

Zur Theorie des Durchgangs schneller Korpuskularstrahlen durch Materie

Von H. Bethe

Der unelastische Zusammenstoß einer schnellen geladenen Partikel (Elektron, Proton, α -Teilchen) mit einem Atom wird nach der wellenmechanischen Theorie von Born behandelt. Ein sehr einfaches Verfahren für die Auswertung der in die Theorie eingehenden Matrixelemente wird angegeben (§ 3) und die engen Beziehungen zur Intensität des Comptoneffekts festgestellt (§ 5). Die Theorie wird für Zusammenstöße mit Wasserstoffatomen im einzelnen und für kompliziertere Atome soweit wie möglich durchgeführt, es werden berechnet: die Winkelverteilung der unelastisch (§§ 6, 7 und 17) und der elastisch (§ 16) gestreuten Partikel, die Anregungsquerschnitte für die Anregung von optischen (§§ 9 und 17) und von Röntgenniveaus (§ 15) durch Elektronenstoß, die Gesamtzahl aller unelastischen und aller elastischen Stöße, sowie die Zahl der primär (§§ 10 und 18) und der sekundär (§ 19) gebildeten Ionen, die Geschwindigkeitsverteilung der Sekundärelektronen (§ 18) und schließlich die Bremsung der stoßenden Partikel durch die Gasatome (§§ 10, 12 und 13). Die Übereinstimmung mit der Erfahrung ist befriedigend bis gut. (Näheres vgl. die Zusammenfassung § 20.)

I. Allgemeines

§ 1. Einleitung

Beim Durchgang von Elektronen durch Materie finden bekanntlich im wesentlichen drei Arten von Vorgängen statt:

1. Elastische Stöße: Richtungsänderung des Elektrons ohne nennenswerte¹⁾ Änderung seiner Geschwindigkeit, keine Änderung des Anregungszustandes des Atoms. Die elastisch gestreuten Elektronen sind interferenzfähig.

2. Unelastische Stöße: Bremsung und [im allgemeinen kleine²⁾] Richtungsänderung des Elektrons, verbunden mit An-

1) Natürlich findet beim Zusammenstoß mit einem ruhenden Atom stets eine kleine Geschwindigkeitsverminderung gemäß dem Energieimpulssatz statt.

2) Vgl. § 6.

regung oder Ionisierung des gestoßenen Atoms. Die unelastisch gestreuten Elektronen sind nicht interferenzfähig.

3. Bremsung des Elektrons unter Emission von Wellenstrahlung (Röntgenbremsspektrum).

Zu allen drei Vorgängen existiert ein Analogon bei der Wechselwirkung zwischen Licht und Materie, nämlich

1. kohärente, interferenzfähige Streuung ohne Wellenlängenänderung,
2. inkohärente Streuung, im allgemeinen mit Vergrößerung der Wellenlänge (Raman- bzw. Comptoneffekt),
3. Photoeffekt, d. h. Absorption von Wellenstrahlung unter Beschleunigung eines Elektrons aus einem Atom.

Die Analogie zwischen schnellen Elektronen und kurzwelligem Licht geht dabei recht weit: Die Anzahl der elastischen Elektronenstöße steht bekanntlich in enger Beziehung zur Intensität der kohärent gestreuten Röntgenstrahlen gleicher Wellenlänge¹⁾ und ebenso die Zahl der unelastischen Stöße zur Intensität der Streuung mit Wellenlängenänderung.²⁾

α -Strahlen erleiden beim Durchgang durch Materie ebenfalls elastische und unelastische Stöße, dagegen spielt die Bremsung unter Emission von Wellenstrahlung bei ihnen wegen ihrer großen Masse nur eine sehr geringe Rolle. Dafür existiert hier noch die Möglichkeit der Einfangung eines Elektrons aus einem Atom. Diese „Umladung“ der α -Teilchen ist von Oppenheimer³⁾ quantenmechanisch befriedigend behandelt worden; in dieser Arbeit werden wir sie ebenso wie die Emission der Röntgenbremsstrahlung außer acht lassen und uns auf die Theorie der elastischen und vor allem der unelastischen Stöße und der hierdurch bewirkten Bremsung⁴⁾ der stoßenden Partikel sowie der Anregung und Ionisierung der Atome durch das stoßende Teilchen beschränken.

1) Vgl. H. Bethe, Ann. d. Phys. **57**. S. 55. 1928, § 8; N. F. Mott, Nature **123**. S. 717. 1929, u. **124**. S. 986. 1929; Proc. Cambr. Soc. **25**. S. 304. 1929.

2) Diese Arbeit § 5.

3) J. R. Oppenheimer, Phys. Rev. **31**. S. 349. 1928.

4) Trotz der Vernachlässigung der Emission des Röntgenbremsspektrums müssen wir dabei nahezu die totale Bremsung bekommen, weil die zur Emission des Röntgenbremsspektrums verwandte Energie sehr klein ist (etwa $\frac{1}{1000}$ der kinetischen Energie der Partikel).

Auch hier fehlt es ja nicht an Theorien, die sich teils auf rein klassischer Basis bewegen [Bohr]¹⁾, teils mehr oder weniger Gebrauch von quantentheoretischen Gesichtspunkten machen.²⁾ Doch sind in all diesen Arbeiten³⁾ notgedrungen ziemlich willkürliche Annahmen über die Wechselwirkung zwischen stoßendem Teilchen und Atom gemacht. Es scheint daher angesichts der zahlreichen experimentellen Arbeiten auf diesem Gebiet lohnend, die streng wellenmechanische Bornsche Stoßtheorie⁴⁾ möglichst weitgehend wirklich durchzuführen. Man kommt dabei teilweise zu etwas anderen⁵⁾, jedenfalls aber zu wesentlich präziseren Resultaten als die klassische Theorie. Dabei hat man den Vorteil, daß die Rechnung gegenüber der klassischen in dem bekannten Sinn stark vereinfacht ist: Die Wellenmechanik liefert sofort das, was man haben will, nämlich die Statistik des Stoßvorgangs, ohne zuerst, wie die klassische Mechanik, über die physikalisch bedeutungsvollen Größen hinaus einen Stoßparameter einführen zu müssen, um dann erst über alle Werte dieses Parameters zu mitteln.

Die vorliegende Theorie beschränkt sich auf den Fall *großer* Geschwindigkeit der stoßenden Partikel. Denn nur dann gibt ja die Bornsche Stoßtheorie schon in der hier verwendeten ersten Näherung ein zuverlässiges Resultat. Und zwar bedeutet, wie Hr. Distel vom hiesigen Institut in einer demnächst erscheinenden Arbeit zeigen wird, das Bornsche Verfahren eine Entwicklung nach fallenden Potenzen von v^2/v_0^2 , wo v die Geschwindigkeit des Partikels, v_0 die eines Elektrons in einer „Bohrschen Bahn“ des Atoms bedeutet. Das Verfahren konvergiert also z. B. für α -Teilchen bestimmter Geschwindigkeit nicht besser als für Elektronen der gleichen

1) N. Bohr, Phil. Mag. **25**. S. 10. 1913; **30**. S. 58. 1915.

2) G. H. Henderson, Phil. Mag. **44**. S. 680. 1922, Kritik dazu bei R. H. Fowler, Proc. Cambr. Soc. **21**. S. 521. 1923; I. A. Gaunt, Proc. Cambr. Soc. **23**. S. 732. 1927; W. Elsasser, Ztschr. f. Phys. **45**. S. 522. 1928.

3) Außer bei Elsasser, der, wie wir, die Bornsche Stoßtheorie benutzt. Doch sind seine Rechnungen für die Streuung schneller Teilchen nicht explizit durchgeführt. Auch läßt sich seine Ableitung ganz wesentlich vereinfachen.

4) M. Born, Ztschr. f. Phys. **38**. S. 803. 1926.

5) Im Gegensatz zu Gaunt, vgl. Zitat 2.

Geschwindigkeit. An und für sich würde man in Analogie zur Optik eher eine Entwicklung nach fallenden Potenzen der Wellenzahl, oder eventuell auch eine solche nach fallenden Potenzen der kinetischen Energie erwarten. Wir setzen also stets $v \gg v_0$ voraus.

§ 2. Bezeichnungen

Wir werden durchgehend folgende Bezeichnungen verwenden:

a = Radius der innersten Bohrschen Bahn im Wasserstoffatom.

$$\alpha = \frac{1}{a}, \quad \alpha_0 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{-2mE_0}, \quad \alpha_n = \frac{2\pi}{h} \sqrt{-2\pi E_n},$$

$$\alpha_{0n} = \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha_n^2} \quad [\text{vgl. (12)}], \quad \alpha_{nl} = \frac{2\pi}{h} \sqrt{-2\pi E_{nl}}.$$

E_n = Energie (Eigenwert) des n^{ten} Atomzustandes.

E_0 = Eigenwert des Grundzustandes.

E_{nl} = Eigenwert (negative Ionisierungsspannung) der (nl) -Schale.

ϵ_n = Matrixelement, entsprechend dem Übergang vom Grundzustand zum n^{ten} angeregten Zustand, Definition vgl. (11).

$\epsilon_{nl, n'l'}$ = Matrixelement entsprechend dem Übergang eines Elektrons aus der Schale nl in die Schale $n'l'$.

$dE(q)$ = von dem Partikelstrom bei Stößen mit einer Impulsänderung zwischen q (vgl. dort) und $q + dq$ auf das Atom übertragene Energie.

E = gesamte pro Zeiteinheit auf das Atom übertragene Energie.

$f_{m,n}$ = generalisierte Oszillatorstärke, entsprechend dem Übergang vom Atomzustand m zum Zustand n [Definition (45)]

$f_{nl, n'l'}$ = Oszillatorstärke entsprechend dem Übergang eines Elektrons von der Schale nl zur Schale $n'l'$ [Definition (61a)].

$f_{nl} = \sum_{n'l'} f_{nl, n'l'} =$ Summe der Oszillatorenstärken für alle Übergänge eines Elektrons der nl -Schale (vgl. 62).

F = Atomformfaktor der Röntgenstreuungstheorie.

$d\Phi(q)$ = Differentieller Wirkungsquerschnitt = Anzahl der Stöße mit einer Impulsübertragung zwischen q und $q + dq$ (§ 7).

Φ = Integraler Wirkungsquerschnitt für sämtliche unelastischen Stöße (§ 10).

Φ_n = Integraler Wirkungsquerschnitt für die Anregung des n^{ten} Atomzustandes (vgl. § 3ff., § 9).

$\Phi_{n'l}^{n'l}$ = Wirkungsquerschnitt für den Übergang eines Elektrons aus der Schale $n\ l$ in die Schale $n'l'$ (vgl. § 14).

$\Phi^{n'l}$ = Wirkungsquerschnitt für alle möglichen Anregungen eines $n\ l$ -Elektrons (vgl. § 15).

φ_n = generalisierte Übergangswahrscheinlichkeit [Definition (34)].

$\mathfrak{R} = \frac{2\pi}{h} M \mathbf{v}$ = Ausbreitungsvektor der de Brogliewelle der Bewegung der Partikel relativ zum Atom vor dem Stoß.

$\mathfrak{R}' = \frac{2\pi}{h} M \mathbf{v}'$ = Ausbreitungsvektor nach dem Stoß.

$K = |\mathfrak{R}|$, $K' = |\mathfrak{R}'|$ = Wellenzahlen des stoßenden Teilchens.

k = Wellenzahl des Sekundärelektrons.

l = azimutale Quantenzahl.

$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{2\pi}{K}$ = Wellenlänge der de Brogliewelle des stoßenden Teilchens.

m = Masse des Elektrons.

M_1 = Masse des stoßenden Teilchens.

M_2 = Masse des gestoßenen Atoms.

$M = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$ = effektive Masse des stoßenden Teilchens.

$\mathbf{q} = \mathfrak{R} - \mathfrak{R}' = \frac{2\pi}{h} M(\mathbf{v} - \mathbf{v}') = \text{Stoßvektor} = (\text{geometrische})$
Änderung des Impulses des stoßenden Teilchens in Einheiten $h/2\pi$, $q = |\mathbf{q}|$.

\mathfrak{R} = Ortsvektor des stoßenden Teilchens, gezählt vom Kern des gestoßenen Atoms.

\mathbf{r}_j = Ortsvektor des j^{ten} Elektrons.

s_0 = Anzahl der primär gebildeten Ionen pro Zentimeter Bahn.

s = Anzahl der insgesamt gebildeten Ionen pro Zentimeter Bahn.

$T = \frac{M_1}{2} v^2$ = kinetische Energie der Partikel.

$T_r = \frac{M}{2} v^2$ = kinetische Energie der Bewegung der Partikel relativ zum Atom.

$d\tau_{\mathfrak{R}}$ = Volumelement im Raum des stoßenden Teilchens.

$d\tau_j$ = Volumelement im Raum des j^{ten} Elektrons, $d\tau = \prod_j d\tau_j$

u = Zeitabhängige Wellenfunktion des Gesamtsystems (Atom + stoßende Partikel).

\mathbf{v} = Geschwindigkeit der Partikel vor dem Stoß, $v = |\mathbf{v}|$.

\mathbf{v}' = Geschwindigkeit nach dem Stoß, $v' = |\mathbf{v}'|$.

ze = Ladung der stoßenden Partikel.

Ze = Ladung des Atomkerns.

Z_{nl} = Anzahl der Elektronen in der nl -Schale.

Ψ_n = Eigenfunktion des Atoms im n^{ten} Zustand.

ψ_{nl} = Eigenfunktion eines Elektrons in der nl -Schale (n = Hauptquantenzahl, l = Azimutalquantenzahl).

ψ_k = kontinuierliche Eigenfunktion eines Elektrons (Wellenzahl k).

§ 3. Allgemeine Streuformel

Vernachlässigen wir die Wechselwirkung zwischen stoßender Partikel und Atom, so wird die Wellenfunktion des Systems Atom + Partikel gegeben durch

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0 = \sqrt{\frac{2\pi M}{h K}} e^{i(\mathfrak{R} \mathfrak{N})} \Psi_0(\mathbf{r}_j) e^{-\frac{2\pi i}{h} W t} \\ W = \frac{h^2}{8\pi^2 M} K^2 + E_0. \end{array} \right.$$

(1) ist so normiert, daß pro Zeiteinheit eine Partikel durch die Flächeneinheit tritt. „Schalten“ wir nun zur Zeit $t = 0$ die „Wechselwirkung ein“, so läßt sich die Wellenfunktion zur Zeit t nach den *Eigenfunktionen* χ ohne Wechselwirkung entwickeln (Methode der Variation der Konstanten):

$$(2) \quad u(t) = \sum_{n, \mathfrak{R}'} a_n(\mathfrak{R}', t) \chi_n(\mathfrak{R}'; \mathfrak{R}, \mathbf{r}_j)$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi_n(\mathfrak{R}') = \sqrt{\frac{M K'}{2\pi \hbar^2}} e^{i(\mathfrak{R}' \mathfrak{R})} \psi_n(\mathbf{r}_j) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} W' t} \\ W' = E_n + \frac{\hbar^2}{8\pi^2 M} K'^2. \end{array} \right.$$

(3) ist pro Energieintervall $dW' = \frac{\hbar^2}{4\pi^2 M} K' dK'$ und pro Raumwinkelement $d\omega'$ (bezüglich der Geschwindigkeit und Richtung der Partikel nach dem Stoß) normiert. Die Koeffizienten $a_n(\mathfrak{R}')$ in (2) ergeben sich aus der zeitabhängigen Schrödingergleichung in erster Näherung (V die Wechselwirkungsenergie) zu:

$$(4) \quad \frac{\hbar}{2\pi i} \cdot \frac{d a_n(\mathfrak{R}' t)}{dt} = \int V u_0 \bar{\chi}_n(\mathfrak{R}') d\tau \cdot d\tau_{\mathfrak{R}}.$$

$$(4) \quad a_n(\mathfrak{R}', t) = \frac{e^{-\frac{2\pi i}{\hbar}(W-W')t} - 1}{W' - W} \sqrt{\frac{M^2 K'}{\hbar^3 K}} e^2 z \cdot V_{on}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}').$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_{on}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') = V_{on}(q) = \int \left(\frac{Z}{|\mathfrak{R}|} - \sum_{j=1}^Z \frac{1}{|\mathfrak{R} - \mathbf{r}_j|} \right) \\ \cdot \psi_0(\mathbf{r}_j) \bar{\psi}_n(\mathbf{r}_j) e^{i(\mathfrak{R} - \mathfrak{R}', \mathfrak{R})} d\tau \cdot d\tau_{\mathfrak{R}}. \end{array} \right.$$

Geht man zu großen Zeiten t über, so wird merklich der Energiesatz

$$(6) \quad W = W' = E_0 + \frac{\hbar^2}{8\pi^2 M} K^2 = E_n + \frac{\hbar^2}{8\pi^2 M} K'^2;$$

erfüllt, und man erhält durch Integration von $|a_n(\mathfrak{R}')|^2$ über ein gewisses Energieintervall $\Delta W' \gg \frac{\hbar}{2\pi t}$ und Differentiation des Integrals nach der Zeit in bekannter Weise die Übergangswahrscheinlichkeit nach dem Zustand (n, \mathfrak{R}') ; d. h. die Zahl der Partikel, die pro Zeiteinheit in die Richtung \mathfrak{R}' gestreut werden und dabei das Atom in den n^{ten} Quantenzustand versetzen:

$$(7) \quad \begin{aligned} d\Phi_n(q) &= d\omega' \frac{d}{dt} \int dW' |a_n(\mathfrak{R}', t)|^2 \\ &= \frac{4\pi^2}{\hbar} \cdot \frac{M^2 K'}{\hbar^3 K} \cdot 2\pi \sin \vartheta d\vartheta \cdot e^4 z^2 \cdot |V_{on}(q)|^2 \\ d\Phi_n(q) &= \frac{1}{2\pi} \alpha^2 \left(\frac{M}{m} z \right)^2 \sin \vartheta d\vartheta |V_{on}|^2 \frac{K}{K'} \end{aligned}$$

$d\Phi_n(q)$ hat die Dimension einer Fläche (Anzahl der Stöße pro Zeiteinheit bei einem Strom von einer Partikel pro Zeiteinheit durch die *Flächeneinheit*). Es bedeutet den Wirkungsquerschnitt des Atoms für Streuungen unter dem Winkel ϑ bei gleichzeitiger Anregung des n^{ten} Atomzustandes, welchen wir als *differentiellen Wirkungsquerschnitt* bezeichnen wollen.

Die Matricelemente V_{on} der Wechselwirkungsenergie werden nun im allgemeinen so ausgewertet, daß erst über die Koordinaten des Atomelektrons und dann erst über die der stoßenden Partikel integriert wird¹⁾, oder auch, indem $e^{i(\mathfrak{R}-\mathfrak{R}',\mathfrak{R})}$ nach Kugelfunktionen entwickelt und dann zuerst die Integrationen nach den Winkelkoordinaten, nachher die Radialintegrationen erledigt werden.²⁾

Viel einfacher ist folgender Weg, der außerdem die Beziehung zur Streuung von Röntgenstrahlen in unmittelbarster Evidenz setzt:

Wir integrieren *zuerst* über den Raum der Partikel und bemerken, daß z. B.

$$(8) \quad \varphi_q(r_j) = \int \frac{1}{|\mathfrak{R} - r_j|} e^{i(q\mathfrak{R})} d\tau_{\mathfrak{R}}$$

das Potential einer mit der Dichte

$$(8a) \quad \rho_q(\mathfrak{R}) = e^{i(q\mathfrak{R})}$$

verteilten Ladung auf den Punkt r_j ist. Aus

$$(8b) \quad \Delta \varphi_q(r) = -4\pi \rho = -4\pi e^{i(qr)}$$

folgt aber unmittelbar

$$(9) \quad \varphi_q(r) = \frac{4\pi}{q^2} e^{i(rq)}.$$

Also wird der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$(10) \quad d\Phi_n(q) = \frac{8\pi a^2}{q^4} \left(\frac{M}{m} z \right)^2 \frac{K'}{K} |\varepsilon_n(q)|^2 \sin \vartheta d\vartheta$$

mit

$$(11) \quad \varepsilon_n(q) = \int \left(Z - \sum_j e^{i(qr_j)} \right) \Psi_0 \bar{\Psi}_n(r_j) \prod_j d\tau_j,$$

wobei nun bloß noch über die Koordinaten der Atomelektronen zu integrieren ist.

1) Z. B. G. Wentzel, Ztschr. f. Phys. **40**. S. 590. 1927.

2) W. Elsasser, a. a. O.

Der Schluß von (8) auf (9) mag etwas kühn erscheinen, weil das Integral in (8) nicht konvergiert. In der Tat ist ja, wenn wir $\mathbf{r} = \mathfrak{R} - \mathbf{r}_j$ setzen, und ein Polarkoordinatensystem mit der Achse q einführen:

$$\begin{aligned}\varphi_q(\mathbf{r}_j) &= e^{i(q \mathbf{r}_j)} \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi 2\pi \sin \vartheta d\vartheta \cdot \frac{1}{r} e^{i q r \cos \vartheta} \\ &= \frac{4\pi e^{i(q \mathbf{r}_j)}}{q} \int_0^\infty \sin q r \cdot dr.\end{aligned}$$

Wir können aber Konvergenz in üblicher Weise leicht erzielen, indem wir den Betrag q des Stoßvektors einen gewissen Bereich $q - \Delta q$ bis $q + \Delta q$ durchlaufen lassen und φ_q über diesen Bereich mitteln, sowie die Integrationen über q und r vertauschen:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta q} \int_{q-\Delta q}^{q+\Delta q} dq' \varphi_{q'}(\mathbf{r}_j) \\ &= \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{4\pi e^{i(q \mathbf{r}_j)}}{2q \Delta q} \int_0^\infty dr \int_{q-\Delta q}^{q+\Delta q} \sin q' r dq' \\ &= \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{4\pi e^{i(q \mathbf{r}_j)}}{2q \Delta q} \int_0^\infty \frac{dr}{r} (\cos(q - \Delta q)r - \cos(q + \Delta q)r) \\ &= \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{4\pi e^{i(q \mathbf{r}_j)}}{2q \Delta q} \ln \frac{q + \Delta q}{q - \Delta q} = \frac{4\pi e^{i(q \mathbf{r}_j)}}{q^2}.\end{aligned}$$

Dadurch ist Formel (10) gerechtfertigt. Die Diskussion verschieben wir auf den übernächsten Paragraphen.

§ 4. Energetische Beziehungen

Vorerst müssen wir die durch den Energiesatz (6) implizierten Beziehungen betrachten zwischen dem Stoßvektor q , dem Streuwinkel ϑ und der auf das Atom übertragenen Anregungsenergie

$$(12) \quad E_n - E_0 = \frac{h^2}{8\pi^2 m} (\alpha_0^2 - \alpha_n^2) = \frac{h^2}{8\pi^2 m} \alpha_n^2.$$

Die durch (12) definierten reziproken Längen α_0 , α_n und α_{0n} sind für diskrete Atomzustände n von der Größenordnung des reziproken Atomradius (10^8 cm^{-1}). Wenn Anregung zu einem Zustand k des kontinuierlichen Spektrums stattfindet (Ionisierung), ist $-\alpha_n^2$ durch k^2 (Wellenzahl des Sekundärelektrons) zu ersetzen und

$$(12a) \quad E_k - E_0 = \frac{h^2}{8\pi^2 m} (\alpha_0^2 + k^2).$$

Der Energiesatz (6) fordert:

$$(13) \quad K^2 - K'^2 = \frac{M}{m} \alpha_{0n}^2.$$

Nach Definition ist

$$(14) \quad \begin{aligned} q &= \mathfrak{R} - \mathfrak{R}' \\ q^2 &= K^2 + K'^2 - 2KK' \cos \vartheta, \end{aligned}$$

also

$$(14a) \quad q^2 = 2K^2 - \frac{M}{m} \alpha_{0n}^2 - 2K \sqrt{K^2 - \frac{M}{m} \alpha_{0n}^2} \cos \vartheta.$$

Für elastische Stöße ($E_n = E_0$, $\alpha_{0n} = 0$) ist das identisch mit

$$(14b) \quad q = 2K \sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{4\pi \sin \frac{\vartheta}{2}}{\lambda} = \frac{4\pi M}{h} v \sin \frac{\vartheta}{2}.$$

Diese Größe ist ja aus der Theorie der Röntgenstreuung bekannt, indem von ihr die Streuintensität unter dem Winkel ϑ abhängt.

Bei festgehaltener Anregungsenergie ergibt sich aus (14)

$$(15) \quad \sin \vartheta d\vartheta = \frac{q dq}{KK'}.$$

Man sieht, daß bei Einführung von (15) in (10) die Wellenzahl K' der Partikel nach dem Stoß ganz herausfällt:

$$(16) \quad d\Phi_n(q) = \frac{8\pi \alpha^2}{K^2} \left(\frac{M}{m} z^2 \right)^2 \frac{dq}{q^3} |\epsilon_n(q)|^2.$$

Versteht man also unter dem differentiellen Wirkungsquerschnitt statt der Anzahl der in ein bestimmtes Raumwinkel-element $d\vartheta \cdot \sin \vartheta$ abgelenkten Teilchen die Anzahl der Teilchen, deren Impuls beim Stoß eine Änderung zwischen $\frac{h}{2\pi} q$ und $\frac{h}{2\pi} (q + dq)$ erfährt, so hängt der Wirkungsquerschnitt

von der durch den Stoß bewirkten Anregung des Atoms nur noch vermöge des Matrixelementes $\varepsilon_n(q)$ ab. Diese Tatsache erleichtert die Bildung des Gesamtquerschnittes durch Integration über ϑ bzw. q sehr (§§ 7, 8). Im Hinblick auf diese spätere Integration stellen wir jetzt die Integrationsgrenzen fest:

1. Der kleinstmögliche Stoßvektor q_{\min} (Streuwinkel $\vartheta = 0$) hängt [vgl. (14a)] von der Anregungsenergie $E_n = E_0$ ab. Solange nun diese Anregungsenergie von der Größenordnung der Ionisierungsspannung ist, d. h. solange entweder ein diskreter Atomzustand angeregt oder im Fall der Ionisierung dem abgelösten Sekundärelektron nur eine kleine kinetische Energie (eben von der Größenordnung der Ionisierungsspannung) mitgegeben wird, gilt sicher $K \gg \alpha_{0n} \frac{M}{m}$ und wegen $M \gg m$ erst recht $K^2 \gg \frac{M}{m} \alpha_{0n}^2$. Denn wir mußten ja (vgl. § 1 Ende) voraussetzen, daß die Geschwindigkeit $v = \frac{hK}{2\pi M}$ der Partikel groß ist gegen die Geschwindigkeit eines Elektrons in einer Bohrschen Bahn des Atoms, welche analog durch den Ausdruck $v_0 = \frac{h\alpha_0}{2\pi m}$ zu definieren ist, damit wir überhaupt mit der ersten Näherung des Bornschen Verfahrens auskommen. Wir können also in (14a) nach

$$\frac{M \alpha_{0n}^2}{m K^2} = \frac{E_n - E_0}{T_r}$$

entwickeln und bekommen

$$(17a) \quad q^2 = \left(2K^2 - \frac{M}{m} \alpha_{0n}^2 \right) (1 - \cos \vartheta) + \frac{1}{4} \left(\frac{M \alpha_{0n}^2}{m K} \right)^2 \cos \vartheta + \dots$$

$$(17) \quad q_{\min} = q_{\vartheta=0} = \frac{M \alpha_{0n}^2}{2m K}.$$

Weil $K \gg \frac{M}{m} \alpha_{0n}$, gilt

$$q_{\min} \ll \alpha_{0n},$$

und zwar ist q_{\min} um so kleiner, je kleiner die übertragene Anregungsenergie und je größer die Geschwindigkeit der Partikel ist.¹⁾

1) Ebenso wie bei W. Elsasser, a. a. O. S. 537.

2. Für die überwiegende Mehrzahl der Stöße mit *kleinem* Stoßvektor q ist die eben gemachte Annahme: Energieübertragung ungefähr gleich Ionisierungsspannung und daher klein gegen kinetische Energie der Partikel sicher zutreffend (vgl. § 6). Unter den unelastischen Stößen mit *großem* q^1) dagegen sind weitaus am häufigsten diejenigen, bei denen für stoßende Partikel und Sekundärelektronen der *Impulssatz* nahezu erfüllt ist. Da q bis auf den Faktor $\hbar/2\pi$ die Impulsänderung des stoßenden Teilchens bedeutet, so muß also der Impuls des Sekundärelektrons nahezu $\frac{\hbar}{2\pi} q$, seine Wellenzahl $k \approx q$ sein. Dann ist wegen $\alpha_0 \ll q$ auch $\alpha_{0n} \approx q$ und man erhält durch Einsetzen in (18a) für den Winkel ϑ zwischen den Flugrichtungen der stoßenden Partikel vor und nach dem Stoß

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos \vartheta &= \frac{K^2 + K'^2 - q^2}{2KK'} = \frac{K^2 \left(1 - \frac{m}{M}\right) + K'^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right)}{2KK'} \\ &= \frac{2K^2 - q^2 \left(1 + \frac{M}{m}\right)}{2K \sqrt{K^2 - q^2 \frac{M}{m}}} \end{aligned} \right.$$

Ebenso für den Winkel φ zwischen der Richtung q des Sekundärelektrons und der ursprünglichen Flugrichtung \mathfrak{R} des Primärelektrons nach dem cos-Satz:

$$(18a) \quad \cos \varphi = \frac{K^2 + q^2 - K'^2}{2Kq} = \frac{q \left(1 + \frac{M}{m}\right)}{2K}.$$

a) Ist die stoßende Partikel ein Elektron, so ist wegen $M = m$

$$(19) \quad q = K \sin \vartheta = K \cos \varphi, \quad K' = K \cos \vartheta.$$

Dies ist der aus der klassischen Theorie bekannte Satz²⁾, daß

nach dem Stoß die Flugrichtungen von Primär- und Sekundärelektron zueinander senkrecht sind. Der größtmögliche Streuwinkel α_m ist 90° , der maximale Stoßvektor $q_{\max} = K$.

Ist die stoßende Partikel ein schweres (u- oder H-)Teilchen, so ist $M \gg m$. Aus (18a) folgt dann, daß bei kleiner

d. h. großer Ablenkung der stoßenden Partikel.

Impulsübertragung das Sekundärelektron senkrecht zur Richtung des α -Teilchens aus dem Atom austritt, während es bei größerem Stoßvektor q eine wachsende Impulskomponente in der Primärrichtung erhält. Der größte mögliche Stoßvektor ergibt sich, wenn das Elektron in der Fortsetzung der Richtung des ankommenden Teilchens ausgeschleudert wird ($\varphi = 0$), es ist dann

$$(20) \quad q_{\max} = 2K \frac{m}{M+m} \approx 2K \frac{m}{M},$$

d. h. das Sekundärelektron eilt dem α -Teilchen mit der Geschwindigkeit $\frac{h q}{2\pi m} \approx 2 \cdot \frac{h K}{2\pi M} = 2v$ voraus. Dies steht natürlich vollkommen im Einklang mit dem Resultat der klassischen Theorie, die ja auf Energie- und Impulssatz aufgebaut war. — Der Ablenkungswinkel ϑ der stoßenden Partikel bewegt sich nur in einem sehr kleinen Bereich¹⁾: wenn der übertragene Impuls von 0 bis $\frac{q_{\max}}{\sqrt{2}}$ wächst (und φ von 90° bis 45° ab-

nimmt), steigt der Streuwinkel von 0 bis $\vartheta_{\max} = \arcsin \frac{m}{M}$, um dann bei weiterer Steigerung der Impulsübertragung bis q_{\max} wieder auf Null abzunehmen. —

Der bisher besprochene Energieverlust $E_n - E_0$ des stoßenden Teilchens durch die Anregung bzw. Ionisierung des Atoms bezieht sich nur auf die Verminderung der *Relativgeschwindigkeit* des stoßenden Teilchens gegenüber dem Atom von v auf v' („Zusammenstoß mit den Elektronen des Atoms“ in der klassischen Theorie). Wenn aber das Atom anfangs in Ruhe war, so ist es dies nach dem Stoß nicht mehr, und infolgedessen ist die Energieverminderung des stoßenden Teilchens in einem ruhenden System noch etwas größer: es findet eine Übertragung von kinetischer Energie von der Partikel auf das Atom gemäß dem klassischen Energieimpulssatz statt. Die Geschwindigkeit

$$\frac{M_1}{M_1 + M_2} v$$

1) Es gilt ja nach dem sin-Satz $\frac{\sin \vartheta}{\sin \varphi} = \frac{q}{K'}$.

des Schwerpunkts von Atom und stoßender Partikel relativ zu einem ruhenden System und diejenige

$$\frac{M_2}{M_1 + M_2} \mathbf{v}'$$

der Partikel relativ zum Schwerpunkt setzen sich vektoriell zur Partikelgeschwindigkeit \mathbf{v}'' nach dem Stoß im ruhenden System zusammen:

$$\begin{aligned} v''^2 &= \frac{1}{(M_1 + M_2)^2} (M_1^2 v^2 + M_2^2 v'^2 + 2 M_1 M_2 v v' \cos \vartheta) \\ &= v^2 - \frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2} (v^2 + v'^2 - 2 v v' \cos \vartheta) \\ &\quad - \frac{M_2}{M_1 + M_2} (v^2 - v'^2). \end{aligned}$$

Der Gesamtverlust an kinetischer Energie im Ruhesystem ist also

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{M_1}{2} (v^2 - v''^2) &= \frac{M_1}{M_1 + M_2} \cdot \frac{M}{2} \cdot |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2 + \frac{M}{2} (v^2 - v'^2) \\ &= \frac{M_1}{M_1 + M_2} \cdot \frac{h^2}{8\pi^2 M} q^2 + \frac{h^2}{8\pi^2 M} (K^2 - K'^2) \\ &= \frac{h^2}{8\pi^2 M_2} q^2 + E_n - E_0. \end{aligned} \right.$$

Der zweite Term, die übertragene Anregungsenergie, ist, wie wir gesehen haben, von der Größenordnung $\frac{h^2}{8\pi^2 m} q^2$ (bei großem q) bzw. $\frac{h^2}{8\pi^2 m} \alpha_0^2$ (wenn $q \ll \alpha_0$) also ist der erste Term stets mindestens um den Faktor $\frac{m}{M_2} = \frac{\text{Elektronenmasse}}{\text{Atommasse}}$ kleiner als der zweite, ebenso wie in der klassischen Theorie der Energieverlust durch die Streuung am Kern gegenüber dem durch die Streuung an den Elektronen.

§ 5. Stöße und Röntgenstreuung

Wir kommen zur Diskussion der Formel (10) bzw. (16) für den differentiellen Wirkungsquerschnitt und zu dessen Beziehung zur Intensität der Röntgenstreuung:

1) Für die elastischen Stöße wird [vgl. (11)]

$$(22) \quad \varepsilon_0(q) = Z - \int \sum_i e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_i)} |\Psi_0|^2 d\tau = Z - F.$$

Mit Rücksicht auf (14b) gilt also der bekannte Satz:

Der Wirkungsquerschnitt für elastische Stöße unter bestimmtem Ablenkungswinkel ϑ ist

$$(23) \quad d\Phi_0(q) = \frac{2\pi e^4 z^2}{16 T^2} \frac{(Z-F)^2}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \sin \vartheta d\vartheta,$$

wo Z die Ordnungszahl und F der (von q abhängige!) Atomformfaktor der Röntgenstreuungstheorie ist. Die elastische Streuung von korpuskularen Teilchen unterscheidet sich von derjenigen der Röntgenstrahlen durch das Hinzutreten der „Streuung durch den Kern“ zur „Streuung durch die Elektronenwolke des Atoms“ ($Z - F$ statt F) und durch den charakteristischen Faktor $\frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$ der Rutherfordschen Formel.

2. Für die *unelastischen* Stöße verschwindet die „Streuung am Kern“

$$\int Z \Psi_0 \overline{\Psi}_n d\tau$$

wegen der Orthogonalität der Eigenfunktionen; es wird

$$(24) \quad -\varepsilon_n = \sum_j \int e^{i(q \cdot r_j)} \Psi_0 \overline{\Psi}_n(r_j) d\tau$$

gleich dem für die *inkohärente* Röntgenstreuung (Comptoneffekt) maßgebenden Matrixelement.¹⁾

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für *unelastische* Stöße ist bis auf den „Rutherfordfaktor“ $\frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$ proportional

der Intensität der Comptonstreuung von Röntgenstrahlen. Dabei sind Stöße mit gleicher Impulsänderung $\frac{h}{2\pi} q$ (der Partikel bzw. des Lichtquants) zu vergleichen. [q ist in einem mittleren Winkelgebiet proportional $\sin \vartheta/2$.²⁾]

3. Bei kleinen Ablenkungswinkeln und nicht zu großer Energieübertragung $E_n - E_0$ auf das Atom sahen wir [Formel (17a)]

1) Vgl. G. Wentzel, *Ztschr. f. Phys.* **58**, S. 349. 1929 und an anderen Orten. Waller u. Hartree, *Proc. Roy. Soc.* **124**, S. 119. 1929.

2) Nämlich dann, wenn (17a) noch gilt (d. h. $q \ll \alpha_0$), jedoch das erste Glied von (17) überwiegt, d. h. $q \gg q_{\min} \approx \frac{\alpha_0^2}{2K} \frac{M}{m}$.

und (17)], daß der Stoßvektor q klein ist gegenüber dem „reziproken Atomradius“. In diesem Fall, der — wegen des Faktors $1/q^4$ in der Formel (10) für den differentiellen Stoßquerschnitt — die Mehrzahl aller Stöße umfaßt, können in (11) bzw. (24) die Exponentialfunktionen

$$e^{i(q \cdot r_j)} = e^{iqx_j} = 1 + iqx_j \pm \dots$$

entwickelt und nach dem ersten Glied abgebrochen werden. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(q) &= iq \int \sum_j x_j \psi_0 \overline{\psi}_n(r_j) d\tau \\ (25) \quad \left\{ \begin{aligned} d\Phi_n(q) &= \frac{8\pi\alpha^2}{q^4} \left(\frac{M}{m}z\right)^2 \frac{K'}{K} \sin \vartheta d\vartheta \cdot q^2 \cdot |x_{0n}|^2 \\ &= \frac{8\pi\alpha^2}{K^2} \cdot \left(\frac{M}{m}z\right)^2 |x_{0n}|^2 \frac{dq}{q}, \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

wo

$$(26) \quad x_{0n} = \int \sum_j x_j \psi_0 \overline{\psi}_n(r_j) d\tau$$

das Matricelement der Summe der Elektronenkoordinaten (bzw. des elektrischen Moments des Atoms) ist. Für kleine Stoßvektoren q (d. h. kleine Impulsänderungen des stoßenden Teilchens) ist also ganz allgemein die Stoßwahrscheinlichkeit proportional dem Quadrat der Koordinatenmatrix, d. h. proportional der optischen Übergangswahrscheinlichkeit für die betreffende Anregung des Atoms¹⁾, und wegen des Faktors $1/q$ wird auch der integrale Stoßquerschnitt nahezu proportional dieser Größe (vgl. §§ 9, 14).

II. Zusammenstoß mit Wasserstoffatomen

§ 6. Auswertung der Matricelemente

Die in den differentiellen Wirkungsquerschnitt (20) eingehenden und durch (11) definierten Matricelemente $\varepsilon_n(q)$ sind für Übergänge vom Grundzustand des Wasserstoffatoms zu

1) Dieser Satz ist schon von Elsasser (a. a. O. S. 537/38) für Wasserstoff abgeleitet und als allgemeingültig vermutet worden.

Zuständen des kontinuierlichen Spektrums von Wentzel (a. a. O.) für die Zwecke des Comptoneffektes im parabolischen Koordinaten ausgewertet worden. Dabei ist zu beachten, daß zu einem bestimmten kontinuierlichen Eigenwert

$$E_k = \frac{h^2}{8\pi^2 m} k^2$$

eine kontinuierliche Schar von Eigenfunktionen ψ_{km} gehört, die durch die parabolische Quantenzahl m unterschieden sind. Infolgedessen wird das (pro dk normierte) Quadrat des Matrixelements für den Übergang vom Grundzustand zum Zustand E_k (vgl. S. 365 bei Wentzel)

$$(27) \quad |\varepsilon_k(q)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dm |\varepsilon_{0,km}(q)|^2$$

Durch elementare Auswertung der Formel (28) von Wentzel erhält man ¹⁾ mit Rücksicht auf seine Formeln (27), (25) und (19):

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\varepsilon_{0,km}(q)|^2 = \frac{256 k^2 q^2 \alpha^5 e^{-2 \frac{\alpha}{k} \arctg \frac{2 \alpha k}{q^2 - k^2 + \alpha^2}}}{[(q+k)^2 + \alpha^2]^3 [(q-k)^2 + \alpha^2]^3} \cdot a(m) \\ a(m) = \frac{q^2 + 4k^2 m^2}{(1 + e^{-2\pi(n+m)})(1 + e^{-2\pi(n-m)})}, \quad n = \frac{\alpha}{2k}. \end{array} \right.$$

Die in (27) vorgesehene Integration über m :

$$(28a) \quad |\varepsilon_k(q)|^2 = c(k, q) \int_{-\infty}^{+\infty} a(m) dm$$

macht die Auswertung von Integralen des Typs

$$(28b) \quad J_\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m^\mu dm}{(1 + e^{-2\pi n} \cdot e^{-2\pi m})(1 + e^{-2\pi n} \cdot e^{+2\pi m})} \quad (\mu = 0, 2)$$

(Integrationsweg-reelle Achse) notwendig. Das kann leicht auf komplexem Wege geschehen.²⁾ Es ist ja

1) q steht bei uns für das Wentzelsche $|A k|$; α , der reziproke Radius der innersten Bohrschen Bahn, ist für Wasserstoff identisch mit dem in § 4 benutzten, durch (12) definierten α_0

2) Ähnlich wie bei Wentzel, Anmerkung 2 zu S. 365.

$$(29a) \left\{ \begin{aligned} & \int \frac{(m+i)^{\nu} dm}{(1+e^{-2\pi n} e^{-2\pi(m+i)})(1+e^{-2\pi n} \cdot e^{+2\pi(m+i)})} \\ & - \int \frac{m^{\nu} dm}{(1+e^{-2\pi n} e^{-2\pi m})(1+e^{-2\pi n} \cdot e^{+2\pi m})} \\ & = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \binom{\nu}{\mu} i^{\nu-\mu} J_{\mu} \\ & = \oint \frac{m^{\nu} dm}{(1+e^{-2\pi n} \cdot e^{-2\pi m})(1+e^{-2\pi n} \cdot e^{+2\pi m})} \end{aligned} \right.$$

wo das letzte, geschlossene Integral längs der reellen Achse von $+\infty$ bis $-\infty$ und längs der um $+i$ verschobenen Parallele zurück zu nehmen ist. Dabei werden die beiden Pole

$$m_1 = +n + \frac{i}{2} \text{ mit dem Residuum } \frac{-(n + \frac{i}{2})^{\nu}}{2\pi(1 - e^{-4\pi n})}$$

$$m_2 = -n + \frac{i}{2} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \frac{(-n + \frac{i}{2})^{\nu}}{2\pi(1 - e^{-4\pi n})}$$

beide im negativen Sinne umkreist, so daß

$$(29b) \quad \oint = i \frac{(n + \frac{i}{2})^{\nu} - (-n + \frac{i}{2})^{\nu}}{1 - e^{-4\pi n}}.$$

Durch Verwertung der Formel (29b) für $\nu = 1$ und 3 folgt dann ohne weiteres aus (29a):

$$(29c) \quad \left\{ \begin{aligned} J_0 &= \frac{2n}{1 - e^{-4\pi n}} \\ J_2 &= \frac{n}{6} \cdot \frac{1 + 4n^2}{1 - e^{-4\pi n}} \end{aligned} \right.$$

so daß mit Ersetzung von n durch seinen Wert $\frac{\alpha}{2k}$:

$$(30) \quad |\varepsilon_k(q)|^2 = \frac{2^8 k q^3 \alpha^6 \left(q^2 + \frac{1}{3} (\alpha^2 + k^2) \right)}{[(q+k)^2 + \alpha^2]^3 [(q-k)^2 + \alpha^2]^3} \cdot \frac{e^{-2 \frac{\alpha}{k} \arctg \frac{2\alpha k}{q^2 - k^2 + \alpha^2}}}{1 - e^{-2\pi \frac{\alpha}{k}}}.$$

Für $q \gg \alpha$ hat $|\varepsilon_k(q)|^2$ ein scharfes Maximum bei $k \approx q$ und geht dann in die von Wentzel a. a. O. S. 365, unten abgeleitete Formel über. Für $q \approx 0$ wird (30) gleich dem q^2 -fachen der gewöhnlichen optischen Übergangswahrscheinlichkeit [Quadrat des Elements der Koordinatenmatrix]¹⁾

1) Vgl. § 5, Ziffer 3.

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{q=0} |\epsilon_k(q)|^2 = Q^2 |x_{0k}|^2 \\ |x_{0k}|^2 = \frac{2^8}{3} \frac{\alpha^8 \cdot k}{(\alpha^2 + k^2)^5} \cdot \frac{e^{-4 \frac{\alpha}{k} \arctan \frac{k}{\alpha}}}{1 - e^{-2 \pi \frac{\alpha}{k}}} \end{array} \right.$$

Wir verschieben die Diskussion von (30) und (31) auf das Ende dieses Paragraphen und werten zunächst die Matrixelemente

$$(32) \quad \epsilon_n = \int e^{iqx} \psi_0 \bar{\psi}_n d\tau = \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} \int e^{iqx - \alpha r} \bar{\psi}_n(\xi + \eta) d\xi d\eta$$

für diskrete Übergänge, gleichfalls in parabolischen Koordinaten

$$x = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad y = \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi, \quad z = \sqrt{\xi\eta} \sin \varphi, \quad r = \frac{1}{2}(\xi + \eta),$$

aus. Dabei brauchen wir nur Eigenfunktionen ψ_n zu berücksichtigen, die von φ unabhängig sind. Diese lauten¹⁾

$$(32a) \quad \psi_n = \frac{1}{\sqrt{2n} \cdot n_1! n_2!} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2n}(\xi + \eta)} L_{n_1}\left(\frac{\xi\alpha}{n}\right) L_{n_2}\left(\frac{\alpha\eta}{n}\right)$$

n_1 und n_2 sind die parabolischen Quantenzahlen, $n = n_1 + n_2 + 1$.

$$\epsilon_{n_1, n_2}(q) = \frac{1}{2n^2 n_1! n_2!} \int e^{-\frac{\alpha\xi}{2} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{iq}{\alpha}\right) - \frac{\alpha\eta}{2} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{iq}{\alpha}\right)} \\ \cdot L_{n_1}\left(\frac{\alpha\xi}{n}\right) L_{n_2}\left(\frac{\alpha\eta}{n}\right) \cdot \alpha(\xi + \eta) \alpha d\xi \alpha d\eta$$

läßt sich dann z. B. unter Benutzung der erzeugenden Funktion der Laguerreschen Polynome auswerten: Mit $\rho = \frac{\alpha}{n}\xi$ bzw.

$\frac{\alpha}{n}\eta$, $p = n_1$ bzw. n_2 , $\beta = 0$ bzw. 1 ist

$$(32b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_p \int \frac{L_p(\rho)}{p!} t^p e^{-\frac{\rho}{2} \left(n + 1 - i \frac{qn}{\alpha}\right)} \rho^\beta d\rho \\ = \frac{1}{1-t} \int e^{-e \left(\frac{t}{1-t} + \frac{1}{2} \left(1 + n - i \frac{qn}{\alpha}\right)\right)} \rho^\beta d\rho \\ = (1-t)^\beta \beta! 2^{\beta+1} \left[n + 1 - i \frac{qn}{\alpha} - t \left(n - 1 - i \frac{qn}{\alpha} \right) \right]^{-(\beta+1)} \end{array} \right.$$

1) Vgl. z. B. A. Sommerfeld, Wellenmechanischer, Ergänzungsband S. 181 ff.

Indem nun in der Entwicklung der rechten Seite von (32b) nach t der Koeffizient von t^p aufgesucht wird, bekommt man nach kurzer Rechnung

$$(32c) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{n_1, n_2} = 4n \cdot & \frac{\left(n-1-i\frac{qn}{\alpha}\right)^{n_1} \left(n-1+i\frac{qn}{\alpha}\right)^{n_2}}{\left(n+1-i\frac{qn}{\alpha}\right)^{n_1} \left(n+1+i\frac{qn}{\alpha}\right)^{n_2}} \\ & \cdot \left(\frac{n_1+1}{n+1-i\frac{qn}{\alpha}} - \frac{n_1}{n-1-i\frac{qn}{\alpha}} + \frac{n_2+1}{n+1+i\frac{qn}{\alpha}} \right. \\ & \quad \left. - \frac{n_2}{n-1+i\frac{qn}{\alpha}} \right). \end{aligned} \right.$$

(32c) sieht der entsprechenden Formel (28) von Wentzel für die Übergänge zum kontinuierlichen Spektrum sehr ähnlich, wenn man dort die Differentiation nach α noch ausführt. Durch elementare Umformung erhält man

$$(32d) \quad \left\{ \begin{aligned} |\varepsilon_{n_1, n_2}(q)|^2 = \left(\frac{q}{\alpha}\right)^2 \cdot 2^8 n^6 \cdot & \frac{\left[(n-1)^2 + \left(\frac{qn}{\alpha}\right)^2\right]^{n-3}}{\left[(n+1)^2 + \left(\frac{qn}{\alpha}\right)^2\right]^{n+3}} \\ & \cdot \left[(n_1-n_2)^2 + \left(\frac{qn}{\alpha}\right)^2\right]. \end{aligned} \right.$$

Schließlich gibt die Summation über alle bei gegebenem n möglichen Werte $n_1 - n_2 = -n+1, -n+3, \dots, n=3, n-1$:

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} |\varepsilon_n(q)|^2 = \sum_{n_1+n_2=n-1} |\varepsilon_{n_1, n_2}(q)|^2 = \left(\frac{q}{\alpha}\right)^2 \cdot 2^8 \cdot n^7 \left[\frac{1}{3}(n^2-1) \right. \\ \left. + \left(\frac{qn}{\alpha}\right)^2 \right] \frac{\left[(n-1)^2 + \left(\frac{qn}{\alpha}\right)^2\right]^{n-3}}{\left[(n+1)^2 + \left(\frac{qn}{\alpha}\right)^2\right]^{n+3}} \end{aligned} \right.$$

Wir wollen zum Zweck der Diskussion der Abhängigkeit der Matrixelemente $\varepsilon_n(q)$ bzw. des differentiellen Wirkungsquerschnitts $d\Phi_n(q)$ vom Stoßvektor q die dimensionslose Größe

$$(34) \quad \varphi_n(q) = \frac{\alpha^2}{q^2} |\varepsilon_n(q)|^2$$

ins Auge fassen und als generalisierte Übergangswahrscheinlichkeit bezeichnen; für $q=0$ stimmt $\varphi_n(q)$ (bis auf den zwecks Erzielung der Dimensionslosigkeit eingeführten Faktor α^2) mit

dem gewöhnlich so bezeichneten Quadrat des Matrixelements der Koordinate überein, in der Tat ist ja

$$(34a) \quad \varphi_n(0) = \frac{2^8 n^7 (n-1)^{2n-5}}{3 (n+1)^{2n+5}}$$

im wesentlichen die bekannte Intensitätsformel für die Lyman-serie. Der differentielle Wirkungsquerschnitt hängt mit der generalisierten Übergangswahrscheinlichkeit [vgl. (16), (34)] durch

$$(34b) \quad d\Phi_n(q) = \frac{8\pi}{K^2} \left(\frac{M}{m} z \right)^2 \frac{dq}{q} \varphi_n(q)$$

zusammen. Von den Stößen unter kleinsten Winkeln ($q=0$) entfällt die Mehrzahl, nämlich 55 Proz., auf solche, bei denen das zweiquantige Niveau angeregt wird, 17 Proz. aller Stöße führen zur Anregung höherer diskreter Niveaus, 28 Proz. zur Ionisierung. Von den letzteren erteilen nur 4 Proz. dem Sekundärelektron eine kinetische Energie von mehr als der einfachen Ionisierungsspannung.

Gehen wir zu endlichen Impulsänderungen q des stoßenden Teilchens über, wobei aber noch $q \ll \alpha$ sein soll, so nimmt die an und für sich größte Übergangswahrscheinlichkeit φ_2 etwas ab, die Übergänge nach den diskreten Zuständen mit $n > 4$ nehmen ganz wenig, die Ionisierung etwas stärker zu, wie man leicht durch logarithmische Differentiation von (30) bzw. (33) nach q erkennt. Kommt q in die Größenordnung des reziproken Wasserstoffradius α , so ist eine erhebliche Abnahme aller diskreten Anregungswahrscheinlichkeiten φ_n , dagegen eine Zunahme der Übergangswahrscheinlichkeiten φ_k ins kontinuierliche Spektrum festzustellen, insbesondere wird die Übertragung größerer kinetischer Energie auf das Sekundärelektron wahrscheinlicher. Dabei nimmt, wie wir im nächsten Paragraphen zeigen werden, die Summe aller (diskreter und kontinuierlicher) Übergangswahrscheinlichkeiten mit wachsendem q dauernd ab.

Bei $q = 2\alpha$ machen die diskreten Übergänge schon nur noch 2 Proz. aller Übergänge aus, bei noch größerer Impulsübertragung kommt die Anregung des diskreten Spektrums praktisch überhaupt nicht mehr in Frage. Die weitaus größte Wahrscheinlichkeit haben dann nach (30) die Übergänge mit $q \approx k$, d. h. diejenigen, für die das Sekundärelektron den vom stoßenden Teilchen abgegebenen Impuls aufnimmt [vgl. das

Analogon beim Comptoneffekt¹⁾. Die Übergangsmatrix wird dann durch die von Wentzel angegebene Formel

$$(34b) \quad |\epsilon_k(q)|^2 = \frac{8}{3\pi} \frac{\alpha^5}{[\alpha^2 + (q-k)^2]^3}$$

gegeben und fällt im wesentlichen mit der sechsten Potenz der Differenz zwischen Impuls des Sekundärelektrons und Impulsänderung des Primärelektrons ab.

Die folgende Tabelle gibt für einige Werte von q die Übergangswahrscheinlichkeiten $\varphi_n(q)$ für die ersten vier diskreten und vier ausgewählte kontinuierliche Übergänge. Letztere sind pro *Energieintervall* normiert, es ist also angegeben

$$\frac{\varphi_k(q) dk}{k dk} = \frac{\varphi_k}{k} = \frac{\alpha^2}{q^2} \frac{|\epsilon_k(q)|^2}{k}.$$

Außerdem ist die Summe aller Übergangswahrscheinlichkeiten

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(q) &= \sum_n \varphi_n(q) + \int dk \varphi_k(q) = \frac{\alpha^2}{q^2} \left(\sum_n |\epsilon_n(q)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \int dk |\epsilon_k(q)|^2 \right) \end{aligned} \right.$$

Tabelle 1

Generalisierte Übergangswahrscheinlichkeiten φ_n vom Wasserstoff-Grundzustand aus

	$\frac{q^2}{\alpha^2} = 0$	$1/4$	$1/2$	1	2	4
$n = 2$	0,555	0,328	0,202	0,088	0,0230	0,0034
3	,089	,075	,054	,0267	,0073	,0011
4	,031	,0285	,0218	,0113	,0033	,0005
5	,0145	,0136	,0109	,0058	,0017	,00025
$k = 0$	1,563	1,588	1,300	0,720	0,216	0,032
$1/2$	0,688	0,925	0,944	0,677	,245	,038
1	,116	,195	,276	,374	,278	,059
2	,0017	,0024	,0034	,0062	,0183	,064
φ	1,000	0,862	0,751	0,590	0,401	0,234

Anteil der diskreten Übergänge an der Gesamt-Übergangswahrscheinlichkeit $\varphi_n(q)$ in Prozenten:

$n = 2$	55,5	38,1	26,9	15,0	5,7	1,45
3	8,9	8,7	7,2	4,5	1,8	0,47
4	3,1	3,3	2,9	1,9	0,82	0,20
5	1,45	1,58	1,45	0,98	0,42	0,11

1) G. Wentzel, a. a. O., vgl. auch § 4 dieser Arbeit.

verzeichnet, sowie der Prozentanteil der diskreten Übergänge an dieser Gesamtwahrscheinlichkeit.

§ 7. Stöße unter bestimmtem Winkel

Die Formel

$$(16) \quad d\Phi_n(q) = \frac{8\pi\alpha^2}{K^2} \left(\frac{M}{m} z \right)^2 \frac{dq}{q^3} |\varepsilon_n(q)|^2$$

gibt die Anzahl derjenigen Stöße mit einer Impulsübertragung zwischen q und $q + dq$ an, welche zu einer Anregung des n -Quantenzustandes des Atomes führen. Die Gesamtzahl aller unelastischen Stöße mit einer Impulsübertragung zwischen q und $q + dq$ kann man leicht durch Benutzung der Vollständigkeitsrelation für die Eigenfunktionen des Wasserstoffatoms erhalten. Es ist ja

$$\begin{aligned} \varepsilon(q) &= \sum_{n=2}^{\infty} |\varepsilon_n(q)|^2 + \int dk |\varepsilon_k(q)|^2 \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left| \int e^{iqx} \psi_0 \bar{\psi}_n d\tau \right|^2 + \int dk \left| \int e^{iqx} \psi_0 \bar{\psi}_k d\tau \right|^2 \\ (36) \quad \varepsilon(q) &= 1 - F^2, \end{aligned}$$

wo¹⁾

$$(37) \quad F = \int \psi_0^2 e^{iqx} d\tau = \frac{1}{\left(1 + \frac{q^2}{4\alpha^2}\right)^2}$$

der Atomformfaktor für ein Wasserstoffatom im Grundzustand ist. [Für die in (35) definierte (generalisierte) Gesamtübergangswahrscheinlichkeit kommt

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(q) &= \frac{\alpha^2}{q^2} \varepsilon(q) = \frac{\alpha^2}{q^2} \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{q^2}{4\alpha^2}\right)^4} \right) \\ &= \frac{1 + \frac{3}{2} \frac{q^2}{4\alpha^2} + \left(\frac{q^2}{4\alpha^2}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{q^2}{4\alpha^2}\right)^3}{\left(1 + \frac{q^2}{4\alpha^2}\right)^4} \end{aligned} \right.$$

1) Die leicht zu gewinnende Formel (37) ist, gleichzeitig mit den Atomformfaktoren der angeregten Zustände des Wasserstoffatoms, abgeleitet in einer Arbeit des Verfassers, Ann. d. Phys. 87. S. 55. 1928 (dort § 11).

und durch Grenzübergang [vgl. (26), (34)]

$$(38a) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(0) &= \sum_n \varphi_n(0) + \int dk \varphi_k(0) \\ &= \alpha^2 \left(\sum_n |x_{0n}|^2 + \int dk |x_{0k}|^2 \right) = \alpha^2 \int x^2 \psi_0^2 d\tau = 1. \end{aligned} \right.$$

Die letzte Relation (38a) läßt sich natürlich auch direkt herleiten.¹⁾ Der Wirkungsquerschnitt für sämtliche unelastische Stöße mit einer Impulsübertragung zwischen q und $q + dq$ ist also

$$(39) \quad d\Phi(q) = \frac{8\pi\alpha^2}{K^2} \left(\frac{M}{m} z \right)^2 \frac{dq}{q^3} (1 - F^2(q)).$$

Entsprechend ist der Wirkungsquerschnitt für elastische Stöße mit der gleichen Impulsübertragung nach (16) und (22)

$$(40) \quad d\Phi_0(q) = \frac{8\pi\alpha^2}{K^2} \left(\frac{M}{m} z \right)^2 \frac{dq}{q^3} (1 - F(q))^2.$$

Voraussetzung für die Gültigkeit der Formel (39) ist natürlich, daß wirklich die Übergänge zu *sämtlichen* Quantenzuständen des diskreten und kontinuierlichen Spektrums bei der vorgegebenen Größe von q energetisch möglich sind — oder wenigstens alle Übergänge mit merklicher Übergangswahrscheinlichkeit — weil sonst nicht die Vollständigkeitsrelation angewendet werden darf. Es muß also [vgl. (17)]

$$q > q_{\min}(k) = \frac{M}{2mK} (\alpha^2 + k^2)$$

für alle Zustände k mit merklicher Übergangswahrscheinlichkeit $\varphi_k(0)$ sein, sagen wir für alle $k \leq 2\alpha$, d. h.

$$q > \frac{5M\alpha^2}{2mK}.$$

Bei einigermaßen raschen Partikeln gilt also (39) schon für Stöße, bei denen noch $q \ll \alpha$.

1. Bei Streuung unter *kleinem* Winkel ($q \ll \alpha$) ist nahezu $K' = K$ und

$$(37a) \quad 1 - F = \frac{q^2}{2\alpha^2},$$

$$(37b) \quad 1 - F^2 = \frac{q^2}{\alpha^2},$$

1) Vgl. H. Bethe, a. a. O., § 10.

also wird der Wirkungsquerschnitt für unelastische Stöße (mit Rücksicht auf 15)

$$(39a) \quad \left\{ \begin{aligned} d\Phi(q) &= \frac{8\pi}{K^2} \left(\frac{M}{m}z\right)^2 \frac{dq}{q} \\ &= 8\pi \left(\frac{M}{m}z\right)^2 \frac{\sin\vartheta dq}{q^2} \approx \frac{8\pi}{K^2} \left(\frac{M}{m}z\right)^2 \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}, \end{aligned} \right.$$

für elastische

$$(40a) \quad d\Phi_0(q) = \frac{2\pi}{K^2\alpha^2} \left(\frac{M}{m}z\right)^2 q dq = 2\pi\alpha^2 \left(\frac{M}{m}z\right)^2 \sin\vartheta d\vartheta.$$

Während also der differentielle Wirkungsquerschnitt für *elastische* Stöße einem festen, von ϑ und K unabhängigen, Grenzwert zustrebt, der von derselben Größenordnung ist wie der gaskinetische Querschnitt nimmt der Wirkungsquerschnitt pro Raumwinkelement $\sin\vartheta d\vartheta$ für *unelastische* Stöße mit abnehmendem Streuwinkel ϑ proportional $1/q^2$ zu. Erst bei ganz kleinen Streuwinkeln wird ein Grenzwert

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 0} d\Phi(q) &= 8\pi \left(\frac{M}{m}z\right)^2 \sin\vartheta d\vartheta \cdot \frac{1}{q_{\min}^2} \\ &\approx 8\pi\alpha^2 \left(\frac{M}{m}z\right)^2 \sin\vartheta d\vartheta \left(\frac{mK}{M\alpha}\right)^2 \end{aligned} \right.$$

erreicht, der im Verhältnis $\left(\frac{mK}{M\alpha}\right)^2 = \frac{v^2}{v_0^2}$ größer ist als der elastische Wirkungsquerschnitt.¹⁾

2. Bei Streuung unter großen Winkeln („Einzelstreuung“) ist $q \gg \alpha$ und F nahezu Null (vgl. 37), d. h. der Beitrag der Schrödingerschen Dichteverteilung des Atomelektrons zur *elastischen* Streuung wird durch Interferenz der Beiträge der einzelnen Volumelemente fast vollkommen vernichtet. Dann wird

$$(42) \quad d\Phi_0(q) = d\Phi(q) = \frac{8\pi\alpha^2}{K^2} \left(\frac{M}{m}z\right)^2 \frac{dq}{q^2}.$$

1) Für $\vartheta = 0$ gelten unsere Formeln (39) ff. ja nicht mehr, weil q für $\vartheta = 0$ von der Anregungsenergie abhängt. Die erste Relation (41) ist aber exakt, wenn $\frac{1}{q_{\min}^2} = \sum_n \frac{\varphi_n(0)}{q_{\min}^2(n)} + \int dk \frac{\varphi_k(0)}{q_{\min}^2(k)}$ definiert wird.

Bei großer Impulsübertragung sind elastische und unelastische Stöße mit gleicher Impulsübertragung gleich häufig.¹⁾

Physikalisch interessanter als die Zahl der unelastischen Stöße mit fester Impulsübertragung zwischen q und $q + dq$ ist die Zahl der Streuungen in einen bestimmten Winkelbereich ϑ bis $\vartheta + d\vartheta$. Für große Streuwinkel gilt ja für die unelastischen Stöße (vgl. § 4)

$$(18) \quad \cos \vartheta = \frac{2K^2 - q^2 \left(1 + \frac{M}{m}\right)}{2K \sqrt{K^2 - q^2 \frac{M}{m}}},$$

für stoßende Partikel beliebiger effektiver Masse M bzw.

$$(19) \quad q = K \sin \vartheta,$$

für stoßende Elektronen. Für letztere folgt aus (39) mit Rücksicht auf $M = m$, $z = 1$ [oder aus (10) direkt]:

$$(39b) \quad d\Phi(\vartheta) = \frac{8\pi\alpha^2}{K^4} [1 - F^2(K \sin \vartheta)] \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{\sin^3 \vartheta}.$$

als Wirkungsquerschnitt für unelastische Streuungen unter dem Winkel ϑ , während der Wirkungsquerschnitt für elastische Streuungen nach (40) und (14b)

$$(40b) \quad \begin{cases} d\Phi_0(\vartheta) = \frac{8\pi\alpha^2}{K^4} \left[1 - F\left(2K \sin \frac{\vartheta}{2}\right)\right]^2 \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{16 \sin^4 \vartheta/2} \\ \quad = \frac{8\pi\alpha^2}{K^4} \left[1 - F\left(2K \sin \frac{\vartheta}{2}\right)\right]^2 \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{4(1 - \cos \vartheta)^2} \end{cases}$$

ist. Für genügend große Streuwinkel, für welche $F \approx 0$, geht (40b) in die Rutherfordsche Formel über, und die Zahl der unelastischen Stöße verhält sich zu der der elastischen wie:

$$(42a) \quad \frac{d\Phi(\vartheta)}{d\Phi_0(\vartheta)} = \frac{4 \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta)^2}{\sin^4 \vartheta} = \frac{4 \cos \vartheta}{(1 + \cos \vartheta)^2}.$$

Für $\vartheta = 0^\circ \ 45^\circ \ 60^\circ \ 75^\circ \ 80^\circ \ 85^\circ \ 90^\circ$ und mehr
ist $\frac{d\Phi(\vartheta)}{d\Phi_0(\vartheta)} = 1 \ 0,97 \ 0,89 \ 0,65 \ 0,50 \ 0,30 \ 0$

1) Elsasser glaubte im Gegensatz hierzu feststellen zu können, daß die unelastische Streuung unter großen Winkeln gegenüber der elastischen verschwindet. Das liegt wohl daran, daß er nicht genügend auf die Übergänge in das kontinuierliche Spektrum achtete.

D. h. bis etwa 60° Streuwinkel ist praktisch die Zahl der unelastischen und der elastischen Elektronenstöße unter gleichem Streuwinkel gleich, oberhalb 90° gibt es wegen der angenäherten Gültigkeit des klassischen Energieimpulssatzes nur noch elastische Stöße (Kernstreuung) und keine unelastischen (Zusammenstöße mit den Atomelektronen) mehr.

Beim Stoß einer schweren Partikel (α -Teilchen) kommt dagegen nur ein ganz kleiner Winkelbereich für die unelastische Streuung in Frage (§ 4). Infolgedessen ist hier die Einzelstreuung (Streuung unter großen Winkeln) stets Kernstreuung (elastische Streuung).¹⁾

§ 8. Verallgemeinerter f -Summensatz

Um späterhin die Bremsung einer stoßenden Partikel, d. h. die beim Durchgang durch ein Gas pro Zentimeter Weg abgegebene Energie berechnen zu können, fragen wir außer nach der Anzahl der Stöße mit einer Impulsübertragung zwischen q und $q + dq$ (vgl. den vorigen §) noch nach der gesamten durch solche Stöße auf das Wasserstoffatom übertragenen Energie:

$$(43) \quad dE(q) = \sum_n (E_n - E_0) d\Phi_n(q).$$

Die Auswertung unter Benutzung der Vollständigkeitsrelation für die Eigenfunktionen führt hier zu einer noch einfacheren Formel als für die Anzahl der Stöße. Wir berechnen gleich allgemein²⁾

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} f_m(q) &= \sum_n f_{mn}(q) = \sum_n \frac{E_n - E_m}{R\hbar} \varphi_{mn}(q) \\ &= \frac{\alpha^2}{q^2 R\hbar} \sum_n (E_n - E_m) |\varepsilon_n(q)|^2. \end{aligned} \right.$$

1) Das liegt aber an der angenäherten Gültigkeit des klassischen Impulssatzes für stoßende Partikel und Sekundärelektron bei Stößen mit großer Impulsübertragung und ist also kein quantentheoretisches Phänomen.

2) Offenbar ist ja (nach 16)

$$(43a) \quad dE(q) = \frac{8\pi R\hbar}{K^2} \left(\frac{M}{m} z \right)^2 \frac{dq}{q} f_0(q)$$

durch die Auswertung von (44) im Spezialfall $m = 0$ bestimmt. (Die Summe über n soll auch das kontinuierliche Spektrum mit umfassen.)

Da die $\varphi_{mn}(q)$ generalisierte Übergangswahrscheinlichkeiten sind, kann der Ausdruck

$$(45) \quad f_{mn}(q) = \frac{E_n - E_m}{R\hbar} \varphi_{mn}(q) = \frac{1}{R} \nu_{mn} \varphi_{mn}(q)$$

als generalisierte Oszillatorenstärke für den Übergang $m \rightarrow n$ definiert werden. Für $q = 0$ steht diese Definition im Einklang mit der in der Dispersionstheorie üblichen:

$$(45a) \quad f_{mn}(0) = \frac{\nu_{mn} \varphi_{mn}(0)}{R} = \frac{\alpha^2}{R} \nu_{mn} |x_{mn}|^2 = \frac{8\pi^2 m}{\hbar} \nu_{mn} |x_{mn}|^2.$$

Zur Auswertung von (44) gehen wir, ebenso wie bei Aufstellung des gewöhnlichen f -Sommensatzes, aus von den Schrödingerschen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Delta \psi_m + \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} (E_m - V) \psi_m &= 0 \\ \Delta \psi_n + \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} (E_n - V) \psi_n &= 0 \end{aligned}$$

mit beliebigem Potential V und setzen nur voraus, daß E_m ein diskreter Eigenwert sei, damit wir im folgenden alle Oberflächenintegrale vernachlässigen können. Dann ist

$$(45b) \quad \left\{ \begin{aligned} & (E_n - E_m) \int \psi_m \bar{\psi}_n e^{iqx} d\tau \\ &= \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \int (\bar{\psi}_n \Delta \psi_m - \psi_m \Delta \bar{\psi}_n) e^{iqx} d\tau \\ &= - \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} i q \int \left(\bar{\psi}_n \frac{\partial \psi_m}{\partial x} - \psi_m \frac{\partial \bar{\psi}_n}{\partial x} \right) e^{iqx} d\tau \\ &= R\hbar \alpha^2 \left(-2 i q \int \frac{\partial \psi_m}{\partial x} \bar{\psi}_n e^{iqx} d\tau \right. \\ &\quad \left. + q^2 \int \psi_m \bar{\psi}_n e^{iqx} d\tau \right). \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} f_m(q) &= \sum_n f_{mn}(q) = \frac{\alpha^2}{q^2 R \hbar} \sum_n (E_n - E_m) \left| \int e^{iqx} \psi_m \bar{\psi}_n d\tau \right|^2 \\ &= \frac{1}{q^2} \sum_n \left(-2 i q \int \frac{\partial \psi_m}{\partial x} \bar{\psi}_n e^{iqx} d\tau \right. \\ &\quad \left. + q^2 \int \psi_m \bar{\psi}_n e^{iqx} d\tau \right) \cdot \int e^{-iqx} \bar{\psi}_m \psi_n d\tau \\ &= -2 \frac{i}{q} \cdot \int \frac{\partial \psi_m}{\partial x} \bar{\psi}_m d\tau + \int |\psi_m|^2 d\tau. \end{aligned}$$

$$(46) \quad f_m(q) = \sum_n f_{mn}(q) = 1.$$

Die Summe der generalisierten Oszillatorenstärken $f_{mn}(q)$ für alle Übergänge von einem Niveau eines Wasserstoffatoms aus ist gleich 1, genau wie die Summe der in der üblichen Weise definierten Oszillatorenstärken $f_{mn}(0)$.

Aus (43) wird also:

$$(47) \quad dE(q) = \frac{8\pi R h}{K^2} \left(\frac{M}{m} z \right)^2 \frac{dq}{q} = \frac{4\pi e^4 z^2}{m v^2} \frac{dq}{q}.$$

(47) ist diejenige Energie, die von einem Strom von einer Partikel pro Zeit- und Flächeneinheit in der Zeiteinheit auf ein Wasserstoffatom durch *solche* Stöße übertragen wird, bei denen sich der Impuls der Partikel um einen Betrag zwischen $\frac{h}{2\pi}q$ und $\frac{h}{2\pi}(q + dq)$ ändert. Sie hat die Dimension Energie mal Fläche.

Im Mittel wird bei jedem Stoß mit einer Impulsänderung des stoßenden Teilchens zwischen q und $q + dq$ die Energie

$$(48) \quad \frac{dE(q)}{d\Phi(q)} = \frac{q^2 R h \alpha^2}{1 - F^2(q)}$$

übertragen, also bei großen Ablenkungen ($F \approx 0$).

$$(48a) \quad \frac{dE(q)}{d\Phi(q)} = \frac{q^2}{\alpha^2} R h = \frac{h^2}{8\pi^2 m} q^2.$$

Dies Resultat ist selbstverständlich, da wir wissen, daß bei großem q das Sekundärelektron in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle den Impuls $\frac{h}{2\pi}q$ bekommt, also die Energie $\frac{h^2}{8\pi^2 m} q^2$. Bei kleinen Ablenkungen ist nach (37b) einfach

$$(48b) \quad \frac{dE(q)}{d\Phi(q)} = R h,$$

d. h. es wird im Mittel die einfache Ionisierungsspannung übertragen.

§ 9. Anregung bestimmter Energieniveaus

Wir integrieren den differentiellen Wirkungsquerschnitt über \mathcal{Q} (bzw. über q) und erhalten damit den gesamten Wirkungsquerschnitt für die Anregung eines bestimmten Niveaus n , d. h. die Anregungsfunktionen für Anregung durch Stoß schneller Elektronen:

$$(49) \quad \Phi_n = \int_{q_{\min}}^{q_{\max}} d\Phi_n(q) = \frac{2^{10}\pi}{3K^2} \left(\frac{M}{m} z\right)^2 n^7 \cdot A$$

$$(49a) \quad A = \int_{q_{\min}}^{q_{\max}} [n^2 - 1 + 3x] \frac{[(n-1)^2 + x]^{n-3}}{[(n+1)^2 + x]^{n+3}} \frac{dx}{x}$$

unter Benutzung von (33) und (16); $x = \left(\frac{qn}{a}\right)^2$. (49a) läßt sich elementar ausführen:

$$\begin{aligned} A &= \int (n^2 - 1 + 3x) \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-3}{k} \frac{(-4n)^k}{[(n+1)^2 + x]^{6+k}} \frac{dx}{x} \\ &= \int \frac{dx}{x} (n^2 - 1) c_0' - (n^2 - 1) \sum_{\tau=0}^{n+2} \frac{c_\tau' dx}{[(n+1)^2 + x]^{\tau+1}} \\ &\quad + 3 \sum_{\tau=5}^{n+2} \binom{n-3}{\tau-5} (-4n)^{\tau-5} \frac{dx}{[(n+1)^2 + x]^{\tau+1}}, \\ c_\tau' &= \sum_{k=\tau-5}^{n-3} \binom{n-3}{k} \frac{(-4n)^k}{(n+1)^{2(k+6-\tau)}} \\ &= \frac{(n-1)^{2(n-3)}}{(n+1)^{2(n+3-\tau)}} \left[1 - \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{2n-6} \sum_{k=0}^{\tau-6} \binom{n-3}{k} \left(\frac{-4n}{(n+1)^2}\right)^k \right]. \end{aligned}$$

$$(49b) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{(n-1)^{2n-5}}{(n+1)^{2n+5}} \left| \ln x - \ln [(n+1)^2 + x] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\tau=1}^{n+2} \frac{c_{n\tau}}{\tau \left(1 + \frac{x}{(n+1)^2}\right)^\tau} \right|_{q_{\min}}^{q_{\max}}, \end{aligned} \right.$$

$$(50a) \quad \left\{ \begin{aligned} c_{n\tau} &= 1 - \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{2n-6} \left[\sum_{k=0}^{\tau-6} \binom{n-3}{k} \left(\frac{-4n}{(n+1)^2}\right)^k \right. \\ &\quad \left. + 3 \binom{n-3}{\tau-5} \left(\frac{-4n}{(n+1)^2}\right)^{\tau-5} \frac{n+1}{n-1} \right]. \end{aligned} \right.$$

Schließlich wird die Anregungswahrscheinlichkeit (vgl. 34a)

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi_n &= \frac{4\pi}{K^2} \left(\frac{M}{m} z \right)^2 \alpha^2 |x_{0n}|^2 \left[F_n \left(1 + \left(\frac{n}{n+1} \frac{q_{\max}}{\alpha} \right)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - F_n \left(1 + \left(\frac{n}{n+1} \frac{q_{\min}}{\alpha} \right)^2 \right) \right], \end{aligned} \right.$$

wobei

$$(50b) \quad F_n(y) = \ln \frac{y-1}{y} + \sum_{\tau=1}^{n+2} \frac{c_{n\tau}}{\tau y^\tau}.$$

Im einzelnen:

$$(50c) \quad \left\{ \begin{aligned} F_2(y) &= \ln \frac{y-1}{y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3y^3} + \frac{1}{4y^4} \\ F_3(y) &= F_2(y) - \frac{1}{y^5}, \\ F_4(y) &= F_2(y) - \frac{116}{45y^5} + \frac{32}{27y^6} \\ F_5(y) &= F_2(y) - \frac{697}{160y^5} + \frac{85}{24y^6} - \frac{25}{32y^7}. \end{aligned} \right.$$

Die Formeln (50c) stimmen im Bau vollkommen mit den von Elsasser (a. a. O. S. 532) angegebenen Formeln für die Anregungsquerschnitte der ersten Übergänge überein. Die Formeln von Elsasser gehen dabei insofern etwas weiter als unsere, als bei ihm die Übergänge nach den Teilniveaus mit verschiedener Azimutalquantenzahl l getrennt berechnet sind, während wir hier (wegen der Verwendung parabolischer statt Polarkoordinaten) nur die gesamte Anregungswahrscheinlichkeit der durch die Hauptquantenzahl n definierten Niveaus des Wasserstoffatoms erhalten. Dafür haben wir so viel an Einfachheit gewonnen, daß wir ohne weiteres die allgemeine Formel für den Wirkungsquerschnitt (50, 50a, 50b) gewinnen und die explizite Darstellung der Anregungsfunktionen auch für höhere Serienglieder leicht hinschreiben können.¹⁾

1) Unsere Formel für Φ_2 stimmt, wie man sieht, mit der Summe $\Phi(2,0) + \Phi(2,1)$ bei Elsasser überein, dagegen nicht die Formel für Φ_3 mit Elsassers $\Phi(3,0) + \Phi(3,1) + \Phi(3,2)$. (Unser y ist Elsassers x , unser q_{\max}/α sein S_1 und unser q_{\min}/α sein S_0 . In seiner Formel für F_1 ist das Vorzeichen umzukehren.) Da die Elsassersche Ableitung sehr viel komplizierter ist als unsere, sind wir geneigt, in seinen Formeln einen Fehler zu vermuten.

Bisher haben wir in diesem Paragraphen die Bornsche Näherung ohne Vernachlässigung durchgeführt. Wir spezialisieren nun wieder auf schnelle Teilchen, führen für q_{\min} den Wert aus (17) ein $\left(\alpha_{0n}^2 = \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right)$ für Wasserstoff, setzen $q_{\max} \approx 2K$ und vernachlässigen alle Potenzen von $\frac{\alpha M}{Km} = \frac{v}{v_0}$ von der vierten ab. Dann wird

$$(51) \quad \Phi_n = \frac{4\pi\alpha^2}{K^2} \left(\frac{M}{m} z\right)^2 |x_{0n}|^2 \ln a_n \left(\frac{2Km}{\alpha M}\right)^2$$

$$(51a) \quad \ln a_n = 2 \ln \frac{n}{n-1} - \sum_{\tau=1}^{n+2} \frac{c_{n\tau}}{\tau},$$

$$(51b) \quad \Phi_n = \frac{8\pi R h z^2}{m v^2} |x_{0n}|^2 \ln \frac{2a_n m v^2}{R h}$$

$|x_{0n}|^2$ ist das Quadrat der Koordinatenmatrix (vgl. Tab. 1).

Für die a_n bekommt man numerisch:

$n =$	2	3	4	5
$\ln a_n =$	-0,697	-0,272	-0,115	-0,042
$a_n =$	0,498	0,762	0,891	0,959

Es scheint, als ob $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Der Anregungsquerschnitt ist nahezu proportional der optischen Übergangswahrscheinlichkeit und umgekehrt proportional dem Geschwindigkeitsquadrat der Partikel, daneben tritt — wie in der Bohrschen Theorie der Bremsung — ein logarithmisches Glied auf, dessen Argument proportional v^2 ist und außerdem noch eine schwache Abhängigkeit vom anzuregenden Niveau n hat. Diese letztere Abhängigkeit drückt den Anregungsquerschnitt für die stärksten Übergänge (kleine n) eine Kleinigkeit herab, *obwohl* die untere Integrationsgrenze q_{\min} in (49a) für diese Übergänge tiefer liegt als für solche zu höheren Niveaus.

§ 10. Gesamte Stoßzahl und Bremsung

Wir berechnen nunmehr die Gesamtzahl *aller* unelastischen Stöße überhaupt:

$$(52) \quad \Phi = \sum_n \int_{q_{\min}}^{q_{\max}} d q \Phi_n(q).$$

Wir zerlegen die Integration in zwei Teilintegrationen von q_{\min} bis q_0 und von q_0 bis q_{\max} . q_0 wählen wir einerseits so groß, daß für alle $q > q_0$ die differentiellen Wirkungsquerschnitte $d\Phi_n(q)$ für die Anregungen der verschiedenen Niveaus n mittels Anwendung der Vollständigkeitsrelation zu $d\Phi(q)$ aufsummiert werden können, d. h. $q_0 \gg \frac{\alpha^2}{K} \frac{M}{m}$. Andererseits sei $q_0 \ll \alpha$, damit für alle $q < q_0$ die generalisierten Übergangswahrscheinlichkeiten $\varphi_n(q)$ [vgl. (33), (34)] durch die gewöhnlichen Übergangswahrscheinlichkeiten $\varphi_n(0) = \alpha^2 |x_{0n}|^2$ ersetzt werden können. Dann ist nach (34), (17) und (38a)

$$(52a) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi' &= \sum_n \int_{q_{\min}}^{q_0} d\Phi_n(q) = \frac{8\pi}{K^2} \cdot \left(\frac{M}{m} z\right)^2 \cdot \sum_n \varphi_n(0) \int_{q_{\min}}^{q_0} \frac{dq}{q} \\ &= \frac{8\pi}{K^2} \cdot \left(\frac{M}{m} z\right)^2 \sum_n \varphi_n \ln \frac{2q_0 K m}{\alpha^2 M \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} \\ &= \frac{4\pi}{K^2} \left(\frac{M}{m} z\right)^2 \left[\ln \frac{4q_0^2 K^2 m^2}{\alpha^4 M^2} - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \varphi_n \ln \frac{n^2 - 1}{n^2} \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_0^{\infty} dk \cdot \varphi_k \ln \left(1 + \frac{k^2}{\alpha^2}\right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Ebenso nach (40), (19) und (37):

$$(52b) \quad \begin{aligned} \Phi'' &= \int_{q_0}^{q_{\max}} \sum_n d\Phi_n(q) = \frac{8\pi \alpha^2}{K^2} \left(\frac{M}{m} z\right)^2 \int_{q_0}^{q_{\max}} \frac{dq}{q^3} \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{q^2}{4\alpha^2}\right)^4}\right) \\ &= \frac{4\pi}{K^2} \left(\frac{M}{m} z\right)^2 \left[\ln \frac{q^2}{4\alpha^2 + q^2} + \frac{\frac{3}{4}}{1 + \frac{q^2}{4\alpha^2}} + \frac{\frac{1}{4}}{\left(1 + \frac{q^2}{4\alpha^2}\right)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{1}{12}}{\left(1 + \frac{q^2}{4\alpha^2}\right)^3} \right] \bigg|_{q_0}^{q_{\max} \gg \alpha}, \end{aligned}$$

$$(52b) \quad \Phi'' = \frac{4\pi}{K^2} \left(\frac{M}{m} z\right)^2 \left(\ln \frac{4\alpha^2}{q_0^2} - \frac{13}{12} \right)$$

bis auf Größen der Ordnung α^2/K^2

$$(52c) \quad \Phi = \Phi' + \Phi'' = \frac{4\pi}{K^2} \left(\frac{M}{m} z \right)^2 \ln \frac{4m^2 K^2}{b M^2 \alpha^2}$$

$$\ln b = -\ln 4 + \frac{13}{12} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \varphi_n \ln \frac{n^2-1}{n^2} + 2 \int_0^{\infty} dk \varphi_k \ln \left(1 + \frac{k^2}{\alpha^2} \right).$$

$$(52d) \quad \left\{ \begin{aligned} \ln b = & -\ln 4 + \frac{13}{12} - \frac{2^9}{3} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^7 (n-1)^{2n-5}}{(n+1)^{2n+5}} \ln \frac{n^2}{n^2-1} \right. \\ & \left. - \int_0^{\infty} \frac{k dk \alpha^8}{(\alpha^2 + k^2)^5} \cdot \frac{e^{-4 \frac{\alpha}{k} \arctg \frac{k}{\alpha}}}{1 - e^{-2 \pi \frac{\alpha}{k}}} \cdot \ln \left(1 + \frac{k^2}{\alpha^2} \right) \right] \end{aligned} \right\}.$$

Durch numerische Auswertung findet man

$$\underline{b = 0,638},$$

$$(53) \quad \Phi = \frac{8\pi R h \alpha^2 z^2}{m v^2} \ln \frac{2m v^2}{0,638 R h} = \frac{2\pi e^4 z^2}{R h \cdot m v^2} \ln \frac{2m v^2}{0,638 R h}.$$

Durch Multiplikation mit der Anzahl N der Atome pro Volumeneinheit erhält man die Anzahl $N\Phi$ der unelastischen Stöße pro Zentimeter Weg der Partikel, d. h. die reziproke mittlere freie Weglänge. Diese ist im wesentlichen umgekehrt proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit der Partikel und enthält außerdem noch ein logarithmisches Glied. Ein entsprechendes logarithmisches Glied tritt auch in der Zahl der pro Zentimeter Weg primär von der Partikel gebildeten Ionen auf, im Gegensatz zur klassischen Theorie von Bohr und Thomson.¹⁾ Man erhält die Anzahl der primären Ionen

$$s_0 = N\Phi_i = N \int_0^{\infty} dk \int_{q_{\min}}^{q_{\max}} dq \Phi_k(q)$$

am einfachsten, indem man von $N\Phi$ die Anzahl der diskreten Anregungen

$$N\Phi_a = N \sum_{n=2}^{\infty} \int_{q_{\min}}^{q_{\max}} dq \Phi_n(q)$$

1) J. J. Thomson, Phil. Mag. **23**. S. 449. 1912; N. Bohr. ebenda **30**. S. 606. 1915.

subtrahiert. Das Resultat ist

$$(54a) \quad N\Phi_a = 0,715 \cdot \frac{2\pi e^4 z^2 N}{R h \cdot m v^2} \ln \frac{2m v^2}{1,79 R h}$$

für die Gesamtzahl der Anregungen,

$$(54b) \quad N\Phi_i = s_0 = 0,285 \cdot \frac{2\pi e^4 z^2 N}{R h \cdot m v^2} \cdot \ln \frac{2m v^2}{0,048 R h}$$

für die Gesamtzahl der gebildeten Ionen pro Zentimeter Weg. Ebenso ist (durch Integration von (40) über q)

$$(54c) \quad N\Phi_0 = \frac{4\pi N}{K^2} \left(\frac{M}{m} z\right)^2 \cdot \frac{7}{12} = 0,583 \cdot \frac{2\pi e^4 z^2 N}{R h \cdot m v^2}$$

die Gesamtzahl der elastischen Stöße pro Zentimeter Weg letztere enthält also kein logarithmisches Glied.

Ganz analog berechnen wir jetzt den Gesamtenergieverlust

$$(55a) \quad E = \sum_n (E_n - E_0) \int_{q_{\min}}^{q_{\max}} d\Phi_n(q)$$

des Partikelstroms pro Zeiteinheit. Mit Rücksicht auf (45) und (46) findet man analog zu (52a)

$$(55b) \quad \begin{aligned} E' &= \sum_n \int_{q_{\min}}^{q_0} d\Phi_n(q) (E_n - E_0) \\ &= \frac{8\pi R h}{K^2} \left(\frac{M}{m} z\right)^2 \cdot \left[\ln \frac{2q_0 K m}{\alpha^2 M} \right. \\ &\quad - \sum_n \varphi_n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \ln \frac{n^2 - 1}{n^2} - \int dk \varphi_k \\ &\quad \left. \cdot \left(1 + \frac{k^2}{\alpha^2}\right) \ln \left(1 + \frac{k^2}{\alpha^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Ebenso nach (47) und (20)

$$(55c) \quad E'' = \int_{q_0}^{q_{\max}} dE(q) = \frac{8\pi R h}{K^2} \left(\frac{M}{m} z\right)^2 \ln \frac{2K}{q_0} \frac{m}{M + m}.$$

Also

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{8\pi R h}{K^2} \left(\frac{M}{m} z \right)^2 \ln \frac{4K^2}{c \alpha^2} \frac{m^2}{M(M+m)}, \\
 \ln c &= \frac{2^9}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^5 (n-1)^{2n-4}}{(n+1)^{2n+4}} \ln \frac{n^2-1}{n^2} \\
 &\quad + \frac{2^9}{3} \int_0^{\infty} \frac{dk \cdot k \cdot \alpha^6}{(\alpha^2 + k^2)^4} \cdot \frac{e^{-\frac{4}{k} \frac{\alpha}{k} \operatorname{arctg} \frac{k}{\alpha}}}{1 - e^{-2\pi \frac{\alpha}{k}}} \ln \left(1 + \frac{k^2}{\alpha^2} \right), \\
 c &= 1,105, \\
 (55) \quad E &= \frac{4\pi e^4 z^2}{m v^2} \ln \frac{(2) m v^2}{c R h},
 \end{aligned}$$

wo die eingeklammerte 2 nur bei Stoß schwerer Partikel steht, dagegen bei Elektronenstoß fortfällt.

Der Verlust an kinetischer Energie pro Zentimeter Weg ist

$$(56) \quad -\frac{dT}{dx} = N E = \frac{4\pi e^4 z^2 N}{m v^2} \ln \frac{(2) m v^2}{c R h}.$$

Das ist fast genau das Doppelte des von Henderson abgeleiteten Wertes für das Bremsvermögen. Da Hendersons Werte rund die Hälfte des beobachteten Bremsvermögens ausmachen¹⁾, stimmt unser Resultat gut mit der Erfahrung überein. Von der Bohrschen Formel für die Bremsung unterscheidet sich (56) dadurch, daß im Argument des Logarithmus v^2 statt v^3 steht.

Der mittlere Energieverlust der Partikel pro Stoß wird

$$(57) \quad \bar{E} = \frac{E}{\Phi} \approx 2 R h.$$

Da 28,5 Proz. aller Stöße zur Ionisierung führen [(53) und (54b)], ist der Energieverbrauch für jedes primär gebildete Ion rund $\frac{2 R h}{0,285}$, das ist das 7fache der Ionisierungsspannung. Dies gilt bei sehr großer Partikelgeschwindigkeit, sonst ist der Energieverbrauch pro gebildetes Ion etwas kleiner, weil der Logarithmus in (54b) merklich größer ist als der in (55).

1) Vgl. R. H. Fowler, Proc. Cambr. Soc. **21**. S. 521. 1923.

III. Kompliziertere Atome

§ 11. f-Summensätze

Wenn wir in diesem Abschnitt unsere Ergebnisse auf kompliziertere Atome ausdehnen, so ist das nur bezüglich weniger Punkte in aller Strenge möglich. Im allgemeinen werden wir annehmen müssen, daß die Eigenfunktionen des Atoms sich als Summe von Produkten der Eigenfunktionen der einzelnen Elektronen darstellen lassen, wodurch von vornherein die gleichzeitige Anregung von zwei Elektronen des Atoms durch den Stoßprozeß ausgeschlossen wird. Für die numerischen Berechnungen müssen wir häufig noch einen — nicht unbedenklichen — Schritt weitergehen und die Eigenfunktionen jedes Elektrons durch die zu den betreffenden Quantenzahlen gehörigen Wasserstoffeigenfunktionen ersetzen. Sonst werden wir uns unter den Eigenfunktionen eines Elektrons etwa die nach der Hartreeschen Methode für ein passendes Potentialfeld des Atoms berechneten vorstellen.

Wir übertragen zunächst den generalisierten *f*-Summensatz auf Atome mit mehreren Elektronen. Wir suchen also, wie in § 8, die gesamte Energieübertragung durch Stöße mit einer Impulsänderung zwischen q und $q + dq$:

$$(58) \quad E(q) = \frac{8\pi}{K^2} \left(\frac{M}{m} z \right)^2 \frac{dq}{q} R h \sum_k f_{0k}(q),$$

$$(58a) \quad f_{mk} = \frac{E_k - E_m}{R h} \cdot \frac{\alpha^2}{q^2} \cdot \left| \int \sum_j e^{iqx_j} \Psi_m \overline{\Psi}_k d\tau \right|^2.$$

Da wir zur Ableitung von (45b) gar keine Annahme über das Potential V in der Schrödingerschen Gleichung zu machen brauchten, kann V insbesondere auch von mehr als drei Koordinaten abhängen, ebenso Ψ , und (45b) überträgt sich ohne weiteres auf unseren Fall:

$$(58b) \quad \begin{cases} (E_k - E_m) \int \Psi_m \overline{\Psi}_k e^{iqx_j} d\tau \\ = R h \alpha^2 \left(-2iq \int \frac{\partial \Psi_m}{\partial x_j} \overline{\Psi}_k e^{iqx_j} d\tau + q^2 \int \Psi_m \overline{\Psi}_k e^{iqx_j} d\tau \right). \end{cases}$$

Daraus kommt weiter

$$f = \sum_k f_{mk} = \sum_k \left(-\frac{2i}{q} \int \sum_j e^{iqx_j} \cdot \frac{\partial \Psi_m}{\partial x_j} \overline{\Psi_k} d\tau \right. \\ \left. + \int \sum_j e^{iqx_j} \cdot \Psi_m \overline{\Psi_k} d\tau \right) \cdot \int \sum_l e^{-iqx_l} \cdot \overline{\Psi_m} \Psi_k d\tau, \\ f = \sum_j \sum_l \left(-\frac{2i}{q} \int \frac{\partial \Psi_m}{\partial x_j} \overline{\Psi_m} e^{iq(x_j - x_l)} + \int \Psi_m \overline{\Psi_m} e^{iq(x_j - x_l)} \right).$$

Unter Berufung auf die Tatsache, daß f definitionsgemäß reell ist, kann man leicht zeigen, daß im ersten Integral $2 \overline{\Psi_m} \frac{\partial \Psi_m}{\partial x_j}$ durch $\frac{\partial |\Psi_m|^2}{\partial x_j}$ ersetzt werden darf. Es folgt dann durch partielle Integration

$$-\frac{i}{q} \int \frac{\partial |\Psi_m|^2}{\partial x_j} e^{iq(x_j - x_l)} d\tau = \begin{cases} -\int |\Psi_m|^2 e^{iq(x_j - x_l)} & \text{für } j \neq l \\ 0 & \text{für } j = l \end{cases}$$

also

$$f = \int \sum_j e^{iq(x_j - x_j)} |\Psi_m|^2 d\tau \\ (59) \quad f = \sum_k f_{mk}(q) = Z.$$

Die Summe der generalisierten Oszillatorenstärken (58a) für alle Übergänge von einem Niveau eines beliebigen Atoms aus ist gleich der Anzahl Z der Elektronen.

Die Übergänge eines schweren Atoms vom Grundzustand aus zerfallen nun nach ihrer Übergangsfrequenz in verschiedene, voneinander einigermaßen getrennte Gruppen, je nachdem ob ein Elektron aus der K -, L -, M (usw.)-Schale angeregt wird. Es fragt sich, ob auch für jede dieser Einzelgruppen von Übergängen die Oszillatorenstärken (58a) sich in einfacher Weise aufsummieren lassen. Ein solcher „partieller f -Satz“ wäre von Wichtigkeit für die Berechnung des Gesamtbremsvermögens eines Atoms durch Integration über alle möglichen Stoßvektoren q . Denn da die untere Integrationsgrenze q_{\min} von der übertragenen Anregungsenergie abhängt (17), ist es vorteilhaft, vor der q -Integration Übergänge mit benachbarten Übergangsfrequenzen (Anregungsenergien) zusammenzufassen.

Die Aufstellung eines partiellen f -Summensatzes gelingt, wenn man — wie oben angedeutet — annimmt, daß die Atom-eigenfunktion sich als Summe von Produkten der Eigenfunktionen der einzelnen Elektronen darstellen läßt. Letztere seien klassifiziert durch Hauptquantenzahl n und Azimutalquantenzahl l , sowie eine (wegen der Richtungsentartung bedeutungslose) magnetische Quantenzahl m ; Z_{nl} sei die Anzahl der Elektronen, die sich bei einem Atom im Grundzustand in der Schale $(n\ l)$ befinden, \vec{Z}_{nl} und \overleftarrow{Z}_{nl} die Zahl der $(n\ l)$ -Elektronen der einzelnen Spinrichtungen ¹⁾ ($Z_{nl} = \vec{Z}_{nl} + \overleftarrow{Z}_{nl}$), $g_{nl} = 2l + 1$ das „Gewicht“ des Elektronenzustandes $(n\ l)$. Dann läßt sich leicht zeigen, daß das Quadrat des Matrixelements für den Übergang eines Elektrons aus der Schale $n\ l$ nach $n',\ l'$ gegeben ist durch

$$(60) \quad \left\{ \begin{aligned} & |\varepsilon_{n\ l, n'\ l'}(q)|^2 \\ &= \left[\vec{Z}_{nl} \left(1 - \frac{\vec{Z}_{n'\ l'}}{g_{n'\ l'}} \right) + \overleftarrow{Z}_{nl} \left(1 - \frac{\overleftarrow{Z}_{n'\ l'}}{g_{n'\ l'}} \right) \right] |\varepsilon_{n\ l, n'\ l'}^1(q)|^2; \end{aligned} \right.$$

$$(60a) \quad |\varepsilon_{n\ l, n'\ l'}^1(q)|^2 = \frac{1}{g_{nl}} \cdot \sum_{m=-l}^{+l} \left| \int \psi_{nlm} \bar{\psi}_{n'\ l' m} e^{iqx} d\tau \right|^2$$

ist das Matricelementquadrat für den Fall, daß ein Elektron im Zustand $(n\ l)$ vorhanden und der Zustand $(n'\ l')$ unbesetzt ist — d. h. für den Fall, der beim Wasserstoffatom stets vorliegt. ²⁾ Der außer (60a) in (60) auftretende Faktor, der von

1) Diese Zahlen lassen sich beim Grundzustand einzeln angeben. Denn da der Grundterm ein Term höchster Multiplizität ist, muß, wenn \rightarrow die Richtung des Gesamtspins angibt, \vec{Z}_{nl} möglich groß sein, d. h. $\vec{Z}_{nl} = Z_{nl}$, wenn $Z_{nl} < g_{nl}$ und $\vec{Z}_{nl} = g_{nl}$, wenn $Z_{nl} > g_{nl}$.

2) Die Mittelung über m muß wie in (60a) ja auch beim Wasserstoffatom vorgenommen werden.

Wenn wir nicht alle Übergänge von der $n\ l$ -Schale aus zusammenfassen, sondern die Übergänge von jeder einzelnen, durch n, l, m und die Spinrichtung charakterisierten Quantenzelle aus *getrennt* betrachten, so wird das Matricelement noch einfacher, nämlich

$$(60b) \quad \varepsilon_{n\ l\ m, n'\ l'\ m} = \int e^{iqx} \psi_{nlm} \bar{\psi}_{n'\ l'\ m}.$$

der Anzahl der Elektronen im Ausgangsniveau und der Zahl der freien Plätze im Endniveau abhängt, ist vom Standpunkt des Pauliprinzips ohne weiteres verständlich.

Aus (60) läßt sich die Summe der Oszillatorstärken für *alle* die Übergänge berechnen, bei denen ein Elektron aus der $(n\ l)$ -Schale angeregt wird:

$$(61a) \quad \left\{ \begin{aligned} f_{nl} &= \sum_{n'l'} f_{nl, n'l'} = \frac{\alpha^2}{q^2 R h} \sum_{n'l'} (E_{n'l'} - E_{nl}) |\epsilon_{nl, n'l'}(q)|^2 \\ &= \frac{\alpha^2}{q^2 R h} \left(Z_{nl} \sum_{n'l'} (E_{n'l'} - E_{nl}) |\epsilon_{nl, n'l'}^1(q)|^2 \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n'l'} \frac{\vec{Z}_{nl} \vec{Z}_{n'l'} + \overleftarrow{Z}_{nl} \overleftarrow{Z}_{n'l'}}{g_{n'l'}} (E_{n'l'} - E_{nl}) |\epsilon_{nl, n'l'}^1(q)|^2 \right). \end{aligned} \right.$$

Der erste Summand läßt sich genau analog zur Ableitung des f -Summensatzes bei Wasserstoff (§ 8) zu Z_{nl} berechnen; sei ferner

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} f_{nl, n'l'}^1 &= (E_{n'l'} - E_{nl}) \frac{\alpha^2}{q^2 R h} |\epsilon_{nl, n'l'}^1(q)|^2 \\ &= \frac{\alpha^2}{q^2 R h} (E_{n'l'} - E_{nl}) \\ &\quad \cdot \frac{1}{g_{nl}} \sum_m \left| \int \psi_{nlm} \bar{\psi}_{n'l'm} e^{iqx} d\tau \right|^2, \end{aligned} \right.$$

so gilt

$$(62) \quad \left\{ \begin{aligned} f_{nl} &= Z_{nl} - \sum_{n'l'} \frac{\vec{Z}_{nl} \vec{Z}_{n'l'} + \overleftarrow{Z}_{nl} \overleftarrow{Z}_{n'l'}}{g_{n'l'}} \cdot f_{nl, n'l'}^1 \\ &= \sum_{n'l'} f_{nl, n'l'}^1 \zeta. \end{aligned} \right.$$

wenn nlm besetzt und $n'l'm$ frei ist; dagegen Null, wenn nlm unbesetzt oder $n'l'm$ besetzt (oder beides) — d. h. genau so, wie wenn überhaupt nur das eine „springende“ Elektron im Atom vorhanden wäre. Doch läßt sich die Verteilung der Elektronen auf die einzelnen Plätze mit verschiedenem m innerhalb eines $(n\ l)$ -Niveaus ja nicht angeben, und man muß daher über alle, bei der gegebenen Gesamtbesetzungszahl der $(n\ l)$ -Schale möglichen Verteilungen der Elektronen auf die einzelnen Plätze mitteln. Das führt dann zu (60, 60a).

Die Summe der Oszillatorstärken aller Übergänge, bei denen ein Elektron aus der $(n\ l)$ -Schale angeregt wird, ist gleich der Anzahl $Z_{n\ l}$ der Elektronen in dieser Schale, vermindert um die Oszillatorstärken der durch das Pauliprinzip verbotenen Übergänge vom Zustand $n\ l$ aus. Sind alle Schalen $n''\ l''$ voll, alle anderen nicht besetzt, so ist $\overrightarrow{Z}_{n''\ l''} = \overleftarrow{Z}_{n''\ l''} = g_{n''\ l''}$ und

$$(62a) \quad f_{n\ l} = Z_{n\ l} \left(1 - \sum_{n''\ l''} f_{n\ l, n''\ l''}^{\dagger} \right).$$

Die partielle Summe $f_{n\ l}$ der Oszillatorstärken ist kleiner oder größer als die Besetzungszahl $Z_{n\ l}$ der Schale $(n\ l)$, je nachdem ob $(n\ l)$ eine innere oder äußere Schale des Atoms ist. Denn wenn $(n\ l)$ eine innere Schale ist, sind für alle durch das Pauliprinzip verbotenen Übergänge die Oszillatorstärken $f_{n\ l, n''\ l''}^{\dagger}$ positiv, weil $E_{n''\ l''} > E_{n\ l}$, und umgekehrt für äußere Schalen.¹⁾ Summiert man die Oszillatorstärken für alle möglichen Übergänge des Atoms, so erhält man

$$f = \sum_{n\ l} f_{n\ l} = \sum_{n\ l} Z_{n\ l} - \frac{\alpha^2}{q^2 R \hbar} \sum_{n\ l} \sum_{n''\ l''} \frac{\overrightarrow{Z}_{n\ l} \overrightarrow{Z}_{n''\ l''} + \overleftarrow{Z}_{n\ l} \overleftarrow{Z}_{n''\ l''}}{g_{n\ l} g_{n''\ l''}} \cdot (E_{n''\ l''} - E_{n\ l}) \sum_m \left| \int e^{i q x} \psi_{n\ l m} \bar{\psi}_{n''\ l'' m} d\tau \right|^2 = Z.$$

Die Abweichungen der partiellen Summen $f_{n\ l}$ von den Elektronenzahlen $Z_{n\ l}$ in den einzelnen Schalen heben sich, wie es sein muß, bei der Summierung aller Oszillatorenstärken des Atoms heraus.

Um einen Anhaltspunkt über die Größenordnung der zu erwartenden Effekte zu gewinnen, sind in Tab. 2 die Oszillatorensummen $f_{n\ l}/Z_{n\ l}$ für die einzelnen Schalen $(n\ l)$ verschiedener Atome verzeichnet.²⁾ Am größten (bis 1,7) sind diese

1) Anm. bei der Korrektur: Erst jetzt bemerke ich, daß dieser Satz schon von R. de L. Kronig und H. A. Kramers, Ztschr. f. Phys. 48. S. 174. 1928 gefunden wurde. Er ist auch experimentell bestätigt: Aus Dispersions- und Absorptionsmessungen im Röntgengebiet ergibt sich die Summe der Oszillatorstärken der K -Serie erheblich kleiner als 2 (Literatur in der zitierten Arbeit).

2) Von Atom zu Atom kommen neue verbotene Übergänge hinzu, also ändern sich die Oszillatorensummen. Zur Berechnung der

für außen liegende Schalen hoher Azimutalquantenzahl, weil im Wasserstoffatom die Übergangswahrscheinlichkeiten am größten sind für die Übergänge von $(n-1, l=n-2)$ nach $(n, l=n-1)$, und weil der Oszillatorsumme $f_{n,n-1}$ ja die Oszillatorstärke eben *dieses* Übergangs zugute kommt, wenn er verboten ist. Dagegen haben äußere ($n s$)-Schalen Oszillatorsummen, die nicht merklich größer als 1 sind, weil die Übergangswahrscheinlichkeiten $n-1, 1 \rightarrow n, 0$ sehr klein sind — wie überhaupt die Wahrscheinlichkeiten aller Übergänge, bei denen sich Haupt- und Nebenquantenzahl in entgegengesetztem Sinne ändern. Die Oszillatorensommen für *innere* Schalen gehen bei schweren Atomen auf etwa 0,3 bis 0,4 pro Elektron zurück¹⁾: Ein K -Elektron z. B. kann dann praktisch nur noch in einen Zustand des kontinuierlichen, nicht mehr in einen des diskreten

Tabelle 2²⁾

Oszillatorensommen für einige Niveaus in verschiedenen Atomen

	Be	B	C	N	O	F	Ne	Na	Mg
1s . . .	1,000	,931	,861	,792	,723	,653	,584	,584	,584
2s . . .	1,000	1,000	1	1	1	1	1	1	1
2p . . .	—	1,136	1,136	1,136	1,136	1,136	1,136	1,120	1,122
3s . . .	—	—	—	—	—	—	—	1,040	1,040

	Ne	Ar	Cu	Kr	Ag	Xe	Au	Em
1s	,584	,505	,505	,476	,476	,463	,463	,455
2s	1,000	,565	,565	,462	,462	,420	,420	,398
2p	1,136	1,122	,426	,423	,301	,300	,256	,256
3s	—	1,040	1,040	,566	,566	,446	,446	,394
3p	—	1,171	1,171	1,138	,533	,526	,387	,387
3d	—	—	1,418	1,407	1,407	1,405	,408	,408
4s	—	—	—	1,103	1,103	,560	,422	,422
4p	—	—	—	1,220	1,220	1,070	,450	,450
4d	—	—	—	—	1,437	1,464	1,464	1,456
4f	—	—	—	—	—	—	1,712	1,712

Oszillatorstärken (61) wurden für die ψ_{nlm} -Wasserstoffeigenfunktionen eingesetzt, die Übergangswahrscheinlichkeiten wurden aus den numerischen Tabellen von Kupper (Ann. d. Phys. 87. S. 511. 1928) entnommen.

1) Wenn man nicht Wasserstoff-Eigenfunktionen einsetzt, sondern die Abschirmung berücksichtigt, werden die verbotenen Übergänge schwächer und alle Oszillatorsommen nähern sich der 1 (vgl. R. de L. Kronig und H. A. Kramers, a. a. O.).

2) Ein Komma ohne Ziffer davor bedeutet 0,.

Spektrums gehoben werden; es bleiben also praktisch nur die Oszillatorstärken der Übergänge ins kontinuierliche Spektrum übrig.

§ 12. Bremsung

Wir berechnen die gesamte vom Partikelstrom auf das Atom in der Zeiteinheit übertragene Energie

$$(63) \quad E = \frac{8\pi \alpha^2}{K^2} \left(\frac{M}{m} z \right)^2 \sum_k (E_k - E_0) \int_{q_{\min}}^{q_{\max}} \frac{dq}{q^3} |\epsilon_{0k}(q)|^2$$

in ganz ähnlicher Weise wie in § 10 für das Wasserstoffatom: Wir teilen das Integrationsgebiet q_{\min} bis q_{\max} durch einen Schnittpunkt in zwei Teilgebiete: im ersten Gebiet (q_{\min} bis zum Schnittpunkt) führen wir erst die q -Integration für jeden Übergang getrennt aus und summieren dann erst über alle möglichen Übergänge k , vom Schnittpunkt ab fassen wir erst alle die Übergänge vermittels des partiellen f -Sommensatzes des vorigen Paragraphen zusammen, bei denen ein Elektron der (nl) -Schale angeregt wird, und integrieren dann erst über q . Den Schnittpunkt selbst wählen wir nicht für alle Übergänge des Atoms gleich (q_0), wie in § 10, sondern nur für solche, bei denen ein (nl) -Elektron angeregt wird (q_{nl}) — die q_{nl} für verschiedene Schalen nl können verschieden sein. Jeden Schnittpunkt q_{nl} bestimmen wir so, daß für alle $q > q_{nl}$ praktisch alle Anregungen des (nl) -Elektrons energetisch möglich sind, also

$$q_{nl} \gg \frac{\alpha_{nl}^2 M}{2 K m},$$

wo

$$\alpha_{nl}^2 = - \frac{8\pi^2 m}{h^2} E_{nl}$$

— E_{nl} = Ionisierungsspannung der nl -Schale.¹⁾ Dagegen sollen für alle $q < q_{nl}$ merklich die Übergangswahrscheinlichkeiten durch ihren Wert bei $q = 0$, d. h. durch die Elemente der Koordinatenmatrix, gegeben sein, d. h. $q_{nl} \ll \alpha_{nl}$ (vgl. die entsprechende Wahl des Schnittpunkts q_0 beim Wasserstoffatom). Dann ist (vgl. 55b, 55c) mit Rücksicht auf (61a) und (62)

1) α_{nl} ist vom Typ der reziproken Längen α_n des § 4, die sich auf einen Zustand des Atoms (Elektrons) beziehen, nicht vom Typ der auf Übergänge bezogenen $\alpha_{n,n'}$ des § 4.

$$\begin{aligned}
 E = & \frac{8\pi R h}{K^2} \left(\frac{M}{m} z\right)^2 \sum_{nl} \left(\sum_{n'l'} f_{nl, n'l'}(0) \cdot \ln \frac{2q_{nl} K m}{(\alpha_{nl}^2 - \alpha_{n'l'}^2) M} \right. \\
 & \left. + \int_{q_{nl}}^{q_{\max}} f_{nl}(q) \frac{dq}{q} \right) \\
 = & \frac{8\pi R h}{K^2} \left(\frac{M}{m} z\right)^2 \sum_{nl} \left(f_{nl}(0) \ln \frac{2q_{nl} K m}{\alpha_{nl}^2 \cdot M} \right. \\
 & \left. + \sum_{n'l'} f_{nl, n'l'}(0) \ln \frac{-E_{n'l'}}{E_{n'l'} - E_{nl}} \right. \\
 & \left. + Z_{nl} \ln \frac{2 K m}{q_{nl}(M+m)} - \sum_{n''l''} \int_{q_{nl}}^{q_{\max}} \frac{f_{nl, n''l''}^1(q) \frac{dq}{q}}{\frac{\overrightarrow{Z_{nl}} \overrightarrow{Z_{n''l''}} + \overleftarrow{Z_{nl}} \overleftarrow{Z_{n''l''}}}{g_{n''l''}}} \right).
 \end{aligned}
 \tag{63a}$$

Die Summe über $n'l'$ geht dabei wegen der Definition (61a) der $f_{nl, n'l'}$ über alle unbesetzten Elektronenzustände, die über $n''l''$ über die besetzten. Da nach (61)

$$g_{nl} f_{nl, n''l''}^1 = -g_{n''l''} f_{n''l'', nl}^1,
 \tag{63b}$$

so bekommt man durch Zusammenfassung je zweier Glieder in der Summe über $n''l''$, die dem Übergang $nl \rightarrow n''l''$ und dem umgekehrten Übergang entsprechen:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{q_{nl}}^{q_{\max}} \frac{f_{nl, n''l''}^1(q)}{g_{n''l''}} \frac{dq}{q} - \int_{q_{n''l''}}^{q_{\max}} \frac{f_{n''l'', nl}^1(q)}{g_{nl}} \frac{dq}{q} \\
 & = \int_{q_{n''l''}}^{q_{nl}} \frac{f_{nl, n''l''}^1(q)}{g_{n''l''}} \frac{dq}{q} \\
 & \approx \int_{q_{n''l''}}^{q_{nl}} \frac{f_{nl, n''l''}^1(0)}{g_{n''l''}} \frac{dq}{q} = - \frac{f_{nl, n''l''}^1(0)}{g_{n''l''}} \ln \frac{2 K m}{q_{nl}(M+m)} \\
 & \quad - \frac{f_{n''l'', nl}^1(0)}{g_{nl}} \ln \frac{2 K m}{q_{n''l''}(M+m)}.
 \end{aligned}
 \tag{63c}$$

(Die Ersetzung von $f_{nl, n'l'}^1(q)$ durch $f_{nl, n'l'}^1(0)$ ist für $q < q_{nl}$ bzw. $q_{n'l'}$ zulässig, denn die Schnittpunkte q_{nl} sind ja gerade so gewählt, daß die generalisierten Oszillatorstärken dort noch nicht wesentlich von ihrem Wert bei $q = 0$ (d. h. von den in gewöhnlicher Weise definierten Oszillatorstärken) abweichen). Mit Rücksicht auf (62) ist also

$$(63d) \left\{ \begin{aligned} E &= \frac{8\pi R h}{K^2} \left(\frac{M}{m} z \right)^2 \sum_{nl} f_{nl} \\ &\cdot \left(\ln \frac{4K}{a_{nl}^2} \frac{m^2}{M(M+m)} + \frac{1}{f_{nl}} \sum_{n'l'} \zeta f_{nl, n'l'}^1 \ln \frac{-E_{nl}}{E_{n'l'} - E_{nl}} \right), \end{aligned} \right.$$

wo unter den Oszillatorstärken $f_{nl, n'l'}^1$ und den partiellen Oszillatorsummen f_{nl} die Werte dieser Größen bei $q = 0$ verstanden sind. Um (63d) bequemer zu schreiben, definieren wir die mittlere Anregungsenergie der (nl) -Schale

$$(64) \left\{ \begin{aligned} f_{nl} \ln A_{nl} &= f_{nl} \ln (-E_{nl}) \\ &+ \sum_{n'l'} f_{nl, n'l'}^1 \left(Z_{nl} - \frac{\overleftarrow{Z}_{nl} \overleftarrow{Z}_{n'l'} + \overrightarrow{Z}_{nl} \overrightarrow{Z}_{n'l'}}{g_{n'l'}} \right) \cdot \ln \frac{E_{n'l'} - E_{nl}}{-E_{nl}}. \end{aligned} \right.$$

Für eine äußere Schale liegt die mittlere Anregungsenergie im allgemeinen etwas niedriger als die Ionisierungsspannung $-E_{nl}$ der Schale. Denn die Übergänge nach den nächst höheren diskreten Niveaus (vor allem nach $n' = n + 1, l' = l + 1$) haben ja die größten Oszillatorenstärken $f_{nl, n'l'}^1$; für diese Übergänge ist aber $E_{n'l'} < 0$, also $\ln \frac{E_{n'l'} - E_{nl}}{-E_{nl}} < 0$, sie liefern also, falls das Niveau $n'l'$ unbesetzt ist, einen großen negativen Beitrag zu der Summe in (64), neben dem der positive Beitrag der Übergänge ins kontinuierliche Spektrum wenig ausmacht.¹⁾ Jedenfalls liegt aber (auch für äußere

1) Eine Ausnahme bildet der Fall, daß $1s$ die äußerste Schale ist (H, He). Denn dann unterscheidet sich die Anregungsenergie für diskrete Übergänge sehr wenig (höchstens 25 Proz.) von der Ionisierungsspannung, während sie für die starken Übergänge ins kontinuierliche Spektrum im Mittel schon wesentlich über der Ionisierungsspannung liegt; infolgedessen liefern hier die kontinuierlichen Übergänge den größeren Beitrag zur Summe in (64) und die mittlere Anregungsenergie wird etwas (10 Proz.) größer als die Ionisierungsspannung. [Vgl. § 10, Formel (55).]

Schalen) die mittlere Anregungsenergie höher als die Energie für die erste Anregung (Anregung der „Resonanzlinie“), wie man aus (64) leicht abliest. Man wird nicht sehr fehl gehen, wenn man die mittlere Anregungsenergie etwa gleich dem 1,2—1,5 fachen der Anregungsspannung der Resonanzlinie annimmt — wenigstens geben Überschlagsrechnungen unter Benutzung von Wasserstoff-Eigenfunktionen dieses Resultat.¹⁾

Für innere Schalen sind praktisch nur Ionisierungen möglich, die mittlere Anregungsenergie liegt (etwa 30—60 Proz.) höher als die Ionisierungsspannung.

Mit Verwendung der mittleren Anregungsenergie schreibt sich (63d):

$$(65) \quad E = \frac{4 \pi e^4 z^2}{m v^2} \sum_{n l} f_{n l} \ln \frac{(2) m v^2}{A_{n l}}.$$

Die eingeklammerte 2 unter dem Logarithmus steht nur für den Fall des Stoßes schwerer Teilchen (vgl. 55) und fällt bei Elektronenstoß fort.

Die gesamte Energieabgabe der Partikel pro Zentimeter Weg

$$(66) \quad -\frac{dT}{dx} = N E = \frac{4 \pi e^4 z^2 N}{m v^2} \sum_{n l} f_{n l} \ln \frac{(2) m v^2}{A_{n l}}$$

setzt sich also zusammen aus den Energieabgaben an die einzelnen Schalen. Die Energieabgabe an jede Schale ist nicht proportional mit der Anzahl der Elektronen in der Schale, sondern mit der davon etwas abweichenden Oszillatorensumme $f_{n l}$ (vgl. Tab. 2); außerdem enthält das Bremsvermögen (Energieabgabe) für jede Schale ein logarithmisches Glied, wie in den klassischen Theorien. Sowohl das logarithmische Glied wie der Ersatz der Elektronenzahl $Z_{n l}$ durch die Oszillatorensumme $f_{n l}$ bewirken, daß die äußeren Schalen ein größeres Bremsvermögen besitzen als die inneren, doch unterscheiden sich die Bremsvermögen äußerer und innerer Schalen für schnelle Teilchen nicht um Größenordnungen, sondern höchstens etwa um einen Faktor 5.

1) Das Bremsvermögen ist nicht empfindlich gegen Fehler in der mittleren Anregungsenergie.

§ 13. Vergleich des Bremsvermögens
mit früheren Theorien und mit der Erfahrung

Unsere Formel für das Bremsvermögen

$$(66) \quad -\frac{dT}{dx} = -M_1 v \frac{dv}{dx} = \frac{4\pi e^4 z^2 N}{m v^2} \sum_{nl} f_{nl} \ln \frac{(2) m v^2}{A_{nl}}$$

hat am meisten Ähnlichkeit mit der von Henderson¹⁾ angegebenen. Dies ist insofern ganz natürlich, als die Hendersonsche Theorie von allen bisherigen am meisten auf quantentheoretischen Überlegungen basiert. (66) unterscheidet sich von der Hendersonschen Formel hauptsächlich durch einen Faktor 2; dieser führt eine gute Übereinstimmung unserer Formel mit der Erfahrung herbei, da Fowler²⁾ gezeigt hat, daß das nach Henderson berechnete Bremsvermögen um etwa 50 Proz. zu niedrig ausfällt (vgl. unten). Die Hendersonsche Idee, die Energieübertragung von der Partikel auf ein Elektron des Atoms klassisch zu berechnen, aber nur Stöße mit einer Energieübertragung größer als die Ionisierungsspannung als quantentheoretisch zulässig zu betrachten, enthält wohl einen richtigen Kern. Man erhält ja nach der Wellenmechanik dank dem f -Sommensatz für die Energieübertragung auf ein (nl) -Elektron bei Stößen, bei denen der Impuls der Partikel eine Änderung $M(v - v')$ zwischen $\frac{h}{2\pi} q$ und $\frac{h}{2\pi} (q + dq)$ erfährt,³⁾

$$(67) \quad E(q) = \frac{4\pi e^4 z^2}{m v^2} \frac{dq}{q} \cdot \frac{f_{nl}(q)}{Z_{nl}}.$$

Jeder dieser Stöße ist aber klassisch mit einer Energieabgabe⁴⁾

1) G. H. Henderson, *Phil. Mag.* **44**, S. 680. 1922.

2) R. H. Fowler, *Proc. Camb. Soc.* **21**, S. 521. 1923.

3) Vorausgesetzt, daß q groß genug ist, damit alle Übergänge des (nl) -Elektrons zulässig sind.

4) Klassisch werden die unelastischen Stöße als elastische Zusammenstöße der Partikel mit einem Elektron des Atoms behandelt. Also tritt von unserer Formel (21) für den gesamten Energieverlust einer Partikel beim Zusammenstoß nur der erste (klassische) Term auf der rechten Seite in Erscheinung, in diesem ist aber m statt M_2 (Masse der gestoßenen Partikel) und $\frac{M_1 m}{m + M_1}$ statt M (effektive Masse der stoßenden Partikel) zu setzen.

$$(67a) \quad \begin{cases} Q = \frac{M_1}{2} (v^2 - v'^2) = \frac{m M_1^2}{2(m + M_1)^2} |v - v'|^2 \\ \quad = \frac{m M_1^2}{M^2 (m + M_1)^2} \frac{h^2}{8\pi^2} q^2 = \text{const} \cdot q^2 \end{cases}$$

verknüpft, und man erhält klassisch — bis auf den Ersatz der Oszillatorsummen f_{nl} durch die Elektronenzahlen Z_{nl} — die *gleiche* Formel für die Energieabgabe bei diesen Stößen wie wellenmechanisch:¹⁾ ($W(Q)$ = Wahrscheinlichkeit der Stöße)

$$(67b) \quad E(Q) = Q \cdot W(Q) = \frac{2\pi e^4 z^2}{m v^2} \cdot \frac{dQ}{Q}.$$

Wenn man aber aus der minimalen, quantenmechanisch zulässigen Impulsänderung $q_{\min} \approx \frac{M \alpha_{nl}^2}{2mK}$ (vgl. 17) die kleinste „klassisch übertragbare Energie“ berechnet, so erhält man

$$(67c) \quad Q_{\min} \approx \frac{m}{M^2} \frac{h^2}{8\pi^2} q_{\min}^2 = \frac{m}{4M} \cdot \frac{E_{nl}^2}{T_r},$$

also ist die minimale übertragbare Energie im Gegensatz zu Hendersons Annahme sehr viel kleiner als die Ionisierungsspannung, was die Verdoppelung unseres Bremsvermögens gegenüber dem von Henderson bewirkt.²⁾

Merkwürdigerweise bekommt dagegen Gaunt³⁾ ein ganz anderes Resultat als wir. Indem er das stoßende Teilchen als Korpuskel, das Atom nach der Wellenmechanik behandelt, gewinnt er nämlich für Wasserstoff die Bohrsche Formel für die Bremsung

$$(68) \quad -\frac{dT}{dx} = \frac{4\pi e^4 z^2 N}{m v^2} \ln \frac{m v^3}{0,98 \cdot 2\pi \cdot R \cdot e^2 z}$$

zurück, die sich von der unseren bezüglich des Arguments des im Logarithmus um den Faktor

$$(68a) \quad \frac{1,12 \cdot h v}{2\pi e^2 z}$$

1) Vgl. R. H. Fowler, a. a. O., S. 526.

2) Übrigens gibt die Integration der klassischen Formel von dem eben berechneten Q_{\min} bis $Q_{\max} = \frac{m}{2} v^2$ nur für Elektronen das richtige. Für α -Teilchen ist die klassische Annahme: „Zusammenstoß mit dem Atomelektron nach dem Impulssatz“ für kleine Ablenkungen doch zu grob, man erhält dort im Logarithmus einen Faktor M/m zuviel.

3) I. A. Gaunt, Proc. Cambr. Soc. 23. S. 732. 1928.

unterscheidet.¹⁾ Wahrscheinlich liegt das daran, daß er sich um das Schicksal der Partikel beim Stoß gar nicht kümmert und dadurch Stöße mitrechnet, bei denen die Energiebilanz gar nicht erfüllt ist — d. h. bei denen die klassisch behandelte Partikel weniger Energie verliert als das Atom (quantenmechanisch) gewinnt. Außerdem ist seine Rechnung durch die Mischung klassischer und quantenmechanischer Methoden unnötig kompliziert.

Um unsere Theorie mit dem Experiment zu vergleichen, berechnen wir, ebenso wie Fowler²⁾, nicht die gesamte Reichweite, die natürlich durch einen Integrallogarithmus der Anfangsgeschwindigkeit der Partikel gegeben wäre, sondern die Wegstrecke X , die zur Bremsung eines α -Teilchens von Ra C' von der Anfangsgeschwindigkeit $v = 1,922 \cdot 10^9$ cm sec⁻¹ auf 90 Proz. dieses Wertes notwendig ist. Wir können dann im Logarithmus auf der rechten Seite von (66) v^2 durch einen mittleren Wert ersetzen; $\frac{m}{2} v^2$ drücken wir in Elektronenvolt aus; es ist die Energie eines Elektrons, das dieselbe Geschwindigkeit besitzt wie das α -Teilchen. Es ist nach Fowler

$$\frac{m}{2} \overline{v^2} = \bar{W} = 940 \text{ Volt}$$

und wir bekommen

$$(69) \quad \frac{v_0^4 - v^4}{X} = \frac{16 \pi e^4 z^2 N}{m M_1} \sum_{n,l} f_{nl} \ln \frac{4 \bar{W}}{A_{nl}}$$

und mit Einsetzen der Konstanten (für die Temperatur 15° C):

$$9a) \quad \left\{ \begin{aligned} B &= \sum_{n,l} f_{nl} \cdot 10 \log \frac{4 \bar{W}}{A_{nl}} = \\ &= \frac{0,4343 \cdot (1,922)^4 \cdot 10^{36} \cdot (1 - 0,9^4) \cdot 4 \cdot 1830 \cdot 0,81 \cdot 10^{-54} \cdot 2,24 \cdot 10^4 \cdot 288}{16 \cdot 3,14 (4,77)^4 \cdot 10^{-40} \cdot 2^2 \cdot 6,1 \cdot 10^{23} \cdot 273 \cdot X} = \frac{45}{X} \end{aligned} \right.$$

In Tabelle 3 sind die experimentellen und die theoretischen Werte für das Bremsvermögen B für einige Elemente an-

1) Der Faktor ist zwar für normale α -Teilchen ($v = 1$ bis $2 \cdot 10^9$ cm sec⁻¹) von der Größenordnung 2 bis 4, macht also, da er im Logarithmus steht, nur wenig aus. Doch ist die Form des Gesetzes eben doch wesentlich verändert.

2) R. H. Fowler, a. a. O.

gegeben.¹⁾ Die Oszillatorsummen f_{nl} sind aus Tab. 2 entnommen, d. h. unter Zugrundelegung von Wasserstoffeigenfunktionen berechnet; für die mittleren Anregungsspannungen wurde bei äußeren Schalen die $1\frac{1}{2}$ fache Resonanzspannung, bei inneren die $1\frac{1}{2}$ fache Ionisierungsspannung eingesetzt; für die Anregungs- bzw. Ionisierungsspannungen wurden die von Fowler, a. a. O., angegebenen Werte übernommen.

Für H_2 , He, Luft, O_2 , Al und A stimmt unsere Formel recht gut mit dem Experiment, bei schwereren Elementen gibt sie systematisch zu große Werte für das Bremsvermögen. Das kann einmal daran liegen, daß die partiellen Oszillatorsummen für alle von einem Niveau ausgehenden Übergänge merklich näher an 1 liegen würden, wenn man statt Wasserstoffeigenfunktionen zur Berechnung der Oszillatorenstärken

Tabelle 3
Bremsvermögen

Z	Substanz	B_{beob}	B_{ber}	Fehler %
1	$\frac{1}{2} H_2$	2,67	2,42	— 9
2	He	5,03	4,24	— 15
7	$\frac{1}{2} N_2$	—	13,4	—
7,2	$\frac{1}{2}$ Luft	12,0	13,8	+ 15
8	$\frac{1}{2} O_2$	13,3	15,4	+ 15
10	Ne	—	18,4	—
13	Al	18,7	20,7	+ 11
18	A	24	27,1	+ 13
29	Cu	31,7	49,9	+ 57
79	Au	48,4	95,6	+ 97

passendere, z. B. die Hartreeschen Eigenfunktionen nehmen würde. Denn dadurch würde das Bremsvermögen der äußeren Schalen und auch das Gesamtbremsvermögen herabgesetzt. Weniger groß kann der Fehler sein, der etwa durch falsche Werte für die mittlere Anregungsspannung verursacht wird. Eher könnten Fehler dadurch hereinkommen, daß wir unsere

1) Im allgemeinen bezeichnet man allerdings als Bremsvermögen den Ausdruck $\frac{v_0^4 - v^4}{X}$, doch ist dieser wegen seiner Größe unhandlich. Von dem Fowlerschen Bremsvermögen S unterscheidet sich unseres durch einen Faktor $0,217 = \frac{1}{2} \cdot 10 \log e$.

aus der Bornschen Stoßtheorie gewonnenen Formeln noch für mittlere Schalen angewendet haben, obwohl dort unsere Voraussetzung: Ionisierungsspannung klein gegen $\frac{m}{2}v^2$ nicht mehr gültig ist. Jedenfalls ist es aber befriedigend, daß die Übereinstimmung mit der Erfahrung bei den leichten Atomen, wo unsere Voraussetzungen am ehesten zutreffen, am besten ist.

Was die Abhängigkeit des Bremsvermögens von der Ordnungszahl betrifft, so kann natürlich aus unserer Formel ein allgemeines Gesetz für diese Abhängigkeit nicht abgeleitet werden. Man kann nur sehen, daß das Bremsvermögen mit wachsender Ordnungszahl wächst (wegen der zunehmenden Anzahl der Summenglieder in der Formel (66)), aber schwächer als Z (weil die einzelnen Glieder [die Logarithmen] für die inneren Schalen sehr viel kleiner sind als für äußere, und bei komplizierteren Atomen ja hauptsächlich neue *innere* Schalen hinzukommen). Ein besonders hohes Bremsvermögen müßten alle Atome haben, die viele Elektronen in äußeren Schalen enthalten, also Edelgase (in Übereinstimmung mit der Erfahrung), aber auch Elemente mit abgeschlossenen Achtzehnerschalen, z. B. Cu, Ag, Au (gegen die Erfahrung).

Von der *Geschwindigkeit* muß der Energieverlust der Partikel pro Zentimeter Weg für schwere bremsende Atome weniger abhängen als für leichte; denn wenn man (66) umschreibt in

$$(70) \quad -\frac{dT}{dx} = \frac{4\pi e^4 z^2}{m v^2} Z \ln \frac{2mv^2}{E},$$

so ist die mittlere Anregungsenergie des Atoms, E , definiert durch¹⁾

$$(70a) \quad Z \ln E = \sum_{nl} f_{nl} \ln A_{nl}$$

und um so größer, je mehr innere Schalen mit großer Anregungsspannung vorhanden sind. Bei schweren Atomen liegt also die mittlere Anregungsenergie E dichter unterhalb der

1) Auf der rechten Seite sind nur die Glieder $A_{nl} < \frac{m}{2}v^2$ zu rechnen, entsprechend wäre Z durch $\sum f_{nl}$ für alle die Schalen nl zu ersetzen, für welche diese Ungleichung gilt.

Energie $W = \frac{m}{2} v^2$, so daß bei nicht allzu großen Geschwindigkeiten v der Logarithmus in (70) relativ klein wird; die Änderung des Logarithmus mit der Geschwindigkeit ist aber stets

$$\frac{d}{dv} \ln \frac{mv^2}{E} = \frac{2}{v}$$

also *unabhängig* vom bremsenden Atom, und demnach die *relative* Änderung bei schweren Atomen größer als bei leichten. Daher wird der *Abfall* des Bremsvermögens wegen des Faktors $1/v^2$ bei nicht zu großer Partikelgeschwindigkeit v durch eine *Zunahme* des Logarithmus teilweise ausgeglichen, welche bei der Bremsung durch schwere Atome relativ größer ist als bei der durch leichte; der resultierende Abfall des Bremsvermögens mit zunehmender Geschwindigkeit ist daher bei schweren Atomen flacher, und die Reichweite der Partikel geht mit einer niedrigeren Potenz der Geschwindigkeit als bei leichten Atomen, wie auch die Beobachtung ergibt.¹⁾ Für sehr große Partikelgeschwindigkeit (schnelle Elektronen) wird die Änderung des Logarithmus in (70) mit der Geschwindigkeit belanglos, der Energieverlust wird proportional $1/v^2$, die Reichweite proportional v^4 ; das ist das Thomson-Whiddingtonsche Gesetz.²⁾ Berechnet man die Konstante dieses Gesetzes³⁾

$$(70b) \quad \frac{qZ}{A} \cdot b = \frac{v_0^4 - v^4}{x} = \frac{16\pi e^4 L}{m^2} \cdot \frac{qZ}{A} \cdot \ln \frac{mv^2}{E}$$

etwa für die Geschwindigkeit $10^{10} \text{ cm sec}^{-1} = 30000 \text{ Volt}$ für Luft (mittlere Anregungsenergie $E = 35 \text{ Volt}$), so bekommt man etwa $b = 14 \cdot 10^{42}$, für Cu ($E = \text{etwa } 80 \text{ Volt}$) $b = 12,5 \cdot 10^{42}$, das ist durchweg etwas mehr als die experimentellen Resultate⁴⁾ ($10-11 \cdot 10^{42}$). Die Konstante b sollte bei wachsender Geschwindigkeit eine Kleinigkeit zunehmen (etwa um $1 \cdot 10^{42}$ bei einer Ver-

1) Vgl. H. Geiger, Handb. d. Phys. **24**. S. 164. Daß bei Luft das Gesetz: Reichweite proportional v^5 (also Bremsvermögen proportional $1/v$) so gut erfüllt ist, muß als Zufall bezeichnet werden.

2) R. Whiddington, Proc. Roy. Soc. (A) **89**. S. 559. 1914; Proc. Cambridge Soc. **16**. S. 326. 1911.

3) $L = \text{Loschmidtzahl}$, $\rho = \text{Dichte}$, $A = \text{Atomgewicht des bremsenden Materials}$.

4) H. Kulenkampff, Ann. d. Phys. **80**. S. 261. 1926; H. M. Terill, Phys. Rev. **22**. S. 101. 1923.

dopplung der kinetischen Energie des Elektrons), die Experimente lassen eine Entscheidung darüber nicht zu.

§ 14. Anregung optischer Niveaus

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Anregung eines Elektrons in den $n'l$ -Zustand ist nach (60):

$$(71) \quad d\Phi_{n'l}^{n'l}(q) = \frac{8\pi\alpha^2}{q^3 K^2} dq \left(\frac{M}{m}z\right)^2 \cdot \zeta \cdot |\varepsilon_{n'l, n'l'}^1(q)|^2$$

wo $|\varepsilon_{n'l, n'l'}^1(q)|^2$ durch (60a) gegeben und ζ in (62) definiert ist. Die Gesamtwahrscheinlichkeit (integraler Anregungsquerschnitt) für diesen Übergang bekommen wir durch Integration über q . Dabei spielt, wenn $n'l$ ein diskreter Atomzustand ist, das Gebiet $q \gg \alpha_{n'l}$ keine Rolle, da dort die Matricelemente für diskrete Übergänge wegen der Interferenz der Beiträge der einzelnen Volumelemente zu $\int \psi_{n'l} \bar{\psi}_{n'l'} e^{iqx} d\tau$ nahezu verschwinden (vgl. § 6, § 9) und außerdem noch in (71) der Faktor $1/q^3$ steht. Da ferner für $q \ll \alpha_{n'l}$

$$(71a) \quad \left\{ \begin{aligned} |\varepsilon_{n'l, n'l'}^1(q)|^2 &= \frac{1}{g_{n'l}} \sum_m \left| \int e^{iqx} \psi_{n'l m} \bar{\psi}_{n'l' m} d\tau \right|^2 \\ &= \frac{q^2}{g_{n'l}} \sum_m \left| \int \psi_{n'l m} \bar{\psi}_{n'l' m} x d\tau \right|^2 = q^2 |x_{n'l, n'l'}|^2 \end{aligned} \right.$$

gleich q^2 mal der optischen Übergangswahrscheinlichkeit wird, so folgt näherungsweise¹⁾

$$(72) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi_{n'l}^{n'l} &\approx \frac{8\pi\alpha^2}{K^2} \left(\frac{M}{m}z\right)^2 \cdot \zeta \cdot |x_{n'l, n'l'}|^2 \int_{q_{\min}}^{\alpha_{n'l}} \frac{dq}{q} \\ \Phi_{n'l}^{n'l} &\approx \frac{8\pi R h}{m v^2} z^2 |x_{n'l, n'l'}|^2 \left(Z_{n'l} - \frac{\vec{Z}_{n'l} \vec{Z}_{n'l'} + \vec{Z}_{n'l} \vec{Z}_{n'l'}}{g_{n'l'}} \right) \ln \frac{2 m v^2}{E_{n'l'} - E_{l'n}} \end{aligned} \right.$$

d. h. der Anregungsquerschnitt für Stoß schneller Elektronen oder α -Teilchen ist angenähert proportional der optischen Übergangswahrscheinlichkeit, ferner umgekehrt proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit des Elektrons und proportional dem Logarithmus von kinetischer Energie des Elektrons durch

1) d. h. bis auf einen Faktor von der Größenordnung 1.

Anregungsspannung. Mit besonderer Intensität werden also starke optische Übergänge angeregt, vor allem derjenige, welcher der Emission der „Resonanzlinie“ entspricht.¹⁾

Ganz verboten ist aber Anregung von Übergängen ohne optische Übergangswahrscheinlichkeit — d. h. ohne Dipolmoment — natürlich *nicht*, z. B. bekommen wir für den Anregungsquerschnitt eines Übergangs mit einem Quadrupolmoment:

$$\sum_m \left| \int e^{i q x} \psi_{n l m} \bar{\psi}_{n' l' m} d \tau \right|^2 = \frac{q^4}{4} \sum_m \left| \int x^2 \psi_{n l m} \bar{\psi}_{n' l' m} d \tau \right|^2 \\ = \frac{q^4}{4} \left| x^2_{n l m, n' l' m} \right|^2$$

für $q \ll \alpha_{n l}$, während für große q natürlich das Integral links wieder wegen Interferenz der Beiträge der einzelnen Volumenelemente gegen Null geht. Also wird für solche Übergänge

$$(72a) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi_{n' l'}^{n l} &\approx -\frac{2 \pi \alpha^2}{K^2} \left(\frac{M}{m} z \right)^2 \left| x^2_{n l, n' l'} \right|^2 \zeta \int_{q_{\min}}^{\alpha_{n l}} q d q \\ &= \frac{2 \pi R h z^2}{m v^2} \left| x^2_{n l, n' l'} \right|^2 \alpha_{n l}^2 \zeta \end{aligned} \right.$$

d. h. der Anregungsquerschnitt für Übergänge mit Quadrupolmoment unterscheidet sich von denjenigen der Übergänge mit Dipolmoment durch das Fehlen des logarithmischen Faktors von der Größenordnung 10 und durch einen im allgemeinen kleineren numerischen Faktor, in Übereinstimmung mit den Rechnungen von Elsasser über die Anregung der verbotenen Übergänge $(1,0) \rightarrow (n, 2)$ und $(1,0) \rightarrow (n, 0)$ bei Wasserstoff.

Dagegen ist es in unserer Annäherung *nicht* möglich, daß durch den Stoßprozeß gleichzeitig zwei Elektronen angeregt werden. Denn wir haben vorausgesetzt, daß die Eigenfunktionen des Atoms als Summe von Produkten der zueinander orthogonalen Elektroneneigenfunktionen gegeben sind, d. h., wenn j die Elektronen numeriert, soll z. B. die Eigenfunktion des Grundzustands

$$\psi_0 = \sum_{(\alpha)} c_{(\alpha)} \prod_j \psi_{a_j}(r_j)$$

1) Vgl. z. B. H. Jones u. R. Whiddington, Phil. Mag. 6. S. 889. 1928.

sein, wo über alle möglichen Vertauschungen (α) der ψ_α zu summieren ist, und

$$\psi_n = \sum_{(\beta)} c_{(\beta)} \prod_j \psi_{\beta_j}(\mathbf{r}_j)$$

die des angeregten Zustandes. Dann ist

$$\begin{aligned} \epsilon_{0n}(q) &= \int \psi_0 \bar{\psi}_n \sum_i e^{i q x_i} d\tau \\ &= \sum_{(\alpha)} \sum_{(\beta)} \sum_i c_{(\alpha)} c_{(\beta)} \int \prod_j d\tau_j \psi_{\alpha_j}(\mathbf{r}_j) \bar{\psi}_{\beta_j}(\mathbf{r}_j) e^{i q x_i} \end{aligned}$$

und alle Integrale rechts sind gleich Null, in denen nicht

$$\alpha_j = \beta_j \text{ für alle } j \neq l,$$

d. h. es darf höchstens eine Elektroneneigenfunktion im angeregten Zustand gegenüber dem Grundzustand abgeändert sein, wenn nicht *alle* Integrale verschwinden sollen.

Ferner ist die Anregung eines Übergangs zu einem anderen Termsystem des Atoms durch Elektronenstoß unmöglich¹⁾, weil die Störung durch das ankommende Elektron jedenfalls symmetrisch in allen Atomelektronen ist. Durch solche Störungen kann aber nach Wigner²⁾ ein Übergang zu einem anderen Termsystem nicht stattfinden, solange man nicht explizit den Spin in die Rechnung einbezieht.

§ 15. Anregung von Röntgenniveaus

Wir summieren jetzt (71) über alle möglichen Anregungen des ($n l$)-Elektrons. Mit Berücksichtigung der Vollständigkeitsrelation der Eigenfunktionen $\psi_{n'l'm}$ gilt:

$$(73a) \quad \left\{ \begin{aligned} g_{nl} \sum_{n'l'} |\epsilon_{nl, n'l'}^1(q)|^2 &= \sum_m \sum_{n'l'} |\int \psi_{nlm} \bar{\psi}_{n'l'm} e^{i q x} d\tau|^2 \\ &= \sum_m (1 - |\int \psi_{nlm}|^2 e^{i q x} d\tau|^2) \end{aligned} \right.$$

$$(73) \quad \sum_{n'l'} |\epsilon_{nl, n'l'}^1(q)|^2 = 1 - F_{nl}^2(q)$$

$$(74) \quad F_{nl}^2(q) = |\epsilon_{nl, nl}^1(q)|^2 = \frac{1}{g_{nl}} \sum_m |\int \psi_{nlm}|^2 e^{i q x} d\tau|^2$$

1) Dies entspricht der Beobachtung von E. G. Dymond u. E. E. Watson, Proc. Roy. Soc. (A) **122**. S. 571. 1929.

2) E. Wigner, Ztschr. f. Phys. **43**. S. 624. 1927.

$F_{nl}(q)$ ist sinngemäß als „Atomformfaktor für ein $n l$ -Elektron“ zu bezeichnen. (73) gibt bis auf konstante Faktoren die Intensität der inkohärenten Röntgen- bzw. unelastischen Korpuskularstrahlstreuung für ein Atom, das nur ein ($n l$)-Elektron enthält.

Wegen des Pauliprinzips sind nun aber eine Reihe von Übergängen verboten, deren Matrixelemente wir in (73) mitgerechnet haben, die inkohärente Streuung wird also relativ kleiner als für ein Atom mit einem Elektron. Aus (71) erhalten wir unmittelbar¹⁾

$$(75) \quad \left\{ \begin{aligned} d\Phi^{nl}(q) &= \sum_{n'l'} d\Phi_{n'l'}^{nl}(q) = \frac{8\pi\alpha^2}{K^2} \frac{dq}{q^3} \left(\frac{M}{m}z\right)^2 Z_{nl} \\ &\cdot \left(1 - F_{nl}^2(q) - \sum_{n''l''} \frac{\vec{Z}_{nl} \vec{Z}_{n''l''} + \vec{Z}_{n'l} \vec{Z}_{n''l''}}{g_{n'l'} Z_{n'l}} |\epsilon_{nl, n''l''}^1(q)|^2 \right) \end{aligned} \right.$$

bzw. wenn die Niveaus $n''l''$ alle vollbesetzt sind:

$$(75a) \quad \left\{ \begin{aligned} d\Phi^{nl}(q) &= \frac{8\pi\alpha^2}{K^2} \frac{dq}{q^3} \left(\frac{M}{m}z\right)^2 Z_{nl} \\ &\cdot \left(1 - F_{nl}^2(q) - \sum_{n''l''} |\epsilon_{nl, n''l''}^1(q)|^2 \right). \end{aligned} \right.$$

Bei kleinen Streuwinkeln ϑ und Stoßvektoren q wird durch das Verbot der Übergänge zu besetzten Zuständen der gesamte Wirkungsquerschnitt für Anregung eines Elektrons insbesondere aus einer inneren Schale stark herabgesetzt, weil gerade die stärksten Übergänge dort verboten sind. Bei großen Streuwinkeln ($q \gg \alpha_{nl}$) allerdings gehen die Matrixelemente für alle diskreten Übergänge zu Null (vgl. § 6), also verschwindet dann sowohl der Atomformfaktor F_{nl} wie die Summe über die besetzten Zustände $n''l''$; der differentielle Wirkungsquerschnitt wird einfach proportional der Anzahl Z_{nl} der Elektronen in der $n l$ -Schale. Doch tragen die Stöße unter großem Winkel ja nur wenig zu dem Wert für den integralen Wirkungsquerschnitt bei, dieser wird vielmehr wegen des Faktors $1/q^3$ in (75a) im wesentlichen durch Stöße mit $q \ll \alpha_{nl}$ bestimmt. Hier ist aber wieder (vgl. (25), (38a) usw.)

1) Natürlich wie immer unter der Voraussetzung, daß praktisch alle Übergänge vom $n l$ -Niveau aus energetisch zulässig sind.

$$\left| \int \psi_{nlm} \bar{\psi}_{n'l'm} e^{iqx} d\tau \right|^2 \approx q^2 \left| \int x \psi_{nlm} \bar{\psi}_{n'l'm} d\tau \right|^2$$

$$\int |\psi_{nlm}|^2 e^{iqx} d\tau \approx 1 - \frac{q^2}{2} \int x^2 |\psi_{nlm}|^2 d\tau$$

also

$$(76) \quad \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{q^2} \left(1 - F_{nl}^2(q) - \sum_{n''l''} |\epsilon_{nl, n''l''}^1(q)|^2 \right) = \overline{x_{nl}^2} - \sum_{n''l''} |x_{nl, n''l''}|^2$$

mit

$$(76a) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{x_{nl}^2} &= \frac{1}{2l+1} \int x^2 \sum_m |\psi_{nlm}|^2 d\tau \\ &= \frac{1}{2l+1} \int x^2 \psi_{nl}^2(r) \sum_m |P_l^m(\cos \vartheta)|^2 d\tau = \frac{1}{3} \int r^2 \psi_{nl}^2(r) r^2 dr \\ |x_{nl, n''l''}|^2 &= \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} \left| \int \psi_{nlm} \bar{\psi}_{n''l''m} x d\tau \right|^2. \end{aligned} \right.$$

(Die letzte Umformung der Größe $\overline{x_{nl}^2}$ setzt voraus, daß das Potentialfeld des Atoms, zu dem die Eigenfunktionen ψ_{nlm} gehören, kugelsymmetrisch ist). Die Integration über q , in üblicher Weise (vgl. § 9, 10, 12) durchgeführt, gibt

$$(77) \quad \Phi^{nl} = \frac{4\pi\alpha^2}{K^2} \left(\frac{M}{m} z \right)^2 Z_{nl} \left(\overline{x_{nl}^2} - \sum_{n''l''} |x_{nl, n''l''}|^2 \right) \ln \frac{2mv^2}{B_{nl}}$$

wo B_{nl} eine Energie von der Größenordnung der Ionisierungs-
spannung ist. Die Wahrscheinlichkeit der Anregung eines (nl) -
Elektrons ist also für äußere Schalen im wesentlichen propor-
tional dem Querschnitt der Elektronenschale (dem gemittelten
Quadrat des „Abstandes“ vom Kern, $\overline{r_{nl}^2}$), für innere Schalen
erheblich kleiner. Es ist dabei aber nicht so, wie in § 11 u. 12
bei der gesamten von der Partikel auf die Elektronen einer
Schale übertragenen Energie: Dort kam ja die Energie, die
die inneren Schalen zu wenig erhielten, den äußeren zugute
(die partiellen f -Summen sind für innere Schalen kleiner, für
äußere größer als 1). Unsere Anregungswahrscheinlichkeit (77)
ist dagegen auch für äußere Schalen etwas, wenn auch nur
wenig kleiner, als wenn die inneren Schalen unbesetzt wären —
die verbotenen Übergänge sind für die Anregungswahrscheinlich-
keit vollständig verloren.

Berechnet man die Matrizen $x_{nl, n'' l''}$, indem man Wasserstoffeigenfunktionen mit einer passenden effektiven Kernladung Z_{eff} einführt, so ist¹⁾

$$(77a) \quad \overline{x^2} = \frac{1}{2} \frac{n^2 a^2}{Z_{\text{eff}}^2} \left(\frac{5n^2 + 1}{3} - l(l+1) \right).$$

D. h. die gesamte Anregungswahrscheinlichkeit für ein Elektron in einer äußeren Schale ist in größter Näherung proportional n^4 . Für innere Schalen, wo den Elektronen die starken diskreten Übergänge verboten und im wesentlichen nur noch die kontinuierlichen möglich sind, bekommt man

$$(77b) \quad \overline{x_{nl}^2} = \sum_{n'' l''} |x_{nl, n'' l''}|^2 = \text{etwa } 0,2-0,6 \cdot \frac{n^2 a^2}{Z_{\text{eff}}^2},$$

wobei der Proportionalitätsfaktor natürlich von Zahl und Art der verbotenen Übergänge und von der Azimutalquantenzahl l abhängig ist, aber wenig von der Hauptquantenzahl n . Da

$\frac{R h Z_{\text{eff}}^2}{n^2}$ die Ionisierungsspannung $-E_{nl}$ der Schale ist, kann analog zu (53) geschrieben werden

$$(78) \quad \Phi^{nl} = \frac{2\pi e^4 z^2}{m v^2 \cdot (-E_{nl})} \cdot Z_{nl} \cdot b_{nl} \cdot \ln \frac{2m v^2}{E_{nl}},$$

wobei in ganz roher Näherung $b_{nl} = 0,2-0,6$ für innere bzw. von der Größenordnung n^2 für die äußersten Schalen ist. Tab. 4 verzeichnet die Anregungsfaktoren für einige Atome; zur Berechnung wurden Wasserstoffeigenfunktionen benutzt.

Tabelle 4
Anregungsfaktoren b_{nl}

Schale	H	Be	N	Ne	A	Cu	Kr	Ag	Xe	Em
1s	1	1	0,72	0,44	0,35	0,35	0,32	0,32	0,30	0,29
2s	—	3,5	2,37	1,25	0,47	0,47	0,33	0,33	0,28	0,26
2p	—	—	1,70	1,70	1,68	0,43	0,43	0,27	0,27	0,21
3s	—	—	—	—	1,63	1,63	0,53	0,53	0,34	0,27
3p	—	—	—	—	4,55	2,05	1,98	0,56	0,55	0,33
3d	—	—	—	—	—	2,83	2,81	2,81	2,81	0,48
4s	—	—	—	—	—	—	2,12	2,12	0,61	0,36
4p	—	—	—	—	—	—	8,50	2,50	2,35	0,36
4d	—	—	—	—	—	—	—	6,40	6,32	3,16
4f	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3,66

1) Vgl. H. Bethe, Ann. d. Phys. 87. S. 55. § 10.

(78) ist im wesentlichen maßgebend für die Intensität der von dem Atom beim Bombardement mit schnellen Partikeln (im allgemeinen Elektronen) emittierten charakteristischen Röntgenstrahlung, genauer gesagt für die Gesamtintensität der Linien einer Röntgenserie mit gleichem Endniveau. Denn für diese kommt es ja darauf an, wieviele Elektronen aus den inneren Schalen des Atoms entfernt werden, und gerade diese Zahl ist durch (78) gegeben. Die Intensität der charakteristischen Röntgenstrahlung ist also bei großen Geschwindigkeiten der bombardierenden Elektronen umgekehrt proportional dem Quadrat dieser Geschwindigkeit und außerdem umgekehrt proportional der Ionisierungsspannung. Es scheint, als ob das logarithmische Glied, das außerdem auftritt, noch schlechter mit den Versuchen von Wisshak¹⁾ übereinstimmt als die klassische Thomsonsche Formel, welche dieses Glied nicht enthält. Denn der Anstieg der Röntgenintensität mit wachsendem Überschuß der Bombardierungsenergie über die Ionisierungsspannung müßte noch steiler sein als in der Thomsonschen Theorie, während er im Experiment etwas flacher ist. Dabei ist zu bedenken, daß unsere Formel allerdings in dem von Wisshak untersuchten Gebiet nahe oberhalb der Ionisierungsspannung noch nicht gültig ist. Die *Absolutwerte* der Anregungsfunktion erscheinen wegen der Anregungsfaktoren b_n bei kleinem Verhältnis des Bombardierungspotentials zur Ionisierungsspannung gegenüber der Thomsonschen Theorie herabgesetzt, in Übereinstimmung mit den Experimenten von Wisshak.

§ 16. Winkelverteilung der elastischen Stöße

Die Anzahl der durch elastische Stöße um den Winkel abgelenkten Partikel ist

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} d\Phi_0(\vartheta) &= \frac{2\pi e^4 z^2}{16 T_r^2} \sin \vartheta d\vartheta \cdot \frac{(Z - F(q))^2}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \\ q &= \frac{4\pi}{\lambda} \sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{4\pi Mv}{h} \sin \frac{\vartheta}{2} . \end{aligned} \right.$$

1) Vgl. die demnächst erscheinende Dissertation von F. Wisshak. Vgl. auch H. Kulenkampff, Phys. Ztschr. 30. S 777. 1929.

Für die Berechnung des Atomformfaktors F ist von Mott¹⁾, Mark und Wierl²⁾ die Thomas-Fermische statistische Verteilung der Elektronen in einem Atom benutzt und in guter Übereinstimmung mit dem Experiment befunden worden.³⁾ Wir wollen hier nur die Winkelverteilung der gestreuten Teilchen für Streuung an schweren und leichten Atomen vergleichen, indem wir die Gültigkeit der Thomas-Fermi-Verteilung voraussetzen.

Die Anzahl Elektronen mit einem Abstand zwischen r und $r + dr$ vom Kern eines Atoms mit der Kernladung Z ist in der Fermischen Bezeichnungsweise⁴⁾:

$$4\pi r^2 dr \cdot \psi \bar{\psi}(r) = \frac{r dr}{e} \cdot \frac{d^3}{dr^3} (v r) = \frac{\gamma \mu}{e} x dx \cdot \frac{d^3 \varphi(x)}{dx^3},$$

wo v das Potential am Ort r , $x = \frac{r}{\mu}$, $\varphi = x \frac{v}{\gamma}$, $\gamma \mu = Ze$,

$$\mu = \mu_0 Z^{-\frac{1}{3}}, \quad \mu_0 = \frac{3^{\frac{2}{3}} \pi^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} \cdot a = 0,87 a = 0,466 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

und $\varphi(x)$ eine von Fermi numerisch berechnete Funktion ist. Der Atomformfaktor wird

$$\begin{aligned} F(q) &= 2\pi \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta e^{-i q r \cos \vartheta} \psi \bar{\psi}(r) \\ &= 4\pi \int_0^\infty r^2 dr \psi \bar{\psi} \cdot \frac{\sin q r}{q r} = Z \int_0^\infty \frac{\sin \mu q x}{\mu q} \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \cdot dx \\ &= Z \int_0^\infty \left(-\frac{d\varphi}{dx} \right) \cdot \cos \mu_0 q Z^{-\frac{1}{3}} x dx. \end{aligned}$$

$$(79) \quad F(q) = Z \mathfrak{F}' \left(4\pi \frac{\mu_0}{\lambda} \sin \frac{\vartheta}{2} Z^{-\frac{1}{3}} \right) = Z \cdot \mathfrak{F} \left(\frac{\sin \frac{\vartheta}{2}}{\lambda} Z^{-\frac{1}{3}} \right),$$

1) N. F. Mott, Nature **124**. S. 986. 1929.

2) H. Mark und R. Wierl, Ztschr. f. Phys. **60**. S. 741. 1930.

3) H. Mark und R. Wierl, a. a. O., G. P. Thomson, Proc. Roy. Soc. **125**. S. 352. 1929.

4) E. Fermi, Ztschr. f. Phys. **48**. S. 73. 1928. Vgl. auch L. H. Thomas, Proc. Cambr. Soc. **23**. S. 542. 1927.

wo

$$(80) \quad \mathfrak{F}(\xi) = \mathfrak{F}'(5,85 \xi) = \int_0^{\infty} \left(-\frac{d\varphi}{dx} \right) \cdot \cos 5,85 \xi x \cdot dx$$

und λ in ÅE zu messen ist.

Der Atomformfaktor pro Elektron F/Z wird also nach Thomas-Fermi eine universelle Funktion \mathfrak{F} des Arguments

$$\frac{\sin \frac{\vartheta}{2}}{\lambda} \cdot Z^{-\frac{1}{3}}$$

und hängt nicht mehr von $\frac{\sin \frac{\vartheta}{2}}{\lambda}$ und der Ordnungszahl Z des Atoms einzeln ab. Die Funktion \mathfrak{F} ist in Tab. 5 tabuliert¹⁾, sie fällt monoton mit wachsendem Argument ab und verhält sich bei kleinem Argument ξ wie $1 - \text{const} \cdot \xi^2$, wie man leicht durch partielle Integration (80) sieht:

$$(80a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{F}(\xi) = - \left| \varphi \cdot \cos 5,85 \xi x \right|_0^{\infty} - 5,85 \xi \int_0^{\infty} \varphi \sin 5,85 \xi x \cdot dx \\ \lim_{\xi=0} \mathfrak{F}(\xi) = 1 - (5,85 \xi)^2 \int \varphi x dx = \text{etwa } 1 - 160 \xi^2. \end{array} \right.$$

Tabelle 5

$\xi = \frac{\sin \frac{\vartheta}{2}}{\lambda} Z^{-\frac{1}{3}}$	Atom- form- faktor $\mathfrak{F}(\xi)$	Streuintensität nach		ξ	$\mathfrak{F}(\xi)$	Streu- inten- sität	
		Fermi $1 - \mathfrak{F}$ ξ^2	Wentzel $\frac{(2\pi r_0)^2}{1 + (2\pi r_0 \xi)^2}$			Fermi	Wentzel
0	1	160	80	0,15	0,485	22,9	28,5
0,02	0,947	133	77	0,20	0,395	15,1	18,5
0,04	0,853	92	71	0,25	0,322	10,9	13,3
0,06	0,758	67	62	0,30	0,277	8,0	9,8
0,08	0,677	50,5	53	0,40	0,207	5,0	5,8
0,10	0,610	39,—	44	0,50	0,156	3,4	3,8
0,12	0,550	31,5	37				

1) Die Tabelle ist aus einer von W. L. Bragg gegebenen umgerechnet (Ztschr. f. Kristallographie 69. S. 118. 1929, Tabelle 4 auf S. 137).

Dem gleichen $\frac{\sin \frac{\vartheta}{2}}{\lambda}$ entsprechen für *schwere* Atome *kleinere* Werte des Arguments ξ als für *leichte*, also *größere* Werte des Atomformfaktors pro Elektron \mathfrak{F} . Der Atomformfaktor fällt mit wachsendem Streuwinkel bei *leichten* Atomen *steiler* ab als bei *schweren*.

Die Anzahl der in den Winkelbereich ϑ bis $\vartheta + d\vartheta$ elastisch gestreuten Partikel wird nun

$$(81) \quad d\Phi_0(\vartheta) = \frac{2\pi e^4 z^2 Z^2}{16 T v^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \left(1 - \mathfrak{F} \left(\frac{\sin \frac{\vartheta}{2}}{\lambda} Z^{-\frac{1}{3}} \right) \right)^2 \sin \vartheta d\vartheta.$$

Für große Ablenkungswinkel geht (81) in die einfache Rutherford'sche Formel über, wie bekannt¹⁾, für kleine Winkel tritt ein „Abschirmungsfaktor“ $(1 - \mathfrak{F})^2$ hinzu. Da, bei gleichem $\frac{\sin \frac{\vartheta}{2}}{\lambda}$, ξ für schwere Atome kleiner und $\mathfrak{F}(\xi)$ größer ist als für leichte, ist das Streuvermögen schwerer Atome gegenüber dem Rutherford'schen stärker herabgesetzt als dasjenige leichter Atome:

Der Abfall der Streuintensität mit dem Streuwinkel ist für alle Atome weniger steil als es der Rutherford'schen Formel entspricht, und für schwere Atome noch flacher als für leichte.

Dieser Satz ist durch die Experimente von Mark und Wierl (a. a. O.) sehr gut bestätigt.

Um die Winkelabhängigkeit der Streuintensität noch näher zu verfolgen, kann man auch vorteilhaft den Rutherfordfaktor $\sin^4 \frac{\vartheta}{2}$ mit $(1 - F)^2$ vereinigen:

$$(81a) \quad \left\{ \begin{aligned} d\Phi_0(\vartheta) &= \frac{\alpha^2 Z^{\frac{2}{3}}}{32 \pi^3} \left(\frac{M}{m} z \right)^2 \left(\frac{1 - F(\xi)}{\xi^2} \right)^2 \sin \vartheta d\vartheta \\ &= 0,00356 \left(\frac{M}{m} z \right)^2 \cdot Z^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1 - F(\xi)}{\xi^2} \right)^2 \sin \vartheta d\vartheta, \end{aligned} \right.$$

1) G. Wentzel, Ztschr. f. Phys. **40**. S. 590. 1927; A. Sommerfeld, Wellenmechanischer Ergänzungsband S. 231; F. Kirchner, Naturwissenschaften **18**. S. 84. 1930.

wenn der Wirkungsquerschnitt $d\Phi_0(\vartheta)$ in $(\text{\AA}E)^2$ gemessen wird. $\frac{1-F}{\xi^2}$ ist im 3. Stab der Tab. 4 als Funktion von

$$\xi = \frac{\sin \frac{\vartheta}{2}}{\lambda} Z^{-\frac{1}{3}}$$

verzeichnet, diese Funktion gibt also den universellen Verlauf des Abfalls der Streuintensität mit dem Streuwinkel für Streuung von Korpuskularstrahlung. Für sehr kleine Streuwinkel ist ξ klein, dann gilt (80a) und es wird ungefähr

$$(81b) \quad d\Phi_0(\vartheta) = 0,6 \cdot \left(\frac{M}{m} z\right)^2 Z^{\frac{2}{3}} \sin \vartheta d\vartheta (\text{\AA}E)^2,$$

d. h. das Streuvermögen für unelastische Stöße wird dann unabhängig von ϑ und proportional mit $Z^{\frac{2}{3}}$ (statt mit Z^2 bei großem Streuwinkel).¹⁾

Die Benutzung der Thomas-Fermiverteilung für die Elektronen im Atom gibt naturgemäß bessere Resultate für das Streuvermögen als die summarische Vereinigung aller Elektronen in der K -Schale nach dem Vorgang von Wentzel. Wentzel erhält bekanntlich

$$(82) \quad d\Phi_0(\vartheta) = \frac{2\pi e^4 z^2 Z^3 \sin \vartheta d\vartheta}{16 T_r^2 \left(\sin^2 \frac{\vartheta}{2} + \left(\frac{\lambda}{2\pi r} \right)^2 \right)^2},$$

wobei noch der „Atomradius“ r willkürlich aus dem Experiment bestimmt werden muß. Wenn man nachträglich $r = r_0 Z^{-\frac{1}{3}}$ ($r_0 =$ etwa $\text{\AA}E$) setzt, bekommt man

$$(82a) \quad d\Phi_0(\vartheta) = 0,00356 \left(\frac{M}{m} z\right)^2 \cdot Z^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{(2\pi r_0)^2}{1 + (2\pi r_0 \xi)^2} \sin \vartheta d\vartheta.$$

Die Funktion $\frac{(2\pi r_0)^2}{1 + (2\pi r_0 \xi)^2}$, die an die Stelle des Thomas-Fermischen $\frac{1-F}{\xi^2}$ tritt, ist für den willkürlichen Wert

1) Doch muß dafür $\frac{\sin \frac{\vartheta}{2}}{\lambda} < 0,01 Z^{\frac{1}{3}}$ sein, d. h. die Beobachtung muß näher am Primärstrahl erfolgen als z. B. der erste Interferenzfleck bei den meisten Metallen liegt $\left(\text{bei Au } \frac{\sin \frac{\vartheta}{2}}{\lambda} = 0,037 Z^{\frac{1}{3}} \right)$, so daß keine Beobachtung vorliegt.

$(2\pi r_0)^2 = 80 (\text{\AA})^2$ in der 4. Spalte der Tab. 3 aufgeführt, sie stimmt mit der Thomas-Fermifunktion außer für kleine Streuwinkel einigermaßen überein. Jedoch haben wir die präzisere Aussage: Wirksamer Atomradius proportional $\frac{1}{\sqrt[3]{Z}}$ nachträglich von der Fermischen Theorie in die Wentzelsche Formel eingefügt, während die letztere an sich keine Aussage über r und damit über den verschieden steilen Abfall der Streuintensität mit dem Winkel bei leichten und schweren Atomen machen kann.¹⁾

§ 17. Winkelverteilung der unelastischen Streuung

Wir berechnen die Gesamtzahl der unelastisch gestreuten Partikel, die bei der Streuung eine Impulsänderung zwischen q und $q + dq$ erfahren, durch Summierung der Anzahl (75) der Streuungen an den einzelnen Schalen (nl)

$$(83) \quad \left\{ \begin{aligned} d\Phi(q) &= \sum_{nl} \sum_{n'l'} d\Phi_{n'l'}^{nl}(q) \\ &= \frac{8\pi\alpha^2}{K^2} \frac{dq}{q^3} \left(\frac{M}{m}z\right)^2 \sum_{nl} \sum_{n'l'} |\epsilon_{nl, n'l'}(q)|^2 \\ &= \frac{8\pi\alpha^2}{K^2} \frac{dq}{q} \left(\frac{M}{m}z\right)^2 \left(Z - \sum_n Z_{nl} F_{nl}^2 \right. \\ &\quad \left. - \sum_{nl} \sum_{n'l'} \frac{\vec{Z}_{nl} \cdot \vec{Z}_{n'l'} + \overleftarrow{Z}_{nl} \cdot \overleftarrow{Z}_{n'l'}}{g_{nl} g_{n'l'}} \right. \\ &\quad \left. \sum_m |\psi_{nlm} \bar{\psi}_{n'l'm} e^{i q x} d\tau|^2 \right). \end{aligned} \right.$$

1) Man kann zwar sagen, daß der wirksame Atomradius r weder der Radius der K -Schale, noch der für Molekülabstände maßgebende Atomradius (ersterer proportional Z^{-1} , letzterer mit wachsendem Z steigend) sein kann, sondern etwa der Radius einer Kugel, innerhalb der sich z. B. die Hälfte der Gesamtladung der Atomelektronen befindet. Aber eben diesen Radius kann nur eine statistische Theorie liefern, wie die von Thomas-Fermi. Die Wentzelsche Formel hat dagegen ihre Berechtigung, wenn es sich darum handelt, die Gültigkeitsgrenzen der Rutherfordformel abzuschätzen, und zwar ist dann für r der Radius der K -Schale $r = \frac{a}{Z}$ zu setzen, weil bei wachsendem Winkel ϑ die K -Schale von allen Schalen ihr Streuvermögen am längsten behält.

Der Klammerausdruck, der natürlich auch für die Intensität der inkohärenten Röntgenstreuung maßgebend ist, ist im wesentlichen schon von Waller und Hartree¹⁾ abgeleitet worden; dabei benutzten sie die Vollständigkeitsrelation für die Eigenfunktion eines Atoms und die Darstellung der Eigenfunktion des Atomgrundterms als Produkt von zwei Determinanten, in welchen die Eigenfunktionen der einzelnen Elektronen stehen. Nur haben Waller und Hartree nicht die (wegen der Richtungsentartung notwendige) Mittelung der Matrixelemente über m vorgenommen (sie schreiben

$$|\int \psi_{nlm} \bar{\psi}_{n'l'm} e^{iqx} d\tau|^2 \text{ statt } \frac{1}{g_{nl}} \sum_{m=-l}^{+l} |\int \psi_{nlm} \bar{\psi}_{n'l'm} e^{iqx} d\tau|^2),$$

doch ist dies für Atome mit abgeschlossenen Schalen, die bei Waller und Hartree eingehender betrachtet werden, unnötig. Für solche Atome wird aus (83)

$$(83a) \quad \left\{ \begin{aligned} d\Phi(q) &= \frac{8\pi\alpha^2}{K^2} \frac{dq}{q^3} \left(\frac{M}{m}z\right)^2 \left(Z - 2 \sum_{nl} (2l+1) F_{nl}^2(q)\right) \\ &\quad - 2 \sum_{nl} \sum_{n'l'} \sum_m \left| \int \psi_{nlm} \bar{\psi}_{n'l'm} e^{iqx} d\tau \right|^2, \end{aligned} \right.$$

wo die Doppelsumme über alle besetzten Schalen nl und $n'l'$ zu nehmen ist und der Faktor 2 davon herrührt, daß zwei Spinrichtungen möglich sind. Die Formeln (83), (83a) bedeuten natürlich wieder (vgl. § 15), daß von der ohne Berücksichtigung des Pauliprinzipis berechneten unelastischen Streuintensität $Z - \sum_{nl} Z_{nl} F_{nl}^2$ der Anteil der verbotenen Übergänge abzuziehen ist.

Bei großem Streuwinkel gehen wieder die Matrixelemente der verbotenen Übergänge und die Atomformfaktoren F_{nl} zu Null, und die Streuintensität wird proportional der Anzahl der Elektronen Z . Man kann also sagen: Jedes Elektron streut unter großen Winkeln klassisch, d. h. der Energieimpulssatz ist für stoßende Partikel und streuendes Elektron erfüllt (§ 6) und der Streuquerschnitt hat den klassischen Wert für ein streuendes Teilchen mit der Ladung 1; die Intensitäten der

1) I. Waller u. D. R. Hartree, Proc. Roy. Soc. **124**, S. 119. 1929.

Streuungen der verschiedenen Elektronen addieren sich einfach. Das Verhältnis von unelastischer Streuung (83a) zu elastischer (81) ist bei großem Streuwinkel (verschwindendem Atomformfaktoren) $Z:Z^2$, wie in der klassischen Theorie. Allerdings haben wir, genau genommen, jetzt nicht Streuung unter demselben Winkel verglichen, sondern Streuung mit gleicher *Impulsänderung* des stoßenden Teilchens; rechnen wir, wie in § 7, auf Streuung unter gleichem Winkel um, so bekommen wir analog zu (42) für große ϑ :

$$(84) \quad \frac{d\Phi(\vartheta)}{d\Phi_0(\vartheta)} = \frac{Z}{Z^2} \cdot \frac{4 \cos \vartheta}{(1 + \cos \vartheta)^2}$$

was sich von $Z:Z^2$ wenig unterscheidet [vgl. die Tabelle zu (42)]. Auch bei kleinem Streuwinkel erhalten wir das gleiche Resultat wie bei Wasserstoff insofern, als die unelastische Streuung einen Grenzwert erreicht, der etwa im Verhältnis kinetische Energie der stoßenden Elektronen durch Ionisierungsspannung des Atoms größer ist als der Grenzwert der elastischen Streuung. Das stimmt qualitativ mit den Experimenten von Dymond¹⁾ über unelastische Elektronenstreuung an He und von Arnot²⁾ über Streuung an Hg überein: *Überwiegen der unelastischen Streuung bei kleinem Winkel, besonders bei großer Energie der stoßenden Elektronen und bei niedriger Ionisierungsspannung (Hg), Überwiegen der elastischen Streuung bei großem Streuwinkel.* Quantitativ müßte allerdings die unelastische Streuung relativ zur elastischen intensiver sein als in den Experimenten: z. B. wird das Verhältnis 2:4 bei großen Streuwinkeln für He bei weitem nicht erreicht. Das kann allerdings daran liegen, daß die verwendeten Elektronengeschwindigkeiten zu nahe an der Ionisierungsspannung liegen; es wäre sehr wünschenswert, die Winkelverteilung der unelastisch und der elastisch gestreuten Elektronen bei hoher Primärgeschwindigkeit zu untersuchen.³⁾

§ 18. Primäre Ionisierung

Den Wirkungsquerschnitt für Ionisierung in der (n l)-Schale [d. h. die Zahl der Atome, denen durch den Stoßprozeß ein

1) E. G. Dymond u. E. E. Watson, Proc. Roy. Soc. **122**, S. 571. 1929.

2) F. Arnot, Proc. Roy. Soc. **125**, S. 660. 1929.

3) Wie mir Hr. Dr. Kulenkampff von der hiesigen Technischen Hochschule mitteilte, sind dort solche Experimente im Gange.

($n l$)-Elektron entzogen wird], bekommen wir durch Summation der Übergangswahrscheinlichkeiten (71) über alle Zustände $n'l' = k$ des kontinuierlichen Spektrums und Integration über q :

$$(85) \quad \Phi_i^{n l} = \frac{8\pi \alpha^2}{K^2} \left(\frac{M}{m} z\right)^2 Z_{n l} \int_0^\infty dk \int_{q_{\min}}^{q_{\max}} \frac{dq}{q^3} |\epsilon_{n l, k}^1(q)|^2,$$

$$(85a) \quad |\epsilon_{n l, k}^1(q)|^2 = \frac{1}{g_{n l}} \sum_m \left| \int \psi_{n l m} \bar{\psi}_{k m} e^{i q x} d\tau \right|^2.$$

Für große q wird

$$\int dk |\epsilon_{n l, k}^1(q)|^2 = \int |\psi_{n l m}|^2 |e^{i q x}|^2 d\tau = 1,$$

weil die diskreten Übergänge dann nicht mehr wesentlich sind; der Integrand in (85) fällt also mit $1/q^3$ ab. Wir bekommen durch die Ausführung der Integration nach der üblichen Methode näherungsweise für die Zahl der primär gebildeten ($n l$)-Ionen pro Zentimeter Weg (vgl. § 15)

$$(85b) \quad \Phi_i^{n l} N = \frac{4\pi \alpha^2}{K^2} N \left(\frac{M}{m} z\right)^2 Z_{n l} \int dk |x_{n l, k}|^2 \cdot \ln \frac{2m v^2}{C_{n l}},$$

wobei $x_{n l, k}$ wieder das Element der Koordinatenmatrix und $C_{n l}$ eine Energie von der Größenordnung der Ionisierungsspannung der ($n l$)-Schale ist, bzw., nach der entsprechenden Formel (54b) für Wasserstoff zu schließen, etwa eine Zehnerpotenz kleiner. Eine Umformung analog der von (77) auf (78) führenden ergibt

$$(86) \quad s_{n l} = N \Phi_i^{n l} = \frac{2\pi e^4 z^2 N}{m v^2} \cdot \frac{c_{n l} Z_{n l}}{-E_{n l}} \ln \frac{2m v^2}{C_{n l}},$$

wo

$$(86a) \quad c_{n l} = \frac{Z_{\text{eff}}^2}{n^2 a^2} \int dk |x_{n l, k}|^2$$

eine Konstante (Ionisierungsfaktor ist), die sich bei Benutzung von Wasserstoffeigenfunktionen zu etwa 0,05 bis 0,3 berechnet, nämlich:

Schale	1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p	4d	4f
	0,28	0,21	0,13	0,17	0,14	0,07	0,15	0,13	0,09	0,04

Schalen mit großer Azimutalquantenzahl sind schwerer ionisierbar als solche mit kleiner (das weit hinausreichende Elektron einer s -Schale bietet sozusagen eine größere Angriffs-

fläche), im übrigen ist die Ionisierungswahrscheinlichkeit ungefähr umgekehrt proportional der Ionisierungsspannung und umgekehrt proportional dem Quadrat der Partikelgeschwindigkeit, noch multipliziert mit einem logarithmischen Faktor. Die klassische Formel von Thomson¹⁾ gibt statt dessen bei großer Primärgeschwindigkeit

$$(87) \quad s_{nl} = \frac{2\pi N e^4 z^2}{m v^2} \frac{Z_{nl}}{-E_{nl}}$$

ohne den logarithmischen Faktor (vgl. § 15 Ende).

Für die Zahl der insgesamt pro Zentimeter Weg gebildeten Ionen erhält man aus (86) durch Summation über alle Schalen (nl) des Atoms

$$(88) \quad s_0 = \sum_{nl} s_{nl} = \frac{2\pi e^4 z^2 N}{m v^2} \sum_{nl} \frac{c_{nl} Z_{nl}}{-E_{nl}} \ln \frac{2m v^2}{C_{nl}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit der Ionisierung in inneren Schalen ist (wegen des Faktors $\frac{1}{-E_{nl}}$) um Größenordnung kleiner als die in äußeren, im Gegensatz zum Bremsvermögen, daß für innere Schalen höchstens etwa um einen Faktor 5 kleiner ist (vgl. § 12). Daher braucht man im wesentlichen nur die Ionisierung der äußeren Schalen zu berücksichtigen.

Für die pro primär gebildetes Ion verbrauchte Energie erhält man durch Division von (66) mit (88)

$$(89) \quad \bar{E}_0 = \frac{-\frac{dT}{dx}}{s_0} = \frac{2 \sum_{nl} f_{nl} \ln \frac{m v^2}{A_{nl}}}{\sum_{nl} \frac{c_{nl}}{-E_{nl}} Z_{nl} \ln \frac{2m v^2}{C_{nl}}}.$$

Für kinetische Energien des Primärelektrons, die sehr groß gegen die Ionisierungsspannung der innersten Schale sind, werden die Logarithmen einigermaßen gleich und man bekommt in grober Näherung unabhängig von v

$$(89a) \quad \bar{E}_0 = 2 \frac{Z J_a}{Z_a c_a},$$

1) J. J. Thomson, Phil. Mag. 23. S. 449. S. 1912.

wo Z_a , J_a , c_a Elektronenzahl, Ionisierungsspannung und Ionisierungsfaktor der äußersten Schale sind. Für N gibt das¹⁾

$$2 \cdot \frac{7}{5 \cdot 0,13} \cdot 15 = \text{etwa } 300 \text{ Volt,}$$

während die genauere Auswertung von (89) wesentlich weniger ergibt, nämlich 81 Volt bei 30000 Volt Primärenergie. Auch auf diesen Wert dürfen wir nicht zu großes Gewicht legen, da die Berechnung der Ionisierungsfaktoren mittels Wasserstoffeigenfunktionen sehr unsicher ist. Sicher ist aber, daß der Energieverbrauch pro primär gebildetes Ion ein hohes Vielfaches der kleinsten Ionisierungsspannung ist, wie ja auch bei Wasserstoff (das 7 fache, § 10).

Das liegt einmal daran, daß nur ein kleiner Teil der unelastischen Stöße zur Ionisierung führt, der größere Teil zur Anregung. Sodann wird ein beträchtlicher Teil der von der Partikel gelieferten Energie zur Anregung und Ionisierung innerer Schalen verbraucht, während die Zahl der primären Ionen im wesentlichen durch Ionisierung der *äußeren* Schalen geliefert werden muß. Schließlich wird etwa die Hälfte der Energie in kinetische Energie schneller Sekundärelektronen umgesetzt, d. h. solcher, deren Energie groß ist gegen die Ionisierungsspannung.

Denn der größte Teil aller Stoßprozesse mit großer Impulsänderung der stoßenden Partikel $q \gg \alpha_{nl}$ führt ja zur Emission von Sekundärelektronen mit dem Impuls q , d. h. mit kinetischen Energien groß gegen die Ionisierungsspannung. Die bei solchen Stößen abgegebene Energie ist aber, da hier $Z_{nl} = f_{nl}$ gesetzt werden kann, ungefähr

$$\begin{aligned} E &= \frac{8\pi\alpha^2}{K^2} \left(\frac{M}{m} z\right)^2 \sum_{nl} Z_{nl} \int_{\alpha_{nl}}^{K \frac{m}{M+m}} \frac{dq}{q} \\ &= \frac{4\pi\alpha^2}{K^2} \left(\frac{M}{m} z\right)^2 \sum_{nl} Z_{nl} \ln \frac{K^2 m^2}{\alpha_{nl}^2 M^2}, \end{aligned}$$

d. h. etwa die Hälfte der gesamten abgegebenen Energie E .

Obwohl aber die in kinetische Energie schneller Sekundärelektronen umgesetzte Energie einen großen Teil der gesamten

1) Für alle 5 L -Elektronen ist Ionisierungsspannung und Ionisierungsfaktor der L_x -Schale angenommen.

von der stoßenden Partikel abgegebenen Energie ausmacht, umfassen die schnellen Elektronen der *Anzahl* nach nur einen geringen Bruchteil aller Sekundärelektronen. Denn die weit- aus größte *Zahl* der Sekundärelektronen entsteht ja gerade (wegen des Faktors $1/q^3$, vgl. den Anfang dieses Paragraphen) durch Stöße, bei denen sich der Impuls der Partikel nur wenig ändert ($q \ll \alpha_{nl}$), in diesem Falle ist aber die Wahrscheinlichkeit der Bildung eines Sekundärelektrons mit der Energie $\frac{h^2}{8\pi^2 m} k^2$ gegeben durch das Element der Koordinatenmatrix, das dem Übergang von einer Schale des Atoms zum Zustand k des kontinuierlichen Spektrums entspricht, und dies ist nur für $k < \alpha_{nl}$ von beträchtlicher Größe (vgl. § 6), d. h. für Sekundärelektronen, deren Energie sogar *kleiner* ist als die Ionisierungsspannung.

Wir berechnen überschlagsmäßig die Geschwindigkeitsverteilung der aus Wasserstoffmolekülen ausgelösten Sekundärelektronen für eine Primärgeschwindigkeit von etwa 10000 Volt ($\beta = 0,2$) und vergleichen sie mit den Experimenten von Ishino.¹⁾ Für die Rechnung nehmen wir an, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten die gleiche Form haben wie beim Wasserstoffatom und daß nur α^2 in allen Formeln durch $1,16 \alpha^2$ zu ersetzen ist, weil zur Abtrennung beider Elektronen des H_2 die Energie $2,32 Rh = 2 \cdot 1,16 Rh$ notwendig ist. Man erhält

Tabelle 6

Geschwindigkeitsverteilung der Sekundärelektronen von Wasserstoff

Gegen- spannung in Volt	Anzahl der Sekundärelektronen, welche die Gegenspannung überwinden		
	theoretisch	experimentell	Theor. v. Thomson
0	100	100	100
10	25	20,6	61
20	17	12,7	44
40	11	7,74	24
110	4,8	3,12	12,5
190	2,7	1,87	7,6
390	1,31	1,01	3,9
790	0,61	0,29	1,9
990	0,48	0,12	1,5
1190	0,42	0	1,2

1) M. Ishino, Phil. Mag. **32**. S. 202. 1916.

Die theoretisch berechnete Geschwindigkeitsverteilung stimmt also im Gegensatz zu der nach Thomson berechneten recht gut mit dem Experiment überein; die restliche Differenz erklärt sich daraus, daß die Experimente noch die Tertiärelektronen mit umfassen, deren Geschwindigkeiten noch etwas kleiner sind.

§ 19. Sekundäre Ionisierung

Schnelle Sekundärelektronen sind bekanntlich ihrerseits zu erneuter Ionisierung fähig. Ebenso können Atome, die primär in einer inneren Schale angeregt sind, durch *Augersprünge* ionisiert werden und dabei außerdem schnelle Sekundärelektronen aussenden, die ihrerseits weiter ionisieren. Auch eine Ionisierung durch Zusammenstoß eines im Inneren angeregten Atoms mit einem anderen könnte wohl vorkommen. Um die sekundäre Ionisierung wenigstens abschätzen zu können, machen wir zwei Annahmen:

1. Wenn immer bei einem Elementarprozeß die stoßende Partikel primär auf ein Atom eine Energie von mehr als dem doppelten der kleinsten Ionisierungsspannung überträgt — sei es in Form von innerer Anregung oder durch Übertragung größerer kinetischer Energie auf das Sekundärelektron — kann diese Energie zur sekundären Anregung oder Ionisierung eines anderen Atoms verwendet werden.

2. Die Sekundärprozesse sollen sich in gleicher Weise auf Anregungen und Ionisierungen verteilen, wie die Primärprozesse, insbesondere soll auch im Mittel die gleiche Energie für jede Ionisierung aufgewendet werden, die die primäre Partikel dazu aufwenden muß.

Die letzte Annahme wird dadurch gestützt, daß der Energieverbrauch pro gebildetes Ion (89) nicht wesentlich von der Geschwindigkeit der stoßenden Partikel abhängig ist.¹⁾ Sie ist jedenfalls befriedigender als die alte Annahme der klassischen Theorie von Bohr, die vollständige Ausnutzung der Energie der Sekundärelektronen für die Ionisierung annehmen mußte, in Widerspruch zu den Verhältnissen bei der Primäriionisierung. Ob allerdings unsere Annahme (2) auch noch für

1) A. Eis1, Ann. d. Phys. [5] **3**. S. 277. 1929.

Elektronen mit einer kinetischen Energie von etwa der doppelten Ionisierungsspannung auch nur einigermaßen gilt, ist zweifelhaft, besonders weil dort das Bornsche Verfahren ja schon versagt. Auch sonst sind unsere Annahmen willkürlich, doch scheint eine bessere Behandlung des sehr komplexen Phänomens der sekundären Ionisierung zur Zeit nicht möglich.

Sei also κ der Bruchteil der vom Primärteilchen übertragenen Energie, der nach unserer Annahme 1 zu Sekundärprozessen zur Verfügung steht. Er setzt sich zusammen aus der in kinetische Energie schneller Elektronen (Geschwindigkeit größer als die kleinste Ionisierungsspannung) umgesetzten und der zur Anregung innerer Schalen verbrauchten Energie, abzüglich des doppelten der kleinsten Ionisierungsspannung. Da dieser Abzug aber weder gegenüber der Ionisierungsspannung innerer Schalen noch gegenüber der kinetischen Energie der schnellen Elektronen ins Gewicht fällt, kann er fortgelassen werden¹⁾ und es gilt angenähert

$$(90a) \quad \kappa = \frac{1}{2} + \frac{\sum' f_{nl} \ln \frac{m v^2}{A_{nl}}}{\sum f_{nl} \ln \frac{m v^2}{A_{nl}}},$$

wo die gestrichene Summe nur über die inneren, die ungestrichene über alle Schalen geht. Da aber die für die Bildung eines Ions verbrauchte Energie bei den Sekundärprozessen ebensogroß sein soll wie bei den primären, so muß die Zahl der sekundären zu der der primären Ionen sich verhalten wie $\kappa:1$. Andererseits muß bei den Sekundärprozessen wieder der Bruchteil κ der Energie zu solchen Anregungen verwandt werden, die zu tertiärer Ionisierung Anlaß geben können usw. Die gesamte (primäre, sekundäre, tertiäre usw. Ionisierung) wird also, im Verhältnis zur primären:

$$(90) \quad \frac{s}{s_0} = 1 + \kappa + \kappa^2 + \dots = \frac{1}{1 - \kappa} = \frac{2}{1 - \frac{\sum' f_{nl} \ln \frac{m v^2}{A_{nl}}}{\sum f_{nl} \ln \frac{m v^2}{A_{nl}}}}.$$

1) Zum Ausgleich lassen wir die aus den äußeren Schalen durch Stöße mit einer Impulsübertragung $q < \alpha_{nl}$ ausgelösten Elektronen mit einer kinetischen Energie größer als die einfache Ionisierungsspannung fort.

Für Atome ohne innere Schalen (H, He) wird also die gesamte Ionisierung näherungsweise gleich dem doppelten der primären, bei N_2 erhält man [4 innere Elektronen, $f_K \approx 2 \cdot \frac{3}{4} = 1,5$, 4 mittlere Elektronen ($L_1, f = 2$), bei denen der in unserer Annahme 2 erwähnte Abzug des doppelten der kleinsten Ionisierungsspannung *nicht* vernachlässigt werden darf] bei Primärgeschwindigkeiten von etwa 30 000 Volt ($\beta = 0,33$) etwa $\kappa = 0,63$, $\frac{s}{s_0} = 2,7$, während die Zählungen von Wilson 3—4 ergeben. Bei schweren Elementen mit vielen Innenelektronen müßte die Zahl der Sekundärprozesse noch etwas größer sein. Dagegen sollte sie von der Primärgeschwindigkeit kaum abhängen. Für die insgesamt pro gebildetes Ion verbrauchte Energie erhält man aus (89) und (90)

$$(91) \quad \bar{E} = \frac{-\frac{dT}{dx}}{s} = \frac{\sum'' f_{nl} \ln \frac{mv^2}{A_{nl}}}{\sum \frac{C_{nl}}{-E_{nl}} Z_{nl} \ln \frac{mv^2}{C_{nl}}},$$

wo die Summe im Zähler (und praktisch auch die im Nenner) nur noch über äußere Schalen geht. Für N_2 wird bei einer Primärgeschwindigkeit von 30 000 Volt

$$\bar{E} = \frac{85}{2,7} = 31,5 \text{ Volt},$$

d. h. fast genau gleich dem experimentellen Wert von Eisl (32 Volt). Auch hängt \bar{E} , wie im Experiment, fast gar nicht von der Primärgeschwindigkeit ab — bei 10 000 Volt wird $\bar{E} = 30$ Volt. Allerdings ist die zahlenmäßige Übereinstimmung mit dem Experiment wohl teilweise Zufall, da das besser fundierte Bremsvermögen (§ 13) weniger gut stimmt, doch können wir mit der Übereinstimmung sehr zufrieden sein.

§ 20. Zusammenfassung der Resultate

1. Die Anzahl der unelastischen Zusammenstöße einer schnellen geladenen Partikel mit einem Atom ist proportional der Intensität des Comptoneffekts für Röntgenstrahlen, welche dieselbe Wellenlänge besitzen und dieselbe Ablenkung ϑ erfahren wie die Partikel, dividiert durch den Rutherfordfaktor $\sin^4 \frac{\vartheta}{2}$ (§ 5).

2. Bei der überwiegenden Mehrzahl aller unelastischen Stöße wird die stoßende Partikel nur sehr wenig abgelenkt; der Sinus des mittleren Ablenkungswinkels für unelastisch gestreute Elektronen ist etwa gleich der Wurzel aus Ionisierungsspannung durch kinetische Energie des Elektrons

$$\bar{q} \approx K \sin \bar{\vartheta} \approx \alpha_{nl}, \quad \sin \bar{\vartheta} \approx \frac{\alpha_{nl}}{K} = \sqrt{\frac{-E_{nl}}{\frac{1}{2} m v^2}} \quad (\S 6).$$

3. Bei unelastischen Stößen mit *großer* Ablenkung ist der Impulssatz für stoßende Partikel und Sekundärelektronen nahezu erfüllt, der Kern des Atoms bleibt dann unbeteiligt (§ 6).

4. Die Zahl der unelastischen Stöße verhält sich bei *großen* Ablenkungswinkeln zu der der elastischen wie $Z:Z^2$, bei *kleinen* Ablenkungswinkeln ist die Zahl der unelastischen Stöße etwa um einen Faktor „kinetische Energie der Partikel dividiert durch Ionisierungsspannung des Atoms“ größer als die der elastischen (§ 17, § 7).

5. Die Abhängigkeit der Zahl der elastischen Stöße vom Streuwinkel läßt sich unter Benutzung der Thomas-Fermi-Verteilung für die Elektronen im Atom durch eine universelle

Funktion von $\frac{\sin \frac{\vartheta}{2}}{\lambda \sqrt{Z}}$ darstellen. Der Abfall der Stoßzahl mit

wachsendem Winkel ist in Übereinstimmung mit den Experimenten von Mark und Wierl für schwere Atome flacher als für leichte; die Stoßzahl ist bei großem Streuwinkel proportional Z^2 , bei kleinem proportional $Z^{2/3}$ (§ 16).

6. Die Wahrscheinlichkeit für die Anregung eines bestimmten Übergangs des Atoms durch Stoß schneller Elektronen ist fast genau proportional der optischen Übergangswahrscheinlichkeit für diesen Übergang und umgekehrt proportional der kinetischen Energie der Elektronen. Infolgedessen führen weitaus die meisten Stöße zur Anregung der Resonanzlinie (§ 14, § 5, § 9).

7. Die Wahrscheinlichkeit der Anregung eines Röntgen-niveaus (Ionisierung eines Atoms in einer inneren Schale) durch Stoß schneller Elektronen ist in erster Näherung umgekehrt proportional der Ionisierungsspannung des angeregten Niveaus und der kinetischen Energie der Elektronen. Daneben

tritt ein logarithmischer Term auf, welcher in der klassischen Theorie fehlt (§ 15).

8. Das Bremsvermögen eines Atoms für α -Teilchen und Elektronen ist umgekehrt proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit der Partikel und proportional einem logarithmischen Glied, dessen Argument nicht genau übereinstimmt mit dem aus der Bohrschen Theorie bekannten (§ 12, 13, 10).

9. Das Bremsvermögen eines Atoms setzt sich additiv zusammen aus denjenigen der einzelnen Elektronenschalen. Die letzteren sind nicht proportional mit der Anzahl Elektronen jeder Schale, sondern mit der Summe der Oszillatorenstärken aller Übergänge, welche die Elektronen der Schale machen können. Ein Elektron in einer äußeren Schale bremst im Verhältnis 3 bis 5 stärker als eines in einer inneren (§ 12).

10. Das Bremsvermögen für sehr schnelle Elektronen müßte etwa proportional Z sein, für weniger schnelle Elektronen und für α -Teilchen wächst es langsamer mit Z . Ein explizites Gesetz für dieses Anwachsen läßt sich nicht angeben. Die theoretischen Werte für das Bremsvermögen scheinen etwas rascher mit Z zu wachsen als die experimentellen. Für die Elemente bis Argon sind Theorie und Experiment in Übereinstimmung (§ 13).

11. Das Bremsvermögen schwerer Atome fällt mit wachsender Geschwindigkeit flacher ab als dasjenige leichter; die Reichweite einer Partikel wird deshalb in einem Material hohen Atomgewichts proportional einer niedrigeren Potenz der Geschwindigkeit, in Übereinstimmung mit der Erfahrung. Für sehr große Geschwindigkeiten ist die Reichweite stets proportional v^4 . Der Proportionalitätsfaktor (die Konstante des Thomson-Whiddingtonschen Gesetzes) ergibt sich etwas zu hoch (§ 13).

12. Die Zahl der pro cm Weg von einer schnellen Partikel primär gebildeten Ionen ist umgekehrt proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit der Partikel, umgekehrt proportional der Ionisierungsspannung der Atome und proportional einem logarithmischen Glied, das in der klassischen Theorie fehlt. Im Argument des Logarithmus steht das Quadrat der Partikelgeschwindigkeit dividiert durch die kleinste Ionisierungsspannung des Atoms (§ 18, 19).

13. Das Verhältnis der Anzahl der insgesamt gebildeten Ionen zu den Primärionen ist von einer gewissen unteren Grenze ab nahezu unabhängig von der Geschwindigkeit der ionisierenden Partikel und steigt von etwas mehr als 2 : 1 bei Wasserstoff auf etwa 3 : 1 bei Luft und noch mehr bei schweren Elementen. Die Experimente von Wilson geben in Übereinstimmung damit für Luft ein Verhältnis 3 bis 4 : 1 (§ 19).

14. Der Energieverbrauch für jedes primär gebildete Ion ist bei Wasserstoff für sehr große Geschwindigkeiten der stoßenden Partikel etwa das 7fache, für schwerere Atome ein noch höheres Vielfaches der kleinsten Ionisierungsspannung. Für jedes überhaupt (primär und sekundär) gebildete Ion muß der Energieverbrauch näherungsweise unabhängig von der Geschwindigkeit sein, er beträgt bei Luft etwa 32 Volt, in Übereinstimmung mit der Erfahrung. (§ 18, 19, 10).

15. Unter den Sekundärelektronen hat der Anzahl nach der weitaus größte Teil eine kinetische Energie von der Größenordnung der einfachen Ionisierungsspannung oder noch weniger. Doch wird etwa die Hälfte der Energie, die der stoßenden Partikel entzogen wird, in kinetische Energie schneller Sekundärelektronen umgesetzt (§ 19).

Der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft danke ich für die Gewährung eines Stipendiums. Außerdem bin ich Hrn. Dr. Kulenkampff für viele wertvolle Angaben über die experimentelle Literatur zu Dank verpflichtet.

München, Institut für theoretische Physik.

(Eingegangen 3. April 1930)
