# Métodos Numéricos para Autovalores

# Principais Teoremas

## Teorema dos Círculos de Gershgorin

- Autovalores estão dentro dos discos de Gershgorin:

$$D(a_{ii}, R_i) \quad \text{com} \quad R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

- Maneira rápida de estimar onde os autovalores podem estar.

**Significado:**
O teorema diz que cada autovalor está em pelo menos um dos discos centrados em cada entrada da diagonal com raio igual à soma dos valores absolutos na mesma linha.

**Relevância:**
É uma maneira rápida de limitar ou adivinhar onde os autovalores podem estar, para que você não entre em uma busca desenfreada por eles.

**Demonstração**

Considere:

1. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$,
2. $\lambda$ um autovalor de $A$,
3. $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ um autovetor associado, com $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

Selecione um índice $k$ tal que:

$$|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Assim, temos:

$$|x_j| \leq |x_k| \quad \text{para todo } j = 1, 2, \ldots, n.$$

## Aplicação na Equação dos Autovalores

Pela definição de autovalor, temos $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$.

Para a $k$-ésima linha, a equação se torna:

$$\lambda x_k = a_{kk} x_k + \sum_{j \neq k} a_{kj} x_j.$$

Ou de forma equivalente:

$$(\lambda - a_{kk}) x_k = \sum_{j \neq k} a_{kj} x_j.$$

Dividindo ambos os lados por $x_k$ (lembrando que $x_k \neq 0$):

$$\lambda - a_{kk} = \sum_{j \neq k} a_{kj} \frac{x_j}{x_k}.$$

## Aplicando a Desigualdade Triangular

Tomando o valor absoluto em ambos os lados:

$$|\lambda - a_{kk}| = \left| \sum_{j \neq k} a_{kj} \frac{x_j}{x_k} \right|$$

Usando a desigualdade triangular:

$$|\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \left| \frac{x_j}{x_k} \right|.$$

Como $|x_j / x_k| \leq 1$ para todo $j$:

$$|\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}| = R_k.$$

**Teorema Espectral**

- Para matrizes reais simétricas (ou Hermitianas):
  - Autovalores são reais.
  - Autovetores podem ser escolhidos ortonormais.

**Relevância:**
Matrizes reais simétricas aparecem frequentemente (como matrizes de covariância em PCA). Saber que os autovalores são todos reais e os autovetores são ortonormais torna as coisas mais estáveis e fáceis de calcular.

## Demonstração

***Teorema Fundamental da Álgebra***

Todo polinômio de grau $n$ com coeficientes complexos, que deve possuir pelo menos uma raiz.

***Teorema de Existência de Autovalores***

Para qualquer matriz quadrada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, existe pelo menos um número $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\det(A - \lambda I) = 0$.

Com base nestes teoremas, temos:

1. **Existência de um autovalor real:**
   Como $A$ é simétrica, pelo teorema de existência, existe um autovalor real $\lambda$ com um autovetor unitário $v$, isto é,

$$Av = \lambda v \quad \text{e} \quad \|v\| = 1.$$

2. **Redução para um subespaço:**
   Seja $v$ um autovetor unitário de $A$ associado ao autovalor $\lambda$. Definimos o subespaço $V = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T v = 0\}$.
   Usando a simetria de $A$ e o fato de que $Av = \lambda v$, podemos escrever:
$$v^T(Ax) = (v^T A)x = (Av)^T x = (\lambda v)^T x = \lambda(v^T x) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

- Ou seja, $V$ é invariante com respeito a $A$, isto é, se $x \in V$, então $Ax \in V$.
- Agora, restrinja $A$ a $V$ para obter uma matriz simétrica $A|_V$ de dimensão $n-1$.

3. **Aplicação de Indução:**
   Pela hipótese de indução, $A|_V$ possui uma base ortonormal de autovetores. Juntando $v$ com essa base, obtemos um conjunto ortonormal de $n$ autovetores de $A$.

4. **Diagonalização Ortogonal:**
   Definindo $Q$ como a matriz cujas colunas são esses autovetores, temos
   $$Q^T AQ = \Lambda,$$
   onde $\Lambda$ é a matriz diagonal com os autovalores reais de $A$.

## Decomposição de Schur

- Toda matriz quadrada $A$ pode ser transformada unitariamente:

  $$A = QUQ^*$$

  com $U$ triangular superior.
- Autovalores estão na diagonal de $U$.

**Significado:**
Qualquer matriz pode ser "quase" diagonalizada. Em vez de diagonal, você obtém uma forma triangular superior com os mesmos autovalores na diagonal.

**Relevância:**
É a base de muitos algoritmos de autovalores (como o método QR) que dependem da redução de uma matriz a algo mais simples, mas preservando os autovalores.

## Demonstração

1. **Existência de um autovalor:**
   Seja $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pelo teorema da existência de autovalores, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ e um autovetor não nulo $v$. Normalizando, podemos assumir que $\|v\| = 1$.

2. **Construção de uma base ortonormal:**
   Complete $v$ para uma base ortonormal de $\mathbb{C}^n$. Seja $Q_1$ a matriz unitária formada por essa base, onde a primeira coluna é $v$.

3. **Transformação unitária:**
   Considere a transformação:

$$Q_1^* A Q_1 = \begin{bmatrix} \lambda & w^* \\ 0 & A_1 \end{bmatrix},$$

   onde $w \in \mathbb{C}^{n-1}$ e $A_1 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$.

4. **Aplicação de indução:**
   Pelo princípio da indução, existe uma matriz unitária $Q_2 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ que triangulariza $A_1$, isto é,
   $$Q_2^* A_1 Q_2 = U_1,$$
   onde $U_1$ é triangular superior.
5. **Construção final:**
   Defina
   $$Q = \; Q_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} \lambda & * \\ 0 & U_1 \end{bmatrix}.$$
   Assim, $Q$ é unitária com $U$ triangular superior e seus elementos diagonais sendo os autovalores de $A$.

# Principais Algoritmos

# Método da Potência

## O Básico

- **Processo**: Repetidamente faça $v_{k+1} = Av_k / \|Av_k\|$.
- **Resultado**: Converge para o autovetor com o maior autovalor em magnitude.
- **Advertência**: Não funciona se seu vetor inicial for ortogonal ao autovetor principal, mas isto é improvável.

## Quando Usar

- Matrizes enormes e esparsas.
- Precisa apenas do autovalor dominante.

**Justificativa:**

Seja $v_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j$, onde $v_j$ são os autovetores de $A$ com $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. Então:

$$A^k v_0 = \lambda_1^k \left( c_1 v_1 + \sum_{j=2}^{n} c_j \left( \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^k v_j \right).$$

Para $k \to \infty$, os termos com $j \geq 2$ decaem, de modo que a normalização de $A^k v_0$ aproxima $v_1$.

## Autovalores de $A^{-1}$

Se $A$ é uma matriz invertível e $v$ é um autovetor com autovalor $\lambda$, então

$$Av = \lambda v.$$

Multiplicando ambos os lados por $A^{-1}$, temos

$$v = \lambda A^{-1} v \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} v = \frac{1}{\lambda} v.$$

Ou seja, os autovalores de $A^{-1}$ são os inversos dos autovalores de $A$.

## Deflação

Podemos remover a influência de um autopar já calculado da matriz para encontrar os autovalores subsequentes.

***Para matrizes simétricas:***
Dado um autopar $(\lambda_1, v_1)$ com $\|v_1\| = 1$, defina a matriz deflacionada

$$A_1 = A - \lambda_1 v_1 v_1^T.$$

1. O autovalor $\lambda_1$ é eliminado (ou reduzido a zero) em $A_1$.
2. Ao aplicarmos o Método da Potência a $A_1$, obtemos o próximo autovalor dominante da matriz original.
3. Repita o processo para calcular mais autopares:

$$A_2 = A_1 - \lambda_2 v_2 v_2^T = A - \lambda_1 v_1 v_1^T - \lambda_2 v_2 v_2^T.$$

## Deslocamento (Shift)

Podemos calcular um autovalor de $A$ que não seja o dominante, modificando o espectro (distribuição dos autovalores).

## Justificativa

**Ideia:** Para um dado deslocamento escalar $\sigma$, forme a matriz deslocada

$$B = A - \sigma I.$$

Resolva

$$(A - \sigma I)^{-1} x_{k+1} = x_k,$$

O autovalor mais próximo de $\sigma$ será o autovalor dominante de $(A - \sigma I)^{-1}$.

Após a convergência, recupere o autovalor de $A$ através de

$$\lambda \approx \sigma + \frac{1}{\mu},$$

onde $\mu$ é o autovalor dominante de $(A - \sigma I)^{-1}$.

# Algoritmo QR

## A Ideia

1. Fatore $A_k = Q_k R_k$.
2. Forme $A_{k+1} = R_k Q_k$.
3. Repita até que $A_k$ seja triangular superior (autovalores na diagonal).

## Relevância

- Padrão ouro para matrizes densas.
- Detalhe de implementação: "Shifts" aceleram a convergência.

## Justificativa

A cada iteração, temos

$$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^* A_k Q_k,$$

o que indica uma similaridade:

$$A_{k+1} \sim A_k$$

Se $A$ for diagonalizável, o processo converge para uma matriz triangular $U$ com os autovalores de $A$ na diagonal.

***Caso:*** $2 \times 2$

Suponha

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \epsilon \\ \delta & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

com $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ e $\epsilon, \delta$ pequenos. Desejamos rastrear a entrada subdiagonal $\delta$.

**Passo 1. Fatoração QR via uma Rotação de Givens:**

Defina $r = \sqrt{\lambda_1^2 + \delta^2}, \quad \cos\theta = \frac{\lambda_1}{r}, \quad \sin\theta = \frac{\delta}{r}$, e faça

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Então, a fatoração é

$$A = QR \quad \text{com} \quad R = Q^T A.$$

Um breve cálculo resulta em:

- $r_{11} = \cos\theta\,\lambda_1 + \sin\theta\,\delta = r$,
- $r_{21} = -\sin\theta\,\lambda_1 + \cos\theta\,\delta = 0$ (por construção),
- $r_{22} = -\sin\theta\,\epsilon + \cos\theta\,\lambda_2$.

**Passo 2. Forme a Próxima Iteração:**

A próxima iteração é definida como $A' = RQ$.
Multiplicando, a entrada $(2,1)$ de $A'$ é $\delta' = r_{22} \sin\theta$.

**Passo 3. Aproximação:**

Assumindo que $\epsilon$ é pequeno, aproxime

$$r_{22} \approx cos\theta \, \lambda_2.$$

Assim,

$$\delta' \approx \cos\theta \, \lambda_2 \sin\theta.$$

Usando

$$\sin\theta = \frac{\delta}{r} \quad \text{e} \quad \cos\theta = \frac{\lambda_1}{r},$$

e notando que para $\delta$ pequeno, $r \approx \lambda_1$, obtemos $\delta' \approx \lambda_2 \frac{\delta}{\lambda_1}$.
Tomando valores absolutos, concluímos que

$$|c'| = |\delta'| \approx |c| \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|.$$

Como $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, temos uma contração do termo $c = A_{2,1}$ localizado abaixo da diagonal.

## Método de Jacobi (para simétricas)

### Esboço

- Rotacione pares de eixos para zerar as entradas fora da diagonal.
- Converge para uma matriz diagonal com autovalores na diagonal.

### Uso Real

- Fácil de entender para ensino.
- Não é o mais rápido para problemas de grande escala, mas conceitualmente simples.

# Iteração do Quociente de Rayleigh

## Passos Principais

- Atualize a estimativa do autovalor via $\rho(x) = \frac{x^T Ax}{x^T x}$.
- Ajuste o shift em cada iteração.

## Desempenho

- Convergência cúbica perto de um autovalor real (rápido, mas cada iteração pode ser cara).
- Bom quando você precisa de alta precisão para um autopar.

## Método de Lanczos (para simétricas grandes)

### Destaques

- Constrói um subespaço de Krylov: $\mathcal{K}_m(A, v) = \{v, Av, A^2v, \ldots, A^{m-1}v\}$.
- Produz uma matriz tridiagonal cujos autovalores se aproximam dos de $A$.

### Caso de uso

- Eficiente para matrizes esparsas e grandes.
- Geralmente usado para obter apenas os $k$ autovalores principais.

# Método de Arnoldi (não simétricas)

## O que é?

- Generaliza Lanczos para matrizes não simétricas (ou não Hermitianas).
- Constrói uma matriz de Hessenberg superior que se aproxima dos autovalores (valores de Ritz).

## Caso de uso

- Problemas grandes, esparsos e não simétricos (como matrizes de adjacência de grafos direcionados).

## Conclusão

- Métodos da Potência / Rayleigh: abordagens iterativas "atire para o topo".
- QR: robusto para espectro completo, usado em bibliotecas padrão.
- Lanczos / Arnoldi: mantenha barato e aproxime para matrizes grandes.
- Teoria espectral: real simétrico é o melhor cenário. Não simétrico precisa de cautela extra.