Lista 8

Zadania do deklaracji (poniedziałek)

Zadanie 1 Dla jakich wartości $n, m > 1$ funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^n + y^n}{x^m + y^m} & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{gdy } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

jest różniczkowalna na całej dziedzinie $\mathbb{R}^2$?
Wskazówka: funkcja jest różniczkowalna kiedy wszystkie jej pochodne cząstkowe istnieją i są ciągłe.

Zadanie 2 Wykaż, że jeżeli istnieje pochodna kierunkowa $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}$, to dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ istnieje także $\dfrac{\partial f}{\partial(\alpha \boldsymbol{v})}$ oraz $\dfrac{\partial f}{\partial(\alpha \boldsymbol{v})} = \alpha \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}$

Zadanie 3 Znajdź macierz Jakobiego i jej wyznacznik (jakobian) funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x, x+y, x \cdot y)$ w punkcie $a = (1,7)$.

Zadanie 4 Oblicz $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a})$ dla $f(x,y,z) = yz^2$, $\boldsymbol{a} = (3,1,-1)$ oraz $\boldsymbol{v} = (-1,2,0)$.

Zadanie 5 Wyznaczyć z definicji różniczkę funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = xy + x^3$, w punkcie $(1,1)$.

Zadanie 6 Znajdź wszystkie pochodne cząstkowe następujących funkcji:

- $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$
- $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$
- $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$
- $f(x,y) = x^y$

Zadanie 7 Wykazać, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{gdy } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

jest ciągła. Wyznaczyć jej pochodne cząstkowe funkcji f w każdym punkcie $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ i pochodne kierunkowe w punkcie $(0,0)$. Zbadać różniczkowalność funkcji f w każdym punkcie jej dziedziny.

Zadanie 8 Zbadać różniczkowalność funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ oraz $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ określonych wzorami

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{gdy } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}, & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{gdy } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Zadanie 9 Nich $f : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ będzie określona wzorem

$$f(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)\,.$$

Znajdź macierz Jakobiego tego przekształcenia oraz oblicz jakobian (wyznacznik macierzy jakobiego)

Zadanie 10 Pole trapezu o podstawach a oraz b i wysokości h jest dane wzorem $S(a,b,h) = \frac{a+b}{2}h$. Oblicz $\frac{\partial S}{\partial a}, \frac{\partial S}{\partial b}, \frac{\partial S}{\partial h}$ i używając rysunku pokaż ich geometryczną interpretacje.

Zadanie 11 Oblicz $1.02^{3.01}$

Zadanie 12 Funkcja f jest określona na zbiorze $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > -1$ wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{y} & \text{gdy } y \neq 0, \\ \frac{x}{2} & \text{gdy } y = 0. \end{cases}$$

Zbadać różniczkowalność funkcji f w punktach $(0,0)$ i $(1,0)$.

Zadanie 13 Zbadać istnienie pochodnych cząstkowych w $(0,0)$ i różniczkowalność w $(0,0)$ funkcji

$$\text{(a)} \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{gdy } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\text{(b)} \quad f(x,y) = \begin{cases} xy\sin(\frac{1}{xy}) & \text{gdy } x \neq 0 \text{ i } y \neq 0 \\ 0 & \text{gdy } x = 0 \text{ lub } y = 0 \end{cases}$$

Zadanie 14 Wyznaczyć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $(1,1,3)$ i stycznej do powierzchni o równaniu $z = 2x^2 + y^2$.

Zadanie 15 Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna oraz $\forall_{a \in \mathbb{R}^2} \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(a)$. Wykaż, że na każdej prostej o równaniu $2y + x = c$ funckja f jest stała.

Zadanie 16 Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$

$$y \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Wykazać, że funkcja f jest stała na każdym okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = r^2$.