

Lista 2

Zadania do deklaracji

Zadanie 1 Korzystając ze wzoru Taylora zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/\sqrt{n}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} \right)$$

Zadanie 2 Z powodu swojej masy, przewody trakcyjne mają kształt opisywany przez funkcję $f(x) = a \cosh \frac{x}{a}$, gdzie $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ to cosinus hiperboliczny (więcej informacji w internecie). Pokaż, że dla małych x kształt jest dobrze przybliżony przez parabolę

$$f(x) = a + \frac{x^2}{2a}.$$

Oszacuj błąd dla dowolnego a oraz $|x| \leq a$.

Zadanie 3

a) Zapisać funkcję $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ jako sumę szeregu potęgowego wokół zera i wyznaczyć przedział zbieżności tego szeregu.

b) Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} x^{n^2}$.

Zadanie 4 Znaleźć sumę szeregów

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n!}.$

Zadanie pozostałe

Zadanie 5 Korzystając ze wzoru Taylora zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\ln(1+n) - \ln(n) - \frac{1}{n} \right)$$

Wskazówka: nie rozwijać Taylora w zerze tylko w trochę innym punkcie.

Wskazówka 2: zobaczyć co zwraca WolframAlpha na zapytanie $\ln(1+x)$

Zadanie 6 Zbadać wypukłość i znaleźć punkty przegięcia funkcji:

(a) $f(x) = x^2 \ln x$ dla $x > 0$

(b) $f(x) = x - \sin(x)$

(c) $f(x) = (1+x^2)e^x$

Zadanie 7 Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{gdy } x \neq 0, \\ 1 & \text{gdy } x = 0 \end{cases}$$

Wykazać, że funkcja f jest klasy C^∞ i znaleźć wartości jej wszystkich pochodnych w zerze.

Zadanie 8

- (a) Znaleźć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{5^n} x^{a_n},$$

gdzie $a_1 = 1$ oraz $a_{n+1} = 5a_n + (-3)^n$ dla $n \geq 1$.

- (b) Rozwinąć w szereg potęgowy wokół punktu $x_0 = 0$ funkcję $f : \mathbb{R} \setminus \{3/2\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{3x+8}{4x-6}\right)$$

Wyznaczyć przedział zbieżności otrzymanego szeregu. Znaleźć wartość sumy szeregu dla $x = 7/4$.