

Lista 3

Zadania do deklaracji (poniedziałek)

Zadanie 1 Znajdź promień zbieżności następujących szeregów potęgowych:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n x^n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1000}}{\sqrt{n!}} x^n$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2+n)} x^n$

Zadanie 2 Znajdź sumy poniższych szeregów:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^n$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2 x^n$

Zadanie 3 Udowodnij zbieżność jednostajną dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ na odcinku $[-1, 1]$.

Wskazówka: przeczytać przykład 7.4 w skrypcie.

Zadanie 4 Znaleźć postać ogólną funkcji f tożsamościowo spełniającej równanie

$$(1 - x^2)f''(x) - 2xf'(x) - \lambda f(x) = 0$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$ jest pewną liczbą rzeczywistą, zakładając, że f jest sumą pewnego szeregu potęgowego o środku w $x_0 = 0$.

Wskazówka: Rozwiązaniem będą wielomiany Legendre'a (Legendre polynomials), można o nich więcej poczytać w internecie

Zadania na zajęcia

Zadanie 5 Znajdź $f^{(n)}(0)$:

1. $f(x) = \frac{1}{2 + 3x^2}$, dla $x \in \mathbb{R}$, $n = 1001$,

2. $f(x) = \arctan x$, dla $x \in \mathbb{R}$, $n = 999$,

3. $f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-3)}$, dla $x \in (-1; 1)$, $n = 100$

Zadanie 6 Znaleźć postać ogólną funkcji f tożsamościowo spełniającej równanie

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$ jest pewną liczbą rzeczywistą, zakładając, że f jest sumą pewnego szeregu potęgowego o środku w $x_0 = 0$.

Zadanie 7* Niech $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Oblicz $\exp(iA)$.

Zadanie 8 Niech $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dla $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{f(x)}{1-x}$. Znaleźć $F^{(n)}(0)$.

Zadanie 9 Zbadać zbieżność punktową, jednostajną i niemal jednostajną ciągów funkcyjnych

1. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ na $[0, 1]$

2. $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ na \mathbb{R}

3. $f_n(x) = x \arctan(nx)$ na \mathbb{R}