

Zadania do deklaracji (piątek)

Zadanie 1-4 Znajdź ekstrema (jeśli istnieją) funkcji

1. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{z}{2}$ dla $x, y, z > 0$.
 2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y) = x^2 + 4xy$
 3. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y) = xy(1 - x)(2 - y)$
 4. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y) = y^2 + z^2 + 2xy$
-

Zadanie 5 Wyznacz wartości parametru a dla którego funkcja $h(x, y) = ay(e^x - 1) + x \sin x + 1 - \cos y$ ma ekstremum lokalne w punkcie $(0, 0)$.

Zadanie 6 Sprawdzić, że funkcja $f(x, y) = e^{-x}(xe^{-x} + \cos y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ ma nieskończenie wiele punktów krytycznych, a w każdym z nich – maksimum lokalne właściwe

Zadanie 7 Oblicz $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0)$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0)$ dla $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zadanej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \\ x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{\|x\|^2} & \text{dla } x \neq 0 \end{cases}.$$

Czy ta funkcja jest klasy C^2 ?

Zadanie 8 Koryta dwóch rzek (na pewnym obszarze) można w przybliżeniu opisać przez parabolę $y = x^2$ oraz prostą linię $x - y - 2 = 0$. Potrzeba połączyć te dwie rzeki kanałem o najmniejszej długości. Przez jakie punkty będzie przepływał ten kanał?

Zadanie 9 Znajdź maksimum funkcji (a) $f(x, y) = x + y$ oraz (b) $f(x, y) = (x + y)^2$ na okręgu $x^2 + y^2 = 1$.

Zadanie 10 Znajdź kresy funkcji f zadanych poniższymi wzorami na zbiorze M , zbadaj czy są one osiągalne.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 \quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 7\}$
2. $f(x, y) = \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} \quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
3. $f(x, y, z) = xyz \quad M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z = 1\}$
4. $f(x, y) = Ax + By + C \quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

Zadanie 11 Czy istnieje punkt z płaszczyzny w \mathbb{R}^3 o równaniu $3x - 2z = 0$, dla którego suma kwadratów odległości od punktów $(1, 1, 1)$ i $(2, 3, 4)$ jest najmniejsza? Jeśli tak, to znajdź wszystkie takie punkty.