Sensibilidade de Sistemas Lineares

Efeitos dos Erros de Arredondamento

Errar não é só humano

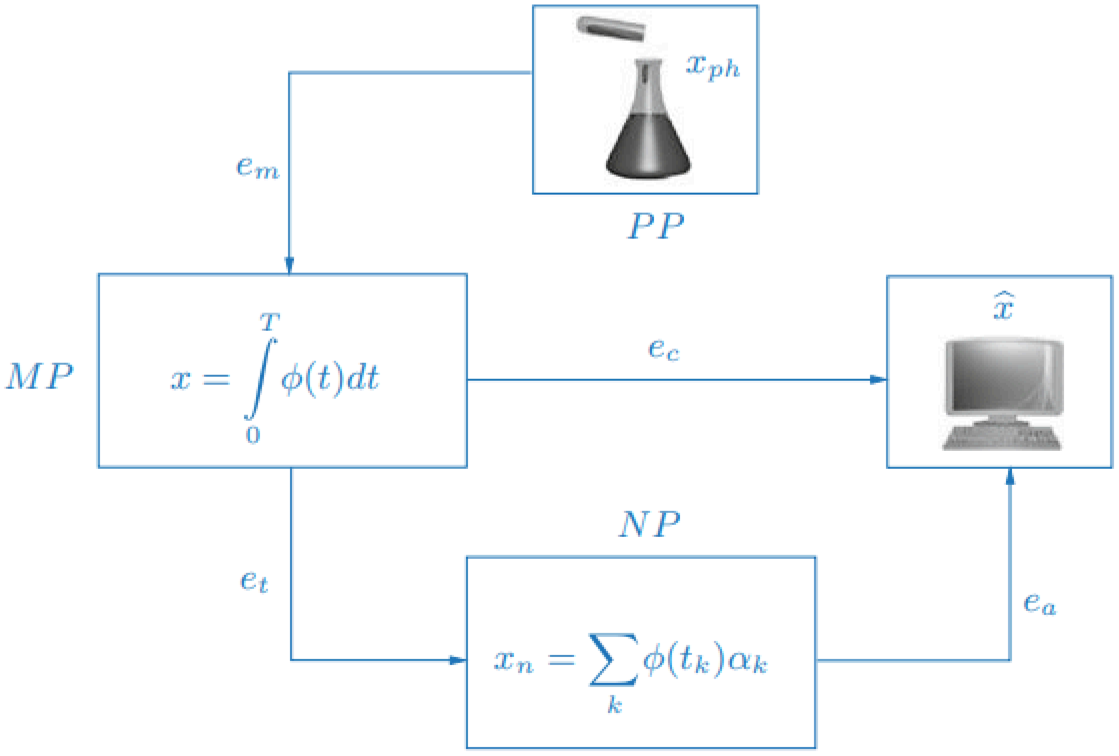

Fig. 1.6. Types of errors in a computational process

1. **Erro do Modelo** (e_m)
   Ocorre ao simplificar a realidade física (PP) em um modelo matemático (MP). Está além do controle computacional.

Errar não é só humano

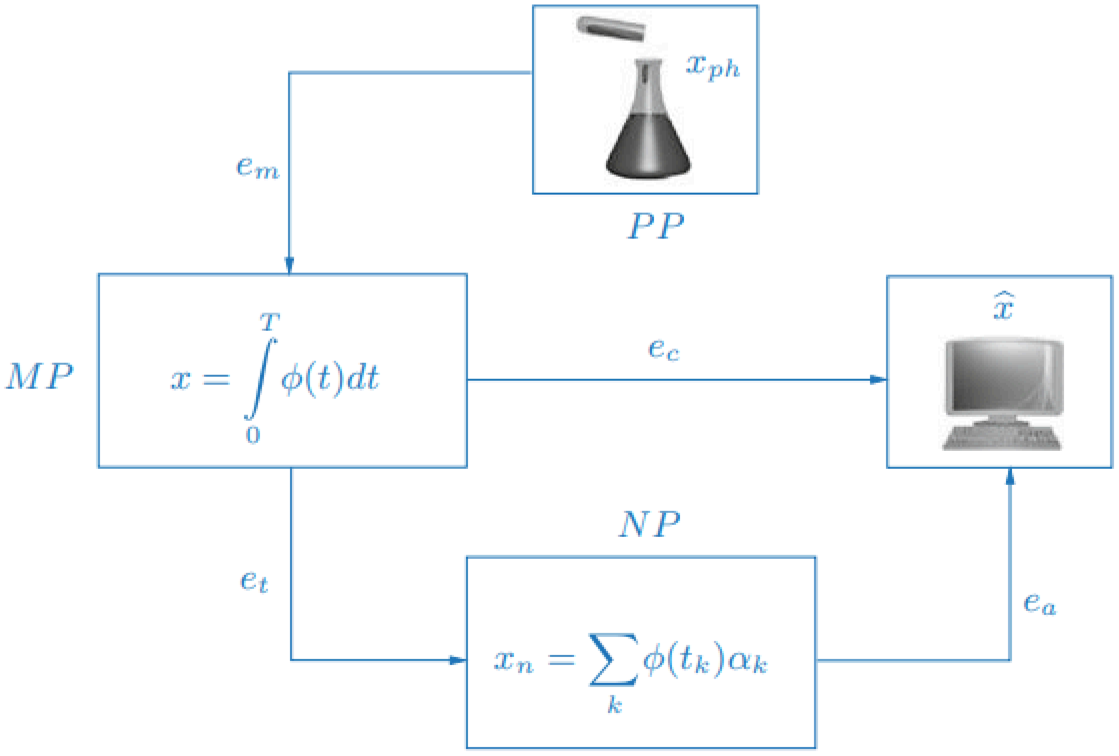

Fig. 1.6. Types of errors in a computational process

2. **Erro Algorítmico** (e_a)
   Erros introduzidos durante a resolução computacional do modelo matemático, principalmente devido a arredondamentos na representação numérica.

Errar não é só humano

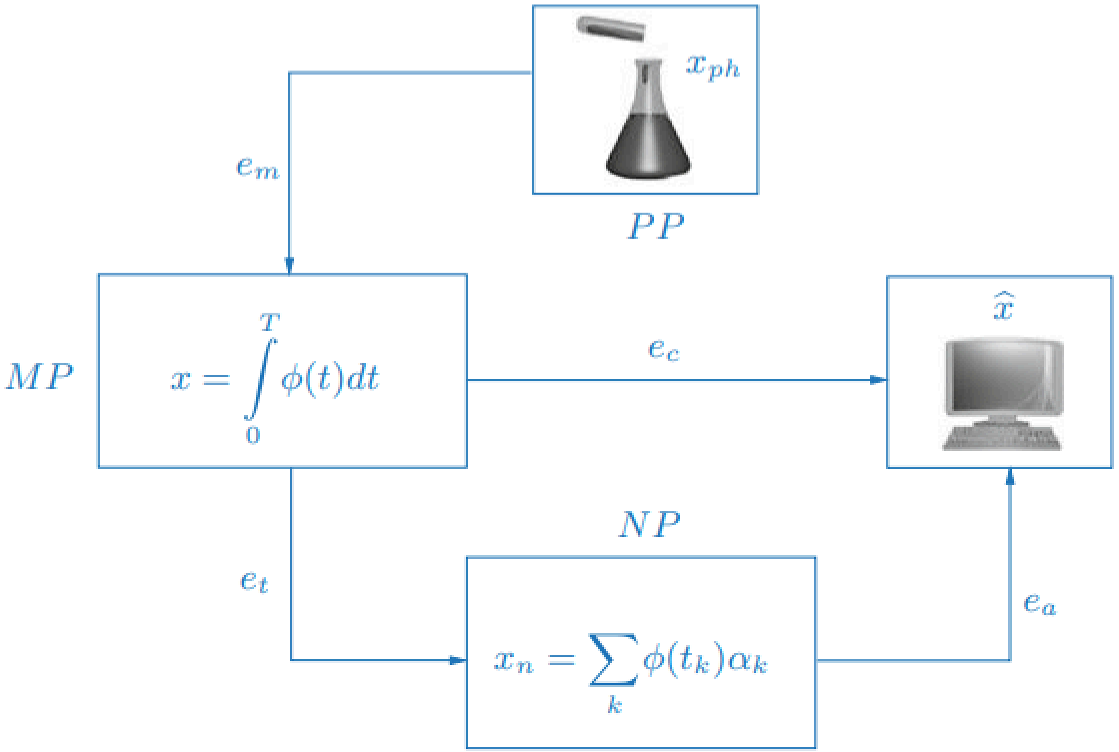

Fig. 1.6. Types of errors in a computational process

3. **Erro de Truncamento** (e_t)
   Erros introduzidos ao aproximar sequências infinitas por operações finitas. Ocorre quando a solução numérica (x_n) difere da solução exata (x).

Errar não é só humano

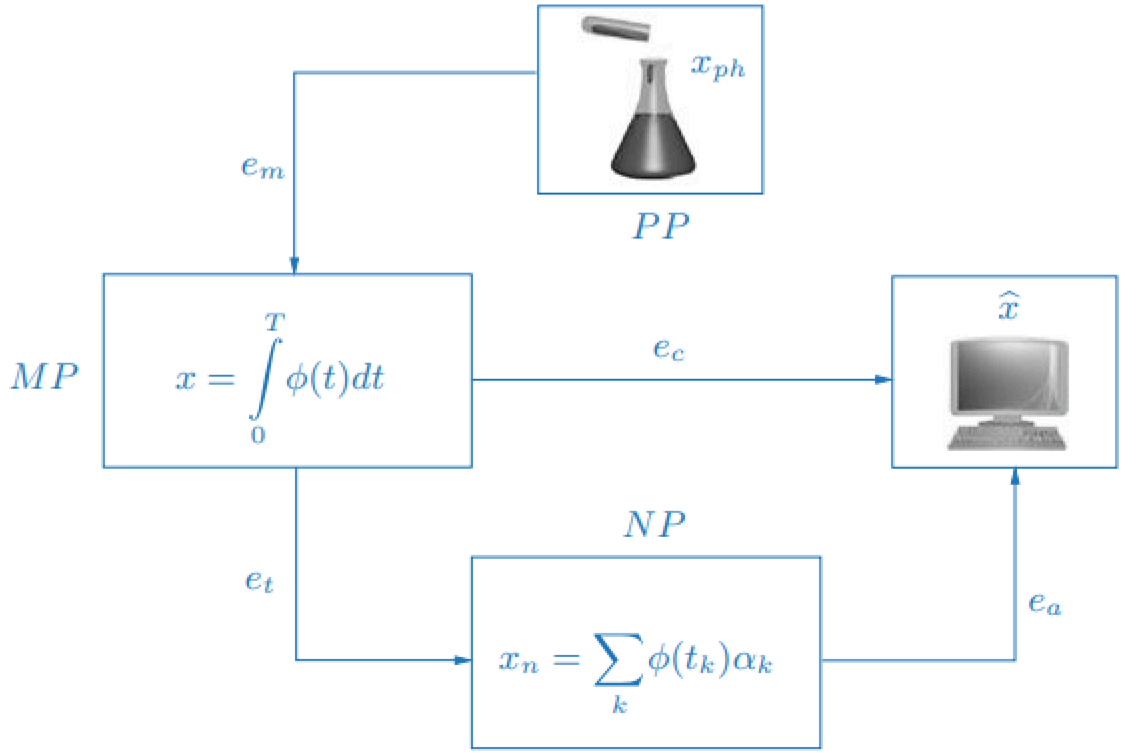

Fig. 1.6. Types of errors in a computational process

4. **Erro Computacional** (e_c)
   O erro total que surge a partir da soma do erro algorítmico (e_a) e do erro de truncamento (e_t).

   Este é o erro de interesse ao resolver problemas numéricos.

Quarteroni, Alfio, Fausto Saleri, and Paola Gervasio. Scientific computing with MATLAB and Octave. Vol. 3. Berlin: Springer, 2006.

Caso de estudo

Para a matriz A, calcule a solução dos sistemas lineares $Ax = b$ e $A\hat{x} = \hat{b}$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1999 \\ 1998 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} 1999 \\ 1998.001 \end{bmatrix}.$$

Escrevendo $\hat{x} = x + \delta x$ e $\hat{b} = b + \delta b$, compare as variações relativas $\dfrac{\delta x}{x}$ e $\dfrac{\delta b}{b}$.

Norma de um vetor

Uma norma (ou **norma vetorial**) em $\mathbb{R}^n$ é uma função que atribui a cada $x \in \mathbb{R}^n$ um número real não-negativo $\|x\|$, tal que para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ e todos $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. **Positividade**
   $\|x\| \geq 0$ para todo x, e $\|x\| = 0$ se e somente se $x = 0$
2. **Homogeneidade absoluta**
   $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
3. **Desigualdade triangular**
   $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Exemplos

1. Norma euclidiana

$$||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

2. Norma de Manhattan (ou *norma do valor absoluto* ou *norma 1*)

$$||x||_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

3. Norma infinita

$$||x||_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|)$$

4. Norma p

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

Norma de uma matriz

Para todos $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. **Positividade**
   $\|A\| \geq 0$ para todo A, e $\|A\| = 0$ se e somente se $A = 0$
2. **Homogeneidade absoluta**
   $\|A\alpha\| = |\alpha|\|A\|$
3. **Desigualdade triangular**
   $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
4. **Submultiplicatividade**
   $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Exemplos

1. Norma de Frobenius

$$||A||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

2. Norma de Schatten p

$$||A||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^p\right)^{1/p},$$

onde σ_i são os valores singulares de A.

Norma Matricial Induzida

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A norma induzida por uma norma vetorial $\|\cdot\|$ é definida como

$$||A|| = \max_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}.$$

A norma induzida mede a amplificação máxima de um vetor x por uma matriz A.

Teorema 2.1.26

A norma matricial induzida é uma norma matricial.

Teorema 2.1.24

Uma norma vetorial e sua norma matricial induzida satisfazem a desigualdade

$$||Ax|| \leq ||A||||x||$$

para todo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

Além disso, sempre existe um vetor x tal que $||Ax|| = ||A||||x||$.

Retornando ao caso de estudo

1. $Ax = b$ e $A(x + \delta x) = b + \delta b$ implica em $A\delta x = \delta b$, portanto $\delta x = A^{-1}\delta b$.
2. $Ax = b$ implica em $x = A^{-1}b$.
3. Sabendo que $||Az|| \leq ||A||||z||$ para todo $z \in \mathbb{R}^n$, temos

$$||A^{-1}\delta b|| \leq ||A^{-1}||||\delta b|| \quad \text{e} \quad ||A^{-1}b|| \leq ||A^{-1}||||b||.$$

Portanto,

$$\frac{||\delta x||}{||x||} \leq ||A||||A^{-1}||\frac{||\delta b||}{||b||}.$$

Número de Condição

Seja A uma matriz não singular. O número de condição de A é definido como

$$\kappa(A) = ||A||||A^{-1}||.$$

1. *O número de condição mede a sensibilidade da solução de um sistema linear às variações dos dados.*
2. *Em um sistema linear com número de condição alto, pequenas variações nos dados podem causar grandes variações na solução.*

Retornando ao caso de estudo

Calcule o número de condição da matriz A para as normas de Frobenius.

Exemplo: Matrizes de Hilbert

Os exemplos mais famosos de matrizes mal condicionadas são as **matrizes de Hilbert**, definidas por $h_{ij} = 1/(i + j - 1)$.

Essas matrizes são simétricas, podem ser mostradas como positivas definidas e se tornam cada vez mais mal condicionadas à medida que n aumenta. Por exemplo, $\kappa_2(H_4) \approx 1.6 \times 10^4$ e $\kappa_2(H_8) \approx 1.5 \times 10^{10}$.

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix},$$

PERGUNTAS?