

EAIIB	Michał Kilian		Rok II	Grupa 5a	
Temat: Wahadło proste			Numer ćwiczenia: 0		
Data wykonania 10.10.2018r.	Data oddania 12.10.2018r.	Zwrot do poprawki	Data oddania	Data zaliczenia	Ocena

## 1 Cel ćwiczenia

Zaznajomienie się z typowymi metodami opracowania danych pomiarowych przy wykorzystaniu wyników pomiarów dla wahadła prosto

Wahadło matematyczne to punktowa masa  $m$  zawieszona na nieważkiej i nierozciągliwej lince poruszająca w jednorodnym polu grawitacyjnym. W doświadczeniu wykorzystamy bardzo dobre przybliżenie takiego układu jakim jest ciężka metalowa kulka zawieszona na nitce.

Aby znacząco uprościć obliczenia przyjmiemy  $\sin \theta \approx \theta$  co jest prawdą dla małych wartości kąta  $\theta$  zgodnie z twierdzeniem Taylora. Dzięki temu ograniczamy wpływ oporu powietrza na wyniki, a z uproszczonego równania ruchu wahadła uzyskujemy następującą zależność

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1)$$

gdzie  $T$  - okres drgań,  $l$  - długość nici,  $g$  - przyspieszenie grawitacyjne. Po przekształceniu otrzymujemy wzór roboczy pozwalający na wyznaczenie wartości przyspieszenia grawitacyjnego dla Ziemi

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \quad (2)$$

## 2 Wykonanie ćwiczenia

1. Zapoznać się z budową mikroskopu
2. Na obu powierzchniach płytki zrobić kreski, jedna nad drugą cienkim pisakiem (ewentualnie wykorzystać istniejące kreski)
3. Zmierzyć śrubą mikrometryczną grubość płytki  $d$  w pobliżu kresek.
4. Ustaw badaną płytkę na stoliku mikroskopu w uchwycie i dobierz ostrość tak by uzyskać kontrastowy obraz. Regulując położenie stolika pokrętle 7a zaobserwuj górny i dolny ślad zaznaczony na płytce.
5. Pokrętle 7b przesunąć stolik mikroskopu do momentu uzyskania ostrego obrazu śladu na górnej powierzchni płytki.
6. Odczytaj położenie  $a_g$  wskazówki czujnika mikrometrycznego.
7. Przesunąć stolik mikroskopu do położenia, w którym widoczny jest ślad na dolnej powierzchni płytki (pokrętle 7b).
8. Ponownie odczytaj położenie  $a_d$  wskazówki czujnika.
9. Odczyty zanotuj w tabeli 1, 2 lub 3.

## 3 Wyniki pomiarów

Obliczenie grubości rzeczywistej dla płytki szklanej WSTAWIĆ OBLICZENIA

Tablica 1:

materiał: szkło grubość rzeczywista $d =$ WSTAWIĆ[mm] niepewność $u(d) = 0,01$ [mm]			
lp.	Wskazanie czujnika		grubość pozorna
	$a_d$ [mm]	$a_g$ [mm]	$h = a_d - a_g$ [mm]
1	4,19	1,13	3,06
2	4,23	1,02	3,21
3	4,22	1,14	3,08
4	4,21	1,15	3,06
5	4,17	1,17	3,00
6	4,16	1,19	2,97
7	4,16	1,17	2,99
8	4,21	1,15	3,06
9	4,19	1,17	3,02
10	4,19	1,19	3,00

średnia grubość pozorna  $h$  -  
niepewność  $u(h)$  -

# Obliczenie grubości rzeczywistej dla płytki pleksiglasowej WSTAWIĆ OBLICZENIA

Tablica 2:

materiał: pleksiglas grubość rzeczywista $d = \text{WSTAWIĆ[mm]}$ niepewność $u(d) = 0,01[\text{mm}]$			
lp.	Wskazanie czujnika		grubość pozorna
	$a_d[\text{mm}]$	$a_g[\text{mm}]$	$h = a_d - a_g[\text{mm}]$
1	4,39	1,74	2,65
2	4,38	1,80	2,38
3	4,36	1,74	2,62
4	4,35	1,79	2,56
5	4,35	1,76	2,59
6	4,42	1,82	2,60
7	4,39	1,76	2,63
8	4,38	1,79	2,59
9	4,41	1,78	2,63
10	4,33	1,78	2,55

średnia grubość pozorna  $h$  -  
 niepewność  $u(h)$  -

## 4 Opracowanie wyników pomiarów

1. Oblicz moment bezwładności  $I_0$  względem rzeczywistej osi obrotu korzystając z wzoru na okres drgań.
2. Korzystając z twierdzenia Steinera oblicz moment bezwładności  $I_S$  względem osi przechodzącej przez środek masy.
3. Oblicz również moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy  $I_S^{(geom)}$  na podstawie masy i wymiarów geometrycznych.
4. Oblicz lub przyjmij niepewności wielkości mierzonych bezpośrednio: okresu  $T$ , masy  $m$  i wymiarów geometrycznych.
5. Oblicz niepewność złożoną momentu bezwładności  $I_0$  oraz  $I_S$ .
6. Obliczyć niepewność  $u_c(I_S^{(geom)})$ .
7. Która z obydwu metod wyznaczania momentu bezwładności jest dokładniejsza?
8. Czy w granicach niepewności rozszerzonej obydwa wyniki pomiaru są zgodne?

*Obliczenia dla pręta*

ad 1: Przekształcając

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mga}}$$

otrzymujemy

$$I_0 = \frac{mgaT^2}{4\pi^2} = \frac{663 * 10^{-3} * 9,81 * 274 * 10^{-3} * (1,32)^2}{4 * 3,14^2} = 0,0787[kg * m^2]$$

ad 2: Z twierdzenia Steinera

$$I_S = I_0 - ma^2 = 0,0787 - (663 * 10^{-3} * (274 * 10^{-3})^2) = 0,0289[kg * m^2]$$

ad 3: Z podręcznika odczytujemy

$$I_S^{geom} = \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{12} * 663 * 10^{-3} * (748 * 10^{-3})^2 = 0,0309[kg * m^2]$$

ad 4: Niepewności okresu (typu A):

$$\bar{T} = \frac{\sum T_i}{n} \approx \frac{13,2}{10} = 1,32[s]; \quad u(T) = \sqrt{\frac{\sum (T_i - \bar{T})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{0,0004}{90}} = 0,0021[s]$$

Niepewność masy:  $u(m) = 1g = 0,0010kg$

Niepewność długości pręta:  $u(l) = 1mm = 0,0010m$

Niepewność odległości  $a = l/2 - b$ :  $u(a) = 0,5mm = 0,0005m$

ad 5: Dla  $I_0$  stosujemy prawo przenoszenia niepewności względnych i otrzymujemy

$$\frac{u(I_0)}{I_0} = \sqrt{\left[\frac{u(m)}{m}\right]^2 + \left[\frac{u(a)}{a}\right]^2 + \left[2\frac{u(T_0)}{T_0}\right]^2} = \sqrt{\left(\frac{0,0010}{0,663}\right)^2 + \left(\frac{0,0005}{0,274}\right)^2 + \left(2\frac{0,0021}{1,32}\right)^2} = 0,0040$$

$$u(I_0) = 0,0040 * 0,0787 = 0,0003[kg * m^2]$$

Dla  $I_S$  stosujemy zwykle prawo przenoszenia niepewności i otrzymujemy

$$\begin{aligned} u(I_S) &= \sqrt{[u(I_0)]^2 + [a^2 * u(m)]^2 + [-2am * u(a)]^2} = \\ &= \sqrt{0,0003^2 + (0,274^2 * 0,001)^2 + (-2 * 0,274 * 0,663 * 0,0005)^2} = \\ &= 0,0004[kg * m^2] \end{aligned}$$

ad 6: Z prawa przenoszenia niepewności względnych otrzymujemy:

$$\frac{u(I_S^{(geom)})}{I_S^{(geom)}} = \sqrt{\left[\frac{u(m)}{m}\right]^2 + \left[2 * \frac{u(l)}{l}\right]^2} = \sqrt{\left(\frac{0,001}{0,663}\right)^2 + \left(2\frac{0,001}{0,748}\right)^2} = 0,0031$$

$$u(I_S^{(geom)}) = 0,0031 * 0,0309 = 0,0001[kg * m^2]$$

ad 7: Niepewność dla wzoru podręcznikowego jest mniejsza niż niepewność przy stosowaniu wzoru Steinera więc sposób obliczania momentu bezwładności korzystając z masy i wymiarów geometrycznych jest dokładniejszy.

ad 8: Obliczamy stosunek

$$\frac{|I_S - I_S^{(geom)}|}{\sqrt{u^2(I_S) + u^2(I_S^{(geom)})}} = \frac{|0,0289 - 0,0309|}{\sqrt{0,0004^2 + 0,0001^2}} = \frac{0,002}{0,0004} = 5$$

Ponieważ współczynnik jest większy od 2 wyników nie można uznać za zgodne.

### Obliczenia dla pierścienia

ad 1: Przekształcając

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mga}}$$

otrzymujemy

$$I_0 = \frac{mgaT^2}{4\pi^2} = \frac{1343 * 10^{-3} * 9,81 * 130 * 10^{-3} * (1,02)^2}{4 * 3.14^2} = 0,0452[kg * m^2]$$

ad 2: Z twierdzenia Steinera

$$I_S = I_0 - ma^2 = 0,452 - (1343 * 10^{-3} * (130 * 10^{-3})^2) = 0,0225[kg * m^2]$$

ad 3: Z podręcznika odczytujemy

$$I_S^{geom} = \frac{1}{2}m(R_z^2 + R_w^2) = \frac{1}{2} * 1343 * 10^{-3} * (0,140^2 + 0,126^2) = 0,0238[kg * m^2]$$

ad 4: Niepewność okresu (typu A):

$$\bar{T} = \frac{\sum T_i}{n} \approx \frac{10,2}{10} = 1,02[s]; \quad u(T) = \sqrt{\frac{\sum (T_i - \bar{T})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{0,0005}{90}} = 0,0024[s]$$

Niepewność masy:  $u(m) = 1g = 0,0010kg$

Niepewność długości średnicy zewnętrznej:  $u(R_z) = 1mm = 0,0010m$

Niepewność długości średnicy wewnętrznej:  $u(R_w) = 1mm = 0,0010m$

Niepewność pomiaru  $e = 1mm = 0,0010$

Niepewność długości  $a = R_z/2 - e : u(a) = 0,5mm = 0,0005m$

ad 5: Dla  $I_0$  stosujemy prawo przenoszenia niepewności względnych i otrzymujemy

$$\frac{u(I_0)}{I_0} = \sqrt{\left[\frac{u(m)}{m}\right]^2 + \left[\frac{u(a)}{a}\right]^2 + \left[2\frac{u(T_0)}{T_0}\right]^2} = \sqrt{\left(\frac{0,0010}{1,343}\right)^2 + \left(\frac{0,0005}{0,130}\right)^2 + \left(2\frac{0,0024}{1,02}\right)^2} = 0,0061$$

$$u(I_0) = 0,0061 * 0,0452 = 0,0003[kg * m^2]$$

Dla  $I_S$  stosujemy zwykłe prawo przenoszenia niepewności i otrzymujemy

$$\begin{aligned} u(I_S) &= \sqrt{[u(I_0)]^2 + [a^2 * u(m)]^2 + [-2am * u(a)]^2} = \\ &= \sqrt{0,0003^2 + (0,130^2 * 0,001)^2 + (-2 * 0,130 * 1,343 * 0,0005)^2} = \\ &= 0,0003[kg * m^2] \end{aligned}$$

ad 6: Z prawa przenoszenia niepewności względnych otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\frac{u(I_S^{(geom)})}{I_S^{(geom)}} &= \sqrt{\left[\frac{u(m)}{m}\right]^2 + \left[2 * \frac{u(R_z)}{R_z}\right]^2 + \left[2 * \frac{u(R_w)}{R_w}\right]^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{0,001}{1,343}\right)^2 + \left(2 \frac{0,0005}{0,140}\right)^2 + \left(2 \frac{0,0005}{0,126}\right)^2} = 0,0107 \\ u(I_S^{(geom)}) &= 0,0107 * 0,0238 = 0,0003[kg * m^2]\end{aligned}$$

ad 7: Niepewność dla wzoru podręcznikowego i niepewność przy stosowaniu wzoru Steinera są takie same więc w tym wypadku obie metody były równie dokładne.

ad 8: Obliczamy stosunek

$$\frac{|I_S - I_S^{(geom)}|}{\sqrt{u^2(I_S) + u^2(I_S^{(geom)})}} = \frac{|0,0225 - 0,0238|}{\sqrt{0,0003^2 + 0,0003^2}} = \frac{0,0013}{0,0004} = 2,75$$

Ponieważ współczynnik jest większy od 2 wyników nie można uznać za zgodne.

Tablica 3: Wyniki obliczeń momentów bezwładności dla pręta

	$I_0$ z okresu drgań $[kg * m^2]$	$I_S$ z twierdzenia Steinera $[kg * m^2]$	$I_S^{(geom)}$ $[kg * m^2]$
Wartość	0,0787	0,0289	0,0309
Niepewność	0,0003	0,0004	0,0001

Tablica 4: Wyniki obliczeń momentów bezwładności dla pierścienia

	$I_0$ z okresu drgań $[kg * m^2]$	$I_S$ z twierdzenia Steinera $[kg * m^2]$	$I_S^{(geom)}$ $[kg * m^2]$
Wartość	0,0452	0,0225	0,0238
Niepewność	0,0003	0,0003	0,0003

## 5 Wnioski

Moment bezwładności obliczony dla pręta z pomiaru czasu drgań wahadła wynosi  $0,0787 \pm 0,0003[kg \cdot m^2]$ . Nie jest to wartość zgodna z wartością odczytaną z podręcznika, która wynosi  $0,0289[kg * m^2]$ . Zatem wyników nie możemy uznać za poprawne.

Moment bezwładności obliczony dla pierścienia z pomiaru czasu drgań wahadła wynosi  $0,0452 \pm 0,0003[kg \cdot m^2]$ . Nie jest to wartość zgodna z wartością odczytaną z podręcznika, która wynosi  $0,0238[kg * m^2]$ . Zatem wyników nie możemy uznać za poprawne.

Pomiary były dokonywane ręcznie, a na poprawność wyników mógł wpłynąć czas reakcji człowieka, który decydował czy mierzony przyrząd jest w tej samej fazie z której rozpoczynany był pomiar. Dodatkowo określenie kąta wychylenia było subiektywne, a nie powinno przekraczać trzech stopni.