

Lista 4

Zadania do deklaracji (poniedziałek)

Zadanie 1 Oblicz następujące całki nieoznaczone:

1. $\int \sin x e^x dx$

2. $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$

3. $\int x^3 \ln x dx$

Zadanie 2 Oblicz następujące całki oznaczone:

1. $\int_0^1 x^3 \sqrt{7+x^4} dx$

2. $\int_0^1 \frac{e^t}{e^{2t} + e^t + 1} dt$

3. $\int_0^1 \frac{s}{1+s^4} ds$

Zadanie 3 Oblicz $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$.

Wskazówka: sprawdź w internecie "Funkcja gamma Eulera"

Zadanie 4 Niech $f : [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ będzie funkcją ciągłą. Udowodnić że

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)} dx = \frac{1}{2}$$

a następnie obliczyć

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx.$$

Zadania na zajęcia

Zadanie 5 Stosując wzór na całkowanie przez części obliczyć całki nieoznaczone:

1. $\int x \cdot \arctan x dx,$

2. $\int (\sin x)^4 dx,$

3. $\int e^{3x} \sin(4x) dx$

4. $\int x e^x \sin x dx$

Zadanie 6 Obliczyć całki nieoznaczone z funkcji wymiernych:

1. $\int \frac{x^4 + x^3 + x^2 + 4x - 1}{x^3 - x} dx,$

2. $\int \frac{2x + 5}{(x^2 + 4x + 5)^2} dx,$

3. $\int \frac{8}{x^4 + 4} dx$

Zadanie 7 . Stosując wzór na całkowanie przez podstawienie obliczyć całki nieoznaczone:

1. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx,$

2. $\int \frac{dx}{e^{3x} + 1},$

3. $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$

4. $\int (\sin x)^5$

Zadanie 8 Obliczyć całki nieoznaczone wykorzystując podstawienie trygonometryczne (lub inaczej):

$$1. \int \frac{dx}{\sin x},$$

$$2. \int \frac{dx}{5 + 3 \cos x},$$

$$3. \int \frac{1 + \sin x \cos x}{(2 + \cos^2 x)(1 + \sin^2 x)} dx$$

Zadanie 9 Obliczyć całki nieoznaczone z funkcji zawierających pierwiastek z trójmianu kwadratowego:

$$1. \int \sqrt{3 - 2x - x^2} dx$$

$$2. \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}} dx$$

$$3. \int \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 9}}{x^2} dx$$

Zadanie 10 Pokaż w jednej linijce

$$\int_{-L}^L \sin nx \cos mx dx = 0$$

dla $L > 0$ i $n, m \in \mathbb{Z}$.