

Zadania do deklaracji (piątek)

Zadanie 1 Obliczyć $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\infty \frac{1}{1+x^n} d\lambda_1(x)$

Zadanie 2 Obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\infty \frac{(\frac{1}{2} + x)^n}{(\frac{1}{2} + x)^n + 1} e^{-2x} d\lambda_1(x)$

Zadanie 3 Oblicz $\int_W d\lambda_3(x)$ gdzie $W = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\}$ (objętość czworościanu).

Zadanie 4 Oblicz całkę $\int_R d\lambda_2(x)$, gdzie R jest równoległobokiem w \mathbb{R}^2 o wierzchołkach $(0, 0), (2, 1), (1, 1), (3, 2)$ (pole równoległoboku).

Zadanie 5 Czy istnieje niemierzalny zbiór $A \subset \mathbb{R}$ taki że $B = \{x \in A : x \text{ jest liczbą niewymierną}\}$ jest mierzalny?

Zadanie 6 Udowodnić, że jeśli funkcja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, to jej pochodna f' jest mierzalna.

Zadanie 7 Obliczyć następujące całki:

- $\int_K x_1 x_2 d\lambda_3(x)$, gdzie $K = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 > 0, \|x\| < 1\}$
- $\int_R x_1 d\lambda_2(x)$, gdzie R jest równoległobokiem w \mathbb{R}^2 o wierzchołkach $(0, 0), (2, 1), (1, 1), (3, 2)$
- $\int_{[0,1] \times [0,2]} e^{x_1+x_2} dx$
- $\int_{[-1,1] \times [0,1]} (x_1 + x_2)^{2222} dx$
- $\int_T d\lambda_2(x, y)$, gdzie T to trójkąt pełny na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 o wierzchołkach $(0, 0), (a, 0), (c, h)$, gdzie $a, h, c > 0$.
- $\int_A d\lambda_2(x, y)$, gdzie $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_1^2 \leq x_2 \leq \sqrt{x_1}\}$

Zadanie 8 Wyznaczyć następujące granice

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_W \sqrt[n]{x_1 x_2} d\lambda_2(x)$, gdzie $W = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1, 0 \leq x_1 < x_2\}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n d\lambda_2(x)$, gdzie $A = \{(x, y) : x > 0, x+y > 0\}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{x^n + 2}{x^n + 1} e^{-x} dx$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x^n + y^n}{1 + x^n + y^n} e^{-x-y} d\lambda_2(x, y)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^\infty \frac{\ln(1+nx)}{1+x^2 \ln n} dx$