Decomposição em Valores Singulares

Singular Value Decomposition (SVD)

Construção de uma base ortonormal

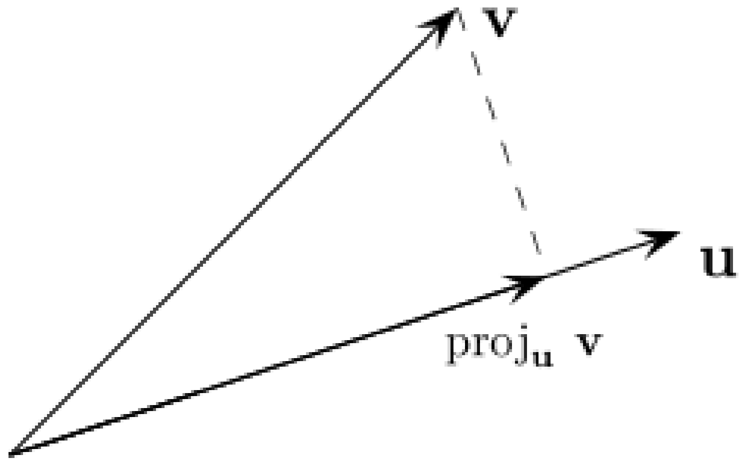
Suponha que você tenha um conjunto $V = \{v_1, ..., v_n\}$ de vetores independentes em um espaço vetorial de dimensão m, com $n \leq m$.

Você quer construir um conjunto $U = \{u_1, ..., u_n\}$ ortogonal tal que

$$span(U) = span(V).$$

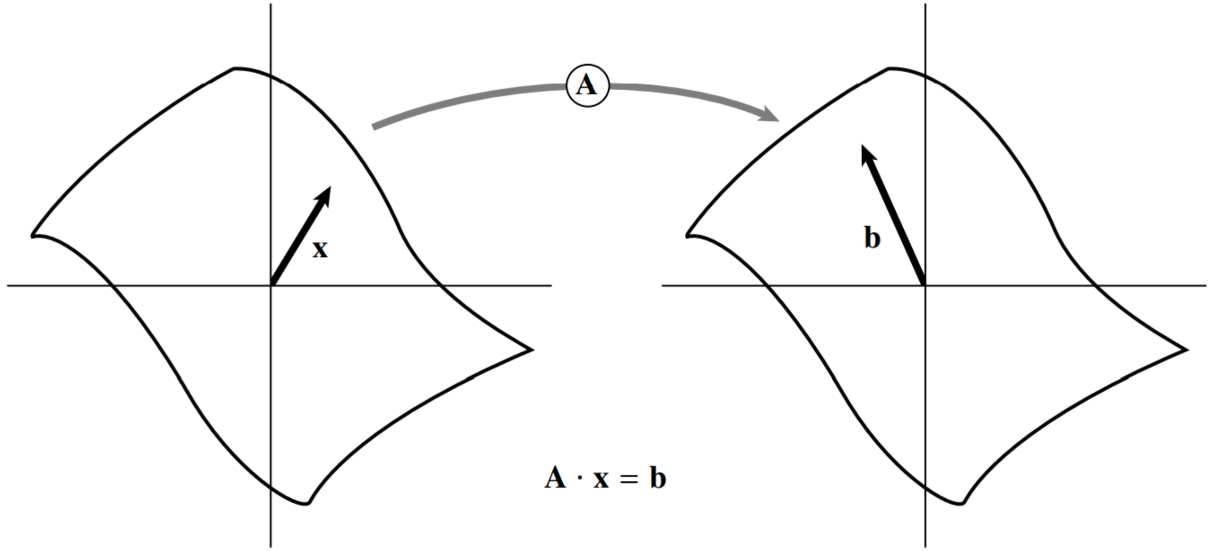
Podemos utilizar Gram-Schmidt, mas ele é muito ruim devido à acumulação de erros de arredondamento.

A maneira correta de resolver este problema é pela SVD.

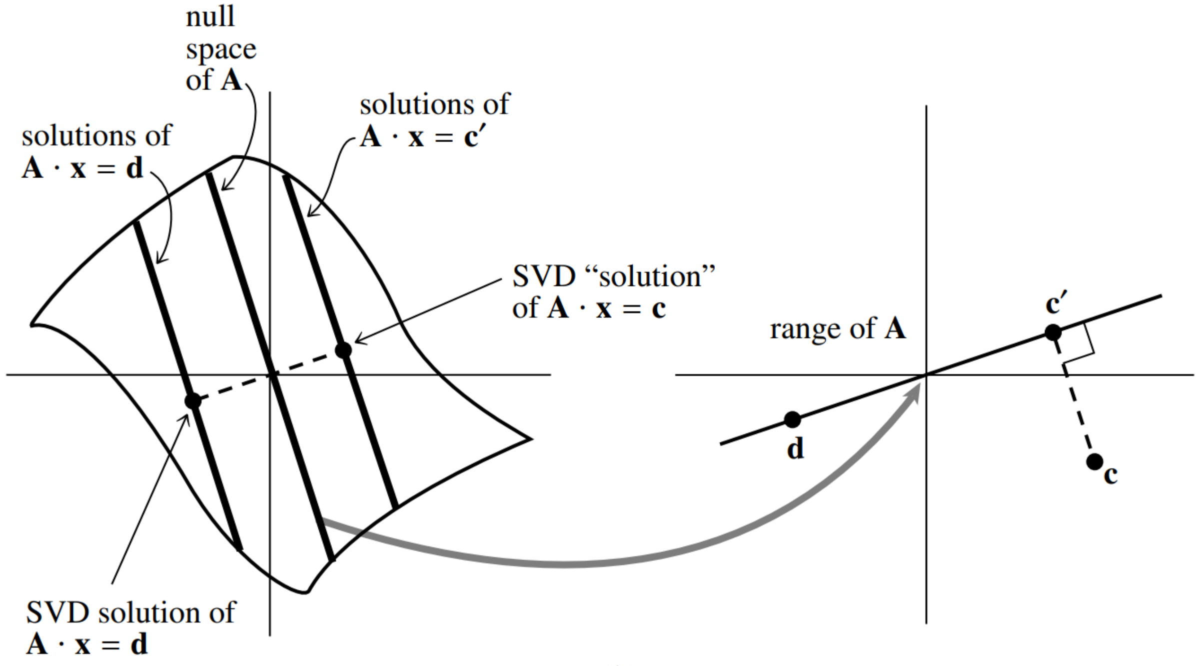


Press, William H. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing, 3rd Edition. Cambridge University Press, 2007.

Uma **matriz não singular** $A_{n \times n}$ mapeia um espaço vetorial em outro de mesma dimensão. O vetor x é mapeado em b, de forma que x satisfaz a equação $Ax = b$.



Press, William H. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing, 3rd Edition. Cambridge University Press, 2007.



Uma **matriz singular** A mapeia um espaço vetorial em outro de dimensão menor. Aqui, o plano é mapeado em uma linha.

Press, William H. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing, 3rd Edition. Cambridge University Press, 2007.

Range (Imagem)

Seja A uma matriz $m \times n$. O **range** de A é o conjunto de todos os vetores b que podem ser escritos como Ax para algum $x \in \mathbb{R}^n$.

Null Space (Núcleo)

Seja A uma matriz $m \times n$. O **null space** de A é o conjunto de todos os vetores $x \in \mathbb{R}^n$ tais que $Ax = 0$.

Rank (Posto)

O **rank** de A é o número de linhas (ou colunas) linearmente independentes de A.

Teorema 4.1.1 (SVD)

Seja A uma matriz não-nula $m \times n$ com rank (posto) r. Então, A pode ser expressa como um produto de três matrizes:

$$A = U\Sigma V^T,$$

onde $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são matrizes ortogonais, e $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é uma matriz diagonal com entradas não-negativas.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sigma_r & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix},$$

com $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$

Significado da SVD

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mapeia vetores $x \in \mathbb{R}^n$ em vetores $Ax \in \mathbb{R}^m$.

O Teorema 4.1.1 afirma que existe uma base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ e uma base ortonormal $\{u_1, \ldots, u_m\}$ de $\mathbb{R}^m$ tais que

$$Av_i = \sigma_i u_i, \quad i = 1, \ldots, r,$$

com $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$.

Os escalares (números) σ_i são os **valores singulares** de A e os vetores u_i e v_i são os **vetores singulares** de A.

Geometricamente, o teorema afirma que qualquer matriz A pode ser decomposta em uma rotação seguida de uma dilatação (scaling) seguida de outra rotação.

Consequências SVD

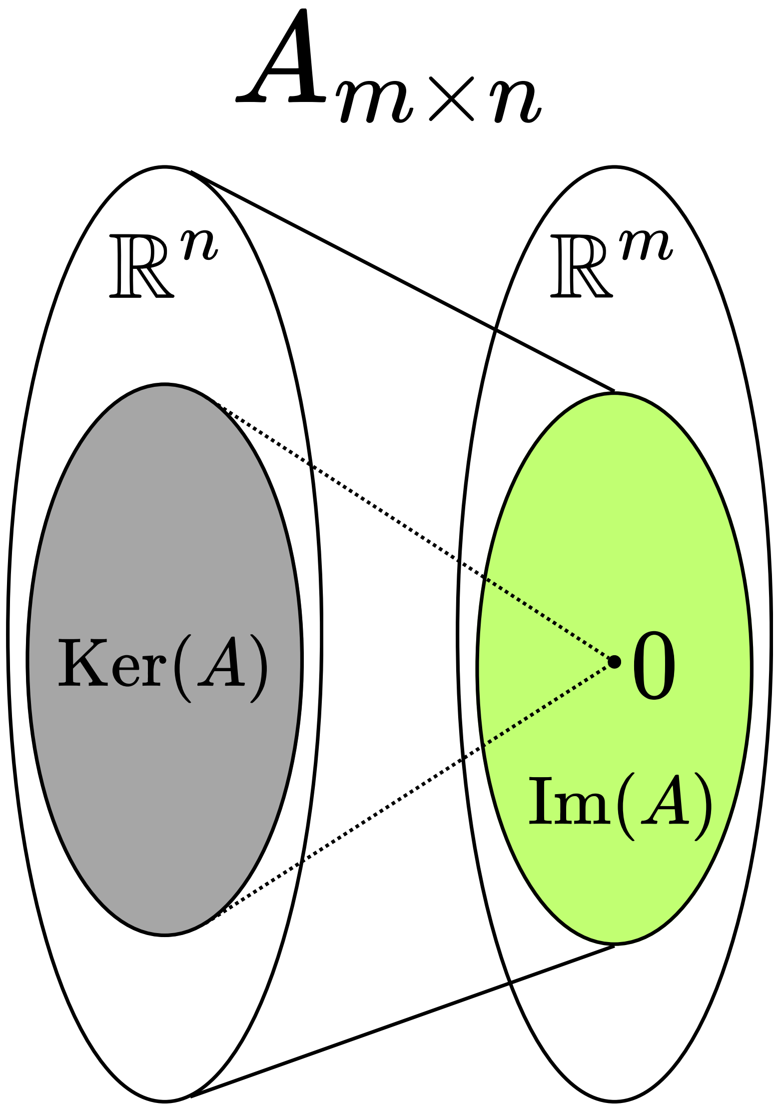
Seja $AV = U\Sigma$ a SVD de A. Então,

$$\begin{aligned} range(A) &= span\{u_1, \ldots, u_r\} \\ null(A) &= span\{v_{r+1}, \ldots, v_n\} \\ range(A^T) &= span\{v_1, \ldots, v_r\} \\ null(A^T) &= span\{u_{r+1}, \ldots, u_m\} \end{aligned}$$

Teorema: Núcleo e Imagem

Seja A uma matriz $m \times n$. Então,

$\dim(\text{range}(A)) + \dim(\text{null}(A)) = m.$



Relação entre SVD e Autovalores de $A^T A$

Se $A = U \Sigma V^T$ é a SVD de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, então

$$
\begin{aligned}
A^T A &= (V \Sigma^T U^T) U \Sigma V^T \\
&= V \Sigma^T \Sigma V^T
\end{aligned}
$$

E, portanto,

$$
A^T A V = V \Sigma^T \Sigma = V \operatorname{diag}(\sigma^2),
$$

onde $\operatorname{diag}(\sigma^2)$ é a matriz diagonal com os quadrados dos valores singulares de A
.

Sendo assim, os autovalores de $A^T A$ são os quadrados dos valores singulares de A.

Algoritmo SVD

Um algoritmo ingênuo para calcular a SVD é reduzir o problema a um problema de autovalores da matriz simétrica $A^T A$.

Esta abordagem é simples, mas não é numericamente eficiente nem estável.

```
def naive_svd(A):
  ATA = A.T * A
  # autovalores (decresc.) ordenados
  D2, V = naive_eigenvalues(ATA)
  D = np.sqrt(D2)
  UD = A * V
  U = UD * inv(D)
  return U, D, V.T
```

Um versão mais eficiente do SVD está disponível no LAPACK (https://www.netlib.org/lapack/lug/node53.html).

Aplicações e Exercícios

1. Calcule a SVD da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.
2. Uma matriz retangular $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ não tem inversa, mas podemos construir a sua pseudo-inversa $A^{+} = V\Sigma^{+}U^{T}$, onde Σ^{+} é a matriz diagonal com os inversos dos valores singulares não-nulos de A. Calcule a pseudo-inversa de A e veja se ela é uma boa aproximação de inversa de A.
3. Escolha uma imagem e obtenha sua representação matricial $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Depois, calcule a SVD de A e, finalmente, exclua os menores valores singulares e reconstrua a imagem reduzida.

PERGUNTAS?