# Spis treści

# 1 Treść zadania

13. Metoda Jacobiego dla równań macierzowych $AX = B$ oraz $XA = B$, gdzie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,$B \in \mathbb{R}^{n\times m}$.Wykonać testy dla różnych macierzy B, m.in. dla takich, dla których $AX = XA$(np. $B = I$). Porównać wyniki.

# 2 Metoda Jacobiego

Zapisujemy układ równań $Ax = b$ w postaci

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = b_k$$

dla $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Teraz wyznaczamy $x_k$ z każdego równania:

$$x_k = (b_k - \sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj}x_j)/a_{kk}$$

Wzory, które otrzymaliśmy, będą podstawą iteracji. Zaczynając z danego przybliżenia początkowego $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)})^T \in \mathbb{R}^n$, obliczamy kolejne przybliżenia $x^{(p+1)}$, gdzie p = 0,1,...

## 2.1 Zbieżność metody

Podobnie jak dla wszytskich metod iterracji, metoda Jacobiego będzie zbieżna globalnie (dla dowolnego przybliżenia początkowego) wtedy i tylko wtedy, gdy promień jej macierzy spektralnej jest mniejszy od 1 ($\rho(B) < 1$).

## 2.2 Dokładność metody

Jeśli metoda będzie zbieżna dla naszej macierzy to dokładność metody będzie zależała od ilości przybliżeń którą wykonamy. Im więcej przybliżeń tym większa dokładność. W naszym programie będziemy kończyli przybliżanie po tym jak osiągniemy satysfakcjonującą dokładność, lub po wykonaniu określonej ilości przybliżeń.

# 3 Algorytm

## 3.1 mnozeniejacobi

Funkcja główna mnozeniejacobi przyjmuje argumenty:

1. $A$ - macierz kwadratowa $n \times n$

2. $B$ - macierz $n \times m$

3. *ktorastrona* - równy 0 gdy chcemy mnożyć $AX = B$ lub równy 1 gdy chcemy mnożyć $XA = B$

Działanie funkcji: Na podstawie argumentu *ktorastrona* funkcja stosuje adekwatny algorytm rozwiązywania. Następnie rozbija macierz X oraz B na wektory, tak by potem móc stosować algorytm przybliżenia następnych $x^{(p)}$ dla równania $Ax = b$ lub $xA = b$ używając funkcji *nastprzyb*.

Funkcja zwraca:

1. $WMX$ - czyli wynikowa macierz X która jest rozwiązaniem równania danego w treści zadania

### 3.2 nastprzyb

Funkcja bierze macierz A, wektor b oraz wektor przybliżenia $x^{(p)}$ a następnie zwraca wektor przybliżenia $x^{(p+1)}$

# 4 Przykłady

## 4.1 Prawidłowe zastosowania metody Jacobiego

Przykładowe wywołania dla mnożenia $AX = B$ dla macierzy A $3 \times 3$ oraz B $3 \times 4$

#### 4.1.1 Mnożenie $AX = B$ dla macierzy A $3 \times 3$ oraz B $3 \times 4$

$$\text{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}, \text{ktorastrona} = 0$$

```
>> mnozeniejacobi(A,B,ktorastrona)

jacobi =

    0.8824    0.9412    0.4118    1.0588
    0.8235    0.4118    0.1176   -0.4118
   -5.0588   -8.5294   -7.2941   -7.4706

ile_k =

  393.2500

czas =

    0.0128


wynikmatlabowy =

    0.8824    0.9412    0.4118    1.0588
    0.8235    0.4118    0.1176   -0.4118
   -5.0588   -8.5294   -7.2941   -7.4706
```

#### 4.1.2 Mnożenie $XA = B$ dla macierzy **A** $3 \times 3$ oraz **B** $3 \times 4$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 5 & 8 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \mathrm{ktorastrona} = 1$$

```
>> mnozeniejacobi(A,B,ktorastrona)

jacobi =

    0.9444    0.2222   -0.1667
    0.8194    1.7222   -0.2917
    0.5833    0.6667    0.2500


ile_k =

   23.6667


czas =

    0.0014

wynikmatlabowy =

    0.9444    0.2222   -0.1667
    0.8194    1.7222   -0.2917
    0.5833    0.6667    0.2500
```

### 4.2 Przykład macierzy dla której Metoda Jacobiego nie jest zbieżna globalnie

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathrm{ktorastrona} = 0$$

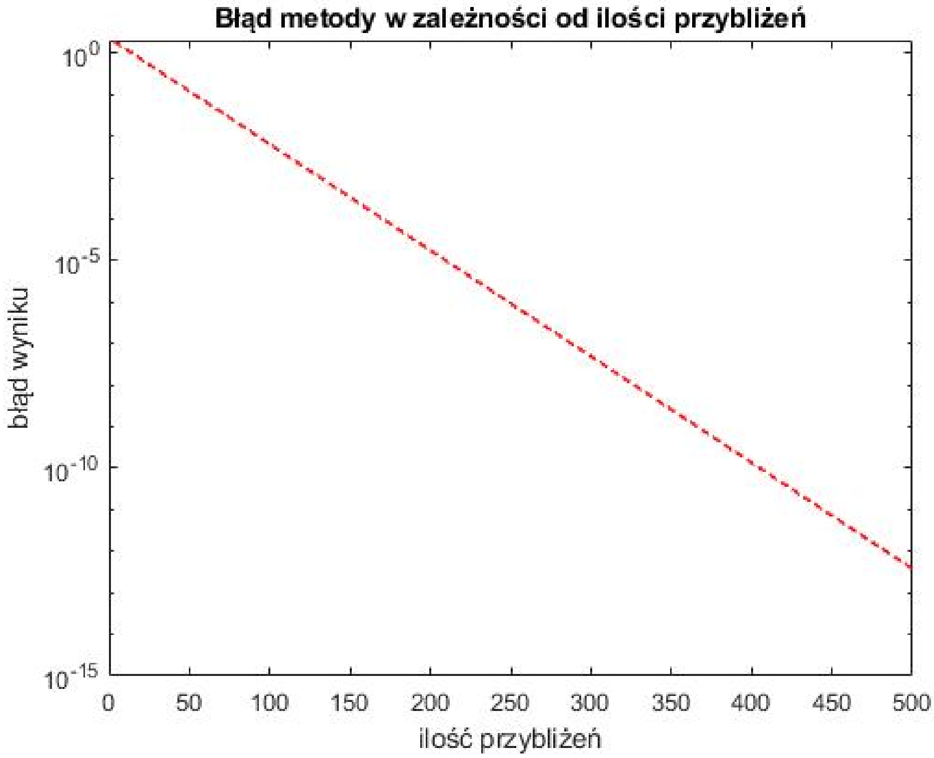
```
>> mnozeniejacobi(A,B,ktorastrona)
```

Error using mnozeniejacobi (line 25) Dla takiej macierzy A metoda nie jest zbiezna

# 5 Wpływ ilości wykonanych przybliżeń na dokładność metody

Funkcja mnozeniejacobi została zastosowana na macierzy z przykładu 4.1.1 z ręcznie ustalaną ilością przybliżeń $x^{(k)}$

## 5.1 Wykres



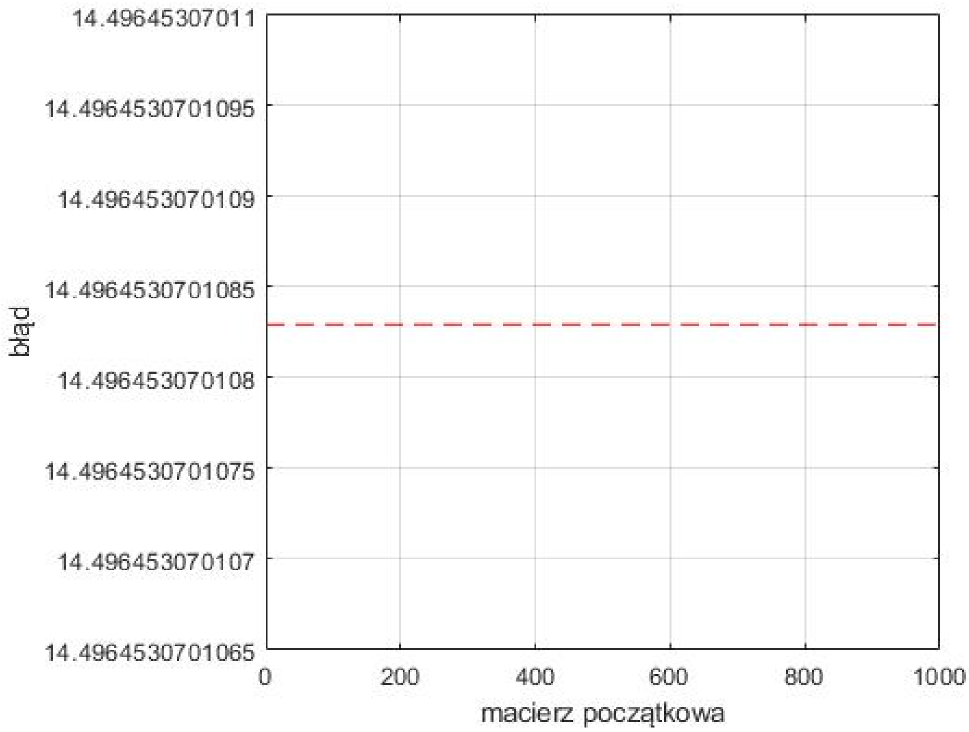

## 5.2 Obserwacje

Zgodnie z przewidywaniami im więcej razy wykonamy przybliżenie tym dokładniejszy wynik dostaniemy. Z wykresu możemy również zauważyć że dokładność wyniku rośnie w sposób eksponencjalny.

# 6 Dokładność wyników w zależności od wektora początkowego

Funkcja mnozeniejacobi została zastosowana na macierzy $3 \times 3$ z podpunktu 4.1.1 z użyciem tysiąca różnych macierzy przybliżeń początkowych $x_0$ zmieniających się od -100 do wartości zwracanej w danym punkcie przez funkcję programu.

## 6.1 Wykres




## 6.2 Obserwacje

Macierz wektorów przybliżeń początkowych zdaje się nie mieć praktycznie żadnego związku z rozwiązywaniem zadania. Jest to logiczne bo nasze przybliżenia i tak powinny dążyć do tego prawidłowego.

# 7 Wnioski

Po przeanalizowaniu wykresów oraz różnych przykładów funkcji można wysnuć różne wnioski. Metoda nie zawsze znajduje rozwiązanie, a do określenia czy będzie ona skuteczna dla danych wejściowych niezbędne jest zbadanie promienia macierzy spektralnej. Dodatkowo można zauważyć, że wektor początkowy ma dużo mniejszy wpływ na otrzymane wyniki niż liczba wykonanych przybliżeń.

# 8 Literatura


http://pages.mini.pw.edu.pl/~wrobeli/MADMN_zima_2020-21/mn_pliki/Zapiski_numeryczne_MAD.pdf