Lista 1

Zadanie 0 Napisz k-ty wielomain Maclaurina dla $k = 3$ dla poniższych funkcji:

- $f(x) = \sqrt{1+x}$,
- $f(x) = \ln(1+x)$,
- $f(x) = \sin(x)$,
- $f(x) = \cos(x)$,
- $f(x) = \arcsin(x)$,
- $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Zadanie 1 Korzystając ze wzoru Taylora z resztą w postaci Peano obliczyć granice

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^4}, \qquad \lim_{x\to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2+23x}\right),$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2) - e^{x^4}}{\sin(x^4)}, \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right),$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{2x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x(\ln(\cos x + x^4\sqrt{1+x^2}))}{\operatorname{tg}(\sin(x) - x)},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\sin(x))}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(\arcsin x - \sin x)^{\frac{4}{3}} \ln(\frac{1}{\cos x})}{(\exp(x-\sin x) - 1)^2}.$$

Zadanie 2 Oszacować błąd następujących wzorów przybliżonych:

1. $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$, $|x| \leq \frac{1}{2}$,
2. $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, $|x| \leq \frac{1}{2}$,
3. $\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6}$, $|x| \leq \frac{1}{2}$.

Wskazówka: wzór Taylora z resztą Lagrange'a.

Zadanie 3
(a) Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją $2n+1$ razy różniczkowalną na $\mathbb{R}$. Dowieść, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje liczba $\theta \in (0,1)$ taka, że

$$f(x) = f(0) + \frac{2}{1!} f'\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2}{3!} f^{(3)}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots \\ + \frac{2}{(2n-1)!} f^{(2n-1)}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1} + \frac{2}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(\theta x)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}.$$

Wskazówka: rozwinąć funkcję $f(x)$ we wzór Taylora z resztą Lagrang'a w wokół punktu $x_0 = \frac{x}{2}$, oraz funkcję $f(0)$ też w punkcie $x_0 = \frac{x}{2}$

(b) Udowodnij, że

$$\ln(1+x) > 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{(2k+1)}.$$

Zadanie 4 Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) < 0$. Dla $a \in \mathbb{R}$ definiujemy ciąg: $x_1 = a$, $x_{n+1} = f(x_n)$ dla $n \geq 1$. Udowodnić, że istnieje $\delta > 0$, dla której, jeżeli $0 < a < \delta$ to ciąg (x_n) jest zbieżny do 0.

Zadanie 5 Udowodnić, że jeżeli funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie x_0 to

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2}.$$

Zadanie 6 Zbadać wypukłość i znaleźć punkty przegięcia funkcji $f(x) = x^2 \ln x$ dla $x > 0$.