

Lista 5

Zadania do deklaracji (poniedziałek)

Zadanie 1 Oblicz następujące całki nieoznaczone:

1. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$

2. $\int \frac{\sin^2 x}{e^x} dx$

3. $\int \cos^2(\ln x) dx$

Zadanie 2 Oblicz następujące całki oznaczone:

1. $\int_0^1 x(1-x)^{42} dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + (\sin x)^{2023}}{1 + \cos x} dx$

Zadanie 3 Obliczyć granice sprowadzając je do granic odpowiednich sum Riemanna: (wystarczy zrobić tylko podpunkt 1. żeby móc zadeklarować zadanie)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k+n}{3k^2+n^2}$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}}{n}$

Wskazówka: popatrzeć na przykład 9.36 w skrypcie prowadzącego.

Zadanie 4 Obliczyć całki niewłaściwe:

1. $\int_0^\infty \frac{dx}{x(\ln^2 x + 1)}$

2. $\int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx$

3. $\int_0^1 \sin(\ln x) dx$

Zadania na zajęcia

Zadanie 5 Wykaż tożsamość

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

Wskazówka: użyj triku $x = e^{\ln x}$ oraz przedstaw e^x w postaci szeregu nieskończonego

Zadanie 6** Zdefiniujmy abstrakcyjny iloczyn skalarny w przestrzeni wszystkich funkcji całkowalnych z kwadratem (czyli takich funkcji f dla których zachodzi $\int_{-1}^1 f^2(x) dx < \infty$), jako

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx.$$

Pokaż, że wielomiany Legandra $P_n(x)$, zdefiniowane jako takie wielomiany które spełniają równanie

$$[(1-x^2)P'_n(x)]' + n(n+1)P_n(x) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_0^+$$

są ortogonalne, tzn.

$$\langle P_m, P_n \rangle = 0, \quad \text{dla } m \neq n$$

Zadanie 7 Pokaż, że

- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$
- $\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$