

# Príklady Doučovanie - Študent X

Michal Spano

## Goniometria

### Goniometria, goniometrické funkcie

(i) Vyjadri funkčnú hodnotu\* pre:

#### Časť 1:

1.  $\sin(765^\circ)$
2.  $\cos(-300^\circ)$
3.  $\operatorname{tg}(225^\circ)$
4.  $\sin(-405^\circ)$
5.  $\operatorname{tg}(270^\circ)$

#### Časť 2

6.  $\sin(240^\circ) + \cos(-120^\circ)$
7.  $\operatorname{tg}(135^\circ) - \operatorname{cotg}(45^\circ)$
8.  $\sin(330^\circ) \cos(-240^\circ)$
9.  $\operatorname{tg}(-60^\circ) \frac{\sin(240^\circ)}{\cos(300^\circ)}$
10.  $\sin(930^\circ)$

*Tip:* pomôž si jednotkovou kružnicou a trikom, ktorý som ti ukázal počas 2. hodiny. Taktiež využij vlastnosť, že goniometrické funkcie sú periodické. V tomto cvičení si môžeš taktiež pomôcť prevodmi uhlov do prvého kvadrantu.

(ii) Zapíš dané uhly v stupňoch, resp. radiánoch:

1.  $290^\circ$
2.  $\frac{5}{3}\pi$
3.  $-25^\circ$
4.  $345,5^\circ$
5.  $-\frac{7}{10}\pi$

\*Pod pojmom “*funkčná hodnota*” rozumieme hodnotu, ktorá zodpovedá danej goniometrickej funkcii v istom uhle (v tomto prípade, v stupňoch).

### Grafy goniometrických funkcií

Znáznorní graf nasledujúcich funkcií (aspoň na jednej perióde) na  $\mathbb{R}$ :

1.  $f : \operatorname{tg}(2x) + 1$
2.  $g : \operatorname{cotg}(x - \frac{\pi}{2})$
3.  $h : \cos(x + \frac{\pi}{4})$
4.  $i : 2 \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3})$

5.  $j : |-\sin(x)|$

**Bonus:**  $k : x^2 \operatorname{cotg}(x) \operatorname{tg}(x)$ , vyjadri taktiež  $D_k$  (teda definičný obor  $k$ ).

### Vzťahy medzi goniometrickými funkciami (nové)

(i) Zjednoduš nasledujúce výrazy:

1.  $\frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos x - \cos^3 x}$
2.  $\frac{1 - \cos^2 x}{\sin x \cos x}$
3.  $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$
4.  $\sin x + \cos x \operatorname{cotg} x$
5.  $\cos x + \operatorname{tg} x \sin x$
6.  $\sin^3 x + \sin x \cos^2 x$
7.  $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

**Bonus:**  $\frac{\sec x - \cos x}{\sec x}$ , kde  $\sec x$  je goniometrická funkcia **sekans**, ktorá sa dnes v našich osnovách objavuje už veľmi zriedkavo. Avšak poznáme vzťah  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ .

(ii) Vyjadri funkčnú hodnotu pre:

1.  $\sin(75^\circ)$
2.  $\cos(15^\circ)$

*Tip:* pripomeň si súčtové vzťahy.

### Goniometrické rovnice (nové)

Rieš nasledujúce rovnice v  $\mathbb{R}$ :

1.  $\sin x = 0,5$
2.  $-2 \cos x = \sqrt{2}$
3.  $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$
4.  $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$
5.  $1 = \cos(x + \frac{\pi}{4})$
6.  $\cos \frac{\pi}{3} = -1$
7.  $\sin^2 x = -\sin x + 2$
8.  $2 \cos^2 x - 7 \cos x + 3 = 0$
9.  $\sin x = \sin 2x$
10.  $2 \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}$

11.  $\sin^2 x + \sin x = \cos^2 x$
12.  $3 \operatorname{tg} x - 1 = 2 \operatorname{tg} x$
13.  $\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1$
14.  $\sin^4 x = 2 - \sin^2 x$
15.  $\sin(3x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**Bonus:**  $\sin^4 x = 1 - \cos^4 x$

---

## Riešenia

### Goniometria, goniometrické funkcie

- (i) Časť 1:  $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, 1, -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , neexistuje.
- (ii) Časť 2:  $\frac{-\sqrt{3}-1}{2}, -2, \frac{1}{4}, 3, -\frac{1}{2}$
- (iii)  $\frac{29}{18}\pi, 300^\circ, -\frac{5}{36}\pi, \frac{691}{360}\pi, 126^\circ$

### Vzťahy medzi goniometrickými funkciami

- (i)  $\cotg x, \operatorname{tg} x, \operatorname{tg} x$  (+podmienky),  $\frac{1}{\sin x}, \frac{1}{\cos x}, \sin x, \frac{1}{\cos x}$

**Bonus:**  $\sin^2 x$

- (ii)  $\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}, \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$  (pre oboje príklady)

### Grafy goniometrických funkcií

Všetky grafy nájdeš [tu](#).

### Goniometrické rovnice

1.  $\{\frac{1}{6}\pi + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
2.  $\{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi; \frac{9}{4}\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
3.  $\{k\pi - \frac{1}{3}\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
4.  $\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5}{3}\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
5.  $\{2k\pi - \frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}\}$
6.  $\{3\pi + 6k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
7.  $\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
8.  $\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5}{3}\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
9.  $\{k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5}{3}\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
10.  $\{\frac{5}{24}\pi + k\pi; \frac{25}{24}\pi + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
11.  $\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi; \frac{3}{2}\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
12.  $\{\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
13.  $\{2k\pi - \frac{\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\}$
14.  $\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
15.  $\{\frac{\pi}{36} + \frac{2}{3}\pi; \frac{5}{36}\pi + \frac{2}{3}\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

**Bonus:**  $\{\frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$