Decomposição em Valores Singulares

Singular Value Decomposition (SVD)

Construção de uma base ortonormal

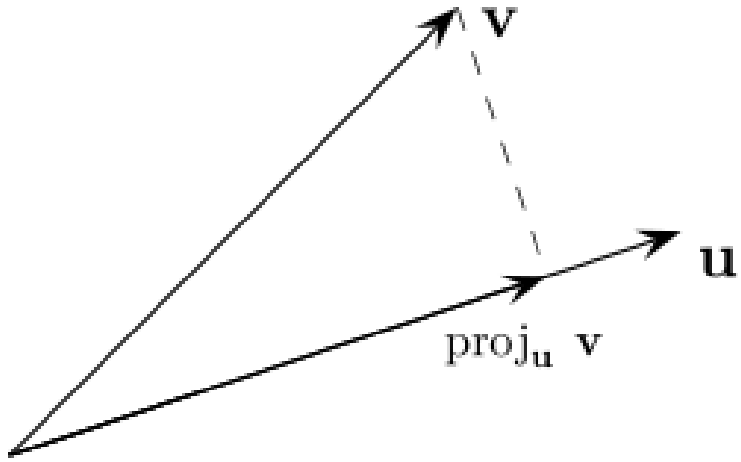
Suponha que você tenha um conjunto de $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de vetores independentes em um espaço vetorial de dimensão m, com $n \leq m$.

Você quer construir um conjunto $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ tal que

$$span(U) = span(V).$$

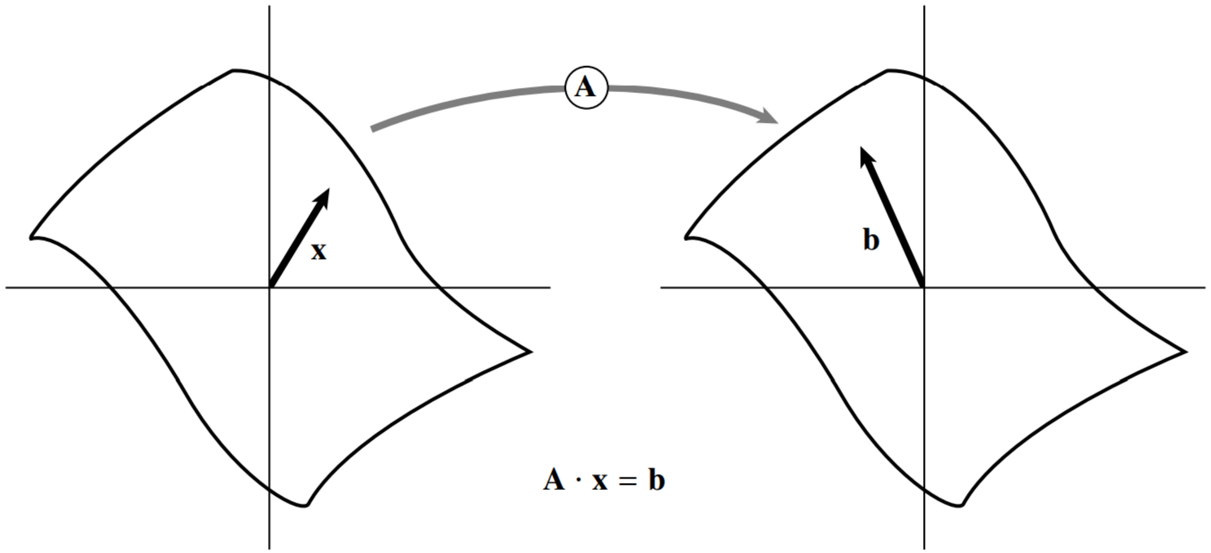
Podemos utilizar Gram-Schmidt, mas ele é muito ruim devido à acumulação de erros de arredondamento.

A maneira correta de resolver este problema é pela SVD.

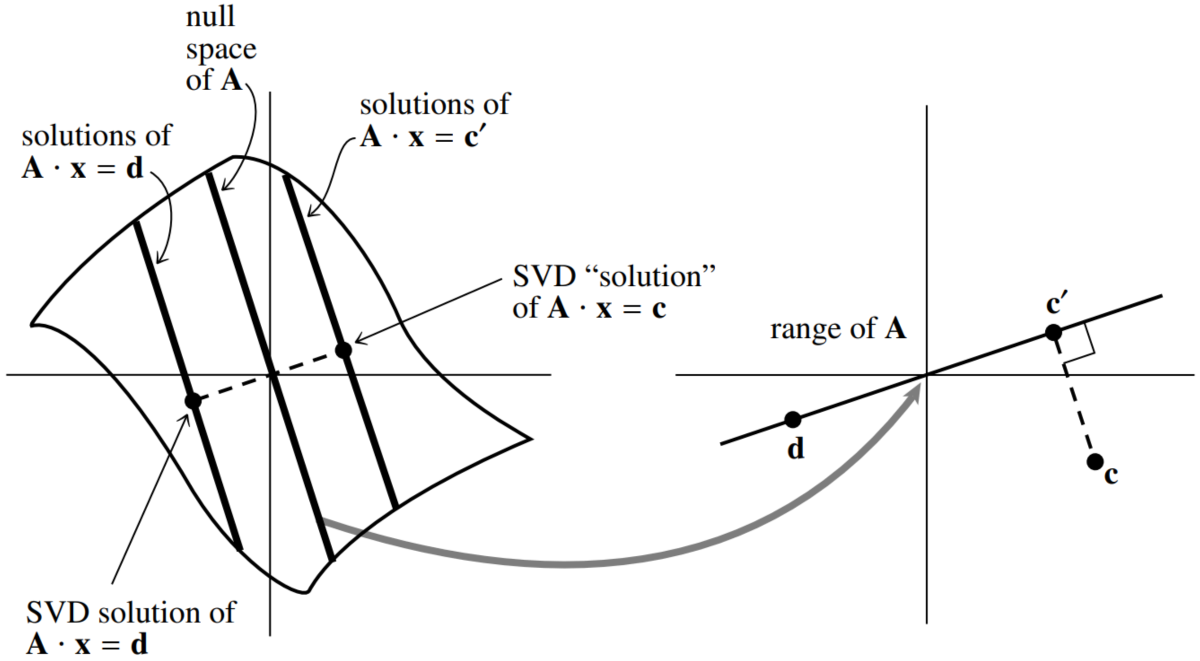


Press, William H. Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing. Cambridge university press, 2007.

Uma **matriz não singular** A mapeia um espaço vetorial em outro de mesma dimensão. O vetor x é mapeado em b, de forma que x satisfaz a equação $Ax = b$.



Press, William H. Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing. Cambridge university press, 2007.



Uma **matriz singular** A mapeia um espaço vetorial em outro de dimensão menor. Aqui, o plano é mapeado em uma linha.

Press, William H. Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing. Cambridge university press, 2007.

Range (Imagem)

Seja A uma matriz $m \times n$. O **range** de A é o conjunto de todos os vetores b que podem ser escritos como Ax para algum $x \in \mathbb{R}^n$.

Null Space (Núcleo)

Seja A uma matriz $m \times n$. O **null space** de A é o conjunto de todos os vetores $x \in \mathbb{R}^n$ tais que $Ax = 0$.

Rank (Posto)

O **rank** de A é o número de linhas (ou colunas) linearmente independentes de A.

Teorema 4.1.1 (SVD)

Seja A uma matriz não-nula $m \times n$ com rank (posto) r. Então, A pode ser expressa como um produto de três matrizes:

$$A = U\Sigma V^T,$$

onde $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são matrizes ortogonais, e $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é uma matriz diagonal com entradas não-negativas na diagonal.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sigma_r & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix},$$

com $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mapeia vetores $x \in \mathbb{R}^n$ em vetores $Ax \in \mathbb{R}^m$.

O Teorema 4.1.1 afirma que existe uma base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ e uma base ortonormal $\{u_1, \ldots, u_m\}$ de $\mathbb{R}^m$ tais que

$$Av_i = \sigma_i u_i, \quad i = 1, \ldots, r,$$

com $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$.

Os escalares (números) σ_i são os valores singulares de A e os vetores u_i e v_i são os vetores singulares de A.

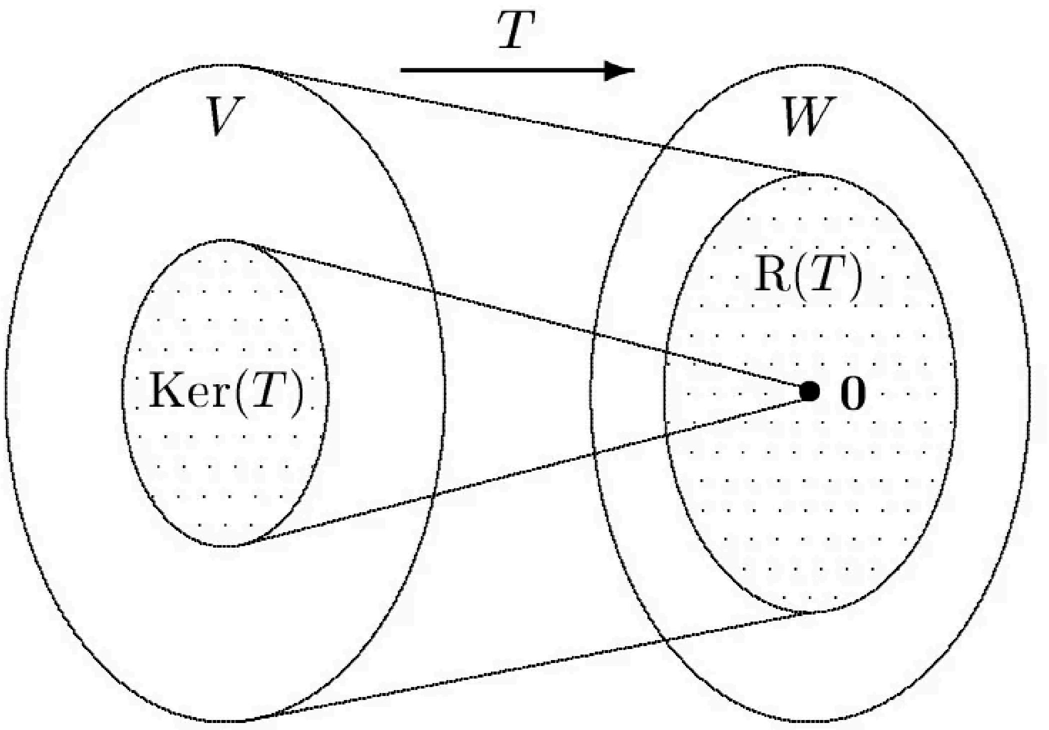
Consequências SVD

$$
\begin{aligned}
range(A) &= span\{u_1, \ldots, u_r\} \\
null(A) &= span\{v_{r+1}, \ldots, v_n\} \\
range(A^T) &= span\{v_1, \ldots, v_r\} \\
null(A^T) &= span\{u_{r+1}, \ldots, u_m\}
\end{aligned}
$$

Teorema: Núcleo e Imagem

Seja A uma matriz $m \times n$. Então,

$\dim(\text{range}(A)) + \dim(\text{null}(A)) = m.$



PERGUNTAS?