Lista 6

Zadania do deklaracji (poniedziałek)

Zadanie 1 Dla $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ określamy:

- *długość wykresu* f, o ile f jest klasy C^1, wzorem
$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx;$$
- *pole powierzchni obrotowej* powstałej przez obrót wykresu f (zawartego w płaszczyźnie XY) wokół osi X w przestrzeni XYZ, o ile f jest klasy C^1, wzorem
$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx;$$
- *objętość bryły obrotowej ograniczonej powyższą powierzchnią obrotową i płaszczyznami "$x = a$" oraz "$x = b$", o ile f jest ciągła, wzorem*
$$\pi \int_a^b (f(x))^2\, dx.$$

W oparciu o powyższe wzory oblicz:

1. długość okręgu o promieniu r,
2. objętość kuli o promieniu r,
3. pole powierzchni sfery o promieniu r,
4. objętość walca obrotowego o promieniu podstawy r i wysokości h,
5. pole powierzchni bocznej walca obrotowego o promieniu podstawy r i wysokości h,
6. objętość stożka obrotowego o promieniu podstawy r i wysokości h,
7. pole powierzchni bocznej stożka obrotowego o promieniu podstawy r i wysokości h.

Proszę zrobić 4 wybrane przez was zadania z wymienionych powyżej.

Zadanie 2 (Róg Gabriela) Oblicz pole powierzchni oraz objętość bryły obrotowej ograniczonej przez powierzchnię powstałą w wyniku obrtu wokół osi OX wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{1}{x}$ określonej na przedziale $[1, \infty]$. Widzisz pewien paradoks?

Zadanie 3 Obliczyć pole figury ograniczonej krzywymi:

- $y = x^2 - 6x + 10 \quad , \quad y = 6x - x^2$
- $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ (czarownica Agnesi) $\quad , \quad y = \dfrac{x^2}{2}$
- $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1$
- * o parametryzacji $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ oraz osią OX.

Zadanie 3.1 Oblicz długość podanych krzywych:

- $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$
- $y = 2\sqrt{x}$ dla x od 0 do 1
- $x = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t,\ y = \dfrac{c^2}{b}\sin^3 t,\ (c^2 = a^2 - b^2)$

Zadanie 4 Obliczyć objętość i pole powierzchni torusa powstałego przez obrót koła K

$$K : x^2 + (y - R)^2 \leq r^2 \quad (R > r > 0)$$

dookoła osi OX.

Zadanie 4.1 Obliczyć objętości brył powstałych przez obórt poniższych krzywych wokół osi OX:

- $y = \sin x$ dla $0 \leq x \leq \pi$
- $y = ax - x^2$ dla x takich, że $y(x) > 0$
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (elipsoida obrotowa)

Zadanie 5* Udowodnić, że jeżeli funkcja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ jest ciągła, malejąca i dodatnia to

$$\lim_{t \to 0^+} t \sum_{n=1}^{\infty} f(tn) = \int_0^{\infty} f(x)dx.$$

Następnie korzystając z tej równości wyznacz granice:

$$\lim_{t \to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{1 + (nt)^2} \quad , \quad \lim_{t \to 0^+} t \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-tn^2}.$$

Zadanie 6 Wykaż, że funkcja $\chi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{dla } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

jest całkowalna w sensie Riemanna (choć nie jest ciągła...).