Pierwsza część

Opracowanie **rekurencyjnych** algorytmów dla macierzy gęstych o złożoności nie większej niż $\mathcal{O}(N^3)$

- Mnożenia macierzy gęstych
- Odwracania macierzy gęstych
- LU faktoryzacji macierzy gęstych (eliminacji Gaussa)
- Obliczania wyznacznika macierzy gęstych

Pierwszy zestaw zadań (dla par 2 osobowych)

Proszę wybrać ulubiony język programowania, wygenerować macierze losowe o wartościach z przedziału otwartego $(0.00000001, 1.0)$ i zaimplementować wybrane algorytmy.

1. Rekurencyjne mnożenie macierzy metodą Binét'a (10 punktów)
2. Rekurencyjne mnożenie macierzy metodą Strassena (10 punktów)
3. Mnożenie macierzy metodą znalezioną przez sztuczną inteligencję (10 punktów)

Proszę zliczać liczbę operacji zmienno-przecinkowych (+-*/ _liczb_) wykonywanych podczas mnożenia macierzy.

Drugi zestaw zadań (dla par 2 osobowych)

Proszę wybrać ulubiony język programowania, wygenerować macierze losowe o wartościach z przedziału otwartego $(0.00000001, 1.0)$ i zaimplementować wybrane algorytmy.

1. Rekurencyjne odwracanie macierzy (10 punktów)
2. Rekurencyjna LU faktoryzacja (10 punktów)
3. Rekurencyjne obliczanie wyznacznika (10 punktów)

Proszę zliczać liczbę operacji zmienno-przecinkowych (+-*/ _liczb_) wykonywanych podczas mnożenia macierzy.

Raporty (dla par 2 osobowych)

Proszę przygotować następujący raport

- Proszę w raporcie opisać pseudo-kod swojego rekurencyjnego algorytmu
- Proszę w raporcie umieścić wybrane najbardziej istotne fragmenty kodu
- Proszę narysować wykres: oś pozioma rozmiar macierzy $2^k \times 2^k$ dla $k = 2, 3, 4, ..., 16$ (ile się uda), oś pionowa czas działania swoją metodą rekurencyjną.
- Proszę narysować wykres: oś pozioma rozmiar macierzy $2^k \times 2^k$ dla k=2,3,4,...,16 (ile się uda), oś pionowa liczba operacji zmienno-przecinkowych swoją metodą rekurencyjną.
- Proszę dokonać próby oszacowania złożoności obliczeniowej (eksperymentalnie lub teoretycznie)
- Dla wybranej małej macierzy proszę przeliczyć przykład w Octave lub MATLAB i porównać wynik oraz zamieścić raport z porównania

Rekurencyjne mnożenie macierzy

$$\text{Klasyczny (Binét):} \begin{bmatrix} (A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}) & (A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}) \\ (A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}) & (A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}) \end{bmatrix}$$

Każde mnożenie np. $A_{11} * B_{11}$ to rekurencyjne mnożenie bloków.
Koszt: 8 mnożeń ($\mathcal{O}((n/2)^3)$), 4 dodawania ($\mathcal{O}((n/2)^2)$)

$$\text{Strassen:} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (P_1 + P_4 - P_5 + P_7) & (P_3 + P_5) \\ (P_2 + P_4) & (P_1 - P_2 + P_3 + P_6) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$P_1 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}) \quad P_2 = (A_{21} + A_{22})B_{11}$$

$$P_3 = A_{11}(B_{12} - B_{22}) P_4 = A_{22}(B_{21} - B_{11}) \quad P_5 = (A_{11} + A_{12})B_{22}$$

$$P_6 = (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}) \quad P_7 = (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22})$$

Każde mnożenie to rekurencyjne mnożenie i dodawanie wynikowych bloków. Koszt: 7 mnożeń ($\mathcal{O}((n/2)^3)$), 18 dodawań ($\mathcal{O}((n/2)^2)$)

Blokowa eliminacja Gaussa

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

gdzie $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ to podmacierze, x_1, x_2 to wektory niewiadomych, b_1, b_2 to wektory prawych stron

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1$$
$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2$$

$$A_{11} = L_{11}U_{11}$$

$$L_{11}^{-1} * \{ \quad L_{11}U_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1 \quad \}$$
$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2$$

$$L_{11}^{-1}L_{11}U_{11}x_1 + L_{11}^{-1}A_{12}x_2 = L_{11}^{-1}b_1$$
$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2$$

Blokowa eliminacja Gaussa

$$\begin{aligned} L_{11}^{-1} L_{11} U_{11} x_1 + L_{11}^{-1} A_{12} x_2 &= L_{11}^{-1} b_1 \\ A_{21} x_1 + A_{22} x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{11} x_1 + L_{11}^{-1} A_{12} x_2 &= L_{11}^{-1} b_1 \\ A_{21} x_1 + A_{22} x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

$2^{nd} = 2^{nd} - A_{21} U_{11}^{-1} 1^{st}$ ponieważ $\left(A_{21} - A_{21} U_{11}^{-1} U_{11} \right) x_1 = 0$, czyli

$$\begin{aligned} U_{11} x_1 + L_{11}^{-1} A_{12} x_2 &= L_{11}^{-1} b_1 \\ 0 + \left(A_{22} - A_{21} U_{11}^{-1} L_{11}^{-1} A_{12} \right) x_2 &= b_2 - A_{21} U_{11}^{-1} L_{11}^{-1} b_1 \end{aligned}$$

Dopełnienie Schura $\left(A_{22} - A_{21} U_{11}^{-1} L_{11}^{-1} A_{12} \right)$

Rekurencyjne odwracanie macierzy

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{1}$$

1. Zawołanie rekurencyjne $A_{11}^{-1} = \mathit{inverse}(A_{11})$
2. Pierwszy wiersz $= A_{11}^{-1}$*pierwszy wiersz (rekurencyjne mnożenie macierzy)

$$\begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1} * A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{2}$$

3. Drugi wiersz = drugi wiersz - A_{21} * pierwszy wiersz (rekurencyjne mnożenie i odejmowanie macierzy)

$$\begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1} * A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21} * A_{11}^{-1} * A_{12} (= S_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ -A21 * A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \tag{3}$$

(oznaczamy $S_{22} = A_{22} - A_{21} * A_{11}^{-1} * A_{12}$)

Rekurencyjne odwracanie macierzy

$$\begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1} * A_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ -A_{21} * A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \tag{4}$$

4. Zawołanie rekurencyjne $S_{22}^{-1} = inverse(S_{22})$
5. Drugi wiersz $= S_{22}^{-1}$*drugi wiersz (rekurencyjne mnożenie macierzy)

$$\begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1} * A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ -S_{22}^{-1} * A_{21} * A_{11}^{-1} & S_{22}^{-1} \end{bmatrix} \tag{5}$$

6. Pierwszy wiersz = pierwszy wiersz - $A_{11}^{-1} A_{12}$*drugi wiersz (rekurencyjne mnożenie macierzy)

$$\text{(Macierz odwrotna } A_{11}^{-1}\text{)} \qquad \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} S_{22}^{-1} * A_{21} * A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} * A_{12} * S_{22}^{-1} \\ -S_{22}^{-1} * A21 * A_{11}^{-1} & S_{22}^{-1} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Rekurencyjne odwracanie macierzy

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \tag{7}$$

`inverse(A)`

- Zawołanie rekurencyjne $A_{11}^{-1} = inverse(A_{11})$
- Obliczenie $S_{22} = A_{22} - A_{21} * A_{11}^{-1} * A_{12}$ (rekurencyjne mnożenie macierzy)
- Zawołanie rekurencyjne $S_{22}^{-1} = inverse(S_{22})$
- Obliczenie $B_{11} = A_{11}^{-1}(I + A_{12}S_{22}^{-1} * A_{21} * A_{11}^{-1})$ (rekurencyjne mnożenie i odejmowanie macierzy)
- Obliczenie $B_{12} = -A_{11}^{-1} * A_{12}^{-1} * S_{22}^{-1}$ (rekurencyjne mnożenie i odejmowanie macierzy)
- Obliczenie $B_{21} = -S_{22}^{-1} * A_{21} * A_{11}^{-1}$ (rekurencyjne mnożenie i odejmowanie macierzy)
- Obliczenie $B_{22} = S_{22}^{-1}$

Rekurencyjna LU faktoryzacja

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad LU = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$A_{11} = L_{11} U_{11}$. Mnożymy pierwszy wiersz z lewej strony przez L_{11}^{-1}

$$\begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & L_{11}^{-1} A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Odejmujemy od drugiego wiersza pierwszy wiersz przemnożony przez $A_{21} U_{11}^{-1}$

$$\begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ A_{21} U_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & L_{11}^{-1} A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21} U_{11}^{-1} L_{11}^{-1} A_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ A_{21} U_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & L_{11}^{-1} A_{12} \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

Obliczamy $S = L_s U_s$

$$LU = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ A_{21} U_{11}^{-1} & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & L_{11}^{-1} A_{12} \\ 0 & U_s \end{bmatrix}$$

Rekurencyjna LU faktoryzacja

$$LU = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ A_{21}U_{11}^{-1} & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & L_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & U_s \end{bmatrix}$$

$$[L, U] = LU(A) = LU\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\right)$$

- Oblicz rekurencyjnie $[L_{11}, U_{11}] = LU(A_{11})$
- Oblicz rekurencyjne $U_{11}^{-1} = inverse(U_{11})$
- Oblicz $L_{21} = A_{21}U_{11}^{-1}$
- Oblicz rekurencyjne $L_{11}^{-1} = inverse(L_{11})$
- Oblicz $U_{12} = L_{11}^{-1}A_{12}$
- Oblicz $L_{22} = S = A_{22} - A_{21}U_{11}^{-1}L_{11}^{-1}A_{12}$
- Oblicz rekurencyjne $[L_s, U_s] = LU(S)$
- $U_{22} = U_s$
- $L_{22} = L_s$

Wyznacznik macierzy

$$det(A) = l_{11} * \cdots l_{nn} * u_{11} * \cdots * u_{nn} = (l_{ii} == 1) = u_{11} * \cdots * u_{nn}$$

gdzie l_{ii} to przekątna L
u_{ii} to przekątna U