

# Matematika I

Séria úloh 5

1. (11b) Daná je všeobecná rovnica kuželosečky  $9x^2 - 25y^2 - 54x - 100y - 44 = 0$ .

**Doplňte**

- a) (2b) Stredová rovnica kuželosečky je .....
- b) (1b) Typ kuželosečky je .....
- c) (3b) Popíšte (ak existujú):
  - $c_1$ ) dĺžka hlavnej poloosi je .....
  - $c_2$ ) dĺžka vedľajšej poloosi je .....
  - $c_3$ ) excentricita je .....
- d) (4b) Napíšte súradnice (ak existujú):
  - $d_1$ ) stredu kuželosečky .....
  - $d_2$ ) hlavných vrcholov kuželosečky .....
  - $d_3$ ) vedľajších vrcholov kuželosečky .....
  - $d_4$ ) súradnice ohniska resp. ohnisk kuželosečky .....
- e) (1b) Znázornite kuželosečku a v náčrte popíšte jej významné prvky.

2. (2b) Vyberte funkciu, ktorej definičný obor je znázornený na obrázku.



a)  $f(x, y) = \frac{\ln(x^2 + y^2 - 1)}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$

b)  $f(x, y) = \frac{\ln(4 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$

c)  $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{\ln(4 - x^2 - y^2)}$

d)  $f(x, y) = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\ln(x^2 + y^2 - 1)}$

3. (6b) Vypočítajte

$$\iint_M xy \, dx dy,$$

kde množina  $M$  je trojuholník s vrcholmi  $A = [1, 1]$ ,  $B = [2, 1]$  a  $C = [2, 3]$ .

**Výsledok:** .....

4. (4b) Bod  $M$  má v cylindrickej súradnicovej sústave nasledujúce súradnice:  $M = \left[ 2\sqrt{3}, \frac{11\pi}{6}, -2 \right]$ .

a) (2b) Vyberte správnu odpoveď:

Súradnice bodu  $M$  v pravouhlej súradnicovej sústave sú:

a)  $M = [-3, -\sqrt{3}, -2]$

c)  $M = [3, -\sqrt{3}, -2]$

b)  $M = [3, \sqrt{3}, -2]$

d)  $M = [-3, \sqrt{3}, -2]$

b) (2b) Znázornite bod  $M$  v pravouhlej súradnicovej sústave.

**Náčrt:**

5. (8b) Daná je lineárna obyčajná diferenciálna rovnica (LODR)  $y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = \sin 2x$ .

a) (2b) Napíšte charakteristickú rovnicu k danej diferenciálnej rovnici.

**Charakteristická rovnica je:** .....

b) (2b) Nájdite fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice s nulovou pravou stranou.

**Fundamentálny systém riešení je** .....

c) (2b) Nájdite partikulárne riešenie uvedenej nehomogénnej rovnice.

**Partikulárne riešenie je** .....

d) (2b) Napíšte všeobecné riešenie danej lineárnej diferenciálnej rovnice.

**Všeobecné riešenie danej LODR je** .....

6. (4b) Vypočítajte, ak existuje

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [1,1]} \frac{x-1}{x+y-2}.$$

**Výsledok:** .....

7. (6b) Napíšte všeobecnú rovnicu dotykovej roviny ku grafu funkcie

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

ak hľadaná dotyková rovina je rovnobežná s rovinou  $\sigma : 2x + y + 3z = 1$ .

**Súradnice dotykového bodu sú:** .....

**Všeobecná rovnica dotykovej roviny je:** .....

8. (6b) Daná je funkcia  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+y^2}}$ , bod  $A = [1, 2]$  a vektor  $\vec{l} = (1, -2)$ .

a) (3b) Nájdite gradient funkcie  $f(x, y)$  v bode  $A$ .

**Gradient funkcie  $f(x, y)$  v bode  $A$  je** .....

b) (3b) Vypočítajte deriváciu funkcie  $f(x, y)$  v bode  $A$  v smere vektora  $\vec{l}$ .

**Derivácia funkcie  $f(x, y)$  v bode  $A$  v smere vektora  $\vec{l}$  je** .....

9. (27b) Daná je funkcia  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy + 3x + 2y + 1$  a oblasť  $M$ .  
 Oblasť  $M$  je mnohoholník  $ABCD$  s vrcholmi  $A = [0, -5]$ ,  $B = [1, -5]$ ,  $C = [1, 0]$  a  $D = [-5, 0]$ .

a) Načrtnite oblasť  $M$ :

**Náčrt:**

**Pomocou matematických vzťahov popíšte hranice oblasti  $M$ :**

- (a) (2b)  $AB$  .....
- (b) (2b)  $BC$  .....
- (c) (2b)  $CD$  .....
- (d) (2b)  $AD$  .....

b) (5b) Nájdite lokálne extrémny danej funkcie  $f(x, y)$  v oblasti  $M$ .  
 Ak hľadané lokálne extrémny nie sú, napíšte „nie sú“.

**Doplňte odpoveď:** Funkcia  $f(x, y)$  má v bode ..... lokálne .....

c) Nájdite viazané lokálne extrémny danej funkcie  $f(x, y)$  na hraniciach oblasti  $M$ . Ak hľadaný lokálny extrém nejestvuje, napíšte „nie je“.

- (a) (3b) Na hranici  $AB$  má funkcia  $f(x, y)$  v bode ..... viazané lokálne .....
- (b) (3b) Na hranici  $BC$  má funkcia  $f(x, y)$  v bode ..... viazané lokálne .....
- (c) (3b) Na hranici  $CD$  má funkcia  $f(x, y)$  v bode ..... viazané lokálne .....
- (d) (3b) Na hranici  $AD$  má funkcia  $f(x, y)$  v bode ..... viazané lokálne .....

d) (2b) Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie  $f(x, y)$  na oblasti  $M$ .

**Najväčšia** hodnota funkcie  $f(x, y)$  je: .....

**Najmenšia** hodnota funkcie  $f(x, y)$  je: .....