1 Definicje i podstawowe zależności dla wielkości kinetycznych opisujących ruch obrotowy (kąt, prędkość kątowa, przyspieszenie kątowe, jednostajny i niejednostajny ruch obrotowy)Gotowe

Kąt - przestrzeń zawarta między dwiema półprostymi wychodzącymi z tego samego punktu.
Prędkość kątowa - wielkość wektorowa opisująca ruch obrotowy. Jest ilorazem kąta α zakreślonego przez promień wodzący punktu poruszającego się po okręgu do czasu t, w którym ten kąt został zakreślony. $\omega = \frac{\alpha}{t}$. Jednostką prędkości kątowej jest $[\omega] = \frac{rad}{s}$.
Przyspieszenie kątowe - pochodna prędkości kątowej po czasie. $\vec{a}_r = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$.
Ruch jednostajny obrotowy - ruch, w którym wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$ ma stałą wartość, kierunek i zwrot. Kierunek jest równoległy do bryły.
Ruch niejednostajny obrotowy - ruch po okręgu ze zmienną wartością prędkości kątowej.

2 Definicje i podstawowe zależności dla wielkości dynamicznych opisujących ruch obrotowy (moment bezwładności, momentu pędu, moment siły, druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego).Gotowe

Moment bezwładności - opisuje sposób rozkładu masy wokół osi obrotu. Jest funkcją kwadratu odległości elementów masy od osi obrotu. $I = mR^2$. $[I] = kg \cdot m^2$
Pęd - iloczyn masy m oraz prędkości v punktu. $\vec{p} = m\vec{v}$
Moment pędu - iloczyn wektorowy promienia wodzącego R elementu masy i wektora pędu tego elementu. $L = rXp$
Dla ciała o momencie bezwładności I obracającego się wokół ustalonej osi z prędkością kątową ω moment pędu można wyrazić wzorem: $L = I\omega$.
Moment siły - wielkość wektorowa równa iloczynowi wektorów ramienia siły i siły. $\vec{M} = \vec{r}X\vec{F} = rFsin(\alpha)$, gdzie α - kąt między wektorem ramienia siły i wektorem siły. Jednostką jest niutonometr $[M] = 1Nm$
Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego - jeżeli wypadkowy moment siły M działający na ciało jest różny od zera, to ciało porusza się z przyspieszeniem kątowym ε. Przyspieszenie kątowe bryły jest wprost proporcjonalne do wypadkowego momentu siły i odwrotnie proporcjonalne do momentu bezwładności I : $\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}$.

3 Definicja momentu bezwładności. Wyprowadzenie momentu bezwładności dla jednorodnego pręta o długości l i masie m względem osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jego środek masy.

Moment bezwładności punktu materialnego jest definiowany jako iloczyn masy i kwadratu odległości od osi obrotu. Momenty bezwładności brył sztywnych, tak I0 jak i IS , wyraża się jako całkę oznaczoną
$I = \int_m r^2 dm$
gdzie r jest odległością elementu masy dm od osi obrotu. Całkę można analitycznie obliczyć dla brył jednorodnych o prostych kształtach.
Dla jednorodnego pręta o długości l i masie m względem prostopadłej osi przechodzącej przez środek masy mamy:

$$\text{gęstość liniowa } \lambda = \frac{m}{l} dm = \lambda dx$$

$$I = \int_{\frac{-l}{2}}^{\frac{l}{2}} \lambda x^2 dx = \frac{\lambda x^3}{3} |_{\frac{-l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{\lambda l^3}{24} + \frac{\lambda l^3}{24} = \frac{ml^2}{12}$$

4 Twierdzenie Steinera dla momentu bezwładności i przykłady jego zastosowania.

Twierdzenie Steinera: Moment bezwładności bryły sztywnej względem dowolnej osi jest równy sumie momentu bezwładności względem osi równoległej do danej i przechodzącej przez środek masy bryły oraz iloczynu masy bryły i kwadratu odległości między tymi dwiema osiami, co wyraża się wzorem: $I = I_0 + md^2$, gdzie:
I_0 - moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy
I - moment bezwładności względem osi równoległej do pierwszej osi

d - odległość między osiami
m - masa bryły.

Przykładowo obliczmy moment bezwładności pręta o długości l i masie m dla osi przechodzącej przez koniec pręta.

Z twierdzenia Steinera

$$I = I_0 + md^2 = \frac{ml^2}{12} + m(\frac{l}{2})^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}$$

porównajmy otrzymany wynik z bezwładnością otrzymaną z całki

$$I = \int_0^l \lambda x^2 dx = \frac{\lambda x^3}{3}|_0^l = \frac{\lambda l^3}{3} - 0 = \frac{ml^2}{3}$$

5 Ruch harmoniczny, równanie ruchu i parametry opisujące ruch (amplituda, okres, częstość, częstotliwość)

Amplituda - największe wychylenie z położenia równowagi w ruchu drgającym lub falowym.
Okres - czas wykonania jednego pełnego drgania w ruchu drgającym. Dla fali oznacza to odcinek czasu między dwoma punktami fali o tej samej fazie. $T = \frac{1}{f}$, gdzie f to częstotliwość.
Częstość - (w fizyce ruchu drgającego lub falowego) wielkość określająca, jak szybko powtarza się dane zjawisko okresowe. Powiązana jest z częstotliwością i okresem.
Częstotliwość - wielkość fizyczna określająca liczbę cykli zjawiska okresowego występujących w jednostce czasu. $f = \frac{n}{t}$, gdzie:
f - częstotliwość
n - liczba drgań
t - czas, w którym te drgania występują.

Ruch harmoniczny - ruch drgający, w którym na ciało działa siła o wartości proporcjonalnej do wychylenia ciała z położenia równowagi, skierowana zawsze w stronę punktu równowagi. Ruch, który powtarza się w regularnych odstępach czasu np. drgania ciała zawieszonego na sprężynie, wahadło.

Zależność przemieszczenia x(t) ciała w ruchu harmonicznym opisuje wzór

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

6 Wahadło matematyczne. Opis ruchu wahadła matematycznego dla małych drgań. Okres drgań tego wahadła.Gotowe

Wahadło matematyczne to punkt materialny poruszający się po okręgu w płaszczyźnie pionowej w jednorodnym polu grawitacyjnym. W przybliżeniu małych kątów ($\phi \leq 5^o$), tj. drgań o małej amplitudzie, częstość kołową ω oraz okres T drgań wahadła matematycznego możemy wyznaczyć korzystając z poniższych wzorów:
$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$ oraz $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$, gdzie:
m - masa ciężarka
g - przyspieszenie ziemskie
L - odległość dzieląca punkt zawieszenia wahadła od środka jego masy równa długości linki
I - moment bezwładności wahadła względem jego punktu zawieszenia.

Okres drgań wahadła matematycznego: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

7 Wahadło fizyczne. Przybliżony opis ruchu wahadła fizycznego za pomocą równania ruchu harmonicznego. Okres drgań wahadła fizycznego w przybliżeniu harmonicznym.Gotowe

Wahadłem fizycznym nazywamy bryłę sztywną mogącą obracać się wokół osi obrotu O nie przechodzącej przez środek masy S. Dla wahadła fizycznego moment siły powstaje pod wpływem siły ciężkości. Dla wychylenia θ jest równy $M = mga\sin(\theta)$, gdzie a oznacza odległość środka masy S od osi obrotu O.

Równanie ruchu wahadła można zapisać jako $I_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mga\sin(\theta)$, gdzie I_0 jest momentem bezwładności względem osi obrotu przechodzącej przez punkt zawieszenia O. Jeżeli ograniczyć ruch do małych kątów wychylenia, to sinus kąta można zastąpić samym kątem w mierze łukowej, czyli $\sin(\theta) \approx \theta$. Wtedy:
$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta(t) = 0$, gdzie $\omega_0^2 = \frac{mga}{I_0}$.
Jest to równanie oscylatora harmonicznego, którego rozwiązanie :
$\theta = \theta_m \cos(\omega_o t + \alpha)$ przedstawia ruch harmoniczny. Amplituda θ_m i faza α zależą od warunków początkowych.
Okres drgań T wynosi : $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mga}}$