Lista 5

Zadania do deklaracji (poniedziałek)

Zadanie 1 Oblicz następujące całki nieoznaczone:

1. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$
2. $\int \frac{\sin^2 x}{e^x} dx$
3. $\int \cos^2(\ln x) dx$

Zadanie 2 Oblicz następujące całki oznaczone:

1. $\int\limits_0^1 x(1-x)^{42} dx$
2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$
3. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+(\sin x)^{2023}}{1+\cos x} dx$

Zadanie 3 Obliczyć granice sprowadzając je do granic odpowiednich sum Riemanna: (wystarczy zrobić tylko podpunkt 1. żeby móc zadeklarować zadanie)

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k+n}{3k^2+n^2}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}}{n}$

Wskazówka: popatrzeć na przykład 9.36 w skrypcie prowadzącego.

Zadanie 4 Obliczyć całki niewłaściwe:

1. $\int_0^\infty \frac{dx}{x(\ln^2 x+1)}$
2. $\int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx$
3. $\int_0^1 \sin(\ln x) dx$

Zadania na zajęcia

Zadanie 5 Wykaż tożsamość

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

Wskazówka: użyj triku $x = e^{\ln x}$ oraz przedstaw e^x w postaci szeregu nieskończonego

Zadanie 6** Zdefiniujmy abstrakcyjny iloczyn skalarny w przestrzeni wszystkich funkcji całkowalnych z kwadratem (czyli takich funkcji f dla których zachodzi $\int_{-1}^1 f^2(x)dx < \infty$), jako

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

Pokaż, że wielomany Legandra $P_n(x)$, zdefinowane jako takie wielomiany które spełniają równanie

$$[(1-x^2)P_n'(x)]' + n(n+1)P_n(x) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_0^+$$

są ortogonalne, tzn.

$$\langle P_m, P_n\rangle = 0, \quad \text{dla } m \neq n$$

Zadanie 7 Pokaż, że

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

Zadanie 8 ☺ *(Proszę nie brać tego zadania na serio)* Pokaż, że

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2}$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}n = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots = \frac{1}{4}$

Wskazówka: przedstawić te szeregi jako szeregi potęgowe w punkcie $x = 1$ i skorzystać z Tw. Abela, nie zważając na jego założenia

Zadanie 9 Ile cyfr w zapisie dziesiętnym ma liczba 100!?

Zadanie 10 Udowodnić, że jeśli funkcja $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ jest ciągła to

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0.$$

Zadanie 11* Niech $f : [a, b] \to [a', b']$ będzie dodatnią, rosnącą i ciągłą bijekcją. Wykazać, że

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{a'}^{b'} f^{-1}(y)dy = bb' - aa'.$$

Wskazówka: Wykorzystać interpretację geometryczną całki.

Zadanie ciekawostka Objętość kuli o promieniu 1 w $2n$ wymiarach wynosi $V_{2n} = \frac{\pi^n}{n!}$. Pokaż, że $\lim_{n\to\infty} V_{2n} = 0$