Michał Ferdzyn 242383
Artur Grzybek 242399

Rok akademicki *2022/23*
wtorek, 10:30

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 4 - obliczanie całek za pomocą kwadratury Gaussa-Legendre'a oraz Newtona-Cotesa (wzór Simpsona)

Opis rozwiązania

W celu obliczenia przybliżonej wartości całki:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Wykorzystujemy dwie metody:

a) Kwadratura Gaussa-Legendre'a

Polega ona na podstawieniu do wzoru odpowiednich wartości:

$$I(f) = \frac{b-a}{2}\sum_{k=0}^{n} A_k f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x_k\right),$$

Gdzie x_k to wartości węzłów, zaś współczynnik A_k to wartości wag, które są wyliczane ze wzoru:

$$A_k = \frac{-2}{(n+2)P_{n+2}(x_k)P'_{n+1}(x_k)}$$

Wartości x_k oraz wyników $P_n(x_k)$ zostały podane odgórnie w programie. Wartości wielomianów są wyliczane ze wzorów:

$$P_0(x_k) = 1$$

$$P_1(x_k) = x_k$$

$$P_{m+1}(x_k) = \frac{2m+1}{m+1}x_k P_m(x_k) - \frac{m}{m+1}P_{m-1}(x_k)$$

$$P'_m(x_k) = \frac{m}{{x_k}^2-1}x_k P_m(x_k) - \frac{m}{{x_k}^2-1}P_{m-1}(x_k)$$

b) Kwadratura Newtona-Cotesa (wzór Simpsona)

Metoda polega na:

- Wczytaniu podanego przedziału (a,b)
- Wyznaczeniu odległości pomiędzy dwoma sąsiednimi punktami podziałowymi dx
- Rozpoczęciu pętli, która wykonuje się n-razy. Wyznaczamy tu wartość punktu podziałowego, a następnie obliczamy wartość funkcji w punkcie środkowym, który jest odległy o połowę dx od wyznaczonego wcześniej punktu podziałowego. Wynik ten dodajemy do sumy wartości funkcji w punktach środkowych. Tworzymy także drugą sumę w zmiennej s, która zawiera jedynie wartości funkcji w dla punktów od x_i do x_{n-1}.
- Wyznaczeniu wartości całki w zmiennej s (po zakończeniu pętli) zgodnie z podanym wzorem:

$$Q(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Wyniki

Kwadratura Newtona-Cotesa (wzór Simpsona)				
Funkcja	**Przedział**	**Epsilon**	**Wynik**	**Liczba przebiegów**
$f(x) = x^2 - 3x + 3$	<-5;5>	0.01	113.33333	2
$f(x) = \cos x \cdot (x + 8)$	<2;8>	0.001	7.00854	7
$f(x) = \frac{x}{x+1}$	<0;5>	0.01	3.20526	4

Kwadratura Gaussa-Legendre’a			
Funkcja	**Przedział**	**Wynik**	**Liczba węzłów**
$f(x) = x^2 - 3x + 3$	<-5;5>	113.33333	2
$f(x) = x^2 - 3x + 3$	<-5;5>	113.33333	3
$f(x) = x^2 - 3x + 3$	<-5;5>	113.33333	4
$f(x) = x^2 - 3x + 3$	<-5;5>	113.33333	5
$f(x) = \cos x \cdot (x + 8)$	<2;8>	6.28373	2
$f(x) = \cos x \cdot (x + 8)$	<2;8>	6.84767	3
$f(x) = \cos x \cdot (x + 8)$	<2;8>	7.02348	4
$f(x) = \cos x \cdot (x + 8)$	<2;8>	7.00675	5
$f(x) = \frac{x}{x+1}$	<0;5>	3.27869	2
$f(x) = \frac{x}{x+1}$	<0;5>	3.22129	3
$f(x) = \frac{x}{x+1}$	<0;5>	3.2106	4
$f(x) = \frac{x}{x+1}$	<0;5>	3.20866	5

Wnioski

- Wraz ze wzrostem ilości węzłów rośnie dokładność metody Gaussa-Legendre’a.
- Odgórnie podane wartości węzłów powodują ograniczoną ilość iteracji metody Gaussa-Legendre’a, przez co metoda Newtona-Cotesa osiągnie prawdopodobnie większą dokładność (ponieważ ona nie ma żadnych ograniczeń).
- Metoda Newtona-Cotesa jest łatwiejsza do zaimplementowania oraz zapewnia dokładniejsze wyniki.