

Metody Numeryczne Projekt 3

Aproksymacja profilu wysokościowego

Michał Bałdyga 184523 gr.1 Informatyka

1 Wstęp

Celem projektu była implementacja metody wykorzystującej wielomian interpolacyjny Lagrange'a oraz metody wykorzystującej funkcje sklejane trzeciego stopnia. Do weryfikacji obu metod użyłem danych rzeczywistych, a do obliczeń pewnego ich podzbioru. Wybrane trasy mają zróżnicowany charakter, który wygląda następująco:

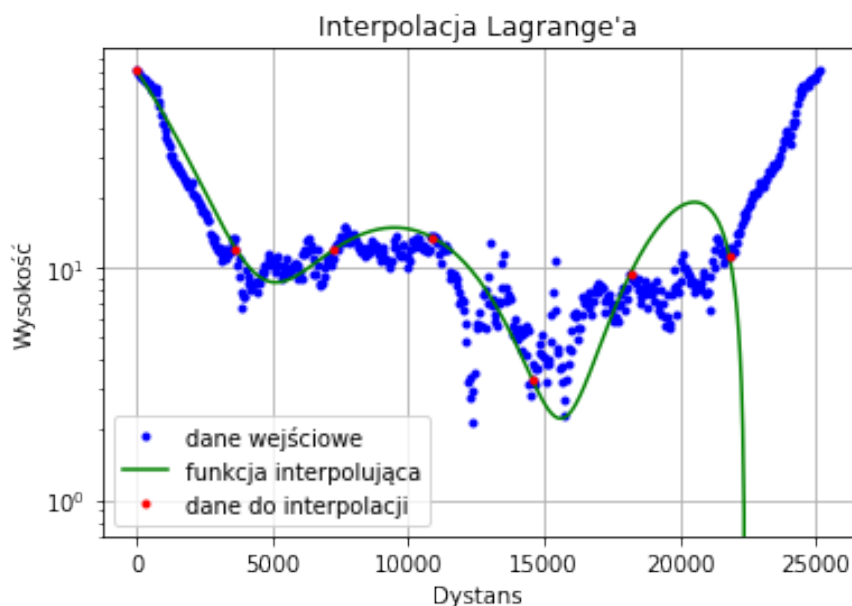
- Obiadek - trasa prawie płaska, z niewielkimi różnicami wysokości,
- Mount Everest - trasa o jednym wyraźnym wzniesieniu,
- Wielki Kanion Kolorado - trasa o wielu stromych wzniesieniach.

2 Interpolacja Lagrange'a

Spróbujemy przeanalizować zastosowanie interpolacji Lagrange'a dla różnych profili wysokościowych.

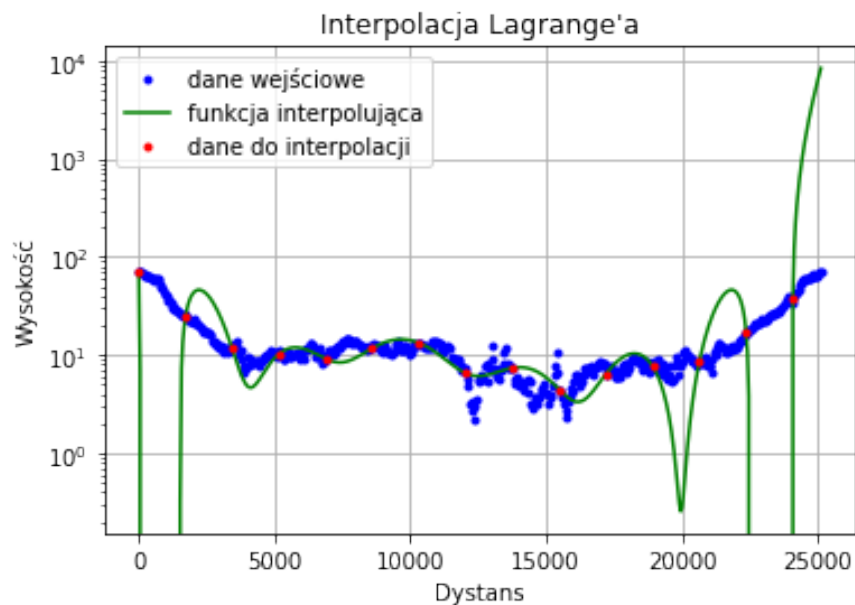
2.1 Interpolacja Lagrange'a dla trasy "Obiadek":

1) dla 7 punktów:



Uzyskany efekt jest nienajlepszy. Na początku interpolacja wydaje się być dosyć dokładna, aczkolwiek na prawym krańcu widoczny jest mocny spadek, który nieodzwierciedla rzeczywistej trasy. Spróbujmy zwiększyć liczbę punktów do 15.

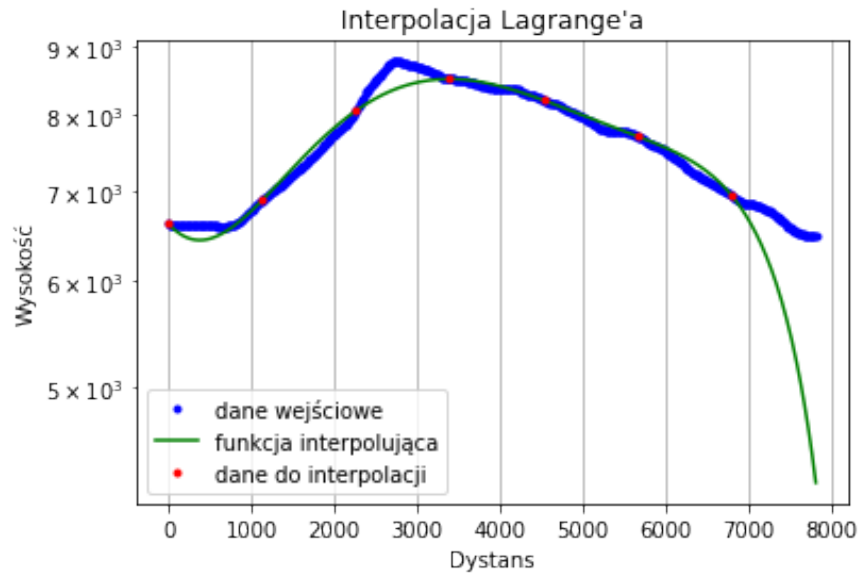
2) dla 15 punktów



Tym razem dokładność przybliżenia interpolacji w środkowych wartościach naszego zbioru jest zdecydowanie lepsza. Niestety na krańcach przedziału osycłajce są bardzo duże, przez co wynik jest niezadowalający.

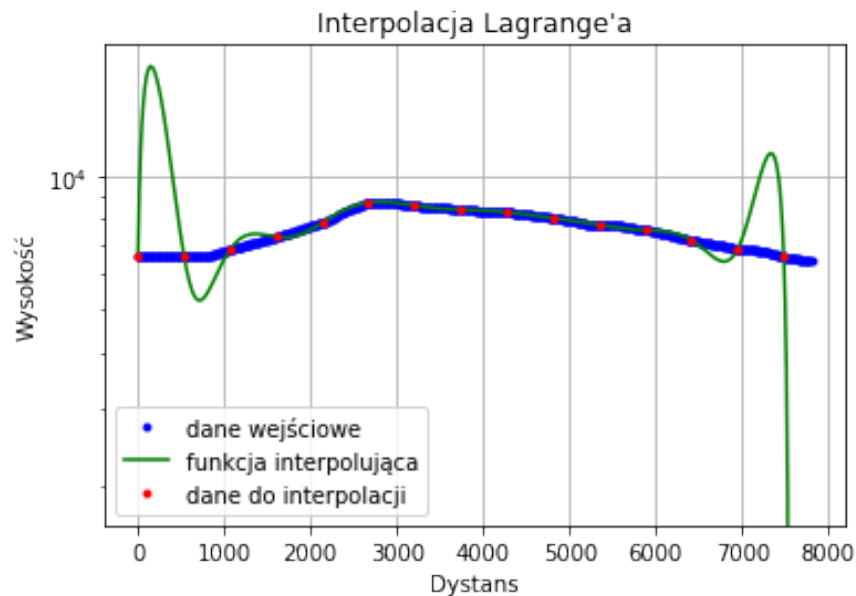
2.2 Interpolacja dla trasy "Mount Everest":

1) dla 7 punktów:



W przypadku trasy o jednym wyraźnym wzniesieniu uzyskujemy zdecydowanie lepszy wynik. Interpolacja poza prawy koniec przedziału (w którym spadek jest zbyt duży), daje wiarygodne odwzorowanie profilu wysokościowego. Sprawdźmy jak zachowa się interpolacja przy zwiększonej liczbie punktów.

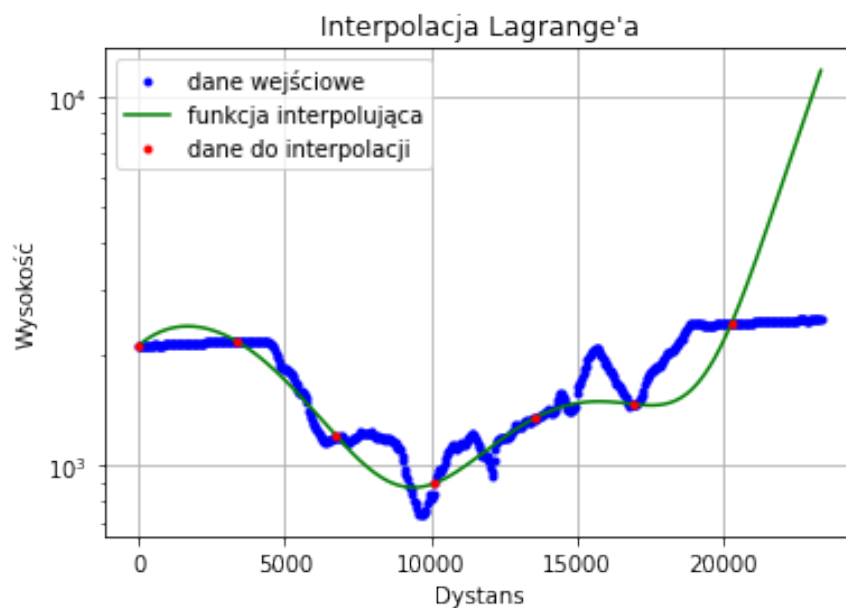
2) dla 15 punktów:



Tym razem wynik jest zdecydowanie gorszy. Podobnie jak w przypadku poprzedniej trasy, oscylacje na krańcach przedziału są bardzo duże.

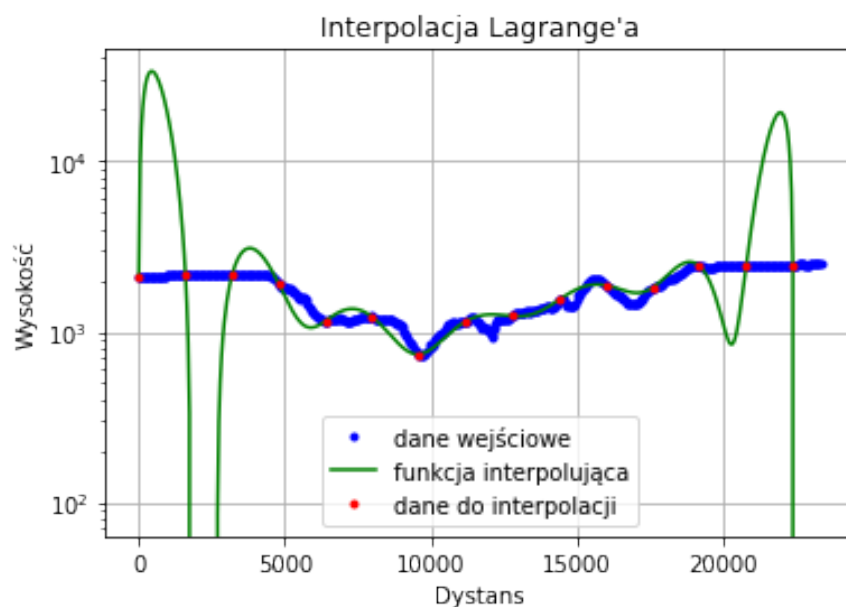
2.3 Interpolacja dla trasy “Wielki Kanion Kolorado”

1) dla 7 punktów:



Ze względu na wiele stromych wzniesień, wynik jest niedokładny. Interpolacja zdaje się wygładzać wzniesienia oraz spadki w terenie. Zwiększmy zatem liczbę punktów, aby sprawdzić czy można uniknąć otrzymanego efektu.

2) dla 15 punktów:



Niestety po zwiększeniu liczby punktów, nie uzyskaliśmy znacząco lepszego przybliżenia w środkowym przedziale. Ponadto podobnie jak przy poprzednich trasach, oscylacje znacznie się zwiększyły.

2.4 Wnioski

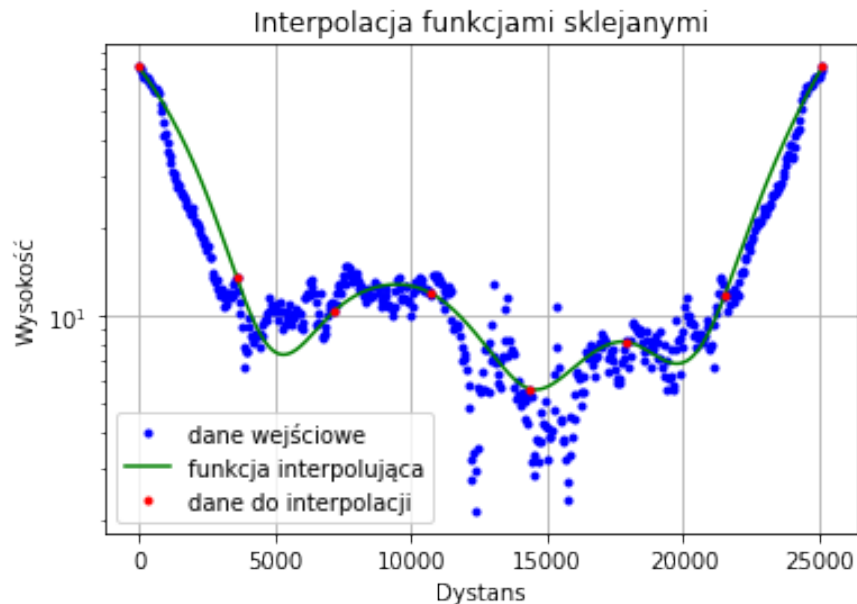
Interpolacja Lagrange’a polega na przybliżaniu wielomianem n -tego stopnia w $n+1$ punktach. Mogłoby się wydawać, iż wraz ze zwiększeniem liczby punktów otrzymamy dokładniejsze przybliżenie. Jest to jednak złudne wrażenie, ponieważ metoda jest podatna na efekt Rungego.

3 Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami)

Ze względu na efekt Rungego, który występuje w interpolacji Lagrange’a, musimy znaleźć lepszą metodę aproksymacji. Jedną z nich jest metoda wykorzystująca funkcje sklepane trzeciego stopnia. Polega ona na wyznaczeniu $n-1$ przedziałów (w przypadku, gdy bierzemy pod uwagę $n+1$ węzłów), a następnie dla każdego z nich interpolujemy funkcję wielomianem trzeciego stopnia. Do rozwiązywania układów równań wykorzystamy faktoryzację LU. Przeanalizujemy jak działa owa interpolacja dla różnych profili wysokościowych.

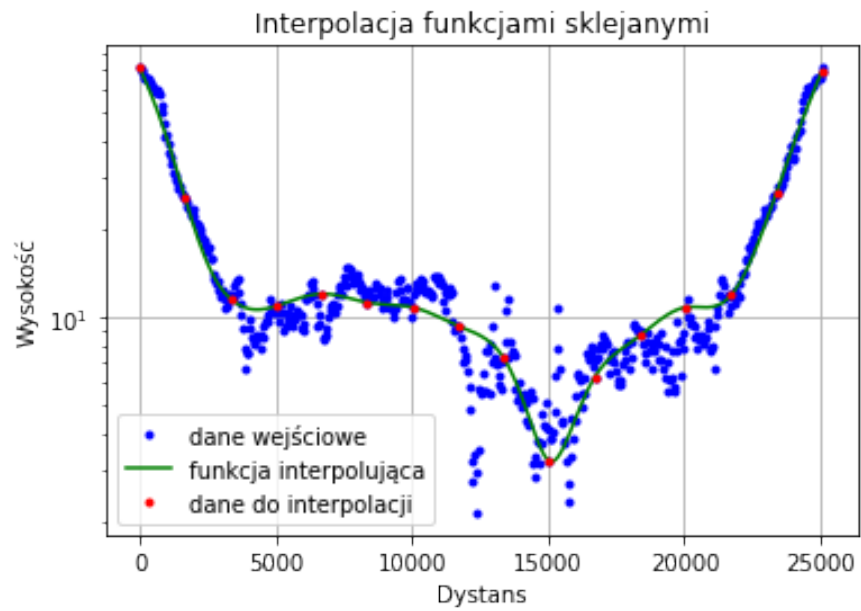
3.1 Interpolacja dla trasy “Obiadek”

1) dla 7 punktów:

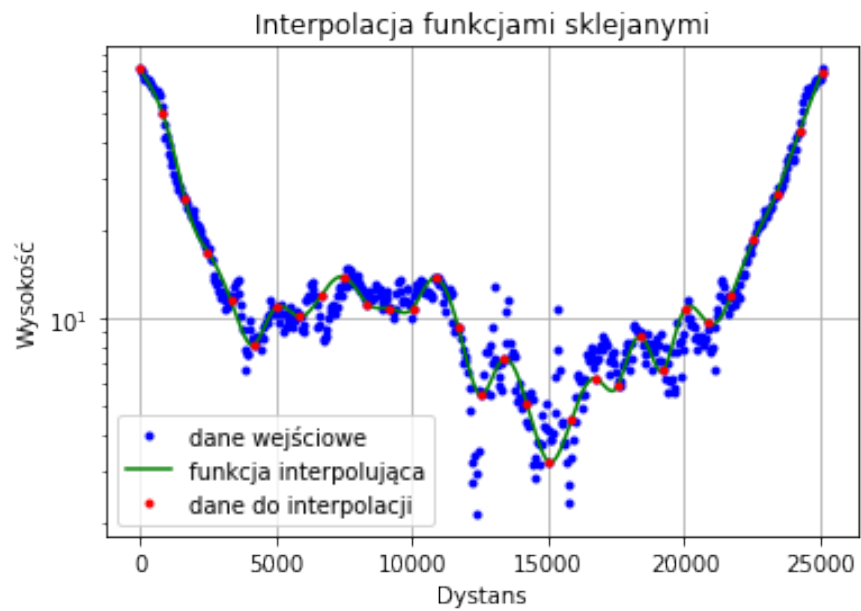


Już przy 7 punktach widzimy, że przybliżenie profilu wysokościowego jest dosyć dokładne. Sprawdźmy zatem, czy dokładność będzie rosła proporcjonalnie do zwiększania liczby punktów.

2) dla 15 punktów:



3) dla 30 punktów:

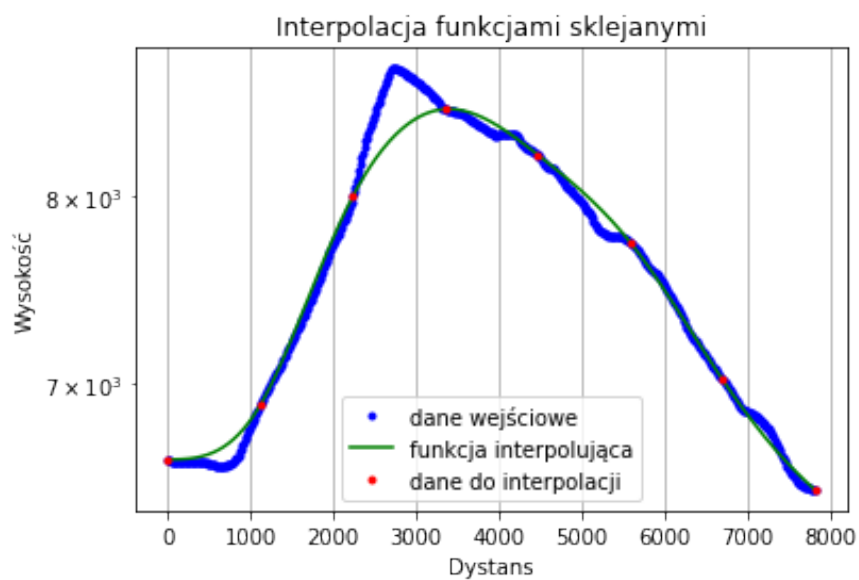


Widzimy, że dla trasy bez dużych różnic wysokości, wraz ze wzrostem liczby punktów wzrasta również dokładność przybliżenia.

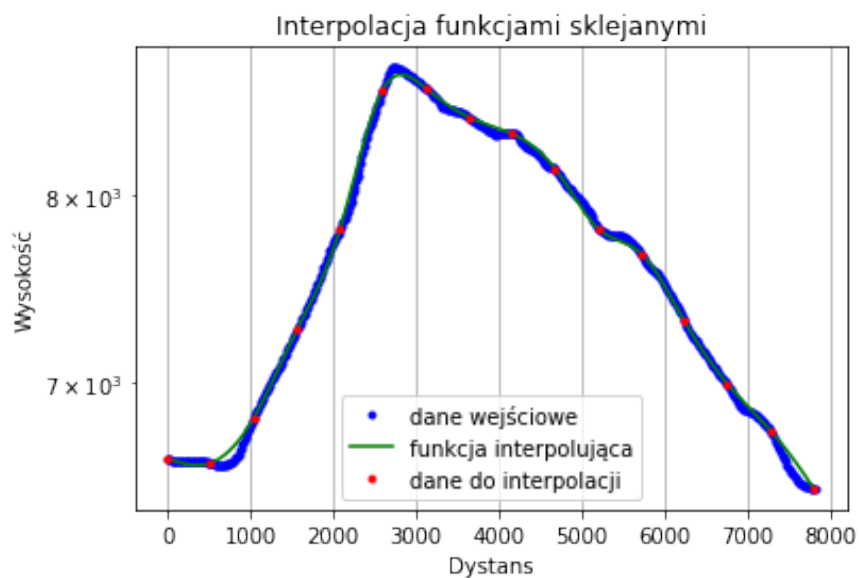
3.2 Interpolacja dla trasy “Mount Everest”

Zobaczmy jak zachowuje się interpolacja, dla trasy o jednym wyraźnym wzniesieniu, analogicznie dla 7, 14 oraz 30 punktów.

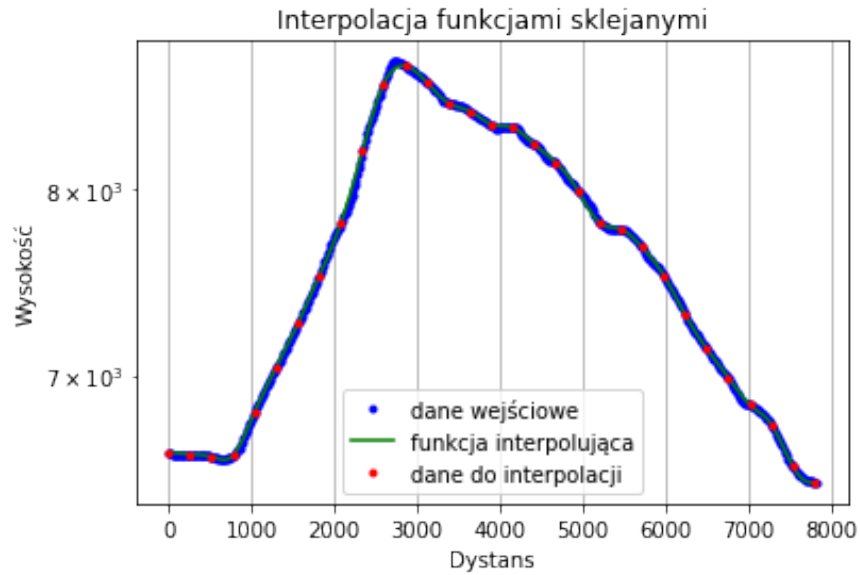
1) dla 7 punktów:



2) dla 15 punktów:



3) dla 30 punktów:

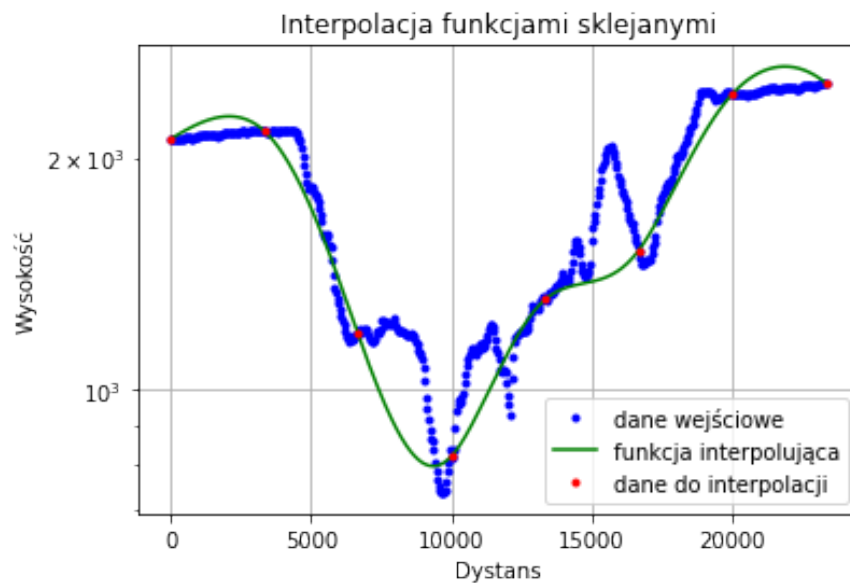


Podobnie jak w przypadku trasy “Obiadek”, widzimy że wraz ze wzrostem liczby punktów wzrasta również dokładność przybliżenia.

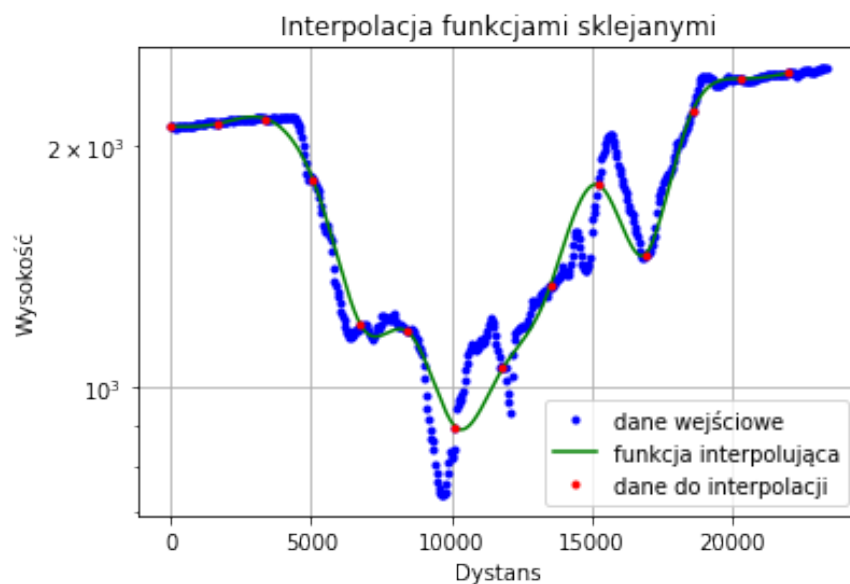
3.3 Interpolacja dla trasy “Wielki Kanion Kolorado”

Sprawdźmy, czy w przypadku trasy o wielu stromych wzniesieniach, interpolacja zachowa się podobnie jak dla pozostałych tras. Tym razem również rozważymy 3 przypadki:

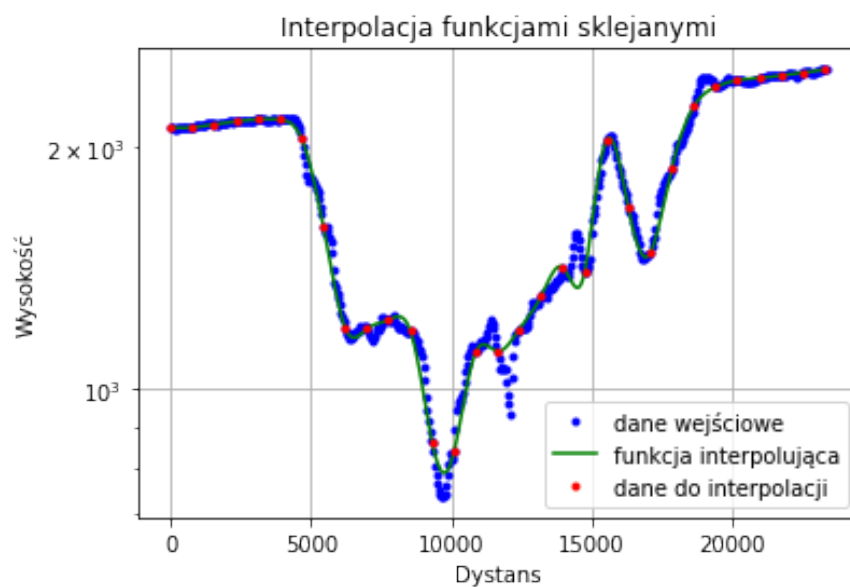
1) dla 7 punktów:



2) dla 14 punktów:



3) dla 30 punktów:



W miejscach, w których pojawiły się gwałtne skoki wysokości przybliżenie nie jest idealne. Jednakże po przeanalizowaniu 3 zróżnicowanych tras, możemy stwierdzić, iż zwiększenie liczby punktów zwiększyło dokładność funkcji interpolującej.

4 Podsumowanie

Interpolacja Lagrange’a pomimo iż jest metodą prostszą w implementacji oraz szybszą, jest podatana na efekt Rungego. Oscylacje na krańcach uniemożliwiają nam dokładne wyznaczenie profilu wysokościowego. Dlatego lepszą metodą jest interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami), która przy dużej liczbie punktów daje nam rozwiązanie zbliżone do rzeczywistego.