Lista 7

Zadania do deklaracji (poniedziałek)

Zadanie 1 (za dwa punkty) Zbadać zbieżność (i ew. znaleźć granicę) ciągu o wyrazach $(\sqrt[n]{7^n - 3^n}, (1-\frac{1}{n})^{n^2})$ w przestrzeniach metrycznych:

- $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową,
- $\mathbb{R}^2$ z metryką miejską,
- $\mathbb{R}^2$ z metryką kolejową z węzłem $w = (0,0)$

Zadanie 2 Zbadaj ciągłość funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2y^2+x^2+y^2} & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{gdy } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Zadanie 3 Znajdź przykład pokazujący, że

- suma dowolnej rodziny zbiorów domkniętych nie musi być zbiorem domkniętym;
- przecięcie dowolnej rodziny zbiorów otwartych nie musi być zbiorem otwartym.

Zadanie 4 Wykaż, że w przestrzeni metrycznej każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

Zadanie 5

- Wykaż, że metryka kolejowa z węzłem w punkcie w spełnia warunki metryki. Naszkicuj kulę o środku a i promieniu 1 w przypadku gdy a) $a = w$; b) $a \neq w$.
- Wykaż, że metryka dyskretna spełnia warunki metryki. Opisz $K(a,r)$ w przestrzeni metrycznej z tą metryką w zależności od r. Wykaż, że każdy podzbiór jest w tej przestrzeni metrycznej otwarty i domknięty zarazem

Zadanie 6 Połóżmy, dla $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \quad \text{dla } 1 \leq p < \infty; \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|\,.$$

Dla danego $n \in \mathbb{N}$ znaleźć konkretne stałe dodatnie A, B, C, D takie, że dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$

$$A\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq B\|x\|_1 \qquad \text{oraz} \qquad C\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq D\|x\|_\infty.$$

Zadanie 7 Dla każdego z poniższych podzbiorów $\mathbb{R}^2$ lub $\mathbb{R}^3$ proszę rozstrzygnąć, czy jest otwarty, domknięty, ograniczony, zwarty:

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - |y| < 1\}$
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$;
3. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z \geq 0, x+2y+3x = 6\}$;

4. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$;

5. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{x+y^2} = \ln(\frac{1}{1 + x^2 + y^2})\}$.

Zadanie 8 Zbadać istnienie granicy w punkcie $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ oraz granic iterowanych $\lim\limits_{x\to 0} \left(\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)\right)$ i $\lim\limits_{y\to 0} \left(\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)\right)$ dla funkcji

(a) $f(x, y) = (x + y) \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y}$,

(b) $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$