Politechnika Wrocławska	Dr. inż. Ewa Szlachcic Katedra Automatyki, Mechatroniki i Systemów Sterowania
Wydział Elektroniki Kier: Automatyka i Robotyka Studia magisterskie II stopnia	Teoria i metody optymalizacji Projekt

Temat projektu: **Metoda dualna simpleks dla zadania programowania liniowego PL dla wektora $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{+}$**

Wykonawcy:	
Imię i nazwisko, nr indeksu:	Michał Huras 214778 Witold Sojka 209179
Termin zajęć:	Poniedziałek, TP, 11:15
Data oddania projektu:	22.05.2017
Ocena końcowa:	

Zatwierdzam Projekt

Data i podpis prowadzącego zajęcia …………………………………………….

1. SFORMUŁOWANIE ZADANIA OPTYMALIZACJI

Celem projektu było stworzenie programu do obliczania minimum funkcji liniowej f(x), przy ograniczeniach nierównościowych liniowych metodą dualną simplex. Należało również rozpatrzyć przypadki szczególne.

Przyjęto standardowe oznaczenia:

n - liczba zmiennych, m - liczba ograniczeń, x – wektor zmiennych decyzyjnych, X- zbiór rozwiązań dopuszczalnych, ε- dokładność obliczeń, L- liczba iteracji, x^*- punkt optymalny, wartość optymalna funkcji celu: $f(x^*) = x_0^*$.

Należało znaleźć minimum funkcji celu:

$$\min_{x \epsilon X} f(x) = c^T x$$

Przy ograniczeniach:

$$X = \begin{cases} x: Ax \geq b \\ b \in \mathcal{R} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Wymiar zadania:

$$n \leq 10$$
$$m \leq 5$$

Przyjęta metoda rozwiązania*: **Metoda dualna simplex***

2. OMÓWIENIE OPRACOWANEGO ALGORYTMU OPTYMALIZACJI

Algorytm optymalizacji został stworzony na podstawie wykładu Pani Dr. inż. Ewy Szlachcic, „Teoria i metody optymalizacji", Politechnika Wrocławska, wydział: Elektroniki, kierunek: Automatyka i Robotyka, semestr letni 2016/2017r. Metodą rozwiązania zadania jest metoda dualna simplex. Rozwiązuje ona zadanie minimalizacji funkcji, przy ograniczeniach, podanych w pkt. 1.

Dla przykładu rozwiążmy zadanie dla funkcji celu:

$$\min_{x \epsilon X} f(x) = 3x_1 + 9x_2$$

Przy ograniczeniach:

$$X = \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \end{cases}$$

Na podstawie danych wejściowych, do równań ograniczeń, dopisywane są zmienne niebazowe, tak aby z nierówności powstały równania. Po dodaniu (odjęciu) jakiejś nieznanej stałej, nierówność można zamienić w równanie.

$$X = \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 8 \end{cases}$$

Kolejnym krokiem jest przekształcenie równań tak, aby przy zmiennych niebazowych występowały tylko współczynniki dodatnie.

$$X = \begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 = -8 \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 = -8 \end{cases}$$

Równania ograniczeń w formie macierzowej powinny przy wektorze zmiennych niebazowych mieć macierz jednostkową.

$$A' x_{bazowe} + I x_{niebazowe} = b'$$

Powstaje więc tabela:

	x1	x2	x3	x4	b'
f(x)	3	9	0	0	0
ograniczenia	-2	-1	1	0	-8
	-1	-2	0	1	-8

Na jej podstawie tworzona jest tabela dualna simplex. Niezapisywana jest część zawierająca tabelę jednostkową, a wektor b' znajduje się w pierwszej kolumnie. Na pierwsze miejsce w pierwszej kolumnie zapisywane jest 0. W tym miejscu znajdować się będzie wartość funkcji celu ze zmienionym znakiem. Nasza tabela ma więc postać:

	x0	x1	x2
f(x)	**0**	**3**	**9**
x3	**-8**	**-2**	**-1**
x4	**-8**	**-1**	**-2**

Ogólna postać tabeli dualnej simplex, która jest podstawą do robienia algorytmu dualnego simplex:

0	c^T
b'	A'

Krok 1: sprawdzenie dualnej dopuszczalności rozwiązania:

Czy $y_{oj} \geq 0, dla\ j = 0,1,\dots,n-1$, czyli czy pierwszy wiersz zawiera tylko elementy nieujemne.

TAK- idź do Kroku 2, NIE- koniec, zadanie niedopuszczalne.

Krok 2: sprawdzenie optymalności rozwiązania:

Czy $y_{i0} \geq 0, dla\ i = 1,..,m$, czyli czy pierwsza kolumna (bez elementu Y(1,1)) zawiera tylko elementy nieujemne.

TAK- aktualne rozwiązanie jest **optymalne**, NIE- idź o Kroku 3.

Krok 3: znajdź element minimalny w pierwszej kolumnie (nie licząc elementu Y(1,1)): y_{r0}

Krok 4: dla wybranego *r,* wybierz element centralny $c = y_{rj}$, taki żeby:

$$\max(\frac{y_{oj}}{y_{rj}}, y_{rj} < 0)$$

Krok 5: dokonaj dualną iterację simpleksową metodą eliminacji Gaussa i idź do kroku 2.

Metoda eliminacji Gaussa:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{p} & q \\ r & s \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\boldsymbol{p}} & \frac{q}{\boldsymbol{p}} \\ \frac{-r}{\boldsymbol{p}} & s - \frac{rq}{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix}$$

Gdzie:

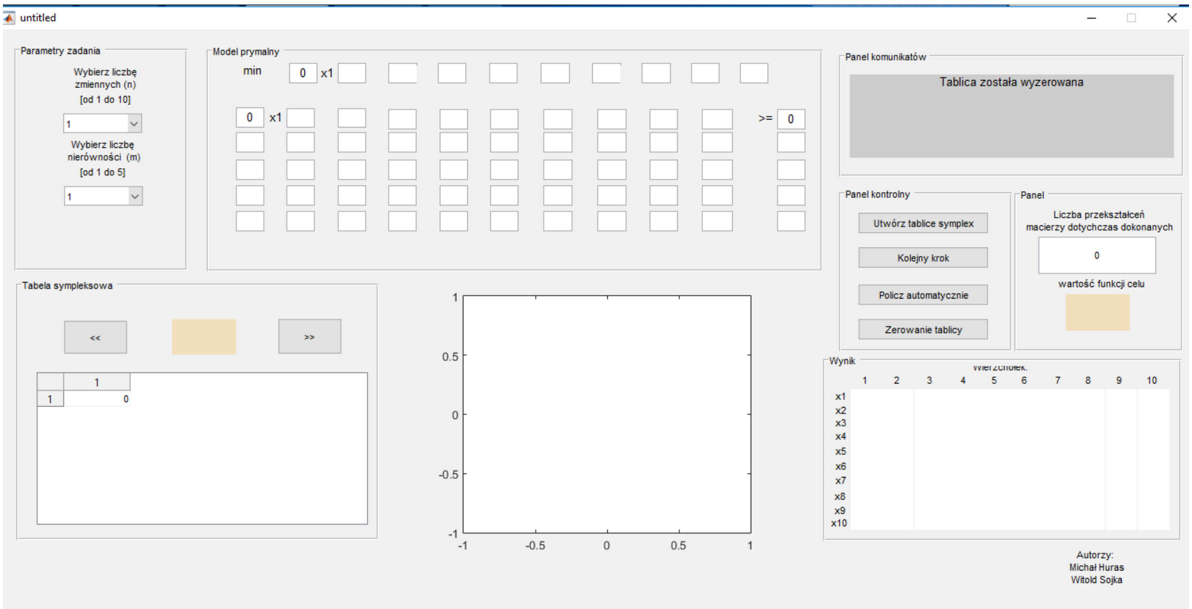
- p – element centralny (c)
- q – dowolny element w wierszu centralnym (czyli wierszu zawierającym element centralny)
- r – dowolny element w kolumnie centralnej (czyli kolumnie zawierającej element centralny)
- s – dowolny pozostały element

3. Informacje ogólne o programie

Środowiskiem programistycznym wybranym przez nas do stworzenia tego projektu jest MATLAB. Wybraliśmy to środowisko programistyczne ze względu na jego dobrą znajomość, dostępność materiałów dydaktycznych, łatwość w implementacji działań na liczbach. Należy również nadmienić, iż MATLAB oferuje łatwy sposób tworzenia GUI, czyli interfejsu użytkownika.

MATLAB Compiler jest to aplikacja (zintegrowana ze środowiskiem), której użyliśmy do wygenerowania naszego programu. Dzięki temu nie jest konieczne posiadanie programu MATLAB do uruchomienia programu optymalizacyjnego, lecz jedynie instalacja programu optymalizacyjnego.

4. ZASADY WPROWADZANIA DANYCH WEJŚCIOWYCH



Na rysunku widać, iż po lewej stronie panelu użytkownik jest w stanie wybrać parametry zadania, takie jak liczba zmiennych oraz liczba równań. Maksymalne wartości obu parametrów odpowiadają wymiarom zadania opisywanych w punkcie pierwszym niniejszej pracy.

Po dokonaniu wyboru tablica znajdująca się w górnej środkowej części aplikacji dostosuje się do pożądanych wymiarów. Wprowadzanie danych polega na wpisaniu w odpowiednie miejsca wartości liczbowych odpowiadających parametrom macierzy A, B , C.

Tworzenie tablicy dualnej simplex (lewy dolny róg) odbywa się poprzez kliknięcie przycisku „Utwórz tablicę simplex".

Następnie jesteśmy w stanie przeprowadzić optymalizację krok po kroku za pomocą przycisku „Kolejny krok" lub automatycznie „Policz automatycznie".

Przycisk „Zerowanie tablicy" odpowiada za wyzerowanie wszystkich wartości dotychczas wpisanych lub policzonych.

W prawej części interfejsu znajduje się „Panel komunikatów" na którym wyświetlane są komunikaty dotyczące następnego etapu obliczeń optymalizacyjnych, porady dotyczące korzystania z aplikacji oraz ewentualne błędy wynikające z źle wpisanych danych wejściowych (patrz rozdział „Test przypadków szczególnych").

Poniżej niego znajduje się miejsce na wyświetlanie wyników, czyli pole z liczbą przekształceń macierzy, pole z optymalną wartością funkcji celu oraz wyniki, czyli znalezione wierzchołki zawierające rozwiązanie.

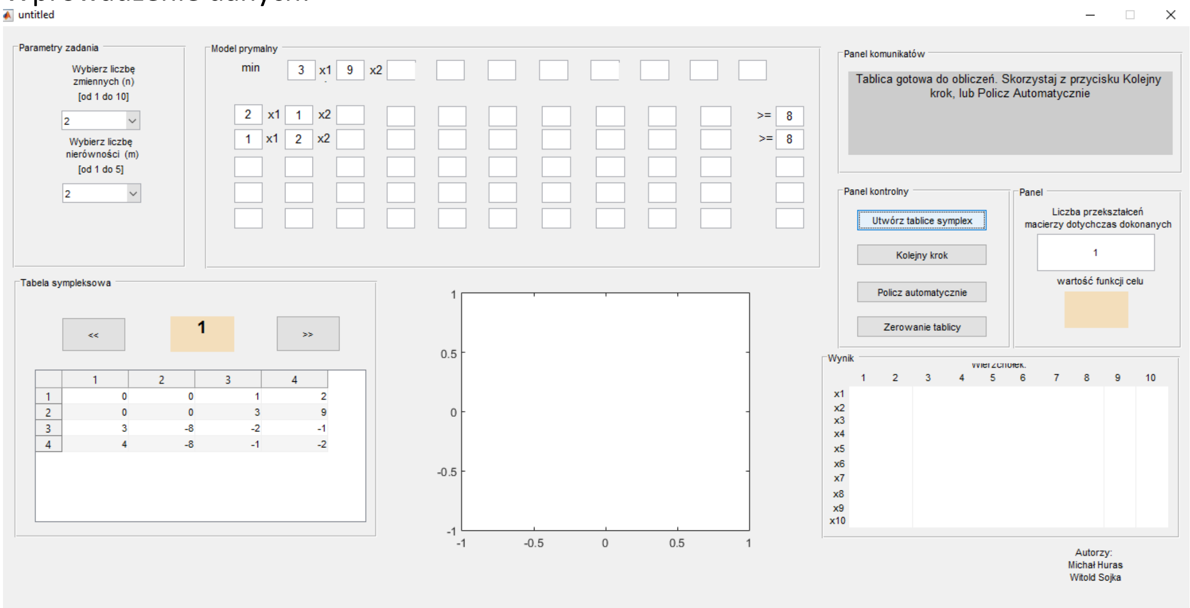
Na dole interfejsu znajduje się również pole, w którym będą rysowane wykresy przedstawiające pole ograniczeń i funkcje celu.

5. Test przypadków szczególnych

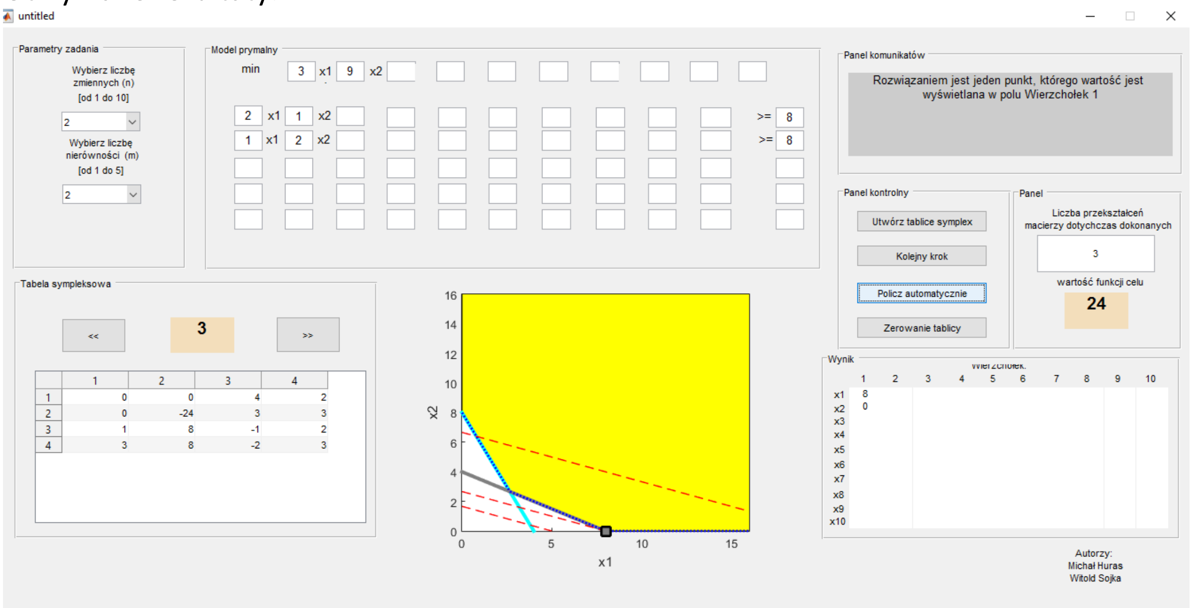
5.1: jedno rozwiązanie:

$$\min_{x \epsilon X} f(x) = 3x_1 + 9x_2$$
$$X = \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \end{cases}$$

Wprowadzenie danych:



Otrzymane rezultaty:



Rozwiązanie jest przypadkiem szczególnym, w którym zbiór rozwiązań dopuszczalnych X nie jest zbiorem pustym i istnieje jedno rozwiązanie optymalne.

Co widzimy na panelu:

- jedno rozwiązanie: wartość funkcji celu: 24
- jeden wierzchołek odpowiadający za optymalne parametry funkcji celu: $x_1 = 8, x_2 = 0$
- komunikat, że rozwiązaniem jest jeden punkt
- końcową dualną tablicę simplex
- liczbę iteracji algorytmu, czyli przekształceń macierzy: 3
- wykres rozwiązań dopuszczalnych (żółte pole), linie ograniczeń (linia szara i niebieska), linie funkcji celu (czerwone przerywane linie), linia ograniczająca pole dopuszczalnych rozwiązań (kropkowana linia), wierzchołek odpowiadający za optymalne rozwiązanie, punkt (8,0) (szary kwadracik)
- imiona i nazwiska autorów

Istnieje możliwość podglądnięcia kolejnych tablic dualnych simplex, tworzonych podczas iteracji algorytmu. W tym celu należy kliknąć na strzałki umieszczone nad tabelką (krok wstecz, krok naprzód).

Uwaga!
W pierwszym wierszu i w pierwszej kolumnie występują zmienne bazowe i niebazowe, które są reprezentowane przez liczby $(\boldsymbol{x_i} = i)$. W kolejnych iteracjach, liczby te zmieniają miejsca zgodnie z algorytmem dualnym simplex.

Tablica 1

<< 1 >>

	1	2	3	4
1	0	0	$\boldsymbol{x_1} \rightarrow$ 1	$\boldsymbol{x_2} \rightarrow$ 2
2	0	0	3	9
3	$\boldsymbol{x_3} \rightarrow$ 3	-8	-2	-1
4	$\boldsymbol{x_4} \rightarrow$ 4	-8	-1	-2

Tablica 2

<< 2 >>

	1	2	3	4
1	0	0	3	2
2	0	-12	1.5000	7.5000
3	1	4	-0.5000	0.5000
4	4	-4	-0.5000	-1.5000

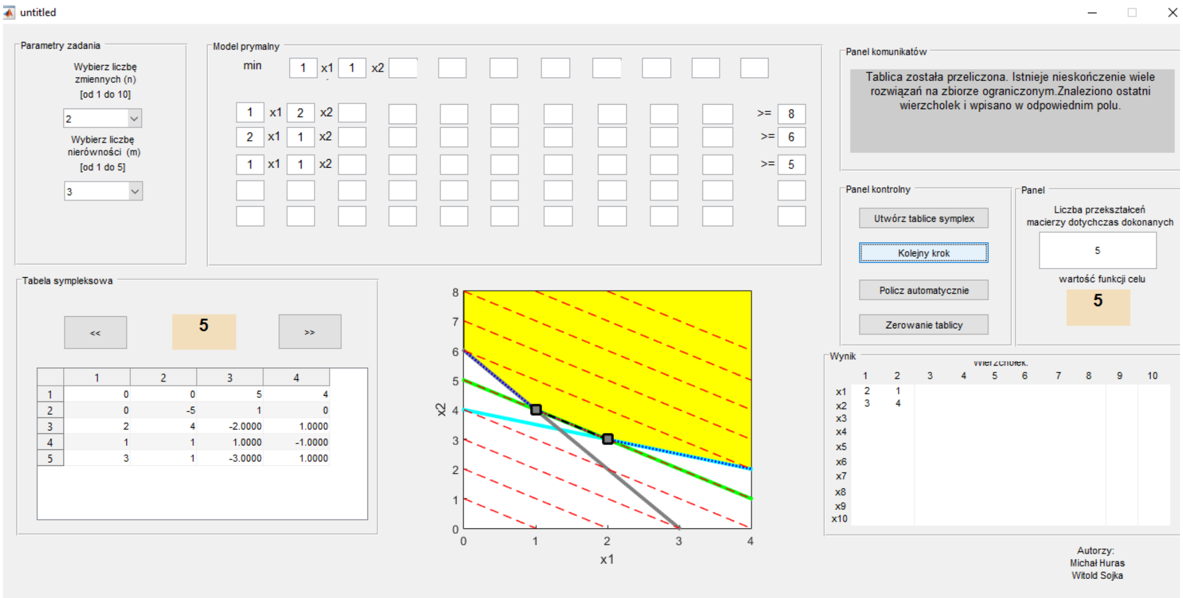
Tablica 3	

<< 3 >>

	1	2	3	4
1	0	0	4	2
2	0	-24	3	3
3	1	8	-1	2
4	3	8	-2	3

5.2: zbiór rozwiązań dopuszczalnych X nie jest zbiorem pustym i istnieje nieskończona liczba rozwiązań optymalnych (dla n=2 rozwiązania optymalne leżą na odcinku):

$$\min_{x \epsilon X} f(x) = x_1 + x_2$$
$$X = \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \end{cases}$$



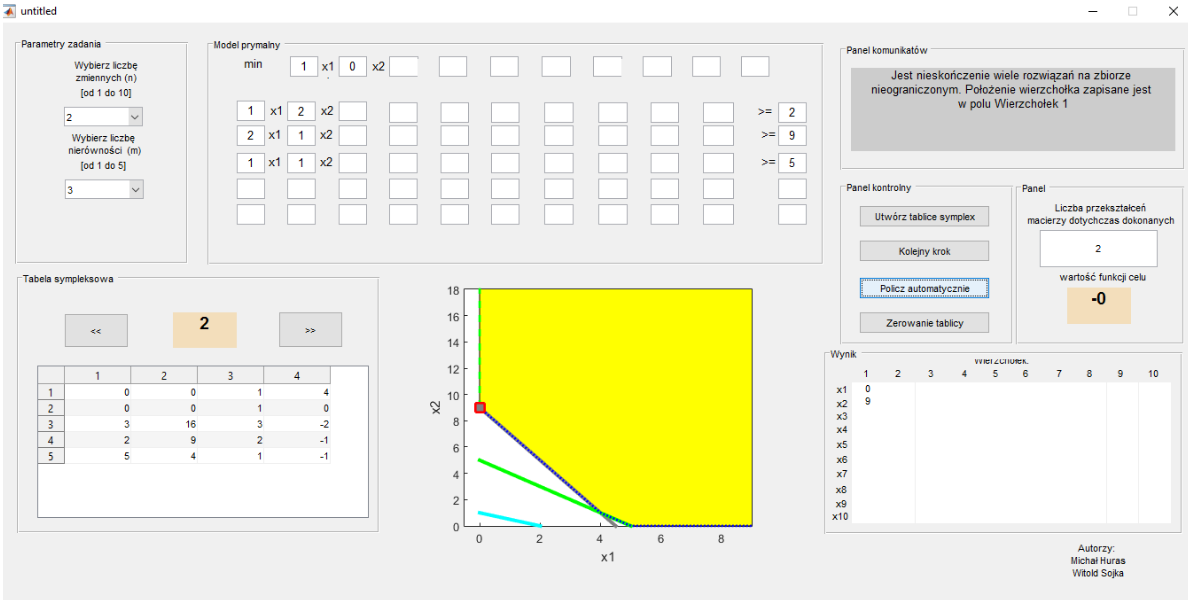
Co widzimy na panelu?

- odpowiedni komunikat: „Tablica została policzona. Istnieje nieskończenie wiele rozwiązań na zbiorze ograniczonym. Znaleziono ostatni wierzchołek i wpisano w odpowiednim polu.”
- dwa wierzchołki: punkt (2,3) i (1,4), są one również zaznaczone na wykresie
- wykres z odcinkiem zawierającym optymalne rozwiązania
- wszystkie inne informacje jak z przypadku standardowego

5.3: zbiór rozwiązań dopuszczalnych X nie jest zbiorem pustym i istnieje nieskończona liczba rozwiązań optymalnych (dla n=2 rozwiązania optymalne leżą na półprostej):

$$\min_{x \epsilon X} f(x) = x_1$$

$$X = \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \end{cases}$$



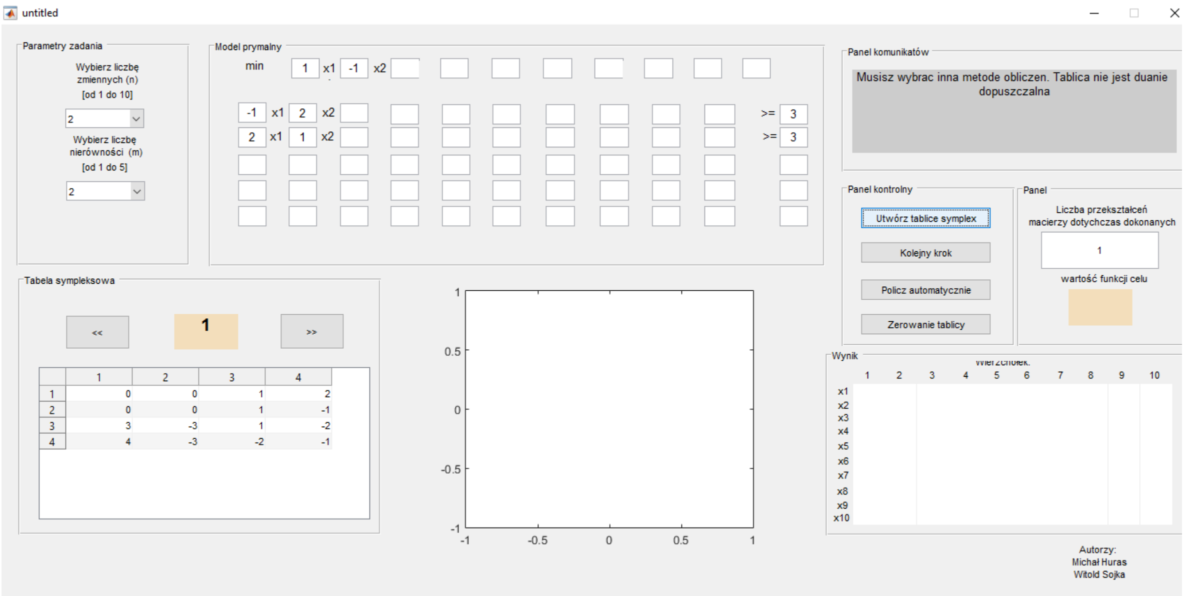
Co widzimy na panelu?

- rozwiązaniem jest półprosta, która zawiera wierzchołek 1. Widzimy zatem tę półprostą (przerywana zielona linia), na której leżą optymalne rozwiązania $x_1 = 0, x_2 \geq 9$

5.4: brak rozwiązań dla dualnej metody simplex

$$\min_{x \epsilon X} f(x) = x_1 - 9x_2$$

$$X = \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ 2x_1 + x_2 \geq 3 \end{cases}$$



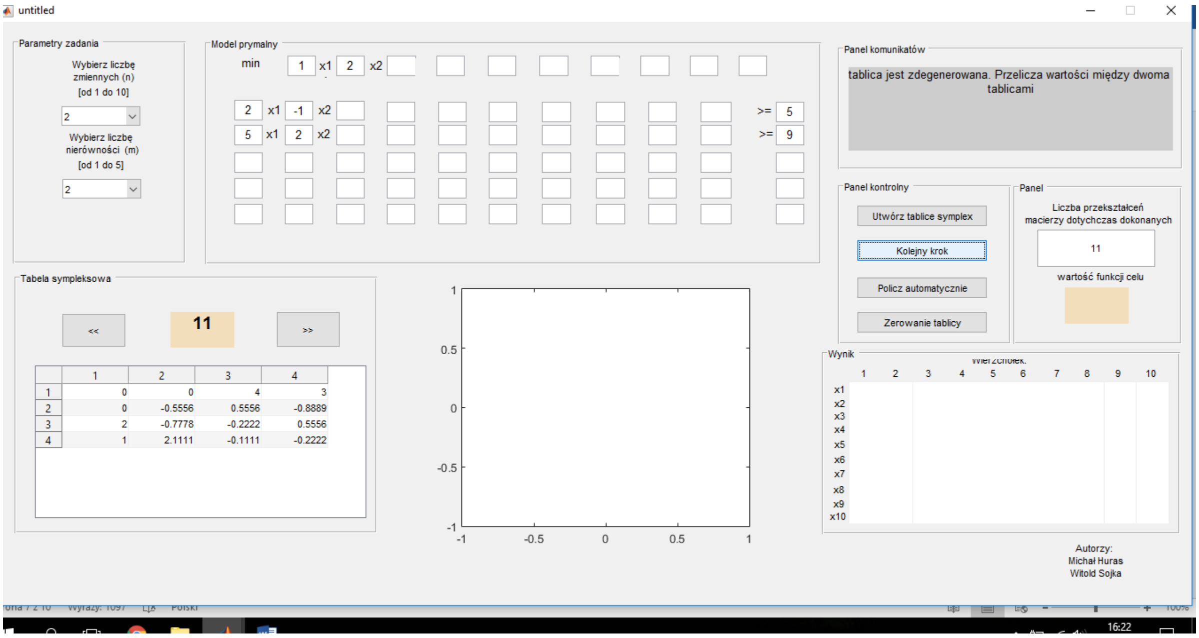
Co widzimy na panelu?

- komunikat: ‘Musisz wybrać inną metodę obliczeń. Tablica nie jest dualnie dopuszczalna’

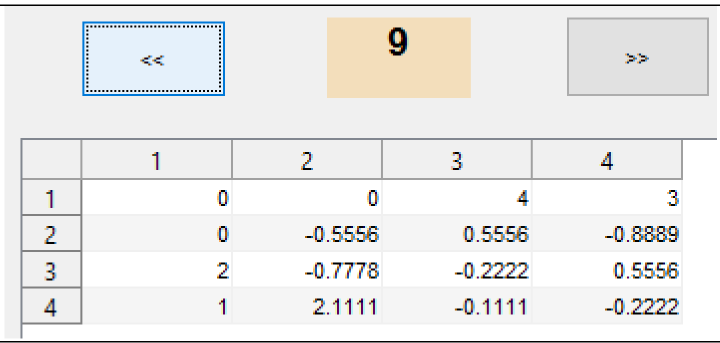
5.5: Tablica zdegenerowana:

W niektórych przypadkach algorytm dualny simplex, w trakcie obliczeń zapętla się w dwóch tablicach. Sprowadza się to do tego, iż obliczeń nie można kontynuować. Mówi się wówczas, że tablica jest zdegenerowana. Program podaje odpowiedni komunikat i uniemożliwia dalsze obliczenia. Wówczas nie można znaleźć rozwiązania metodą dualną simplex.

$$\min_{x \epsilon X} f(x) = x_1 + 2x_2$$
$$X = \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 5 \\ 5 + 2x_2 \geq 9 \end{cases}$$



<table>
<tr><td>Tabela 9</td><td>

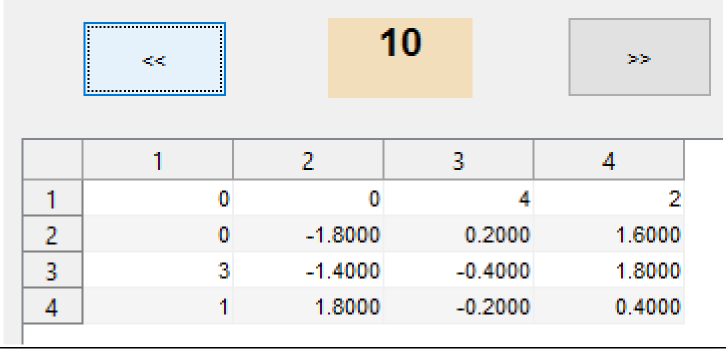


9

	1	2	3	4
1	0	0	4	3
2	0	-0.5556	0.5556	-0.8889
3	2	-0.7778	-0.2222	0.5556
4	1	2.1111	-0.1111	-0.2222

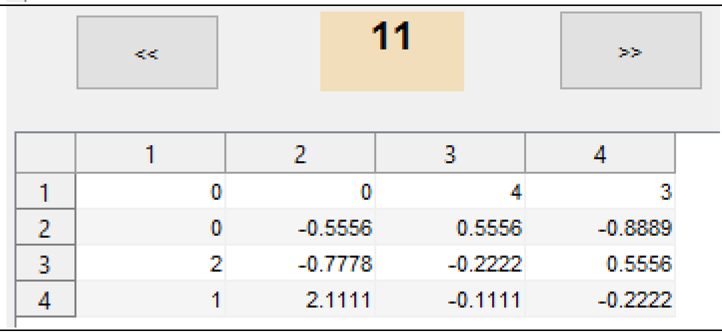
</td></tr>
</table>

Tabela 10



	1	2	3	4
1	0	0	4	2
2	0	-1.8000	0.2000	1.6000
3	3	-1.4000	-0.4000	1.8000
4	1	1.8000	-0.2000	0.4000

Tabela 11



	1	2	3	4
1	0	0	4	3
2	0	-0.5556	0.5556	-0.8889
3	2	-0.7778	-0.2222	0.5556
4	1	2.1111	-0.1111	-0.2222

Tabela 9 jest taka sama jak Tabela 11. Algorytm zapętlił się, więc nie jest możliwe znalezienie optymalnej wartości funkcji celu tą metodą.

6. ZADANIE PROGRAMOWANIA LINIOWEGO Z INTERPRETACJĄ PRAKTYCZNĄ

Ten rozdział opracowano na podstawie przykładu z książki: „Teoria i praktyka rozwiązywania zadań optymalizacji”, J. Stadnicki.

ZADANIE: WYBÓR PROCESU TECHNOLOGICZNEGO

Odcinki drutu o długości 1 m należy pociąć na krótsze odcinki o długościach: 0.55m, 0.40m i 0.32m, a następnie zestawić z nich 20 kompletów (1 x 0.55m i 3 x 0.32m) oraz 25 kompletów (3 x 0.40m i 2 x 0.32m). Zaplanujemy cięcie minimalizujące odpad.

Dla przyjętych danych liczbowych możliwych jest pięć sposobów cięcia. Liczby odcinków o wymaganej długości dla każdego sposobu cięcia zestawiono w tabeli poniżej. W ostatnim wierszu tabeli obliczono odpad po wykonaniu każdego ze sposobów cięcia.

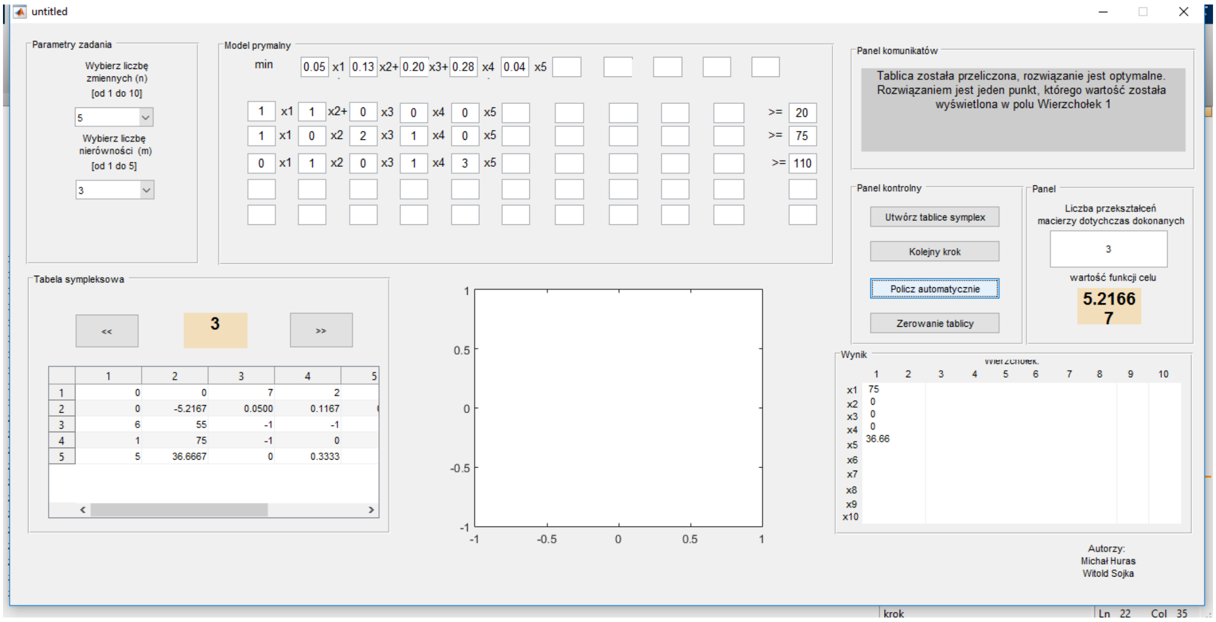
Odcinki [m]	Sposoby cięcia (procesy technologiczne)				
	I	II	III	IV	V
0.55	1	1	0	0	0
0.40	1	0	2	1	0
0.32	0	1	0	1	3
Odpad [m]	0.05	0.13	0.20	0.28	0.04

Oznaczając przez x_i liczby realizacji każdego ze sposobów cięcia, otrzymamy następujące zadanie:

$$\min_{x \epsilon X} f(x) = 0.05x_1 + 0.13x_2 + 0.20x_3 + 0.28x_4 + 0.04x_5$$

$$X = \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 20 & (tyle\ potrzeba\ kawałków\ 0.55) \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \geq 25 \cdot 3 & (tyle\ potrzeba\ kawałków\ 0.40) \\ x_2 + x_4 + 3x_5 \geq 20 \cdot 3 + 25 \cdot 2 & (tyle\ potrzeba\ kawałków\ 0.32) \end{cases}$$

Po przeliczeniu równania algorytmem dualnym simplex otrzymujemy wynik:



$$f(\hat{x}) = f(75, 0, 0, 0, 36.66) = 5{,}21667\ [m]$$

$$f(\hat{x}) = f(75, 0, 0, 0, 37) = 5{,}23\ [m]$$

Interpretacja wyniku: Aby pociąć drut zgodnie z wymaganiami zadania należy *75* razy zrealizować cięcie I sposobem i $36.66 \approx 37$ razy cięcie sposobem V. Wówczas odpad będzie najmniejszy i wyniesie: $5.21667 + (37 - 36.66) \cdot 0.04 = 5.23\ [m]$

Uwaga!
Optymalna wartość zmiennej x_5 w tym przykładzie nie jest całkowita. Zaokrąglenie wartości do liczby całkowitej nie zawsze prowadzi do rozwiązania optymalnego, jakiego należałoby poszukiwać, przyjmując w zadaniu dodatkowe założenie o tym, że liczby zmienne muszą być całkowite. Rozwiązują to inne algorytmy.

Wynik z otrzymany za pomocą programu jest zgodny z wynikiem otrzymanym w książce.

7. Bibliografia

- Slajdy z wykładu Pani Dr. inż. Ewy Szlachcic, „Teoria i metody optymalizacji", Politechnika Wrocławska, wydział: Elektroniki, kierunek: Automatyka i Robotyka, semestr letni 2016/2017r. (dostęp 2017): http://staff.iiar.pwr.wroc.pl/ewa.szlachcic/ http://staff.iiar.pwr.wroc.pl/ewa.szlachcic/teaching%20interest.htm

- „Optymalizacja, wybrane metody z przykładami zastosowań", J. Kusiak, A. Danielewska-Tułecka, P.Oprocha, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009.
- „Teoria i praktyka rozwiązywania zadań optymalizacji", J. Stadnicki, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2006.
- „Podstawy optymalizacji", A.Stachurski, A. P. Wierzbicki, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2001.