Wyznaczanie części wspólnej wielościanów wypukłych w 3D

Michał Mrowczyk[1]

[1]Wydział Informatyki, Elektroniki i Telekomunikacji
AGH w Krakowie

Geometria obliczeniowa, 2013

Spis treści

Wypukłość

Uwaga: Ograniczam się to do rozważań na temat wielościanów w przestrzenii $\mathbb{R}^3$, choć nic nie stoi na przeszkodzie, aby wyobrazić sobie uogólnienie dla dowolnego wymiaru.

Wielościany wypukłe to pewne szczególne zbiory punktów w $\mathbb{R}^3$

Wypukłość - zbiór nazywamy wypukłym, jeśli dla dowolnych dwóch punktów z tego zbioru, odcinek je łączący
również należy do tego zbioru.

Dualizm reprezentacji wielościanów wypukłych

- Zbiór punktów w $\mathbb{R}^3$ (z wyjątkiem przypadków zdegenerowanych) jednoznacznie definuje nam pewnien wielościan wypukły. Możemy go obliczyć licząc *otoczkę wypukłą* tychże punktów. Otoczka wypukła da nam zbiór ścian (trójkątów) wielościanu.
- Część wspólna półprzestrzenii odciętych przez płaszczyzny w $\mathbb{R}^3$ również definiuje wielościan (czasami nieograniczony...).

Przykład: $$\begin{cases} 2x+3y+z \le 3 \\ x+4y+2z \le 5 \\ -x-3y+4z \le 7 \\ 3x+5y+7z \le 11 \end{cases}$$

Część wspólna

Definition

Część wspólna

- A, B - wielościany wypukłe w $\mathbb{R}^3$
- $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

Zauważmy, że część wspólna dwóch wielościanów wypukłych może być jednym z poniższych obiektów:

1. Zbiorem pustym $\emptyset$ (jeśli wielościany się nie przecinają)
2. Zbiorem jednoelementowym (zawierającym jeden punkt wspólny wielościanów)
3. Wielościanem *wypukłym*

Konstrukcja przecięcia vs wykrywanie kolizji

W obu problemach zadane są dwa wielościany (np. w postaci tablicy wierzchołków oraz ścian posiadających listę referencji na należące do nich wierzchołki).

Wykrywanie kolizji

- Czy wielościany się przecinają ?
- Przykładowe rozwiązanie: algorytm Gilbert'a–Johnson'a–Keerthi'ego
- Zastosowanie: grafika komputerowa, projektowanie wnętrz

Ogólniejszy problem:

Konstrukcja części wspólnej

- Znaleźć część wspólną lub stwierdzić, że jest ona pusta.
- Przykładowe rozwiązanie: algorytm Muller'a-Preparata'y (omówiony w dalszej części)

Konstrukcja przecięcia vs wykrywanie kolizji

W obu problemach zadane są dwa wielościany (np. w postaci tablicy wierzchołków oraz ścian posiadających listę referencji na należące do nich wierzchołki).

Wykrywanie kolizji

- Czy wielościany się przecinają ?
- Przykładowe rozwiązanie: algorytm Gilbert'a–Johnson'a–Keerthi'ego
- Zastosowanie: grafika komputerowa, projektowanie wnętrz

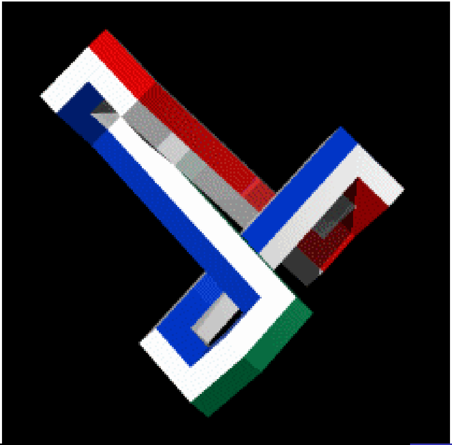
Ogólniejszy problem:

Konstrukcja części wspólnej

- Znaleźć część wspólną lub stwierdzić, że jest ona pusta.
- Przykładowe rozwiązanie: algorytm Muller'a-Preparata'y (omówiony w dalszej części)

Generalizacja na wielościany nie wypukłe ?

- Część wspólna może być np. sumą wielościanów wypukłych.
- Część wspólna może w ogóle nie być *wielościanem zwykłym* (dla którego istnieje ciągłe przekształcenie w kulę).



Historia-prehistoria

Przedstawiam pokrótce historię algorytmów znajdowania przecięcia wielościanów wypukłych:

1. prehistoria:
    - algorytm trywialny
    - "testuj parami kolejne ściany z obu wielościanów, oblicz przecięcia tych ścian, skonstruuj otoczkę wypukłą na znalezionych punktach przecięć"
    - problem - a co jeśli jeden wielościan zawiera ściśle drugi ?
    - złożoność: $O(n^2)$

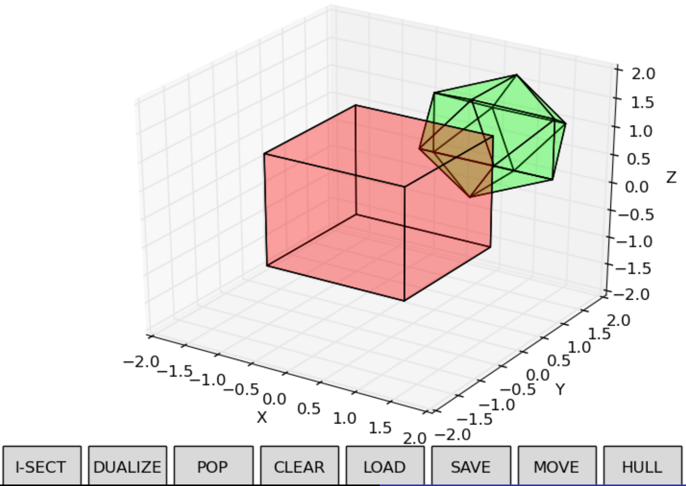
Historia-czasy średnie

- 1978r:
  - D. E. MULLER AND F. P. PREPARATA
  - działanie opisane dalej - oparte na ciekawej konstrukcji matematycznej
  - złożoność: $O(nlog(n))$
- 1984r:
  - HERTEL
  - algorytm oparty o zamiatanie przestrzenii
  - złożoność: $O(nlog(n))$

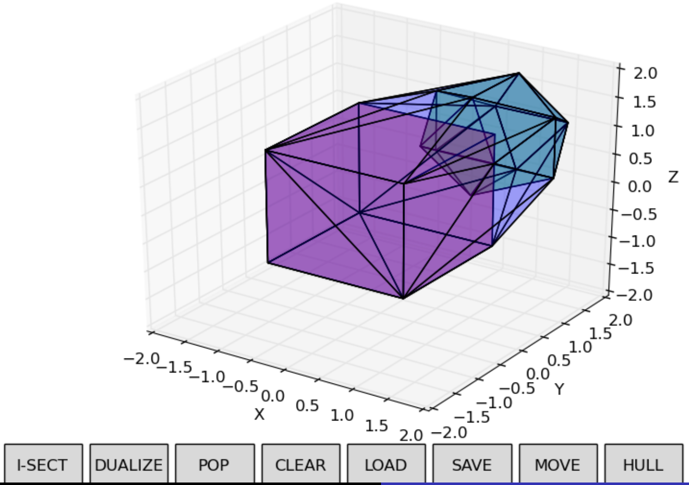
Historia-"state of the art"

- 1992r:
  - BERNARD CHAZELLE
  - zakłada dodatkowe informacje poza współrzędnymi wierzchołków (topologia ścian)
  - karkołomny w praktycznej implementacji
  - złożoność: $O(nlog(k))$, gdzie k oznacza ilość wielościanów

Dwa wielościany



Otoczka wypukła wszystkich wierzchołków z wielościanów



Otoczka wypukła - krótkie info

- w programie używam binding'ów do implementacji otoczki z biblioteki *qhull* , która oblicza otoczkę wypukłą za pomocą algorytmu *Quick Hull*
- można zastosować także inne algorytmy (np. wersja z owijaniem prezentu w 3D)
- złożoność: $O(nlog(n))$

Dualizacja - wstęp

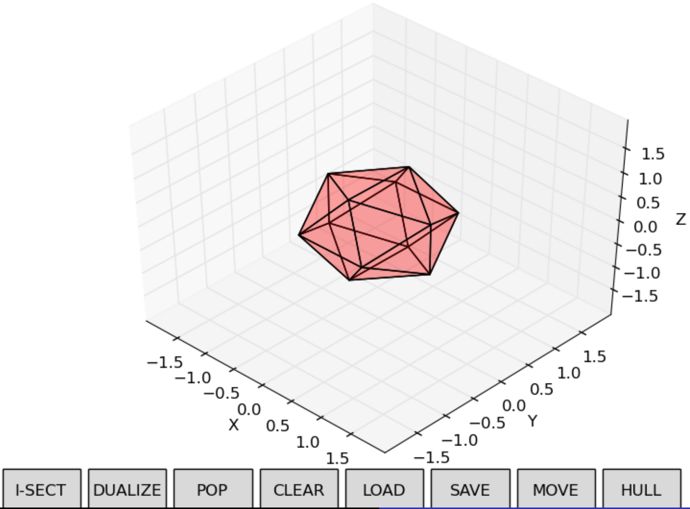
- W sensie geometrii projektywnej.
- Idea: Mamy punkty, będące wierzchołkami wielościanu oraz ściany tego wielościanu zawarte w pewnych płaszczyznach w $\mathbb{R}^3$ Każdej płaszczyźnie w odległości l od środka układu współrzędnych odpowiada punkt w odległości $\frac{1}{l}$ od środka układu i *vice versa.* Taka wzajemna bijekcja między punktami i płaszczyznami nazywa się dualizacją.

Dualizacja - przykład

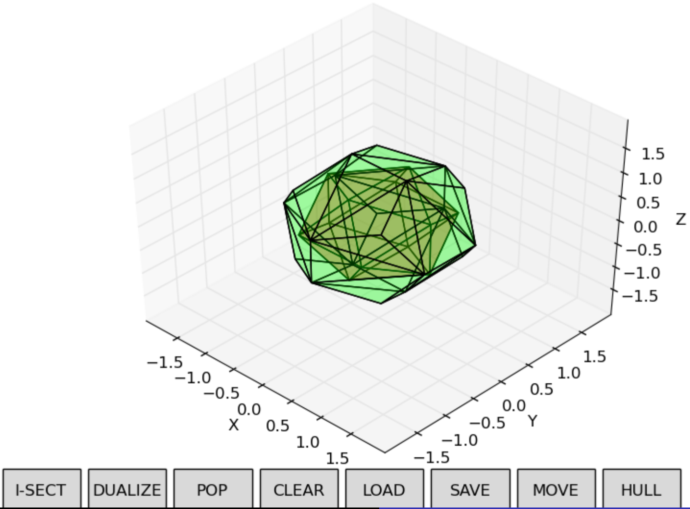
Przykład obliczania dualizacji

- Dana ściana w płaszczyźnie: $2x + 3y + 4z \geq -2$
- Normalizujemy tą nierówność dzieląc przez 2 : $1x + 1.5y + 2z \geq -1$
- Uzyskujemy punkt odczytując współrzędne: $P = (1, 1.5, 2)$
- Jest to punkt "dualny" dla ściany leżącej w zadanej płaszczyźnie.

Dwunastościan



... i dualny dwudziestościan



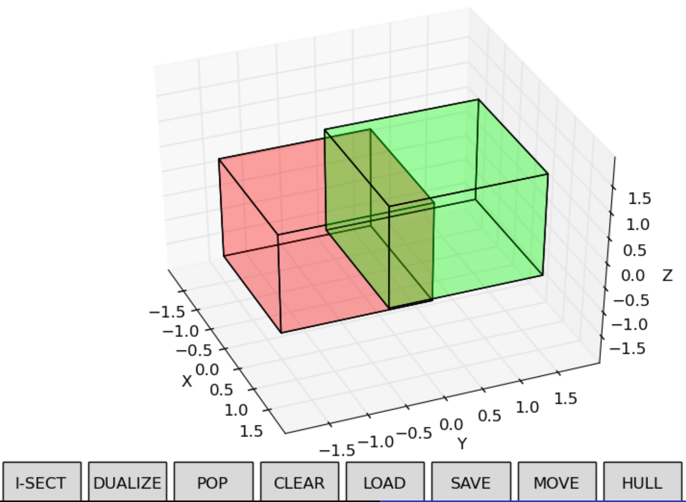
Dualizacja - uwagi

- Opisana pokrótce dualizacja może być (obliczeniowo) wykonana dla danego wielościanu tylko jeśli punkt $(0,0,0)$ należy do *wnętrza* tego wielościanu. W przeciwnym wypadku otrzymamy tzw. punkty w nieskończoności.
- Ta dualizacja (w sensie geometrii projektywnej) da inny efekt jeśli np. przesuniemy wielościan o jakiś wektor w $\mathbb{R}^3$
- Jest związana, ale różni się o dualności zdefiniowanej dla wielościanów (np. problem dualności dla brył platońskich)

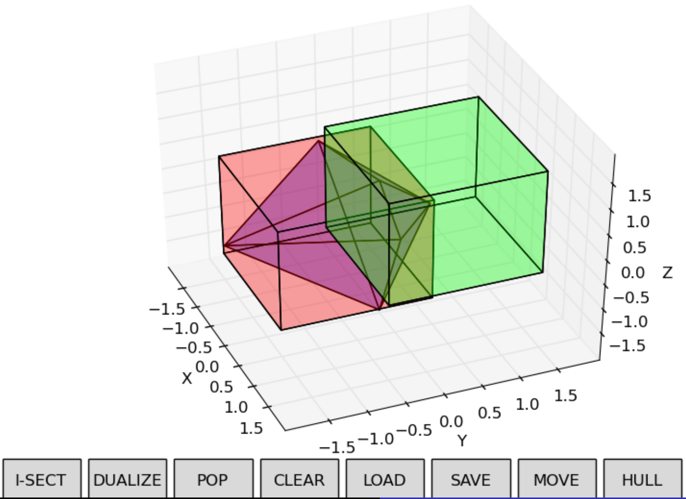
Wstęp

Jeśli mamy dany punkt należący do wnętrza dwóch wielościanów, to korzystając z *dualizacji* oraz *otoczki wypukłej* możemy wyznaczyć część wspólną dwóch wielościanów !
Na kolejnych sklajdach przykładowa konstrukcja części wspólnej dla dwóch sześcianów...

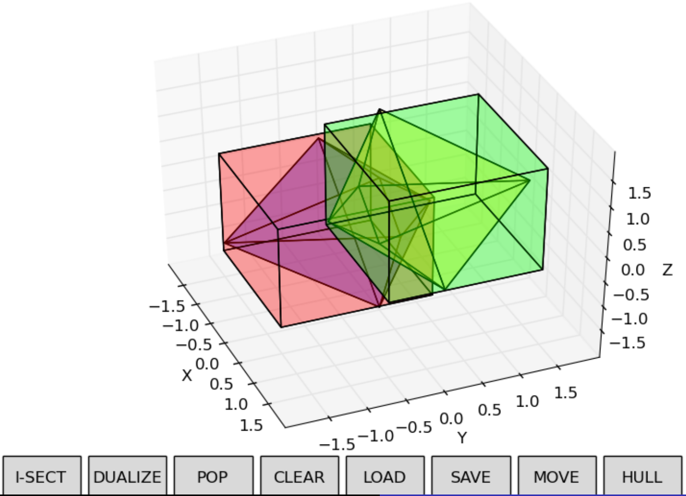
Dwa sześciany



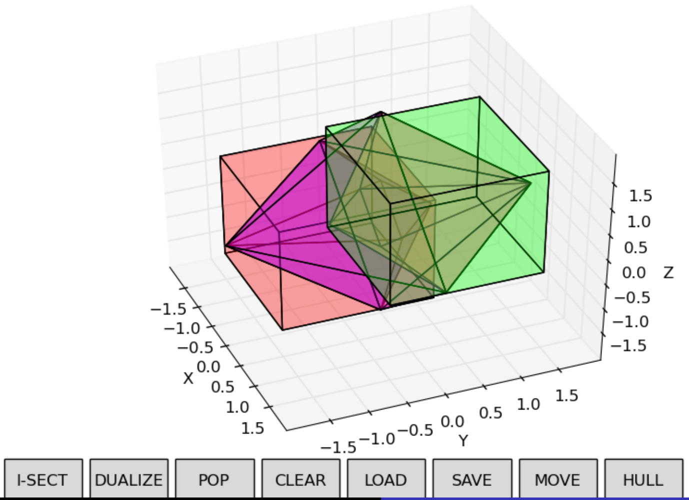
Dual I



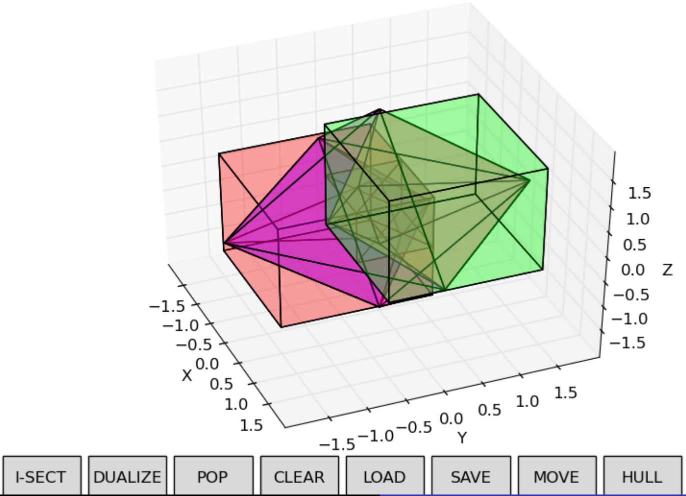
Dual II


−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
X
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
Y
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
Z
I-SECT
DUALIZE
POP
CLEAR
LOAD
SAVE
MOVE
HULL

Otoczka duali



Dual otoczki



Szkic algorytmu

Algorytm Muller'a - Preparata'y

- A, B - wielościany
- Znajdź punkt należący do wnętrza przecięcia dwóch wielościanów, bądź stwierdź, że się one nie przecinają
- Przesuń (jeśli to konieczne) oba wielościany o taki wektor, aby znaleziony punkt przecięcia odpowiadał początkowi układu współrzędnych
- Oblicz $\boldsymbol{A} = dual(A)$ oraz $\boldsymbol{B} = dual(B)$
- Wyznacz $C = CH(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$
- Oblicz $\boldsymbol{C} = dual(C)$
- $\boldsymbol{C} = A \cap B$

Podsumowanie

- Algorytm Muller'a - Preparata'y nie jest obecnie optymalnym algorytmem, lecz jest on praktycznie implementowalny (m.in implementacja w CGALu)
- W zastosowaniach często wystarcza algorytm wykrywania kolizji, zaś algorytm konstrukcji przecięcia ma bardziej znaczenie teoretyczne

Bibliografia I

- D.E. Muller, F.P. Preparata
  Finding the intersection of two convex polyhedra
  Coordinated Science Laboratory, University of Illinois at Urbana-Champaign, IL, U.S.A., 1978.

- BERNARD CHAZELLE
  AN OPTIMAL ALGORITHM FOR INTERSECTING THREE-DIMENSIONAL CONVEX POLYHEDRA
  Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.