Lista 12

Zadania do deklaracji (poniedziałek)

Zadanie 1 Oblicz jakobian przekształcenia ze współrzędnych kartezjańskich do współrzędnych sferycznych (oraz zrozum jak działa to przekształcenie; najlepiej to sobie narysować).

Zadanie 2 Oblicz $\int_S y dxdy$ gdzie $S = \{(x,y) : \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2, x \geq 0\}$ (półkoło o środku w $(\frac{a}{2}, 0)$ i promieniu $\frac{a}{2}$)

Zadanie 3 Rozważ całkę $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dydx$. Przejdź na zmienne polarne (biegunowe) i uprość tą całkę (zmień granice całkowania i funkcję podcałkową). Nie musisz jej obliczać! Wskazówka: Narysuj region po którym całujemy. Wskazówka 2: google *Change of Variables in Multiple Integrals.*

Zadanie 4 Niech zadanie 3 liczy się za dwa punkty. Jeśli ktoś się nie zgadza to proszę o kontakt indywidualny.

Zadanie 5 Podaj przykład zbioru $A \subset \mathbb{R}$ o mierze $\lambda_1(A) = 1$, takiego, że $\int_A x^2 dx = +\infty$.

Zadanie 6 Oblicz:

1. $\int_T \cos(x+y) dxdy$, gdzie T- pełen trójkąt ograniczony prostymi o równaniach: $x = 0, y = \pi, x = y$;
2. $\int_{K(0,1)} xydxdy$, gdzie $K(0,1)$ to koło o środku w $(0,0)$ oraz promieniu 1;
3. $\int_{K_{+1}} zdxdydz$, gdzie $K_{+-} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y < 0, \|\boldsymbol{x}\| < 1\}$
4. $\int_{P_{1,2}} (x^2+y^2)dxdy$, gdzie $P_{1,2}$ – pierścień kołowy („pełny") na płaszczyźnie, o środku 0 i promieniu 1 (wewnętrznym) oraz 2 (zewnętrznym)
5. objętość walca obrotowego o wysokości h i promieniu podstawy r,
6. * Objętość „pełnego" torusa powstałego przez obrót koła w płaszczyźnie „x, z" o środku $(R, 0, 0)$ i promieniu r wokół osi z $(0 < r < R)$
7. $\int_{D_\alpha} (x-y)dxdy$ gdzie $D_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, x - \frac{1}{x^\alpha} \leq y \leq x + \frac{1}{x^\alpha}\}$ dla $\alpha > 0$
8. pole powierzchni elipsy o równaniu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
9. $\int_R (x-y)e^{x^2-y^2} dxdy$, gdzie R to pole ograniczone przez krzywe $x+y = 1, x+y = 3, x^2-y^2 = -1, x^2-y^2 = 1$