Lista 7b

Zadanie 1 Zbadaj ciągłość funkcji $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} w(x) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases},$$

gdy $w(x)$ dla $x \neq 0$ jest zadane wzorem:

- $\dfrac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 x_2^2 + (x_1 - x_2)^2}$, $d = 2$;
- $\dfrac{x_1 x_3 + x_2 x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $d = 3$;
- $\dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^2 x_2^2 + x_1^2 + x_2^2}$, $d = 2$;
- $\dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2}$, $d = 2$,
- $\dfrac{3x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^4}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$, $d = 2$.

Zadanie 2 Pokaż, że w dowolnej przestrzeni metrycznej, każda kula otwarta o $r > 0$ jest zbiorem otwartym, a każdy jednopunktowy zbiór jest zbiorem domkniętym.

Zadanie 3 Udowodnij, że jeśli $d(\cdot, \cdot)$ jest metryką w przestrzeni S to metryka $d'(\cdot, \cdot)$ w S dana przez:

- $d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$
- $d'(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$

też jest "prawdziwą" metryką. W pierwszym przypadku pokaż, że kula $K(p, \epsilon)$ o promieniu $\epsilon < 1$ i środku p jest taka sama w przypadku d oraz d'. W drugim przypadku pokaż, że $K(p, \epsilon)$ w (S, d) jest także kulą $K(p, \epsilon')$ w (S, d') o promieniu $\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{1 + \epsilon}$.