

Zur Bremsung rasch bewegter Teilchen beim Durchgang durch Materie

Von F. Bloch

(Mit 1 Figur)

§ 1. Einleitung

Die Theorie der Bremsung rasch bewegter Punktladungen, d. h. die Antwort auf die Frage, wieviel Energie sie an die Atome der bremsenden Substanz übertragen, ist nach der klassischen Theorie von Bohr¹⁾ gegeben worden. Unter der Annahme, daß sich an jedem Atom ein Elektron befindet, das elastisch an die Ruhelage gebunden ist, findet man für die mittlere Energie ΔT , die längs der Wegstrecke Δz an die Atome abgegeben wird,

$$(1) \quad \Delta T = \frac{4\pi e^2 E^2}{m_0 v^2} N \Delta z \lg \frac{k m_0 v^3}{2\pi \nu e E},$$

solange die Geschwindigkeit v des bewegten Teilchens klein ist gegen die Lichtgeschwindigkeit c . Ist dagegen v vergleichbar mit c , so wird

$$(2) \quad \Delta T = \frac{4\pi e^2 E^2}{m_0 v^2} N \Delta z \left[\lg \frac{k m_0 v^3}{2\pi \nu e E} - \frac{1}{2} \lg \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{v^2}{2c^2} \right].$$

Dabei ist:

$$(3) \quad \begin{cases} e = \text{Ladung des Elektrons,} \\ E = \text{Ladung des stoßenden Teilchens,} \\ m_0 = \text{Ruhmasse des Elektrons,} \\ v = \text{Eigenfrequenz des Elektrons im Atom,} \\ N = \text{Zahl der Atome pro Volumeinheit,} \\ k = 1,123. \end{cases}$$

Die Formeln (1) und (2) gelten nach Bohr, solange man annimmt, daß die Bahn des fliegenden Teilchens während des Stoßes mit einem Atom als geradlinig betrachtet werden darf und daß seine Geschwindigkeit so groß ist, daß

$$v \gg \sqrt[3]{\frac{\nu e E}{m_0}}.$$

Man erhält (1) und (2), indem man zunächst für einen bestimmten Minimalabstand b der Bahn des Teilchens von der ursprünglichen Gleichgewichtslage des Elektrons die an das

1) N. Bohr, Phil. Mag. 25. S. 1913; 30. S. 581. 1916.

Atom übertragene Energie berechnet und dann über alle Werte von $b = 0$ bis $b = \infty$ mittelt.

Das Problem der Bremsung, zunächst im Rahmen der nichtrelativistischen Quantenmechanik, ist zuerst von Gaunt¹⁾ neu aufgerollt worden, indem er die in der Bohrschen Rechnung auftretende Beschreibung des Atoms durch einen klassischen Oszillator fallen ließ und das Atom als quantenmechanisches System behandelt. Gaunt berechnet die an das Atom übertragene Energie nur für den Fall, daß der Abstand b der Bahn des Teilchens vom Atom hinreichend groß ist, und glaubt, die Divergenz, die er durch Extrapolation des für große Werte von b erhaltenen Wertes auf kleine b erhält, allgemein so beheben zu müssen, daß er als untere Grenze für b den klassischen Minimalabstand eE/m_0v^2 des Teilchens vom Atomelektron setzt. Auf diese Weise erhält er eine im wesentlichen mit der Bohrschen Formel (1) übereinstimmende Bremsformel. Sie ergibt sich aus (1), wenn man die dort auftretende Frequenz ν durch eine Frequenz der Größenordnung

$$\nu = \frac{1}{h} \text{ Ionisierungsarbeit}$$

ersetzt. Gaunt gibt keine Begründung für seine klassische Rechnungsweise bei kleinen Stoßabständen b , und wir werden auch später sehen, daß sie sich nur in einem gewissen Grenzfall rechtfertigen läßt, während unter Umständen die strenge quantenmechanische Betrachtung wesentliche Abweichungen vom klassischen Resultat ergibt.

Ein im Grenzfall hoher Geschwindigkeiten konsequentes quantenmechanisches Näherungsverfahren²⁾ führt Bethe³⁾ auf die von der klassischen Formel (1) wesentlich verschiedene Bremsformel

$$(4) \quad \Delta T = \frac{4\pi e^2 E^2}{m_0 v^2} N \Delta z \sum_n f_n \lg \frac{(2) m_0 v^2}{h \nu} \cdot {}^4)$$

Die \sum_n erstreckt sich hier über alle Zustände des Atoms; ν_n ist hier die der Kombination des Zustandes n mit dem Grund-

1) J. A. Gaunt, Proc. Cambr. Phil. Soc. 23. S. 732. 1927.

2) Auf die strenge Formulierung seiner Gültigkeit werden wir im folgenden ausführlich zu sprechen kommen.

3) H. Bethe, Ann d. Phys. [5] 5. S. 325. 1930.

4) Wir schreiben hier (2), um anzudeuten, daß der Faktor 2 unter dem Logarithmus nur dann zu stehen hat, wenn die Ablenkung des Teilchens während des Zusammenstoßes mit dem Atom vernachlässigt werden darf. Bei α -Teilchen ist dies ohne weiteres der Fall; bei Elektronen steht wegen des sog. „straggling“-Effektes an Stelle von (2) ein komplizierterer, die Dicke der durchlaufenen Schicht enthaltender, Faktor.

zustand zugehörige Übergangsfrequenz, f_n die entsprechende Oszillatorstärke

$$f_n = \frac{4 \pi m_0 v_n}{h} |x_{0n}|^2.$$

Im Fall des harmonischen Oszillators mit der Eigenfrequenz ν geht (4) über in

$$\Delta T = \frac{4 \pi e^2 E^2}{m_0 v^2} N \Delta z \lg \frac{(2) m_0 v^2}{h \nu},$$

was sich von (1) in charakteristischer Weise durch einen Faktor $\frac{4 \pi e E}{h \nu}$ unter dem Logarithmus unterscheidet.

Die Bethesche Rechnung stellt wesentlich die erste Näherung eines Lösungsverfahrens dar, in welchem nach Potenzen der Ladung E des stoßenden Teilchens entwickelt wird, und es ist daher von Anfang an klar, daß in dieser Näherung die Ladung E in der Formel für die übertragene Energie nur als Faktor auftreten kann, dagegen nicht etwa nach Art der klassischen Formel (1) unter dem Logarithmus.

Indessen ist ein solches Näherungsverfahren nicht unbedenklich. Für diejenigen Stoßprozesse, bei denen die Energie des Elektrons nach dem Stoß groß ist gegen seine Bindungsenergie, kann man nämlich auch nach der Betheschen Theorie das Elektron als frei betrachten, und in diesem Falle ist das Bethesche Verfahren gleichbedeutend mit der Anwendung der Bornschen Näherungsmethode¹⁾ zur Behandlung von Stoßproblemen.

Bethe gibt als Kriterium für die Anwendbarkeit der Bornschen Methode an, daß der Entwicklungsparameter $e E/h \nu$ klein gegen eins sei. Nun ist aber durch die Untersuchungen von Møller²⁾ und Distel³⁾ bekannt, daß im Falle strenger Coulombscher Wechselwirkung zweier freier Teilchen die Bornsche Methode in erster Näherung zwar das richtige, auch nach der Gordonschen strengen Rechnung⁴⁾ folgende Resultat liefert, in zweiter Näherung aber unabhängig vom Wert $e E/h \nu$ bereits divergiert. Das bedeutet freilich nicht, daß die Bethesche Rechnung etwa in zweiter Näherung divergieren würde, da für kleine Impulsübertragungen an das Atomelektron diese nicht mehr als frei betrachtet werden darf, sondern seine Bindung an den Atomkern wesentlich wird; vielmehr würden infolge dieses Umstandes bei hinreichend

1) M. Born, *Ztschr. f. Phys.* **37**. S. 863. 1926; **38**. S. 803. 1926.

2) Chr. Møller, *Ztschr. f. Phys.* **66**. S. 513. 1930.

3) F. Distel, *Ztschr. f. Phys.* **74**. S. 785. 1932.

4) W. Gordon, *Ztschr. f. Phys.* **48**. S. 180. 1928.

kleinem $eE/h\nu$ die höheren Näherungen tatsächlich beliebig klein gegenüber der ersten. Dagegen würde bei vorgegebenem, wenn auch noch so kleinem $eE/h\nu$ der Einfluß der höheren Näherungen mit abnehmender Bindungsenergie des Elektrons an das Atom immer größer, so daß in diesem Falle die Bethesche Rechnung versagen würde.¹⁾

Wir hielten es daher nicht für überflüssig, einen anderen Weg zur Lösung des Problems einzuschlagen.²⁾

Die Annahme, die der folgenden Rechnung zugrunde liegt, ist die, daß die Impulsänderung des stoßenden Teilchens während des Stoßes stets klein sei gegen seinen ursprünglichen Impuls. Diese Annahme trifft z. B. für den Stoß eines α -Teilchens mit den Atomelektronen natürlich stets zu. Für den Stoß rasch bewegter Elektronen verbietet sie allerdings die Behandlung derjenigen Stöße, bei denen das stoßende Elektron eine große Winkelablenkung erfährt, doch spielen diese wegen ihrer relativen Seltenheit für die Bremsung eine untergeordnete Rolle. Ferner wird hier sowohl der Austausch des stoßenden Teilchens mit den Elektronen des Atoms, wie sein Spin vernachlässigt. Beides ist wiederum für α -Teilchen stets gestattet, für hinreichend schnell bewegte Elektronen dann, wenn man von den großen Winkelablenkungen absieht.

Im nichtrelativistischen Fall ist von Mott³⁾ gezeigt worden, daß sich unter der obigen Annahme geringer Impulsübertragung an das stoßende Teilchen, dessen Wirkung auf das Atom wie in der klassischen Theorie durch die eines geradlinig und gleichförmig bewegten Coulombschen Kraftzentrums beschreiben läßt. Wir benutzen im folgenden wesentlich dieses Resultat und ziehen die daraus folgende Behandlungsweise des Problems (wegen ihrer größeren Analogie zur klassischen Betrachtung) der Betheschen Rechnung im Impulsraum vor, obwohl in einer *strengen* Theorie (also nicht in der Betheschen Näherung) die beiden Behandlungsweisen nach Mott äquivalent sind.

1) Man überlegt sich an Hand der Møller-Distelschen Resultate leicht, daß die zweite Näherung gegenüber der ersten in der Bremsformel einen relativen Anteil der Größenordnung $\frac{eE}{h\nu} \lg \frac{mv^2}{h\nu}$ ergeben würde, wo $h\nu$ von der Größenordnung der Ionisierungsarbeit des Atoms ist.

2) Die Frage nach der Gültigkeit der klassischen, bzw. der Betheschen Bremsformel führte mit Niels Bohr zu interessanten Diskussionen, die mich zu der vorliegenden Arbeit veranlaßt haben. Prof. Bohr wird in einer demnächst erscheinenden Arbeit die prinzipiellen Fragen der Stoßprobleme näher beleuchten.

3) N. F. Mott, Proc. Cambr. Phil. Soc. 27. S. 553. 1931.

Wir machen im folgendem außerdem einzig die Annahme, daß die mittlere Geschwindigkeit des Elektrons im Atom hinreichend klein sei gegen die Geschwindigkeit des stoßenden Teilchens. Man erhält dann einen geschlossenen Ausdruck für die Bremsung, der für sehr große, bzw. für sehr kleine Werte von eE/hv die klassische, bzw. die Bethesche Bremsformel als Grenzfälle enthält¹⁾ und als deren Verallgemeinerung bezeichnet werden darf.

Im relativistischen Falle steht bekanntlich eine endgültige quantentheoretische Formulierung der Wechselwirkung zweier Teilchen noch aus, die der Forderung des Relativitätsprinzips genügt. Møller²⁾ und Rosenfeld³⁾ konnten aber zeigen, daß man unter Ausschließung der Strahlungskräfte eine befriedigende quantentheoretische Beschreibung der Retardierung geben kann, solange man sich auf die in den Ladungen der beiden Teilchen linearen Glieder beschränkt. Der Ansatz wurde von Møller⁴⁾ und Bethe⁵⁾ zur Behandlung des Problems der Bremsung verwendet, was als eine vollkommen relativistische Verallgemeinerung der früheren unrelativistischen Arbeit von Bethe betrachtet werden. Dies liefert auch eine Formel, die in derselben Weise von (2) abweicht, wie die Bethesche Formel (4) von (1). Abgesehen davon, daß es auch hier, wie im unrelativistischen Fall, fraglich erscheint, ob eine solche Näherung für Stoßprobleme statthaft ist, wird man annehmen dürfen, daß auch in einer strengen relativistischen Theorie, solange man Strahlungswirkungen und Impulsänderung des stoßenden Teilchens vernachlässigt, dessen Wirkung sich durch die retardierten Potentiale einer gleichförmig bewegten Punktladung beschreiben läßt.

Es erschien uns interessant, zu zeigen, daß diese Annahme zu einer Bremsformel führt, die von den bekannten Schwierigkeiten der relativistischen Quantenmechanik frei ist, obschon bei ihr nicht vorausgesetzt wird, daß die Wechselwirkung zwischen stoßendem Teilchen und Elektron schwach sei. Sie enthält, wie im nichtrelativistischen Fall, die Bohrsche klassische Formel (2) und die Bethe-Møllersche Formel als Grenzfälle.

1) Letztere infolge einer Besonderheit des Coulombschen Kraftgesetzes, die in der Betheschen und Bornschen Näherungsmethode nicht zum Ausdruck kommen kann.

2) Chr. Møller, Ztschr. f. Phys. **70**. S. 786. 1931.

3) L. Rosenfeld, Ztschr. f. Phys. **73**. S. 253. 1932.

4) Chr. Møller, Ann. d. Phys. [5] **14**. S. 531. 1932.

5) H. Bethe, Ztschr. f. Phys. **76**. S. 293. 1932.

§ 2. Unrelativistische Bremsung

Wir betrachten ein Teilchen der Ladung E , das sich mit der Geschwindigkeit v geradlinig und gleichförmig in der z -Richtung bewegt. Seine Wirkung auf den Atomkern sei zu vernachlässigen, so daß wir uns diesen als fest im Koordinatenursprung denken können. Zur Vereinfachung wollen wir ferner annehmen, daß wir pro Atom nur ein Elektron hätten¹⁾ und die Koordinaten des betrachteten Elektrons mit x, y, z bezeichnen. Das Teilchen möge zur Zeit $t = 0$ die Koordinaten $X = b, Y = 0, Z = Z_0 \gg b$ haben. Der von ihm herrührende Teil der potentiellen Energie des Elektrons ist dann gegeben durch

$$(5) \quad V(x, y, z, t) = \frac{e E}{\sqrt{(x-b)^2 + y^2 + (z - Z_0 + vt)^2}},$$

und für das Elektron gilt die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$(6) \quad -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = [H + V(t)] \psi,^2)$$

wo

$$(6a) \quad H = \frac{p^2}{2m_0} + U = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta + U$$

die Hamiltonfunktion des Atoms bedeutet. Von dem Potential U werde im folgenden vorausgesetzt, daß es Kugelsymmetrie habe.

Das Atom befinde sich zur Zeit $t = 0$ im Grundzustand mit der Eigenfunktion $\psi = \psi_0$. Seine Energie setzen wir durch Wahl der willkürlichen additiven Konstanten fest zu $E_0 = 0$, d. h. es soll gelten:

$$(7) \quad H \psi_0 = 0.^3)$$

Die zur Zeit t an das Atom übertragene Energie ist dann gegeben durch

$$(8) \quad \Delta T(t) = \int \psi^*(t) H \psi(t) d\tau,$$

wo $\psi(t)$ die normierte Lösung von (6) ist, die zur Zeit $t = 0$ die Form $\psi = \psi_0$ hat.

1) Diese Vereinfachung ist nicht wesentlich. Die erhaltenen Endformeln lassen sich ohne weiteres auf den Fall mehrerer Elektronen übertragen.

2) Wir wollen im folgenden statt des Planckschen Wirkungsquantums h stets die Größe $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ und entsprechend statt der Frequenz ν die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ verwenden.

3) Im Falle eines Wasserstoffatoms hätte man also für das Potential des Atomkernes zu setzen $U = -\frac{e^2}{r} + \frac{e^2}{2a}$; $a = \frac{\hbar^2}{m_0 e^2} =$ Bohrscher Atomradius.

Wir wollen zunächst analog der Betheschen Rechnung eine Störungsrechnung treiben, in der nach Potenzen des störenden Potentials V entwickelt wird und nachträglich sehen, wie das Ergebnis in einer strengeren Rechnung durch die Besonderheiten des Coulombschen Kraftfeldes bestätigt wird. Zunächst bemerken wir, daß sich für $\psi(t)$ sofort eine formale Reihenentwicklung nach Potenzen von V angeben läßt. Sei nämlich

$$(9) \quad O(t) = -\frac{i}{\hbar} e^{\frac{iHt}{\hbar}} V(t) e^{-\frac{iHt}{\hbar}},$$

so überzeugt man sich sofort, daß die Lösung von (6) gegeben ist durch

$$(10) \quad \psi(t) = G(t) \psi_0$$

mit

$$(11) \quad G(t) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \left[1 + \int_0^t O(t') dt' + \int_0^t dt' \int_0^{t'} O(t'') O(t''') + \dots \right]$$

und daraus die übertragene Energie wegen (7), (8) und (9), wenn man bis zu den in V quadratischen Gliedern geht:

$$(12) \quad \Delta T(t) = \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \int \psi_0^* V(t') e^{-\frac{iHt'}{\hbar}} H e^{\frac{iHt''}{\hbar}} V(t'') \psi_0 d\tau.$$

Wie in der klassischen Theorie von Bohr wollen wir nun den ganzen Wertebereich des Stoßabstandes b in zwei Teile zerlegen durch Einführung einer Länge b_1 , deren Größenordnung charakterisiert ist durch den Atomradius des Grundzustandes

$$(13) \quad \bar{r} = \int \psi_0^* r \psi_0 d\tau$$

und die Eigenfrequenz

$$(14) \quad \omega_1 = \frac{E_1}{\hbar},$$

wo E_1 etwa die zur Anregung des ersten angeregten Zustandes notwendige Energie bedeutet. Es soll zunächst gelten:

$$(15) \quad \bar{r} \ll b_1 \ll \frac{v}{\omega_1}.$$

Damit diese Bedingung erfüllbar ist, muß offenbar

$$(16) \quad v \gg v_0 = \bar{r} \omega_1$$

sein, wo v_0 von der Größenordnung der mittleren Geschwindigkeit des Elektrons im Atom ist.¹⁾ Da man annehmen darf,

1) Die Bedingung (16) ist notwendig, aber noch nicht hinreichend für die Gültigkeit unserer Rechnung. Ihre notwendigen und hinreichenden Voraussetzungen sind erst erfüllt, wenn gleichzeitig die Bedingungen (16) und (21) gelten.

daß im Atom kinetische und potentielle Energie von derselben Größenordnung sind, d. h. daß $\hbar \omega_1 \sim m_0 v_0^2$, läßt sich statt (16) auch schreiben:

$$(16a) \quad \hbar \omega_1 \ll m_0 v^2.$$

Die Einschränkung von b_1 durch (15) hat den Vorteil, daß für $b > b_1$ (im folgenden als Fall *A* bezeichnet) das Problem der Bremsung ein reines Dispersionsproblem wird und daß für $b < b_1$ (Fall *B*) das Atomelektron während des Stoßes als frei betrachtet werden kann. Beide Fälle lassen sich in dieser Näherung exakt behandeln und sollen im folgenden diskutiert werden.

Fall A: $b > b_1$: Hier variiert das Potential V innerhalb des Atoms so wenig, daß wir in (12) die von dem stoßenden Teilchen herrührende Kraft F auf das Elektron mit guter Annäherung als räumlich konstant betrachten dürfen. Wir können also nach (5) setzen:

$$(17) \quad V(x y z t) = -x F_x(t) - z F_z(t)$$

mit

$$(17a) \quad \begin{cases} F_x(t) = \frac{e E b}{[b^2 + (Z_0 - v t)^2]^{3/2}} \\ F_z(t) = \frac{e E (Z_0 - v t)}{[b^2 + (Z_0 - v t)^2]^{3/2}}. \end{cases}$$

Entwickelt man nun $V \psi_0$ nach den Eigenfunktionen ψ_n des Atoms, d. h. setzt man

$$V \psi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (0 | V | n) \psi_n$$

und ferner $\frac{H}{\hbar} \psi_n = \omega_n$, so wird aus (12):

$$(18) \quad \Delta T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \frac{\omega_n}{\hbar} e^{i \omega_n (t'' - t')} (0 | V(t') | n) (n | V(t) | 0)$$

oder nach (17):

$$(18a) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta T(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \frac{\omega_n}{\hbar} e^{i \omega_n (t'' - t')} \{ (0 | x | n) F_x(t') \\ &\quad + (0 | z | n) F_z(t') \} \{ (n | x | 0) F_x(t) + (n | z | 0) F_z(t) \}. \end{aligned} \right.$$

Man überlegt sich leicht, daß wegen der vorausgesetzten Kugelsymmetrie des Atomkraftfeldes die Glieder mit $F_x(t'') F_z(t')$ und $F_z(t'') F_x(t')$ herausfallen. Definiert man nun die aus der Dispersionstheorie bekannten „Oszillatorstärken“ f_n durch

$$(19) \quad f_n = \frac{2 m_0 \omega_n}{\hbar} (0|x|n)(n|x|0) = \frac{2 m_0 \omega_n}{\hbar} (0|z|n)(n|z|0),$$

so wird aus (18a)

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta T &= \frac{1}{2 m_0} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \int_0^t dt' \int_0^t dt'' e^{i \omega_n (t'' - t')} \\ &\quad \cdot \{F_x(t'') F_x(t) + F_z(t'') F_z(t)\}. \end{aligned} \right.$$

D. h. das Atom bremst im Falle *A* wie eine Anzahl klassischer Oszillatoren mit den Kreisfrequenzen ω_n und den relativen Anzahlen f_n . Dieses Resultat ist gewissermaßen selbstverständlich, da es sich hier um ein reines Dispersionsproblem handelt. Wir können zur Berechnung von (20) die klassischen Resultate von Bohr übernehmen und finden danach für die mittlere Energie, die für $b > b_1$ an die Atome übertragen wird

$$(20a) \quad \Delta T_A = \frac{4\pi e^2 E^2}{m_0 v^2} N \Delta z \sum_n f_n \lg \frac{kv}{\omega_n b_1}.$$

Wir müssen uns noch überlegen, unter welchen Bedingungen die hier zugrunde liegende Formel (12), die nur die in *E* quadratischen Glieder enthält, im Falle *A* anwendbar ist, d. h. mit welchem Recht die höheren Glieder in der Entwicklung (11) des Operators $G(t)$ vernachlässigt werden dürfen. Man zeigt nun unschwer, daß die in der Ladung *E* ungeraden Terme in der Energie stets herausfallen, und daß die mit E^2 proportionalen Glieder, d. h. die *s*-te Näherung in der übertragenen Energie, im Abstand *b* zur ersten Näherung (20) einen relativen Anteil der Größenordnung $\left(\frac{e E}{\hbar v} \frac{\bar{r}}{b}\right)^{2(s-1)}$ beitragen würden. Wie man leicht sieht, genügt es hier, zur Abschätzung $b \sim \frac{v}{\omega_1}$ zu setzen und wir dürfen also die höheren Näherungen vernachlässigen, wenn

$$\frac{e E}{\hbar v} \frac{\bar{r} \omega_1}{v} \ll 1$$

ist. D. h. neben (16) haben wir noch zu fordern, daß

$$(21) \quad v \gg v_0 \sqrt{\frac{e E}{\hbar v_0}}$$

ist, wo v_0 wieder von der Größenordnung der mittleren Geschwindigkeit des Elektrons im Atom ist.

Die gleichzeitige Gültigkeit von (16) und (21) stellt die notwendige und hinreichende Bedingung für die Gültigkeit unserer Rechnung dar. Man sieht also, daß sie auch für be-

liebig große Werte von eE/hv noch gültig bleibt, wenn nur v_0 hinreichend klein ist.¹⁾

Interessant ist es noch, speziell diejenigen Stöße zu betrachten, die zwar nach (15) ebenfalls noch zum Falle A gehören, bei denen aber bereits $b \ll \frac{v}{\omega_1}$ ist.

Die wesentliche Vereinfachung, die hier wegen (15) gemacht werden kann, ist die, daß die Exponentialfaktoren in (18) sämtlich gleich 1 gesetzt werden dürfen. In der Tat spielen nach (18a) nur die tiefsten angeregten Zustände eine Rolle, deren Eigenfrequenz von der Größenordnung der in (15) auftretenden Frequenz ω_1 sind. Andererseits ist nach (17a) die auf das Atom wirkende Kraft nur während einer Zeit der Größenordnung $\Delta t \cong \frac{b}{v}$ merklich von Null verschieden, so daß die Exponenten von (18) von der Größenordnung

$$i \Delta t \omega_1 \cong i \frac{b \omega_1}{v}$$

werden, d. h. es wird

$$\Delta t \omega_1 \ll 1.$$

Also können in diesem Falle auch bereits in (12) die Operatoren $e^{-\frac{iHt''}{\hbar}}$ und $e^{\frac{iHt'}{\hbar}}$ gleich 1 gesetzt werden, und aus (12) wird dann durch eine einfache Umformung (bei der (7) zu beachten ist, sowie mit Benutzung von (6a) der Umstand, daß V und U vertauschbare Operatoren sind):

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta T &= \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \int \psi_0^* V(t') H V(t'') \psi_0 d\tau \\ &= \frac{1}{2m_0} \int \psi_0^* \left[\int_0^t dt' \operatorname{grad} V(t') \right]^2 \psi_0 d\tau, \end{aligned} \right.$$

oder mit Benutzung von (17)

$$(22a) \quad \Delta T = \frac{1}{2m_0} \left(\int_0^t \mathfrak{F}(t') dt' \right)^2.$$

1) Wegen (16a) läßt sich (21) auch in der Form $v \gg \sqrt{\frac{\omega_1 e E}{m_0 v_0}}$ schreiben. Dann folgt aber wegen (16) erst recht $v \gg \sqrt{\frac{\omega_1 e E}{m_0 v}}$ oder $v \gg \sqrt[3]{\frac{\omega_1 e E}{m_0}}$, d. h. diese der Bohrschen Theorie zugrunde liegende Annahme (vgl. § 1) ist eine notwendige Folge von (16) und (21).

Dies ist genau die Energie, wie sie nach der klassischen Mechanik an ein ursprünglich ruhendes freies Teilchen der Masse m_0 übertragen wird, wenn während des Stoßes die örtliche Veränderung der Kraft \mathfrak{F} vernachlässigt werden kann. In der Tat bedeutet der hier auftretende Umstand, daß die Eigenfrequenzen des Atoms keine Rolle mehr spielen, daß das Elektron während des Stoßes als frei betrachtet werden kann.

Fall B: $b < b_1$. Während im Falle *A* das Bremsvermögen des Atoms noch völlig durch das *klassische* Verhalten von virtuellen Oszillatoren beschrieben wird, treten im Falle *B* charakteristische, durch das Wirkungsquantum bedingte Unterschiede auf.

In dem der Betheschen Rechnung entsprechenden Ausdruck (12) für die übertragene Energie äußern sie sich darin, daß für diejenigen Stöße, bei denen das Teilchen sehr nahe am Atom vorbei oder durch dieses hindurchfliegt, das Elektron auch nach Zuständen sehr hoher Energie übergehen kann, so daß die in (12) auftretenden Exponentialfaktoren nicht mehr gleich 1 gesetzt werden dürfen. Dagegen ist es natürlich auch hier gestattet, das Atomelektron während des Stoßes als frei zu betrachten, d. h. in den Exponenten den potentiellen Teil U in der Energie zu vernachlässigen und H zu ersetzen durch

$$H \cong -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta.$$

Da sich die Eigenfunktion ψ_0 nach (13) erst innerhalb einer Strecke der Größenordnung $\bar{r} \cong \sqrt{\frac{\hbar}{m_0 \omega_1}}$ wesentlich verändert, kann man wegen

$$\sqrt{\frac{\hbar t}{m_0}} < \sqrt{\frac{\hbar b_1}{m_0 v}} \ll \sqrt{\frac{\hbar}{m_0 \omega_1}}$$

in (12) setzen

$$e^{\frac{i H t''}{\hbar}} V(t'') \psi_0 \cong \psi_0 W(t'')$$

mit

$$(23) \quad W(t) = e^{-\frac{i \hbar t}{2m_0} \Delta} V(t).$$

Dann wird aus (12) durch eine analoge Umformung, wie im Falle *B*:

$$(23a) \quad \Delta T = \frac{1}{2m_0} \int \psi_0^* \left(\int_0^t \text{grad } W(t) dt' \right)^2 \psi_0 d\tau.$$

Schreibt man $V(t)$ in seiner Abhängigkeit von den Koordinaten des Elektrons in Form einer Fourierreihe, so läßt sich nach (23) W und daraus nach (23a) ΔT berechnen. Integriert man dann noch über alle Werte von b von 0 bis b_1 und addiert die so erhaltene Energie ΔT_B zu der durch (20a) gegebenen Energien ΔT_A , so erhält man das Bethesche Resultat (4). Die Rechnung soll hier nicht ausgeführt werden, zumal sie lediglich als eine Kontrolle der Betheschen Rechnungen betrachtet werden kann, da ja nach dem in der Einleitung Gesagten die beiden Methoden äquivalent sind.

Ein qualitatives Verständnis dafür, daß das Auftreten von W in (23) an Stelle von V in (21) zur Betheschen Bremsformel (4) führt, gewinnt man leicht, wenn man den aus (23) folgenden Ausdruck

$$W(t) = \left(\frac{i m_0}{2\pi \hbar t} \right)^{3/2} \iiint \frac{e E dx_0 dy_0 dz_0}{\sqrt{(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta - z_0)^2}} \cdot e^{-\frac{m_0 i}{2\hbar t} [(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta - z_0)^2]}$$

betrachtet, in dem ξ, η, ζ die Relativkoordinaten von stoßendem Teilchen und Elektron bedeuten. Er stellt nämlich im wesentlichen das Potential des stoßenden Teilchens dar, wenn man sich dessen Ladung nicht auf einen Punkt konzentriert, sondern innerhalb einer Kugel mit einem Radius der Größenordnung $\Delta R \simeq \sqrt{\frac{\hbar t}{m_0}}$ verteilt denkt. Nun gilt für die Stoßzeit t in diesem Abstand größenordnungsmäßig

$$t \simeq \frac{\Delta R}{v};$$

also wird

$$\Delta R \simeq \frac{\hbar}{m_0 v}.$$

Setzt man nun

$$\Delta T_B = \frac{4\pi e^2 E^2}{m_0 v^2} N \Delta z \lg \frac{b_1}{b_0}$$

und für b_0 einen „effektiven Minimalabstand“ von stoßendem Teilchen und Elektron von der Größenordnung $\Delta R = \frac{\hbar}{m_0 v}$ ein, so erhält man tatsächlich den in der Betheschen Bremsformel enthaltenen charakteristischen Unterschied gegenüber der Bohrschen Formel (1).

Die oben gegebene Diskussion des Falles A als reines Dispersionsproblem auf Grund der Näherungsformel (12) gibt

nach dem dort Gesagten zu keinerlei Bedenken Anlaß, solange die Bedingung (21) erfüllt ist.

Dagegen ist im Falle *B* die Verwendung des Näherungsausdruckes (12) für die übertragene Energie nicht mehr ohne weiteres statthaft, da sie, wie bei Bethe, der Anwendung der Bornschen Methode für den Stoß zweier freier Teilchen entsprechen würde, die nach dem Coulombschen Gesetz aufeinander wirken. Wir wollen im folgenden die im Falle *B* übertragene Energie insofern *streng* berechnen, als hier nach (15) die „Stoßzeit“ b/v kurz ist gegen die reziproke Eigenfrequenz $1/\omega_1$ des Atoms.

Dazu gehen wir nochmals auf die strenge Gleichung

$$(6) \quad -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = [H + V(t)] \psi$$

zurück, die wir entsprechend dem Falle *B* für den Grenzfall sehr kurzer Stoßzeiten zu lösen suchen. Setzen wir nun

$$(24) \quad \psi(t) = \varphi(t) \psi_0,$$

so wird aus (6) wegen (7)

$$(24a) \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \varphi + V(t) \varphi \\ &\quad - \frac{\hbar^2}{2m_0} (\text{grad } \varphi, \text{grad } \lg \psi_0). \end{aligned} \right.$$

Um der Anfangsbedingung $\psi(0) = \psi_0$ zu genügen, muß offenbar aus (24) gefolgert werden, daß $\varphi(0)$ innerhalb des Atombereiches als konstant betrachtet werden muß. Man überzeugt sich leicht, daß man wegen der Gültigkeit der Ungleichung (15), die bedingt, daß die reziproke Stoßzeit v/b im Falle *B* stets groß ist gegen die Eigenfrequenz ω_1 des Atoms, das Atom-elektron insofern als „frei“ betrachtet werden darf, als man das dritte Glied in (24) vernachlässigen kann. Die Gleichung

$$(24b) \quad -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \varphi + V(t) \varphi$$

stellt dann nämlich die Wellengleichung eines freien Elektrons in einem zeitlich veränderlichen Potential $V(t)$ dar.

Wir betrachten nun die Bahn des fliegenden Teilchens als fest vorgegeben, etwa in der z -Achse, und fragen nach der übertragenen Energie an alle diejenigen Atome, die sich innerhalb eines Zylinders vom Radius b_1 und der Länge Δz befinden. Wir können so vorgehen, daß wir, statt über alle Eigenfunktionen ψ_0 innerhalb des Zylinders zu mitteln, die Funktion $\varphi(0)$ so wählen, daß sie innerhalb des Zylinders gleich \sqrt{N}

ist, außerhalb verschwindet, und dann über alle möglichen Eigenfunktionen ψ_0 mitteln, wie sie der Lage der Atome an irgendeiner Stelle des Raumes entsprechen. Der Faktor \sqrt{N} ist so gewählt, daß

$$\int \psi^*(0) \psi(0) d\tau = \int \psi_0^* \psi_0 \varphi^*(0) \varphi(0) d\tau,$$

integriert über alle Lagen von ψ_0 im Raum

$$\left(\text{wegen } \int \psi_0^* \psi_0 d\tau = 1 \right)$$

gleich der richtigen Anzahl NV der Elektronen im Zylinder vom Volumen V wird.

Wir finden auf diese Weise offenbar die totale Energie, die im Falle B vom Teilchen längs der Wegstrecke Δz an die Atome übertragen wird. Sie wird gegeben durch

$$\Delta T_B = \int [\psi_0^* \varphi^*(t) H \psi_0 \varphi(t) - \psi_0^* \varphi^*(0) H \psi_0 \varphi(0)] d\tau$$

oder wegen (7)

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta T_B = & - \frac{\hbar^2}{2m_0} \int [\psi_0^* \psi_0 \varphi^*(t) \Delta \varphi(t) - \psi_0^* \psi_0 \varphi^*(0) \Delta \varphi(0)] d\tau \\ & - \frac{\hbar^2}{m_0} \int [\psi_0^* \varphi^*(t) (\text{grad } \varphi(t), \text{grad } \psi_0) \\ & \quad - \psi_0^* \varphi^*(0) (\text{grad } \varphi(0), \text{grad } \psi_0)] d\tau. \end{aligned} \right.$$

Der Querstrich bedeutet, daß noch über alle Lagen von ψ_0 im Raum zu integrieren ist. Nun ist

$$\overline{\psi_0^* \psi_0} = 1$$

und

$$\overline{\psi_0^* \text{grad } \psi_0} = 0,$$

letzteres, da der mittlere Impuls des Atoms im Grundzustand verschwindet. Also wird aus (25)

$$(26) \quad \Delta T_B = - \frac{\hbar^2}{2m_0} \int [\varphi^*(t) \Delta \varphi(t) - \varphi^*(0) \Delta \varphi(0)] d\tau,$$

wobei von der Zeit t nur zu fordern ist, daß sie so groß sei, daß nach ihrem Verlauf die Wirkung des Teilchens in dem betrachteten Zylinder bereits völlig zu Ende ist.

Um nun die Funktion $\varphi(t)$ zu bestimmen, betrachten wir das durch sie dargestellte Wellenpaket von einem Bezugssystem aus, das sich mit dem Teilchen bewegt, und dessen Ursprung wir an die Stelle des Teilchens verlegen wollen. In

diesem Bezugssystem wird das Wellenpaket durch eine Funktion $\chi(t)$ dargestellt, die aus $\varphi(t)$ hervorgeht mittels der Beziehung

$$(27) \quad \chi(t) = e^{ik_0 z} \varphi(t)$$

mit

$$k_0 = \frac{m_0 v}{\hbar}.$$

Die Funktion $\chi(t)$ ist dann offenbar die Wellenfunktion eines Elektrons in einem *zeitlich konstanten* Coulombschen Potentialfeld eE/r , d. h. sie genügt der aus (24b) hervorgehenden Wellengleichung

$$(28) \quad -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \chi(t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \chi(t) + \frac{eE}{r} \chi(t)$$

mit der Anfangsbedingung

$$(29) \quad \chi(0) = e^{ik_0 z} \varphi(0).$$

Setzt man $\varphi(t)$ nach (27) in (26) ein, so folgt:

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta T_B &= \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m_0} \int [\chi^*(t) \chi(t) - \chi^*(0) \chi(0)] d\tau \\ &- \frac{\hbar^2}{2m_0} \int [\chi^*(t) \Delta \chi(t) - \chi^*(0) \Delta \chi(0)] d\tau \\ &- \frac{\hbar^2 k_0}{i m_0} \int \left[\chi^*(t) \frac{\partial \chi(t)}{\partial z} - \chi^*(0) \frac{\partial \chi(0)}{\partial z} \right] d\tau. \end{aligned} \right.$$

Das erste Integral in (30) verschwindet wegen des Erhaltungssatzes der Ladung. Das zweite stellt die Veränderung der mittleren kinetischen Energie des Wellenpaketes χ während des Stoßes dar. Da sowohl zur Zeit Null wie zur Zeit t das Wellenpaket so weit von dem festen Kraftzentrum entfernt sein soll, daß der von letzterem herrührende potentielle Teil der Energie vernachlässigt werden kann, so verschwindet also auch das zweite Integral wegen des Erhaltungssatzes der Energie.

Um das letzte Integral von (30) in ein Integral über $\chi(t)$ allein umformen zu können, muß man bedenken, daß der mittlere Impuls des Wellenpaketes $\varphi(0)$ sehr klein ist gegen $m_0 v$, da ja schon der mittlere Impuls von ψ_0 klein gegen $m_0 v$ vorausgesetzt wurde, die Dimensionen von φ aber noch groß gegen die Atomdimensionen gewählt sind. Also enthält das Wellenpaket (29) praktisch nur Impulse in der z -Richtung und man kann setzen

$$\frac{\hbar}{i} \int \chi^*(0) \frac{\partial \chi(0)}{\partial z} \cong -\frac{\hbar}{i} \int \chi^*(0) \frac{\partial \chi(0)}{\partial r},$$

wobei der letzte Ausdruck den negativen mittleren Radialimpuls des Wellenpaketes χ vor dem Stoß bedeutet. Nun ändert aber der mittlere Radialimpuls während des Stoßes lediglich sein Vorzeichen. Es ist also

$$-\frac{\hbar}{i} \int \chi^*(0) \frac{\partial \chi(0)}{\partial r} = \frac{\hbar}{i} \int \chi(t) \frac{\partial \chi(t)}{\partial r},$$

und aus (30) wird schließlich

$$(31) \quad \Delta T_B = \frac{\hbar^2 k_0}{i m_0} \int \left[\chi^*(t) \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial z} \right) \chi(t) \right] d\tau.$$

Zur Berechnung von $\chi(t)$ benutzen wir nun wieder den Umstand, daß sowohl das Wellenpaket $\chi(0)$, wie das Wellenpaket $\chi(t)$ sehr weit entfernt von dem Kraftzentrum im Koordinatenursprung sind. Dies erlaubt uns nämlich, für χ die asymptotische Lösung zu verwenden, die von Gordon (a. a. O.) im Falle eines Coulombschen Potentialfeldes für große Werte von r angegeben wurde.

Nach Gordon lautet diejenige Lösung der Schrödingergleichung, die im Unendlichen die Form einer ebenen Welle $e^{i(\mathbf{f}\mathbf{r})}$ hat, in einem Coulombfeld:

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} & e^{i \left[(\mathbf{f}\mathbf{r}) + \frac{1}{k'a} \lg 2kr \sin^2 \frac{\Theta_f}{2} \right]} \left(1 - \frac{i}{2k^3 a'^2 r \sin^2 \frac{\Theta_f}{2}} \right) \\ & + \frac{e^{i \left[kr - \frac{1}{ka'} \lg 2kr \sin^2 \frac{\Theta_f}{2} + \pi + 2\sigma(0, a') \right]}}{2k^2 a' r \sin^2 \frac{\Theta_f}{2}} \end{aligned} \right\}$$

Dabei ist k der Betrag des Vektors \mathbf{f} , Θ_f der Winkel zwischen der Richtung von \mathbf{f} und der Beobachtungsrichtung. Führen wir im Raum Polarkoordinaten r, ϑ, φ ein, und charakterisieren ferner den Vektor \mathbf{f} außer durch seinen Betrag durch seine Winkel ϑ_f, φ_f in diesem Polarkoordinatensystem, so wird

$$(33) \quad 2 \sin^2 \frac{\Theta_f}{2} = (1 - \cos \Theta_f) = 1 - \cos \vartheta_f \cos \vartheta - \sin \vartheta_f \cos(\varphi_f - \varphi).$$

Ferner ist die in (32) auftretende Länge a' gegeben durch

$$(34) \quad a' = \frac{\hbar^2}{m_0 e E} = \frac{e}{E} a,$$

wo a den Bohrschen Atomradius bedeutet. Setzen wir mit

Benutzung der Geschwindigkeit v_k der einfallenden Welle $k = \frac{m_0 v_k}{\hbar}$, so wird also die in (32) auftretende Größe $\frac{1}{k a'}$

$$(35) \quad \frac{1}{k a'} = \frac{e E}{\hbar v_k}.$$

Es erscheint zunächst sonderbar, daß die Verwendung von (32) im Falle *B* für die Bremsung ein anderes Resultat liefern kann, als in der klassischen Mechanik, da die durch den letzten Summanden von (32) gegebene Kugelwelle, auf die es für die Bremsung allein ankommt, genau dieselbe Intensität hat, wie sie ein Strom von Teilchen nach dem klassischen Rutherford'schen Gesetz ergeben würde. Andererseits sind ja allfällige Abweichungen in der Bremsformel von dem klassischen Ausdruck, wie wir gesehen haben, *allein* durch den Fall *B* bestimmt, und man würde daher zunächst vollkommene Übereinstimmung mit der klassischen Bremsformel erwarten.

Indessen hat man zu bedenken, daß wir zum Aufbau unseres Wellenpaketes χ eine *Superposition* von Lösungen der Form (32) brauchen, daß also nicht nur die *Intensität*, sondern auch die *Phase* der Kugelwelle von (32) eine wichtige Rolle spielen kann. Während nun in der klassischen Mechanik (wo \hbar als verschwindend klein betrachtet wird), $1/k a'$ nach (35) als sehr groß angenommen werden muß, also die Phase der Kugelwelle für große r gegeben ist durch

$$\frac{1}{k a'} \lg 2 k r \sin^2 \frac{\Theta_t}{2},$$

spielt in der Quantenmechanik auch der entgegengesetzte Grenzfall eine wichtige Rolle, in dem der durch (35) gegebene Wert von $1/k a'$ sehr klein ist. Wir können also dann statt (32) mit guter Näherung setzen

$$(32a) \quad e^{i(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})} + \frac{e^{i k r}}{2 k^2 a' r \sin^2 \frac{\Theta_t}{2}},$$

wobei wir die höheren Glieder in $1/k a'$ sowie die unwesentlichen Phasenkonstante $\pi + 2 \sigma(0, a')$ in der Kugelwelle vernachlässigt haben. Daß in diesem Grenzfall die Bethesche Bremsformel erhalten wird, liegt an dem gewissermaßen zufälligen Umstand, daß der durch (32a) gegebene Ausdruck für die gestreute Welle mit demjenigen übereinstimmt, den man nach der Bornschen Methode in erster Näherung erhält. Während aber diese in höheren Näherungen divergiert, bleibt natürlich der strenge Gordonsche Ausdruck (32) durchaus endlich und

geht in dem Grenzfall sehr großer Werte von $k a'$ bis auf verschwindend kleine Glieder tatsächlich in (32a) über.

Zur Berechnung von $\chi(t)$ zerlegen wir zunächst das Wellenpaket nach ebenen Wellen. Es sei

$$(36) \quad \chi(0) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\mathfrak{f}) e^{i(\mathfrak{f}r)} d\mathfrak{f}$$

mit

$$(37) \quad f(\mathfrak{f}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \chi(0) e^{-i(\mathfrak{f}R)} d\mathfrak{R}.^1)$$

Da innerhalb eines Zylinders vom Radius b_1 und der Länge Δz nach (29)

$$\chi(0) = e^{ik_0 z} \sqrt{N}$$

ist, und da außerhalb des Zylinders $\chi(0)$ verschwindet, kann man auch schreiben:

$$(38) \quad f(\mathfrak{f}) = \frac{\sqrt{N}}{(2\pi)^{3/2}} \int_C e^{i(\mathfrak{f}_0 - \mathfrak{f}, \mathfrak{R})} d\mathfrak{R},$$

wobei das Integral (durch C angedeutet) nur über den Zylinder zu erstrecken und \mathfrak{f}_0 ein Vektor in der z -Richtung vom Betrage k_0 ist.

Damit nun χ tatsächlich eine asymptotische Lösung der Schrödingergleichung ist, die sich zur Zeit $t = 0$ für negative und dem Betrage nach sehr große Werte von z dem Ausdruck (36) nähert, haben wir nach (32) zu setzen:

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} \chi(t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\mathfrak{f}) e^{-\frac{i\hbar k^2 t}{2m_0}} & \left\{ e^{i\left[\left(\mathfrak{f}r\right) + \frac{1}{k'a} \lg 2kr \sin^2 \frac{\Theta_{\mathfrak{f}}}{2}\right]} \right. \\ & \cdot \left(1 - \frac{i}{2k^3 a'^2 r \sin \frac{\Theta_{\mathfrak{f}}}{2}} \right) + \frac{e^{i\left[kr - \frac{1}{k'a} \lg 2kr \sin^2 \frac{\Theta_{\mathfrak{f}}}{2} + \pi + 2\sigma(0, a')\right]}}{2k^2 a' r \sin^2 \frac{\Theta_{\mathfrak{f}}}{2}} \end{aligned} \right\}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß, wenn z_0 als sehr groß und negativ betrachtet wird, für $t = 0$ in (39) der von den Kugelwellen herrührende Teil durch Interferenz wegfällt; dies ist auch deshalb klar, weil ja die Streuung erst während des Stoßes eintritt. Dieses Weginterferieren findet indessen nicht mehr statt, wenn wir t als groß und positiv betrachten, und wir können dann aus dem von den Kugelwellen herrührenden Anteil von (39) nach (31) die uns interessierende Energie ΔT_B berechnen.

1) $d\mathfrak{f}$ und $d\mathfrak{R}$ stehen für das Volumelement im \mathfrak{f} -, bzw. \mathfrak{R} -Raum.

In der Tat liefert der erste Summand der Klammer in (39), wenn man (39) in (31) einsetzt, keinen Beitrag; er stellt nämlich den unverändert über das Kraftzentrum hinweglaufenden Teil des Wellenpakets χ dar, und für dieses gilt offenbar die Operatorgleichung $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}$. Wir erhalten also nach (31) und (39), wenn wir berücksichtigen, daß

$$\frac{\partial}{\partial r} e^{i k r} = i k e^{i k r}$$

und asymptotisch

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} e^{i \left[k r - \frac{1}{k a'} \lg 2 k r \sin^2 \frac{\Theta_t}{2} + \pi + 2 \sigma(0, a') \right]} \\ & \quad \frac{2 k^2 a' r \sin^2 \frac{\Theta_t}{2}}{2 k^2 a' r \sin^2 \frac{\Theta_t}{2}} \\ & = i k \cos \vartheta e^{i \left[k r - \frac{1}{k a'} \lg 2 k r \sin^2 \frac{\Theta_t}{2} + \pi + 2 \sigma(0, a') \right]} \\ & \quad \frac{2 k^2 a' r \sin^2 \frac{\Theta_t}{2}}{2 k^2 a' r \sin^2 \frac{\Theta_t}{2}} \end{aligned}$$

mit Benutzung von (38):

$$\begin{aligned} \Delta T_B &= \frac{N \hbar^2 k_0}{m_0 a'^2} \frac{1}{(2\pi)^6} \int_C d\Re d\Re' \int e^{i[(\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}, \Re) - (\mathfrak{r}_0 - \mathfrak{r}', \Re')]} d\mathfrak{f} d\mathfrak{f}' \\ (40) \quad & \cdot \int e^{i \left[(k - k') r + 2 \sigma(k, a') - 2 \sigma(k', a') - \frac{\hbar}{2 m_0} (k^2 - k'^2) t \right]} \\ & \cdot \frac{k' \left[k(1 - \cos \Theta_t) \right]^{1 + \frac{i}{k a'}} \left[k'(1 - \cos \Theta_{t'}) \right]^{1 - \frac{i}{k' a'}}}{(1 - \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr}. \end{aligned}$$

Hier läßt sich die Integration über r, k, k', Z und Z' leicht ausführen. Sie liefert, da $k_0 \Delta z \gg 1$ angenommen ist, nur etwas merklich von Null verschiedenes für

$$k = k' = k_0 = \frac{m_0 v}{\hbar},$$

und aus (40) wird

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta T_B &= \frac{N \Delta z}{(2\pi)^4} \frac{4 \hbar^2}{m_0 a'^2 k_0^2} \int_C d\Re_1 d\Re_2 \int e^{-i(\mathfrak{r}_1 \Re_1 - \mathfrak{r}_2 \Re_2)} d\mathfrak{f}_1 d\mathfrak{f}_2 \\ & \cdot \int \frac{1 - \cos \vartheta}{[(\mathfrak{e} - \mathfrak{e}_1)^2]^{1 + i\beta} [(\mathfrak{e} - \mathfrak{e}_2)^2]^{1 - i\beta}} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \end{aligned} \right.$$

Dabei ist

$$(42) \quad \beta = \frac{1}{k_0 a'} = \frac{e E}{\hbar v}.$$

\mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 sind Vektoren mit verschwindender z -Komponente; die Integration über \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 ist in (41) über den Querschnitt des Zylinders zu erstrecken (durch Q angedeutet). \mathfrak{k}_1 und \mathfrak{k}_2 sind Vektoren vom Betrage k_0 , e_1 und e_2 Einheitsvektoren in Richtung der Vektoren \mathfrak{k}_1 bzw. \mathfrak{k}_2 und der Vektor e weist nach dem Punkt auf der Einheitskugel mit den Polarkwinkeln ϑ, φ .

Wir werden im mathematischen Anhang I zeigen, daß sich (41) in der Form schreiben läßt

$$(43) \quad \Delta T_B = (\Delta T_B)_\alpha + (\Delta T_B)_\beta$$

mit

$$(44) \quad (\Delta T_B)_\alpha = \frac{4\pi e^2 E^2}{m_0 v^2} N \Delta z \lg \frac{2m_0 v}{\hbar d}$$

und

$$(44a) \quad (\Delta T_B)_\beta = \frac{2e^2 E^2}{m_0 v^2} \frac{N \Delta z}{(2\pi)^2} \int_Q d\mathfrak{R} \int_K \frac{e^{-i(\mathfrak{R}, \mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}_2)} (\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2)}{(\mathfrak{k}_1^2)^{1+i\beta} (\mathfrak{k}_2^2)^{1-i\beta}} d\mathfrak{k}_1 d\mathfrak{k}_2.$$

Dabei ist in (44) und (44a) d eine reziproke Länge, von der vorausgesetzt ist

$$\frac{1}{b_1} \ll d \ll k_0.$$

$\mathfrak{R}, \mathfrak{k}_1$ und \mathfrak{k}_2 sind in (44a) Vektoren mit verschwindender z -Komponente. Die Integration über \mathfrak{R} ist wieder über den Querschnitt Q des Zylinders, d. h. über eine Kreisscheibe vom Radius b_1 , die Integration über \mathfrak{k}_1 und \mathfrak{k}_2 über eine Kreisscheibe vom Radius d (durch K angedeutet) zu erstrecken.

Totale Bremsung: Um die im Falle A und B berechneten Ausdrücke für die übertragene Energie summieren zu können, empfiehlt es sich, die im Fall A durch (20a) gegebene Energie in einer Form zu schreiben, die analog dem Ausdruck $(\Delta T_B)_\beta$ in (44a) gebaut ist. Dazu gehen wir nochmals auf (20) zurück, indem wir dort über alle Stoßabstände $b > b_1$ des stoßenden Teilchens mitteln. Führen wir für vt und vt' die Bezeichnung Z bzw. Z' ein, so erhalten wir

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta T_A &= \frac{e^2 E^2}{2m_0 v^2} N \Delta z \sum_n f_n \int dZ dZ' e^{\frac{i\omega_n}{v}(Z-Z')} \\ &\quad \cdot \int_{Q'} \frac{\mathfrak{R}^2 + ZZ'}{(\mathfrak{R}^2 + Z^2)^{3/2} (\mathfrak{R}^2 + Z'^2)^{3/2}} d\mathfrak{R}. \end{aligned} \right.$$

Dabei ist \mathfrak{R} die Projektion des Ortsvektors des stoßenden Teilchens auf die x - y -Ebene; er durchläuft in dem Integral (durch Q' angedeutet) alle Werte, für die $|\mathfrak{R}| > b_1$ ist. Durch Differentiation der Formel

$$\frac{1}{R} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{R})}}{\mathbf{f}^2} d\mathbf{f}$$

läßt sich (45) in der Form schreiben

$$(45a) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta T_A &= \frac{(4\pi)^2}{(2\pi)^6} \frac{e^2 E^2}{2m_0 v^2} N \Delta z \sum_n f_n \int e^{\frac{i\omega_n}{v}(Z-Z')} dZ dZ' \\ &\cdot \int_{Q'} d\mathfrak{R} \int \frac{e^{i[(k_x - k_x')X + (k_y - k_y')Y + k_z Z - k_z' Z']}}{\mathbf{f}^2 \mathbf{f}'^2} (\mathbf{f} \mathbf{f}') d\mathbf{f} d\mathbf{f}'. \end{aligned} \right.$$

Die Integration über Z und Z' liefert

$$(2\pi)^3 \delta\left(k_z + \frac{\omega_n}{v}\right) \delta\left(k_z' + \frac{\omega_n}{v}\right),$$

wo δ die Diracsche δ -Funktion bedeutet und aus (45a) wird

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta T_A &= \frac{2e^2 E^2}{m_0 v^2} \frac{N \Delta z}{(2\pi)^2} \\ &\sum_n f_n \int_{Q'} d\mathfrak{R} \int \frac{e^{i(\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, \mathfrak{R})}}{\left[\mathbf{f}_1^2 + \left(\frac{\omega_n}{v}\right)^2\right] \left[\mathbf{f}_2^2 + \left(\frac{\omega_n}{v}\right)^2\right]} \\ &\cdot \left[(\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2) + \left(\frac{\omega_n}{v}\right)^2\right] d\mathbf{f}_1 d\mathbf{f}_2, \end{aligned} \right.$$

wobei \mathbf{f}_1 und \mathbf{f}_2 die Projektionen der Vektoren \mathbf{f} bzw. \mathbf{f}' von (45a) auf die x - y -Ebene sind.

Wegen der Integration über Q' bezüglich \mathfrak{R} spielen in (45) nur Werte von $|\mathbf{f}_1|$ und $|\mathbf{f}_2|$ eine Rolle, die höchstens von der Größenordnung $1/b_1$ sind. Man begeht also keinen merklichen Fehler, wenn man, wie in (43a), die Integration über \mathbf{f}_1 und \mathbf{f}_2 statt über die ganze x - y -Ebene nur über eine Kreisscheibe K vom Radius $d \gg \frac{1}{b_1}$ erstreckt. Wir können also statt (46) auch schreiben

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta T_A &= \frac{2e^2 E^2}{m_0 v^2} \frac{N \Delta z}{(2\pi)^2} \\ &\sum_n f_n \int_{Q'} d\mathfrak{R} \int_K \frac{e^{i(\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, \mathfrak{R})}}{\left[\mathbf{f}_1^2 + \left(\frac{\omega_n}{v}\right)^2\right] \left[\mathbf{f}_2^2 + \left(\frac{\omega_n}{v}\right)^2\right]} \\ &\cdot \left[(\mathbf{f}_1 \mathbf{f}_2) + \left(\frac{\omega_n}{v}\right)^2\right] d\mathbf{f}_1 d\mathbf{f}_2. \end{aligned} \right.$$

Andererseits spielen in (44a) wegen der Integration über Q bezüglich \mathfrak{R} nur Werte von $|\mathbf{f}_1|$ und $|\mathbf{f}_2|$ eine Rolle, die min-

destens von der Größenordnung $1/b_1$ sind. Man begeht also wegen (15) keinen merklichen Fehler, wenn man

$$\mathfrak{k}_1^2 \quad \text{durch} \quad \mathfrak{k}_1^2 + \left(\frac{\omega_n}{v}\right)^2,$$

$$\mathfrak{k}_2^2 \quad \text{,,} \quad \mathfrak{k}_2^2 + \left(\frac{\omega_n}{v}\right)^2$$

und

$$(\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2) \quad \text{,,} \quad (\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2) + \left(\frac{\omega_n}{v}\right)^2$$

ersetzt. Wir können also, da $\sum_n f_n = 1$ ist, statt (44a) auch schreiben

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} (\Delta T_B)_\beta &= \frac{2e^2 E^2}{m_0 v^2} \frac{N \Delta z}{(2\pi)^2} \\ &\sum_n f_n \int_Q d\Re \int_K \frac{e^{i(\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}_2, \Re)}}{\left[\mathfrak{k}_1^2 + \left(\frac{\omega_n}{v}\right)^2\right]^{1+i\beta} \left[\mathfrak{k}_2^2 + \left(\frac{\omega_n}{v}\right)^2\right]^{1-i\beta}} \\ &\cdot \left[(\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2) + \left(\frac{\omega_n}{v}\right)^2\right] d\mathfrak{k}_1 d\mathfrak{k}_2. \end{aligned} \right.$$

Die totale übertragene Energie erhält man dann nach (43), (44), (47) und (48) in der Form

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta T &= (\Delta T_B)_\alpha + (\Delta T_B)_\beta + \Delta T_A = \frac{2e^2 E^2}{m_0 v^2} N \Delta z \sum_n f_n \left\{ 2\pi \lg \frac{2m_0 v}{\hbar d} \right. \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_Q d\Re \int_K \frac{e^{i(\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}_2, \Re)} \left[(\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2) + \left(\frac{\omega_n}{v}\right)^2\right]}{\left[\mathfrak{k}_1^2 + \left(\frac{\omega_n}{v}\right)^2\right]^{1+i\beta} \left[\mathfrak{k}_2^2 + \left(\frac{\omega_n}{v}\right)^2\right]^{1-i\beta}} d\mathfrak{k}_1 d\mathfrak{k}_2 \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_Q d\Re \int_K \frac{e^{i(\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}_2, \Re)} \left[(\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2) + \left(\frac{\omega_n}{v}\right)^2\right]}{\left[\mathfrak{k}_1^2 + \left(\frac{\omega_n}{v}\right)^2\right]^{1+i\beta} \left[\mathfrak{k}_2^2 + \left(\frac{\omega_n}{v}\right)^2\right]^{1-i\beta}} d\mathfrak{k}_1 d\mathfrak{k}_2 \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_Q d\Re \int_K \frac{e^{i(\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}_2, \Re)} \left[(\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2) + \left(\frac{\omega_n}{v}\right)^2\right]}{\left[\mathfrak{k}_1^2 + \left(\frac{\omega_n}{v}\right)^2\right]^{1+i\beta} \left[\mathfrak{k}_2^2 + \left(\frac{\omega_n}{v}\right)^2\right]^{1-i\beta}} \\ &\cdot \left[\left(\frac{\mathfrak{k}_1^2 + \left(\frac{\omega_n}{v}\right)^2}{\mathfrak{k}_2^2 + \left(\frac{\omega_n}{v}\right)^2} \right)^{i\beta} - 1 \right] d\mathfrak{k}_1 d\mathfrak{k}_2. \end{aligned} \right.$$

Das erste und zweite Doppelintegral in (49) lassen sich leicht zusammenfassen. Da in ihnen nämlich insgesamt über die ganze Ebene von \Re integriert wird, liefert die Integration über $\Re: 2\pi^2 \delta(\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}_2)$. Sie liefern also zusammen

$$\int_K \frac{d\mathfrak{k}_1}{\mathfrak{k}_1^2 + \left(\frac{\omega_n}{v}\right)^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^d \frac{k_1 dk_1}{k_1^2 + \left(\frac{\omega_n}{v}\right)^2} \cong 2\pi \lg \frac{dv}{\omega_n},$$

da $d \gg \frac{\omega_n}{v}$ ist. Das dritte Doppelintegral von (49) liefert, wie im mathematischen Anhang II bewiesen wird

$$(50) \quad 2\pi \{\psi(1) - R\psi(1 + i\beta)\} \quad (R = \text{Realteil von}),$$

wo ψ die logarithmische Ableitung der Gammafunktion ist.

Unter Benutzung von (42) erhalten wir also schließlich für die totale übertragene Energie

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta T &= \frac{4\pi e^2 E^2}{m_0 v^2} N \Delta z \\ &\sum_n f_n \left\{ \lg \frac{(2) m_0 v^2}{\hbar \omega_n} + \psi(1) - R\psi\left(1 + i \frac{eE}{\hbar v}\right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Dieser Ausdruck enthält die Bethesche Formel (4) und die Bohrsche Bremsformel (1) als Grenzfälle für sehr kleine bzw. sehr große Werte von $eE/\hbar v$.

In der Tat bleibt für $\frac{eE}{\hbar v} = 0$ nur das erste Glied der Klammer von (51), d. h. die Bethesche Formel übrig. Für sehr große Werte von $eE/\hbar v$ hat man zu bedenken, daß für große Werte des Arguments $x: \psi(x) \cong \lg x$ wird. Also wird für große Werte von $eE/\hbar v$

$$R\psi\left(1 + i \frac{eE}{\hbar v}\right) \cong \lg \frac{eE}{\hbar v}$$

und aus (51) wird dann, wenn man bedenkt, daß

$$\psi(1) = -\gamma^2,$$

$$\Delta T = \frac{4\pi e^2 E^2}{m_0 v^2} N \Delta z \sum_n f_n \lg \frac{k m_0 v^3}{\omega_n e E}$$

mit

$$k = 2 \cdot e^{-\gamma} = 1,123.$$

1) Wir haben hier wieder (2) statt 2 gesetzt, um anzudeuten, daß die Formel (51) nur gilt, so lange das stoßende Teilchen abgelenkt wird, und daß andernfalls statt (2) ein „straggling“-Faktor zu stehen hat. (Vgl. die Fußnote auf S. 288).

2) $\gamma = 0,577$ ist die bekannte Euler-Mascheronische Konstante.

D. h. in diesem Falle ist das Bremsvermögen eines Atoms dasselbe, wie das einer Reihe virtueller klassischer Oszillatoren nach der Bohrschen Theorie.

Die Formel (51), die hier nur für den Fall *eines* Elektrons pro Atom hergeleitet wurde, gilt unverändert auch für mehrere Elektronen. Die Betrachtungen für den Fall *A* gelten dann, wenn unter den f_n und ω_n die Oszillatorstärken bzw. Eigenfrequenzen des ganzen Atoms verstanden werden. Im Falle *B* ist jedes Elektron, wie oben, als frei zu betrachten. Man hat dann nur, im Falle von Z Elektronen pro Atom, zu berücksichtigen, daß $\sum f_n = Z$ ist.

§ 3. Relativistischer Fall

Für den Fall, daß die Geschwindigkeit des stoßenden Teilchens vergleichbar mit der Lichtgeschwindigkeit ist, muß man statt von (6) von der relativistischen Gleichung von Dirac:

$$(52) \quad \left\{ -\frac{\hbar}{ic} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \left\{ \sum_{\kappa=1}^3 \alpha_{\kappa} \left[\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_{\kappa}} - \frac{e}{c} A_{\kappa}(t) \right] + \frac{U}{c} + \frac{e}{c} V(t) + \alpha_4 m_0 c \right\} \right\} \psi$$

ausgehen. In ihr bedeuten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ die bekannten Dirac'schen vierreihigen Matrizen; U ist die vom Atom herrührende potentielle Energie. Ferner seien $V(t)$ das zeitlich veränderliche skalare Potential, das vom Teilchen erzeugt wird, $A_{\kappa}(t)$ die ebenfalls zeitlich veränderlichen Komponenten des von ihm herrührenden Vektorpotentials.

Da in einem mit dem Teilchen bewegten Bezugssystem dessen Wirkung beschrieben wird durch das skalare Potential

$$V_0 = \frac{E}{\sqrt{(x-b)^2 + y^2 + z^2}},$$

so folgen durch eine Lorentzformation die der nichtrelativistischen Formel (5) entsprechenden Ausdrücke:

$$(53) \quad V = \frac{\gamma E}{\sqrt{(x-b)^2 + y^2 + \gamma^2(z-Z_0+vt)^2}},$$

$$(53a) \quad \begin{cases} A_3 = -\frac{v}{c} V = -\frac{v}{c} \frac{\gamma E}{\sqrt{(x-b)^2 + y^2 + \gamma^2(z-Z_0+vt)^2}} \\ A_1 = A_2 = 0, \end{cases}$$

mit

$$(54) \quad \gamma^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Wie in § 2 lassen sich auch hier durch einen trennenden Stoßabstand b_1 zwei Fälle *A* und *B* unterscheiden derart, daß

man es für $b > b_1$ mit einem reinen Dispersionsproblem zu tun hat und für $b < b_1$ das Atomelektron als frei betrachten kann. Die Bedingungen hierfür sind dieselben, wie in § 2.

Fall A: $b > b_1$. Da in diesem Falle das Elektron mit merklicher Wahrscheinlichkeit nur Übergänge nach Zuständen niedriger Energie macht, also seine Geschwindigkeit stets klein bleibt gegen die Lichtgeschwindigkeit, genügt es, an Stelle von (52) die in diesem Falle gültige nichtrelativistische Näherungsgleichung zur Diracschen Gleichung (52)

$$(55) \quad -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{2m_0} \sum_{\kappa=1}^3 \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_{\kappa}} - \frac{e}{c} A_{\kappa} \right)^2 + U + eV \right\} \psi$$

zu betrachten. Bezeichnen wir wieder, wie in § 2, mit

$$H = \frac{p^2}{2m_0} + U$$

die Hamiltonfunktion des Atoms und vernachlässigen die im Vektorpotential quadratischen Glieder, so wird unter Berücksichtigung von $A_1 = A_2 = 0$ aus (55)

$$(56) \quad -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left\{ H - \frac{e\hbar}{2m_0 i c} \left(\frac{\partial}{\partial z} A_3 + A_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) + eV \right\} \psi.$$

Es spielt also der Operator

$$(57) \quad W = eV - \frac{e\hbar}{2m_0 i c} \left(\frac{\partial}{\partial z} A_3 + A_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

dieselbe Rolle wie das Potential V in § 2. Die Formel (18) von § 2 kann also unverändert übernommen werden wenn man dort statt $V:W$ setzt und wir haben uns nur zu überlegen, was an Stelle der in (18a) auftretenden Komponenten der Kraft F_x und F_z an der Stelle des Atoms zu treten hat. Es ist in Analogie zur Bohrschen relativistischen Rechnung (a. a. O.) von Anfang an klar, daß auch (18a) unverändert übernommen werden kann, wenn unter F_x und F_z die Komponenten der elektrischen Kraft auf das Elektron verstanden werden.

Wir wollen mit $V_x, V_z, (A_3)_x, (A_3)_z$ die Ableitungen der Potentiale nach x und z innerhalb des Atoms bezeichnen, wo sie in dem hier behandelten Falle A als örtlich konstant betrachtet werden dürfen. Während nun die Komponente der elektrischen Feldstärke in der x -Richtung wie im nichtrelativistischen Falle gegeben ist durch

$$(58) \quad E_x = -V_x,$$

gilt für die Komponente in der z -Richtung

$$(59) \quad E_z = -V_z - \frac{1}{c} \frac{\partial A_3}{\partial t}$$

oder nach (53a), da V von t nur in der Form $z - Z_0 + vt$ abhängt:

$$E_z = -V_z \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Man sieht also, daß die Berücksichtigung des Vektorpotentials für $v \cong c$ eine wichtige Rolle spielt, da man andernfalls für die Feldstärke in der z -Richtung einen $\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ mal zu großen

Wert erhielte. Um zu zeigen, daß das Vektorpotential diese Rolle auch in der Quantenmechanik beibehält, betrachten wir den in der Formel für die übertragene Energie

$$(60) \quad \Delta T = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t d\tau' \int_0^t d\tau'' \frac{\omega_n}{\hbar} e^{i\omega_n(\tau' - \tau'')} \langle n | W(\tau') | 0 \rangle \langle 0 | W(\tau'') | n \rangle$$

auf tretenden Ausdruck

$$(61) \quad \int_0^t d\tau' e^{-i\omega_n \tau'} \langle 0 | W(\tau') | n \rangle$$

mit

$$\langle 0 | W(\tau') | n \rangle = e \int \psi_0 \left[x V_x + z V_z - \frac{\hbar}{2m_0 i c} \left(\frac{\partial}{\partial z} A_3 + A_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \psi_n d\tau.$$

Nun folgt aus den Hamiltonschen Gleichungen der Quantenmechanik bzw. aus der Schrödingergleichung direkt die Beziehung

$$(62) \quad \frac{\hbar}{i} \int \psi_0 \frac{\partial \psi_n}{\partial z} d\tau = -m_0 i \omega_n \int \psi_0 z \psi_n d\tau.$$

Da $A_3 \frac{\partial \psi_n}{\partial z}$ von der Größenordnung $\frac{1}{\bar{r}} A_3$ (\bar{r} = Atomradius), $\frac{\partial A_3}{\partial z} \psi_n$ aber von der Größenordnung $\frac{1}{b} A_3 \psi_n$ ist, und in dem hier betrachteten Falle $\bar{r} \ll b$ vorausgesetzt ist, dürfen die Ableitungen von A_3 zunächst vernachlässigt werden und es folgt aus (62)

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\hbar}{2m_0 i c} \int \psi_0 \left(\frac{\partial}{\partial z} A_3 + A_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi_n d\tau \\ \cong -\frac{\hbar}{m_0 i c} \int \psi_0 A_3 \frac{\partial \psi_n}{\partial z} d\tau \cong \frac{i \omega_n}{c} \int \psi_0 A_3 z \psi_n d\tau. \end{array} \right.$$

Also wird aus (61):

$$e \int_0^t d\tau' \int \psi_0 \left[x V_x + z \left(V_z - \frac{1}{c} A_3 \frac{d}{d\tau'} \right) \right] e^{-i\omega_n \tau'} \psi_n d\tau.$$

oder durch partielle Integration nach t' , wobei zu bedenken ist, daß für $t' = t$ A_3 verschwindet:

$$\int_0^t dt (0|W(t)|n) e^{-i\omega_n t'} = \int_0^t dt' \int \left[x e V_x + z \cdot \left(e V_z + \frac{e}{c} \frac{dA_3}{dt'} \right) \right] e^{-i\omega_n t'} \psi_n d\tau.$$

Also wird aus (60), entsprechend (18a), tatsächlich

$$(64) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta T &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \frac{\omega_n}{\hbar} e^{i\omega_n(t'-t'')} \{ (n|x|0) F_x(t') \\ &\quad + (n|z|0) F_z(t') \} \{ (0|x|n) F_x(t'') + (0|z|n) F_z(t'') \}, \end{aligned} \right.$$

wo $F_x = e E_x$ und $F_z = e E_z$ die durch (58) und (59) gegebene Bedeutung als Komponenten der elektrischen Kraft an der Stelle des Atoms haben.

Damit ist aber gezeigt, daß auch im relativistischen Fall für $b > b_1$ das Atom so bremst, wie es die entsprechenden virtuellen Oszillatoren nach der klassischen Bohrschen Theorie tun würden. Wir können also das Bohrsche Resultat übernehmen und erhalten so analog zu ΔT_A in § 2 für die mittlere, im Falle A übertragene Energie

$$(65) \quad \Delta T_A = \frac{4\pi e^2 E^2}{m_0 v^2} N \Delta z \sum_n f_n \lg \frac{\gamma k v}{\omega_n b_1}.$$

Fall $B: b < b_1$: Auch hier ändert sich nichts Wesentliches gegenüber den entsprechenden Überlegungen von § 2. Wir können wieder das Problem abbilden auf das der Energieübertragung an ein Wellenpaket, das zur Zeit $t = 0$ die Form $\varphi(0)$ eines Zylinders vom Radius b_1 und der Länge Δz hat. Bezeichnen wir mit T den Operator der kinetischen Energie in der relativistischen Quantenmechanik, so tritt an Stelle von (26) die Gleichung

$$(66) \quad \Delta T = \sum \int [\varphi^*(t) T \varphi(t) - \varphi^*(0) T \varphi(0)] d\tau.$$

Die Summe erstreckt sich dabei über die vier möglichen Werte der Spinvariablen. Beim Übergang von dem mit dem Atom ruhenden zu einem mit dem Teilchen bewegten Bezugssystem, d. h. beim Übergang von dem Wellenpaket φ nach dem Wellenpaket χ , haben wir zu berücksichtigen, daß letzteres nunmehr wegen der Lorentzkontraktion in der z - bzw. r -Richtung im Verhältnis $1/\gamma$ kontrahiert ist. Andererseits transformiert sich der Operator der kinetischen Energie von dem in einem mit dem Atom ruhenden System gültigen Ausdruck T nach einem

im Bezugssystem des Teilchens gültigen Ausdruck T' mittels der Formel der Lorentztransformation

$$(67) \quad T = \gamma(T' - v p_z'),$$

in der $p_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$ den Operator des Impulses in der z -Richtung im Bezugssystem des Teilchens bedeutet. Aus (66) wird also:

$$(68) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta T_B = \gamma \sum \int \left\{ \chi^*(t) \left[T' - v \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} \right] \chi(t) \right. \\ \left. - \chi^*(0) \left[T' - v \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} \right] \chi(0) \right\} d\tau. \end{aligned} \right.$$

Wegen des Erhaltungssatzes der kinetischen Energie vor und nach dem Stoß, fällt, entsprechend wie in (30), der T' enthaltende Teil in (68) fort und es bleibt entsprechend (31):

$$(69) \quad \Delta T_B = \gamma v \frac{\hbar}{i} \sum \int \chi^*(t) \left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial z} \right] \chi(t) d\tau.$$

Für die weitere Rechnung ist nun an Stelle der Gordonschen asymptotischen Formel (32) die entsprechende Formel zu verwenden, wie sie Mott¹⁾ aus der Diracschen relativistischen Gleichung für die Streuung einer ebenen Welle an einem Coulombschen Kraftzentrum hergeleitet hat.

Während für die Streuung unter kleinen Winkeln, d. h. für kleine Werte von $\sin \frac{\Theta_f}{2}$ die Gordonsche Formel (32) unverändert übernommen werden kann, tritt für die Streuung unter größeren Winkeln an Stelle der Rutherfordschen Winkelabhängigkeit mit $\frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta_f}{2}}$ für die gestreute Intensität nach Mott²⁾ die Abhängigkeit

$$\frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta_f}{2}} - \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\Theta_f}{2}}.$$

Dies hat zur Folge, daß an Stelle der Energie $(\Delta T_B)_a$ von § 2, wie sie durch (44) gegeben ist, und die, wie im mathematischen Anhang I gezeigt ist, hervorgeht aus dem Integral

$$\frac{\pi e^2 E^2}{2 m_0 v^2} N \Delta z \int_{\vartheta_0}^{\pi} \frac{\sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) d\vartheta}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} = \frac{2\pi e^2 E^2}{m_0 v^2} N \Delta z \lg \frac{2}{1 - \cos \vartheta_0}$$

1) N. F. Mott, Proc. Roy. Soc. A **124**, S. 426. 1929; **135**, S. 429. 1932.

2) A. a. O. S. 451. Formel (6, 9).

hier

$$\begin{aligned}
 (\Delta T_B)_\alpha &= \frac{\pi e^2 E^2}{2 m_0 v^2} N \Delta z \int_{\vartheta_0}^{\pi} \left(\frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} - \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \right) \\
 &\quad \cdot \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) d\vartheta \\
 &= \frac{2\pi e^2 E^2}{m_0 v^2} N \Delta z \cdot \left\{ \lg \frac{2}{1 - \cos \vartheta_0} - \frac{v^2}{2c^2} (1 + \cos \vartheta_0) \right\}
 \end{aligned}$$

tritt, was sich für kleine Winkel ϑ_0 von dem Ausdruck (44) durch einen Zusatzterm

$$- \frac{4\pi e^2 E^2}{m_0 v^2} N \Delta z \cdot \frac{v^2}{2c^2}$$

unterscheidet. Es wird also hier statt (44)

$$(70) \quad (\Delta T_B)_\alpha = \frac{4\pi e^2 E^2}{m_0 v^2} N \Delta z \left\{ \lg \frac{2m_0 v}{\hbar d} - \frac{v^2}{2c^2} \right\}.$$

Die übrigen Rechnungen von § 2 können unverändert übernommen werden, und man erhält für die totale Bremsung im relativistischen Fall analog zu (51)

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta T &= \frac{4\pi e^2 E^2}{m_0 v^2} N \Delta z \sum_n f_n \left\{ \lg \frac{(2)m_0 v^2}{\hbar \omega_n} - \frac{1}{2} \lg \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{v^2}{2c^2} + \psi(1) - R \psi \left(1 + i \frac{eE}{\hbar v} \right) \right\} \cdot 1 \end{aligned} \right.$$

Diese Bremsformel geht im Grenzfall sehr kleiner Werte von $eE/\hbar v$ in die Bethe-Møllersche, für sehr große $eE/\hbar v$ in die Bohrsche Formel (2) über. Auch sie gilt, wie (51), unverändert für ein Atom mit mehreren Elektronen, wenn unter f_n und ω_n seine Oszillatorstärken bzw. Eigenfrequenzen verstanden werden.

Zusammenfassung

Die Bremsung rasch bewegter geladener Teilchen beim Durchgang durch Materie wird berechnet für den Fall, daß sich die Rückwirkung des bremsenden Atoms auf das gebremste Teilchen vernachlässigen läßt.

Es wird so für den relativistischen und nichtrelativistischen Fall eine Bremsformel hergeleitet, die für mit hinreichend großer Geschwindigkeit v bewegte Teilchen der Ladung E gilt und die die Resultate von Bethe und Møller einerseits und die von Bohr nach der klassischen Mechanik erhaltenen andererseits als Grenzfälle für sehr kleine, bzw. sehr große Werte von $eE/\hbar v$ enthält.

1) Wegen des Einklammers von 2 unter dem Logarithmus vgl. die Fußnoten auf S. 288 und S. 307.

Mathematischer Anhang

I. Zur Berechnung von (41) müssen wir bedenken, daß wegen der dort auftretenden Integration über Q , den Querschnitt des Zylinders vom Radius b_1 , im Integral über \mathbf{t}_1 und \mathbf{t}_2 nur solche Faktoren \mathbf{t}_1 und \mathbf{t}_2 eine Rolle spielen, deren x - und y -Komponenten die Größenordnung $1/b_1$ nicht übersteigen. Andererseits haben \mathbf{t}_1 und \mathbf{t}_2 den Betrag k_0 .

Wir denken uns also eine Kugel vom Radius k_0 geschlagen und auf dieser eine Kalotte ABC (vgl. Fig. 1), deren Radius d der Bedingung

$$\frac{1}{b_1} \ll d \ll k_0$$

genügen soll. Die hierzu notwendige Annahme $\frac{1}{b_1} \ll k_0$ ist wegen (15) und (16) erfüllt.

Dann liegen die Endpunkte der in (41) wesentlich vorkommenden Vektoren \mathbf{t}_1 und \mathbf{t}_2 sicher weit innerhalb der Kalotte ABC . Den Winkel AOB bezeichnen wir mit ϑ_0 und zerlegen nun die Integration über ϑ und φ in (41) in zwei Teile:

a) $\vartheta > \vartheta_0$: Hier läßt sich mit guter

Näherung $(e \mathbf{e}_1) = (e \mathbf{e}_2) = \cos \vartheta$ setzen: also:

$$[(e - e_1)^2]^{1+i\beta} [(e - e_1)^2]^{1-i\beta} = 4(1 - \cos \vartheta)^2,$$

und es wird

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\vartheta_0}^{\pi} \frac{1 - \cos \vartheta}{[(e - e_1)^2]^{1+i\beta} [(e - e_2)^2]^{1-i\beta}} \sin \vartheta d\vartheta \\ & \cong \frac{\pi}{2} \lg \frac{2}{1 - \cos \vartheta_0} \cong \pi \lg \frac{2 m_0 v}{\hbar d}, \end{aligned}$$

da ϑ_0 ein sehr kleiner Winkel ist, so daß man setzen darf:

$$1 - \cos \vartheta_0 \cong \frac{\vartheta_0^2}{2} \cong \frac{1}{2} \left(\frac{d}{k_0} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d \hbar}{m_0 v} \right)^2.$$

In derselben Näherung liefert die Integration über $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ insgesamt einen Faktor $(2\pi)^4$, und es wird also:

$$(\Delta T_B)_a = \frac{4\pi e^2 E^2}{m_0 v^2} N \Delta z \lg \frac{2 m_0 v}{\hbar d},$$

wie in (44) behauptet, da wegen (42) $\frac{\hbar^2}{k_0^2 a'^2} = \frac{e^2 E^2}{v^2}$ ist.

β) $\vartheta < \vartheta_0$: Wir wollen hier statt des Vektors e in (41) den Vektor $\mathbf{f} = k_0 e$ einführen. In dem hier betrachteten Winkelbereich läßt sich die Kalotte ABC praktisch durch eine ebene Kreisfläche ersetzen, so daß man in (41) nur die Projektionen $\mathbf{t}_1', \mathbf{t}_2', \mathbf{f}'$ der Vektoren $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{f}$ auf die x - y -Ebene zu variieren braucht und ihre z -Komponenten als fest vorgegeben und gleich k_0 betrachten kann. Ferner gilt hier angenähert:

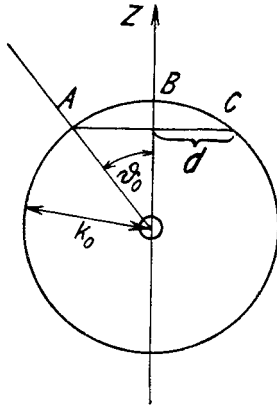


Fig. 1. Einteilung der Integration über die Richtungen des gestoßenen Elektrons

$$1 - \cos \vartheta = 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \simeq \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{f}'^2}{k_0^2}$$

und es wird also:

$$(\Delta T_B)_\beta = \frac{2 e^2 E^2}{m_0 v^2} \frac{N \Delta z}{(2\pi)^4} \int_Q d\mathfrak{R}_1 d\mathfrak{R}_2 \int e^{-i(\mathfrak{f}'_1 \mathfrak{R}_1 - \mathfrak{f}'_2 \mathfrak{R}_2)} d\mathfrak{f}'_1 d\mathfrak{f}'_2 \\ \cdot \int_K \frac{\mathfrak{f}'^2}{[(\mathfrak{f}' - \mathfrak{f}'_1)^2]^{1-i\beta} [(\mathfrak{f}' - \mathfrak{f}'_2)^2]^{1+i\beta}} d\mathfrak{f}',$$

wobei die Integration über \mathfrak{f}' über eine Kreisfläche vom Radius d zu erstrecken ist (durch K angedeutet).

An Stelle von \mathfrak{f}'_1 und \mathfrak{f}'_2 wollen wir nun zwei neue Vektoren $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{f}'_1 - \mathfrak{f}'$ und $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{f}'_2 - \mathfrak{f}'$ einführen. Dann wird

$$(\Delta T_B)_\beta = \frac{2 e^2 E^2}{m_0 v^2} \frac{N \Delta z}{(2\pi)^4} \int_Q d\mathfrak{R}_1 d\mathfrak{R}_2 \int_K \frac{e^{-i(\mathfrak{B}_1 \mathfrak{R}_1 - \mathfrak{B}_2 \mathfrak{R}_2)}}{(\mathfrak{B}_1^2)^{1-i\beta} (\mathfrak{B}_2^2)^{1+i\beta}} d\mathfrak{B}_1 d\mathfrak{B}_2 \\ \cdot \int_K e^{-i(\mathfrak{f}', \mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_2)} \mathfrak{f}'^2 d\mathfrak{f}',$$

oder durch partielle Integration nach \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 :

$$(\Delta T_B)_\beta = \frac{2 e^2 E^2}{m_0 v^2} \frac{N \Delta z}{(2\pi)^4} \int_Q d\mathfrak{R}_1 d\mathfrak{R}_2 \int_K \frac{e^{-i(\mathfrak{B}_1 \mathfrak{R}_1 - \mathfrak{B}_2 \mathfrak{R}_2)}}{(\mathfrak{B}_1^2)^{1-i\beta} (\mathfrak{B}_2^2)^{1+i\beta}} (\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2) d\mathfrak{B}_1 d\mathfrak{B}_2 \\ \cdot \int_K e^{-i(\mathfrak{f}', \mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_2)} d\mathfrak{f}'.$$

Bei der Integration über \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2 haben wir unter das Integral den Buchstaben K gesetzt, um anzudeuten, daß wegen der angenommenen Größenordnung von d der Wertebereich von \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2 näherungsweise derselbe ist, wie der von \mathfrak{f}' , nämlich eine Kreisscheibe vom Radius d erfüllt. In derselben Näherung ist dann

$$\int_K e^{-i(\mathfrak{f}', \mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_2)} d\mathfrak{f}' = 2\pi^2 \delta(\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_2),$$

wo δ die Diracsche δ -Funktion ist, und es wird

$$(\Delta T_B)_\beta = \frac{2 e^2 E^2}{m_0 v^2} \frac{N \Delta z}{(2\pi)^2} \int_Q d\mathfrak{R} \int_K \frac{e^{-i(\mathfrak{R}, \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2)}}{(\mathfrak{B}_1^2)^{1-i\beta} (\mathfrak{B}_2^2)^{1+i\beta}} (\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2) d\mathfrak{B}_1 d\mathfrak{B}_2,$$

wie in (44a) behauptet, wenn man statt \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2 die neue Bezeichnung \mathfrak{f}_1 bzw. \mathfrak{f}_2 einführt.

II. Wir wollen die Bezeichnung

$$J(\beta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_Q d\mathfrak{R} \int_K \frac{e^{i(\mathfrak{R}, \mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_2)} \left[(\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_2) + \left(\frac{\omega_n}{v} \right)^2 \right]}{\left[\mathfrak{f}_1^2 + \left(\frac{\omega_n}{v} \right)^2 \right]^{1+i\beta} \left[\mathfrak{f}_2^2 + \left(\frac{\omega_n}{v} \right)^2 \right]^{1-i\beta}} d\mathfrak{f}_1 d\mathfrak{f}_2$$

einführen. Dann ist das letzte Integral von (49) gegeben durch $J(0) - J(\beta)$ und bekannt, sobald $J(\beta)$ für jeden Wert seines Arguments bekannt ist.

Wegen der Integration über Q' bezüglich R spielen in $J(\beta)$ nur Werte von $|\mathbf{f}_1|$ und $|\mathbf{f}_2|$ eine Rolle, die höchstens von der Größenordnung $1/b_1$ sind, so daß wir hier bezüglich \mathbf{f}_1 und \mathbf{f}_2 statt über K ohne merklichen Fehler über die ganze x - y -Ebene integrieren können. Wir können also auch schreiben:

$$J(\beta) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dZ dZ' e^{\frac{i\omega_n}{v}(Z-Z')} \int_{Q'} d\Re \cdot \int \frac{e^{i[(k_x - k'_x)X + (k_y - k'_y)Y + k_z Z - k'_z Z']}}{(\mathbf{f}^2)^1 + i\beta (\mathbf{f}'^2)^1 - i\beta} (\mathbf{f} \mathbf{f}') d\mathbf{f} d\mathbf{f}',$$

wobei die Integration bezüglich \mathbf{f} und \mathbf{f}' über den ganzen Raum zu nehmen ist. Sei

$$\int \frac{e^{i(k_x X + k_y Y + k_z Z)}}{(\mathbf{f}^2)^1 + i\beta} d\mathbf{f} = F(\beta, X, Y, Z) = F(\beta)$$

und bezeichnen wir ferner

$$F(\beta, X, Y, Z') = F'(\beta),$$

so wird

$$J(\beta) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dZ dZ' e^{\frac{i\omega_n}{v}(Z-Z')} \int_{Q'} \left\{ \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial F'}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial F'}{\partial Y} + \frac{\partial F}{\partial Z} \frac{\partial F'}{\partial Z'} \right\} d\Re.$$

Nun ist mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$\begin{aligned} F(\beta, x, y, z) &= \int \frac{e^{i(\mathbf{f} \mathbf{r})}}{(\mathbf{f}^2)^1 + i\beta} d\mathbf{f} = \int_0^\infty k^2 dk \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{e^{-ikr \cos \vartheta}}{k^2 + 2i\beta} \sin \vartheta d\vartheta \\ &= 4\pi \int_0^\infty \frac{\sin kr}{kr} k^{-2i\beta} dk = \frac{4\pi}{r^{1-2i\beta}} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^{1+2i\beta}} dx \\ &= \frac{4\pi \operatorname{sh} \pi \beta}{i r^{1-2i\beta}} \Gamma(-2i\beta). \end{aligned}$$

Also mit Benutzung von

$$\Gamma(2i\beta) \Gamma(-2i\beta) = \frac{\pi}{2\beta \operatorname{sh} 2\pi\beta}:$$

$$\begin{aligned} J(\beta) &= \frac{(4\pi)^2}{(2\pi)^4} \operatorname{sh}^2 \pi \beta \frac{\pi}{2\beta \operatorname{sh} 2\pi\beta} (1 + 4\beta^2) \cdot 2\pi \\ &\quad \cdot \int_{b_1}^\infty b db \int dZ dZ' e^{\frac{i\omega_n}{v}(Z-Z')} \frac{b^2 + ZZ'}{(b^2 + Z^2)^{\frac{3}{2} + i\beta} (b^2 + Z'^2)^{\frac{3}{2} - i\beta}}. \end{aligned}$$

Führt man die neuen dimensionslosen Variablen

$$\tau = \frac{b \omega_n}{v}, \quad \xi = \frac{Z}{b}, \quad \xi' = \frac{Z'}{b}$$

ein und ferner die Bezeichnung $\varepsilon = \frac{b_1 \omega_n}{v}$, so wird

$$J(\beta) = 2\pi \frac{1+4\beta^2}{4\pi\beta} \operatorname{th} \pi\beta \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi d\xi' e^{i\tau(\xi-\xi')} \cdot \frac{1+\xi\xi'}{(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}-i\beta} (1+\xi'^2)^{\frac{3}{2}+i\beta}}.$$

Nun ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\tau\xi}}{(1+\xi^2)^{\nu+\frac{1}{2}}} d\xi = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \tau\xi}{(1+\xi^2)^{\nu+\frac{1}{2}}} d\xi = 2 \left(\frac{\tau}{2}\right)^{\nu} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} K_{\nu}(\tau). \quad (1)$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi e^{i\tau\xi}}{(1+\xi^2)^{\nu+\frac{1}{2}}} d\xi &= 2 \int_0^{\infty} \frac{\xi \sin \tau\xi}{(1+\xi^2)^{\nu+\frac{1}{2}}} d\xi = -2 \frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} \frac{\cos \tau\xi}{(1+\xi^2)^{\nu+\frac{1}{2}}} d\xi \\ &= -2 \left(\frac{\tau}{2}\right)^{\nu} \frac{1}{\tau} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \{ \tau K_{\nu}'(\tau) + \nu K_{\nu}(\tau) \} \\ &= 2 \left(\frac{\tau}{2}\right)^{\nu} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} K_{\nu-1}(\tau). \quad (2) \end{aligned}$$

Also wird

$$J(\beta) = 8\pi \frac{1+4\beta^2}{4\pi\beta} \operatorname{th} \pi\beta \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+i\beta\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}-i\beta\right)} \cdot \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{1+i\beta} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{1-i\beta} \{ K_{1+i\beta}(\tau) K_{1-i\beta}(\tau) + K_{i\beta}(\tau) K_{-i\beta}(\tau) \}$$

und mit Benutzung von

1) $K_{\nu}(x)$ ist nach Watson (The Theory of Bessel functions, Cambr. 1922; im folgenden als W. bezeichnet) S. 172 verwandt mit den Besselfunktionen vom Index ν .

2) W. S. 79.

$$\Gamma\left(\frac{3}{2} + i\beta\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - i\beta\right) = \frac{1 + 4\beta^2}{4} \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi \beta} \quad \text{und} \quad \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi.$$

$$J(\beta) = 2\pi \frac{\operatorname{sh} \pi \beta}{\pi \beta} \int_{\varepsilon}^{\infty} \tau \, d\tau \{K_{1+i\beta}(\tau) K_{1-i\beta}(\tau) + K_{i\beta}(\tau) K_{-i\beta}(\tau)\}.$$

Nun ist¹⁾

$$K_{\mu}(\tau) K_{\nu}(\tau) = 2 \int_0^{\infty} K_{\mu+\nu}(2\tau \operatorname{ch} t) \operatorname{ch}(\mu - \nu)t \, dt,$$

also

$$J(\beta) = 4\pi \frac{\operatorname{sh} \pi \beta}{\pi \beta} \int_0^{\infty} \cos 2\beta t \, dt \int_{\varepsilon}^{\infty} \tau \, d\tau \{K_2(2\tau \operatorname{ch} t) + K_0(2\tau \operatorname{ch} t)\}$$

oder, wenn wir statt $\tau : x = 2\tau \operatorname{ch} t$ einführen

$$J(\beta) = \frac{\operatorname{sh} \pi \beta}{\beta} \int_0^{\infty} \frac{\cos 2\beta t}{\operatorname{ch}^2 t} \, dt \int_{2\varepsilon \operatorname{ch} t}^{\infty} x \, dx [K_2(x) - K_0(x)].$$

Wir haben nun zu beachten, daß wegen (15)

$$\varepsilon = \frac{b_1 \omega_n}{v} \ll 1$$

ist und müssen untersuchen, wie sich $K_2(x)$ und $K_0(x)$ für kleine Argumente verhalten. Es gilt für $x \ll 1$ ²⁾

$$K_0(x) \simeq -\lg \frac{x}{2},$$

$$K_2(x) \simeq \frac{2}{x^2}.$$

Da $x K_0(x)$ für kleine Werte von x verschwindet, dürfen wir also setzen

$$\int_{2\varepsilon \operatorname{ch} t}^{\infty} x K_0(x) \, dx \simeq \int_0^{\infty} x K_0(x) \, dx = 1.$$

Denn es gilt ³⁾

$$\int_0^{\infty} x \, dx K_{\nu}(x) = \Gamma\left(\frac{2-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2+\nu}{2}\right),$$

und wegen des im Integral über t auftretenden Ausdruckes $1/\operatorname{ch}^2 t$ kommen nur Werte von $\operatorname{ch}(t)$ von der Größenordnung 1 in Betracht, so daß auch stets $\varepsilon \operatorname{ch} t \ll 1$ ist.

Dagegen wächst $x K_0(x)$ für kleine Werte von x stark an und wir müssen hier ein anderes Verfahren einschlagen. Wir setzen

1) W. S. 440.

2) W. S. 80.

3) W. S. 388.

$$\begin{aligned} \int_{2\varepsilon \operatorname{ch} t}^{\infty} x K_2(x) dx &= \lim_{z \rightarrow 0} \int_{2\varepsilon \operatorname{ch} t}^{\infty} \frac{K_2(\sqrt{x^2 + z^2})}{x^2 + z^2} x^3 dx \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{K_2(\sqrt{x^2 + z^2})}{x^2 + z^2} x^3 dx - \int_0^{2\varepsilon \operatorname{ch} t} \frac{K_2(\sqrt{x^2 + z^2})}{x^2 + z^2} x^3 dx \right\}. \end{aligned}$$

Das erste Integral gibt $2K_0(z)$, denn es ist ¹⁾

$$\int_0^{\infty} \frac{K_\nu(\sqrt{x^2 + z^2})}{(x^2 + z^2)^{\frac{\nu}{2}}} x^{1+\nu} dx = 2^{\frac{\nu}{2}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)}{z^{\frac{\nu}{2} - 1}} K_{\frac{\nu}{2}}(z).$$

Zur Berechnung des zweiten dürfen wir für $K_2(\sqrt{x^2 + z^2})$ den für kleine Argumente gültigen Ausdruck

$$K_2(\sqrt{x^2 + z^2}) \simeq \frac{2}{x^2 + z^2}$$

gebrauchen. Das zweite Integral liefert also

$$2 \int_0^{2\varepsilon \operatorname{ch} t} \frac{x^3 dx}{(x^2 + z^2)^2} = \lg \frac{(2\varepsilon \operatorname{ch} t)^2 + z^2}{z^2} + \frac{z^2}{(2\varepsilon \operatorname{ch} t)^2 + z^2} - 1$$

und mit Benutzung von $K_0(z) \simeq -\lg \frac{z}{2} - \gamma$ für $z \ll 1$ ²⁾

$$\begin{aligned} \int_{2\varepsilon \operatorname{ch} t}^{\infty} x K_2(x) dx &= \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ 2K_0(z) + \lg \frac{z^2}{(2\varepsilon \operatorname{ch} t)^2 + z^2} - \frac{z^2}{(2\varepsilon \operatorname{ch} t)^2 + z^2} + 1 \right\} \\ &= 2 \lg 2 - 2 \lg(2\varepsilon \operatorname{ch} t) + 1 - 2\gamma = 1 - 2\gamma - 2 \lg \varepsilon - 2 \lg \operatorname{ch} t. \end{aligned}$$

Also wird

$$J(\beta) = \frac{2 \operatorname{sh} \pi \beta}{\beta} \left\{ (1 - \gamma - \lg \varepsilon) \int_0^{\infty} \frac{\cos 2\beta t}{\operatorname{ch}^2 t} dt - \int_0^{\infty} \frac{\cos 2\beta t}{\operatorname{ch}^2 t} \lg \operatorname{ch} t dt \right\}.$$

Führen wir statt t eine neue Integrationsvariable v ein durch $1 - 2v = \operatorname{th} t$ so wird

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2\beta t}{\operatorname{sh}^2 t} dt = \int_0^1 v^{i\beta} (1-v)^{-i\beta} dv = \frac{\Gamma(1+i\beta) \Gamma(1-i\beta)}{\Gamma(2)} = \frac{\pi \beta}{\operatorname{sh} \pi \beta},$$

da

$$\int_0^1 v^p (1-v)^q dv = \frac{\Gamma(p+1) \Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}$$

¹⁾ W. S. 417.

²⁾ W. S. 80 (γ = Euler-Mascheronische Konstante = 0,577).

und

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2\beta t}{\operatorname{ch}^2 t} \lg \operatorname{ch} t \, dt = - \int_0^1 v^{i\beta} (1-v)^{-i\beta} \lg 2 \sqrt{v(1-v)} \, dv$$

$$= - \frac{\pi\beta}{\operatorname{sh} \pi\beta} \left\{ \lg 2 + \frac{1}{2} [\psi(1+i\beta) + \psi(1-i\beta)] - 2\psi(2) \right\},$$

wo ψ die logarithmische Ableitung der Gammafunktion bedeutet, denn es ist

$$\int_0^1 v^p (1-v)^q \lg v \, dv = \frac{\partial}{\partial p} \int_0^1 v^p (1-v)^q \, dv$$

$$= - \frac{\Gamma(p+1) \Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} \{ \psi(p+1) - \psi(p+q+2) \}.$$

Also wird, wenn man berücksichtigt, daß $\psi(2) = 1 - \gamma$ ist,

$$J(\beta) = 2\pi \{ R \psi(1+i\beta) - \lg e + \lg 2 \}$$

und

$$J(0) - J(\beta) = 2\pi \{ \psi(1) - R \psi(1+i\beta) \}$$

wie in (50) behauptet.

Die vorliegende Arbeit geht in ihrem Ursprung auf einen Aufenthalt zurück, den mir der Ørsted-Fonds im Winter 1931/32 in Kopenhagen ermöglichte. Hrn. Prof. N. Bohr möchte ich für die freundliche Aufnahme in seinem Institut und für viele anregende Diskussionen meinen wärmsten Dank aussprechen.

Leipzig, Institut für theoretische Physik der Universität,
8. Juli 1932.

(Eingegangen 25. November 1932)