AOD - Laboratorium 2

Michał Waluś 279695

Październik 2025

1 Zadanie 1

1.1 Opis Modelu

n - ilość lotnisk
m - ilość dostawców paliwa

$I = \{1, \dots, n\}$ - lotniska
$J = \{1, \dots, m\}$ - dostawcy

$\overline{d} \in \mathbb{R}^n$ - wektor popytu (demand), ile galonów paliwa potrzeba na danym lotnisku.
$\overline{s} \in \mathbb{R}^m$ - wektor podaży (supply), ile galonów paliwa może dostarczyć dany dostawca.

$C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ - macierz kosztów, cena w dolarach dostarczenia jednego galonu paliwa na i-te lotnisko przez j-tego dostawce.

Zmienne decyzyjne:
$X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ - ile galonów paliwa zostanie dostarczone przez j-tego dostawce na i-te lotnisko.

Cel - minimalizacja kosztów:

$$\min \sum_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

Ograniczenia:

$$(\forall i \in I)(\forall j \in J) x_{ij} \geqslant 0$$

$$(\forall i \in I) \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \geqslant d_i$$

$$(\forall j \in J) \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leqslant s_j$$

1.2 Egzemplarz z listy

$n = 4$, $m = 3$

$$\overline{d} = \begin{pmatrix} 110000 \\ 220000 \\ 330000 \\ 440000 \end{pmatrix}, \overline{s} = \begin{pmatrix} 275000 \\ 550000 \\ 660000 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 14 \\ 9 & 12 & 4 \\ 11 & 13 & 9 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie (za pomocą GLPK):

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 110000 & 0 \\ 165000 & 55000 & 0 \\ 0 & 0 & 330000 \\ 110000 & 0 & 330000 \end{pmatrix}$$

Interpretacja wyników: Łączny koszt powyższego rozwiązania to \$8 525 000. Z powyższej macierzy prosto odczytujemy, że wszystkie firmy dostarczają paliwo. Ponieważ w zadanym egzemplarzu możliwości dostawy (275 000 + 550 000 + 660 000 = 1 485 000) są większe niż zapotrzebowanie na paliwo (110 000 + 220 000 + 330 000 + 440 000 = 1 100 000), to możliwości dostawy paliwa przez firmy nie zostały wyczerpane, ale firmy 1 i 3 dostarczyły maksymalną liczbę paliwa i dostarczyć więcej galonów może tylko firma 2, która dostarczyła 110 000 + 55 000 = 165 000 galonów na 550 000 możliwych.

2 Zadanie 2

2.1 Opis Modelu

n - ilość produktów
m - ilość maszyn

$I = \{1, \ldots, n\}$ - produkty
$J = \{1, \ldots, m\}$ - maszyny

$\overline{a} \in \mathbb{R}^m$ - wektor dostępności maszyn (availability), ile godzin tygodniowo może pracować dana maszyna.
$\overline{cm} \in \mathbb{R}^m$ - wektor kosztów pracy maszyn, ile kosztuje godzina pracy j-tej maszyny.
$\overline{p} \in \mathbb{R}^n$ - wektor cen produktów, za ile dolarów się sprzedaje i-ty produkt.
$\overline{cp} \in \mathbb{R}^n$ - wektor kosztów materiałowych, ile kosztują materiały potrzebne do produkcji kilograma i-tego produktu.
$\overline{d} \in \mathbb{R}^n$ - wektor podaży, ile kilogramów i-tego produktu możemy sprzedać tygodniowo.

$T = (t_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ - macierz czasów produkcji, ile minut j-ta maszyna musi spędzić nad i-tym produktem, by po przejściu przez wszystkie wyprodukować 1kg.

Zmienne decyzyjne:
$\overline{X} \in \mathbb{R}^n$ - ile kilogramów i-tego produktu produkujemy.

Cel - maksymalizacja zysków:

$$\max \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \cdot \left(p_i - cp_i - \sum_{j=1}^{m} (cm_j \cdot t_{ij}) \right) \right) \equiv \max(\overline{p} - \overline{cp} - T \cdot \overline{cm})^T X$$

Ograniczenia:

$$(\forall i \in I) 0 \leqslant x_i \leqslant d_i$$

$$(\forall j \in J) \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot t_{ij} \leqslant 60 a_j$$

2.2 Egzemplarz z listy

$n = 4$, $m = 3$

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix}, \overline{cm} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{p} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \overline{cp} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{d} = \begin{pmatrix} 400 \\ 100 \\ 150 \\ 500 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 6 \\ 3 & 6 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie (za pomocą GLPK):

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} 125 \\ 100 \\ 150 \\ 500 \end{pmatrix}$$

Interpretacja wyników: Tygodniowy zysk ze sprzedaży to \$3 632.50. Widzimy, że została osiągnięta maksymalna produkcja dla produktów 2, 3 i 4. Produkt 1 ma drugi najmniejszy zysk pomijając koszty pracy maszyn $(p_i - cp_i)$ spowodowane najwyższym kosztem materiałów, jednak zużywa znacznie więcej czasu pracy maszyn na kilogram niż produkt 4 o najmniejszym zysku.
Możemy zaobserwować, że naszą produkcję limituje liczba godzin na 2 maszynie, która została osiągnięta ($125 \cdot 10 + 100 \cdot 6 + 150 \cdot 5 + 500 \cdot 2 = 3600$), aczkolwiek również prawie cały tygodniowy czas na pierwszej maszynie został wykorzystany ($125 \cdot 5 + 100 \cdot 3 + 150 \cdot 4 + 500 \cdot 4 = 3525$). Można również zauważyć, że dla każdego produktu niezbędny czas pracy drugiej maszyny jest zawsze większy od czasu pracy trzeciej maszyny, więc niemożliwe jest wykorzystanie całego czasu pracy trzeciej maszyny, gdy tygodniowa dostępność tych maszyn pozostaje taka sama.

3 Zadanie 3

3.1 Opis Modelu

$K \in \mathbb{N}_+$ - ilość okresów

$J = \{1, \dots, K\}$ - okresy

$\overline{l} \in \mathbb{R}^K$ - wektor maksymalnych ilości (limit) wyprodukowanych jednostek towaru w danym okresie.
$\overline{c} \in \mathbb{R}^K$ - wektor kosztów produkcji jednostki towaru w j-tym okresie.
$\overline{a} \in \mathbb{R}^K$ - wektor maksymalnych ilości towaru wyprodukowanych ponad limit (l_j) w j=tym okresie.
$\overline{o} \in \mathbb{R}^K$ - wektor kosztów produkcji jednostki towaru ponad limit w j-tym okresie.
$\overline{d} \in \mathbb{R}^K$ - wektor podaży/zapotrzebowania, ile jednostek towaru musimy dostarczyć w danym okresie.
$\overline{s} \in \mathbb{R}^K$ - wektor maksymalnych ilości towaru który możemy przechować po j-tym okresie.
$\overline{sc} \in \mathbb{R}^K$ - wektor kosztów przechowywania 1 jednostki towaru po j-tym okresie.

$b \in \mathbb{R}_+$ - ile jednostek towaru jest w magazynie przed pierwszym okresem.
$e \in \mathbb{R}_+$ - ile jednostek towaru ma pozostać w magazynie po ostatnim okresie.

Zmienne decyzyjne:
$\overline{X} \in \mathbb{N}^K$ - ile jednostek towaru produkujemy w j-tym okresie (do limitu).
$\overline{Y} \in \mathbb{N}^K$ - ile jednostek towaru powyżej limitu produkujemy w j-tym okresie.
$\overline{sur} \in \mathbb{N}^{K+1}$ - ile jednostek towaru przechowujemy po j-tym okresie. Wektor jest w pełni zależny

od $\overline{X}$, $\overline{Y}$ oraz $\overline{d}$.

Cel - minimalizacja kosztów:

$$\max \sum_{j=1}^{K} (x_j \cdot c_j + y_j \cdot o_j + sur_j \cdot sc_j) \equiv \max \left(\overline{c}^T X + \overline{o}^T Y + \overline{sc}^T \overline{sur} \right)$$

Ograniczenia:

$$(\forall j \in J) 0 \leqslant x_j \leqslant l_i \equiv \mathbf{0} \leqslant \overline{X} \leqslant \overline{l}$$

$$(\forall j \in J) 0 \leqslant y_j \leqslant a_i \equiv \mathbf{0} \leqslant \overline{Y} \leqslant \overline{a}$$

$$(\forall j \in J) 0 \leqslant sur_j \leqslant s_i \equiv \mathbf{0} \leqslant \overline{sur} \leqslant \overline{s}$$

$$sur_K = e \wedge sur_1 = x_1 + y_1 + b - d_1$$

$$(\forall j \in J \backslash \{1\}) sur_j = x_j + y_j + sur_{j-1} - d_j$$

$$(\forall j \in J) x_j + y_j + sur_j \geqslant d_j \equiv \overline{X} + \overline{Y} + \overline{sur} \geqslant \overline{d}$$

3.2 Egzemplarz z listy

$K = 4$, $b = 15$, $e = 0$

$$\overline{l} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}, \overline{c} = \begin{pmatrix} 6000 \\ 4000 \\ 8000 \\ 9000 \end{pmatrix}, \overline{a} = \begin{pmatrix} 60 \\ 65 \\ 70 \\ 60 \end{pmatrix}, \overline{o} = \begin{pmatrix} 8000 \\ 6000 \\ 10000 \\ 11000 \end{pmatrix}, \overline{d} = \begin{pmatrix} 130 \\ 80 \\ 125 \\ 195 \end{pmatrix}, \overline{s} = \begin{pmatrix} 70 \\ 70 \\ 70 \\ 70 \end{pmatrix}, \overline{sc} = \begin{pmatrix} 1500 \\ 1500 \\ 1500 \\ 1500 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie (za pomocą GLPK):

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}, \overline{Y} = \begin{pmatrix} 15 \\ 50 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix}, \overline{sur} = \begin{pmatrix} 0 \\ 70 \\ 45 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Łączny koszt: \$3 842 500

Interpretacja wyników: W powyższych wynikach od razu rzuca się w oczy, że w każdym okresie produkujemy wszystkie 100 jednostek towaru. Dodatkowo w każdym okresie poza trzecim uruchamiamy produkcję ponadwymiarową, a podczas drugiego okresu, gdy cenu produkcji są najniższe, magazynujemy maksymalną ilość towaru. Dzięki niskiemu zapotrzebowaniu w 3 okresie, produkując bez produkcji ponadwymiarowej, jesteśmy w stanie przechować 45 jednostek towaru na ostatni okres.

4 Zadanie 4

4.1 Opis Modelu

n - ilość miast

$N = \{1, \ldots, n\}$ - miasta
$A \subseteq N \times N$ - połączenia między miastami

$c : A \to \mathbb{R}$ - funkcja kosztu, ile kosztuje przejazd między miastami. Stosujemy zapis $c_{ij} = c((i,j))$.
$t : A \to \mathbb{R}$ - funkcja czas, ile zajmuje przejazd między miastami. Stosujemy zapis $t_{ij} = t((i,j))$.

$i^\circ \in N$ - miasto startowe
$j^\circ \in N$ - miasto końcowe
$T \in \mathbb{R}$ - górne ograniczenie czasu

Zmienne decyzyjne:
$X = (x_{ij}) \in \{0,1\}^{n\times m}$ - czy wybieramy daną krawędź.

Cel - maksymalizacja kosztów przejazdu:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} \cdot c_{ij}$$

Ograniczenia:

$$\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} \cdot t_{ij} \leqslant T$$

$$\sum_{(i^\circ,j)\in A} x_{i^\circ j} = 1$$

$$\sum_{(i,j^\circ)\in A} x_{ij^\circ} = 1$$

$$(\forall i \in N) \left(\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} = \sum_{(j,i)\in A} x_{ji} \right)$$

4.2 Egzemplarz z listy

$n = 10$, $T = 15$, $i^\circ = 1$, $j^\circ = 10$

(a) Funkcja kosztów c

$i\backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	.	3	4	7	8	.	.	.	.	.
2	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.
3	.	.	.	4	2	.	.	.	.	6
4	.	.	.	.	1	.	3	.	.	.
5	.	.	.	.	.	5	3	.	.	5
6	5	.	.	.	.	.	2	.	.	7
7	.	.	4	.	.	.	.	3	1	.
8	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
9	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2
10	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

(b) Funkcja czasu t

$i\backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	.	4	9	10	12	.	.	.	.	.
2	.	.	3	.	.	.	.	.	.	.
3	.	.	.	6	2	.	.	.	.	11
4	.	.	.	.	1	.	5	.	.	.
5	.	.	.	.	.	6	3	.	.	8
6	8	.	.	.	.	.	2	.	.	11
7	.	.	6	.	.	.	.	5	1	.
8	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.
9	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2
10	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Tabela 1: Reprezencja funkcji kosztów c i funkcji czasów t. Wartość w i-tym wierszu i j-tej kolumnie reprezentuje $c((i,j))$ (odpowiednio $t((i,j))$). Jeśli w danym polu występuje kropka oznacza to że dane połączenie nie należy do A.

Rozwiązanie (za pomocą GLPK):

$$X = \begin{pmatrix}
. & 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 0 & 1 & . & . & . & . & 0 \\
. & . & . & . & 0 & . & 0 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 0 & 1 & . & . & 0 \\
0 & . & . & . & . & . & 0 & . & . & 0 \\
. & . & 0 & . & . & . & . & 0 & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 0 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{pmatrix}$$

Gdzie, jak wyżej, kropki oznaczają krawędzie nie należące do A.

Koszt: 13
Czas podróży: 15

Interpretacja wyników: Widzimy, że w rozwiązaniu osiągnęliśmy górne ograniczenie na czas T i to ono blokuje tańsze rozwiązanie, $1 \to 3 \to 10$, o koszcie 10, ale łącznym czasie przejazdu 20.

4.3 Własny egzemplarz

$n = 10$, $T = 15$, $i^\circ = 1$, $j^\circ = 10$

(a) Funkcja kosztów c

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	.	2	3	.	6	.	.	.	.	.
2	.	.	.	3	.	.	.	.	11	.
3	.	.	.	.	3	.	.	.	.	.
4	.	.	.	.	.	3	.	.	.	.
5	.	.	.	.	.	.	3	.	.	5
6	.	.	.	.	.	.	.	3	.	.
7	.	.	.	.	.	.	.	.	3	.
8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3
9	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
10	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

(b) Funkcja czasu t

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	.	2	2	.	13	.	.	.	.	.
2	.	.	.	2	.	.	.	.	10	.
3	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.
4	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.
5	.	.	.	.	.	.	2	.	.	14
6	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.
7	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.
8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2
9	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
10	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Tabela 2: Reprezencja funkcji kosztów c i funkcji czasów t. Wartość w i-tym wierszu i j-tej kolumnie reprezentuje $c((i,j))$ (odpowiednio $t((i,j))$). Jeśli w danym polu występuje kropka oznacza to że dane połączenie nie należy do A.

Rozwiązanie (za pomocą GLPK):

$$X = \begin{pmatrix} . & 0 & 1 & . & 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & . & . & . & . & 0 & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Gdzie, jak wyżej, kropki oznaczają krawędzie nie należące do A.

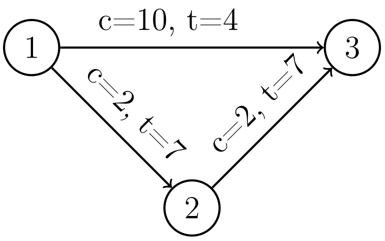
Koszt: 13
Czas podróży: 9

Interpretacja wyników: Jak w poprzednim egzemplarzu w rozwiązaniu górne ograniczenie na czas T blokuje tańsze rozwiązanie, mimo nie osiągnięcia górnego ograniczenia. Tańsze rozwiązanie to $1 \rightarrow 5 \rightarrow 10$, o koszcie 11, ale łącznym czasie przejazdu 27.

4.4 Całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych

W przypadku, gdzie istnieje górne ograniczenie na czas przejazdu, zmienne decyzyjne muszą być ograniczone do liczb całkowitych, ponieważ inaczej moglibyśmy rozdzielić "przesył", by część szła drogą o niższym koszcie, ale większym czasie, a reszta drogą o niskim czasie, ale wysokim koszcie.

Przykład obrazujący tę sytuację:
$G = (\{1, 2, 3\}, \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\})$
$c(1, 2) = c(2, 3) = 2$, $c(1, 3) = 10$
$t(1, 2) = t(2, 3) = 7$, $t(1, 3) = 4$
$T = 9$, $i^\circ = 1$, $j^\circ = 3$



Widzimy, że dla tego grafu droga przez wierzchołek 2 zajmie $14 > 9 = T$, zatem przy ograniczeniach na całkowitość jedyną legalną drogą jest droga bezpośrednio z 1 do 3 o koszcie 10.

Rozważmy jednak sytuacje, gdzie $x(1, 2) = x(1, 3) = x(2, 3) = 0.5$, poza całkowitoliczbowością, spełnia ona wszystkie ograniczenia modelu z sekcji 4.1. Widzimy, że spełnia ona ograniczenie na czas: $0.5 \cdot 4 + 0.5 \cdot 7 + 0.5 \cdot 7 = 9 = T$, a także jej koszt jest niższy: $0.5 \cdot 10 + 0.5 \cdot 2 + 0.5 \cdot 2 = 6$. Zatem znaleźliśmy "drogę"o niższym koszcie, która spełnia pozostałe ograniczenia.

4.4.1 Bez ograniczeń na czas przejazdu

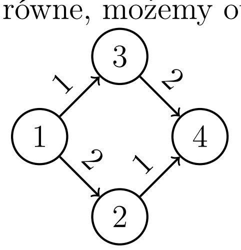
Powyższy przykład pokazał, że przy ograniczeniach na czas przejazdu, ograniczenia na całkowitoliczbowość są niezbędne, jednak gdy usuniemy ograniczenie na czas przejazdu, to zawsze istnieje optymalne rozwiązanie, gdzie wszystkie wartości $x(i, j)$ są liczbami całkowitymi.

Rozważmy sytuację, gdzie z wierzchołka v do w mamy dwie różne drogi, które obie zostały "wybrane"przez nasz algorytm - krawędzie na pierwszej drodze mają przypisaną wartość zmiennych decyzyjnych α, a na drugiej β. Oznaczmy całkowity koszt pierwszej drogi jako C_1 i drugiej jako C_2. Bez straty ogólności możemy założyć, że $C_1 \leqslant C_2$. Również oznaczmy łączny koszt jako C. Niech C' będzie kosztem drogi, gdzie zmiennym decyzyjnym przy pierwszej drodze przypisujemy $\alpha + \beta$, a tym przy drugiej 0. Wtedy:

$$C' = C + \beta C_1 - \beta C_2 \leqslant C$$

Zatem otrzymaliśmy drogę o niewiększym koszcie. Analogicznie możemy złączyć wszystkie inne drogi i otrzymać binarne wartości $x(i, j)$.

Mimo tego, że zawsze istnieje optymalne rozwiązanie całkowitoliczbowe, to nie zawsze to musi być jedyne optymalne rozwiązanie. W szczególnym przypadku gdzie wagi przy pewnych drogach są równe, możemy otrzymać rozwiązanie ułamkowe, co ilustruje poniższy przykład:



Widzimy, że drogi z 1 do 4 przez 2 i przez 3 mają takie same wagi, więc każde rozwiązanie w formie $x(1,2) = x(2,4) = \alpha$, $x(1,3) = x(3,4) = 1 - \alpha$, dla $\alpha \in [0,1]$ jest rozwiązaniem optymalnym, które w teorii może zostać zwrócone przez solver.

5 Zadanie 5

5.1 Opis Modelu

n - ilość dzielnic
m - ilość zmian

$N = \{1, \ldots, n\}$ - dzielnice
$S = \{1, \ldots, m\}$ - zmiany

$R_{min} = (r_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ - macierz określająca co najmniej ile radiowozów musi być w dzielnicy podczas danej zmiany.
$R_{max} = (R_ij) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ - macierz określająca co najwyżej ile radiowozów może być w dzielnicy podczas danej zmiany.

$\overline{D} \in \mathbb{R}^n$ - wektor zawierający minimalne liczby radiowozów w dzielnicach.
$\overline{Z} \in \mathbb{R}^m$ - wektor zawierający minimalne liczby radiowozów podczas zmian.

Zmienne decyzyjne:
$X = (x_{ij}) \in \mathbb{N}^{n \times m}$ - ile radiowozów przypisujemy do danej dzielnicy podczas danej zmiany.

Cel - minimalizacja liczby radiowozów:

$$\min \sum_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m} x_{ij}$$

Ograniczenia:

$$(\forall i \in I)(\forall j \in J) x_{ij} \geqslant 0$$

$$(\forall i \in I)(\forall j \in J) x_{ij} \geqslant r_{ij}$$

$$(\forall i \in I)(\forall j \in J) x_{ij} \leqslant R_{ij}$$

$$(\forall i \in N) \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \geqslant d_i$$

$$(\forall j \in J) \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geqslant z_j$$

5.2 Egzemplarz z listy

$n = 3$, $m = 3$

$$R_{min} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 5 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}, R_{max} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 5 & 7 & 10 \\ 8 & 12 & 10 \end{pmatrix}, \overline{D} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix}, \overline{Z} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie (za pomocą GLPK):

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Łączna liczba radiowozów: 48

Interpretacja wyników: Widzimy, że dane w powyższym egzemplarzu są ustalone tak, że minimalna liczba radiowozów, przewyższa zarówno tą wynikającą z ograniczenia dla dzielnic (37), jak i tą z macierzy R_{min} (41). Jest ona za to równa tej wynikającej z ograniczenia dla zmian i widzimy, że podczas każdej zmiany jest przydzielone tylko niezbędne minimum.

6 Zadanie 6

6.1 Opis Modelu

Na terenie podzielonym na kwadraty stoją kontenery (co najwyżej jeden na kwadrat). Na wolnych kwadratach mamy umieścić kamery tak aby każdy kontener był obserwowany, kamera obserwuje taką samą ilość kwadratów w czterech kierunkach.

n - długość terenu (w kwadratach)
m - szerokość terenu (w kwadratach)
k - zasięg kamery (w kwadratach)

$T = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$ - teren

$C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ - macierz określająca rozstawienie kontenerów.

Zmienne decyzyjne:
$X = (x_{ij}) \in \{0, 1\}^{n \times m}$ - czy na danym kwadracie umieszczamy kamerę.

Cel - minimalizacja liczby kamer:

$$\min \sum_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m} x_{ij}$$

Ograniczenia:

1. Na jednym kwadracie może być co najwyżej jedna rzecz (kamera/kontener)

$$(\forall (i,j) \in T) c_{ij} + x_{ij} \leqslant 1$$

2. Każdy kontener musi być obserwowany

$$(\forall (i,j) \in T) \left(c_{ij} - \left(\sum_{r \in R_i} x_{rj} + \sum_{r \in L_i} x_{rj} + \sum_{r \in B_i} x_{ir} + \sum_{r \in F_i} x_{ir} \right) \leqslant 0 \right)$$

Gdzie $R_i = \{i, \ldots, n\} \cap \{i, \ldots, i+k\}$, $L_i = \{1, \ldots, i\} \cap \{i-k, \ldots, i\}$, $B_j = \{1, \ldots, j\} \cap \{j-k, \ldots, j\}$ i $F_j = \{j, \ldots, m\} \cap \{j, \ldots, j+m\}$.

6.2 Własny egzemplarz

$n = 5$, $m = 5$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie (za pomocą GLPK):

$$X(k=1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X(k=2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gdzie wartość w nawiasie oznacza dla jakiej wartości k zostało wyliczone dane rozwiązanie.

Interpretacja wyników: Zgodnie z intuicją, wraz ze zwiększeniem k, zmniejsza się liczba potrzebnych kamer. Dla powyższego egzemplarzu, po zwiększeniu zasięgu kamer, żadna kamera nie pozostała w tym samym miejscu, co wskazuje na to, że znając optymalne rozwiązanie dla jednego przypadku, nie jesteśmy w stanie prosto z niego wywnioskować optymalnego rozwiązania dla wariantu z mniejszym/większym zasięgiem kamer.