

Matematika I

15. januára

09:00

Meno a priezvisko: Podpis:

Ročník: študijný program:

1. (11b) Daná je všeobecná rovnica kužeľosečky $9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y - 36 = 0$.

Doplňte

a) Stredová rovnica kužeľosečky je

b) Kužeľosečka je typu.

c) Popíšte (ak existujú):

c_1) dĺžka hlavnej poloosi je

c_2) dĺžka vedľajšej poloosi je

c_3) excentricita je

d) Napíšte súradnice (ak existujú):

d_1) hlavných vrcholov kužeľosečky

d_2) vedľajších vrcholov kužeľosečky

d_3) súradnice ohniska resp. ohnisk kužeľosečky

e) Znázornite kužeľosečku a v náčrte popíšte jej významné prvky.

2. (2b) Vyberte funkciu, ktorej definičný obor je znázornený na obrázku.



a) $f(x, y) = \frac{\ln(x^2 + y^2 - 1)}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$

b) $f(x, y) = \frac{\ln(4 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$

c) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{\ln(4 - x^2 - y^2)}$

d) $f(x, y) = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\ln(x^2 + y^2 - 1)}$

3. (6b) Vypočítajte

$$\iint_M x^2 y \, dx dy,$$

kde množina M je obdĺžnik s vrcholmi $A = [1, 2]$, $B = [2, 2]$, $C = [2, 3]$ a $D = [1, 3]$.

Výsledok:

4. (4b) Bod M má v cylindrickej súradnicovej sústave nasledujúce súradnice: $M = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \sqrt{2} \right]$.

a) (2b) Vyberte správnu odpoveď:

Súradnice bodu M v pravouhlej súradnicovej sústave sú:

a) $M = [1, 1, \sqrt{2}]$

c) $M = [1, -1, \sqrt{2}]$

b) $M = [-1, 1, \sqrt{2}]$

d) $M = [-1, -1, \sqrt{2}]$

b) (2b) Znázornite tento bod M v pravouhlej súradnicovej sústave.

Náčrt:

5. (8b) Daná je lineárna obyčajná diferenciálna rovnica (LODR) $y'(x) + y(x) = x + 1$.

a) (2b) Napíšte charakteristickú rovnicu k danej diferenciálnej rovnici.

Charakteristická rovnica je:

b) (2b) Nájdite fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice s nulovou pravou stranou.

Fundamentálny systém riešení je

c) (2b) Nájdite partikulárne riešenie uvedenej nehomogénnej rovnice.

Partikulárne riešenie je

d) (2b) Napíšte všeobecné riešenie danej lineárnej diferenciálnej rovnice.

Všeobecné riešenie danej LODR je

6. (4b) Vypočítajte

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\arctan(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}.$$

Výsledok:

7. (6b) Nájdite všeobecnú rovnicu dotykovej roviny τ ku grafu funkcie $f(x, y) = \frac{1}{x + y}$ v bode $T = \left[1, y_0, \frac{1}{3}\right]$.

(2b) Súradnice **dotykového bodu** sú:

(4b) **Všeobecná rovnica** dotykovej roviny τ je:

8. (6b) Daná je funkcia $f(x, y) = \frac{1}{2x - 2y}$, bod $A = [2, -2]$ a vektor $\vec{l} = (1, -1)$.

a) (3b) Nájdite gradient funkcie $f(x, y)$ v bode A .

Gradient funkcie $f(x, y)$ v bode A je

b) (3b) Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x, y)$ v bode A v smere vektora \vec{l} .

Derivácia funkcie $f(x, y)$ v bode A v smere vektora \vec{l} je

9. (27b) Daná je funkcia $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ a oblasť M .
 Oblasť M je mnohoúhelník $ABCD$ s vrcholmi $A = [0, 0]$, $B = [4, 0]$, $C = [4, 4]$ a $D = [0, 4]$.

a) Načrtnite oblasť M :

Náčrt:

Pomocou matematických vzťahov popíšte hranice oblasti M :

- (a) (2b) AB
- (b) (2b) BC
- (c) (2b) CD
- (d) (2b) AD

b) (5b) Nájdite lokálne extrémny danej funkcie $f(x, y)$ v oblasti M .
 Ak hľadané lokálne extrémny nie sú, napíšte „nie sú“.

Doplňte odpoveď: Funkcia $f(x, y)$ má v bode lokálne

c) Nájdite viazané lokálne extrémny danej funkcie $f(x, y)$ na hraniciach oblasti M . Ak hľadaný lokálny extrém nejestvuje, napíšte „nie je“.

- (a) (3b) Na hranici AB má funkcia $f(x, y)$ v bode viazané lokálne
- (b) (3b) Na hranici BC má funkcia $f(x, y)$ v bode viazané lokálne
- (c) (3b) Na hranici CD má funkcia $f(x, y)$ v bode viazané lokálne
- (d) (3b) Na hranici AD má funkcia $f(x, y)$ v bode viazané lokálne

d) (2b) Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f(x, y)$ na oblasti M .

Najväčšia hodnota funkcie $f(x, y)$ je:

Najmenšia hodnota funkcie $f(x, y)$ je: