# Matematika I

Séria úloh 19

**1.** (7b) Daná je všeobecná rovnica kužeľosečky $2x^2 + 8x - 3y^2 + 12y - 16 = 0$.

**Doplňte:**

a) (2b) Kanonická rovnica (rovnica v štandardnom tvare) kužeľosečky je ..................

b) (1b) Typ kužeľosečky je ........................................................

c) (3b) Napíšte, ak existujú

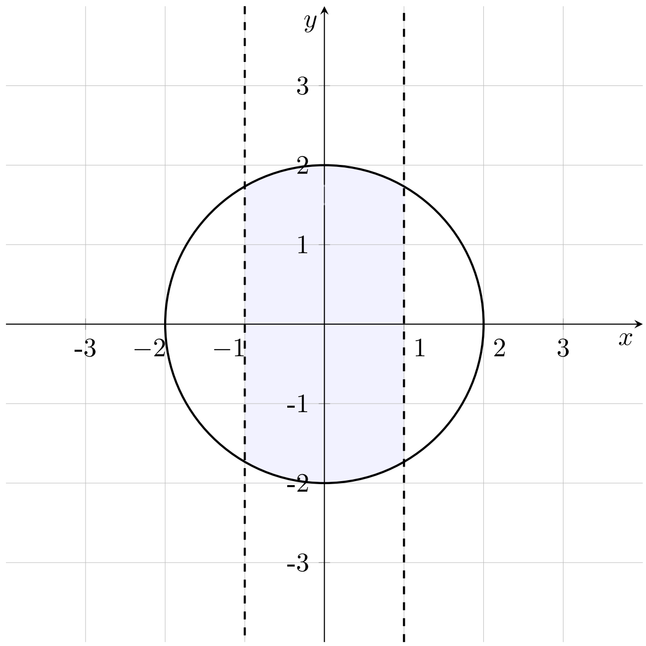
$c_1$) súradnice stredu kužeľosečky: ..............................................

$c_2$) súradnice ohniska resp. ohnísk kužeľosečky: ......................................

$c_3$) súradnice vrcholu resp. vrcholov kužeľosečky: .....................................

d) (1b) Znázornite kužeľosečku a v náčrte popíšte jej charakteristické prvky.

**2.** (2b) Vyberte funkciu, ktorej definičný obor je znázornený na obrázku.




a) $f(x,y) = \sqrt{x} + \ln\left(4 - x^2 - y^2\right)$

b) $f(x,y) = \arcsin x + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

c) $f(x,y) = \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$

d) $f(x,y) = \dfrac{\arcsin\left(x+y\right)}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$

**3.** (6b) Vypočítajte

$$\iint\limits_M xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde množina $M$ je trojuholník s vrcholmi $A = [1,1]$, $B = [1,2]$ a $C = [2,2]$.

**Výsledok:** ...........................................................................

**4.** (4b) Bod $M$ má v pravouhlej súradnicovej sústave súradnice: $M = [3, \sqrt{3}, 3]$.

a) (2b) Vyberte správnu odpoveď:
Súradnice bodu $M$ v cylindrickej súradnicovej sústave sú:

a) $M = [2\sqrt{3}, \dfrac{\pi}{6}, 3]$

b) $M = [2\sqrt{3}, \dfrac{\pi}{3}, 3]$

c) $M = [2\sqrt{3}, -\dfrac{\pi}{3}, 3]$

d) $M = [2\sqrt{3}, -\dfrac{\pi}{6}, 3]$

b) (2b) Znázornite tento bod $M$ v cylindrickej súradnicovej sústave.

**Náčrt:**

**5.** (8b) Daná je lineárna obyčajná diferenciálna rovnica (LODR) $y''(x) + y(x) = 3/sinx$.

a) (2b) Napíšte charakteristickú rovnicu k danej diferenciálnej rovnici.

**Charakteristická rovnica je:** ..................................................

b) (2b) Nájdite fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice s nulovou pravou stranou.

**Fundamentálny systém riešení je** ..................................................

c) (2b) Nájdite partikulárne riešenie uvedenej nehomogénnej rovnice.

**Partikulárne riešene je** ..................................................

d) (2b) Napíšte všeobecné riešenie danej lineárnej diferenciálnej rovnice.

**Všeobecné riešenie danej LODR je** ..................................................

**6.** (4b) Pomocou priamky $y = x$ a paraboly $y = x^2$ ukážte, že limita neexistuje

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{3x^2y}{x^4+y^2}.$$

**Výsledok:** ..................................................

**7.** (6b) Nájdite rovnicu dotykovej roviny $\tau$ ku grafu funkcie $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - xy$ v bode $T = [3, 4, z_0]$.

(2b) Nájdite $z_0$ a **uveďte súradnice dotykového bodu**: ..................................................

(4b) Všeobecná **rovnica** dotykovej roviny $\tau$ je: ..................................................

**8.** (6b) Daná je funkcia $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y^2}$, bod $A = [1,\ 2]$ a vektor $\vec{l} = (0,\ 2)$.

a) (3b) Nájdite gradient funkcie $f(x,y)$ v bode $A$.

**Gradient** funkcie $f(x,y)$ v bode $A$ je ..................................................

b) (3b) Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x,y)$ v bode $A$ v smere vektora $\vec{l}$.

**Derivácia** funkcie $f(x,y)$ v bode $A$ v smere vektora $\vec{l}$ je ..................................................

**9.** (27b) Daná je funkcia $f(x,y) = 1 + 9x^2 + 4y^2$ a oblasť $M$.
Oblasť $M$ je mnohouholník $ABCD$ s vrcholmi $A = [-2,-1]$, $B = [2,-1]$, $C = [4,1]$ a $D = [-2,1]$.

a) Načrtnite oblasť $M$:

**Náčrt:**

**Pomocou matematických vzťahov popíšte hranice oblasti $M$:**

(a) (2b) $AB$ ..........................................................................

(b) (2b) $BC$ ..........................................................................

(c) (2b) $CD$ ..........................................................................

(d) (2b) $AD$ ..........................................................................

b) (5b) Nájdite lokálne extrémy danej funkcie $f(x,y)$ v oblasti $M$.
Ak hľadané lokálne extrémy nie sú, napíšte „nie sú“.

**Doplňte odpoveď:** Funkcia $f(x,y)$ má v bode ............... lokálne ...............

c) Nájdite viazané lokálne extrémy danej funkcie $f(x,y)$ na hraniciach oblasti $M$. Ak hľadaný lokálny extrém nejestvuje, napíšte „nie je“.

(a) (3b) Na hranici $AB$ má funkcia $f(x,y)$ v bode ......... viazané lokálne .........

(b) (3b) Na hranici $BC$ má funkcia $f(x,y)$ v bode ......... viazané lokálne .........

(c) (3b) Na hranici $CD$ má funkcia $f(x,y)$ v bode ......... viazané lokálne .........

(d) (3b) Na hranici $AD$ má funkcia $f(x,y)$ v bode ......... viazané lokálne .........

d) (2b) Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f(x,y)$ na oblasti $M$.

**Najväčšia** hodnota funkcie $f(x,y)$ je: ................................................

**Najmenšia** hodnota funkcie $f(x,y)$ je: ................................................