<table>
<tr><td>EAIiIB</td><td colspan="2">Michał Kilian</td><td>Rok II</td><td colspan="2">Grupa 5a</td></tr>
<tr><td colspan="3">Temat:
Wahadło proste</td><td colspan="3">Numer ćwiczenia:
0</td></tr>
<tr><td>Data wykonania
10.10.2018r.</td><td>Data oddania
12.10.2018r.</td><td>Zwrot do poprawki</td><td>Data oddania</td><td>Data zaliczenia</td><td>Ocena</td></tr>
</table>

1 Cel ćwiczenia

Zaznajomienie się z typowymi metodami opracowania danych pomiarowych przy wykorzystaniu wyników pomiarów dla wahadła pro stego

Wahadło matematyczne to punktowa masa m zawieszona na nieważkiej i nierozciągliwej lince poruszająca w jednorodnym polu grawitacyjnym. W doświadczeniu wykorzystamy bardzo dobre przybliżenie takiego układu jakim jest ciężka metalowa kulka zawieszona na nitce.

Aby znacząco uprościć obliczenia przyjmiemy $\sin\theta \approx \theta$ co jest prawdą dla małych wartości kąta θ zgodnie z twierdzeniem Taylora. Dzięki temu ograniczamy wpływ oporu powietza na wyniki, a z uproszczonego równania ruchu wahadła uzyskujemy następujacą zależność

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1}$$

gdzie T - okres drgań, l - długość nici, g - przyspieszenie grawitacyjne. Po przekształceniu otrzymujemy wzór roboczy pozwalający na wyznaczenie wartości przyspieszenia grawitacyjnego dla Ziemi

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \tag{2}$$

2 Wykonanie ćwiczenia

1. Zapoznać się z budową mikroskopu
2. Na obu powierzchniach płytki zrobić kreski, jedna nad drugą cienkim pisakiem (ewentualnie wykorzystać istniejące kreski)
3. Zmierzyć śrubą mikrometryczną grubość płytki d w pobliżu kresek.
4. Ustaw badaną płytkę na stoliku mikroskopu w uchwycie i dobierz ostrość tak by uzyskać kontrastowy obraz. Regulując położenie stolika pokrętłem 7a zaobserwuj górny i dolny ślad zaznaczony na płytce.
5. Pokrętłem 7b przesuń stolik mikroskopu do momentu uzyskania ostrego obrazu śladu na górnej powierzchni płytki.
6. Odczytaj położenie a_g wskazówki czujnika mikrometrycznego.
7. Przesuń stolik mikroskopu do położenia, w którym widoczny jest ślad na dolnej powierzchni płytki (pokrętłem 7b).
8. Ponownie odczytaj położenie a_d wskazóWki czujnika.
9. Odczyty zanotuj w tabeli 1, 2 lub 3.

3 Wyniki pomiarów

Obliczenie grubości rzeczywistej dla płytki szklanej WSTAWIĆ OBLICZENIA

Tablica 1:

materiał: szkło grubość rzeczywista d = WSTAWIĆ[mm] niepewność $u(d) = 0,01$[mm]			
lp.	Wskazanie czujnika		grubość pozorna
	a_d[mm]	a_g[mm]	$h = a_d - a_g$[mm]
1	4,19	1,13	3,06
2	4,23	1,02	3,21
3	4,22	1,14	3,08
4	4,21	1,15	3,06
5	4,17	1,17	3,00
6	4,16	1,19	2,97
7	4,16	1,17	2,99
8	4,21	1,15	3,06
9	4,19	1,17	3,02
10	4,19	1,19	3,00

średnia grubość pozorna h -
niepewność $u(h)$ -

Obliczenie grubości rzeczywistej dla płytki pleksiglasowej WSTAWIĆ OBLICZENIA

Tablica 2:

materiał: pleksiglas grubość rzeczywista d = WSTAWIĆ[mm] niepewność $u(d) = 0,01$[mm]			
lp.	Wskazanie czujnika		grubość pozorna
	a_d[mm]	a_g[mm]	$h = a_d - a_g$[mm]
1	4,39	1,74	2,65
2	4,38	1,80	2,38
3	4,36	1,74	2,62
4	4,35	1,79	2,56
5	4,35	1,76	2,59
6	4,42	1,82	2,60
7	4,39	1,76	2,63
8	4,38	1,79	2,59
9	4,41	1,78	2,63
10	4,33	1,78	2,55

średnia grubość pozorna h -

niepewność $u(h)$ -

4 Opracowanie wyników pomiarów

1. Oblicz moment bezwładności I_0 względem rzeczywistej osi obrotu korzystając z wzoru na okres drgań.
2. Korzystając z twierdzenia Steinera oblicz moment bezwładności I_S względem osi przechodzącej przez środek masy.
3. Oblicz również moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy $I_S^{(geom)}$ na podstawie masy i wymiarów geometrycznych.
4. Oblicz lub przyjmij niepewności wielkości mierzonych bezpośrednio: okresu T, masy m i wymiarów geometrycznych.
5. Oblicz niepewność złożoną momentu bezwładności I_0 oraz I_S.
6. Obliczyć niepewność $u_c(I_S^{(geom)})$.
7. Która z obydwu metod wyznaczania momentu bezwładności jest dokładniejsza?
8. Czy w granicach niepewności rozszerzonej obydwa wyniki pomiaru są zgodne?

Obliczenia dla pręta

ad 1: Przekształcając

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mga}}$$

otrzymujemy

$$I_0 = \frac{mgaT^2}{4\pi^2} = \frac{663 * 10^{-3} * 9,81 * 274 * 10^{-3} * (1,32)^2}{4 * 3.14^2} = 0,0787[kg * m^2]$$

ad 2: Z twierdzenia Steinera

$$I_S = I_0 - ma^2 = 0,0787 - (663 * 10^{-3} * (274 * 10^{-3})^2) = 0,0289[kg * m^2]$$

ad 3: Z podręcznika odczytujemy

$$I_S^{geom} = \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{12} * 663 * 10^{-3} * (748 * 10^{-3})^2 = 0,0309[kg * m^2]$$

ad 4: Niepewności okresu (typu A):

$$\bar{T} = \frac{\sum T_i}{n} \approx \frac{13,2}{10} = 1,32[s]; \quad u(T) = \sqrt{\frac{\sum(T_i - \bar{T})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{0,0004}{90}} = 0,0021[s]$$

Niepewność masy: $u(m) = 1g = 0,0010kg$
Niepewność długości pręta: $u(l) = 1mm = 0,0010m$
Niepewność odległości $a = l/2 - b : u(a) = 0,5mm = 0,0005m$
ad 5: Dla I_0 stosujemy prawo przenoszenia niepewności względnych i otrzymujemy

$$\frac{u(I_0)}{I_0} = \sqrt{\left[\frac{u(m)}{m}\right]^2 + \left[\frac{u(a)}{a}\right]^2 + \left[2\frac{u(T_0)}{T_0}\right]^2} = \sqrt{\left(\frac{0,0010}{0,663}\right)^2 + \left(\frac{0,0005}{0,274}\right)^2 + \left(2\frac{0,0021}{1,32}\right)^2} = 0,0040$$

$$u(I_0) = 0,0040 * 0,0787 = 0,0003[kg * m^2]$$

Dla I_S stosujemy zwykłe prawo przenoszenia niepewności i otrzymujemy

$$u(I_S) = \sqrt{[u(I_0)]^2 + [a^2 * u(m)]^2 + [-2am * u(a)]^2} =$$

$$= \sqrt{0,0003^2 + (0,274^2 * 0,001)^2 + (-2 * 0,274 * 0,663 * 0,0005)^2} =$$

$$= 0,0004[kg * m^2]$$

ad 6: Z prawa przenoszenia niepewności względnych otrzymujemy:

$$\frac{u(I_S^{(geom)})}{I_S^{(geom)}} = \sqrt{\left[\frac{u(m)}{m}\right]^2 + \left[2 * \frac{u(l)}{l}\right]^2} = \sqrt{\left(\frac{0,001}{0,663}\right)^2 + \left(2\frac{0,001}{0,748}\right)^2} = 0,0031$$

$$u(I_S^{(geom)}) = 0,0031 * 0,0309 = 0,0001[kg * m^2]$$

ad 7: Niepewność dla wzoru podręcznikowego jest mniejsza niż niepewność przy stosowaniu wzoru Steinera więc sposób obliczania momentu bezwładności korzystając z masy i wymiarów geometrycznych jest dokładniejszy.
ad 8: Obliczamy stosunek

$$\frac{|I_S - I_S^{(geom)}|}{\sqrt{u^2(I_S) + u^2(I_S^{(geom)})}} = \frac{|0,0289 - 0,0309|}{\sqrt{0,0004^2 + 0,0001^2}} = \frac{0,002}{0,0004} = 5$$

Ponieważ współczynnik jest większy od 2 wyników nie można uznać za zgodne.

Dla pierścienia ad 1: Przekształcając

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mga}}$$

otrzymujemy

$$I_0 = \frac{mgaT^2}{4\pi^2} = \frac{1343 * 10^{-3} * 9,81 * 130 * 10^{-3} * (1,02)^2}{4 * 3.14^2} = 0,0452[kg * m^2]$$

ad 2: Z twierdzenia Steinera

$$I_S = I_0 - ma^2 = 0,452 - (1343 * 10^{-3} * (130 * 10^{-3})^2) = 0,0225[kg * m^2]$$

ad 3: Z podręcznika odczytujemy

$$I_S^{geom} = \frac{1}{2}m(R_z^2 + R_w^2) = \frac{1}{2} * 1343 * 10^{-3} * (0,140^2 + 0,126^2) = 0,0238[kg * m^2]$$

ad 4: Niepewnośc okresu (typu A):

$$\bar{T} = \frac{\sum T_i}{n} \approx \frac{10,2}{10} = 1,02[s]; \quad u(T) = \sqrt{\frac{\sum(T_i - \bar{T})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{0,0005}{90}} = 0,0024[s]$$

Niepewność masy: $u(m) = 1g = 0,0010kg$
Niepewność długości średnicy zewnętrznej: $u(R_z) = 1mm = 0,0010m$
Niepewność długości średnicy wewnętrznej: $u(R_w) = 1mm = 0,0010m$
Niepewność pomiaru $e = 1mm = 0,0010$
Niepewność długości $a = R_z/2 - e : u(a) = 0,5mm = 0,0005m$
ad 5: Dla I_0 stosujemy prawo przenoszenia niepewności względnych i otrzymujemy

$$\frac{u(I_0)}{I_0} = \sqrt{\left[\frac{u(m)}{m}\right]^2 + \left[\frac{u(a)}{a}\right]^2 + \left[2\frac{u(T_0)}{T_0}\right]^2} = \sqrt{\left(\frac{0,0010}{1,343}\right)^2 + \left(\frac{0,0005}{0,130}\right)^2 + \left(2\frac{0,0024}{1,02}\right)^2} = 0,0061$$

$$u(I_0) = 0,0061 * 0,0452 = 0,0003[kg * m^2]$$

Dla I_S stosujemy zwykłe prawo przenoszenia niepewności i otrzymujemy

$$u(I_S) = \sqrt{[u(I_0)]^2 + [a^2 * u(m)]^2 + [-2am * u(a)]^2} =$$

$$= \sqrt{0,0003^2 + (0,130^2 * 0,001)^2 + (-2 * 0,130 * 1,343 * 0,0005)^2} =$$

$$= 0,0003[kg * m^2]$$

ad 6: Z prawa przenoszenia niepewności względnych otrzymujemy:

$$\frac{u(I_S^{(geom)})}{I_S^{(geom)}} = \sqrt{\left[\frac{u(m)}{m}\right]^2 + \left[2 * \frac{u(R_z)}{R_z}\right]^2 + \left[2 * \frac{u(R_w)}{R_w}\right]^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{0,001}{1,343}\right)^2 + \left(2\frac{0,0005}{0,140}\right)^2 + \left(2\frac{0,0005}{0,126}\right)^2} = 0,0107$$

$$u(I_S^{(geom)}) = 0,0107 * 0,0238 = 0,0003[kg * m^2]$$

ad 7: Niepewność dla wzoru podręcznikowego i niepewność przy stosowaniu wzoru Steinera są takie same więc w tym wypadku obie metody były równie dokładne.
ad 8: Obliczamy stosunek

$$\frac{|I_S - I_S^{(geom)}|}{\sqrt{u^2(I_S) + u^2(I_S^{(geom)})}} = \frac{|0,0225 - 0,0238|}{\sqrt{0,0003^2 + 0,0003^2}} = \frac{0,0013}{0,0004} = 2,75$$

Ponieważ współczynnik jest większy od 2 wyników nie można uznać za zgodne.

Tablica 3: Wyniki obliczeń momentów bezwładności dla pręta

	I_0 z okresu drgań $[kg * m^2]$	I_S z twierdzenia Steinera $[kg * m^2]$	$I_S^{(geom)}[kg * m^2]$
Wartość	0,0787	0,0289	0,0309
Niepewność	0,0003	0,0004	0,0001

Tablica 4: Wyniki obliczeń momentów bezwładności dla pierścienia

	I_0 z okresu drgań $[kg * m^2]$	I_S z twierdzenia Steinera $[kg * m^2]$	$I_S^{(geom)}[kg * m^2]$
Wartość	0,0452	0,0225	0,0238
Niepewność	0,0003	0,0003	0,0003

5 Wnioski

Moment bezwładności obliczony dla pręta z pomiaru czasu drgań wahadła wynosi $0,0787 \pm 0,0003[kg \cdot m^2]$. Nie jest to wartość zgodna z wartością odczytaną z podręcznika, która wynosi $0,0289[kg * m^2]$. Zatem wyników nie możemy uznać za poprawne.
Moment bezwładności obliczony dla pierścienia z pomiaru czasu drgań wahadła wynosi $0,0452 \pm 0,0003[kg \cdot m^2]$. Nie jest to wartość zgodna z wartością odczytaną z podręcznika, która wynosi $0,0238[kg * m^2]$. Zatem wyników nie możemy uznać za poprawne.
Pomiary były dokonywane ręcznie, a na poprawność wyników mógł wpłynąć czas reakcji człowieka, który decydował czy mierzony przyrząd jest w tej samej fazie z której rozpoczynany był pomiar. Dodatkowo określenie kąta wychylenia było subiektywne, a nie powinno przekraczać trzech stopni.