Lista 10

Zadania do deklaracji (piątek)

Zadanie 1-4 Znajdź ekstrema (jeśli istnieją) funkcji

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{z}{2}$ dla $x, y, z > 0$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x,y) = x^2 + 4xy$
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x,y) = xy(1-x)(2-y)$
4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : f(x,y) = y^2 + z^2 + 2xy$

Zadanie 5 Wyznacz wartości parametru a dla którego funkcja $h(x,y) = ay(e^x - 1) + x\sin x + 1 - \cos y$ ma ekstremum lokalne w punkcie $(0,0)$.

Zadanie 6 Sprawdzić, że funkcja $f(x,y) = e^{-x}(xe^{-x} + \cos y), x, y \in \mathbb{R}$ ma nieskończenie wiele wiele punktów krytycznych, a w każdym z nich – maksimum lokalne właściwe

Zadanie 7 Oblicz $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0)$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0)$ dla $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \\ x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{\|x\|^2} & \text{dla } x \neq 0 \end{cases}.$$

Czy ta funkcja jest klasy C^2?

Zadanie 8 Koryta dwóch rzek (na pewnym obszarze) można w przybliżeniu opisać przez parabolę $y = x^2$ oraz prostą linię $x - y - 2 = 0$. Potrzeba połączyć te dwie rzeki kanałem o najmniejszej długości. Przez jakie punkty będzie przepływał ten kanał?

Zadanie 9 Znajdź maksimum funkcji (a) $f(x,y) = x + y$ oraz (b) $f(x,y) = (x+y)^2$ na okręgu $x^2 + y^2 = 1$.

Zadanie 10 Znajdź kresy funkcji f zadanych poniższymi wzorami na zbiorze M, zbadaj czy są one osiągane.

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 7\}$
2. $f(x,y) = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
3. $f(x,y,z) = xyz \qquad M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z = 1\}$
4. $f(x,y) = Ax + By + C \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
5. $f(x,y) = \frac{x\ln(1+y)}{2x^2 + y^2}, \qquad A = \{(x,y) : 0 < x \leq y \leq 1\}$.

Zadanie 11 Czy istnieje punkt z płaszczyzny w $\mathbb{R}^3$ o równaniu $3x - 2z = 0$, dla którego suma kwadratów odległości od punktów $(1, 1, 1)$ i $(2, 3, 4)$ jest najmniejsza? Jeśli tak, to znajdź wszystkie takie punkty.

Zadanie 12 Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest różniczkowalna i $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, gdzie $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Funkcję f traktujemy jako odwzorowanie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tzn. dla $z = x + iy$ (gdzie $i^2 = -1$)

$$f(x) = u(z) + iv(z).$$

Udowodnić, że pochodna zespolona

$$f'(z) = \lim_{w \to 0} \frac{f(z + w) - f(z)}{w}, \qquad \text{(gdzie } w \in \mathbb{C}\text{)}$$

istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z).$$

Wykazać, że funkcja $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = \overline{z}$, nie ma pochodnej zespolonej.

Zadanie 13 Niech $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ będzie funkcją *jednorodną stopnia* 1, tzn. taką, że dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ i $x \in \mathbb{R}^d$ zachodzi $f(tx) = tf(x)$. Wykazać, że f jest różniczkowalna w 0 wtedy i tylko wtedy, gdy f jest funkcją liniową.