente de Rayleigh

Passos Principais

- Atualize a estimativa do autovalor via $\rho(x) = \frac{x^T Ax}{x^T x}$.
- Ajuste o shift em cada iteração.

Desempenho

- Convergência cúbica perto de um autovalor real (rápido, mas cada iteração pode ser cara).
- Bom quando você precisa de alta precisão para um autopar.

Método de Lanczos (para simétricas grandes)

Destaques

- Constrói um subespaço de Krylov: $\mathcal{K}_m(A, v) = \{v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v\}$.
- Produz uma matriz tridiagonal cujos autovalores se aproximam dos de A .

Caso de uso

- Eficiente para matrizes esparsas e grandes.
- Geralmente usado para obter apenas os k autovalores principais.

Método de Arnoldi (não simétricas)

O que é?

- Generaliza Lanczos para matrizes não simétricas (ou não Hermitianas).
- Constrói uma matriz de Hessenberg superior que se aproxima dos autovalores (valores de Ritz).

Caso de uso

- Problemas grandes, esparsos e não simétricos (como matrizes de adjacência de grafos direcionados).

Conclusão

- Métodos da Potência / Rayleigh: abordagens iterativas "atire para o topo".
- QR: robusto para espectro completo, usado em bibliotecas padrão.
- Lanczos / Arnoldi: mantenha barato e aproxime para matrizes grandes.
- Teoria espectral: real simétrico é o melhor cenário. Não simétrico precisa de cautela extra.