Sprawozdanie z listy 4

Michał Gancarczyk 244923

Streszczenie

Celem zamieszczonych w liście zadań jest zaimplementowanie zestawu funkcji pozwalających na obliczenie przybliżenia funkcji metodą interpolacji, a następnie zweryfikowanie poprawności działania użytych metod w sposób eksperymentalny.

Pierwsze cztery sekcje poświęcone są przedstawieniu idei, oraz (tam gdzie uznano to za istotne) implementacji utworzonych funkcji. Pozostałe dwie sekcje przedstawiają tabularyczne, oraz graficzne rezultaty wykonanych eksperymentów, oraz zformułowane na ich podstawie wnioski.

Do rozwiązania zadań użyty został język Julia, wersja 1.2.0.

1 Ilorazy Różnicowe

W celu wyznaczenia ilorazu różnicowego funkcji k-tego rzędu można posłużyć się następującymi wzorami.

Dla $k = 0$:

$$f[x_i] = f(x_i)$$

Dla $k > 0$:

$$f[x_l, x_{l+1}, ..., x_{l+k}] = \frac{f[x_{l+1}, x_{l+2}, ..., x_{l+k}] - f[x_l, x_{l+1}, ..., x_{l+k-1}]}{x_{l+k} - x_l}$$

Wykorzystując znajomość węzłów x_i, wartości funkcji f w tych węzłach oraz powyższy wzór rekurencyjny możliwe jest zbudowanie tablicy ilorazów różnicowych.

$$\begin{array}{lllll}
x_0 & f(x_0) & & & \\
x_1 & f(x_1) & f[x_0, x_1] & & \\
x_2 & f(x_2) & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & \\
... & ... & ... & ... & ... \\
x_n & f(x_n) & f[x_{n-1}, x_n] & ... & f[x_0, ..., x_n]
\end{array}$$

Naiwna implementacja algorymu mogłaby założyć, że ponieważ szukane współczynniki znajdują się na przekątnej powyższej macierzy, to do ich wyznaczenia konieczne jest utworzenie i praca na dwuwymiarowej tablicy. Pomimo poprawności powyższe rozwiązanie obarczone jest niesatysfakcjonującą złożonością pamięciową, dlatego ostateczna wersja zadanej funkcji wprowadza w tym zakresie pewne optymalizacje.

Analizując otrzymaną tablicę współczynników można poczynić dwie obserwacje: Wyznaczenie wartości funkcji rekurencyjnej dla n.p. $f[x_0, x_1, x_2]$ można uprościć opierając się na dotychczasowo już wyznaczonej wartości $f[x_0, x_1]$. Dodatkowo wielkość kolejnych kolumn stale maleje o jeden rząd.

W oparciu o te fakty możliwe jest zaprojektowanie efektywniejszego algorytmu, który pracować będzie na jednowymiarowej tablicy o długości równej ilości wierszy. Początkowo tablica wypełniona zostaje wartościami funkcji w punktach $x_0, ..., x_n$, a w kolejnych krokach iteracyjnych wartości w tablicy zastąpione zostaną kolejnymi rozwiązaniami rekurencyjnymi. Ze względu na malejącą liczbę kolumn obliczone wcześniej współczynniki ilorazowe nie zostaną nadpisane w kolejnych krokach. Ostatecznie tablica zawierać będzie poszczególne wartości z przekątnej macierzy, co stanowi oczekiwany wynik algorytmu.

Algorytm 1: Ilorazy różnicowe

function `ilorazyRoznicowe` $(x,\ f)$
Dane : Punkty w wektorze x, wartości funkcji w punktach jako wektor f
Wynik: Wektor zawierający obliczone ilorazy różnicowe
$n \leftarrow length(x)$
$fx \leftarrow f$
for $i \leftarrow 2$ **to** n **do**
  for $j \leftarrow n$ **downto** i **do**
    $fx[j] \leftarrow \frac{fx[j]-fx[j-1]}{x[j]-x[j-(i-1)]}$
  end
end
return fx

2 Wielomian Interpolacyjny w Postaci Newtona

Wielomian interpolacyjny Newtona wyznaczyć można używając ilorazów różnicowych funkcji f, co zadane jest poniższym wzorem.

$$N_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, x_1, ..., x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Funkcja obliczająca wartość wielomianu o stopniu n, w postaci Newtona zaimplementowana jest w oparciu o uogólniony algorytm Hornera.

$$\begin{aligned} &w_n(x) = f[x_0, x_1, ..., x_n] \\ &w_k(x) = w_{k+1}(x - x_k) + f[x_0, x_1, ..., x_k] \text{ dla } k = n-1, n-2, ..., 0 \\ &N_n(x) = w_0(x) \end{aligned}$$

Jak można wywnioskować z powyższych wzorów zaletą użytego algorytmu jest jego liniowa złożoność obliczeniowa. Ponieważ ilorazy różnicowe zadane są jako parametr funkcji, jedyną zmianą, która odróżnia zaprezentowaną poniżej implementację od opisu teoretycznego jest trywialne przekształcenie rekursji w proces iteracyjny.

Algorytm 2: Postać Newtona

function `warNewton` $(x,\ fx,\ t)$
Dane : Węzły w wektorze x, wektor fx zawierający ilorazy różnicowe, punkt t w którym należy obliczyć wartość wielomianu
Wynik: Wartość wielomianu w punkcie t
$n \leftarrow length(x)$
$nt \leftarrow fx[n]$
for $j \leftarrow n-1$ **downto** 1 **do**
  $nt \leftarrow nt \cdot (t - x[i]) + fx[i]$
end
return nt

3 Postać naturalna współczynników wielomianu

Współczynniki wielomianu postaci naturalnej można wyznaczyć na podstawie ilorazów różnicowych funkcji f, oraz podanej poniżej zależności rekurencyjnej.

$$\begin{aligned} &a_n^{(i)} = f[x_0, x_1, ..., x_n] \\ &a_i^{(i)} = f[x_0, x_1, ..., x_i] - a_{i+1}^{i+1} x_i \\ &a_k^{(i)} = a_k^{(i+1)} - a_{k+1}^{(i+1)} x_i \text{ dla } k = i+1, i+2, ..., n \end{aligned}$$

Gdzie i określane jest na podstawie kolejny współczynników wielomianów w_i w postaci Newtona.

Struktura realizującego zadanie algorytmu oparta jest na użytej w poprzednim zadaniu metodzie Hornera. Ponadto wykorzystany jest fakt, że w wielomianie interpolacyjnym stopnia i współczynnik przy najwyższej potędze x jest równy ilorazowi różnicowemu $f[x_0, x_{1,...,x_i}]$. Algorytm, którego reprezentacja w formie pseudokodu przedstawiona została poniżej, operuje na dwóch zagnieżdżonych pętlach. Zewnętrzna pętla wyznacza kolejne współczynniki w_i, a na ich podstawie współczynniki w postaci naturalnej obliczane są w pętli wewnętrznej.

Algorytm 3: Postać naturalna

function `naturalna` (x, fx)
Dane : Węzły w wektorze x, wektor fx zawierający ilorazy różnicowe
Wynik: Wektor zawierający obliczone współczynniki postaci naturalnej
$n \leftarrow length(x)$
$a[n] \leftarrow fx[n]$
for $i \leftarrow n-1$ **downto** 1 **do**
    $a[i] \leftarrow fx[i]$
    for $j \leftarrow i$ **to** $n-1$ **do**
        $a[j] \leftarrow a[j] - x[i] \cdot a[j+1]$
    end
end
return a

4 Graficzna reprezentacja interpolowanej funkcji

Zadana funkcja `rysujNnfx` pozwala porównać wykres funkcji $f(x)$ z wykresem jej przybliżenia uzyskanego poprzez interpolację. Pierwszym etapem działania funkcji jest wyznaczenie za pośrednictwem funkcji `ilorazyRoznicowe` ilorazów różnicowych w równolegle rozmieszchonych na przedziale $[a, b]$ punktach $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$.

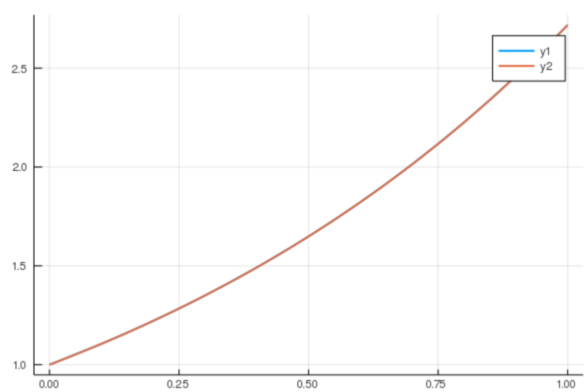
Po wyliczeniu ilorazów różnicowych każdy z przeziałów między kolejnymi węzłami jest dzielony na mniejsze przedziały w celu zwiększenia dokładności wykresów. Uzyskane w ten sposób węzły o zwiększonej gęstości służą do określenia faktycznej wartości $f(x)$ i wartości przybliżonej przez wywołanie funkcji `warNewton`.

Ostatnim etapem działania funkcji jest utworzenie przy użyciu modułu "Plots" wykresu, na którym zestawione są faktyczne i przybliżone wyniki. Wykres jest zwracany jako wynik funkcji.

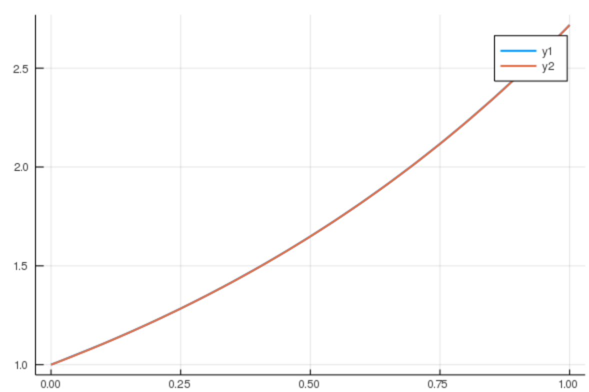
5 Zadanie 5

5.1 $f(x) = e^x$

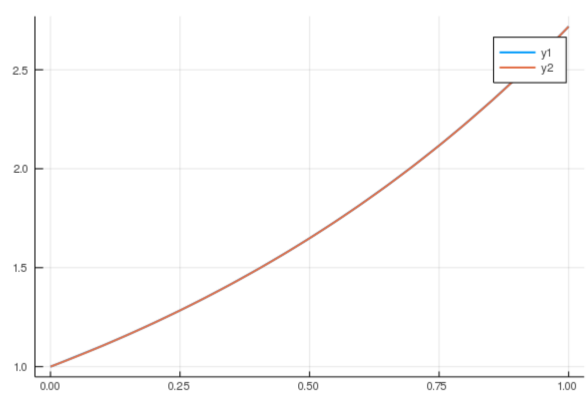
n	x	Poprawna wartość	Wynik interpolacji
5	1	1.0	1.0
5	2	1.0084387686962453	1.0084393987787779
5	3	1.0169487502095993	1.0169498917155255
5	4	1.025530545488554	1.0255320918997144
5	5	1.034184760552866	1.0341866167329836
10	1	1.0	1.0
10	2	1.0045766510686718	1.0045766510686143
10	3	1.0091742478723478	1.0091742478722479
10	4	1.0137928862723486	1.0137928862722185
10	5	1.0184326625687188	1.018432662568569
15	1	1.0	1.0
15	2	1.0031397148502448	1.0031397148502421
15	3	1.0062892875098304	1.0062892875098257
15	4	1.009448748929467	1.0094487489294612
15	5	1.0126181301570418	1.0126181301570352



Rys. 1. $n = 5$



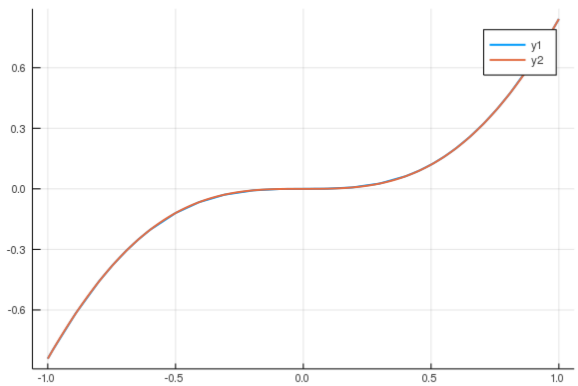
Rys. 2. $n = 10$



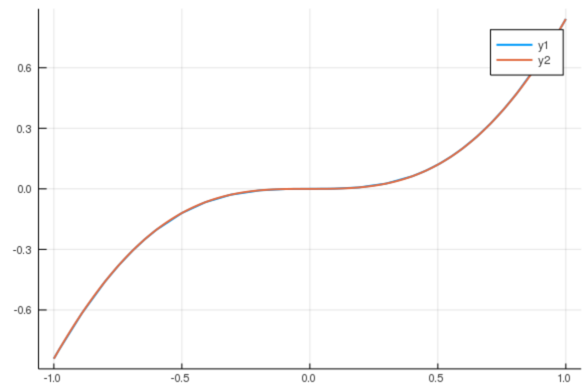
Rys. 3. $n = 15$

5.2 $f(x) = x^2 sin(x)$

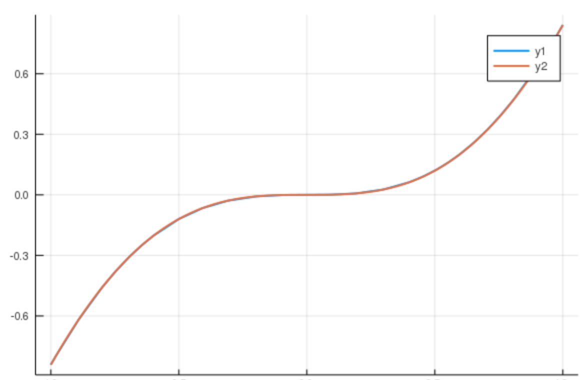
n	x	Poprawna wartość	Wynik interpolacji
5	1	-0.8414709848078965	-0.8414709848078965
5	2	-0.8045314243496378	-0.8046764915487854
5	3	-0.7684505309088818	-0.7687087627277471
5	4	-0.7332378264831678	-0.7335814466847554
5	5	-0.6989017561399393	-0.6993067548081255
10	1	-0.8414709848078965	-0.8414709848078965
10	2	-0.8212928915689129	-0.8212928995030457
10	3	-0.8013669579289938	-0.8013669717419987
10	4	-0.7816948302157045	-0.781694848183999
10	5	-0.7622780605812569	-0.7622780812733005
15	1	-0.8414709848078965	-0.8414709848078965
15	2	-0.8275912591256823	-0.8275912591256821
15	3	-0.8138301284132472	-0.8138301284132468
15	4	-0.800188139705052	-0.8001881397050514
15	5	-0.7866658190951533	-0.7866658190951528



Rys. 4. $n = 5$



Rys. 5. $n = 10$



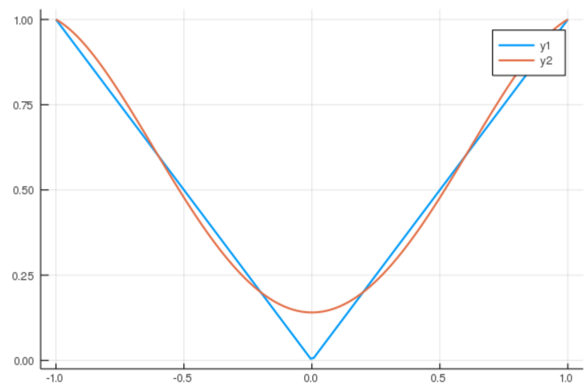
Rys. 6. $n = 15$

Analiza zamieszczonych powyżej wykresów pozwala stwierdzić, że zarówno dla $f(x) = e^x$, jak i dla $f(x) = x^2 sin(x)$ otrzymane wielomiany interpolacyjne są na zadanych przedziałach bliskie faktycznym wartościom funkcji.

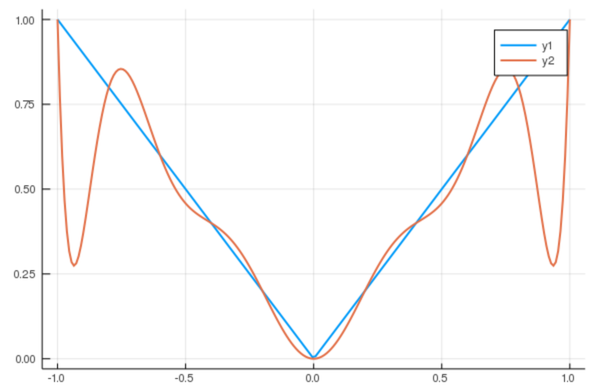
Dokładność przybliżenia nie pozwala na oszacowanie różnicy patrząc jedynie na zestawienia wykresów, jednak zamieszczone w tabeli częściowe wyniki przybliżeń pokazują, że dla $n = 5$ zmiany w wartościach istnieją dopiero w okolicach piątego miejsca po przecinku. Dla wyższych stopni wielomianu przybliżenia osiągają jeszcze większe dokładności.

Wykonany eksperyment ukazuje, że użyte do określenia przybliżeń metody, wraz z zastosowaniem równoodległych węzłów w wielomianie interpolacyjnym, przyniosły dla podanych funkcji akceptowalnie dokładne wyniki.

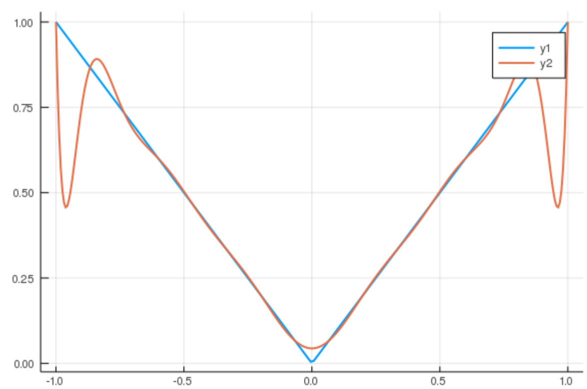
6 Zadanie 6



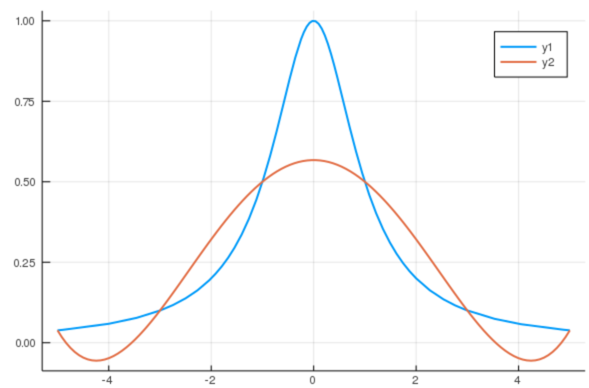
Rys. 7. $f(x) = |x|$, $n = 5$



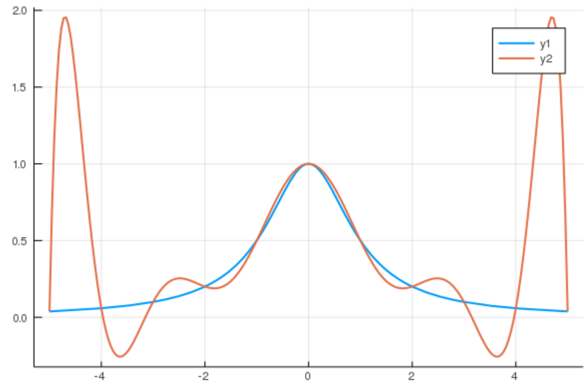
Rys. 8. $f(x) = |x|$, $n = 10$



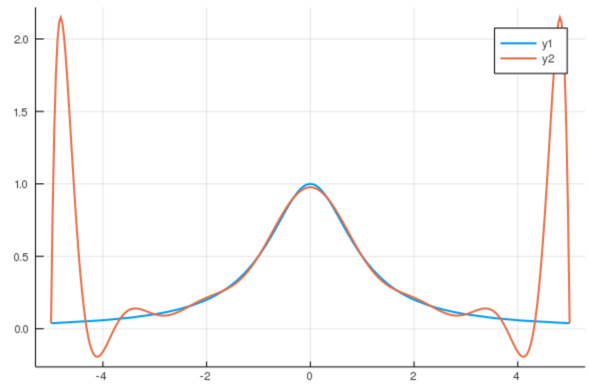
Rys. 9. $f(x) = |x|$, $n = 15$



Rys. 10. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $n = 5$



Rys. 11. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $n = 10$



Rys. 12. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $n = 15$

W odróżnieniu od poprzedniego zadania wyniki przybliżeń obu funkcji obarczone są widocznymi błędami. Dla większości powyższych wykresów wyraźne rozbieżności są szczególnie widoczne na krańcach przedziałów.

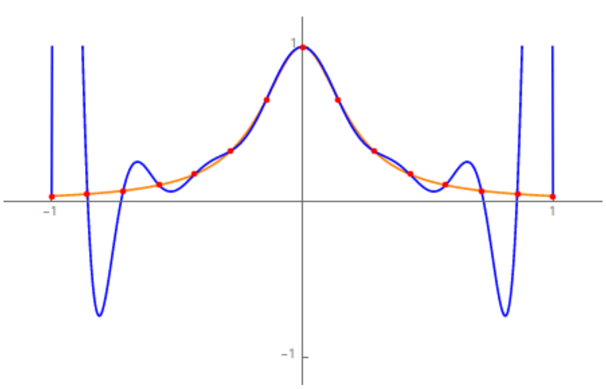
Powodem wystąpienia anomalii w przypadku funkcji $f(x) = |x|$ jest to, że funkcja ta nie jest różniczkowalna, co uniemożliwia precyzyjne przybliżenie za pośrednictwem użytej metody.

W przypadku funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ nieprecyzyjność wynika z wystąpienia efektu Rungego, czyli pogorszenia jakości wielomianu pomimo zwiększania liczby wezłów. Efekt obrazują wykresy przybliżeń funkcji dla coraz większych wartości n - jakość przybliżenia środkowej części wykresu rośnie, jednak nieustannie zauważalne są nieprawidłowości na jego krańcach, gdzie zauważalne są silne oscylacje.

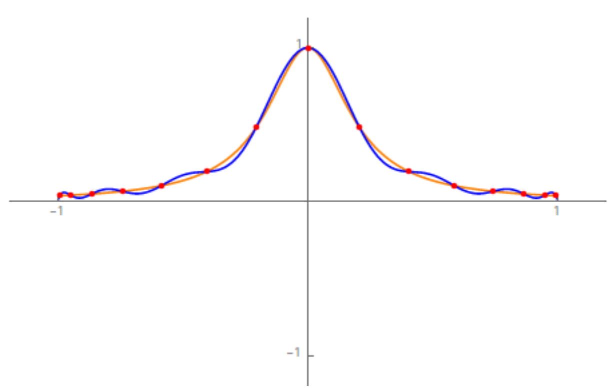
Napotkany problem jest niepożądanym skutkiem działania zastosowanego do przybliżeń algorytmu, przyjęto w nim bowiem równe odległości pomiędzy kolejnymi węzłami wielomianu interpolacyjnego.

Aby uzyskać lepsze przybliżenie funkcji takich jak $f(x)$ należy zmienić sposób pozycjonowania węzłów w wielomianie - w miarę zbliżania się do krańców przedziału węzły powinny zostać rozmieszczone coraz gęściej, co w efekcie pozwoli zredukować niepożądane w aproksymacji oscylacje. Rezultat ten można osiągnąć dzięki zastosowaniu wielomianu Czebyszewa, którego węzły rozmieszczone są w opisany powyżej sposób.

Poniższe ilustracje ukazują różnicę między przybliżeniem o równoodległych węzłach, oraz przybliżeniem wykorzystującym węzły Czebyszewa dla wykresu $\frac{1}{1+25x^2}$. Podobnej poprawy jakości można spodziewać się również dla użytej w zadaniu $f(x)$.



Rys. 13. węzły równoodległe



Rys. 14. węzły Czebyszewa

Źródło: demonstrations.wolfram.com/RungesPhenomenon, $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$, $n = 15$