ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΗΜΜΥ

Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα Ι

Παράδωση 2ης εργασίας

Ημερομηνία Παράδοσης: 25/05/2024

Ομάδα 120

Επώνυμο	Δήμας	Λαμπράκης
Όνομα	Χρήστος	Μιχάλης
Α.Μ.	2021030183	2020030077

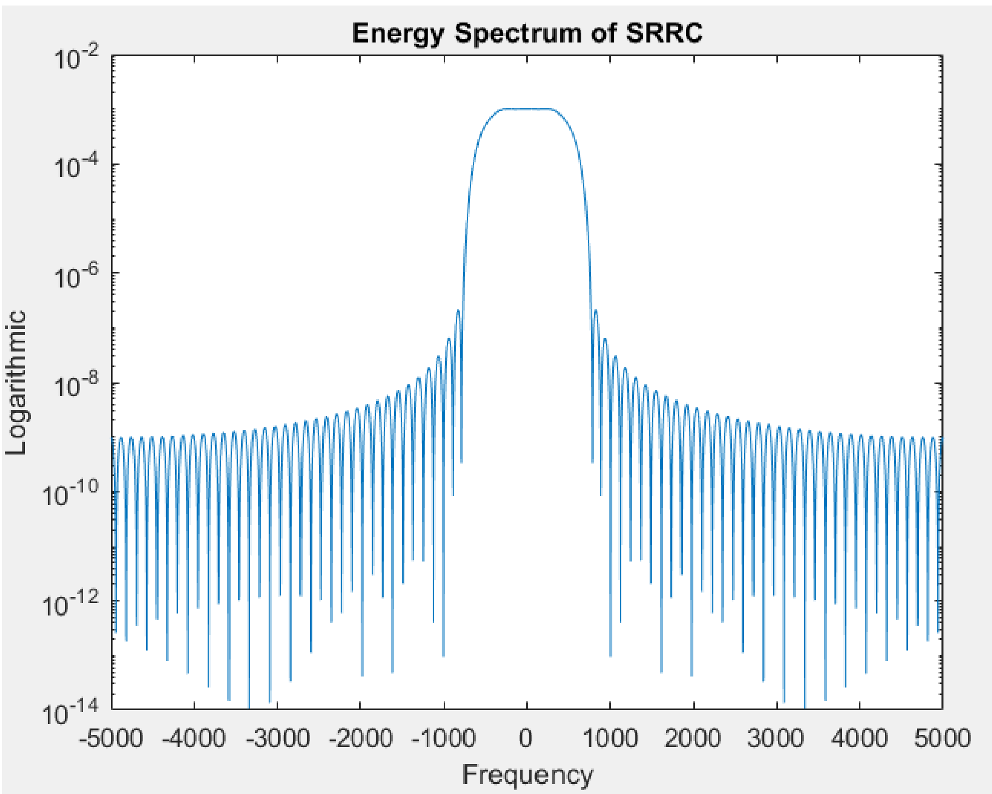
Πλήθος ωρών ενασχόλησης:**15**

A.1 Να δημιουργήσετε παλμό SRRC $\phi(t)$ με τιμές $T = 10^{-3} sec$, $over = 10$, $T_s = \frac{T}{over}$, $A = 4$, και $\alpha = 0.5$.

(10) Μέσω των συναρτήσεων fftshift και fft, να υπολογίσετε το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier της $\phi(t)$, $|\Phi(F)|$, σε N_f ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2}]$. Να σχεδιάσετε τη φασματική πυκνότητα ενέργειας $|\Phi(F)|^2$ στον κατάλληλο άξονα συχνοτήτων με χρήσης της εντολής semiilogy.

Λύση:

Έγινε χρήση της συνάρτησης *srrc_pulse.m* και επιλέγοντας τιμή $N_f = 4096$ (για να μην υπάρξουν παραμορφώσεις).



και ο κώδικας Matlab:

```
clear all;
close all;
%% Variable decleration
T = 0.001;
over = 10;
Ts = T / over;
Fs = 1 / Ts;
A = 4;
```

```
a = 0.5;
K = 500;
N = 100;
Nf = 4096;
%% A.1

% Pulse generator
grid on;
hold on;
[phi, t] = srrc_pulse(T, over, A, a);
plot(t,phi);
xlim([-A*T A*T]);
title("SRRC Pulse");
xlabel("Time");
ylabel("\phi(t)");
hold off;

% Frequency Range
f_axis = linspace(-Fs/2,(Fs/2-Fs/Nf), Nf);
% Fourier Transform
phi_F = fftshift(fft(phi,Nf)*Ts);
abs_phi_F = abs(phi_F);
phi_Energy = power(abs_phi_F,2);
figure;
semilogy(f_axis, phi_Energy);
title("Energy Spectrum of SRRC");
xlabel("Frequency");
ylabel("Logarithmic");
xlim([-Fs/2 Fs/2]);
```

A.2 Να δημιουργήσετε ακολουθία $N = 100$ ανεξάρτητων και ισοπίθανων $bits\{b_0, ..., b_{\text{N-1}}\}$. Χρησιμοποιώντας την απεικόνιση

$$0 \rightarrow +1,$$

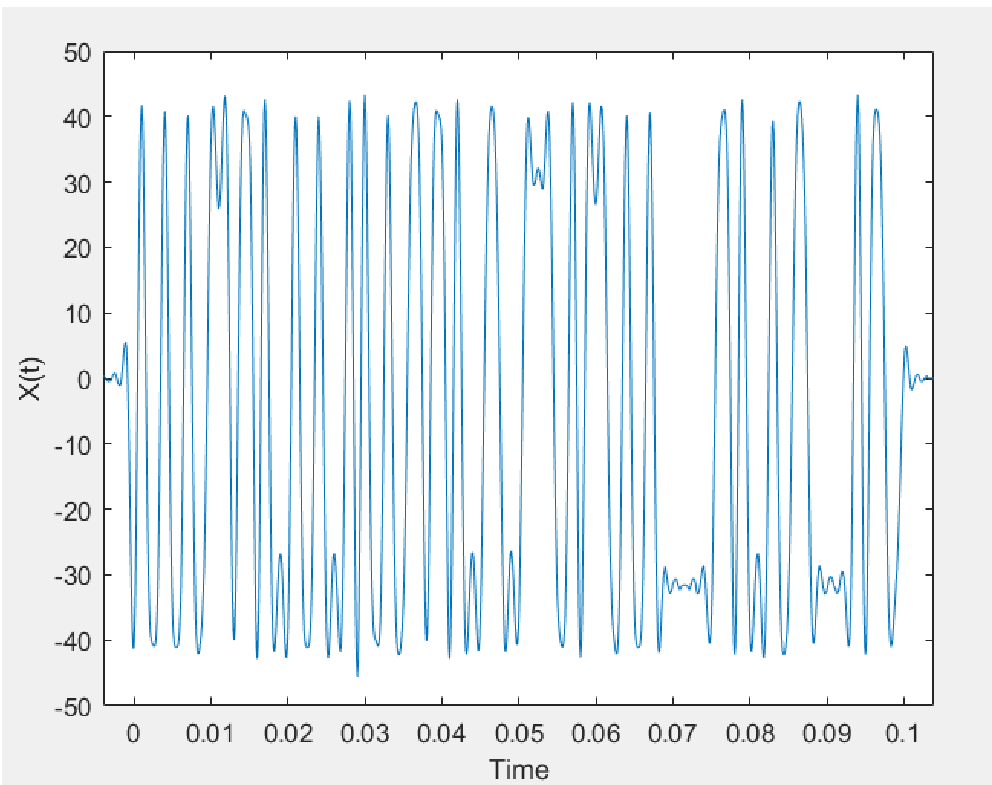
$$1 \rightarrow -1,$$

να απεικονίσετε τα bits σε σύμβολα X^{n} για $n = 0, ..., N-1$.
Να κατασκευάσετε την κυματομορφή:

$$X(t) = \sum_{n=0}^{N-1} X_{\text{n}}\phi(t - nT).$$

Λύση:

Αρχικά δημιουργήθηκε η ακολουθία bits και έπειτα μέσω της συνάρτησης *bits_to_2PAM* μετατράπηκαν σε 2-PAM σύμβολα.



και ο κώδικας Matlab:

```
%% A.2

% 2-PAM bits generator
b = (sign(randn(N, 1)) + 1)/2;
x = bits_to_2PAM(b);

% Upsample the 2-PAM bit vector
upsample_x = (1/Ts)*upsample(x, over);
upsample_x_time = 0:Ts:N*T-Ts;

% Convolution of X and phi to compute the sum
X = conv(upsample_x,phi)*Ts;
X_time = upsample_x_time(1)+t(1):Ts:upsample_x_time(end)+t(end);
figure;
plot(X_time, X);
xlabel("Time");
ylabel("X(t)");
xlim([X_time(1) X_time(end)]);
```

Υποθέτοντας ότι το πλήθος των συμβόλων είναι άπειρο, αποδείξαμε ότι η φασματική πυκνώτητα ισχύος του $X(t)$ είναι:

$$S_{\mathrm{X}}(F) = \frac{{\sigma^2}_{\mathrm{X}}}{T}|\Phi(F)|^2.$$

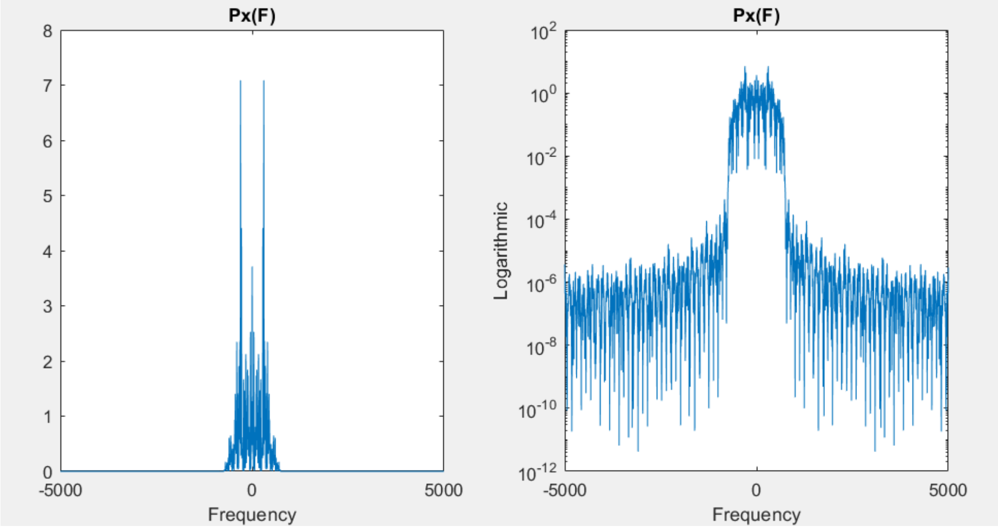
A.3 (10) Με την χρήση των συναρτήσεων fft και fftshift να υπολογίσετε το περιοδόγραμμα μιάς υλοποίησης της X(t):

$$P_{\mathrm{X}}(F) = \frac{|F(X(t))|^2}{T_{\text{total}}}.$$

Να σχεδιάσετε το $P_{\mathrm{X}}(F)$ με χρήση plot και semilogy.

Λύση:

Παρακάτω παρουσιάζεται το περιοδόγραμμα $P_X(F)$ σε δεκαδική και λογαριθμική κλίμακα:



και ο κώδικας Matlab:

```
%% A.2

% 2-PAM bits generator
b = (sign(randn(N, 1)) + 1)/2;
x = bits_to_2PAM(b);

% Upsample the 2-PAM bit vector
upsample_x = (1/Ts)*upsample(x, over);
upsample_x_time = 0:Ts:N*T-Ts;

% Convolution of X and phi to compute the sum
X = conv(upsample_x,phi)*Ts;
X_time = upsample_x_time(1)+t(1):Ts:upsample_x_time(end)+t(end);
figure;
plot(X_time, X);
xlabel("Time");
ylabel("X(t)");
xlim([X_time(1) X_time(end)]);
```

(10) Να εκτιμήσετε τη φασματική πυκνότητα ισχύος υπολογίζοντας αριθμιτικές μέσες τιμές πάνω σε K (ενδεικτικά, K=500) υλοποιήσεις περιοδογραμμάτων. Να σχεδιάσετε σε κοινό semilogy την εκτίμηση και τη θεωριτική φασματική πυκνότητα ισχύος.

Λύση:

Έγιναν οι κατάλληλοι υπολογισμοί μέσω Matlab και η εκτίμηση που πραγματοποιήθηκε συγκρίνεται με την θεωριτική φασματική πυκνότητα ισχύος η οποία προκύπτει από τον παραπάνω τύπο.

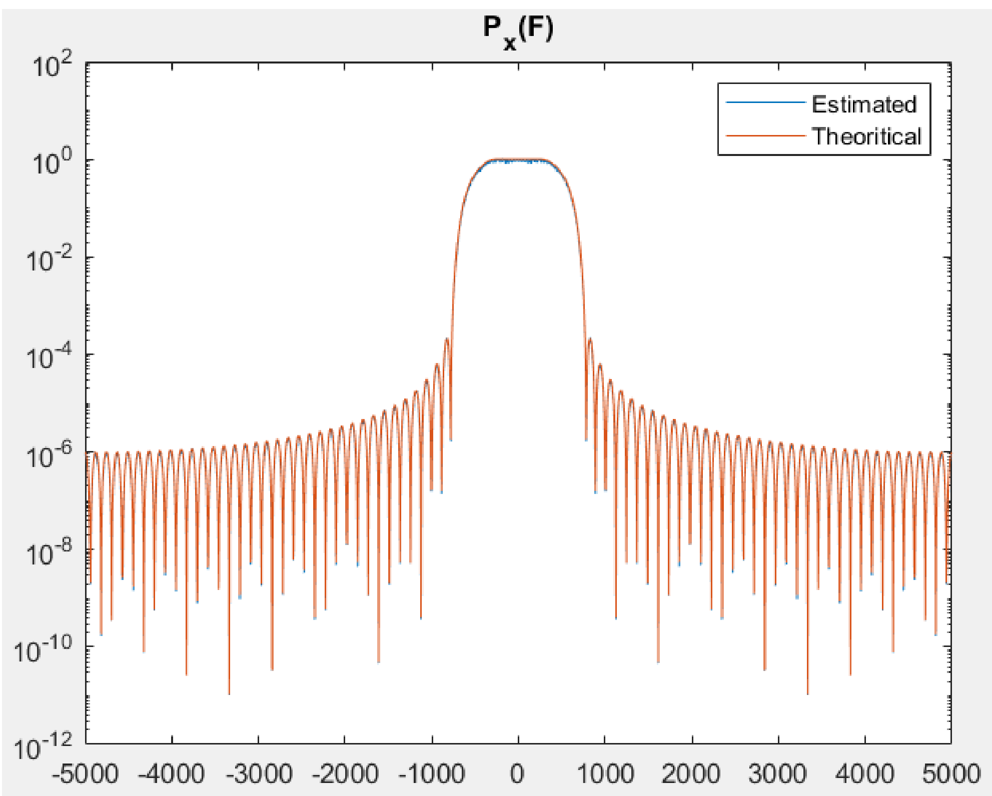
Ο υπολογισμός της διασποράς σ_X^2 προκύπτει ως εξής:

$$\sigma_X^2 = E[(X_n - E(X_n))^2] = E[X_n^2] = 1$$

Διότι:

$$E[X_n^2] = \sum x^2 p_x = (1)^2 \frac{1}{2} + (-1)^2 \frac{1}{2} = 1$$

Παρακάτω απεικονίζονται σε κοινό διάγραμμα ώστε να πραγματοποιηθεί η σύγκρισή τους:



και ο κώδικας Matlab:

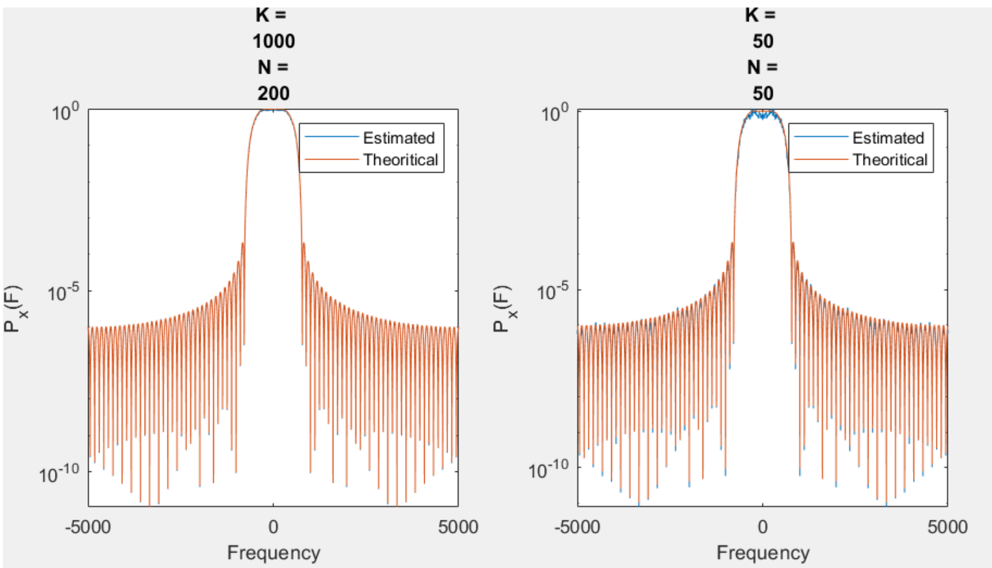
```
%% A.3
%-----------------------2-----------------------
Px_F_total = 0;
for i=1:K
    % 2-PAM bits generator
    b = (sign(randn(N, 1)) + 1)/2;
    x = bits_to_2PAM(b);

    % Upsample the 2-PAM bit vector
    upsample_x = (1/Ts)*upsample(x, over);
    %upsample_x_time = 0:Ts:N*T-Ts;

    % Convolution of X and phi to compute the sum
    X = conv(upsample_x,phi)*Ts;
    %X_time = upsample_x_time(1)+t(1):Ts:upsample_x_time(end)+t(end);

    % Create the periodogram
    X_F = fftshift(fft(X, Nf)*Ts);
    num = power(abs(X_F),2);
    T_total = X_time(end) - X_time(1);
    Px_F_total = Px_F_total + (num/T_total);
end
Px_F_estimated = Px_F_total/K;
Px_F_theoritical = 1/T*phi_Energy;

figure;
semilogy(f_axis,Px_F_estimated);
hold on;
semilogy(f_axis,Px_F_theoritical);
legend("Estimated","Theoritical");
title("P_x(F)");
xlim([-Fs/2 Fs/2]);
hold off;
```

(10) Όσο αυξάνετε το K και το N, θα πρέπει η προσέγγιση να γίνεται καλύτερη.Συμβαίνει αυτό στα πειράματά σας; Μπορείτε να εξηγήσετε αυτό το φαινόμενο;

Λύση:

Παρατηρούμε ότι για K=500 που χρησιμοποιήθηκε παραπάνω η προσέγγιση είναι αρεκτά καλή καθώς οι διακυμάνσεις των δύο γραφικών παρουσιάζουν μεγάλη ομοιότητα.

Χρησιμοποιώντας τον ίδιο κώδικα και αλλάζοντας τις τιμές των παραμέτρων N και K προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα:



και ο κώδικας Matlab:

```
%% A.3
%-----------------------3-----------------------
K_options = [1000; 50];
N_options = [200; 50];
figure;
for i=1:length(K_options)
    Px_F_total = 0;
    K_3 = K_options(i);
    N_3 = N_options(i);
    for j=1:K_3
        % 2-PAM bits generator
        b = (sign(randn(N_3, 1)) + 1)/2;
        x = bits_to_2PAM(b);

        % Upsample the 2-PAM bit vector
```

```
        upsample_x = (1/Ts)*upsample(x, over);
        upsample_x_time = 0:Ts:N_3*T-Ts;

        % Convolution of X and phi to compute the sum
        X = conv(upsample_x,phi)*Ts;
        X_time = upsample_x_time(1)+t(1):Ts:upsample_x_time(end)+t(end);

        % Create the periodogram
        X_F = fftshift(fft(X, Nf)*Ts);
        num = power(abs(X_F),2);
        T_total = X_time(end) - X_time(1);
        Px_F_total = Px_F_total + (num/T_total);
    end
    Px_F_estimated_3 = Px_F_total/K_3;
    Px_F_theoritical = 1/T*phi_Energy;

    subplot(1,2,i);
    semilogy(f_axis,Px_F_estimated_3);
    hold on;
    semilogy(f_axis,Px_F_theoritical);
    legend("Estimated","Theoritical");
    ylabel("P_x(F)");
    xlabel("Frequency");
    title(["K = ",K_3," N = ",N_3])
    xlim([-Fs/2 Fs/2]);
    hold off;
end
```

Όπως επιβεβαιώνεται και από τα παραπάνω διαγράμματα, όσο αυξάνετε το K και το N, η προσέγγιση γίνεται καλύτερη. Αυτο συμβαίνει διότι τα περιοδογράμματα ακολουθούν κανονική κατανομή, όπως και τα bits τα οποία κωδικοποιούνται και καταλήγουμε στην $X(t)$, οπότε όσο μεγαλύτερο γίνεται το δείγμα τόσο καλύτερη και πιο ακριβής γίνεται η προσέγγιση.

A.4 Χρησιμοποιώντας την απεικόνιση:

$$00 \rightarrow +3,$$

$$01 \rightarrow +1,$$

$$11 \rightarrow -1,$$

$$10 \rightarrow -3,$$

να κατασκευάσετε την ακολουθία 4-PAM X_{n}, για $n = 0, ..., \frac{N}{2} - 1$.

Λύση:

Αρχικά κατασκευάστηκε η συνάρτηση *bits_to_4PAM*:

```
function [x] = bits_to_4PAM(b)

for i = 1:2:length(b)
    bits = b(i:i+1);
    if isequal(bits, [0;0])
        x((i+1)/2) = +3;
    elseif isequal(bits, [0;1])
        x((i+1)/2) = +1;
    elseif isequal(bits, [1;1])
        x((i+1)/2) = -1;
    elseif isequal(bits, [1;0])
        x((i+1)/2) = -3;
    end
end
end
```

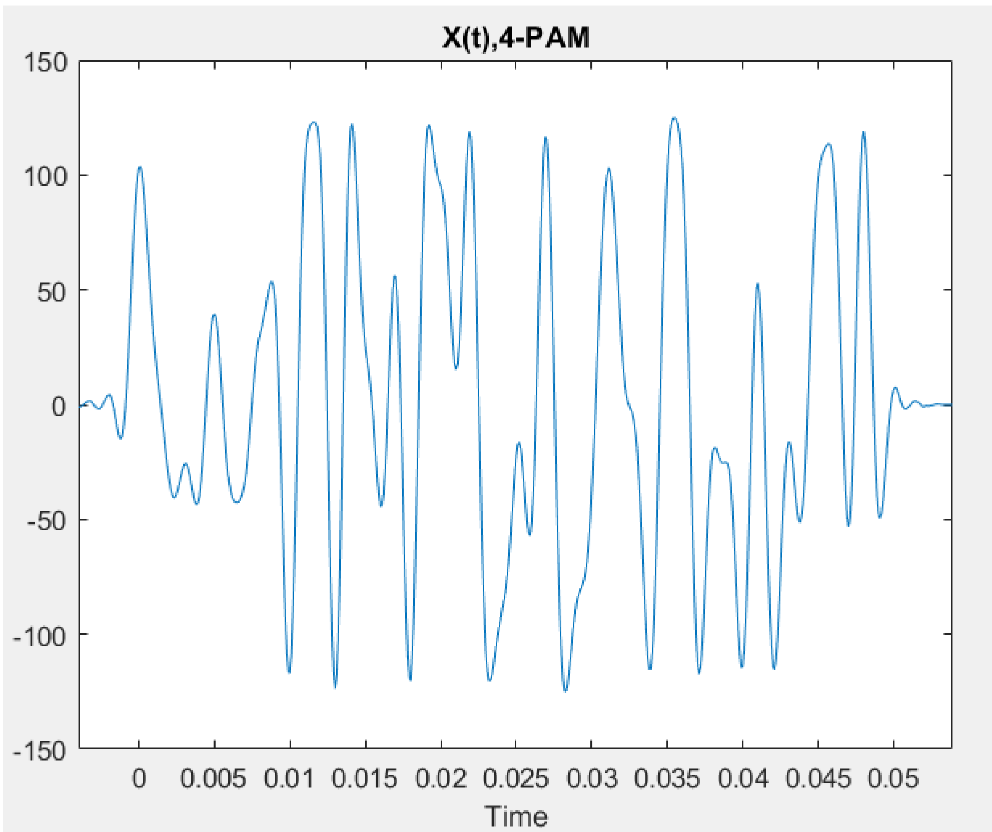
Να κατασκευάσετε την κυματομορφή:

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} X_{\mathrm{n}}\phi(t - nT).$$

χρησιμοποιώντας την ίδια περίοδο T με το ερώτημα **Α.2**.

Λύση:

Όμοια με το ερώτημα **Α.2**:



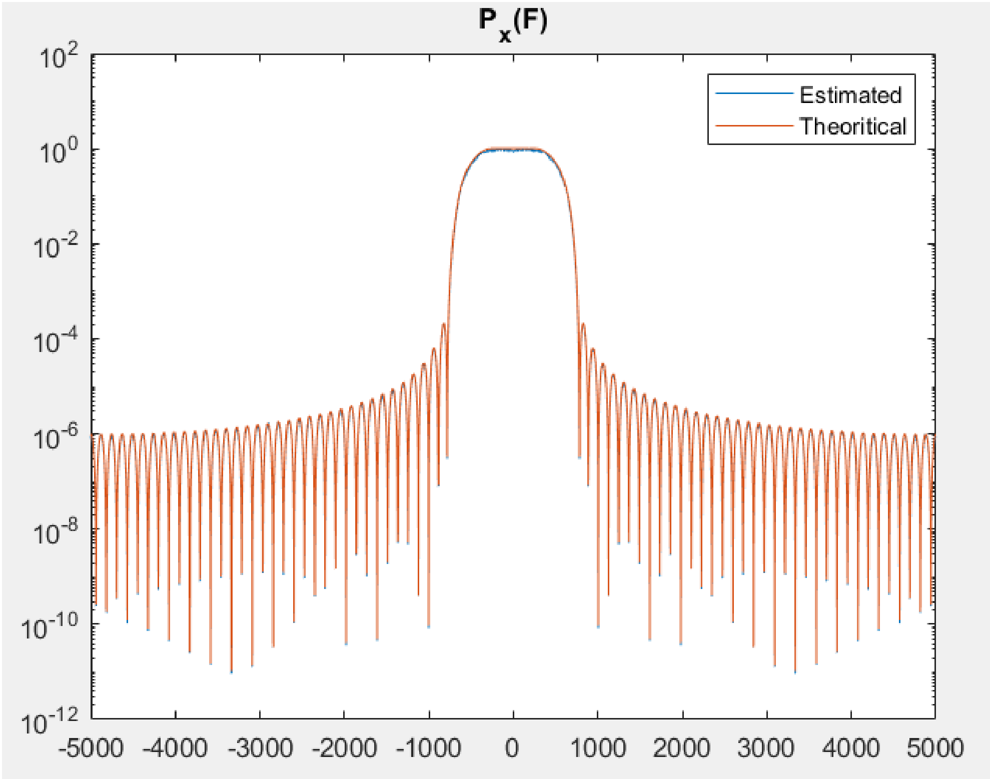
(10) Να υπολογίσετε το περιοδόγραμμα και να εκτιμήσετε τη φασματική πυκνότητα ισχύος μέσω αριθμητικών μέσων τιμών υλοποιήσεων περιοδογραμμάτων της $X(\mathrm{t})$. Να σχεδιάσετε την πειραματική και την θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος στο ίδιο semilogy. Τι παρατηρείτε;

Λύση:

Παρομοίως με το ερώτημα **Α.3**, πραγματοποιήθηκε η εκτίμηση της φασματικής πυκνότητας ισχύος. Έπειτα, για να βρεθεί η αντίστοιχη θεωρητική φασματική πυκνότητα ισχύος, ξαναχρησιμοποιήθηκε ο τύπος του **Α.3**, με την διαφορά ότι η νέα διασπορά σ_X^2 είναι:

$$\sigma_X^2 = E(X_n^2) = \sum x^2 p_x = (1)^2\frac{1}{4} + (-1)^2\frac{1}{4} + (3)^2\frac{1}{4} + (-3)^2\frac{1}{4} = 5$$

Τέλος σχεδιάστηκαν και οι δύο σε ένα κοινό διάγραμμα με λογαριθμική κλίμακα.



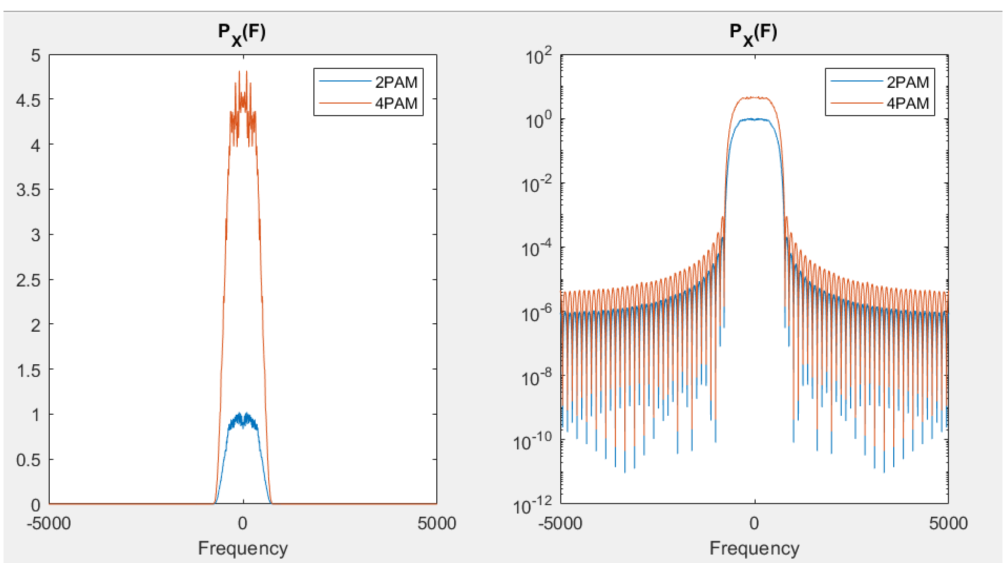
Παρατηρούμε όμοια συμπεριφορά με το ερώτημα **A.3**, για το πλήθος των περιοδογραμμάτων K=500 που χρησιμοποιήθηκαν για την εκτίμηση.

και ο κώδικας Matlab:

```
%% A.4
%----------------------1----------------------
P_x_4PAM_total = 0;
for i=1:K
    % 2-PAM bits generator
    b = (sign(randn(N, 1)) + 1)/2;
    x = bits_to_4PAM(b);

    % Upsample the 2-PAM bit vector
    x_up = (1/Ts)*upsample(x, over);
    x_up_time = 0:Ts:(N/2)*T-Ts;

    % Convolution of X and phi to compute the sum
    X = conv(x_up,phi)*Ts;
    X_time = x_up_time(1)+t(1):Ts:x_up_time(end)+t(end);

    % Fourier transform of X(t)
    x_F_4PAM = fftshift(fft(X,Nf)*Ts);
```

```

    % Create the periodogram
    T_total = X_time(end) - X_time(1);
    P_x_4PAM_num = power(abs(x_F_4PAM),2);
    P_x_4PAM_total = P_x_4PAM_total + (P_x_4PAM_num/T_total);
end

Px_F_estimated_4PAM = P_x_4PAM_total/K;
Px_F_theoritical_4PAM = 5/T*phi_Energy;

figure;
semilogy(f_axis,Px_F_estimated);
hold on;
semilogy(f_axis,Px_F_theoritical);
legend("Estimated","Theoritical");
title("P_x(F)");
xlim([-Fs/2 Fs/2]);
hold off;
```

(10) Πώς συγκρίνεται, ως προς το εύρος φάσματος και ως προς το μέγιστο πλάτος τιμών, η φασματική πυκνότητα ισχύος της $X(\mathrm{t})$ σε σχέση με αυτή της $X(\mathrm{t})$ του βήματος **A.2**; Μπορείτε να εξηγήσετε τα αποτελέσματα της σύγκρισης;



Λύση:

Απεικονίσαμε σε κοινό plot και semilogy τις φασματικές πυκνότητες ισχύος 2-PAM και 4-PAM. Παρατηρούμε ότι το εύρος φάσματος και των δύο είναι ίδιο αφού $BW = \frac{1+\alpha}{2T}$, το οποίο εξαρτάται μόνο από την συχνότητα T και το α. Στην συνέχεια, Παρατηρούμε ότι το μέγιστο πλάτος των τιμών της 4-PAM είναι σχεδόν 5 φορές μεγαλύτερο έναντι με αυτού της 2-PAM και αυτό συμβαίνει διότι η διασπορά της 4-PAM είναι μεγαλύτερη.

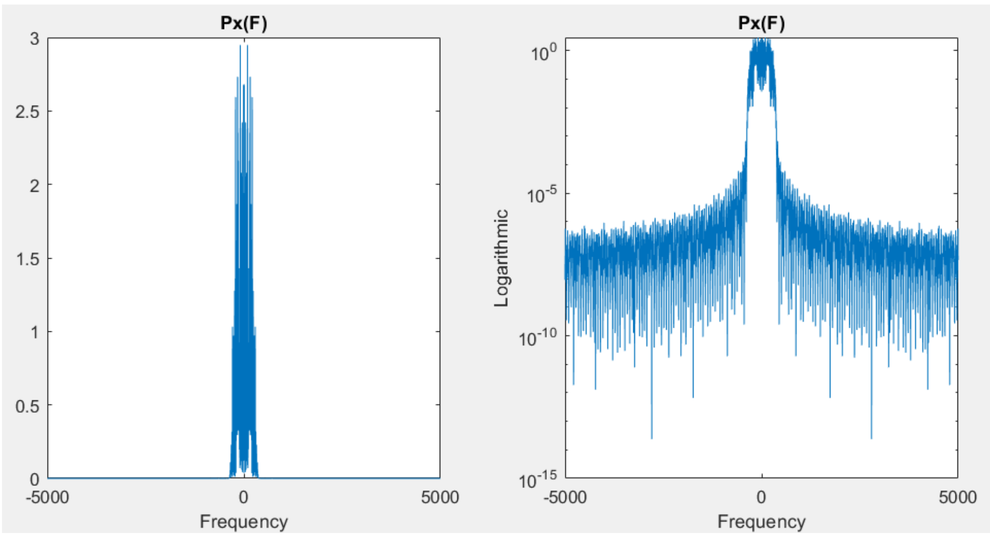
και ο κώδικας Matlab:

```
%% A.4
%---------------------2----------------------
figure;
subplot(1,2,1);
plot(f_axis, Px_F_estimated);
hold on;
plot(f_axis,Px_F_estimated_4PAM)
title("P_X(F)");
xlabel("Frequency");
legend("2PAM","4PAM");
xlim([-Fs/2 Fs/2]);
hold off;

subplot(1,2,2);
semilogy(f_axis,Px_F_estimated);
hold on;
semilogy(f_axis,Px_F_estimated_4PAM);
title("P_X(F)");
xlabel("Frequency");
legend("2PAM","4PAM");
xlim([-Fs/2 Fs/2]);
hold off;
```

A.5 (10) Να επαναλάβετε το βήμα A.3, θέτοντας περίοδο συμβόλου $T' = 2T$ (να διατηρήσετε την περίοδο δειγματοληψίας T_s ίση με αυτή των προηγούμενων βημάτων, άρα, θα πρέπει να διπλασιάσετε την παράμετρο over).

Λύση:

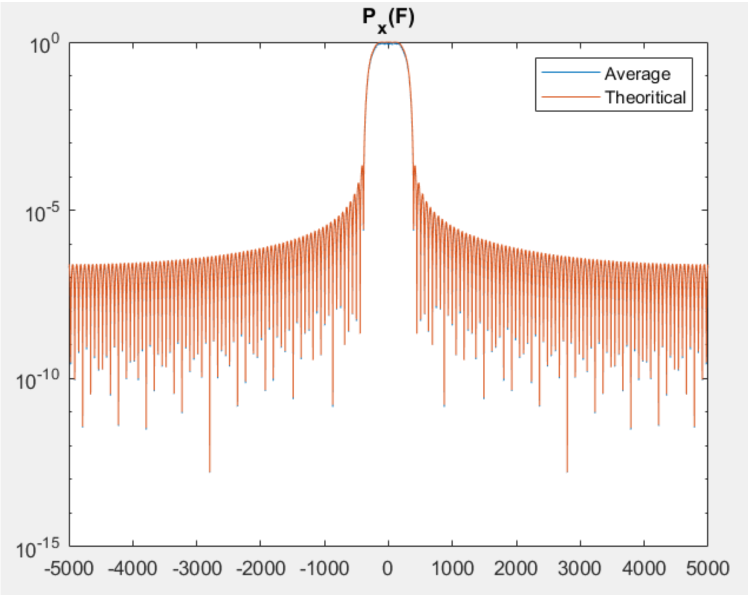
Ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία με το ερώτημα **A.3**, με $T' = 2{\cdot}10^-3$ και $over' = 20$. Παρακάτω παρουσιάζεται το περιοδόγραμμα $P_X(F)$ σε δεκαδική και λογαριθμική κλίμακα:




```
%% A.5
T = 2*T;
over = 2*over;
% Create the new pulse
[phi, t] = srrc_pulse(T, over, A, a);

phi_F = fftshift(fft(phi, Nf)*Ts);
abs_phi_F = abs(phi_F);
phi_Energy = power(abs_phi_F,2);

% 2-PAM bits generator
b = (sign(randn(N, 1)) + 1)/2;
x = bits_to_2PAM(b);

% Upsample the 2-PAM bit vector
upsample_x = (1/Ts)*upsample(x, over);
upsample_x_time = 0:Ts:N*T-Ts;

% Convolution of X and phi to compute the sum
X = conv(upsample_x,phi)*Ts;
```

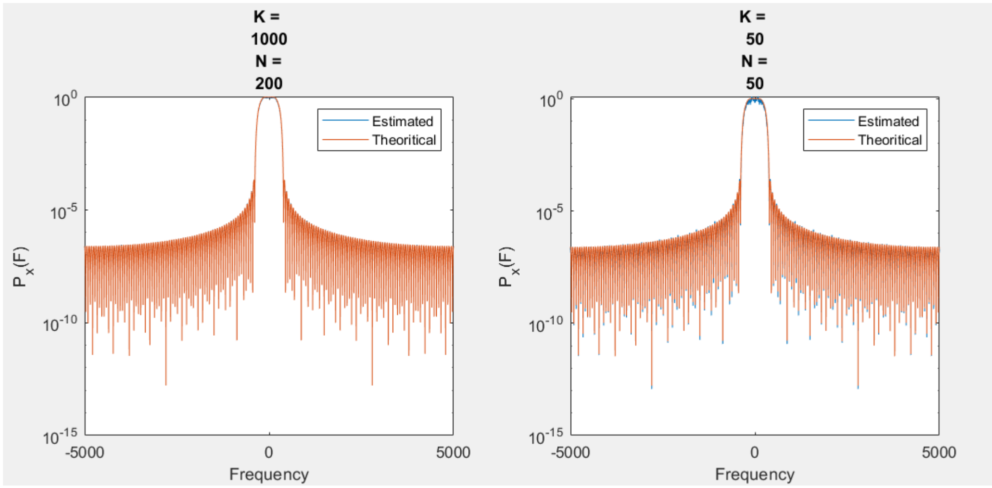
```
X_time = upsample_x_time(1)+t(1):Ts:upsample_x_time(end)+t(end);

%-----------------------1-----------------------
% Create the periodogram
X_F = fftshift(fft(X, Nf)*Ts);
num = power(abs(X_F),2);
T_total = X_time(end) - X_time(1);
Px_F = num/T_total;

% Visualize Px(F) and RF Rx(F) using log scale
figure;
subplot(1,2,1);
plot(f_axis, Px_F);
title("Px(F)");
xlabel("Frequency");
xlim([-Fs/2 Fs/2]);

subplot(1,2,2);
semilogy(f_axis,Px_F);
title("Px(F)");
xlabel("Frequency");
ylabel("Logarithmic");
xlim([-Fs/2 Fs/2]);
```

Και όμοια πάλι με το ερώτημα **A.3**, προκύπτει το κοινό διάγραμμα για την θεωρητική και την εκτιμόμενη φασματική πυκνότητα ισχύος:



```
%% A.5
%-----------------------2-----------------------
Px_F_total_2T = 0;
K = 500;
for i=1:K
    % 2-PAM bits generator
    b = (sign(randn(N, 1)) + 1)/2;
    x = bits_to_2PAM(b);

    % Upsample the 2-PAM bit vector
    upsample_x = (1/Ts)*upsample(x, over);

    % Convolution of X and phi to compute the sum
    X_t = conv(upsample_x,phi)*Ts;

    % Fourier Transform
    X_F = fftshift(fft(X_t, Nf)*Ts);
    % Create the periodogram
    num = power(abs(X_F),2);
    Px_F_total_2T = Px_F_total_2T + (num/T_total);
end
Px_F_estimated_2T = Px_F_total_2T/K;
Px_F_theoritical = 1/T*phi_Energy;

figure;
semilogy(f_axis,Px_F_estimated_2T,f_axis,Px_F_theoritical);
legend("Estimated","Theoritical");
title("P_x(F)");
xlim([-Fs/2 Fs/2]);
legend("Average","Theoritical");
```

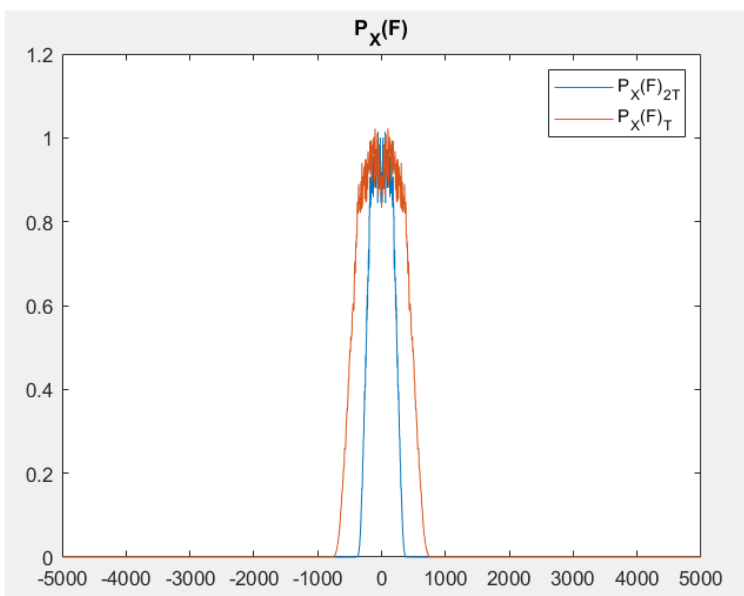
Τέλος χρησιμοποιώντας διαφορετικά K και N προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα:



(5) Τι παρατηρείτε σχετικά με το εύρος φάσματος των κυματομορφών σε αυτή την περίπτωση σε σχέση με αυτό των κυματομορφών του βήματος A.3; Μπορείτε να εξηγήσετε το φαινόμενο;

Λύση:

Κάνοντας κοινό plot των περιοδογραμμάτων των 2 ερωτημάτων:



Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι για $T' = 2T$ μείωνεται εμφανώς το το εύρος φάσματος, πράγμα που επιβεβαιώνεται και από την θεωρία αφού $BW = \frac{1+\alpha}{2T}$.

A.6 (2.5) Αν θέλατε να στείλετε δεδομένα όσο το δυνατό ταχύτερα έχοντας διαθέσιμο το ίδιο εύρος φάσματος, θα επιλέγατε 2-PAM ή 4-PAM, και γιατί;

Λύση:

Για να επιτευχθεί η ταχύτερη διάδοση δεδομένων έχοντας διαθέσιμο το ίδιο εύρος φάσματος, θα επιλέγαμε 4-PAM καθώς αντιστοιχίζονται δύο bits ανα σύμβολο σε αντίθεση με το 2-PAM που αντιστοιχίζεται ένα. Επομένως στέλνονται περισσότερα bits πληροφορίας στον ίδιο χρόνο.

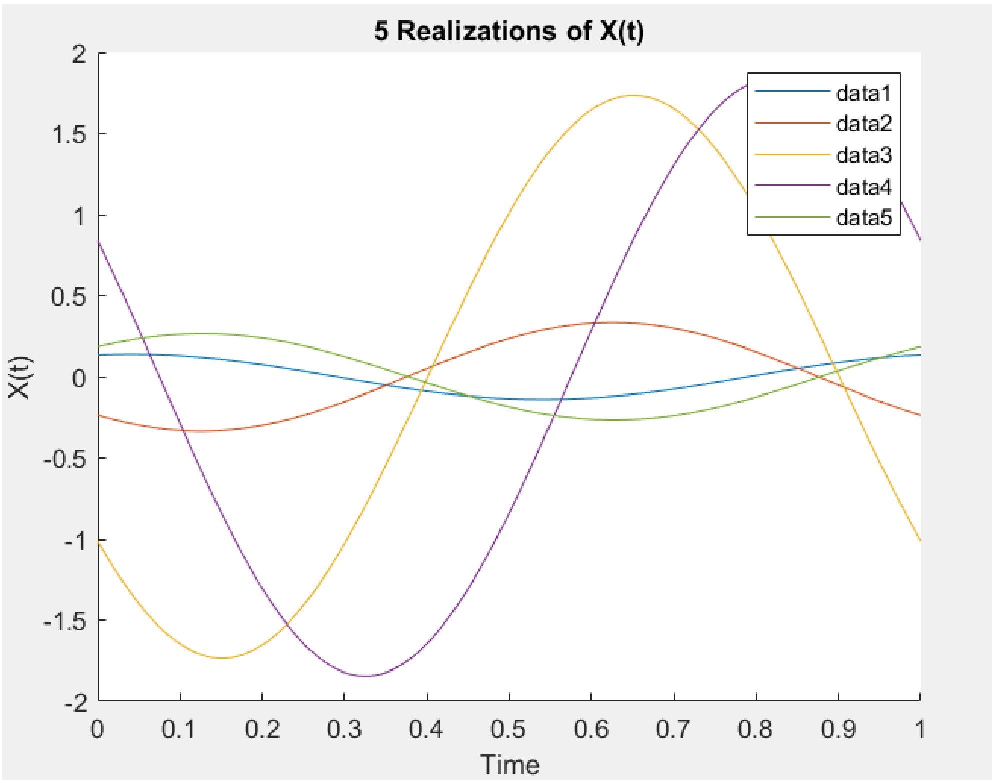
(2.5) Αν το διαθέσιμο εύρος φάσματος είναι πολύ ακριβό, θα επιλέγατε περίοδο συμβόλου T ή $T' = 2T$, και γιατί;

Λύση:

Αν το διαθέσιμο εύρος φάσματος είναι πολύ ακριβό, θα επιλέγαμε περίοδο συμβόλου $T' = 2T$ καθώς, όπως δείξαμε και στο ερώτημα **A.5**, θα έδινε μικρότερο εύρος φάσματος και έτσι θα εξοικονομούνταν στην μετάδοση το μισό φάσμα.

B Έστω
$$Y(t) = X\cos(2\pi F_0 t + \Phi),$$
όπου $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\Phi \sim U[0, 2\pi)$, και X, Φ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

(5) Να σχεδιάσετε σε κοινό plot 5 υλοποιήσεις της.



και ο κώδικας Matlab:

```
clear all;
close all;
%% Variable declaration
Fo = 1;
T = 1;
Fs = 1000;
num_of_realizations = 5;
%% B.1

% Create time axis
t = linspace(0, T, T*Fs);

% Plot realizations
figure;
hold on;
```

```
for i = 1:num_of_realizations
    X = randn;
    phi = 2*pi*rand;
    Y = X* cos(2*pi*Fo*t + phi);
    plot(t, Y);
end

xlabel('Time');
ylabel('X(t)');
title('5 Realizations of X(t)');
legend show;
hold off;
```

(10) Να υπολογίσετε τις ποσότητες $E[Y(t)]$ και $R_{\mathrm{YY}}(t+\tau,t) = E[(Y(t+\tau)Y(t)]$. Τι διαπιστώνετε;

Λύση:

i)Αρχικά έχουμε:

$$E[Y(t)] = E[X(t)\cdot\cos(2\pi F_0 t + \Theta)] = E[X(t)]\cdot E[\cos(2\pi F_0 t + \Theta] \tag{1}$$

Επειδή οι X και Θ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, έχουμε:

$$E[X(t)] = E[\sum_{n=0}^{N-1} X_n \phi(t-nT)] = \sum_{n=0}^{N-1} E[X_n \phi(t-nT)] = \sum_{n=0}^{N-1} E[X_n]\phi(t-nT) = 0 \tag{2}$$

διότι τα X_n προκύπτουν από ομοιόμορφη κατανομή. Επομένως από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$E[Y(t)] = 0$$

ii)Στη συνέχεια, έχουμε:

$$R_{\mathrm{YY}}(t+\tau,t) = E[Y(t+\tau)\cdot Y(t)] = E[X(t+\tau)\cdot\cos(2\pi f_0(t+\tau)+\Theta)\cdot X(t)\cdot\cos(2\pi f_0 t+\Theta)]$$

$$= E[X(t+\tau)\cdot X(t)]\cdot E[\cos(2\pi f_0(t+\tau)+\Theta)\cdot\cos(2\pi f_0(t)+\Theta)]$$

ϑα ϑέσουμε $t+\tau = t_1$ και $t = t_2$, οπότε:

$$E[X(t+\tau)\cdot X(t)] = E[X(t_1)\cdot X(t_2)] = E[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n\phi(t_1-nT)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n\phi(t_2-nT)]$$

$$= E[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^2\cdot\phi(t_1-nT)\phi(t_2-nT)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E[X_n^2]\cdot\phi(t_1-nT)\phi(t_2-nT) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_X^2 \cdot \phi(t+\tau-nT)\phi(t-nT)$$

και επιπλέον έχουμε:

$$E[\cos(2\pi f_0 t_1+\Theta)\cdot\cos(2\pi f_0 t_2+\Theta)] = E[\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0(t_1-t_2)) + \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0(t_1+t_2)+2\Theta)] =$$

$$E[\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0(t_1-t_2))] + E[\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0(t_1+t_2)+2\Theta)] = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0(t_1-t_2)) + 0 =$$

$$\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0(t+\tau-t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau)$$

Επομένως:

$$E(Y(t+\tau)Y(t)) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_X^2 \cdot \phi(t+\tau-nT)\phi(t-nT)\right)\cdot\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau).$$

(5) Να υπολογίσετε τη φασματική πυκνότητα ισχύος, $S_Y(F)$.

Λύση:

Η Φασματική πυκνότητα ισχύος της $Y(t)$ ορίζεται ως $S_Y(F) = \mathcal{F}\{\overline{R}_Y\}$ με $\overline{R}_Y(\tau) \xrightarrow{\mathcal{F}} \overline{R}_Y(F)$. Άρα έχουμε:

$$\overline{R}_Y(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_{YY}(t+\tau,t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_{XX}(t+\tau,t)\cdot\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau)\,dt$$

$$= \frac{1}{2T}\cos(2\pi f_0\tau)\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_{XX}(t+\tau,t)\,dt = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau)\cdot\overline{R}_X(\tau)$$

Άρα:

$$S_Y(F) = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{\cos(2\pi f_0\tau)\cdot R_X(\tau)\right\} = \frac{1}{4}\left(S_X(F+f_0)+S_X(F-f_0)\right)$$