Lista 13

Zadanie 1 Zbadaj ciągłość funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2y^2+x^2+y^2} & \text{gdy } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{gdy } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Zadanie 2 Oblicz $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a})$ dla $f(x,y,z) = yz^2$, $\boldsymbol{a} = (3,1,-1)$ oraz $\boldsymbol{v} = (-1,2,0)$.

Zadanie 3 Wykazać, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{gdy } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

jest ciągła. Wyznaczyć jej pochodne cząstkowe funkcji f w każdym punkcie $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ i pochodne kierunkowe w punkcie $(0,0)$. Zbadać różniczkowalność funkcji f w każdym punkcie jej dziedziny.

Zadanie 4 Zbadać istnienie pochodnych cząstkowych w $(0,0)$ i różniczkowalność w $(0,0)$ funkcji

$$\text{(a)} \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{gdy } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\text{(b)} \quad f(x,y) = \begin{cases} xy\sin(\dfrac{1}{xy}) & \text{gdy } x \neq 0 \text{ i } y \neq 0 \\ 0 & \text{gdy } x = 0 \text{ lub } y = 0 \end{cases}$$

Zadanie 5 Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$

$$y \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Wykazać, że funkcja f jest stała na każdym okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = r^2$.

Zadanie 6 Niech $f(x,y) = x^3y - 3x^2y + y^2$ dla $x, y \in \mathbb{R}$. Proszę:

- wyznaczyć wszystkie punkty krytyczne funkcji f,
- dla każdego z tych punktów rozpoznać, czy f ma w nim lokalne ekstremum.

Zadanie 7 Znajdź kresy funkcji f zadanych poniższymi wzorami na zbiorze M, zbadaj czy są one osiągane.

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 7\}$
2. $f(x,y) = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
3. $f(x,y,z) = xyz \qquad M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z = 1\}$
4. $f(x,y) = Ax + By + C \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
5. $f(x,y) = \dfrac{x\ln(1+y)}{2x^2+y^2}, \qquad A = \{(x,y) : 0 < x \leq y \leq 1\}.$

Zadanie 8 Czy istnieje punkt z płaszczyzny w $\mathbb{R}^3$ o równaniu $3x - 2z = 0$, dla którego suma kwadratów odległości od punktów $(1,1,1)$ i $(2,3,4)$ jest najmniejsza? Jeśli tak, to znajdź wszystkie takie punkty.

Zadanie 9 Wyznaczyć następujące granice

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_W \sqrt[n]{x_1x_2}\; d\lambda_2(x), \quad$ gdzie $\quad W = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1, 0 \leq x_1 < x_2\}$

- $\lim_{n\to\infty} \int_A \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n \, d\lambda_2(x), \quad \text{gdzie} \quad A = \{(x,y) : x > 0, x + y > 0\}$
- $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^n + 2}{x^n + 1} e^{-x} dx$
- $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x^n + y^n}{1 + x^n + y^n} e^{-x-y} d\lambda_2(x,y)$
- $\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{\ln(1+nx)}{1 + x^2 \ln n} dx$

Zadanie 10 Obliczyć następujące całki:

- $\int_K x_1 x_2 d\lambda_3(x), \quad \text{gdzie} \quad K = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 > 0, \|x\| < 1\}$
- $\int_R x_1 d\lambda_2(x),$ gdzie R jest równoległobokiem w $\mathbb{R}^2$ o wierzchołkach $(0,0), (2,1), (1,1), (3,2)$
- $\int_{[0,1]\times[0,2]} e^{x_1+x_2} dx$
- $\int_{[-1,1]\times[0,1]} (x_1 + x_2)^{2222} dx$
- $\int_T d\lambda_2(x,y),$ gdzie T to trójkąt pełny na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ o wierzchołkach $(0,0), (a,0), (c,h)$, gdzie $a, h, c > 0$.
- $\int_A d\lambda_2(x,y),$ gdzie $A = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_1^2 \leq x_2 \leq \sqrt{x_1}\}$

Zadanie 11 Oblicz pole powierzchni elipsy o równaniu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.