AOD - Laboratorium 4

Michał Waluś 279695

Styczeń 2026

1 Zadanie 1

Oznaczmy przez $c(e)$ pojemność krawędzi, a przez $f(e)$ przepływ przez nią.

Do rozwiązania problemu używamy algorytmu Edmondsa-Karpa. Tworzy on dla grafu $G = (V, E)$ sieć rezydualną G_f, której wierzchołki są takie same jak w G, a dla każdej krawędzie (u, v) z G, zawiera (u, v) o pojemności $c_f((u, v)) = c((u, v)) - f((u, v))$, a także (v, u) o pojemności $f((u, v))$. Algortym wykorzystuje przeszukiwanie wszerz (BFS) do znalezenia najkrótszej ścieżki p ze źródła s do ujścia t. Następnie wyznacza maksymalny przepływ $c_f(p)$ jaki może być na tej ścieżce i dla każdej krawędzi (u, v) będącej częścią ścieżki zwiększa $f((u, v))$ o $c_f(p)$, jeśli $(u, v) \in E$ albo zmniejsza $f((v, u))$. Pseudokod przedstawiony jako Algorithm 1.

```
Function Edmonds-Karp (G, s, t):
    for each edge (u, v) ∈ G.E do
        (u, v).f ← 0;
    end
    while there exists a path from s to t in residual network G_f do
        p ← BFS(G_f, s, t);
        c_f(p) ← min{c_f(u, v) : (u, v) ∈ p};
        for each edge (u, v) in p do
            if (u, v) ∈ E then
                (u, v).f ← (u, v).f + c_f(p)
            end
            else
                (v, u).f ← (v, u).f + c_f(p)
            end
        end
    end
end
```

Algorithm 1: Algorytm Edmondsa-Karpa

1.1 Złożoność Algorytmu

Niech $n = 2^k = |V|$, ponieważ G to hiperkostka, to $|E| = nk$.
Złożoność czasowa przeszukiwania wszerz to $O(|V| + |E|) = O(nk)$.

Twierdzenie (*Cormen, Leiserson, Rivest, Stein - Introduction to Algorithms*)
Algorytm Edmondsa-Karpa wywołany dla sieci przepływów $G = (V, E)$ zwiększa przepływ

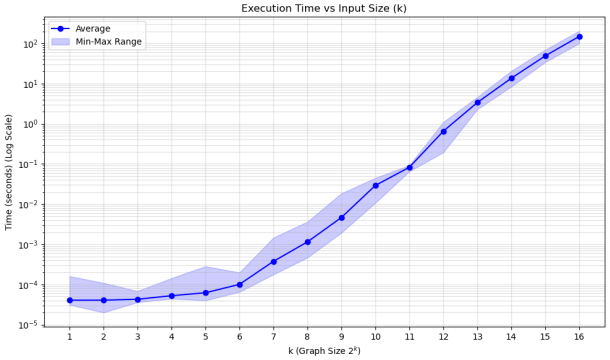
$O(|V||E|)$ razy.

Zatem dla naszego przypadku, przepływ może zostać zwiększony maksymalnie $O(n^2k)$ razy, czyli złożoność czasowa całego algorytmu wynosi $O(n^3k^2) = O(2^{3k}k^2) = O(nm^2)$.

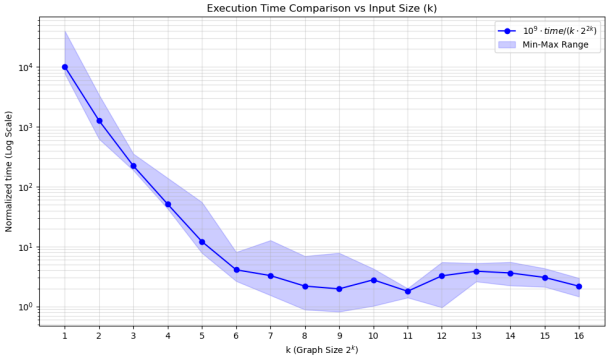
Ponieważ sieć residualna ma co najwyżej dwa razy tyle krawędzi co oryginalna, to złożoność pamięciowa algorytmu wynosi $O(nk)$.

1.2 Wyniki

Uzyskane wyniki (średnia ze 100 powtórzeń) zostały przedstawione na Rysunkach 1-3.

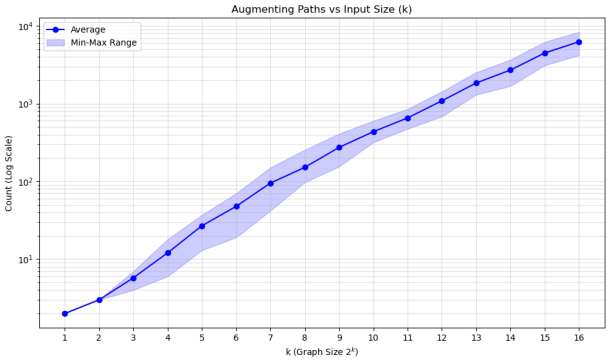


(a) Skala logarytmiczna

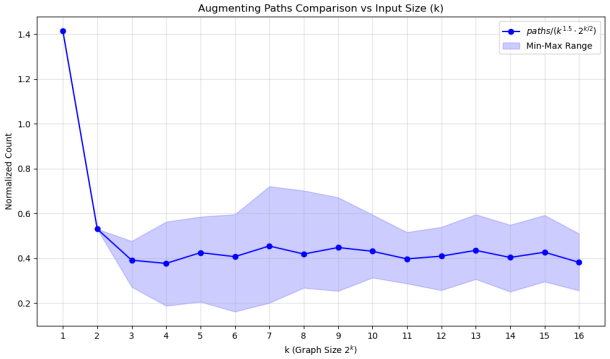


(b) $10^9 \cdot$ Czas $/(k \cdot 2^{2k})$

Rysunek 1: Wyniki dla czasu



(a) Skala logarytmiczna



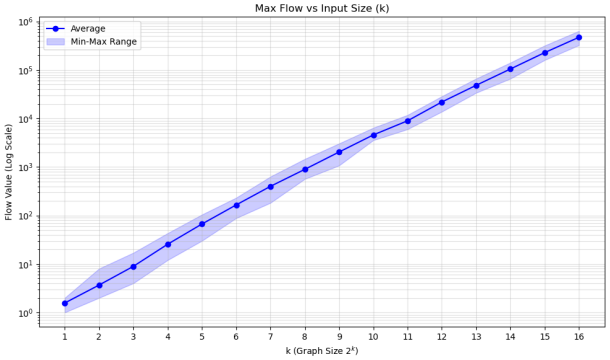
(b) Ścieżki $/(k^{1.5} \cdot 2^{k/2})$

Rysunek 2: Wyniki dla ilości ścieżek

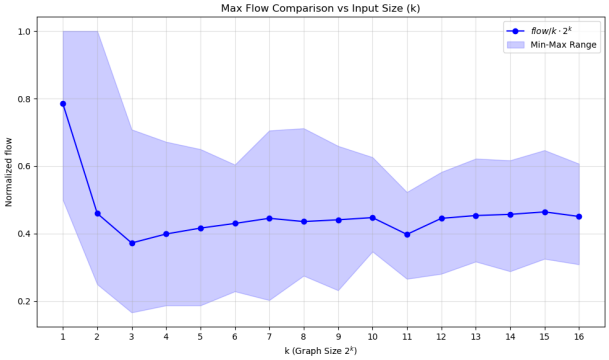
Na wykresach przedstawiono również znormalizowane wyniki, podzielone przez eksperymentalnie wyznaczoną funkcję. Widzimy, że czas wykonania rośnie wolniej niż $k \cdot 2^{2k}$, co jest znacznie wolniejszym tempem wzrostu niż to pesymistycznie obliczone podczas analizy algorytmu. Liczba ścieżek zwiększających zdaje się być zbliżona do pierwiastka z liczby krawędzi, a wartość maksymalnego przepływu zdaje się mieć takie samo tempo wzrostu jak liczba krawędzi.

2 Zadanie 2

Niech $G = (V_1 \cup V_2, E)$, $|V_1| = |V_2| = n = 2^k$, $V_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $V_2 = \{v_{n+1}, \ldots, v_{2n}\}$, $(\forall v \in V_1)(\exists w_1, \ldots, w_i \in V_2)(v, w_1), \ldots, (v, w_i) \in E$. Dla każdej krawędzi e ustalamy jej pojemność



(a) Skala logarytmiczna



(b) Przepływ $/(k \cdot 2^k)$

Rysunek 3: Wyniki dla maksymalnego przepływu

$c(e) = 1$. Dodatkowo dodajemy do grafu 2 wierzchołki v_0, v_{2n+1}, takie że

$$(\forall v \in V_1)\,((v_0, v) \in E)$$

$$(\forall v \in V_2)\,((v, v_{2n+1}) \in E)$$

Wszystkie o pojemności 1. W takim grafie maksymalny przepływ z v_0 do v_{2n+1} jest równoważny skojarzeniu o największym rozmiarze. Do wyznaczenia rozwiązania możemy znowu użyć algorytmu Edmonda-Karpa.

2.1 Złożoność Algorytmu

Złożoności pozostają niezmienione, czyli złożoność pamięciowa algorytmu wynosi $O(|E|) = (i \cdot 2^k)$, a czasowa $O(nm^2) = O(i^2 \cdot 2^{3k})$.

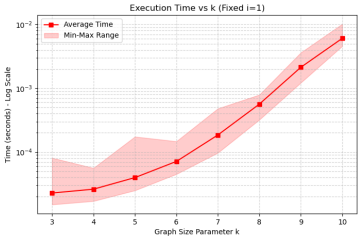
2.2 Wyniki

Czasy działania dla różnych i w zależności od k zostały przedstawione na rysunku 4, a na rysunku 5 wielkość maksymalnego skojarzenia w zależności od i.
Czas działania zwiększa się wraz ze wzrostem wartości i oraz k, wykres sugeruje wzrost wykładniczy względem k, czyli wielomianowy względem rozmiaru grafu.
Wraz ze wzrostem i, zwiększa się rozmiar skojarzenia o największym rozmiarze (przypomina on logarytmiczny), przy czym od $i = 6$ lub 7, skojarzenia zawierają wszystkie wierzchołki w grafie i są maksymalne.

3 Zadanie 3

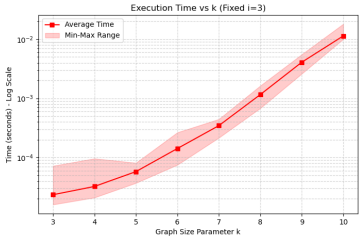
Modele programowania liniowego dla zadania pierwszego są w następującej formie:

- Parametry:
$$V, E \subseteq V \times V, (\forall e \in E) C(e) \geqslant 0, s, t \in V$$
- Zmienne decyzyjne:
$$(\forall e \in E) 0 \leqslant flow(e) \leqslant C(e)$$
- Ograniczenia:
$$(\forall u \in V \backslash \{s, t\}) \sum_{(u,v)\in E} flow((u, v)) = \sum_{(v,u)\in E} flow((v, u))$$

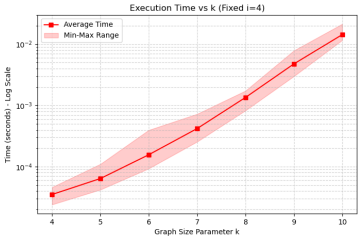


(a) $i = 1$

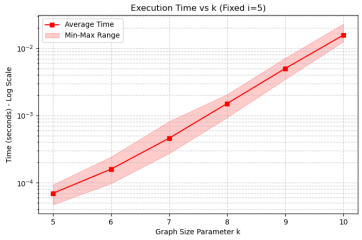
(b) $i = 2$



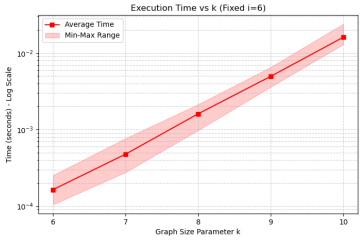
(c) $i = 3$



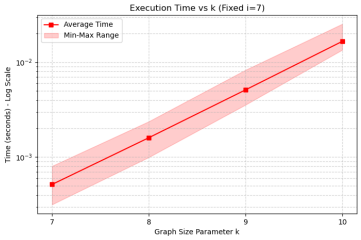
(d) $i = 4$



(e) $i = 5$

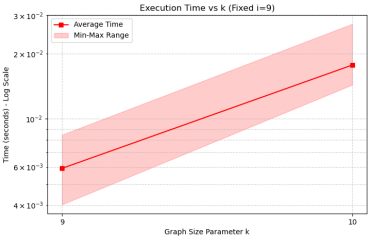


(f) $i = 6$

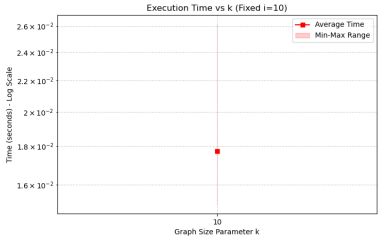


(g) $i = 7$

(h) $i = 8$



(i) $i = 9$



(j) $i = 10$

Rysunek 4: Czasy działań w zależności od k

- Funkcja celu:

$$\max \sum_{(s,v)\in E} flow((s,v))$$

Modele programowania liniowego dla zadania drugiego są w następującej formie:

- Parametry:

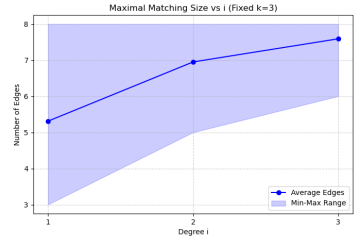
$$V, E \subseteq V \times V, s, t \in V$$

- Zmienne decyzyjne:

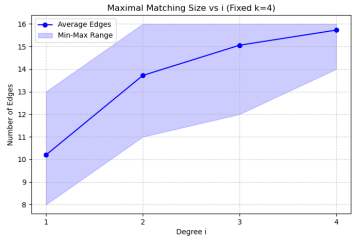
$$(\forall e \in E) 0 \leqslant flow(e) \leqslant 1$$

- Ograniczenia:

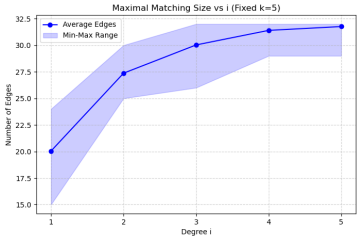
$$(\forall u \in V \backslash \{s,t\}) \sum_{(u,v)\in E} flow((u,v)) = \sum_{(v,u)\in E} flow((v,u))$$



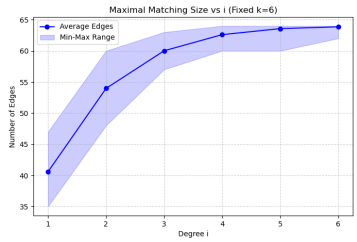
(a) $k = 3$



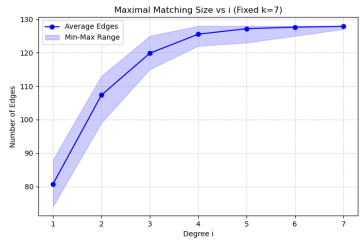
(b) $k = 4$



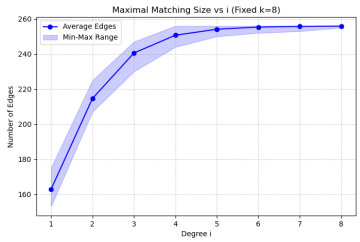
(c) $k = 5$



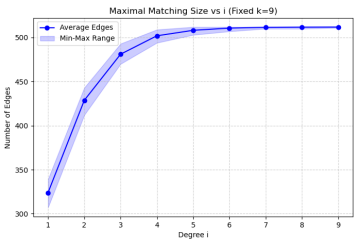
(d) $k = 6$



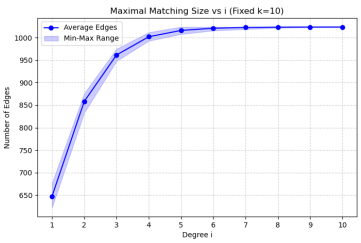
(e) $k = 7$



(f) $k = 8$



(g) $k = 9$



(h) $k = 10$

Rysunek 5: Wielkość maksymalnego skojarzenia w zależności od i

- Funkcja celu:

$$\max \sum_{(s,v)\in E} flow((s,v))$$

3.1 Porównanie Czasu

Czasy działania przedstawione w tabelach 1 i 2.

k	Algorytm	GLPK
11	0.045248s	0.1s
12	0.090343s	0.4s
13	0.353865s	1.7s

Tabela 1: Algorytm z zadania 1 vs GLPK

Programy z zadań 1 i 2 obliczają szybciej niż solver GLPK.

4 Zadanie 4

Algorytm Dinica jest usprawnieniem metody Edmondsa-Karpa i również utrzymuje on sieć rezydualną G_f. Różnicą jest że algorytm działa w fazach i zamiast wyszukiwać pojedynczą ścieżkę, znajduje wszystkie ścieżki tej samej długości. W każdej fazie najpierw za pomocą przeszukiwania wszerz (BFS) konstruowana jest sieć warstwowa G_L. W sieci tej wierzchołki mają

k	Algorytm	GLPK
10	0.019349s	0.2s
11	0.070265s	0.7s
12	0.295123s	3.7s

Tabela 2: Algorytm z zadania 2 vs GLPK

przypisany poziom $level(v)$ równy odległości od źródła s w sieci rezydualnej, a krawędzie to tylko te łuki (u, v) z G_f, dla których $level(v) = level(u) + 1$.

W tak skonstruowanej sieci warstwowej szukamy przepływu blokującego przy użyciu przeszukiwania w głąb (DFS). Przepływ blokujący to taki przepływ, po którego nasyceniu nie istnieje już żadna ścieżka powiększająca w G_L, czyli wszystkie pozostałe ścieżki z s do t muszą być dłuższe. Algorytm powtarza te dwie fazy (budowa G_L i nasycanie), dopóki t jest osiągalne z s w sieci rezydualnej. Ponieważ DFS przechodzi po sąsiadach danego wierzchołka u w tej samej kolejności za każdym razem gdy go napotka, to zapamiętujemy, z których wierzchołków nie ma ścieżki do t (w grafie G_L). Pseudokod przedstawiony jako Algorithm 3.

4.1 Złożoność Algorytmu

Podobnie jak wcześniej niech $n = 2^k = |V|$ oraz $|E| = nk$.
Pojedyncza faza algorytmu Dinica składa się z wyznaczenia sieci warstwowej (BFS) w czasie $O(|E|)$ oraz znalezienia potoku blokującego (wielokrotny DFS). Dzięki technice usuwania nasyconych krawędzi (lub pamiętania wskaźnika na ostatnio odwiedzoną krawędź), znalezienie potoku blokującego zajmuje $O(|V||E|)$.

Lemat 3 z portalu Ważniak MIMUW
W algorytmie Dinica liczba faz wynosi co najwyżej $|V| - 1$, ponieważ w każdej kolejnej fazie odległość w sieci rezydualnej od źródła do ujścia ściśle rośnie.

Zatem ogólna złożoność algorytmu dla dowolnych pojemności wynosi $O(|V|^2|E|)$. Dla naszego przypadku hiperkostki, gdzie $|V| = n$ i $|E| = nk$, złożoność wynosi:

$$O(n^2 \cdot nk) = O(n^3 k) = O(2^{3k} k)$$

Jest to wynik lepszy od algorytmu Edmondsa-Karpa o czynnik k (lub $O(n/m)$ w ogólnym przypadku grafów gęstych).

Złożoność pamięciowa pozostaje $O(nk)$, gdyż przechowujemy jedynie strukturę grafu, poziomy wierzchołków oraz wskaźniki dla procedury DFS.

4.2 Wyniki

Otrzymane wyniki są przedstawione na rysunku 6. Ścieżki zwiększające oraz maksymalny przepływ pozostają bez większych zmian w stosunku do algorytmu Edmundsa-Karpa, ale czas wykonania jest zdecydowanie szybszy, dla $k = 16$ algorytm wykonał się ponad 1000 razy szybciej.

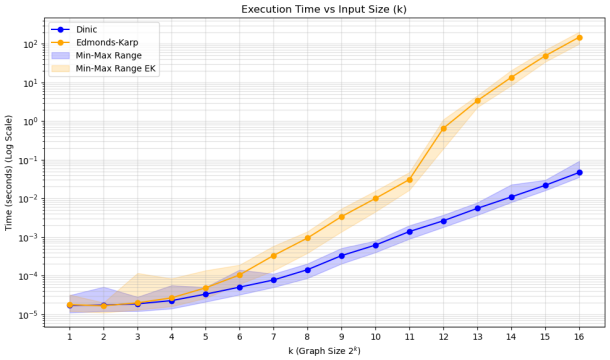
5 Wnioski

Mimo tego, ze problem maksymalnego przepływu jest bardzo ogólny (jedno zastosowanie znajdywania skojarzeń w Zadaniu 2), to istnieją dość proste i efektywne algorytmy rozwiązujące

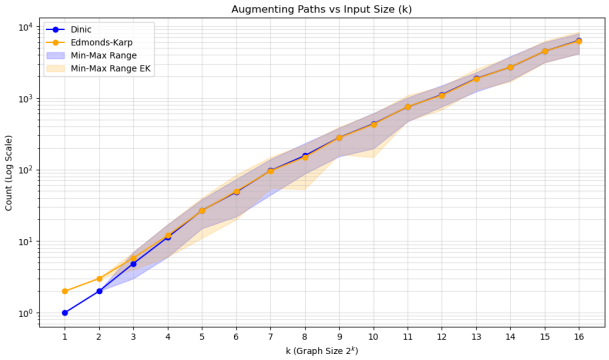
```
Function BFS(s, t:
    level // tablica długości n zawierająca same -1
    level[s] ← 0;
    Q ← s // Kolejka
    while Q niepusta do
        u ← Q.pop();
        for v ∈ N(u) do
            if level[v] = −1 i C(u, v) − flow(u, v) > 0 then
                level[v] ← level[u] + 1;
                Q.push(v);
            end
        end
    end
    Return level[t] ≠ −1
end
Function Dinic (G, s, t):
    for each edge (u, v) ∈ G.E do
        (u, v).f ← 0;
    end
    while BFS(G_f, s, t) znajduje ścieżkę do
        // Faza: Budowa sieci warstwowej i szukanie potoku blokującego
        while (p, flow) ← DFS(G_f, s, t, ∞) do
            for each edge (u, v) in p do
                if (u, v) ∈ E then
                    (u, v).f ← (u, v).f + flow;
                end
                else
                    (v, u).f ← (v, u).f − flow;
                end
            end
        end
    end
end
```

Algorithm 2: Algorytm Dinica

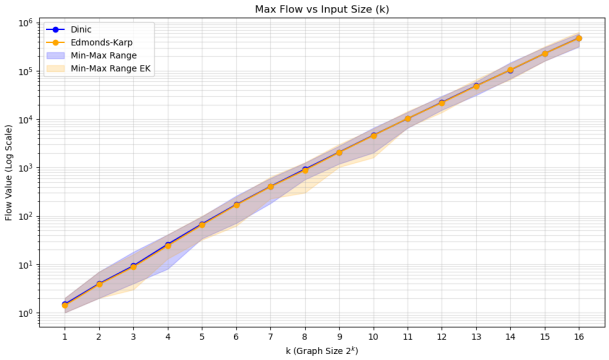
go w czasie wielomianowym. Przy dobrej implementacji, algorytm dla grafu jak w zadaniu 4, z ponad pół miliona wierzchołków wykonuje się w czasie poniżej 0.1s, czyli możliwe jest rozwiązanie bardzo dużych problemów nawet na zwykłych komputerach. Pokazuje to że nie wszystkie ogólne problemy muszą być skompilkowane i mieć rozwiązania w czasie wykładniczym.



(a) Czas



(b) Ścieżki zwiększające



(c) Maksymalny przepływ

Rysunek 6: Wyniki dla Algorytmu Dinica