

**WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA**  
im. Jarosława Dąbrowskiego  
**WYDZIAŁ CYBERNETYKI**

---



**SPRAWOZDANIE**  
**Metody Eksploracji Danych**

Temat laboratorium: **MODELE LOGITOWE. REGRESJA LOGISTYCZNA**

**INFORMATYKA**

(kierunek studiów)

**INŻYNIERIA SYSTEMÓW – ANALIZA DANYCH**

(specjalność)

Zespół:

**Michał ŚLĘZAK**  
**Szymon OLEŚKIEWICZ**

Prowadzący laboratorium:

**Dr inż. Romuald Hoffmann, prof.**  
**WAT**

---

Warszawa 2025



## Spis treści

Wstęp .....	4
Rozdział I. Podstawy teoretyczne.....	5
I.1. Model logitowy.....	5
I.2. Ocena istotności zmiennych – test Walda.....	5
I.3. Metryki oceny jakości klasyfikacji modeli .....	5
I.4. Wykorzystane narzędzia .....	8
Rozdział II. Opis problemu .....	10
II.1. Treść zadania .....	10
Rozdział III. Eksploracja danych.....	11
III.1. Analiza korelacji między zmiennymi.....	11
III.2. Postawione pytania badawcze .....	12
Rozdział IV. Implementacja modeli .....	13
IV.1. Modele dla półki 2 .....	13
IV.2. Modele dla półki 3 .....	18
IV.3. Modele dla półki 1 .....	29
IV.4. Wyłączenie wybranego producenta płatków .....	33
Podsumowanie.....	41
Bibliografia .....	43
Spis tabel .....	44
Spis rysunków .....	45
Załączniki .....	46

## **Wstęp**

Celem niniejszego sprawozdania jest wyznaczenie zależności pomiędzy składem płatków śniadaniowych a półkami na których się znajdują, z wykorzystaniem modelu logitowego.

## Rozdział I. Podstawy teoretyczne

### I.1. Model logitowy

Model logitowy przewiduje logarytm szans. W naszym przypadku, prawdopodobieństwo zawarcia związku małżeńskiego oznaczono jako  $p$  a rok studiów jako  $r$ .

$$\hat{L} = \ln \frac{\hat{p}}{1 - \hat{p}} = b_1 X + b_0 = b_1 r + b_0 \quad (1)$$

Gdzie  $p$  to prawdopodobieństwo sukcesu (bycia w związku małżeńskim), iloraz w logarytmie naturalnym to iloraz szans (stosunek prawdopodobieństwa sukcesu do prawdopodobieństwa porażki) a  $L$  to nasza liniowa postać modelu logitowego po oszacowaniu. Parametr  $b_1$  mówi nam o zmianie logarytmu szans. Wskazuje on nam, ile razy zmieni się szansa na to, że student jest w związku małżeńskim przy wzroście roku studiów o 1. Warto zaznaczyć, że stosując przekształcenie odwrotne do transformacji powyższego modelu, otrzymamy oszacowanie prawdopodobieństwa  $p$  w postaci funkcji logistycznej.

$$\hat{p} = \frac{1}{1 + e^{-\hat{L}}} = \frac{1}{1 + e^{-(b_1 r + b_0)}} \quad (2)$$

### I.2. Ocena istotności zmiennych – test Walda

Do oceny istotności statystycznej poszczególnych zmiennych w modelu wykorzystano test Walda. Statystyka  $z$  sprawdza hipotezę zerową  $H_0: b_i = 0$ . Jeśli wartość wartość (p-value, w naszym programie oznaczane jako  $P > |z|$ ) jest mniejsza od przyjętego poziomu istotności (w naszym wypadku  $\alpha = 0,05$ ), zmienną uznaje się za istotną statystycznie. W przypadku modelu liniowego prawdopodobieństwa zasada jest taka sama, ale zamiast testu Walda stosuje się test T-Studenta oraz statystykę  $t$  zamiast  $z$ . Wartości krytyczne statystyk obliczono z wykorzystaniem biblioteki Python – `scipy`. Statystyka Walda  $W_i$  jest równa kwadratowi  $z$ . Warto dodać, że statystyka Walda ma w przybliżeniu rozkład chi-kwadrat z liczbą stopni swobody równą 1 – to właśnie z tablic rozkładu chi-kwadrat będziemy brać wartość krytyczną.

Do weryfikacji skuteczności modeli w procesie klasyfikacji stanu cywilnego studentów wykorzystano wiele metryk, których implementacja znajduje się w bibliotekach Pythona. Metryki wykorzystane w obliczeniach znajdują się poniżej.

### I.3. Metryki oceny jakości klasyfikacji modeli

Macierz pomyłek, która jest zestawieniem wartości rzeczywistych naszego zbioru danych z wartościami przewidywanymi przez nasz model. Ma postać tabeli kwadratowej, w której wyróżnia się cztery główne wartości.

# Confusion Matrix

	Actually Positive (1)	Actually Negative (0)
Predicted Positive (1)	True Positives (TPs)	False Positives (FPs)
Predicted Negative (0)	False Negatives (FNs)	True Negatives (TNs)

Rys. 1. Macierz pomylek

1. True Positive – prawdziwie dodatnie: liczba przypadków, w których model poprawnie przewidział sukces (student jest w związku małżeńskim i model to potwierdził)
2. True Negative – prawdziwie ujemne: liczba przypadków, w których model poprawnie przewidział brak zdarzenia (student jest w stanie wolnym i model to potwierdził).
3. False Positive – fałszywie dodatnie: model przewidział sukces, mimo że w rzeczywistości zdarzenie nie miało miejsca (student w rzeczywistości jest wolny a model przewidział, że jest w związku małżeńskim).
4. False Negative – fałszywie ujemne: model przewidział brak zdarzenia, mimo że w rzeczywistości ono wystąpiło (student w rzeczywistości jest w związku małżeńskim a model przewidział, że jest wolny).

Na podstawie tych wartości są obliczane kolejne kluczowe metryki służące do oceny jakości modelu.

Dokładność (Accuracy) ukazuje nam ogólny odsetek poprawnych klasyfikacji (ile ogółem sklasyfikowano poprawnie).

$$Accuracy = \frac{TP + TN}{TP + TN + FP + FN} \quad (3)$$

Czułość (Recall) ukazuje nam zdolność modelu do wykrywania klasy pozytywnej – ile trafiliem z rzeczywistych małżeństw (student w związku małżeńskim).

$$Recall = \frac{TP}{TP + FN}$$

(4)

Precyza (Precision) ukazuje nam wiarygodność klasyfikacji pozytywnych – ile trafiliem naprawdę małżeństw.

$$\text{Precision} = \frac{TP}{TP + FP} \quad (5)$$

Specyficzność (Specificity) ukazuje nam zdolność do wykrywania klasy negatywnej- ile trafiliem z rzeczywistych wolnych studentów (student nie jest w związku małżeńskim).

$$\text{Specificity} = \frac{TN}{TN + FP} \quad (6)$$

F1-Score jest to średnia harmoniczna precyzji i czułości, która przydaje nam się w szczególności w niezbalansowanych klasach.

$$F1 = 2 \cdot \frac{\text{Precision} \cdot \text{Recall}}{\text{Precision} + \text{Recall}} \quad (7)$$

Dodatkowo, wykorzystano analizę krzywej ROC (Receiver Operating Characteristic). Jest ona graficzną reprezentacją skuteczności modelu klasyfikującego dla wszystkich możliwych progów klasyfikacji. Przedstawia ona zależność między 2 parametrami – czułością (True Positive Rate) oraz swoistością (False Positive Rate). Wykorzystano także metrykę AUC, która jest polem pod krzywą ROC i która mówi nam o jakości modelu przed wyborem konkretnego progu klasyfikacji. Wykorzystując właśnie krzywą ROC można wyznaczyć optymalny próg klasyfikacji poprzez maksymalizację odległości (różnicy) TPR i FPR.

Odchylenie standardowe modelu  $S_e$  uzyskamy pierwiastkując wariancję  $S_e^2$ .

$$S_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - k - 1} \quad (8)$$

Na podstawie wartości odchylenia standardowego  $S_e$  modelu jednej zmiennej można wyznaczyć odchylenia parametrów  $a_0$  i  $a_1$ , tak jak poniżej.

$$S_{a_0} = S_e \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2}} \quad (9)$$

$$S_{a_1} = \frac{S_e}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2}} \quad (10)$$

W celu zbadania jak dobrze wyznaczona prosta regresji oddaje przebieg zmiennej można wykorzystać współczynnik determinacji, który obliczany jest na podstawie poniższego wzoru. Współczynnik ten przyjmuje wartości od 0 do 1. Im bliżej 1, tym nasz model jest bardziej dopasowany.

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2} \quad (11)$$

Współczynnik Pseudo  $R^2$  (McFaddena) pokazuje nam „dopasowanie modelu do danych”. W regresji logistycznej jest to miara opierająca się na funkcji wiarygodności (Likelihood), która informuje nas o tym, o ile lepszy jest nasz model od modelu zerowego, czyli takiego zawierającego tylko wyraz wolny.

$$\text{Pseudo } R^2 = 1 - \frac{\ln L_M}{\ln L_0} \quad (12)$$

Gdzie w liczniku mamy logarytm funkcji wiarygodności dla modelu ze zmiennymi objaśniającymi a w mianowniku logarytm funkcji wiarygodności dla modelu tylko z wyrazem wolnym. Wzór na funkcję wiarygodności jest taki jak poniżej.

$$L(\theta|y, X) = \prod_i P(y_i|X_i, \theta)^{y_i} \cdot P(y_i = 1|X_i, \theta)^{1-y_i} \quad (13)$$

Gdzie:

- $\theta$  – wektor wartości parametrów modelu
- $y$  – wektor wartości zmiennej objaśnianej przyjmującej wartości 0 lub 1
- $X$  – macierz zmiennych objaśniających i-numer obserwacji
- $P(y_i = 1|X_i, \theta)$  – prawdopodobieństwo, że dla i-tej obserwacji y przyjmuje wartość 1, przy założeniu wartości zmiennej niezależnej  $X_i$  oraz wartości parametrów regresji logistycznej.

W procesie budowania modeli, nie dzielono danych na zbiór testowy i treningowy. Potraktowano cały zbiór danych jako dane treningowe ze względu na bardzo małą licznosć zbioru danych.

#### I.4. Wykorzystane narzędzia

W celu wyznaczenia modeli logitowych wraz z ich parametrami na podstawie wykładów oraz wiedzy własnej przygotowano program w języku *Python* wykorzystujący biblioteki:

- **Pandas,**
- **NumPy,**
- **stastmodel,**
- **scikit-learn,**

- **scipy**,  
które również zostały wykorzystane do obliczeń oraz wizualizacji wyników.

## Rozdział II. Opis problemu

### II.1. Treść zadania

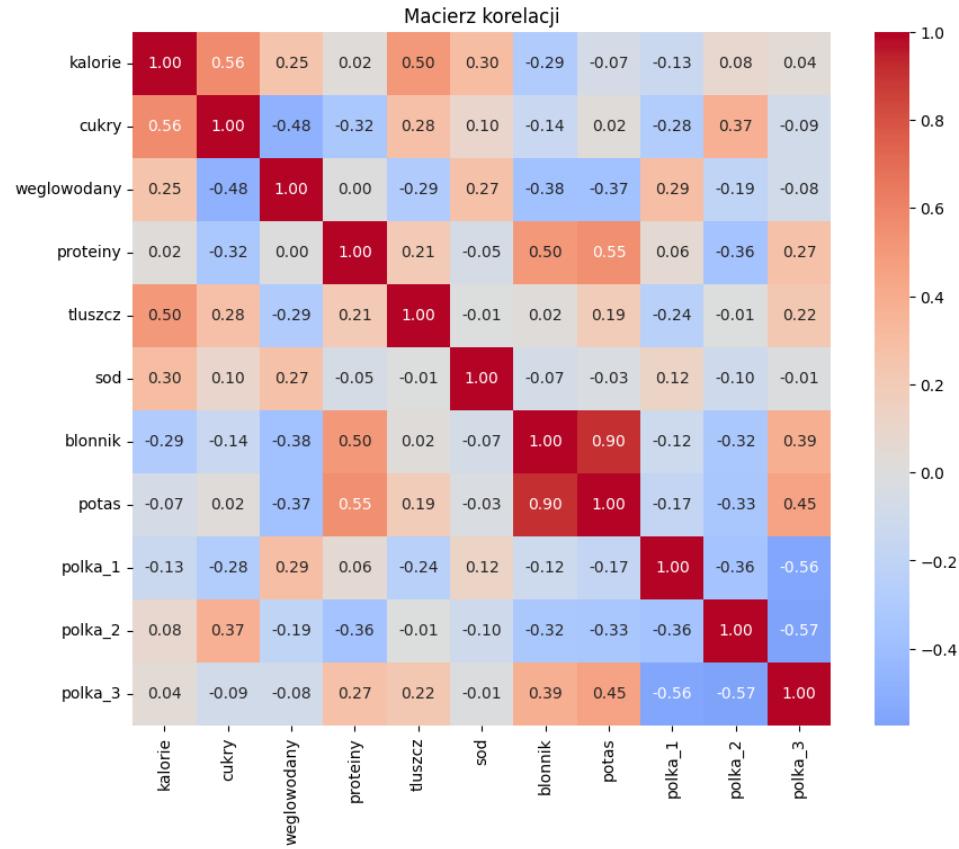
Plik o nazwie „MED-lab-2-Zad\_3-Platki-sniadaniowe.zip” zawiera dane dotyczące płatków śniadaniowych. Proszę dokonać analizy zawartości zbioru i na gruncie regresji logistycznej należy:

- a) przeanalizować dane i zastanowić się nad tym „Co chcemy zbadać i dlaczego?”, tzn. na jakie pytania chcemy sobie odpowiedzieć;
- b) w powyższym kontekście, na gruncie regresji logistycznej, należy zaproponować model lub modele badające wybrane zależności;
- c) proponowane modele należy uzasadnić oraz wskazać sposób ich praktycznego użycia do predykcji;
- d) na podstawie opracowanych modeli i przeprowadzonych obliczeń sformułować własne wnioski;
- e) wyniki swoich analiz zawierających: postawione pytania „badawcze”, wzory, udokumentowane wyniki obliczeń, wnioski, itp. proszę zatrzymać w postaci sprawozdania. Obliczenia można przeprowadzić w dowolnie wybranym narzędziu. Do sprawozdania proszę dodać jako załączniki wszystkie pliki z obliczeniami.

## Rozdział III. Eksploracja danych

### III.1. Analiza korelacji między zmiennymi

W celu sprawdzenia korelacji między zmiennymi, wykorzystano macierz korelacji opartą o metodę Pearsona oraz stworzono jej wizualizację na mapie cieplnej.



Rys. 2. Wizualizacja macierzy korelacji między zmiennymi

Z analizy macierzy korelacji wynika, że półka 2 ma największą korelację ujemną z potasem, błonnikiem i białkiem, natomiast wysoką korelację dodatnią z cukrem, co może sugerować, że na półce 2 są płatki o najgorszym składzie, niezdrowe, których sklep chce się szybko pozbyć. Półka 3 ma największą korelację dodatnią z potasem, błonnikiem i białkiem natomiast wysoką korelację ujemną z cukrem, co może sugerować, że na półce 3 będą płatki o najlepszym składzie, tj. największej zawartości błonnika, potasu czy białka. Półka 1 nie ma jednoznacznej korelacji ze składem, ma największą korelację ujemną z cukrem czy tłuszczem, ale tak samo ma korelację ujemną z błonnikiem czy potasem natomiast dodatnią korelację z białkiem (największa jest z węglowodanami). Można przypuszczać, że na tej półce będą płatki z wysoką zawartością węglowodanów, ale niską zawartością cukrów, gdyż te dwie zmienne mają skrajne, największe przeciwnie korelacje z półką 1. Widoczna jest też dość wysoka korelacja między zmiennymi potas-błonnik-białko oraz cukier-kalorie, co może świadczyć o multikolinearności. Mając jednak na uwadze wartość biznesową, ludzie przeważnie patrzą w składzie płatków na cukier, kalorie, białko, błonnik i potas

### **III.2. Postawione pytania badawcze**

W procesie analizy danych zdecydowano się postawić następujące pytania:

1. Czy skład płatków ma wpływ na ich umiejscowienie na półce w sklepie (1, 2 czy 3 półka)?
2. Czy płatki lepsze, zdrowsze, tj. np. z wyższą zawartością białka, potasu czy błonnika są umiejscowione wyżej?
3. Czy na półce środkowej (półka 2) są płatki gorsze jakościowo, których sklep chce się jak najszybciej pozbyć?
4. Jakie płatki są umieszczane na najniższej półce (półka 1)?

## Rozdział IV. Implementacja modeli

### IV.1. Modele dla półki 2

Półka ta znajduje się, zazwyczaj, na wysokości wzroku dzieci i w zasięgu ręki dorosłego szukającego szybkiego, niewymagającego wysiłku, wyboru (niekoniecznie najzdrowszego) płatków. Sugerując się macierzą korelacji, na tej półce najprawdopodobniej są płatki gorszej jakości, które sklep chce nam szybko sprzedać. Dlatego zdecydowano się na zbudowanie kilku modeli dla półki 2, aby sprawdzić te zależności. Przy wyborze zmiennych objaśniających kierowano się także macierzą korelacji.

#### IV.1.1. Model logitowy – cukier jako zmienna objaśniająca

Modelem logitowym, który zbudowano jako pierwszy jest model oparty o zmienną objaśniającą cukier. Zdecydowano się na budowę tego modelu, aby sprawdzić czy wysoka zawartość cukru, jako niezdrowego składnika, jest jedynym czynnikiem, który sprawia, że dane płatki trafiają na półkę 2, co potwierdzałoby chociażby, np. przyciąganie dzieci. Prawdopodobieństwo przynależności płatków do półki 2 oznaczono jako p a zmienną objaśniającą (zawartość cukru) jako  $X_1$ .

$$\hat{L} = \ln \frac{\hat{p}}{1 - \hat{p}} = b_1 X_1 + b_0 \quad (14)$$

Poniżej przedstawiono parametry i statystyki wraz z metrykami, które zostały wyznaczone dla tego konkretnego modelu. Skorzystano z biblioteki języka Python, która korzysta z metody maksymalnej estymacji prawdopodobieństwa. Przyjęto poziom istotności na poziomie  $\alpha = 0,05$ . Wartość wartości krytycznej statystyki Walda dla 1 stopnia swobody i zadanego poziomu istotności odczytano za pomocą biblioteki scipy -  $\chi^2_{kryt} = 3,841$ .

**Tab. 1. Tabela z parametrami dla modelu logitowego 1**

Parametr $b_i$	Odchylenie S( $b_i$ )	p-value < 0,05	$W_i > \chi^2_{kryt}$
$b_0 = -2,9198$	0,762	0,000 – istotny	14,684 – istotny
$b_1 = 0,2576$	0,082	0,002 – istotny	9,910 – istotny

Otrzymany model:

$$\hat{L} = 0,2576X - 2,9198 = 0,2576r - 2,9198$$

$$Pseudo R^2 = 17,4\%$$

Metryki oceny jakości klasyfikacji:

$$Accuracy \approx 81,3\%$$

$$\text{Precision} \approx 60\%$$

$$\text{Recall} \approx 75\%$$

$$\text{Specificity} \approx 83,3\%$$

$$F1 \approx 66,7\%$$

$$AUC \approx 0,67$$

**Tab. 2. Macierz pomylek modelu logitowego 1**

	Rzeczywista 1	Rzeczywista 0
Przewidziana 1	TP = 3	FP = 2
Przewidziana 0	FN = 1	TN = 10

#### IV.1.2. Model logitowy – cukier i kalorie jako zmienne objaśniające

Modelem logitowym, który zbudowano następnie jest model oparty o zmienne objaśniające cukier i kalorie. Zdecydowano się na budowę tego modelu, aby sprawdzić czy płatki wysokokaloryczne i słodkie są celowo umieszczane na tej półce, aby np. pod wpływem impulsu, ludzie kupowali je jako szybki wybór na śniadanie, jako zastrzyk energii. Prawdopodobieństwo przynależności płatków do półki 2 oznaczono jako  $p$  a zmienne objaśniające (zawartość cukru i kalorii odpowiednio) jako  $X_1, X_2$ .

$$\hat{L} = \ln \frac{\hat{p}}{1 - \hat{p}} = b_2 X_2 + b_1 X_1 + b_0 \quad (15)$$

Poniżej przedstawiono parametry i statystyki wraz z metrykami, które zostały wyznaczone dla tego konkretnego modelu. Skorzystano z biblioteki języka Python, która korzysta z metody maksymalnej estymacji prawdopodobieństwa. Przyjęto poziom istotności na poziomie  $\alpha = 0,05$ . Wartość wartości krytycznej statystyki Walda dla 1 stopnia swobody i zadanego poziomu istotności odczytano za pomocą biblioteki scipy -  $\chi^2_{kryt} = 3,841$ .

**Tab. 3. Tabela z parametrami dla modelu logitowego 2**

Parametr $b_i$	Odchylenie S( $b_i$ )	$W_i > \chi^2_{kryt}$
$b_0 = -0,5907$	2,006	0,086 – nieistotny
$b_1 = 0,3183$	0,101	9,992 – istotny
$b_2 = -0,0260$	0,022	1,454 – nieistotny

Otrzymany model:

$$\hat{L} = -0,0260X_2 + 0,3183X_1 - 0,5907$$

$$\text{Pseudo } R^2 = 19,4\%$$

Metryki oceny jakości klasyfikacji:

$$\begin{aligned} \text{Accuracy} &\approx 75\% \\ \text{Precision} &\approx 50\% \\ \text{Recall} &\approx 75\% \\ \text{Specificity} &\approx 75\% \\ F1 &\approx 60\% \\ AUC &\approx 0,67 \end{aligned}$$

**Tab. 4. Macierz pomylek modelu logitowego 2**

	Rzeczywista 1	Rzeczywista 0
Przewidziana 1	TP = 3	FP = 3
Przewidziana 0	FN = 1	TN = 9

#### IV.1.3. Model logitowy – cukier, kalorie, potas, białko i błonnik jako zmienne objaśniające

Modelem logitowym, który zbudowano następnie jest model oparty o zmienne objaśniające cukier, kalorie, potas, białko i błonnik. Zdecydowano się na budowę tego modelu, aby sprawdzić czy na tej konkretnej półce liczy się tylko ten najgorszy skład płatków czy może obecność zdrowszych składników też ma na to wpływ co sklep chce nam szybko sprzedać poprzez umieszczenie płatków na półce 2. Prawdopodobieństwo przynależności płatków do półki 2 oznaczono jako p a zmienne objaśniające (zawartość cukru, kalorii, potasu, białka i błonnika odpowiednio) jako  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$ .

$$\hat{L} = \ln \frac{\hat{p}}{1 - \hat{p}} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 X_4 + b_5 X_5 \quad (16)$$

Poniżej przedstawiono parametry i statystyki wraz z metrykami, które zostały wyznaczone dla tego konkretnego modelu. Skorzystano z biblioteki języka Python, która korzysta z metody maksymalnej estymacji prawdopodobieństwa. Przyjęto poziom istotności na poziomie  $\alpha = 0,05$ . Wartość wartości krytycznej statystyki Walda dla 1 stopnia swobody i zadanego poziomu istotności odczytano za pomocą biblioteki scipy -  $\chi^2_{kryt} = 3,841$ .

**Tab. 5. Tabela z parametrami dla modelu logitowego 3**

Parametr $b_i$	Odchylenie S( $b_i$ )	$W_i > \chi^2_{kryt}$
$b_0 = 0,1994$	2,767	0,005 – nieistotny
$b_1 = 0,2894$	0,114	6,396 – istotny
$b_2 = -0,0193$	0,030	0,415 – nieistotny

$b_3 = -0,0109$	0,015	0,524 – nieistotny
$b_4 = 0,0900$	0,455	0,039 – nieistotny
$b_5 = -0,4613$	0,539	0,731 – nieistotny

Otrzymany model:

$$\hat{L} = 0,1994 + 0,2894X_1 - 0,0193X_2 - 0,0109X_3 + 0,0900X_4 - 0,4613X_5$$

$$Pseudo R^2 = 31,7\%$$

Metryki oceny jakości klasyfikacji:

$$Accuracy \approx 81,3\%$$

$$Precision \approx 66,7\%$$

$$Recall \approx 50\%$$

$$Specificity \approx 91,7\%$$

$$F1 \approx 57,1\%$$

$$AUC \approx 0,67$$

**Tab. 6. Macierz pomylek modelu logitowego 3**

	Rzeczywista 1	Rzeczywista 0
Przewidziana 1	TP = 2	FP = 1
Przewidziana 0	FN = 2	TN = 11

#### IV.1.4. Model logitowy – cukier i białko jako zmienne objaśniające

Modelem logitowym, który zbudowano następnie jest model oparty o zmienne objaśniające cukier i białko. Zdecydowano się na budowę tego modelu, aby sprawdzić czy na tej konkretnej półce liczy się tylko ten najgorszy skład płatków czy może obecność białka jako składnika budulcowego mięśni oraz to, że większość osób patrzy na ten składnik też ma na to wpływ co sklep chce nam szybko sprzedać poprzez umieszczenie płatków na półce 2. Sugerując się macierzą korelacji, sprawdzamy czy większa zawartość cukru i mniejsza zawartość białka ma wpływ na umiejscowienie płatków na tej półce. Prawdopodobieństwo przynależności płatków do półki 2 oznaczono jako p a zmienne objaśniające (zawartość cukru i białka odpowiednio) jako  $X_1, X_2$ .

$$\hat{L} = \ln \frac{\hat{p}}{1 - \hat{p}} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 \quad (17)$$

Poniżej przedstawiono parametry i statystyki wraz z metrykami, które zostały wyznaczone dla tego konkretnego modelu. Skorzystano z biblioteki języka Python,

która korzysta z metody maksymalnej estymacji prawdopodobieństwa. Przyjęto poziom istotności na poziomie  $\alpha = 0,05$ . Wartość wartości krytycznej statystyki Walda dla 1 stopnia swobody i zadanego poziomu istotności odczytano za pomocą biblioteki scipy -  $\chi^2_{kryt} = 3,841$ .

**Tab. 7. Tabela z parametrami dla modelu logitowego 4**

Parametr $b_i$	Odchylenie S( $b_i$ )	$W_i > \chi^2_{kryt}$
$b_0 = -0,7388$	1,245	0,353 – nieistotny
$b_1 = 0,2101$	0,083	6,360 – istotny
$b_2 = -0,8$	0,415	3,717 – nieistotny

Otrzymany model:

$$\hat{L} = -0,7388 + 0,2101X_1 - 0,8X_2$$

$$Pseudo R^2 = 23,4\%$$

Metryki oceny jakości klasyfikacji:

$$Accuracy \approx 81,3\%$$

$$Precision \approx 66,7\%$$

$$Recall \approx 50\%$$

$$Specificity \approx 91,7\%$$

$$F1 \approx 57,1\%$$

$$AUC \approx 0,70$$

**Tab. 8. Macierz pomylek modelu logitowego 4**

	Rzeczywista 1	Rzeczywista 0
Przewidziana 1	TP = 2	FP = 1
Przewidziana 0	FN = 2	TN = 11

Na podstawie analizy wyników zbudowanych modeli dla półki 2, można stwierdzić, że żaden nie jest idealny. Jedynym modelem, którego metryki oceny są zadowalające i wysokie to model oparty tylko o zmienną objaśniającą – zawartość cukru w płatkach, co sugerowała także macierz korelacji (dodatnia korelacja). Dowodzi to także to, że cukier jest jedyną zmienną istotną statystycznie we wszystkich zbudowanych modelach – na podstawie testu Walda. Model ten charakteryzuje się wysoką czułością ( $\sim 75\%$ ) oraz wysokim AUC ( $\sim 0,67$ ) a także najwyższym wskaźnikiem F1 ( $\sim 66,7\%$ ). Analiza wyników pozwala stwierdzić, że prawdą jest jakoby na półce 2 znajdowały się płatki niezdrowe, o najgorszej jakości, o wysokiej zawartości cukru, których sklep chce się szybko „pozbyć” oraz, że docelowa grupa klientów dla płatków na tej półce to dzieci lub osoby, którym zależy na szybkim, niewymagającym wysiłku, wyborze płatków, niekoniecznie tym zdrowym.

## IV.2. Modele dla półki 3

Górna półka wymaga od klienta, zazwyczaj, wysiłku, bo nie znajduje się w zasięgu wzroku czy ręki dorosłego. Dlatego mając na uwadze macierz korelacji, najprawdopodobniej na tej półce są płatki najzdrowsze, tj. z wysoką zawartością białka, potasu czy błonnika. Dlatego zdecydowano się na zbudowanie kilku modeli dla półki 3, aby sprawdzić te zależności. Przy wyborze zmiennych objaśniających kierowano się także macierzą korelacji.

### IV.2.1. Model logitowy – potas, białko i błonnik jako zmienne objaśniające

Modelem logitowym, który zbudowano jako pierwszy jest model oparty o zmienne objaśniające potas, białko i błonnik. Zdecydowano się na budowę tego modelu, aby sprawdzić czy wysoka zawartość mieszanki zdrowych składników determinuje umiejscowienie płatków na 3 półce. Wiele osób, które prowadzą zdrowy tryb życia patrzą też łącznie na zawartość białka, błonnika i potasu, dlatego ten model uwzględniający wszystkie te 3 zmienne wydaje się być istotny do sprawdzenia z perspektywy biznesowej i wyboru płatków przez klientów. Prawdopodobieństwo przynależności płatków do półki 3 oznaczono jako  $p$  a zmienne objaśniające (zawartość potasu, białka i błonnika odpowiednio) jako  $X_1, X_2, X_3$ .

$$\hat{L} = \ln \frac{\hat{p}}{1 - \hat{p}} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 \quad (18)$$

Poniżej przedstawiono parametry i statystyki wraz z metrykami, które zostały wyznaczone dla tego konkretnego modelu. Skorzystano z biblioteki języka Python, która korzysta z metody maksymalnej estymacji prawdopodobieństwa. Przyjęto poziom istotności na poziomie  $\alpha = 0,05$ . Wartość wartości krytycznej statystyki Walda dla 1 stopnia swobody i zadanego poziomu istotności odczytano za pomocą biblioteki scipy -  $\chi^2_{kryt} = 3,841$ .

**Tab. 9. Tabela z parametrami dla modelu logitowego 5**

Parametr $b_i$	Odchylenie S( $b_i$ )	$W_i > \chi^2_{kryt}$
$b_0 = -1,9479$	0,819	5,650 – istotny
$b_1 = 0,0223$	0,013	2,924 – nieistotny
$b_2 = -0,1265$	0,306	0,171 – nieistotny
$b_3 = 0,0171$	0,374	0,002 – nieistotny

Otrzymany model:

$$\hat{L} = -1,9479 + 0,0223X_1 - 0,1265X_2 + 0,0171X_3$$

$$Pseudo R^2 = 17,6\%$$

Metryki oceny jakości klasyfikacji:

$$Accuracy \approx 62,5\%$$

$$Precision \approx 75\%$$

$$Recall \approx 60\%$$

$$Specificity \approx 66,7\%$$

$$F1 \approx 66,7\%$$

$$AUC \approx 0,77$$

**Tab. 10. Macierz pomyłek modelu logitowego 5**

	Rzeczywista 1	Rzeczywista 0
Przewidziana 1	TP = 6	FP = 2
Przewidziana 0	FN = 4	TN = 4

#### IV.2.2. Model logitowy – potas i błonnik jako zmienne objaśniające

Modelem logitowym, który zbudowano następnie jest model oparty o zmienne objaśniające potas i błonnik. Zdecydowano się na budowę tego modelu, aby sprawdzić czy tylko składniki mineralne mają wpływ na umiejscowienie płatków na półce 3. Prawdopodobieństwo przynależności płatków do półki 3 oznaczono jako p a zmienne objaśniające (zawartość potasu i błonnika odpowiednio) jako  $X_1, X_2$ .

$$\hat{L} = \ln \frac{\hat{p}}{1 - \hat{p}} = b_2X_2 + b_1X_1 + b_0 \quad (19)$$

Poniżej przedstawiono parametry i statystyki wraz z metrykami, które zostały wyznaczone dla tego konkretnego modelu. Skorzystano z biblioteki języka Python,

która korzysta z metody maksymalnej estymacji prawdopodobieństwa. Przyjęto poziom istotności na poziomie  $\alpha = 0,05$ . Wartość wartości krytycznej statystyki Walda dla 1 stopnia swobody i zadanego poziomu istotności odczytano za pomocą biblioteki scipy -  $\chi^2_{kryt} = 3,841$ .

**Tab. 11.** Tabela z parametrami dla modelu logitowego 6

Parametr $b_i$	Odchylenie S( $b_i$ )	$W_i > \chi^2_{kryt}$
$b_0 = -2,1325$	0,691	9,517 – istotny
$b_1 = 0,0207$	0,012	2,822 – nieistotny
$b_2 = 0,0127$	0,371	0,001 – nieistotny

Otrzymany model:

$$\hat{L} = 0,0127X_2 + 0,0207X_1 - 2,1325$$

$$Pseudo R^2 = 17,4\%$$

Metryki oceny jakości klasyfikacji:

$$Accuracy \approx 62,5\%$$

$$Precision \approx 75\%$$

$$Recall \approx 60\%$$

$$Specificity \approx 66,7\%$$

$$F1 \approx 66,7\%$$

$$AUC \approx 0,78$$

**Tab. 12.** Macierz pomylek modelu logitowego 6

	Rzeczywista 1	Rzeczywista 0
Przewidziana 1	TP = 6	FP = 2
Przewidziana 0	FN = 4	TN = 4

#### IV.2.3. Model logitowy – potas i białko jako zmienne objaśniające

Modelem logitowym, który zbudowano następnie jest model oparty o zmienne objaśniające potas i białko. Zdecydowano się na budowę tego modelu, aby sprawdzić czy składnik budulcowy mięśni i minerał potasu wystarczą, aby płatki znalazły się na 3 półce. Prawdopodobieństwo przynależności płatków do półki 3 oznaczono jako  $p$  a zmienne objaśniające (zawartość potasu i białka odpowiednio) jako  $X_1, X_2$ .

$$\hat{L} = \ln \frac{\hat{p}}{1 - \hat{p}} = b_2X_2 + b_1X_1 + b_0 \quad (20)$$

Poniżej przedstawiono parametry i statystyki wraz z metrykami, które zostały wyznaczone dla tego konkretnego modelu. Skorzystano z biblioteki języka Python, która korzysta z metody maksymalnej estymacji prawdopodobieństwa. Przyjęto poziom istotności na poziomie  $\alpha = 0,05$ . Wartość wartości krytycznej statystyki Walda dla 1

stopnia swobody i zadanego poziomu istotności odczytano za pomocą biblioteki scipy -  
 $\chi^2_{kryt} = 3,841$ .

**Tab. 13.** Tabela z parametrami dla modelu logitowego 7

Parametr $b_i$	Odchylenie S( $b_i$ )	$W_i > \chi^2_{kryt}$
$b_0 = -1,9586$	0,785	6,220 – istotny
$b_1 = 0,0227$	0,008	7,690 – istotny
$b_2 = -0,1261$	0,306	0,170 – nieistotny

Otrzymany model:

$$\hat{L} = -0,1261X_2 + 0,0227X_1 - 1,9586$$

$$Pseudo R^2 = 17,6\%$$

Metryki oceny jakości klasyfikacji:

$$Accuracy \approx 62,5\%$$

$$Precision \approx 75\%$$

$$Recall \approx 60\%$$

$$Specificity \approx 66,7\%$$

$$F1 \approx 66,7\%$$

$$AUC \approx 0,75$$

**Tab. 14.** Macierz pomylek modelu logitowego 7

	Rzeczywista 1	Rzeczywista 0
Przewidziana 1	TP = 6	FP = 2
Przewidziana 0	FN = 4	TN = 4

#### IV.2.4. Model logitowy – białko i błonnik jako zmienne objaśniające

Modelem logitowym, który zbudowano następnie jest model oparty o zmienne objaśniające białko i błonnik. Zdecydowano się na budowę tego modelu, aby sprawdzić czy składnik budulcowy mięśni i minerał dający uczucie sytości wystarczą, aby płatki znalazły się na 3 półce. Prawdopodobieństwo przynależności płatków do półki 3 oznaczono jako p a zmienne objaśniające (zawartość białka i błonnika odpowiednio) jako  $X_1, X_2$ .

$$\hat{L} = \ln \frac{\hat{p}}{1 - \hat{p}} = b_2X_2 + b_1X_1 + b_0 \quad (21)$$

Poniżej przedstawiono parametry i statystyki wraz z metrykami, które zostały wyznaczone dla tego konkretnego modelu. Skorzystano z biblioteki języka Python, która korzysta z metody maksymalnej estymacji prawdopodobieństwa. Przyjęto poziom istotności na poziomie  $\alpha = 0,05$ . Wartość wartości krytycznej statystyki Walda dla 1

stopnia swobody i zadanego poziomu istotności odczytano za pomocą biblioteki scipy -  
 $\chi^2_{kryt} = 3,841$ .

**Tab. 15.** Tabela z parametrami dla modelu logitowego 8

Parametr $b_i$	Odchylenie S( $b_i$ )	$W_i > \chi^2_{kryt}$
$b_0 = -1,3914$	0,720	3,733 – nieistotny
$b_1 = 0,0222$	0,282	0,006 – nieistotny
$b_2 = 0,5595$	0,232	5,808 – istotny

Utworzony model:

$$\hat{L} = 0,5595X_2 + 0,0222X_1 - 1,3914$$

$$Pseudo R^2 = 13,7\%$$

Metryki oceny jakości klasyfikacji:

$$Accuracy \approx 56,3\%$$

$$Precision \approx 71,4\%$$

$$Recall \approx 50\%$$

$$Specificity \approx 66,7\%$$

$$F1 \approx 58,8\%$$

$$AUC \approx 0,76$$

**Tab. 16.** Macierz pomylek modelu logitowego 8

	Rzeczywista 1	Rzeczywista 0
Przewidziana 1	TP = 5	FP = 2
Przewidziana 0	FN = 5	TN = 4

#### IV.2.5. Model logitowy – białko jako zmienna objaśniająca

Modelem logitowym, który zbudowano następnie jest model oparty o zmienną objaśniającą białko. Zdecydowano się na budowę tego modelu, aby sprawdzić czy wysoka zawartość składnika budulcowego mięśni wystarczy, aby płatki znalazły się na 3 półce – podyktowane jest to tym, że niektóre osoby prowadzące aktywny tryb życia, np. poprzez trenowanie siłowe, patrzą tylko na zawartość białka. Prawdopodobieństwo przynależności płatków do półki 3 oznaczono jako p a zmienną objaśniającą (zawartość białka) jako  $X_1$ .

$$\hat{L} = \ln \frac{\hat{p}}{1 - \hat{p}} = b_1 X_1 + b_0 \quad (22)$$

Poniżej przedstawiono parametry i statystyki wraz z metrykami, które zostały wyznaczone dla tego konkretnego modelu. Skorzystano z biblioteki języka Python, która korzysta z metody maksymalnej estymacji prawdopodobieństwa. Przyjęto poziom

istotności na poziomie  $\alpha = 0,05$ . Wartość wartości krytycznej statystyki Walda dla 1 stopnia swobody i zadanego poziomu istotności odczytano za pomocą biblioteki scipy -  $\chi^2_{kryt} = 3,841$ .

**Tab. 17.** Tabela z parametrami dla modelu logitowego 9

Parametr $b_i$	Odchylenie S( $b_i$ )	$W_i > \chi^2_{kryt}$
$b_0 = -1,3279$	0,684	3,771 – nieistotny
$b_1 = 0,4050$	0,247	2,683 – nieistotny

Utworzony model:

$$\hat{L} = 0,4050X_1 - 1,3279$$

$$Pseudo R^2 = 3,5\%$$

Metryki oceny jakości klasyfikacji:

$$Accuracy \approx 50\%$$

$$Precision \approx 100\%$$

$$Recall \approx 20\%$$

$$Specificity \approx 100\%$$

$$F1 \approx 33,3\%$$

$$AUC \approx 0,75$$

**Tab. 18.** Macierz pomylek modelu logitowego 9

	Rzeczywista 1	Rzeczywista 0
Przewidziana 1	TP = 2	FP = 0
Przewidziana 0	FN = 8	TN = 6

#### IV.2.6. Model logitowy – potas jako zmienna objaśniająca

Modelem logitowym, który zbudowano następnie jest model oparty o zmienną objaśniającą potas. Zdecydowano się na budowę tego modelu ze względu na to, że wcześniejszy model oparty o potas i białko miał najlepsze metryki w porównaniu z innymi dotychczasowymi modelami i zmienna potas jako jedyna była istotna statystycznie w tym modelu (model z błonikiem też wykazał istotność tego składnika, ale model z potasem i białkiem miał lepsze metryki). Prawdopodobieństwo przynależności płatków do półki 3 oznaczono jako p a zmienną objaśniającą (zawartość potasu) jako  $X_1$ .

$$\hat{L} = \ln \frac{\hat{p}}{1 - \hat{p}} = b_1 X_1 + b_0 \quad (23)$$

Poniżej przedstawiono parametry i statystyki wraz z metrykami, które zostały wyznaczone dla tego konkretnego modelu. Skorzystano z biblioteki języka Python,

która korzysta z metody maksymalnej estymacji prawdopodobieństwa. Przyjęto poziom istotności na poziomie  $\alpha = 0,05$ . Wartość wartości krytycznej statystyki Walda dla 1 stopnia swobody i zadanejgo poziomu istotności odczytano za pomocą biblioteki scipy -  $\chi^2_{kryt} = 3,841$ .

**Tab. 19.** Tabela z parametrami dla modelu logitowego 10

Parametr $b_i$	Odchylenie S( $b_i$ )	$W_i > \chi^2_{kryt}$
$b_0 = -2,1400$	0,656	10,634 – istotny
$b_1 = 0,0210$	0,007	9,211 – istotny

Utworzony model:

$$\hat{L} = 0,0210X_1 - 2,1400$$

$$Pseudo R^2 = 17,4\%$$

Metryki oceny jakości klasyfikacji:

$$\begin{aligned} Accuracy &\approx 62,5\% \\ Precision &\approx 75\% \\ Recall &\approx 60\% \\ Specificity &\approx 66,7\% \\ F1 &\approx 66,7\% \\ AUC &\approx 0,78 \end{aligned}$$

**Tab. 20.** Macierz pomylek modelu logitowego 10

	Rzeczywista 1	Rzeczywista 0
Przewidziana 1	TP = 6	FP = 2
Przewidziana 0	FN = 4	TN = 4

Na podstawie analizy wyników zbudowanych modeli dla półki 3, można stwierdzić, że żaden nie jest idealny. Najlepszym modelem dla półki 3 okazał się model oparty na potasie. Wykazuje on najwyższą istotność statystyczną dla zmiennej potas. Modele zawierające jednocześnie potas i błonnik charakteryzują się wysokimi wartościami p-value co może świadczyć o ich multikolinearności, co pokazuje także macierz korelacji (0,90). Model dla potasu i protein posiada wysoki AUC (~0,75, minimalnie mniejszy od modelu opartego tylko o potas) i minimalnie większą metrykę Pseudo  $R^2$ , natomiast współczynnik przy białku jest ujemny, co sugerowałoby, że im więcej białka, tym mniejsze prawdopodobieństwo wystąpienia płatków na 3 półce, co nie do końca wpasowuje się w nasze zadane pytania i macierz korelacji. Dlatego właśnie model oparty tylko o potas wydaje się najlepszy, mimo że nie ma on idealnych metryk. Analiza wyników zbudowanych modeli pozwala stwierdzić, że na półce 3 rzeczywiście mogą znajdować się płatki zdrowsze, przede wszystkim z wysoką zawartością składnika mineralnego, jakim jest potas.

### IV.3. Modele dla półki 1

Macierz korelacji nie wykazała konkretnych zależności między składnikami płatków a umiejscowieniem ich na półce 1. Zdecydowano się na sprawdzenie modeli opartych o zmienne objaśniające, które z punktu widzenia klienta mogą być istotne. Dlatego zdecydowano się na zbudowanie kilku modeli dla półki 1, aby sprawdzić te zależności. Przy wyborze zmiennych objaśniających kierowano się także macierzą korelacji.

#### IV.3.1. Model logitowy – węglowodany jako zmienna objaśniająca

Modelem logitowym, który zbudowano jako pierwszy jest model oparty o zmienną objaśniającą węglowodany. Zdecydowano się na budowę tego modelu, aby sprawdzić czy tylko większa zawartość węglowodanów decyduje o umiejscowieniu płatków na 1 półce (korelacja dodatnia). Prawdopodobieństwo przynależności płatków do półki 1 oznaczono jako  $p$  a zmienną objaśniającą (zawartość węglowodanów odpowiednio) jako  $X_1$ .

$$\hat{L} = \ln \frac{\hat{p}}{1 - \hat{p}} = b_0 + b_1 X_1 \quad (24)$$

Poniżej przedstawiono parametry i statystyki wraz z metrykami, które zostały wyznaczone dla tego konkretnego modelu. Skorzystano z biblioteki języka Python, która korzysta z metody maksymalnej estymacji prawdopodobieństwa. Przyjęto poziom istotności na poziomie  $\alpha = 0,05$ . Wartość wartości krytycznej statystyki Walda dla 1 stopnia swobody i zadanego poziomu istotności odczytano za pomocą biblioteki scipy -  $\chi^2_{kryt} = 3,841$ .

**Tab. 21. Tabela z parametrami dla modelu logitowego 11**

Parametr $b_i$	Odchylenie S( $b_i$ )	$W_i > \chi^2_{kryt}$
$b_0 = -4,0488$	1,391	8,474 – istotny
$b_1 = 0,2043$	0,085	5,774 – istotny

Utworzony model:

$$\hat{L} = -4,0488 + 0,2043X_1$$

$$Pseudo R^2 = 8,8\%$$

Metryki oceny jakości klasyfikacji:

$$Accuracy \approx 68,8\%$$

$$Precision \approx 0\%$$

$$Recall \approx 0\%$$

$$Specificity \approx 78,6\%$$

$$F1 \approx 0\%$$

$$AUC \approx 0,64$$

**Tab. 22.** Macierz pomylek modelu logitowego 11

	Rzeczywista 1	Rzeczywista 0
Przewidziana 1	TP = 0	FP = 2
Przewidziana 0	FN = 2	TN = 12

**IV.3.2. Model logitowy – cukier jako zmienna objaśniająca**

Modelem logitowym, który zbudowano następnie jest model oparty o zmienną objaśniającą cukier. Zdecydowano się na budowę tego modelu, aby sprawdzić czy tylko mniejsza zawartość cukru (korelacja ujemna) ma wpływ na umiejscowienie płatków na półce 1. Prawdopodobieństwo przynależności płatków do półki 3 oznaczono jako p a zmienną objaśniającą (zawartość cukru odpowiednio) jako  $X_1$ .

$$\hat{L} = \ln \frac{\hat{p}}{1 - \hat{p}} = b_1 X_1 + b_0 \quad (25)$$

Poniżej przedstawiono parametry i statystyki wraz z metrykami, które zostały wyznaczone dla tego konkretnego modelu. Skorzystano z biblioteki języka Python, która korzysta z metody maksymalnej estymacji prawdopodobieństwa. Przyjęto poziom istotności na poziomie  $\alpha = 0,05$ . Wartość wartości krytycznej statystyki Walda dla 1 stopnia swobody i zadanego poziomu istotności odczytano za pomocą biblioteki scipy -  $\chi^2_{kryt} = 3,841$ .

**Tab. 23.** Tabela z parametrami dla modelu logitowego 12

Parametr $b_i$	Odchylenie S( $b_i$ )	$W_i > \chi^2_{kryt}$
$b_0 = 0,1652$	0,502	0,108 – nieistotny
$b_1 = -0,1724$	0,075	5,235 – istotny

Utworzony model:

$$\hat{L} = -0,1724X_1 + 0,1652$$

$$Pseudo R^2 = 8,2\%$$

Metryki oceny jakości klasyfikacji:

$$Accuracy \approx 75\%$$

$$Precision \approx 0\%$$

$$Recall \approx 0\%$$

$$Specificity \approx 85,7\%$$

$$F1 \approx 0\%$$

$$AUC \approx 0,61$$

**Tab. 24.** Macierz pomylek modelu logitowego 12

	Rzeczywista 1	Rzeczywista 0
Przewidziana 1	TP = 0	FP = 2
Przewidziana 0	FN = 2	TN = 12

#### IV.3.3. Model logitowy – węglowodany i cukier jako zmienne objaśniające

Modelem logitowym, który zbudowano następnie jest model oparty o zmienne objaśniające węglowodany i cukier. Zdecydowano się na budowę tego modelu, aby sprawdzić czy większa zawartość węglowodanów i mniejsza zawartość cukru wpływają na umiejscowienie danych płatków na półce 1. Prawdopodobieństwo przynależności płatków do półki 1 oznaczono jako  $p$  a zmienne objaśniające (zawartość węglowodanów i cukru odpowiednio) jako  $X_1, X_2$ .

$$\hat{L} = \ln \frac{\hat{p}}{1 - \hat{p}} = b_2 X_2 + b_1 X_1 + b_0 \quad (26)$$

Poniżej przedstawiono parametry i statystyki wraz z metrykami, które zostały wyznaczone dla tego konkretnego modelu. Skorzystano z biblioteki języka Python, która korzysta z metody maksymalnej estymacji prawdopodobieństwa. Przyjęto poziom istotności na poziomie  $\alpha = 0,05$ . Wartość wartości krytycznej statystyki Walda dla 1 stopnia swobody i zadanego poziomu istotności odczytano za pomocą biblioteki scipy -  $\chi^2_{kryt} = 3,841$ .

**Tab. 25.** Tabela z parametrami dla modelu logitowego 13

Parametr $b_i$	Odchylenie S( $b_i$ )	$W_i > \chi^2_{kryt}$
$b_0 = -2,2835$	1,874	1,484 – nieistotny
$b_1 = 0,1333$	0,097	1,874 – nieistotny
$b_2 = -0,1098$	0,088	1,545 – nieistotny

Utworzony model:

$$\hat{L} = -0,1098X_2 + 0,1333X_1 - 2,2835$$

$$Pseudo R^2 = 11\%$$

Metryki oceny jakości klasyfikacji:

$$Accuracy \approx 75\%$$

$$Precision \approx 0\%$$

$$Recall \approx 0\%$$

$$Specificity \approx 85,7\%$$

$$F1 \approx 0\% \\ AUC \approx 0,71$$

**Tab. 26.** Macierz pomylek modelu logitowego 13

	Rzeczywista 1	Rzeczywista 0
Przewidziana 1	TP = 0	FP = 2
Przewidziana 0	FN = 2	TN = 12

#### IV.3.4. Model logitowy – wszystkie składniki płatków jako zmienne objaśniające

Modelem logitowym, który zbudowano następnie jest model oparty o zmienne objaśniające będące wszystkimi składnikami płatków. Zdecydowano się na budowę tego modelu, aby sprawdzić czy może cały skład ma wpływ na umiejscowienie płatków na 1 półce. Prawdopodobieństwo przynależności płatków do półki 1 oznaczono jako p a zmienne objaśniające (zawartość kalorii, cukrów, węglowodanów, białka, tłuszczy, sodu, błonnika i potasu odpowiednio) jako  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8$ .

$$\hat{L} = \ln \frac{\hat{p}}{1 - \hat{p}} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 X_4 + b_5 X_5 + b_6 X_6 + b_7 X_7 + b_8 X_8 \quad (27)$$

Poniżej przedstawiono parametry i statystyki wraz z metrykami, które zostały wyznaczone dla tego konkretnego modelu. Skorzystano z biblioteki języka Python, która korzysta z metody maksymalnej estymacji prawdopodobieństwa. Przyjęto poziom istotności na poziomie  $\alpha = 0,05$ . Wartość wartości krytycznej statystyki Walda dla 1 stopnia swobody i zadanego poziomu istotności odczytano za pomocą biblioteki scipy -  $\chi^2_{kryt} = 3,841$ .

**Tab. 27.** Tabela z parametrami dla modelu logitowego 14

Parametr $b_i$	Odchylenie S( $b_i$ )	$W_i > \chi^2_{kryt}$
$b_0 = -2,0621$	3,248	0,403 – nieistotny
$b_1 = -0,0552$	0,063	0,762 – nieistotny
$b_2 = 0,1592$	0,291	0,299 – nieistotny
$b_3 = 0,3080$	0,300	1,055 – nieistotny
$b_4 = 0,6705$	0,451	2,211 – nieistotny
$b_5 = -0,2312$	0,637	0,132 – nieistotny

$b_6 = 0,0020$	0,004	0,270 – nieistotny
$b_7 = 0,0745$	0,406	0,033 – nieistotny
$b_8 = -0,0095$	0,015	0,392 – nieistotny

Utworzony model:

$$\hat{L} = -2,0621 - 0,0552X_1 + 0,1592X_2 + 0,3080X_3 + 0,6705X_4 - 0,2312X_5 + 0,0020X_6 + 0,0745X_7 - 0,0095X_8$$

$$Pseudo R^2 = 17\%$$

Metryki oceny jakości klasyfikacji:

$$Accuracy \approx 75\%$$

$$Precision \approx 0\%$$

$$Recall \approx 0\%$$

$$Specificity \approx 85,7\%$$

$$F1 \approx 0\%$$

$$AUC \approx 0,79$$

**Tab. 28.** Macierz pomyłek modelu logitowego 14

	Rzeczywista 1	Rzeczywista 0
Przewidziana 1	TP = 0	FP = 2
Przewidziana 0	FN = 2	TN = 12

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń oraz wcześniejszej analizy macierzy korelacji, należy stwierdzić, że nie udało się zbudować modelu o wysokiej zdolności klasyfikacyjnej dla półki 1. Bardzo niskie (równe 0) wartości metryk precyzji, czyłości i F1 oraz nieistotność statystyczna większości zmiennych objaśniających (poza węglowodanami i cukrem i modelach, które zawierają tylko je) w modelach wielu zmiennych dowodzą, że w badanym zbiorze danych nie istnieją silne, powtarzalne zależności między składem odżywczym płatków a ich umiejscowieniem na dolnej półce. Potwierdza to wstępna analizę macierzy korelacji, która nie wykazała żadnego składnika wyraźnie powiązanego z tą półką. Słabe wyniki modeli sugerują, że o lokowaniu płatków na samym dole regału mogą decydować czynniki inne niż wartości odżywcze. Najprawdopodobniej są to kryteria logistyczne, np. gabaryty opakowań lub ekonomiczne, takie jak niska cena.

#### IV.4. Wyłączenie wybranego producenta płatków

Zrezygnowano z uwzględnienia półki 1 w poniższych rozważaniach ze względu na brak wykrytych jednoznacznych zależności między składem a umiejscowieniem na półce 1. Zdecydowano się na wyłączenie z danych producenta z największą liczbą płatków w zbiorze danych (Producent K – 23 płatki), aby mieć na czym weryfikować działanie modeli.

#### IV.4.1. Najlepszy model dla półki 3 – oparty o potas

Model logitowy był już zbudowany wyżej - **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.** dla potasu. Model wytrenowano na danych nie uwzględniających producenta „K”.

Poniżej przedstawiono parametry i statystyki wraz z metrykami, które zostały wyznaczone dla tego konkretnego modelu. Skorzystano z biblioteki języka Python, która korzysta z metody maksymalnej estymacji prawdopodobieństwa. Przyjęto poziom istotności na poziomie  $\alpha = 0,05$ . Wartość wartości krytycznej statystyki Walda dla 1 stopnia swobody i zadanego poziomu istotności odczytano za pomocą biblioteki scipy -  $\chi^2_{kryt} = 3,841$ .

**Tab. 29. Tabela z parametrami dla modelu logitowego półki 3 po wyłączeniu producenta**

Parametr $b_i$	Odchylenie S( $b_i$ )	$W_i > \chi^2_{kryt}$
$b_0 = -1,9984$	0,680	8,638 – istotny
$b_1 = 0,0192$	0,007	8,111 – istotny

Otrzymany model:

$$\hat{L} = 0,0192X_1 - 1,9984$$

$$Pseudo R^2 = 16,1\%$$

Metryki oceny jakości klasyfikacji:

$$Accuracy \approx 74\%$$

$$Precision \approx 87,5\%$$

$$Recall \approx 58,3\%$$

$$Specificity \approx 90,9\%$$

$$F1 \approx 70\%$$

$$AUC \approx 0,83$$

**Tab. 30. Macierz pomylek modelu logitowego półki 3 po wyłączeniu producenta**

	Rzeczywista 1	Rzeczywista 0
Przewidziana 1	TP = 7	FP = 1
Przewidziana 0	FN = 5	TN = 10

#### **IV.4.2. Najlepszy model dla półki 3 – oparty o potas po optymalizacji progu klasyfikacji**

Wykorzystano ten sam model, ale z optymalnym programem klasyfikacji.

Poniżej przedstawiono parametry i statystyki wraz z metrykami, które zostały wyznaczone dla tego konkretnego modelu. Skorzystano z biblioteki języka Python, która korzysta z metody maksymalnej estymacji prawdopodobieństwa. Przyjęto poziom istotności na poziomie  $\alpha = 0,05$ . Wartość wartości krytycznej statystyki Walda dla 1 stopnia swobody i zadanego poziomu istotności odczytano za pomocą biblioteki scipy -  $\chi^2_{kryt} = 3,841$ . Parametry, ich odchylenia i statystyki Walda są identyczne jak dla poprzedniego modelu.

$$\text{Pseudo } R^2 = 16,1\%$$

Metryki oceny jakości klasyfikacji:

$$\text{Accuracy} \approx 82,6\%$$

$$\text{Precision} \approx 83,3\%$$

$$\text{Recall} \approx 83,3\%$$

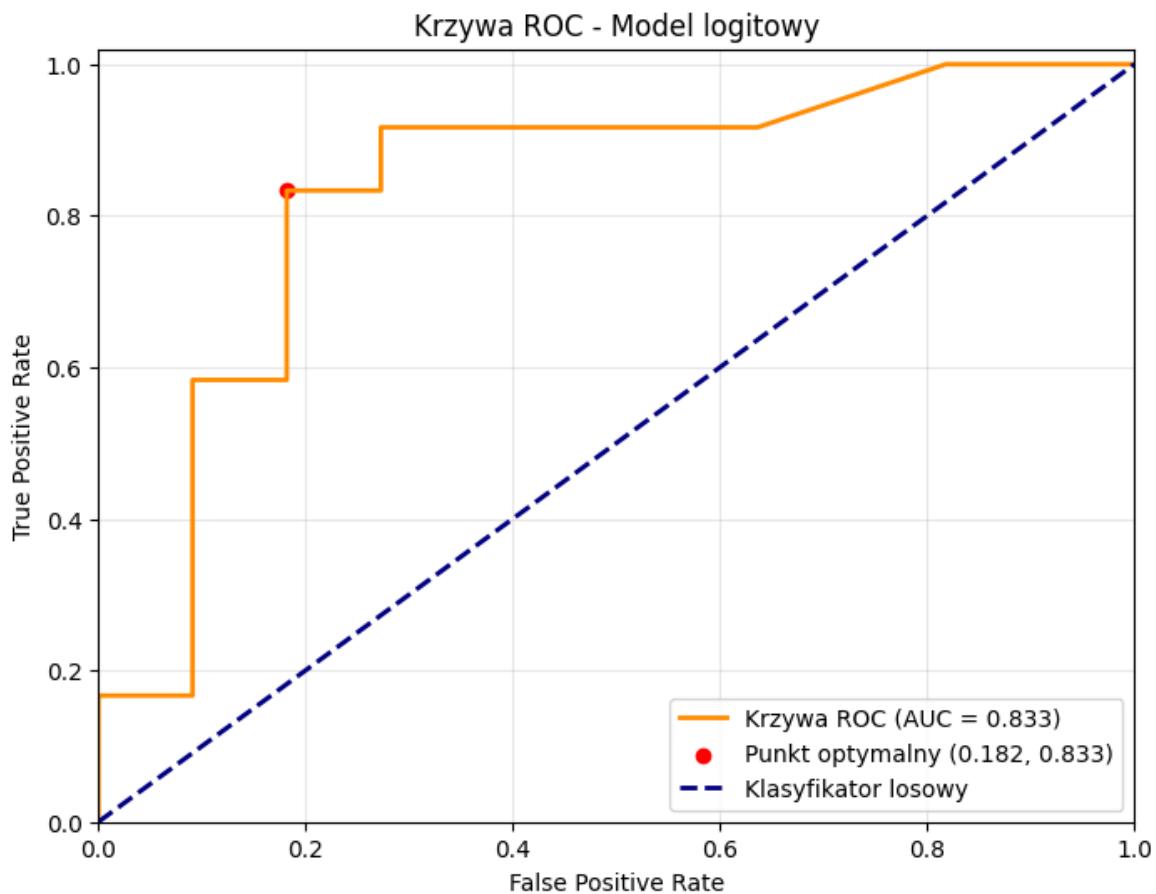
$$\text{Specificity} \approx 81,8\%$$

$$F1 \approx 83,3\%$$

$$AUC \approx 0,83$$

**Tab. 31. Macierz pomyłek modelu logitowego półki 3 po wyłączeniu producenta i z optymalnym programem klasyfikacji**

	Rzeczywista 1	Rzeczywista 0
Przewidziana 1	TP = 10	FP = 2
Przewidziana 0	FN = 2	TN = 9



Rys. 3. Krzywa ROC dla modelu logitowego półki 3

Po wyłączeniu z danych treningowych płatków producenta „K”, który miał najwięcej płatków w naszym zbiorze początkowych danych, zbudowane modele całkiem dobrze sobie radzą z klasyfikacją płatków tego producenta na półce 3. Zmienne w obu modelach są istotne statystycznie, zgodnie z tym co opisano we wstępie teoretycznym - **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania..** Dla pierwszego modelu, zdolność do klasyfikacji płatków na półce 3 charakteryzuje się wyższą zdolnością do klasyfikacji wykluczającej należenie do półki (specyficznością) jednakże wartość F1 jest na poziomie ok. 70%, co jest całkiem dobrym wynikiem. Należy jednak wziąć pod uwagę to, że w kontekście biznesowym, zależy nam na jak największej jakości klasyfikacji płatków jako należących do półki 3, dlatego ten model nie jest najlepszy jeżeli weźmiemy pod uwagę kontekst biznesowy.

W modelach logitowych wartości  $Pseudo R^2$  rzędu 0,2-0,4 są uznawane za bardzo dobre dopasowanie. Wynik w okolicach 0,16, przy tak małej próbie i tylko jednej zmiennej objaśniającej należy zatem uznać za satysfakcyjający i potwierdzający istotność potasu jako czynnika klasyfikującego płatki na półkę 3.

Dzięki zastosowaniu optymalnego progu klasyfikacji wyznaczonego metodą krzywej ROC, udało się polepszyć wyniki metryk oceny jakości klasyfikacji modelu, m.in. zwiększyć czułość modelu o ok. 25 punktów procentowych. Oznacza to, że model

znacznie lepiej radzi sobie z wykrywaniem produktów, które faktycznie powinny znaleźć się na półce 3 (a na tym, jak już wspomniano, nam zależy), kosztem jedynie niewielkiego spadku specyficzności. Należy jednak zauważać, że specyficzność i czułość są zbliżone do siebie a wartość F1 jest dość wysoka, porównując ją chociażby z poprzednim modelem, co również świadczy o poprawności skuteczności modelu.

Podsumowując, modele wykazują wysoką zdolność do generalizacji po wyłączeniu kluczowego producenta ze zbioru treningowego, w szczególności jeśli mówimy o modelu z optymalnym programem klasyfikacji. Model wciąż poprawnie klasyfikuje większość danych dla tego producenta. Można również przypuszczać, że zastosowanie krzywej ROC w celu wyboru optymalnego progu klasyfikacji, poprawiłoby także jakość poprzednich modeli, trenowanych na całym zbiorze danych.

#### IV.4.3. Najlepszy model dla półki 2 – oparty o cukier

Model logitowy był już zbudowany wyżej - **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.** dla cukru. Model wytrenowano na danych nie uwzględniających producenta „K”.

Poniżej przedstawiono parametry i statystyki wraz z metrykami, które zostały wyznaczone dla tego konkretnego modelu. Skorzystano z biblioteki języka Python, która korzysta z metody maksymalnej estymacji prawdopodobieństwa. Przyjęto poziom istotności na poziomie  $\alpha = 0,05$ . Wartość wartości krytycznej statystyki Walda dla 1 stopnia swobody i zadanego poziomu istotności odczytano za pomocą biblioteki scipy -  $\chi^2_{kryt} = 3,841$ .

**Tab. 32. Tabela z parametrami dla modelu logitowego półki 2 po wyłączeniu producenta**

Parametr $b_i$	Odchylenie S( $b_i$ )	$W_i > \chi^2_{kryt}$
$b_0 = -2,0909$	0,692	9,139 – istotny
$b_1 = 0,1426$	0,077	3,389 – nieistotny

Otrzymany model:

$$\hat{L} = 0,1426X_1 - 2,0909$$

$$Pseudo R^2 = 6\%$$

Metryki oceny jakości klasyfikacji:

$$Accuracy \approx 73,9\%$$

$$Precision \approx 100\%$$

$$Recall \approx 14,3\%$$

$$Specificity \approx 100\%$$

$$F1 \approx 25\%$$

$$AUC \approx 0,89$$

**Tab. 33.** Macierz pomylek modelu logitowego półki 2 po wyłączeniu producenta

	Rzeczywista 1	Rzeczywista 0
Przewidziana 1	TP = 1	FP = 0
Przewidziana 0	FN = 6	TN = 16

#### IV.4.4. Najlepszy model dla półki 2 – oparty o cukier po optymalizacji programu klasyfikacji

Wykorzystano ten sam model, ale z optymalnym programem klasyfikacji.

Poniżej przedstawiono parametry i statystyki wraz z metrykami, które zostały wyznaczone dla tego konkretnego modelu. Skorzystano z biblioteki języka Python, która korzysta z metody maksymalnej estymacji prawdopodobieństwa. Przyjęto poziom istotności na poziomie  $\alpha = 0,05$ . Wartość wartości krytycznej statystyki Walda dla 1 stopnia swobody i zadanego poziomu istotności odczytano za pomocą biblioteki scipy -  $\chi^2_{kryt} = 3,841$ . Parametry, ich odchylenia i statystyki Walda są identyczne jak dla poprzedniego modelu.

$$Pseudo R^2 = 6\%$$

Metryki oceny jakości klasyfikacji:

$$Accuracy \approx 73,9\%$$

$$Precision \approx 53,8\%$$

$$Recall \approx 100\%$$

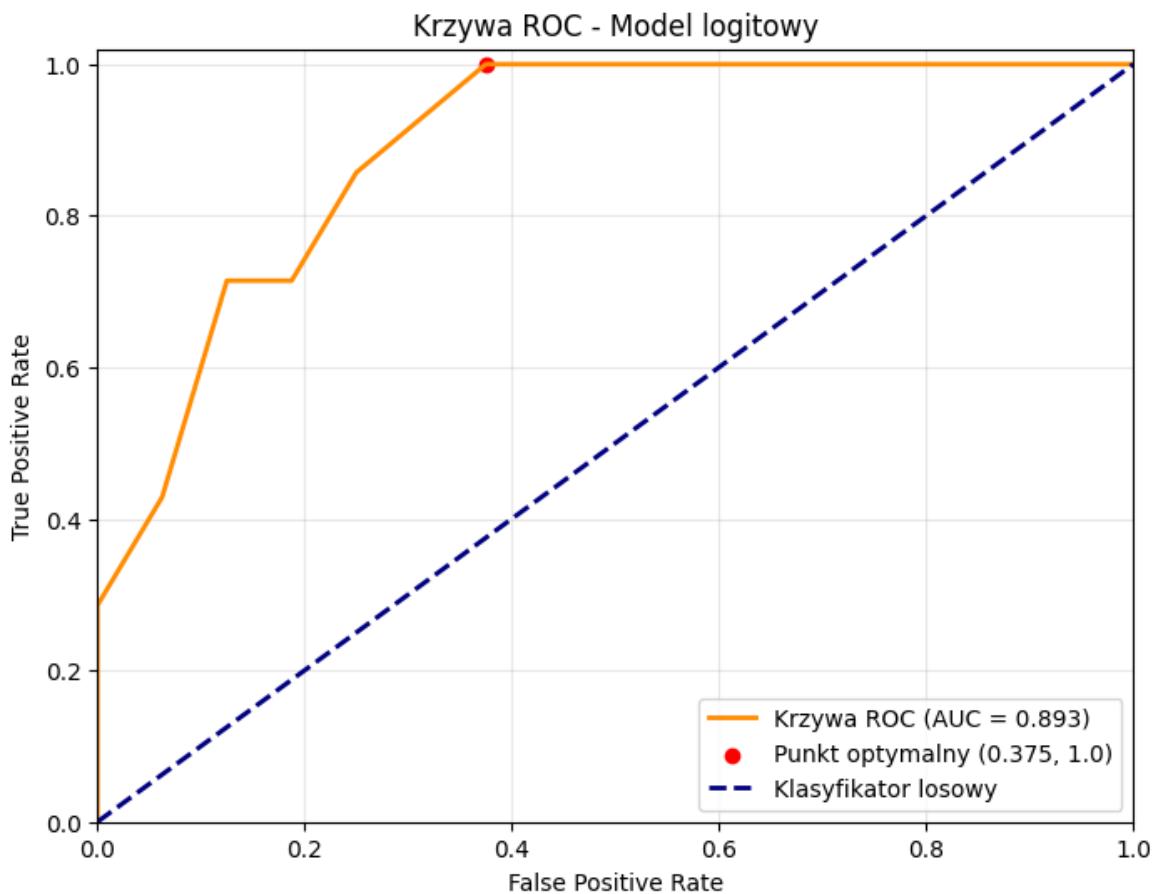
$$Specificity \approx 62,5\%$$

$$F1 \approx 70\%$$

$$AUC \approx 0,89$$

**Tab. 34.** Macierz pomylek modelu logitowego półki 2 po wyłączeniu producenta i z optymalnym programem klasyfikacji

	Rzeczywista 1	Rzeczywista 0
Przewidziana 1	TP = 7	FP = 6
Przewidziana 0	FN = 0	TN = 10



Rys. 4. Krzywa ROC dla modelu logitowego półki 2

Model logitowy dla półki 2 oparte na zmiennej objaśniającej cukier przed zmianą progu klasyfikacji, wykazuje znacznie słabsze właściwości klasyfikacyjne niż analogiczne modele dla półki 3. Niska wartość  $Pseudo R^2$  (poniżej 0,1) oraz niska czułość sugerują, że model wytrenowany na danych z wyłączeniem jednego producenta nie dopasowuje się najlepiej do danych oraz nie ma wysokiej jakości klasyfikacji płatków jako należących do półki 2 – niedoszacowuje prawdopodobieństwa przynależności płatków tego producenta do tej półki. Model ma tendencję do zniżania prawdopodobieństwa przynależności płatków do półki 2. Dowodzi to też temu, że model de facto wyuczony na konkurencji nie potrafi w pełni zrekonstruować zależności które odkryto przy pełnych danych.

Po zmianie progu klasyfikacji dla półki 2 zauważono znaczącą poprawę jakości modelu. Niskie wartości czułości czy F1 sugerowały, że model logitowy poprawnie wyklucza płatki według zawartości cukru, ale standardowy próg 0,5 nie był optymalny.

Po zmianie progu na 0,25 model osiągnął pełną czułość (100%) przy wysokim wskaźniku F1 (70%). Podczas gdy model wyuczony na innych płatkach innych producentów oczekuje wysokich wartości cukru dla 2. Półki, producent K umieszcza

tam płatki już przy niższych zawartościach cukru. Optymalizacja progu pozwoliła na poprawę jakości klasyfikacji modelu jednakże nie jest to też najlepszy model, m.in. poprzez małą licznosć zbioru danych, co po wyłączeniu producenta sprawia, że model jest gorszy od poprzednich i zmienna cukier jest nieistotna statystycznie czy chociażby sama 100% wartość czułości przy jednoczesnym precyzji może sugerować, że ten konkretny model klasyfikuje na półkę 2 niemal każdy produkt o nawet umiarkowanej zawartości cukru.

## Podsumowanie

W wyniku analizy zbudowanych modeli stwierdzono, że skład odżywczy płatków śniadaniowych ma wpływ na ich umiejscowienie na danej półce, ale w sposób niejednoznaczny. Najsilniejsze zależności zaobserwowano dla półek 3 i 2, podczas gdy dla półki 1 nie stwierdzono jednoznacznych zależności determinujących umiejscowienie płatków na tej półce. Analiza potwierdziła, że na półce 2, znajdującej się na wysokości wzroku, ulokowane są płatki o gorszej jakości, co wykazał model oparty o zmienną objaśniającą – cukier. Istotność statystyczna tej zmiennej oraz jej dodatnia korelacja wskazują na możliwą celową strategię sklepu polegającą na eksponowaniu na tej półce płatków o wysokiej zawartości cukry. Z kolei półka 3 zidentyfikowana została jako zawierająca płatki o zdrowszym składzie, gdzie najlepszym czynnikiem decydującym o umiejscowieniu płatków na tej półce okazała się zawartość potasu, która jest silnie skorelowana z błonnikiem. W przypadku modeli wielu zmiennych dla tej półki konieczna była redukcja zmiennych ze względu na możliwą multikolinearność między składnikami potasu i błonnika. Odmienne rezultaty uzyskano dla półki 1, dla której nie udało się zbudować modelu o zadowalającej jakości klasyfikacyjnej. Modele logitowe dla tej półki uzyskały zerowe wartości precyzji i czułości (oraz F1) w ujęciu modeli wielu zmiennych, dodatkowo wykazano nieistotność większości zmiennych objaśniających w zbudowanych modelach, co świadczy brak jednoznacznego związku między składem odżywczym płatków a umiejscowieniem ich na tej półce. Oznacza to, że o umieszczeniu płatków na najniższej półce decydują czynniki inne niż te żywieniowe. Podsumowując, modele logitowe skutecznie wykryły podział płatków na swego rodzaju strefy „impulsywnej”, w której są płatki wysoko słodzone, których sklep szybko chce się pozbyć, oraz „zdrową”, gdzie są produkty o zwiększonej zawartości zdrowych składników. Modele okazały się jednak niewystarczające, aby wyjaśnić strukturę półki 1, która nie zależy od składników odżywcznych.

Przeprowadzone eksperymenty polegające na wyłączeniu z danych treningowych danych największego producenta – „K”, pozwoliły na ocenę zdolności klasyfikacyjnych modeli wobec nowych, nieznanych wcześniej danych. Dla półki 3, modele wykazują wysoką zdolność do generalizacji zasad dot. umiejscowienia płatków na półce 3 według składu. Nawet po wyłączeniu producenta K, model oparty na potasie poprawnie klasyfikuje jego produkty na najwyższej półce (osiągając F1 na poziomie 70% czy 83,3% po optymalizacji progu klasyfikacji). Dowodzi to temu, że na półce 3 rzeczywiście są umiejscawiane płatki z największą zawartością potasu. Dla półki 2, eksperiment wykazał, że można się spodziewać, że zasady umiejscawiania płatków na tej półce są bardziej zróżnicowane i zależne od konkretnego producenta. Modele wytrenowane bez uwzględnienia danych największego producenta okazały się nie doszacowywać prawdopodobieństwa. Dopiero optymalizacja progu klasyfikacji do poziomu 0,25 pozwoliła na uzyskanie zadowalającego wyniku F1 oraz bardzo wysokiej

czułości. Warto jednak zauważyc, że dla półki 2., ze względu na małą licznosć danych, zmienna objaśniająca cukier stała się nieistotna statystycznie. Wykazano, że domyślny próg klasyfikacji na poziomie 0,5 jest często nieefektywny dla tego problemu biznesowego. Zastosowanie krzywej ROC do wyznaczenia optymalnego progu klasyfikacji pozwoliło na znaczącą poprawę jakości klasyfikacji, szczególnie w przypadku półki 2.

## Bibliografia

- [1] <https://en.wikipedia.org/wiki/Pseudo-R-squared>
- [2] <https://mirosławmamczur.pl/jak-dziala-regresja-logistyczna/>
- [3] <https://www.youtube.com/watch?v=idGS1gLIXTA>
- [4] <https://www.youtube.com/watch?v=2HpcV1sq0fE>
- [5] <https://en.wikipedia.org/wiki/Pseudo-R-squared>
- [6] [https://pl.wikipedia.org/wiki/Funkcja\\_wiarygodno%C5%9Bci](https://pl.wikipedia.org/wiki/Funkcja_wiarygodno%C5%9Bci)
- [7] [https://www.naukowiec.org/wzory/statystyka/statystyka-walda--test\\_455.html](https://www.naukowiec.org/wzory/statystyka/statystyka-walda--test_455.html)
- [8] <https://stats.stackexchange.com/questions/82105/mcfaddens-pseudo-r2-interpretation>

## Spis tabel

Tab. 1.	Tabela z parametrami dla modelu logitowego 1 .....	13
Tab. 2.	Macierz pomyłek modelu logitowego 1.....	14
Tab. 3.	Tabela z parametrami dla modelu logitowego 2 .....	14
Tab. 4.	Macierz pomyłek modelu logitowego 2.....	15
Tab. 5.	Tabela z parametrami dla modelu logitowego 3 .....	15
Tab. 6.	Macierz pomyłek modelu logitowego 3.....	16
Tab. 7.	Tabela z parametrami dla modelu logitowego 4 .....	17
Tab. 8.	Macierz pomyłek modelu logitowego 4.....	17
Tab. 9.	Tabela z parametrami dla modelu logitowego 5 .....	19
Tab. 10.	Macierz pomyłek modelu logitowego 5.....	19
Tab. 11.	Tabela z parametrami dla modelu logitowego 6 .....	21
Tab. 12.	Macierz pomyłek modelu logitowego 6.....	21
Tab. 13.	Tabela z parametrami dla modelu logitowego 7 .....	23
Tab. 14.	Macierz pomyłek modelu logitowego 7.....	23
Tab. 15.	Tabela z parametrami dla modelu logitowego 8 .....	25
Tab. 16.	Macierz pomyłek modelu logitowego 8.....	25
Tab. 17.	Tabela z parametrami dla modelu logitowego 9 .....	27
Tab. 18.	Macierz pomyłek modelu logitowego 9.....	27
Tab. 19.	Tabela z parametrami dla modelu logitowego 10 .....	28
Tab. 20.	Macierz pomyłek modelu logitowego 10.....	28
Tab. 21.	Tabela z parametrami dla modelu logitowego 11 .....	29
Tab. 22.	Macierz pomyłek modelu logitowego 11.....	30
Tab. 23.	Tabela z parametrami dla modelu logitowego 12 .....	30
Tab. 24.	Macierz pomyłek modelu logitowego 12.....	30
Tab. 25.	Tabela z parametrami dla modelu logitowego 13 .....	31
Tab. 26.	Macierz pomyłek modelu logitowego 13.....	32
Tab. 27.	Tabela z parametrami dla modelu logitowego 14 .....	32
Tab. 28.	Macierz pomyłek modelu logitowego 14.....	33
Tab. 29.	Tabela z parametrami dla modelu logitowego półki 3 po wyłączeniu producenta	
	34	
Tab. 30.	Macierz pomyłek modelu logitowego półki 3 po wyłączeniu producenta .	34

Tab. 31. Macierz pomyłek modelu logitowego półki 3 po wyłączeniu producenta i z optymalnym progiem klasyfikacji .....	35
Tab. 32. Tabela z parametrami dla modelu logitowego półki 2 po wyłączeniu producenta .....	37
Tab. 33. Macierz pomyłek modelu logitowego półki 2 po wyłączeniu producenta .....	38
Tab. 34. Macierz pomyłek modelu logitowego półki 2 po wyłączeniu producenta i z optymalnym progiem klasyfikacji .....	38

## **Spis rysunków**

Rys. 1.	Macierz pomyłek .....	6
Rys. 2.	Wizualizacja macierzy korelacji między zmiennymi .....	11
Rys. 3.	Krzywa ROC dla modelu logitowego półki 3 .....	36
Rys. 4.	Krzywa ROC dla modelu logitowego półki 2 .....	39

## Załączniki

1. Plik notebook *Lab-2-Zadanie-3-Obliczenia.ipynb* – kompletny kod przeprowadzonych eksperymentów
2. Plik z danymi *Lab-2-Zadanie-3-Dane.zip* – pełny zestaw danych wykorzystanych w analizie.