

# Matematika I

15. januára

09:00

Meno a priezvisko: ..... Podpis: .....

Ročník: ..... študijný program: .....

1. (11b) Daná je všeobecná rovnica kužeľosečky  $9x^2 + 25y^2 - 54x - 100y - 44 = 0$ .

**Doplňte**

a) (2b) Stredová rovnica kužeľosečky je .....

b) (1b) Typ kužeľosečky je .....

c) (3b) Popíšte (ak existujú):

$c_1$ ) dĺžka hlavnej poloosi je .....

$c_2$ ) dĺžka vedľajšej poloosi je .....

$c_3$ ) excentricita je .....

d) (4b) Napíšte súradnice (ak existujú):

$d_1$ ) stredu kužeľosečky .....

$d_2$ ) hlavných vrcholov kužeľosečky .....

$d_3$ ) vedľajších vrcholov kužeľosečky .....

$d_4$ ) súradnice ohniska resp. ohnisk kužeľosečky .....

e) (1b) Znázornite kužeľosečku a v náčrte popíšte jej významné prvky.

2. (2b) Vyberte funkciu, ktorej definičný obor je znázornený na obrázku.



a)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

b)  $f(x, y) = \frac{\ln(4 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$

c)  $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{\ln(4 - x^2 - y^2)}$

d)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - \ln(4 - x^2 - y^2)$

3. (6b) Vypočítajte

$$\iint_M xy \, dx dy,$$

kde množina  $M$  je mnohoúhelník, ktorého vrcholy majú súradnice  $A = [1, 0]$ ,  $B = [2, 0]$ ,  $C = [2, 2]$  a  $D = [1, 3]$ .

**Výsledok:** .....

4. (4b) Bod  $M$  má v pravouhlej súradnicovej sústave súradnice:  $M = [3, \sqrt{3}, 3]$ .

a) (2b) Vyberte správnu odpoveď:

Súradnice bodu  $M$  v cylindrickej súradnicovej sústave sú:

a)  $M = \left[ 2\sqrt{3}, \frac{11\pi}{6}, 3 \right]$

c)  $M = \left[ 2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}, 3 \right]$

b)  $M = \left[ 2\sqrt{3}, \frac{5\pi}{3}, 3 \right]$

d)  $M = \left[ 2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}, 3 \right]$

b) (2b) Znázornite tento bod  $M$  v cylindrickej súradnicovej sústave.

**Náčrt:**

5. (8b) Daná je lineárna obyčajná diferenciálna rovnica (LODR)  $y''(x) + 3y'(x) - 4y(x) = 10xe^x$ .

a) (2b) Napíšte charakteristickú rovnicu k danej diferenciálnej rovnici.

**Charakteristická rovnica je:** .....

b) (2b) Nájdite fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice s nulovou pravou stranou.

**Fundamentálny systém riešení je** .....

c) (2b) Nájdite partikulárne riešenie uvedenej nehomogénnej rovnice.

**Partikulárne riešenie je** .....

d) (2b) Napíšte všeobecné riešenie danej lineárnej diferenciálnej rovnice.

**Všeobecné riešenie danej LODR je** .....

6. (4b) Vypočítajte nasledujúcu limitu

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [1,1]} \frac{2 - \sqrt{4 - xy}}{xy}.$$

**Výsledok:** .....

7. (6b) Nájdite rovnicu dotykovej roviny  $\tau$  ku grafu funkcie  $f(x, y) = e^{x \cos y}$  v bode  $T = [1, \pi, z_0]$ .

(2b) Nájdite  $z_0$  a **uvedte súradnice dotykového bodu:** .....

(4b) Všeobecná **rovnica** dotykovej roviny  $\tau$  je: .....

8. (6b) Daná je funkcia  $f(x, y) = \frac{1}{x + y^2}$ , bod  $A = [1, 2]$  a vektor  $\vec{l} = (0, 2)$ .

a) (3b) Nájdite gradient funkcie  $f(x, y)$  v bode  $A$ .

**Gradient** funkcie  $f(x, y)$  v bode  $A$  je .....

b) (3b) Vypočítajte deriváciu funkcie  $f(x, y)$  v bode  $A$  v smere vektora  $\vec{l}$ .

**Derivácia** funkcie  $f(x, y)$  v bode  $A$  v smere vektora  $\vec{l}$  je .....

9. (27b) Daná je funkcia  $f(x, y) = (x - 1)^2 + 2y^2$  a oblasť  $M$ .

Oblasť  $M$  je mnohouholník  $ABCD$  s vrcholmi  $A = [0, -1]$ ,  $B = [1, -1]$ ,  $C = [1, 1]$  a  $D = [0, 1]$ .

a) Načrtnite oblasť  $M$ :

**Náčrt:**

**Pomocou matematických vzťahov popíšte hranice oblasti  $M$ :**

- (a) (2b)  $AB$  .....
- (b) (2b)  $BC$  .....
- (c) (2b)  $CD$  .....
- (d) (2b)  $AD$  .....

b) (5b) Nájdite lokálne extrémny danej funkcie  $f(x, y)$  v oblasti  $M$ .

Ak hľadané lokálne extrémny nie sú, napíšte „nie sú“.

**Doplňte odpoveď:** Funkcia  $f(x, y)$  má v bode ..... lokálne .....

c) Nájdite viazané lokálne extrémny danej funkcie  $f(x, y)$  na hraniciach oblasti  $M$ . Ak hľadaný lokálny extrém nejestvuje, napíšte „nie je“.

- (a) (3b) Na hranici  $AB$  má funkcia  $f(x, y)$  v bode ..... viazané lokálne .....
- (b) (3b) Na hranici  $BC$  má funkcia  $f(x, y)$  v bode ..... viazané lokálne .....
- (c) (3b) Na hranici  $CD$  má funkcia  $f(x, y)$  v bode ..... viazané lokálne .....
- (d) (3b) Na hranici  $AD$  má funkcia  $f(x, y)$  v bode ..... viazané lokálne .....

d) (2b) Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie  $f(x, y)$  na oblasti  $M$ .

**Najväčšia** hodnota funkcie  $f(x, y)$  je: .....

**Najmenšia** hodnota funkcie  $f(x, y)$  je: .....