Obliczenia Naukowe - Laboratorium 3

Michał Waluś 279695

Listopad 2025

1 Zadanie 1

1.1 Opis problemu

W języku Julia, napisanie oraz przetestowanie funkcji rozwiązającej równanie $f(x) = 0$ metodą bisekcji.

Funkcja powinna przyjmować następujące parametry:

- `f` - dana funkcja, dla której równanie mamy rozwiązać.
- `a`, `b` - końce początkowego przedziału.
- `delta` - minimalna długość przedziału, jeśli w trakcie obliczeń bieżąca długość przedziału będzie mniejsza od `delta`, to zwracamy bieżące wyniki i zakańczamy działanie funkcji.
- `epsilon` - dokładność obliczeń, jeśli wartość funkcji po środku bieżącego przedziału jest mniejsza od `epsilon`, to zwracamy bieżące wyniki i zakańczamy działanie funkcji.

Funkcja powinna zwracać czwórkę `(r, v, it, err)`, gdzie:

- `r` - wyliczony pierwiastek.
- `v` - wartość funkcji dla wyliczonego pierwiastka, `v = f(r)`.
- `it` - liczba wykonanych iteracji.
- `err` - kod błędu:
  - 0 - funkcja zakończyła działanie pomyślnie.
  - 1 - funkcja nie zmienia znaku w przedziale `[a, b]`.

1.2 Rozwiązanie

Funkcje testujemy dla następujących przykładów:

- $f(x) = x^2 - 4$, przedział początkowy $[0, 5]$. Sprawdzamy, czy wykonanie nie zwróci błędu oraz dla zwróconego pierwiastka r, $|r - 2| < \delta$ lub $|f(r)| < \epsilon$.
- $f(x) = \sin x$, przedział początkowy $[-1, 1]$. Sprawdzamy, czy wykonanie nie zwróci błędu oraz dla zwróconego pierwiastka r, $|r| < \delta$ lub $|f(r)| < \epsilon$.
- $f(x) = \sin x$, przedział początkowy $[2, 4]$. Sprawdzamy, czy wykonanie nie zwróci błędu oraz dla zwróconego pierwiastka r, $|r - \pi| < \delta$ lub $|f(r)| < \epsilon$.
- $f(x) = x - 6$, przedział początkowy $[0, 5]$. Sprawdzamy czy funkcja zwróci błąd `err` $= 1$.

Dla wszystkich testów ustalamy dokłaności obliczeń `delta` $=$ `epsilon` $= 10^{-5}$.

1.3 Wyniki

Funkcja pomyślnie przechodzi wszystkie testy.

1.4 Wnioski

Dla prostych przykładów metoda bisekcji zwraca oczekiwane wyniki.

2 Zadanie 2

2.1 Opis problemu

W języku Julia, napisanie oraz przetestowanie funkcji rozwiązającej równanie $f(x) = 0$ metodą Newtona (metodą stycznych).

Funkcja powinna przyjmować następujące parametry:

- `f` - dana funkcja, dla której równanie mamy rozwiązać.
- `x0` - wartość startowa.
- `delta`, `epsilon` - dokładności obliczeń, jak dla metody bisekcji.
- `maxit` - maksymalna dopuszczalna ilości iteracji, którą jeśli przekroczymy, to zwracamy bieżące wyniki i zakańczamy działanie funkcji.

Funkcja powinna zwracać czwórkę `(r, v, it, err)`, gdzie:

- `r`, `v`, `it` - jak dla metody bisekcji.
- `err` - kod błędu:
  - 0 - funkcja zakończyła działanie pomyślnie.
  - 1 - nie osiągnięto wymaganej dokładności w `maxit` iteracji.
  - 2 - pochodna bliska zeru.

2.2 Rozwiązanie

Funkcje testujemy dla następujących przykładów:

- $f(x) = x^2 - 4$, wartość początkowa $= 1$. Sprawdzamy, czy wykonanie nie zwróci błędu oraz dla zwróconego pierwiastka r, $|r - 2| < \delta$ lub $|f(r)| < \epsilon$.
- $f(x) = \sin x$, wartość początkowa $= 3$. Sprawdzamy, czy wykonanie nie zwróci błędu oraz dla zwróconego pierwiastka r, $|r - \pi| < \delta$ lub $|f(r)| < \epsilon$.
- $f(x) = \sin x + 1.1$, wartość początkowa $= 1$. Sprawdzamy czy funkcja zwróci błąd `err` $=$ 1.
- $f(x) = x^2 - 4x + 5$, wartość początkowa $= 1$. Metoda powinna po 1 iteracji skończyć w punkcie $x = 2$, gdzie pochodna jest równa 0, więc sprawdzamy czy funkcja zwróci błąd `err` $= 2$.

Dla wszystkich testów ustalamy dokłaności obliczeń `delta` $=$ `epsilon` $= 10^{-5}$ oraz `maxit` $=$ 128.

2.3 Wyniki

Funkcja pomyślnie przechodzi wszystkie testy.

2.4 Wnioski

Dla prostych przykładów metoda Newtona zwraca oczekiwane wyniki.

3 Zadanie 3

3.1 Opis problemu

W języku Julia, napisanie oraz przetestowanie funkcji rozwiązającej równanie $f(x) = 0$ metodą siecznych.

Funkcja powinna przyjmować następujące parametry:

- `f` - dana funkcja, dla której równanie mamy rozwiązać.
- `x0`, `x1` - końce początkowego przedziału.
- `delta`, `epsilon` - dokładności obliczeń, jak dla metody bisekcji.
- `maxit` - maksymalna dopuszczalna ilości iteracji, jak dla metody Newtona.

Funkcja powinna zwracać czwórkę `(r, v, it, err)`, gdzie:

- `r`, `v`, `it` - jak dla metody bisekcji.
- `err` - kod błędu:
  - 0 - funkcja zakończyła działanie pomyślnie.
  - 1 - nie osiągnięto wymaganej dokładności w `maxit` iteracji.

3.2 Rozwiązanie

Funkcje testujemy dla następujących przykładów:

- $f(x) = x^2 - 4$, `x0` $= 0$, `x1` $= 5$. Sprawdzamy, czy wykonanie nie zwróci błędu oraz dla zwróconego pierwiastka r, $|r - 2| < \delta$ lub $|f(r)| < \epsilon$.
- $f(x) = \sin x$, `x0` $= 3$, `x1` $= 4$. Sprawdzamy, czy wykonanie nie zwróci błędu oraz dla zwróconego pierwiastka r, $|r - \pi| < \delta$ lub $|f(r)| < \epsilon$.
- $f(x) = \sin x + 1.1$, `x0` $= 0$, `x1` $= 5$. Sprawdzamy czy funkcja zwróci błąd `err` $= 1$.

Dla wszystkich testów ustalamy dokłaności obliczeń `delta` $=$ `epsilon` $= 10^{-5}$ oraz `maxit` $= 128$.

3.3 Wyniki

Funkcja pomyślnie przechodzi wszystkie testy.

3.4 Wnioski

Dla prostych przykładów metoda siecznych zwraca oczekiwane wyniki.

4 Zadanie 4

4.1 Opis problemu

Używając wcześniej zaprogramowanych funkcji, rozwiązanie równania $\sin x - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$. Dla wszystkich funkcji przyjmujemy `delta` $=$ `epsilon` $= 5 \cdot 10^{-6}$ oraz

- dla metody bisekcji; `a` $= 1.5$ i `b` $= 2.0$.
- dla metody Newtona; `x0` $= 1.5$.
- dla metody siecznych; `x0` $= 1.0$ i `x1` $= 2.0$.

4.2 Rozwiązanie

Ponieważ w zadaniu nie została podana maksymalna liczba dozwolonych iteracji, ustawiamy `maxit` na dużą liczbę, tak by metoda na pewno obliczyła pierwiastek, jeśli dane początkowe są właściwe, dla podanych wyników `maxit` $= 4096$.
Dodatkowo, do metody Newtona potrzebujemy pochodną funkcji, więc ją wyliczamy:

$$\frac{d}{dx}\left(\sin x - \left(\frac{1}{2}x\right)^2\right) = \cos x - \frac{1}{2}x$$

4.3 Wyniki

Metoda	Bisekcji	Newtona	Siecznych
Pierwiastek	1.9337539672851562	1.933753779789742	1.933753644474301
Wartość funkcji	$-2.702768 \cdot 10^{-7}$	$-2.242332 \cdot 10^{-8}$	$1.564525 \cdot 10^{-7}$
Liczba iteracji	16	4	4
Status (`err`)	0	0	0

Tabela 1: Uzyskane wyniki

Wszystkie metody pomyślnie zakończyły działanie i zwróciły bardzo zbliżone wyniki, zgadzające się również z tym zwracanym przez narzędzie Wolfram Alpha - 1.9337537628270212533, aczkolwiek metoda bisekcji potrzebowała 4 razy więcej iteracji by to obliczyć.

4.4 Wnioski

Dla zwykłych przykładów, z poprawnymi warunkami początkowymi wszystkie metody zwracają poprawne wyniki - tak jak oczekiwane - w niewielką liczbę iteracji, lecz z powyższy przykład sugeruje, że metoda bisekcji potrzebuje najwięcej iteracji (mimo mniejszego przedziału początkowego niż metoda siecznych).

5 Zadanie 5

5.1 Opis problemu

Używając wcześniej zaprogramowanej funkcji na metodę bisekcji, znalezienie punktów przecięcia wykresów funkcji $y = e^x$ oraz $y = 3x$. Wymagana dokładność obliczeń: `delta` $=$ `epsilon` $= 10^{-4}$.

5.2 Rozwiązanie

Znaleznie punktów przecięcie jest równoważne z wyznaczeniem rozwiązań równania $e^x = 3x$ oraz obliczeniem wartości funkcji dla wyznaczonych pierwiastków.
Oznaczmy $f_1(x) = e^x$ oraz $f_2(x) = 3x$.
Wiemy, że pochodna funkcji f_2 jest stała - $\frac{d}{dx}(3x) = 3$ oraz pochodna funkcji f_1 jest ściśle rosnąca $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$. Dodatkowo obie funkcje są ściśle rosnące.
Wykonując proste obliczenia, widzimy, że dla $x > \ln 3$ funkcja f_1 rośnie szybciej ($e^x > 3 \equiv x > \ln 3$), gdzie dla mniejszych wartości x, funkcja f_2 szybciej rośnie, więc możemy mieć co najwyżej 2 pierwiastki, jeden mniejszy od $\ln 3$, a drugi większy. Ponieważ mamy $f_1(0) = e^0 = 1 > 0 = 3 \cdot 0 = f_2(0)$, $f_1(1) = e^1 = e < 3 = 3 \cdot 1 = f_2(1)$ oraz $f_1(2) = e^2 > 2.5^2 = 6.25 > 6 = 3 \cdot 2 = f_2(2)$, to widzimy że nasze równanie $e^x = 3x$ musi mieć 2 rozwiązania.
Zatem by obliczyć oba pierwiastki, wykonujemy naszą funkcję 2 razy, najpierw podając `a` $=$ 0.0 oraz `b` $=$ 1.0, a następnie `a` $=$ 1.0 oraz `b` $=$ 2.0.

5.3 Wyniki

Funkcje zakończyły działanie pomyślnie.

Przedział	$[0, 1]$	$[1, 2]$
Pierwiastek r	0.619140625	1.5120849609375
Wartość e^r	1.8573312117965672	4.536178697026473
Wartość $3r$	1.857421875	4.5362548828125

Tabela 2: Uzyskane wyniki

Z powodu skończonej prezycji arytmetyki zmiennopozycyjnej, otrzymane wyniki nie są dokładne, więc wartości funkcji f_1 i f_2 minimalnie się różnią. Jednakże wiemy, że w przybliżeniu punkty przecięcia wykresów funkcji, to $(0.6191, 1.857)$ oraz $(1.512, 4.536)$.

5.4 Wnioski

Metoda bisekcji (oraz pozostałe 2 metody - Newtona i siecznych) może być także wykorzystywana do takich zastosowań jak znajdowanie punktów przecięcia wykresów funkcji, mimo że nie mamy tam wprost podanego równania, którego pierwiastek musimy znaleźć. Metody te mogą też być użyte do rozwiązywania równań w formie $f(x) = c$ (jest to de facto punkt przecięcia z funkcją stałą) oraz rozwiązując równanie $f(x) - x = 0$ otrzymane rozwiązanie to punkt stały odwzorowania.

6 Zadanie 6

6.1 Opis problemu

6.1.1 Część pierwsza

Używając zaprogramowanych wcześniej funkcji, używając metod bisekcji, Newtona oraz siecznych, wyznaczenie pierwiastków funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $f_2(x) = xe^{-x}$, z dokładnościami obliczeń `delta` $=$ `epsilon` $= 10^{-5}$.

6.1.2 Część druga

Sprawdzenie jakie wyniki zwróci metoda Newtona, gdy dla f_1 przyjmiemy `x0` > 1 oraz dla f_2, `x0` $= 1.0$, a następnie `x0` > 1.

6.2 Rozwiązanie

6.2.1 Część pierwsza

Obliczamy wartości pochodnych funkcji:

$$\frac{d}{dx}f_1(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{1-x} - 1\right) = -e^{1-x}$$

$$\frac{d}{dx}f_2(x) = \frac{d}{dx}\left(xe^{-x}\right) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

Ponieważ funkcja eksponencjalna jest funkcją ściśle monotoniczną, stale większą od zera, to dla tych funkcji jesteśmy w stanie prosto wyznaczyć wartość rozwiązań:

$$f_1(x) = 0 \equiv e^{1-x} = 1 \equiv 1 - x = \ln 1 = 1 - x = 0 \equiv x = 1$$

oraz

$$f_2(x) = 0 \equiv xe^{-x} = 0 \equiv x = 0$$

Zatem dla pierwszej funkcji na przedział początkowy ustalamy $[0, 2]$, a dla drugiej $[-1, 1]$, dla uproszczenia dla metody siecznych używamy te same liczby. Dla metody Newtona nie chcemy, by wartość pochodnej była bliska zeru, więc dla pierwszej funkcji ustalamy wartość startową na 0, a dla drugiej na 0.5.
Ponieważ zadanie znowu nie precyzuje maksymalnej dopuszczalnej liczby iteracji to ustawiamy `maxit` $= 4096$, by metody zakończyły obliczenia.

6.2.2 Część druga

Pochodna funkcji f_1 bardzo szybko zbliża się do zera, więc o ile dla np. $x = 2$ wartość $-\frac{1}{e}$ da się zapisać w arytmetyce zmiennopozycyjnej i pierwiastek zostanie poprawnie obliczony, to dla większych wartości jak $x = 10$, przecięcie stycznej z osią OX, będzie w punkcie, dla którego wartość pochodnej jest bardzo duża i styczna będzie prawie pionowa, a dla jeszcze większych wartości jak $x = 100$, pochodna będzie równa zeru.
Dla funkcji f_2, pochodna jest równa zeru w punkcie $x = 1$, a dla większych wartości x, pochodna będzie ujemna i metoda będzie zbliżać się do "rozwiązania"w nieskończoności.

6.3 Wyniki

6.3.1 Część pierwsza

Wszystkie funkcje zakończyły działanie pomyślnie.

Funkcja	$f_1(x) = e^{1-x} - 1$	$f_2(x) = xe^{-x}$
M. bisekcji	1.0	0.0
M. Newtona	0.9999984358892101	$-3.0642493416461764 \cdot 10^{-7}$
M. siecznych	1.0000017597132702	$1.744165849924562 \cdot 10^{-8}$

Tabela 3: Wyliczone pierwiastki

Z powodu symetrycznego przedziału do okoła pierwiastka, metoda bisekcji zwraca dokładny wynik po 1 iteracji.

6.3.2 Część druga

W tabelach 4 i 5 zostały przedstawione wyniki dla funkcji f_1 i f_2 odpowiednio. Wynikają one z tych powodów, dla którego takie liczby zostały dobrane, dla `x0` $= 10$, dla pierwszej funkcji, prawie pionowe styczne sprawiają, że w arytmetyce ze skończoną precyzją po pierwszym kroku wartość pochodnej wynosi -Inf, a dla `x0` $= 100$, wartość pochodnej w pierwszym kroku wynosi 0. Dla funkcji f_2, niezależnie od precyzji obliczeń, wartość pochodnej dla $x = 1$ wynosi 0, więc metoda Newtona nie działa, a dla wartości startowej większej od 1, metoda zbliża się do "pierwiastka"w nieskończoności.

x0	2.0	10.0	100.0
Pierwiastek	0.999999981	NaN	-
Error	0	1	2

Tabela 4: Wyniki dla funkcji f_1

x0	1.0	2.0
Pierwiastek	-	14.39866276568
Error	1	0

Tabela 5: Wyniki dla funkcji f_2

6.4 Wnioski

Zadanie to pokazuje, że dla tych metod wyznaczania pierwiastków, musimy zadbać o dobre dane początkowe.

Dla metody bisekcji, wartości funkcji dla końców początkowego przedziału muszą mieć przeciwny znak, ale to jest oczywiste, bo to wymaganie tej metody.

Dla metody Newtona dobranie dobrej wartości początkowej jest znacznie trudniejsze, bo o ile nie rozpoczęcie w punkcie, gdzie pochodna wynosi 0 jest proste, to trudniej nie zagwarantować, że metoda nie wpadnie w taki punkt po kilku iteracjach. Dodatkowo metoda ta może się zapętlić (przechodzić przez kilka punktów po kolei i nigdy nie wychodząc z tej "pętli"), pochodna może być za duża na możliwości arytmetyki o skończonej precyzji, lub jeśli oryginalna funkcja zbiega do 0 w $\pm\infty$, to dla metody Newtona jest to właściwy pierwiastek, do którego może zbiegać.

Metoda siecznych wywodzi się z metody Newtona, więc również może mieć te same problemy, otrzymana sieczna może mieć współczynnik kierunkowy równy 0 (np dla funkcji $y = x^2$, dla $x_n = -1$ i $x_{n+1} = 1$) lub tak jak metoda Newtona może zmierzać do zera w nieskończoności, co zaszło by dla funkcji f_2, jeśli wybralibyśmy `x0` oraz `x1`, większe od 1, czyli wartości x dla której funkcja osiąga maksimum globalne.