Rozwiązywanie Równań Różniczkowych Metodą Elementów Skończonych

Michał Nożkiewicz

Styczeń 2023

1 Opis Problemu

Celem zadania było rozwiązanie następującego równania różniczkowego metodą elementów skończonych.

$$u : \langle 0, 3\rangle \to \mathbb{R}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 4\pi G\rho(x) \tag{1}$$

$$u(0) = 5$$

$$u(3) = 4$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & dla\ x \in \langle 0, 1\rangle \\ 1 & dla\ x \in (1, 2\rangle \\ 0 & dla\ x \in (2, 3\rangle \end{cases}$$

G - stała grawitacyjna, w przybliżeniu równa $6.67 \cdot 10^{-11}$.

2 Wyprowadzenie sformułowania wariacyjnego

Niech $V = H_0^1 = \{w : \langle 0, 3\rangle \to \mathbb{R} : w \in L^2(0, 3), w' \in L^2(0, 3), w(0) = w(3) = 0\}$
Równanie (1) jest spełnione jeśli dla każdego $\phi \in V$ zachodzi,

$$\int_0^3 u'' \phi \, dx = \int_0^3 4\pi G\rho\phi \, dx \, .$$

Całkując powyższe równanie przez części otrzymujemy

$$u'' \phi|_0^3 - \int_0^3 u' \phi' \, dx = \int_0^3 4\pi G\rho\phi \, dx \, .$$

Następnie korzystając z tego, że $\phi(0) = \phi(3) = 0$, a także z tego, że $\rho = 0$ dla $x \notin \langle 1, 2\rangle$ mamy,

$$-\int_0^3 u' \phi' \, dx = 4\pi G \int_1^2 \phi \, dx \, . \tag{2}$$

Jednak z podanych w zadaniu warunków Dirichleta wiadomo, że $u \notin V$. Przedstawmy zatem funkcję u jako sumę dwóch jako $u = w + \overline{u}$, niech $w \in V$. Wtedy

aby równanie spełniało warunki Dirichleta musi zachodzić warunek $\overline{u}(0) = 5$ oraz $\overline{u}(3) = 4$.
Za $\overline{u}$ możemy wziąć dowolną funkcję spełniającą ten warunek, na przykład funkcję liniową $\overline{u} = -\frac{x}{3} + 5$. Podstawiając to do równania (2) otrzymujemy,

$$-\int_0^3 (w - \frac{x}{3} + 5)^{'} \phi^{'}\, dx = 4\pi G \int_1^2 \phi\, dx\,.$$

Co po przekształceniu daje,

$$-\int_0^3 w^{'} \phi^{'}\, dx = 4\pi G \int_1^2 \phi\, dx - \frac{1}{3} \int_0^3 \phi^{'}\, dx\,.$$

Wiadomo jednak, że $\phi \in V$, więc $\int_0^3 \phi^{'}\, dx = \phi|_0^3 = \phi(3) - \phi(0) = 0$. W takim razie wariacyjne sformułowanie równania to,

$$-\int_0^3 w^{'} \phi^{'}\, dx = 4\pi G \int_1^2 \phi\, dx. \tag{3}$$

3 Dyskretyzacja przedziału

Wiadomo, że funkcje w i ϕ należą do tej samej przestrzeni V, jednak jest ona nieskończenie wymiarowa, dlatego można dokonać dyskretyzacji naszej dziedziny. Będziemy wtedy mogli się skupić na pewnej skończenie wymiarowej podprzestrzeni liniowej przestrzeni V, zapisać w jako kombinację liniową pewnych funkcji bazowych tej podprzestrzeni i wykorzystując zależność (3) uzyskać przybliżone rozwiązanie równania.
Załóżmy więc, że dzielimy przedział $\langle 0, 3\rangle$ na (n + 1) podprzedziałów o równej szerokości $h = \frac{3}{n+1}$. Kolejne przedziały opisane są wzorem $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$, gdzie $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 3$ oraz $x_i = ih$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$.
Ponadto niech $V^n = Lin\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ będzie n-wymiarową podprzestrzenią przestrzeni V. Funkcje bazowe opisane są wzorem,

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad e_i = \begin{cases} x + h - x_i & dla\ x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle \\ -x + h + x_i & dla\ x \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle \\ 0 \quad w\ p.p \end{cases} \tag{4}$$

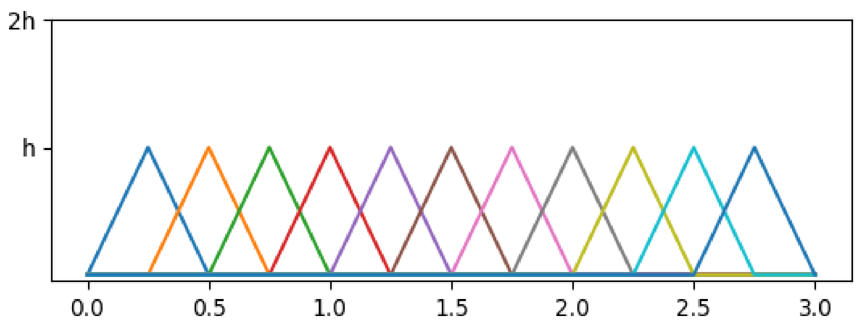

Figure 1: Wykres przykładowych funkcji bazowych

Jako wartość w której znajduje się "szpic" każdej z funkcji przyjąłem wartość h, gdyż wtedy najlepiej liczy się pochodne i całki z tych funkcji.

4 Wyprowadzenie układu równań

Korzystając z tego, że funkcje (4) generują przestrzeń V^n, można zapisać $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ dla pewnych skalarów $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathbb{R}$.
Wiemy ponadto, że równość (3) zachodzi dla dowolnej $\phi \in V$. Podstawiając za ϕ funkcje bazowe, przedstawiając w jako kombinacje liniową funkcji bazowych, a następnie korzystając z liniowości operatora całkowania i różniczkowania, po kilku przekształceniach otrzymujemy układ równań liniowych,

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_0^3 -e_i^{'} e_j^{'} \, dx = 4\pi G \int_1^2 e_j \, dx$$

Przyjmując $B_{i,j} := \int_0^3 -e_i^{'} e_j^{'} \, dx$ oraz $L_j := 4\pi G \int_1^2 e_j \, dx$ układ ten można zapisać w postaci macierzy,

$$\begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \ldots & B_{1,n} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \ldots & B_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n,1} & B_{n,2} & \ldots & B_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} \tag{5}$$

Rozwiązując taki układ znajdujemy funkcję w, a tym samym u.

5 Optymalizacja rozwiązywania układu równań

Ze względu na to, że funkcje bazowe na praktycznie całej dziedzinie się zerują dla $|i - j| > 1$ zachodzi $B_{i,j} = 0$, w pozostałych przypadkach mamy $B_{i,i+1} = B_{i,i-1} = h$, $B_{i,i} = -2h$. Wtedy układ (5) wygląda następująco

$$\begin{bmatrix} -2h & h & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ h & -2h & h & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & h & -2h & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & h & -2h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$$

Stosując schemat bazujący na algorytmie Gaussa, taki układ można obliczyć w czasie liniowym ze względu na n(ilość punktów podziałowych). Szczegóły co do implementacji znajdują się w pliku FEM_Solver.py

6 Wyniki

Jako rozwiązanie równania otrzymałem następującą krzywą.

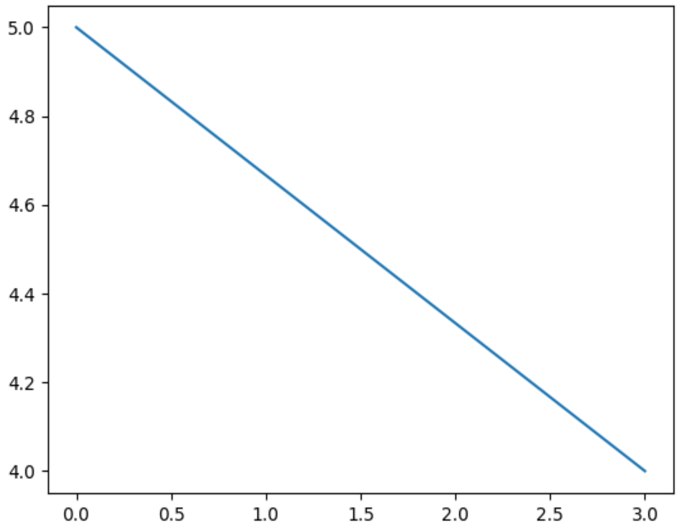

Figure 2: Wykres dla G=$6.67 \cdot 10^{-11}$ i n=10000

Ze względu na to, że stała G jest bardzo małą liczbą, wartości całek L_i są wszędzie prawie równe zero, więc także i wartości skalarów α_i są praktycznie zerowe przez co wykres nie różni się znacząco od prostej $\overline{u}$. Żeby jednak zobaczyć, że program faktycznie działa poniżej znajduje się wykres, gdy za stałą G przyjąłem wartość 0.5.

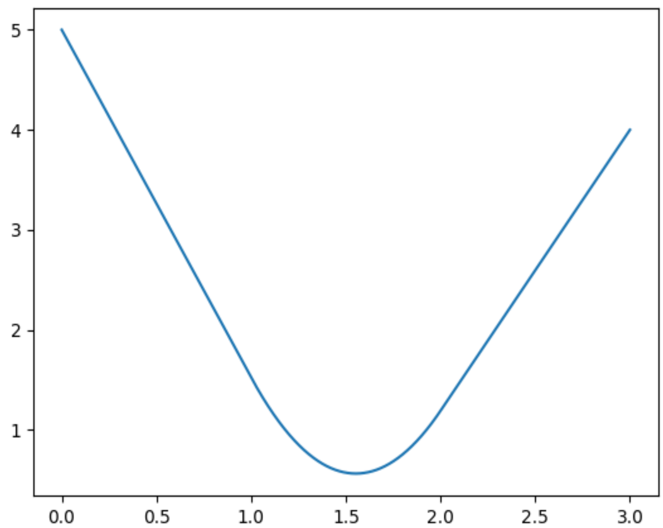

Figure 3: Wykres dla G=0.5 i n=10000

Zgodnie z oczekiwaniami wynikowa krzywa wygląda jak sklejenie dwóch funkcji liniowych z parabolą