tem

TECHNIQUES ÉCONOMIQUES MODERNES

publication dirigée par A. PIATIER

et réalisée avec le concours du Centre d'Etudes du Développement Economique de l'Ecole Pratique des Hautes Etudes.

1966

TRAVAUX SUR L'ESPACE ECONOMIQUE

Sous la Direction
du Professeur Claude PONSARD

par Claude PONSARD, Paul CLAVAL, Jean-Pierre DALOZ,
Jacques FAYETTE et Pierre MORAN.

GAUTHIER-VILLARS — PARIS

UNE APPLICATION DE LA THEORIE DES GRAPHES A L'ANALYSE DE L'ESPACE ECONOMIQUE

un modèle de localisation optimale de l'unité de production dans une structure de concurrence

Une APPLICATION de la THEORIE des GRAPHES à l'ANALYSE de l'ESPACE ECONOMIQUE : un MODELE de LOCALISATION OPTIMALE de l'UNITE de PRODUCTION dans une STRUCTURE de CONCURRENCE

Cette étude [x] a pour objet de présenter une théorie générale de la localisation optimale de l'unité de production dans une structure de concurrence et, plus précisément, de montrer comment, par application de la théorie des graphes, il est possible, à partir d'hypothèses faibles, peu nombreuses et non limitatives (1), d'établir des résultats plus forts et plus généraux que ceux obtenus par les

x Un projet de cette étude a fait l'objet de critiques et de suggestions de la part de MM. MORAN, Chargé de cours à la Faculté de Droit et des Sciences économiques de Nancy, GIRARD, Ingénieur-civil des Mines, BOUTOU, Collaborateur-technique du C.N.R.S. et FAYETTE, Chargé de conférences à l'I.R.T.E.M. En outre, au cours de son élaboration, ce modèle a été maintes fois discuté avec M. TRAN Thien Niem, Licencié ès-Sciences. Qu'ils veuillent bien trouver ici l'expression de mes plus vifs remerciements. La responsabilité des imperfections de cette études ne saurait évidemment être imputée qu'à moi-même.

(C.P.)

(1) Les hypothèses retenues dans les modèles d'économie mathématique sont de deux sortes. Certaines d'entre elles sont destinées à faciliter l'élaboration du modèle au prix d'une simplification mutilante de la réalité économique. Ainsi en va-t-il, par exemple, des hypothèses, généralement implicites, concernant le rôle de l'Etat (absence d'impôts, de droits de douane, de différenciations monétaires, etc..). Celles-là sont restrictives. D'autres sont énoncées pour permettre la formalisation d'un problème économique, en décrivant avec rigueur les conditions qui lui donnent naissance. Par exemple, les hypothèses relatives aux élasticités, aux ensembles de prix, etc.... Celles-ci ne sont pas restrictives. Elles définissent sans l'appauvrir le cadre de l'analyse.

théories traditionnelles (2). En outre, on vérifiera que cette analyse est opérationnelle, c'est-à-dire qu'elle ne tolère aucun hiatus avec les algorithmes usuels qui peuvent lui être associés directement.

La structure de concurrence qui est retenue et ses caractéristiques spatiales entraînent les hypothèses suivantes :

(I) la localisation cherchée est indépendante des autres, notamment de celles des unités concurrentes,

(II) la localisation de l'unité considérée ne modifie pas les données du modèle envisagé (ensemble de prix, etc..),

(III) les demandes des outputs (pour l'unité) sont infiniment élastiques,

(IV) les prix unitaires des outputs sont donnés et différents en chaque lieu,

(V) les offres des inputs (pour l'unité) sont infiniment élastiques,

(VI) les prix unitaires des inputs sont donnés et différents en chaque lieu,

(VII) l'offre des services de transport est infiniment élastique, car ceux-ci constituent aussi des inputs,

(2) L'ouvrage fondamental est celui de :

Walter ISARD : Location and Space-Economy, The Technology Press of Massachusetts Institute of Technology and John Wiley & Sons, Inc., New York, 1956, pp.91 et s., pp. 222 et s.

Pour un exposé en langue française, nous nous permettons de renvoyer à notre ouvrage : Economie et Espace, S.E.D.E.S., Paris, 1955, titre VII, p. 353 et s. ; et pour une bibliographie, à notre Histoire des Théories économiques spatiales, Librairie Armand Colin, Paris 1958, p. 187 et s.

(VIII) les coûts de la distance (dont les frais de transport) sont donnés. Leur acception est de la plus grande généralité. Ils ne sont pas nécessairement proportionnels aux poids et aux distances kilométriques (3),

(IX) l'information est parfaite,

(X) la nature des biens à produire est donnée. La production multiple est traitée d'emblée comme cas général, la production unique ne constituant qu'un cas particulier (4),

(XI) chaque localisation considérée est munie d'une fonction locale de production qui lui est propre.

---

(3) Du point de vue de l'unité de production, les coûts de transport (dont le contenu peut être plus ou moins large) étant une donnée, leur structure n'a pas à être discutée. Elle influe sur le montant du profit net, non sur son mode de calcul. Il n'en irait pas de même dans un modèle d'équilibre général et l'on peut s'étonner de l'incohérence, généralement répandue, qui existe entre le principe d'une tarification proportionnelle aux poids et aux distances et la définition d'un optimum social.

(4) Généralement, dans les théories de la localisation, comme dans les théories de la production (mise à part, dans ce dernier cas, une littérature spécialisée), la production d'un bien unique constitue un cas privilégié (ou une hypothèse d'école), la production multiple étant évoquée comme un cas plus compliqué et non traité.

L'objectif assigné à l'unité de production est la maximation du profit net. Le calcul économique de ce dernier est effectué dans les conditions suivantes. Sont donnés

(1) un ensemble de i lieux d'offre des inputs

$$X_i = \{ x_i \ / \ i = 1, 2, \ldots, n_1 \}$$

(2) un ensemble de j lieux de demande des outputs

$$X_j = \{ x_j \ / \ j = 1, 2, \ldots, n_2 \}$$

(3) un ensemble de k points de passage (5)

$$X_k = \{ x_k \ / \ k = 1, 2, \ldots, n_3 \}$$

(4) un ensemble de p lieux remarquables (6)

$$p = \{ x_p \ / \ p = 1, 2, \ldots, n_4 \}$$

(5) l'ensemble total des lieux donnés réunit les ensembles (1) à (4)

$$X = X_i \cup X_j \cup X_k \cup X_p \qquad \begin{array}{l} i = (1, 2, \ldots, n_1) \\ j = (1, 2, \ldots, n_2) \\ k = (1, 2, \ldots, n_3) \\ p = (1, 2, \ldots, n_4). \end{array}$$

(5) Ces "points de passage" sont, concrètement, des noeuds ferroviaires, des ports, des points de rupture de charge, des carrefours routiers, ériens, points de transbordement, de jonction, etc...

(6) Par "lieux remarquables" on entend ici des lieux qui présentent es avantages économiques pour une localisation (économies externes, par exemple), sans posséder comme t ls ni sources d'offres d'inputs, ni marchés pour les outputs, et sans constituer des points de passage.

X est un ensemble dénombrable fini de n éléments

$n \leq n_1 + \quad + n_3 +$

Par convention, on désignera par

(1') $X^{ho} = \left\{ x^{ho} \,/\, h = 1, 2, \ldots, r^1 \right\}$	l'ensemble de tous les h inputs localisés en x.
(1") $X^{go} \subset X^{ho}$ (g = 1, 2, ..., h)	tout sous-ensemble d'inputs g homogènes.
(2') $X^{ol} = \left\{ x^{ol} \,/\, l = 1, 2, \ldots, r^2 \right\}$	l'ensemble de tous les l outputs localisés en x.
(2") $X^{om} \subset X^{ol}$, (m= 1,2, ..., l)	tout sous-ensemble d'outputs m homogènes.

$(l \neq h)$

Les familles d'ensembles X^{go} et X^{om} définissent une partition sur X^{ho} et X^{ol} respectivement.

On adopte donc la convention d'écriture x^{oo} pour désigner un lieu muni de ses c ractéristiques économiques. Les indices en haut, à droite, indiquent l nature du bien considéré, les inputs étant portés à gauche du symbole o et les outputs à droite du symbole o. L'indice marqué en bas, à droite, désigne le lieu considéré . Il sera complété d'une parenthèse à gauche s'il est en outre un

../

point de passage et d'une parenthèse à droite s'il est un point remarquable (7). Dans le développement d'un algorithme, on utiliserait donc des notations de la forme générale : $x^{oo}_{(o)}$.

De plus, un même lieu peut posséder plusieurs caractéristiques, en ce sens que :

(6) plus d'un output peuvent être demandés en un même lieu

$$\subset X^{ol} \qquad (1 \leq m \leq l) \qquad x_o \in X$$

(7) plus d'un input peuvent être offerts en un même lieu

$$X^{go}_{x_o} \subset X^{ho} \qquad (1 \leq g \leq h) \qquad x_o \in X$$

(8) certains lieux d'offre des inputs peuvent être aussi des lieux de demande des outputs,

(9) certains points de passage peuvent être en outre
 (a) soit des lieux d'offre des inputs
 (b) soit des lieux de demande des outputs
 (c) soit les deux à la fois,

(10) certains points remarquables peuvent être en outre
 (a) soit des lieux d'offre des inputs
 (b) soit des lieux de demande des outputs
 (c) soit des points de passage
 (d) à (g) soit à la fois l'une ou l'autre des quatre combinaisons restantes.

(7) Par exemple, $x^{o}_{(3)}$ désigne l'input 4 offert au lieu 3, qui est en outre un point de passage et un point remarquable. De même, $x^{o9}_{7)}$ désigne l'output 9 demandé au lieu 7 qui est aussi un point remarquable.

Les conditions (8) à (10g) définissent des intersections sur les ensembles donnés. Celles-ci peuvent être vides ou non-vides, suivant les propriétés de l'espace économique considéré.

Les conditions (6) à (10), associées aux ensembles (1) à (4), entraînent que les hypothèses du modèle sont faibles et non-restrictives, au sens de la note (1).

Or, introduire les données relatives au schéma des communications (ou au réseau de transport, au sens courant du terme) qui relie entre eux les sommets de l'ensemble X revient à définir un ensemble d'application Γ de X dans X.

La solution du problème de la localisation optimale va donc dépendre des propriétés du p-graphe $G = (X, \Gamma)$. L'hypothèse de concurrence entraîne - comme condition d'existence - que ce p-graphe soit fortement connexe. En effet, l' "entrée" dans la branche implique qu'il existe au moins un chemin entre tout couple de sommets. En termes économiques, la forte connexité signifie la possibilité d'accès aux sources des inputs et aux lieux d'écoulement des outputs.

En outre, la tabilité de cette structure de concurrence dépend des propriét's de connectivité du p-graphe considéré. Elle est minimale si le py-graphe contient un point d'articulation, c'est-à-dire un point tel qu'en le supprimant le sous-graphe obtenu n'est pas connexe (8). En d'autres termes, la st bilité de la con-

(8) Les notions de point d'articulation, d'ensemble d' rticulation, de nombre de connexit', sont définies pour des graphes connexes, mais on sait qu'un graphe fortement connexe est connexe. Cf.Claude BERGE : Théorie des graphes t ses applic tions, Dunod, Paris, 2ème éd. 1963.

currence est minimale s'il existe un lieu indispensable pour que la possibilité d'accès soit garantie./Il ne faut toutefois pas confondre "point d'articulation" et "point de passage". Celui-ci se distingue de celui-là en ce que sa suppression laisserait le sous-graphe connexe. Un point de passage peut donc ne pas être un point d'articulation ; mais la réciproque n'est pas vraie : un point d'articulation serait nécessairement un point de passage.

Pour des raisons analogues, la stabilité de la concurrence est minimale si la suppression d'un arc quelconque suffit à faire perdre au sous-graphe restant sa connexité forte, c'est-à-dire si le p-graphe est connexe minimal.

D'une manière plus générale, le degré de cette stabilité croît d'abord avec le nombre de connexité du p-graphe (ou nombre minimum de sommets d'un ensemble d'articulation) (8). Ensuite, le p-graphe étant h-connexe, le degré de stabilité est d'autant plus élevé que h est pl grand, puisqu'il faut supprimer au moins h arcs pour disconnecter ce p-graphe.

Hors cette propriété de forte connexité, qui découle du cadre de l'analyse, le p-graphe G (X, Γ) peut admettre des caractéristiques variées, sans autre restrictions.

La définition de la localisation optimale de l'unité de production apparaît alors double, suivant que :

(A) l'on se limite à la recherche du sommet le meilleur parmi ceux qui appartiennent à l'ensemble X. On définira un optimum relatif aux sommets donnés. Mais s'en tenir à cette définition revient à privilégier "a priori" les localisations dites "angulaires" dans les théories habituelles, élaborées pour des espaces euclidiens à deux dimensions.

(B) l'on étend la recherche à la détermination d'un sommet non donné, mais possible en une position intermédiaire entre les sommets donnés et qu'il faut trouver. On définira ainsi un optimum absolu.

A - La DETERMINATION d'une POSITION RELATIVEMENT OPTIMALE dans l'ENSEMBLE DES LOCALISATIONS DONNEES

La d'termination du lieu où le profit net de l'unité de production est maximum résulte d'un double choix, puisqu'il faut sélectionner la combinaison d'inputs (.transports compris) de coût minimum et définir les quantités d'outputs à produire. En chaque point, la fonction locale de production donne l'ensemble des solutions techniquement optimales. Parmi celles-ci, la combinaison de coût minimum est c lculée à l'aide des prix relatifs des inputs et des frais de transport. Ces coûts et les recettes (nettes des frais de transport des outputs), associés aux différents niveaux de production, déterminent les quantités optimales des outputs, c'est-à-dire celles qui s'avèrent compatibles avec la réalisation de l'objectif de profit.

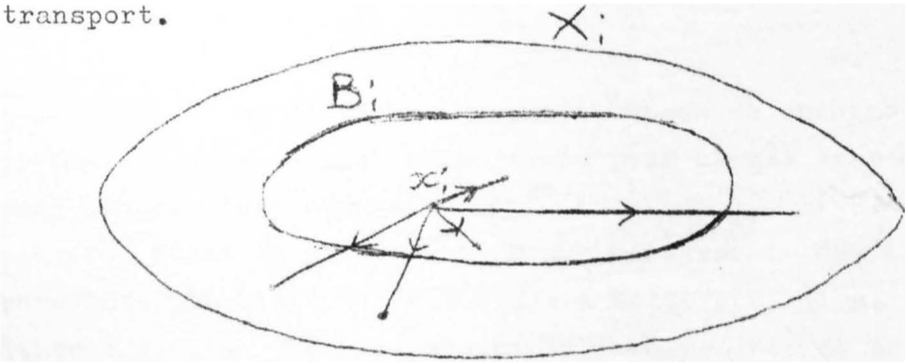
La première condition qui doit être satisfaite concerne donc les approvisionnements en inputs. Elle veut que - quel que soit le lieu d'implantation qui sera retenu - les inputs nécessaires doivent y être disponibles au moindre coût, frais de transport compris.

Puisque les fr is de transport sont donnés, on peut déduire du p-graphe $G = (X\ ,\ \Gamma\ )$, nh sous-graphes partiels

$$G_i^{go} = (B_i\ ,\ \Gamma_{B_i}\ )\ ;\quad B_i = (X_i^{go} \cup x_o\ )\ ;$$

$$X_i^{go} \subset X_i\ ;\qquad \Gamma_{B_i}\, x \subset \Gamma\, x \cap B_i\ ;\ g = 1 \ldots h\ ;\ x = 1 \ldots n$$

leurs arcs étant munis des valeurs qui expriment les frais de transport.



Au sens de la théorie des graphes, chaque sous-graphe partiel G_i^{go} est un "réseau de transport", le lieu de producti n considéré x_o étant l sortie et les sommets des offres des inputs x_i^{go} étant reliés à un sommet unique z_o (par des arcs incidents vers l'intérieur) qui est l'entrée (9). On a donc

$$z_o \ /\ \Gamma^{-1}\ z_o = \emptyset$$
$$x_o \ /\ \Gamma\ x_o = \emptyset$$

---

(9) Toutefois, dans le cadre de la présente étude, on n'utilisera pas les propriétés d'un tel "réseau de transport". En effet, d'une part, l'hypothèse (VII) entraîne que les capacités des arcs sont infinies (du point de vue de l'unité de production)et, d'autre part, on ne cherche pas à définir une répartition optimale des flots.Mais, il s'avère utile d'introduire cette notion de réseau dès maintenant, car, dans des modèles ultérieurs, ses propriétés spécifiques seront utilisées. Il convient donc de ménag r l'unité de la theorie.

Les arcs de ces réseaux sont toujours munis des valeurs exprimant les frais de transport. Pour tout ensemble d'inputs X_i^{go}, si l'on associe à chaque arc u un nombre $l(u) \geqslant 0$, appelé la "longueur" de u, les livraisons seront acheminées par des chemins de longueur minimale μ^{go} si $\sum_{u \in \mu} l_{go}(u)$ est minimum.

Il existe dans chacun des graphes G_i^{go} au moins un chemin de longueur minimale μ^{go}, allant de tout sommet x_i^{go} au sommet considéré x_o.

On dénombre en tout au moins nh chemins de longueur minimale ; mais un seul sera retenu pour chaque graphe G_i^{go}, celui pour lequel l'expression $\left[\varpi_i^{go} + \sum_{u \in \mu^{go}} l(u)\right]$ est minimale, ϖ_i^{go} étant le prix unitaire aux marchés i des inputs g. S'il en existe plusieurs qui satisfont à cette condition, ils sont indifférents et l'un d'eux est choisi arbitrairement, de sorte que leur nombre est toujours, en fait, strictement égal à nh.

La deuxième condition qui doit être satisfaite concerne les quantités optimales des outputs qui pourraient être produites en x_o, pour tout $x_o \in X$ et vendues en x_j, quel que soit $x_j \in X_j$.

A nouveau, on peut déduire du p-graphe $G = (X, \Gamma)$, nl sous-graphes partiels,

$G_j^{om} = (Aj, \Gamma Aj)$; $Aj = (X_j^{om} \cup x_o)$; $X_j^{om} \subset Xj$; $\Gamma_{Aj}\, x \subset \Gamma x \cap Aj$;

$m = 1 \ldots l$; $x = 1 \ldots n$

Chaque sous-graphe partiel G_j^{om} est un "réseau de transport", le lieu de production éventuel considéré x_o étant maintenant l'entrée et les sommets des marchés d'écoulement étant reliés à un sommet unique y_o (par des arcs indicents vers l'extérieur) qui est la sortie (9). On a donc :

../

$$x_o \;/\; \Gamma^{-1} \; x_o = \emptyset$$

$$y_o \;/\; \Gamma \; y_o = \emptyset$$

Il existe dans chacun des graphes G_j^{om} au moins un chemin de longueur minimale μ^{om}, allant du sommet considéré x_o à tout sommet x_j^{om}. On dénombre en tout au moins nl chemins de longueur minimale ; mais un seul sera retenu pour chaque graphe G_j^{om}, celui pour lequel l'expression $\left| \sigma_j^{om} - \sum_{u \in \mu^{om}} l(u) \right|$ est maximale, σ_j^{om} étant le prix unitaire aux marchés j des outputs m. S'il en existe plusieurs qui vérifient cette condition, l'un d'eux est choisi arbitrairement. Leur nombre est donc toujours strictement égal à nl.

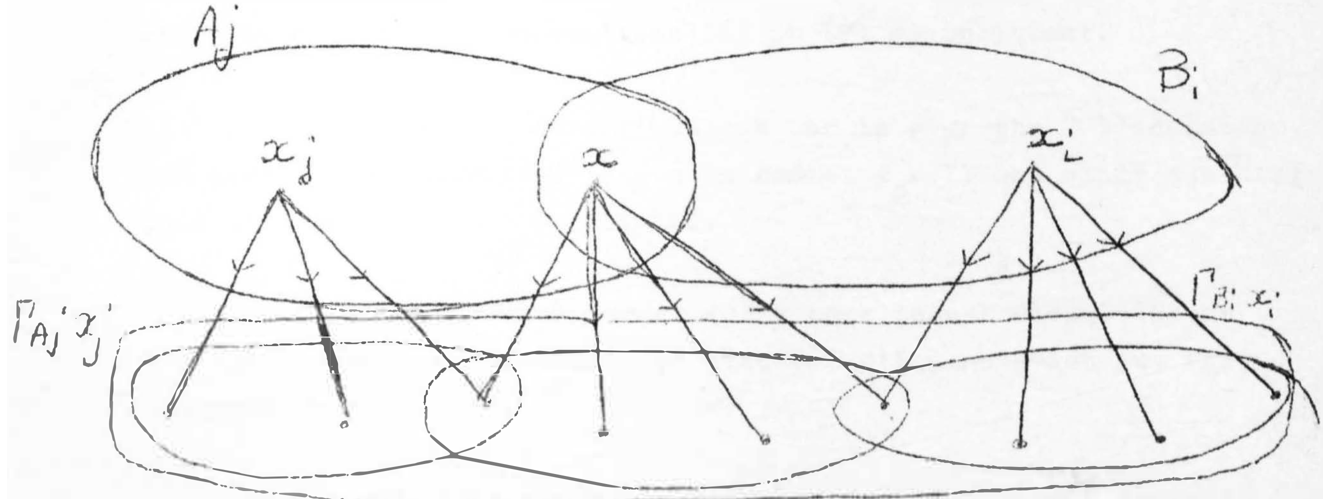
Il suit que pour tout $x_o \in X$, les l chemins de longueur minimale μ^{om} choisis constituent un graphe orienté de transport $G_j^{ol} = (A_j, \mathcal{U}_j)$;

$$\mathcal{U}_j = \left\{ \bigcup_m \mu^{om} \right\} \quad ; \quad m = 1 \ldots l \; ; \; x_o = x_1 \ldots x_n \; ; \text{ qui}$$

décrit le meilleur réseau de distribution des outputs pour x_o. De même, les h chemins de longueur minimale μ^{go} choisis constituent un graphe orienté de transport $G_i^{ho} = (B_i, \mathcal{V}_i)$; $\mathcal{V}_i = \left\{ \bigcup_g \mu^{go} \right\}$; $g = 1 \ldots h$; $x_o = x_1 \ldots x_n$; qui décrit le meilleur réseau d'approvisionnement en inputs pour x_o.

Finalement, l'ensemble des sous-graphes partiels associés à chaque sommet x permet de construire le p-graphe H pour lequel en tout sommet les coûts totaux de transport et les coûts de production sont minimals, et les recettes nettes unitaires sont maximales.

$$H = \left(\bigcup_{i,j} A_j \cup B_i \, , \, \Delta \right) \; ; \; \Delta x = \Gamma_{Aj} x \cup \Gamma_{Bi} x$$



A ce stade de l'élaboration de la théorie, si l'on compare le p-graphe G et le p-graphe H, on remarque que le p-graphe H élimine les arcs $u \notin \mu^{om}$ (choisis) et les arcs $u \notin \mu^{go}$(choisis) qui appartenaient à G. Les fonctions locales de production sélectionnent alors, compte-tenu des prix, pour chaque output m, le flot $\Psi(\mu^{om})$ compatible avec le profit net maximal (10). On en déduit ensuite, pour chaque input g, la quantité optimale à employer, c'est-à-dire le flot $\Psi(\mu^{go})$, $\Psi(\mu)$ étant une quantité de bien parcourant le chemin de longueur minimale μ .

Il est alors possible d'étudier la fonction de profit sur le p-graphe H, c'est-à-dire la fonction Π qui fait correspondre à tout sommet x un nombre Π (x), défini comme suit :

(10) L'identité est parfaite entre le concept de flot de la théorie des graphes et celui de flux de la théorie économique.

$$\Pi(x) = \sum_{om}\left[\left(\sigma_j^{om} - \sum_{u \in \mu^{om}} l(u)\right) \cdot \varphi(\mu^{om})\right] - \sum_{go}\left[\left(\sigma_i^{go} + \sum_{u \in \mu^{go}} l(u)\right) \cdot \varphi(\mu^{go})\right]$$

étant entendu que les conditions (6) et (7) s'appliquent.

Ses valeurs définissent sur le p-graphe H l'ensemble des profits nets maximals pour tout sommet x_o. Il est clair que $\Pi(x)$ peut être positif, nul ou négatif.

Le (ou les) sommet (s) x pour lequel (lesquels) on a Π (x) maximal est (sont)le (s) lieu (x) d'implantation (s) relativement optimale (s).

On peut remarquer que cette analyse permet de systématiser la méthode empirique des coûts comparés, appliquée à la localisation de la firme (11).

Mais, elle n'épuise pas le champ de l'investigation théorique. On ne doit pas perdre de vue qu'il ne faut pas privilégier a priori les localisations données : l'optimum atteint est relatif aux sommets envisagés ; il ne peut être absolu que s'il satisfait à des conditions qui restent précisément à définir. On passe alors à la définition d'une localisation optimale qui ne se confonde pas nécessairement avec un lieu donné.

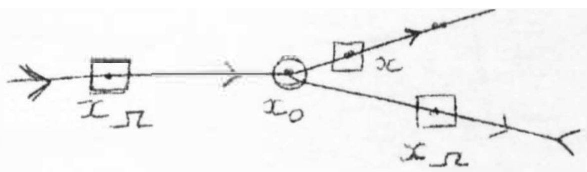
(11) Walter ISARD : Methods of Regional Analysis, The Technology Press of The Massachusetts Institute of Technology and John Wiley & Sons, inc., New -York, London, 1960, p.232 et s.

B - La DETERMINATION d'une POSITION ABSOLUMENT OPTIMALE dans l'ENSEMBLE des LOCALISATIONS POSSIBLES

La détermination d'une position absolument optimale ne peut-être établie qu'à la condition de prouver qu'il n'existe pas de localisation telle que le profit net de l'unité de production y serait plus élevé qu'en tout autre lieu.

Il convient donc de définir d'abord la totalité des lieux susceptibles d'accueillir une implantation, c'est-à-dire de déterminér , connaissant l'ensemble des points donnés (localisations "extrêmes" de la théorie habituelle), l'ensemble des lieux encore économiquement accessibles (localisations "intermédiaires")(12).

Soit, dans le p-gr phe G, un sommet x_o quelconque. On cherche un ou plusieurs sommets x_Ω "intermédiaire (s)" entre x_o et t ut sommet adjacent.

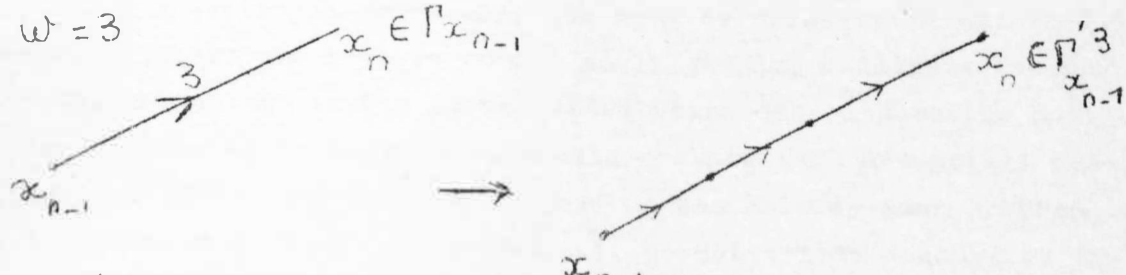


Soit $Xq = \{ x_y / y = 1,2,\ldots n \ ; \ n+1,\ldots q \}$ l'ensemble des localisations possibles. On sait seulement qu'il comprend toutes les localisations "extrêmes" et toutes les localisations "intermédiaires". Donc $Xq \supset X$. On connaît par ailleurs l'application Γ de X dans X.

(12) Dans la théorie habituelle, des localisations "intermédiaires" sont généralement terminées en admettant l'hypothèse d'une "surface de transport".

Soit le p-graphe $G' = (Xq, \Gamma')$, solution optimale du problème. Il faut déterminer G' tel que tous les éléments $x_y \in Xq$ soient identifiés à partir des éléments $x_n \in X$ donnés et tel que l'ensemble d'applications Γ' de Xq dans Xq soit défini à partir de l'ensemble d'applications donné Γ

Or, dans le p-graphe G, les arcs sont munis de valeurs Si l'on admet qu'un arc muni de la valeur w peut être remplacé par un chemin de longueur w (c'est-à-dire composé de w arcs adjacents), on dispose d'une procèdure de construction d'un nouveau p-graphe $G' = (X', \Gamma')$ dont les arcs ne sont plus munis de valeurs et dans lequel le nombre des sommets est plus élevé (et aussi celui des arcs), mais encore fini.



(graphe G) (Graphe G')

Du point de vue économique, le p-graphe G' respecte les conditions imposées par le p-graphe G au schéma des transports

On écrit donc que, si dans le p-graphe $G = (X, \Gamma)$, $x_n \in \Gamma x_{n-1}$ et $l(x_{n-1}, x_n) = w$, dans le p-graphe $G' = (X', \Gamma')$ on aura $x_n \in \Gamma'^{w} x_{n-1}$. Soit $\hat{\Gamma}' x_{n-1} \equiv \{x_{n-1}\} \cup \Gamma' x_{n-1} \cup \Gamma'^2 x_{n-1} \cup \Gamma'^3 x_{n-1} \cup \ldots$. la fermeture transitive de Γ' pour x_{n-1}. Il suit que : $X' = \bigcup_{x \in X} \hat{\Gamma}' x$. Cet ensemble X' comprend d'une part l'ensemble des sommets donnés et d'autre part l'ensemble des sommets obtenus par cette transformation. Ils sont les uns et les autres susceptibles de recevoir la localisation de l'unité de production. Donc $X' = Xq$.

..

L'application Γ' a bien été définie à partir de Γ, puisque l'on a : $\Gamma' x = \left\{ x_y \ / \ x \in \widehat{\Gamma'} \ x_{y-1} \right\}$

Tous les sommets appartenant à X' présentent les mêmes caractéristiques économiques, en ce sens qu'ils peuvent être des lieux d'offre des inputs, des lieux de demande des outputs, des points de passage et des lieux remarquables. Les conditions (6) à (10g) leur sont, en outre, applicables. De même, chacun d'eux peut être muni d'une fonction locale de production particulière.

La (ou les) localisation (s) absolument optimale (s) est (sont) alors déterminée (s) comme précédemment.

A partir du graphe G', non muni de valeurs, il est facile de déterminer, quel que soit le sommet envisagé, les meilleurs réseaux d'approvisionnement en inputs et de distribution des outputs (ne contenant que des chemins de longueur minimale, compte tenu des prix). Ces "meilleurs" réseaux, décrivant à nouveau un ensemble de sous-graphes partiels associés à chaque sommet $x \in X'$, permettent de construire un p-graphe H' pour lequel, en tout sommet, les coûts totaux de transport et les coûts de production sont minimals et les recettes nettes unitaires sont maximales. Les fonctions locale de production sélectionnent les flots optimaux et, finalement, la fonction de profit sur le p-graphe H' donne la solution cherchée. Le (ou les) sommet (s) pour lequel (lesquels) on a Π (x) maximum est (sont) le (s) lieu (x) d'implantation (s) absolument optimale (s).

CONCLUSIONS

Le modèle admet diverses extensions au prix de quelques complications supplémentaires :

(1) Il est facile d'introduire une frontière monétaire (ou plusieurs). Il suffit de partitionner convenablement les p-graphes H ou H', suivant le cas, et d'utiliser un (ou plusieurs) coefficient (s) multiplicatif(s) égal (égaux)au (x) taux de change.

(2) On peut aussi considérer une (ou plusieurs) frontière (s) douanière (s) à condition d'introduire des coefficients multiplicatifs égaux aux droits dans chaque sous-graphe partiel.

(3) De même pour les impôts ou les subventions, quels qu'ils soient. Leur traitement est envisagé dans chaque sous-graphe partiel ou dans le p-graphe H (ou le p-graphe H'), suivant les propriétés financières que présentent leurs institutions.

Evidemment, le modèle tolère ces complications à condition que les hypothèses de concurrence ne soient pas altérées.

(4) Un affinement devra être envisagé, dans une étude ultérieure, afin de tenir compte des aires de demandes des outputs et d'offres des inputs.

(5) Il est possible de dynamiser le modèle en utilisant des fonctions appropriées de production et en dotant chaque arc d'une valeur $t(u) \geqslant 0$, égale au temps nécessaire pour parcourir l'arc u, quel que soit $u \in \bigcup_{g,m} \left(\mu^{go} \cup \mu^{om} \right)$.

Compte-tenu de ces extensions, le modèle, construit à partir d'hypothèses moins nombreuses et plus faibles que celles des théories habituelles de la localisation, permis d'établir des résultats plus nombreux et plus généraux :

(6) On distingue les localisations relativement et absolument optimales.

(7) Le nombre et la localisation des établissements multiples sont déterminés dans les cas où il doit en exister.

(8) Les dimensions des capacités de production sont implicites, mais dépendantes.

(9) Par rapport à chaque unité de production, on établit :
- (a) le réseau de transport le plus court (au sens généralisé)
- (b) les flux optimaux (relativement et absolument)

(10) On a considéré un nombre quelconque d'outputs et d'inputs et admis que leurs prix unitaires étaient différents en chaque lieu.

(11) On a retenu une pluralité de fonctions de production qui expriment les conditions locales de la production.

(12) Les lieux de vente et les lieux d'approvisionnement sont déterminés et ne sont plus considérés comme des données.

Enfin, sur l plan de la méthode, on remarque que

(13) Le modèle est opérationnel : il est cl ir qu'il suffit de faire appel aux algorithmes usuels de la th´orie des graphes pour passer à des applications concrètes ;

../

(14) Le modèle est susceptible d'englober les théories habituelles de la localisation comme cas particuliers, puisque leur intégration ne supposerait qu'une interprétation restrictive des hypothèses et des données et le passage de graphes topologiques à des graphes dotés d'une métrique.

Claude PONSARD

Professeur à la Faculté de Droit
et des Sciences Economiques de Dijon.