Matematika I

Séria úloh 20

1. (11b) Daná je všeobecná rovnica kužeľosečky $4x^2 - 6y^2 - 8x - 24y - 44 = 0$.
Doplňte

a) (2b) Stredová rovnica kužeľosečky je ....

b) (1b) Kužeľosečka je .... typu.

c) (3b) Popíšte (ak existujú):

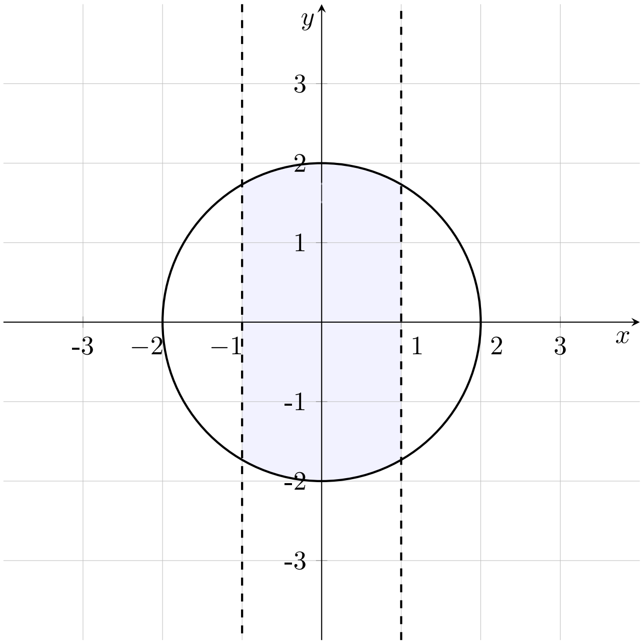
- c_1) dĺžka hlavnej poloosi je ....
- c_2) dĺžka vedľajšej poloosi je ....
- c_3) excentricita je ....

d) (4b) Napíšte súradnice (ak existujú):

- d_1) stredu kužeľosečky ....
- d_2) hlavných vrcholov kužeľosečky ....
- d_3) vedľajších vrcholov kužeľosečky ....
- d_4) súradnice ohniska resp. ohnísk kužeľosečky ....

e) (1b) Znázornite kužeľosečku a v náčrte popíšte jej významné prvky.

2. (2b) Vyberte funkciu, ktorej definičný obor je znázornený na obrázku.



a) $f(x, y) = \sqrt{x} + \ln(4 - x^2 - y^2)$

b) $f(x, y) = \arcsin x + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

c) $f(x, y) = \dfrac{\ln(x + 1)}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$

d) $f(x, y) = \dfrac{\arcsin(x + y)}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$

3. (6b) Vypočítajte

$$\iint_M x^2 y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde množina M je obdĺžnik s vrcholmi $A = [1, 2]$, $B = [2, 2]$, $C = [2, 3]$ a $D = [1, 3]$.

Výsledok: ....

4. (4b) Bod M má v pravouhlej súradnicovej sústave súradnice: $M = [3, \sqrt{3}, 3]$.

a) (2b) Vyberte správnu odpoveď:
Súradnice bodu M v cylindrickej súradnicovej sústave sú:

a) $M = [2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}, 3]$

b) $M = [2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}, 3]$

c) $M = [2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{3}, 3]$

d) $M = [2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{6}, 3]$

b) (2b) Znázornite tento bod M v cylindrickej súradnicovej sústave.

Náčrt:

5. (8b) Daná je lineárna obyčajná diferenciálna rovnica (LODR) $y'(x) + y(x) = x + 1$.

a) (2b) Napíšte charakteristickú rovnicu k danej diferenciálnej rovnici.

Charakteristická rovnica je: ....

b) (2b) Nájdite fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice s nulovou pravou stranou.

Fundamentálny systém riešení je ....

c) (2b) Nájdite partikulárne riešenie uvedenej nehomogénnej rovnice.

Partikulárne riešene je ....

d) (2b) Napíšte všeobecné riešenie danej lineárnej diferenciálnej rovnice.

Všeobecné riešenie danej LODR je ....

6. (4b) Vypočítajte nasledujúcu limitu

$$\lim_{[x,y]\to[0,\frac{\pi}{2}]} \frac{\sin(x+y)}{x+y}.$$

Výsledok: ....

7. (6b) Nájdite rovnicu dotykovej roviny τ ku grafu funkcie $f(x,y) = \sin\dfrac{x}{y}$ v bode $T = [\pi, 1, z_0]$.

(2b) Nájdite z_0 a **uveďte súradnice dotykového bodu**: ....

(4b) Všeobecná **rovnica** dotykovej roviny τ je: ....

8. (6b) Daná je funkcia $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - 2y^2}$, bod $A = [-1, 1]$ a vektor $\vec{l} = (2, -2)$.

a) (3b) Nájdite gradient funkcie $f(x,y)$ v bode A.

Gradient funkcie $f(x,y)$ v bode A je ....

b) (3b) Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x,y)$ v bode A v smere vektora $\vec{l}$.

Derivácia funkcie $f(x,y)$ v bode A v smere vektora $\vec{l}$ je ....

9. (27b) Daná je funkcia $f(x,y) = 1 + 9x^2 + 4y^2$ a oblasť M.
Oblasť M je mnohouholník $ABCD$ s vrcholmi $A = [-2,-1]$, $B = [2,-1]$, $C = [4,1]$ a $D = [-2,1]$.

a) Načrtnite oblasť M:

Náčrt:

Pomocou matematických vzťahov popíšte hranice oblasti M:

(a) (2b) AB ....

(b) (2b) BC ....

(c) (2b) CD ....

(d) (2b) AD ....

b) (5b) Nájdite lokálne extrémy danej funkcie $f(x,y)$ v oblasti M.
Ak hľadané lokálne extrémy nie sú, napíšte „nie sú".

Doplňte odpoveď: Funkcia $f(x,y)$ má v bode .... lokálne ....

c) Nájdite viazané lokálne extrémy danej funkcie $f(x,y)$ na hraniciach oblasti M. Ak hľadaný lokálny extrém nejestvuje, napíšte „nie je".

(a) (3b) Na hranici AB má funkcia $f(x,y)$ v bode .... viazané lokálne ....

(b) (3b) Na hranici BC má funkcia $f(x,y)$ v bode .... viazané lokálne ....

(c) (3b) Na hranici CD má funkcia $f(x,y)$ v bode .... viazané lokálne ....

(d) (3b) Na hranici AD má funkcia $f(x,y)$ v bode .... viazané lokálne ....

d) (2b) Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f(x,y)$ na oblasti M.

Najväčšia hodnota funkcie $f(x,y)$ je: ....

Najmenšia hodnota funkcie $f(x,y)$ je: ....