

Lista 6.1

Zadanie 1 Niech P będzie punktem na paraboli $y = x^2$ innym niż punkt $(0, 0)$. Normalna do paraboli w punkcie P przecina tę parabolę w innym punkcie Q . Znajdź punkt P , tak że długość paraboli pomiędzy punktem P i Q jest minimalna.

Zadanie 1.1 To samo co wyżej tylko znajdź punkt P , który minimalizuje obwód figury ograniczonej parabolą oraz normalną.

Zadanie 2 Obracamy figurę ograniczoną krzywymi $y = x^2$ oraz $y = x$ wzdłuż prostej o równaniu $y = x$. Jaka jest objętość takiej figury? Jaka jest powierzchnia boczna?

Zadanie 3 Tadek, jako prawdziwy matematyk, chce wysłać swojej ukochanej walentynkę w kształcie serca o równaniu parametrycznym $x(t) = \cos t(1 - \sin t)$, $y(t) = \sin t(1 - \sin t)$. Chce je włożyć do prostokątnego pudełka. Jakie muszą być minimalne wymiary tego pudełka, żeby walentynka zmieściła się cała do pudełka? (Jest tu kilka opcji pakowania, wybierz najprostszą dla siebie.)

Zadanie 3.1* To samo co wyżej, tylko walentynka ma równanie $(x^2 + y^2 - 1)^3 = x^2 y^3$.

Zadanie 4* Znajdź pole figury ograniczoną krzywą Lissajous o parametryzacji $x(t) = \sin(2t)$, $y(t) = \sin(3t)$.

Zadanie 5 Znajdź pole powierzchni pomiędzy

- krzywą $y = x(x - 1)(x - 2)$ a osią OX ;
- hiperbolą $xy = m^2$, liniami $x = a$, $x = 3a$ $a > 0$ oraz osią OX ;
- krzywą $y^2 = 2px$ oraz $x^2 = 2py$

Zadanie 6 Znajdź długość zwisającego luźno kabla pomiędzy punktami $A(0, a)$ a $B(b, h)$ o równaniu $y = a \cosh \frac{x}{a}$.

Zadanie 7 Policz długość krzywej o równaniu $y^2 = x^3$ od początku osi współrzędnych do $x = 4$.

Zadanie 8 Policz objętość bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = \sin^2 x$ wokół osi OX na przedziale $x = 0$ do $x = \pi$. Następnie opakowujemy tę bryłę ciasno sferą. Jaki jest stosunek objętości tej kuli do objętości bryły "sinusowej"?