

Matematika I

Séria úloh 21

1. (11b) Daná je všeobecná rovnica kuželosečky $4x^2 - y^2 - 24x + 4y + 28 = 0$.

Doplňte

a) (2b) Stredová rovnica kuželosečky je

b) (1b) Kuželosečka je typu.

c) (3b) Popíšte (ak existujú):

c_1) dĺžka hlavnej poloosi je

c_2) dĺžka vedľajšej poloosi je

c_3) excentricita je

d) (4b) Napíšte súradnice (ak existujú):

d_1) stredu kuželosečky

d_2) hlavných vrcholov kuželosečky

d_3) vedľajších vrcholov kuželosečky

d_4) súradnice ohniska resp. ohnisk kuželosečky

e) (1b) Znázornite kuželosečku a v náčrte popíšte jej významné prvky.

2. (2b) Vyberte funkciu, ktorej definičný obor je znázornený na obrázku.



a) $f(x, y) = \frac{\ln(x^2 + y^2 - 1)}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$

b) $f(x, y) = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\ln(x^2 + y^2 - 1)}$

c) $f(x, y) = \frac{\ln(4 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$

d) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{\ln(4 - x^2 - y^2)}$

3. (6b) Vypočítajte

$$\iint_M x^2 y \, dx dy,$$

kde množina M je obdĺžnik s vrcholmi $A = [1, 1]$, $B = [2, 1]$, $C = [2, 2]$ a $D = [1, 2]$.

Výsledok:

4. (4b) Bod M má v pravouhlej súradnicovej sústave súradnice: $M = [3, \sqrt{3}, 3]$.

a) (2b) Vyberte správnu odpoveď:

Súradnice bodu M v cylindrickej súradnicovej sústave sú:

a) $M = [2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{6}, 3]$

c) $M = [2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}, 3]$

b) $M = [2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{3}, 3]$

d) $M = [2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}, 3]$

b) (2b) Znázornite tento bod M v cylindrickej súradnicovej sústave.

Náčrt:

5. (8b) Daná je lineárna obyčajná diferenciálna rovnica (LODR) $y''(x) + y(x) = 3/\sin x$.

a) (2b) Napíšte charakteristickú rovnicu k danej diferenciálnej rovnici.

Charakteristická rovnica je:

b) (2b) Nájdite fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice s nulovou pravou stranou.

Fundamentálny systém riešení je

c) (2b) Nájdite partikulárne riešenie uvedenej nehomogénnej rovnice.

Partikulárne riešenie je

d) (2b) Napíšte všeobecné riešenie danej lineárnej diferenciálnej rovnice.

Všeobecné riešenie danej LODR je

6. (4b) Vypočítajte nasledujúcu limitu

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0, \frac{\pi}{2}]} \frac{\sin(x+y)}{x+y}.$$

Výsledok:

7. (6b) Napíšte všeobecnú rovnicu dotykovej roviny ku grafu funkcie

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8,$$

ak hľadaná dotyková rovina je rovnobežná s rovinou R_{xy} .

Súradnice dotykového bodu sú:

Všeobecná rovnica dotykovej roviny je:

8. (6b) Daná je funkcia $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$, bod $A = [5, 3]$ a vektor $\vec{l} = (-1, 2)$.

a) (3b) Nájdite gradient funkcie $f(x, y)$ v bode A .

Gradient funkcie $f(x, y)$ v bode A je

b) (3b) Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x, y)$ v bode A v smere vektora \vec{l} .

Derivácia funkcie $f(x, y)$ v bode A v smere vektora \vec{l} je

9. (27b) Daná je funkcia $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ a oblasť M .
 Oblasť M je mnohoúhelník $ABCD$ s vrcholmi $A = [0, 0]$, $B = [4, 0]$, $C = [4, 4]$ a $D = [0, 4]$.

a) Načrtnite oblasť M :

Náčrt:

Pomocou matematických vzťahov popíšte hranice oblasti M :

- (a) (2b) AB
- (b) (2b) BC
- (c) (2b) CD
- (d) (2b) AD

b) (5b) Nájdite lokálne extrémny danej funkcie $f(x, y)$ v oblasti M .
 Ak hľadané lokálne extrémny nie sú, napíšte „nie sú“.

Doplňte odpoveď: Funkcia $f(x, y)$ má v bode lokálne

c) Nájdite viazané lokálne extrémny danej funkcie $f(x, y)$ na hraniciach oblasti M . Ak hľadaný lokálny extrém nejestvuje, napíšte „nie je“.

- (a) (3b) Na hranici AB má funkcia $f(x, y)$ v bode viazané lokálne
- (b) (3b) Na hranici BC má funkcia $f(x, y)$ v bode viazané lokálne
- (c) (3b) Na hranici CD má funkcia $f(x, y)$ v bode viazané lokálne
- (d) (3b) Na hranici AD má funkcia $f(x, y)$ v bode viazané lokálne

d) (2b) Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f(x, y)$ na oblasti M .

Najväčšia hodnota funkcie $f(x, y)$ je:

Najmenšia hodnota funkcie $f(x, y)$ je: