CHAPITRE 3

ENSEMBLES ET APPLICATIONS

I. Théorie des ensembles

1. Ensembles

Définition

Un **ensemble** E est une collection d'objets mathématiques.
Un objet x de cette collection est un **élément de** E, on note $x \in E$.
Un ensemble peut être défini de deux manière :

- Par une liste exhaustive de tous ses éléments : $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ où n est le nombre d'éléments de E
- En compréhension, c'est à dire par une propriété commune à ses éléments et seulement ceux-ci : $E = \{x \in F \mid P(x)\}$, où P est une proposition. Cette définition permet de définir E comme un **sous-ensemble** d'un ensemble F déjà défini.

Exemple 1 :

- Un ensemble défini en extension : $E = \{1; a; F; \heartsuit\}$. Cet ensemble contient exactement 4 éléments, ceux qui apparaissent entre les accolades.
- Un ensemble défini en compréhension : $E = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 7k\}$. Cet ensemble est l'ensemble des multiples de 7, la barre verticale et la virgule se lisent « tel que ».

Remarque

Un ensemble peut contenir d'autres ensembles :

$$E = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\} \quad \text{est l'ensemble des ensembles de nombres vus en seconde}$$

Proposition (axiome)

Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments :

$$A = B \iff (\forall x,\ x \in A \iff x \in B)$$

Remarque

Un ensemble n'est pas ordonné, autrement dit $\{a, b\}$ et $\{b, a\}$ sont les mêmes ensembles, on note $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Proposition (axiome)

Si E est un ensemble, alors $\{E\}$ est un ensemble distinct de E : c'est l'ensemble qui contient E comme seul élément. On peut alors écrire $E \in \{E\}$.

Remarque

Un ensemble à un seul élément s'appelle un **singleton**.

2. Inclusion

Définition

Soient E et F deux ensembles. On dit que E est **inclus dans** F si pour tout $x \in E$ on a $x \in F$. On note alors $E \subset F$.
On dit aussi que E est un **sous ensemble** de F, ou encore que E est **une partie** de F.

$$E \subset F \iff (\forall x,\ x \in E \Longrightarrow x \in F)$$

→ Exercice de cours n° 1.

Définition

Soient E et F deux ensembles. On note $F \setminus E$ l'ensemble des éléments qui appartiennent à F mais pas à E.

$$F \setminus E = \{x \in F\ ,\ x \notin E\}$$

Remarque

On peut noter $F \setminus E$ sans que E soit inclus dans F. Par exemple on peut écrire $Z \setminus]-\infty; 0[= \mathbb{N}$ bien que $]-\infty; 0[$ contienne des éléments qui ne sont pas dans $\mathbb{Z}$.

Propriété

Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} E = F &\iff \forall x, x \in E \iff x \in F \\ &\iff \forall x, ((x \in E) \Longrightarrow x \in F)) \wedge (x \in F \Longrightarrow x \in E) \\ &\iff (\forall x, ((x \in E) \Longrightarrow x \in F)) \wedge (\forall x, x \in F \Longrightarrow x \in E) \\ &\iff (E \subset F) \wedge (F \subset E) \end{aligned}$$

□

Proposition (axiome)

Il existe un ensemble qui ne contient aucun élément. On l'appelle **ensemble vide** et on le note $\varnothing$.

Propriété

Quel que soit l'ensemble E, on a $\varnothing \subset E$ et $E \subset E$

Démonstration : Il n'y a aucun élément dans $\varnothing$, donc $\forall x, x \notin \varnothing$.
*L'implication $\forall x, x \in \varnothing \Rightarrow x \in E$ est donc vraie (**Rappel :** l'implication « FAUX $\Rightarrow$ VRAI »est vraie). Donc $\varnothing \subset E$.*
Tout élément de E appartient évidemment à E donc $E \subset E$. □

Proposition (axiome)

Pour tout ensemble E, il existe un ensemble noté $\mathscr{P}(E)$ dont les éléments sont les sous-ensembles de E.

Remarque

Si E est un ensemble non vide, $\mathscr{P}(E)$ contient au moins 2 éléments distincts : $\varnothing$ et E, d'après la propriété précédente.

Remarque

$\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$. On a donc $\mathscr{P}(\varnothing) \neq \varnothing$.

→ **Exercice de cours n° 2.**

→ **Exercice de cours n° 3.**

Définition

Si E et I sont deux ensembles, on appelle **famille d'éléments de E indexée par I** d'éléments de E l'association d'un élément $x_i \in E$ à chaque élément $i \in I$. On note $(x_i)_{i \in I}$ cette famille.

Remarque

La notion de famille généralise la notion de suite : une suite numérique est une famille d'éléments de $\mathbb{R}$ indexée par $\mathbb{N}$.
En pratique, on a la plupart du temps $I = \mathbb{N}$, $I = \mathbb{Z}$ ou I est fini de la forme $I = \{1, 2, ..., n\}$
Si I est fini, on parle de **famille finie**.

II. Opérations sur les ensembles

1. Complémentaire, union, intersection

Définition

Soit E un ensemble et $A \subset E$. On appelle **complémentaire de** A **dans** E et on note $\complement_E A$ l'ensemble de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A.
Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur l'ensemble E contenant A, on note $\complement_E A = \overline{A}$.

$$\complement_E A = \{x \in E\ ,\ x \notin A\}$$

Exemples 2 :

1. $\complement_{\mathbb{Z}} \mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers strictement négatifs
2. $\complement_{\mathbb{R}} \mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres réels non entiers

Remarque

- $\complement_E A = E \setminus A$ mais la notation $\complement$ ne s'utilise que pour un sous-ensemble de E. Par exemple si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{3, 4, 5, 6\}$ on peut écrire $A \setminus B = \{1, 2\}$ mais pas $\complement_A B$.
- Si $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans E, alors $\overline{\overline{A}} = A$.

Propriété

Soit E un ensemble et $A \subset E$ et $B \subset E$ deux parties de E.
Si $A \subset B$, alors $\overline{B} \subset \overline{A}$

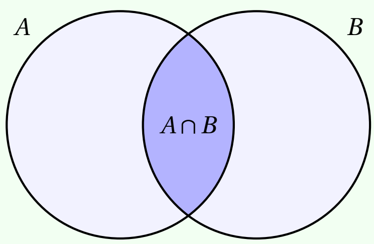
Démonstration : *Soit $x \in \overline{B}$. Comme x n'est pas un élément de B, il ne peut pas non plus être un élément de A (car $A \subset B$), donc $x \in \overline{A}$. On a donc bien $\overline{B} \subset \overline{A}$.*

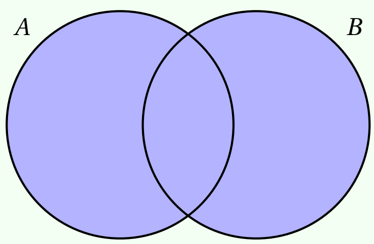
On peut remarquer que $x \notin B \Rightarrow x \notin A$ est la contraposée de $x \in A \Rightarrow x \in B$. □

Définition

Soient A et B deux ensembles.

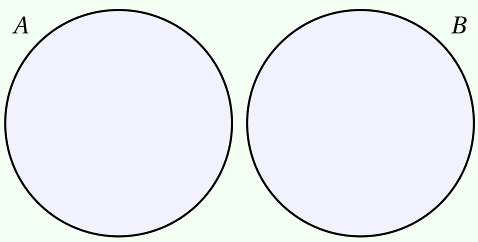
- L'ensemble $A \cap B$ (A intersection B) est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B
- L'ensemble $A \cup B$ (A union B) est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A, à B ou aux deux.





$A \cup B$

Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont **disjoints**.



Remarque

$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ et $A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$

Propriété (loi de De Morgan)

Soit E un ensemble et soient A et B deux parties de E. Alors

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

De même,

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

<u>Démonstration :</u> *Pour $x\in E$, on a*

$$\begin{aligned} x\in\overline{A\cap B} &\Longleftrightarrow x\notin A\cap B\\ &\Longleftrightarrow \neg(x\in A\cap B)\\ &\Longleftrightarrow \neg((x\in A)\wedge(x\in B))\\ &\Longleftrightarrow (\neg(x\in A))\vee(\neg(x\in B))\\ &\Longleftrightarrow (x\in\overline{A})\vee(x\in\overline{B})\\ &\Longleftrightarrow x\in\overline{A}\cup\overline{B}\end{aligned}$$

La seconde égalité est laissée en exercice □

Propriété (Distributivité)

Soient A, B et C trois ensembles. Alors

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

et

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

<u>Démonstration :</u> *Pour chaque égalité, on démontre une double inclusion.*
Soit $x\in A\cap(B\cup C)$
Alors $x\in A$ et x appartient à $B\cup C$. Comme $x\in B\cup C$, on a $x\in B$ ou $x\in C$.

- *Si $x\in B$, alors comme $x\in A$ on a $x\in A\cap B$*
- *Si $x\in C$, alors comme $x\in A$ on a $x\in A\cap C$*

Dans tous les cas, on a bien $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$, on a donc montré que $A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$
Réciproquement, soit $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. Alors $x\in(A\cap B)$ ou $x\in A\cap C$.

- *Si $x\in A\cap B$, alors $x\in A$ et comme $x\in B$ on peut écrire $x\in B\cup C$. Ainsi, on a bien $x\in A\cap(B\cup C)$.*
- *Si $x\in A\cap C$, alors $x\in A$ et comme $x\in C$ on peut écrire $x\in B\cup C$. Ainsi, on a bien $x\in A\cap(B\cup C)$.*

On a donc montré que $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C)$.
On a donc finalement $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

La seconde égalité est laissée en exercice. □

→ **Exercice de cours n° 4.**

2. Union et intersection quelconque

Définition

Si $(E_1,E_2,\dots,E_n)$ est une liste d'ensembles, alors on note

$$\bigcup_{k=1}^{n}E_i=E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n\quad\text{et}\quad\bigcap_{k=1}^{n}E_i=E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_n$$

Plus généralement, si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles, alors on note

$$\bigcup_{i\in I}E_i=\{x\mid\exists i\in I,x\in E_i\}\quad\text{et}\quad\bigcap_{i\in I}E_i=\{x\mid\forall i\in I,x\in E_i\}$$

Exemple 3 : L'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos(x)\geq\dfrac{1}{2}$ est $S=\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{\pi}{3}+2k\pi\right]$

Autrement dit x est solution de $\cos(x)\geq\dfrac{1}{2}$ si et seulement si $\exists k\in\mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{3}+2k\pi$

→ **Exercice de cours n° 5.**

Proposition

Les règles de distributivité s'appliquent encore pour des unions et intersections quelconque :

$$A \cap \left(\bigcup_{i \in I} E_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap E_i)$$

et

$$A \cup \left(\bigcap_{i \in I} E_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup E_i)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \forall x,\ x \in A \cap \left(\bigcup_{i \in I} E_i \right) &\iff x \in A \quad et \quad \exists i \in I,\ x \in E_i \\ &\iff \exists i \in I,\ x \in A \quad et \quad x \in E_i \\ &\iff \exists i \in I,\ x \in A \cap E_i \\ &\iff x \in \bigcup_{i \in I} (A \cap E_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x,\ x \in A \cup \left(\bigcap_{i \in I} E_i \right) &\iff x \in A \quad ou \quad \forall i \in I,\ x \in E_i \\ &\iff \forall i \in I,\ x \in A \quad ou \quad x \in E_i \\ &\iff \forall i \in I,\ x \in A \cup E_i \\ &\iff x \in \bigcap_{i \in I} (A \cup E_i) \end{aligned}$$

□

III. Applications

1. Généralités

a. Application, image directe, image réciproque

Définition

Soient E et F deux ensembles. Une **application** f de E vers F, notée $f : E \to F$, associe à chaque élément x de E un unique élément de F noté $f(x)$. $f(x)$ s'appelle **l'image** de x par f et si $y = f(x)$ on dit que x est **un antécédent** de y par f. L'application f ainsi définie peut se noter :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Remarque

L'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée font partie intégrante de la définition d'une application.
Ainsi, les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ sont distinctes : $f \neq g$.
De même, les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*,\ x \mapsto \mathrm{e}^x$ sont distinctes.

Remarque

Le terme **fonction** est parfois utilisé à la place du mot **application**. Il est utilisé dans un sens plus global, parfois sans préciser l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée.

Remarque

Pour appeler f la fonction carrée, on n'écrit pas « la fonction $f(x) = x^2$ » mais « la fonction $f : x \mapsto x^2$ » (qui se lit « la fonction qui à x associe x^2 »).
On retiendra que $f(x)$ ne désigne pas une fonction, mais l'image d'un élément x par une fonction f, afin de bien distinguer les différents types d'objets mathématiques. On écrit par exemple « f est croissante sur... » et pas « $f(x)$ est

croissante sur... ».

Exemples 4 :

- Une fonction réelle de la variable réelle est une application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par exemple $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$.
- Une suite numérique u est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$

$$u : \begin{array}{ll} \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ n & \longmapsto u_n \end{array}$$

- Si E est un ensemble, alors on peut définir l'application qui à une partie de E associe son complémentaire dans E :

$$f : \begin{array}{ll} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow \mathscr{P}(E) \\ A & \longmapsto \complement_E A \end{array}$$

Définition

Soit $f : E \to F$ une application. Si A est une partie de E, on appelle **image (directe) de** A **par** f et on note $f(A)$ l'ensemble

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$$

Exemple 5 : On considère $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$, et $f : E \longrightarrow F,\ x \longmapsto x^2$.
Alors,

- $f(E) = \mathbb{R}_+$ (grâce au TVI)
- $f(\{-2, 0, 2, 3\}) = \{0, 4, 9\}$
- $f(\mathbb{Z}) = \{0, 1, 2, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$
- $f([-2, 5]) = [0, 25]$ (grâce au TVI)

Proposition

Soient E, F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, et A, B deux parties de E telles que $A \subset B$, alors $f(A) \subset f(B)$.

Démonstration : Il faut montrer que $\forall y \in f(A), y \in f(B)$.
Soit $y \in f(A)$. Alors par définition il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Comme $A \subset B$, on a aussi $x \in B$, donc $f(x) \in f(B)$. Ainsi, $y \in f(B)$. On a donc bien $f(A) \subset f(B)$. □

Définition

Si A est une partie de F, on appelle **image réciproque de** A **par** f et on note $f^{-1}(A)$ l'ensemble

$$f^{-1}(A) = \left\{x \in E \mid f(x) \in A\right\}$$

Exemple 6 : On considère $E = \mathbb{N}$, $F = \mathbb{N}$ et $f : E \longrightarrow F, x \longmapsto 2x$.
Alors

- $f^{-1}(\{0, 1, 2, 3, 4\}) = \{0, 1, 2\}$
- $f^{-1}(\{1, 3, 5\}) = \varnothing$

→ **Exercice de cours n° 6.**

Remarque

Si $f : E \longrightarrow F$ est une application on a toujours $f^{-1}(F) = E$ par définition.

Proposition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et soient A, B deux parties de F telles que $A \subset B$. Alors $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

Démonstration : Soit $x \in f^{-1}(A)$. Alors par définition $f(x) \in A$. Comme $A \subset B$, on a alors $f(x) \in B$. On en conclut que $x \in f^{-1}(B)$, donc $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$. □

→ **Exercice de cours n° 7.**

Proposition

Soit $f : E \to F$ une application et soient $A \subset E$ et $B \subset E$ deux ensembles.
Alors

- $f(\varnothing)=\varnothing$
- $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$
- $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

Démonstration :

- *Par l'absurde, supposons que $f(\varnothing)\neq\varnothing$, et soit $y\in f(\varnothing)$. Alors il existe $x\in\varnothing$ tel que $f(x)=y$, ce qui est faux car $\varnothing$ est vide.*

  Ainsi, $f(\varnothing)=\varnothing$.
- *On a*

$$\begin{aligned} y\in f(A\cup B) &\Longleftrightarrow \exists x\in(A\cup B), y=f(x)\\ &\Longleftrightarrow (\exists x\in A, y=f(x))\vee(\exists x\in B, y=f(x))\\ &\Longleftrightarrow (y\in f(A))\vee(y\in f(B))\\ &\Longleftrightarrow y\in f(A)\cup f(B)\end{aligned}$$

  donc $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.
- *On a*

$$\begin{aligned} y\in f(A\cap B) &\Longleftrightarrow \exists x\in(A\cap B), y=f(x)\\ &\Longrightarrow (\exists x\in A, y=f(x))\wedge(\exists x\in B, y=f(x))\\ &\Longrightarrow (y\in f(A))\wedge(y\in f(B))\\ &\Longrightarrow y\in f(A)\cap f(B)\end{aligned}$$

  donc $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

□

→ Exercice de cours n°8.

→ Exercice de cours n°9.

b. Composition de fonctions

Définition

Soient E,F et G trois ensembles. On considère une application $f:E\to F$ et une application $g:F\to G$.
L'**application composée** de f par g, notée $g\circ f$, est l'application de E vers G qui à un élément x associe $g(f(x))$.

Exemple 7 : On considère $E=\mathbb{R}_+$, $F=\mathbb{R}_+$ et $G=\mathbb{R}_+$. Soit $f:E\longrightarrow F, x\longmapsto x^2$ et $g:F\longrightarrow G, x\longmapsto x+1$.
Alors $g\circ f:E\to F,\ x\longmapsto x^2+1$.
On peut aussi définir l'application $f\circ g$, qui est en général différente de $g\circ f$. Ici $f\circ g:x\longmapsto(x+1)^2$.

Remarque

Non seulement $f\circ g\neq g\circ f$ en général, mais en plus il se peut que $f\circ g$ soit bien définie et que $g\circ f$ ne le soit pas.
Par exemple $E=\mathbb{R}_+$, $G=\mathbb{R}_+$ et $F=\mathbb{R}^-$.
On considère $f:E\longrightarrow F, x\mapsto\sqrt{x}$ et $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^-, x\longmapsto -x$.
Alors $g\circ f:E\to G, x\longmapsto -\sqrt{x}$, mais $g(x)=-x$ étant négatif, on ne peut pas composer par la fonction f définie seulement sur $\mathbb{R}_+$.
$f\circ g$ n'est pas définie.

c. Restriction et prolongement

Définition

Soient E et F deux ensembles, soit $f:E\to F$ une application et soit $A\subset E$ une partie de E.

On appelle **restriction de** f **à** A l'application $f\big|_A$ définie par

$$f\big|_A : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

La seule différence entre f et $f\big|_A$ est l'ensemble de départ sur lequel f est défini.

À l'inverse, si $g : A \to F$ est une application et qu'il existe une application $f : E \to F$ telle que $\forall x \in A, f(x) = g(x)$, on dit que f est un **prolongement** de g à E.

Exemple 8 : L'application f définie par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$ n'est pas monotone, mais sa restriction à $I = [0;+\infty[$, définie par $f\big|_{[0;+\infty[} : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$, est strictement croissante.
Exemple 9 : Soient f et g définies par

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \quad \text{et} \quad f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Alors f est un prolongement de g à $\mathbb{R}$. Ce n'est pas le seul prolongement possible, on a choisi $f(0) = 1$ mais on aurait pu choisir n'importe quelle valeur réelle comme image de 0.

Remarque

$f : E \to F$ est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

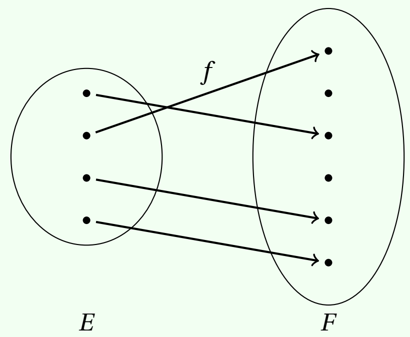
2. Injection, surjection, bijection

Définition

Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.
On dit que f est **injective**, ou que f est une **injection**, si :

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2,\ f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y}$$

Autrement dit, f est injective si tout élément de F admet **au plus un antécédent**.



→ **Exercice de cours n^{o} 10.**

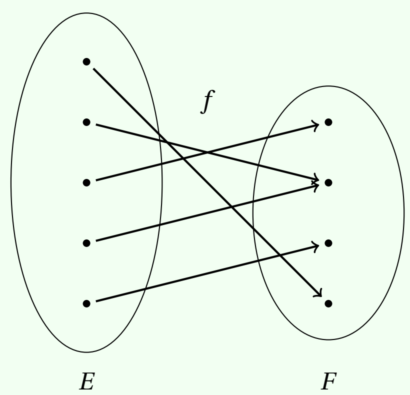
→ **Exercice de cours n^{o} 11.**

Définition

Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.
On dit que f est **surjective**, ou que f est une **surjection**, si :

$$\boxed{\forall y \in F, \exists x \in E,\ f(x) = y}$$

Autrement dit, f est surjective si tout élément de F admet **au moins un antécédent**.



→ **Exercice de cours n^{o} 12.**

Exemple 10 : On considère $E = \mathbb{R}, F = \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow F, x \longmapsto x^2$.
Si $y < 0$, y n'a pas d'antécédent par f, donc f n'est pas surjective.

Remarque

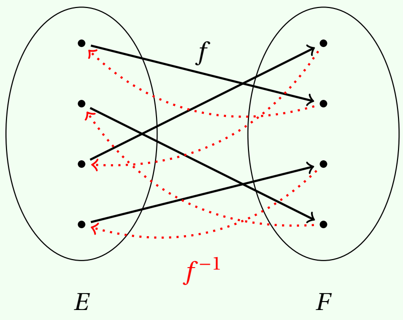
La notion de surjectivité dépend fortement de l'ensemble d'arrivée que l'on se donne, et pas seulement de la fonction.
Par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, x \longmapsto \exp(x)$ est bijective mais $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto \exp(x)$ ne l'est pas.
En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(y)$ est bien défini et $\exp(\ln y) = y$, donc y a un antécédent par f.
En revanche, si $y \in \mathbb{R}$ est négatif, y n'a pas d'antécédent réel par la fonction exponentielle.

Définition

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
On dit que f est **bijective** , ou que f est une **bijection**, si f est **à la fois injective et surjective**.
Autrement dit, f est bijective si tout élément de F admet **exactement un antécédent** c'est à dire si :

$$\boxed{\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y}$$

On note alors f^{-1} l'application de F vers E qui à un élément y associe son unique antécédent par f. Cette application s'appelle **l'application réciproque de** f et elle est également bijective.



Exemple 11 :

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto -3x$ est bijective et sa bijection réciproque est $f^{-1} : x \longmapsto -\frac{1}{3}x$.
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^3$ est bijective et sa bijection réciproque est $f^{-1} : x \longmapsto \sqrt[3]{x}$.
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*, x \longmapsto \exp(x)$ est bijective, et $\forall y \in \mathbb{R}_+^*, f^{-1}(y) = \ln(y)$.

Remarque

La notation f^{-1} prête à confusion à cause de la notation pour l'image réciproque d'un ensemble. Pour rappel, si $A \subset F$ est un sous-ensemble de F, $f^{-1}(A) = \{x \in E,\ f(x) \in A\}$ est un ensemble et il est **toujours bien défini**. En revanche, si $y \in F$ est un élément de F, $f^{-1}(y)$ n'est défini **que si** f **est une bijection**. L'ensemble $f^{-1}(\{y\})$, lui, est toujours bien défini (mais éventuellement vide si y n'a pas d'antécédent par f) !

Définition

On dit que deux ensembles E et F sont en bijection s'il existe une application bijective $f : E \to F$.

Remarque

On verra plus tard que deux ensembles finis sont en bijection si et seulement si ils ont le même cardinal.

Propriété

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

- Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective,
- Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Démonstration :

- *Supposons que $g \circ f$ soit surjective et soit $z \in G$. Alors il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = z$ par hypothèse. Ainsi, en posant $y = f(x) \in F$, on a $z = g(y)$ donc g est surjective.*
- *Supposons que $g \circ f$ soit injective et soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Alors $g(f(x)) = g(f(y))$ par unicité de l'image, donc $x = y$ car $g \circ f$ est injective. Ainsi, on a $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ donc f est injective.*

□

Définition

Soit E un ensemble. On définit l'application $\mathrm{id}_E : E \to E$ par $\forall x \in E, \mathrm{id}_E(x) = x$.
L'application id_E est une bijection et son application réciproque est elle-même.

Remarque

Si $f : E \to F$ est une application quelconque, $\mathrm{id}_F \circ f = f$ et $f \circ \mathrm{id}_E = f$.

Propriété

Si $f : E \to F$ est bijective, alors $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$.

<u>Démonstration :</u> *En effet, si $x \in E$, alors $f(x) \in F$ et $f^{-1}(f(x)) = x$ par définition. Donc $f^{-1}(f(x)) = \mathrm{id}_E(x)$ et ce pour tout $x \in E$, donc $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$.*
De même, si $y \in F$, alors $f^{-1}(y) \in E$ et $f(f^{-1}(y)) = y$ par définition. Donc $f(f^{-1}(y) = \mathrm{id}_F(y)$ et ce pour tout $y \in F$, donc $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$. □

La réciproque de cette propriété est vraie, plus précisément on a la propriété suivante :

Propriété

Soit $f : E \to F$ une application.
f est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$, et on a alors $g = f^{-1}$.

<u>Démonstration :</u> *Si f est bijective, alors $g = f^{-1}$ vérifie $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$ par définition.*
Réciproquement, s'il existe $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$, alors $f \circ g$ est surjective et $g \circ f$ est injective car id_E et id_F sont bijectives. Donc d'après la propriété précédente, on a f injective et f surjective, donc f est bijective et $g = f^{-1}$ car pour tout $y \in F$, $f(g(y)) = \mathrm{id}_F(y) = y$. □

Remarque

On peut avoir $g \circ f = \mathrm{id}_E$ (ou $f \circ g = \mathrm{id}_F$) sans que f et g ne soient bijective.
Par exemple si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto |x|$
Alors $g \circ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}$ mais f n'est pas surjective et g n'est pas injective.

Propriété

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives. Alors $g \circ f$ est une bijection de E vers G et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

<u>Démonstration :</u> *Il suffit de montrer que $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \mathrm{id}_G$ et que $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \mathrm{id}_E$ en vertu de la propriété précédente.*
En effet, on a

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &= g \circ \mathrm{id}_F \circ g^{-1} \\ &= g \circ g^{-1} \\ &= \mathrm{id}_G\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\ &= f^{-1} \circ \mathrm{id}_F \circ f \\ &= f^{-1} \circ f \\ &= \mathrm{id}_E\end{aligned}$$

□

IV. Dénombrement

1. Ensembles finis

Définition

Si $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a < b$ on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des entiers relatifs compris entre a et b.
Autrement dit : $[\![a, b]\!] = \mathbb{Z} \cap [a, b]$.

Proposition (admise)

Pour tous entiers $n, m \in \mathbb{N}^*$

- Il existe une bijection de $[\![1, n]\!]$ vers $[\![1, m]\!]$ si et seulement si $n = m$.
- Il existe une injection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, m]\!]$ si et seulement si $n \leq m$.

- Il existe une surjection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,m]\!]$ si et seulement si $n \geq m$.

Définition

Un ensemble E est dit fini s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que E est en bijection avec $[\![1,n]\!]$. L'entier n est alors unique et s'appelle **cardinal de** E, on note $\text{card}(E) = n$. Un ensemble **infini** est un ensemble qui n'est pas fini.

Démonstration de l'unicité du cardinal :
Supposons qu'il existe $\varphi : E \longrightarrow [\![1,n]\!]$ et $\psi : E \longrightarrow [\![1,m]\!]$ deux bijections, alors $\psi \circ \varphi^{-1}$ est une bijection de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,m]\!]$ donc $n = m$ d'après le résultat admis. □

Exemple 12 :

- L'ensemble des élèves d'hypokhâgne BL de SMN est fini de cardinal 39
- L'ensemble des mots de passe à 20 caractères alphanumériques est fini de cardinal 62^{20}
- Si $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a < b$ alors $\text{card}([\![a,b]\!]) = b - a + 1$
- L'ensemble des entiers naturels est infini.

Propriété

Soient E et F deux ensembles finis. Alors

- $\text{card}(E) = \text{card}(F)$ si et seulement si il existe une bijection $f : E \longrightarrow F$.
- $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$ si et seulement si il existe une injection $f : E \longrightarrow F$.
- $\text{card}(E) \geq \text{card}(F)$ si et seulement si il existe une surjection $f : E \longrightarrow F$.

Démonstration : *On note dans chaque cas $n = \text{card}(E)$ et $m = \text{card}(F)$ et $\varphi : E \longrightarrow [\![1,n]\!]$ et $\psi : F \longrightarrow [\![1,m]\!]$ deux bijections.*

- *Si $\text{card}(E) = \text{card}(F) = n$ alors $[\![1,m]\!] = [\![1,n]\!]$ donc $\psi^{-1} \circ \varphi : E \longrightarrow F$ est une bijection comme composée de deux bijections.*
  Réciproquement, supposons qu'il existe une bijection $f : E \longrightarrow F$. Alors $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est une bijection de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,m]\!]$ donc $n = m$.
- *Si $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$ alors $[\![1,n]\!] \subset [\![1,m]\!]$ donc l'application $g : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,m]\!],\ k \longmapsto k$ est une injection.*
  On vérifie alors que $f = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi$ est une injection de E dans F.
  Réciproquement, si $f : E \longmapsto F$ est une injection, alors $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est une injection de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,m]\!]$ donc $n \leq m$.
- *Si $\text{card}(E) \geq \text{card}(F)$ alors $n \geq m$, l'application $g : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,m]\!],\ k \longmapsto \begin{cases} k & \text{si } k \leq m \\ m & \text{si } k > m \end{cases}$ est une surjection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,m]\!]$ donc $\psi^{-1} \circ g \circ \varphi$ est une surjection de E sur F.*

□

La propriété suivante découle immédiatement de ce résultat :

Propriété (Principe des tiroirs)

Si on dispose de m chaussettes à ranger dans n tiroirs et que $m > n$, alors au moins un tiroir doit contenir plus d'une chaussette.

Remarque

Ce principe peut se formuler mathématiquement de la façon suivante :

Si $\text{card}(E) > \text{card}(F)$ alors il n'existe pas d'application injective de E dans F.

→ **Exercice de cours no 13.**

Propriété

Si B est un ensemble fini et $A \subset B$ est une partie de B, alors A est fini et $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$.

Démonstration : *Se déduit de la propriété précédente et de l'injection $i : A \mapsto B, x \mapsto x$.* □

Propriété (admise)

Si B est une ensemble fini et $A \subset B$ une partie de B, alors $A = B$ si et seulement si A et B ont même cardinal.

2. Formule du crible

Propriété (admise)

Si A et B sont disjoints, alors $\operatorname{card}(A\cup B)=\operatorname{card}(A)+\operatorname{card}(B)$.

Propriété

Soient A et B deux ensembles contenus dans un ensemble E. On note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Alors $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A$ et cette union est disjointe, c'est à dire que $(A\cap B)\cap(A\cap\overline{B})=\varnothing$.

Démonstration : *Soit $x\in A$, alors soit $x\in B$, soit $x\in\overline{B}$, donc soit $x\in A\cap B$, soit $x\in A\cap\overline{B}$. Ainsi, $x\in(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$. On a donc $A\subset(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$.*
Dans l'autre sens, soit $x\in(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$. On a soit $x\in A\cap B$, soit $x\in A\cap\overline{B}$. Dans les deux cas on a $x\in A$, donc $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\subset A$.
Ainsi, on a $A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$.
Enfin, si $x\in(A\cap B)\cap(A\cap\overline{B})$, on a $x\in B\cap\overline{B}$ ce qui est impossible, donc $(A\cap B)\cap(A\cap\overline{B})=\varnothing$. □

Proposition

Soient A et B deux ensembles finis. Alors

$$\operatorname{card}(A\cup B)=\operatorname{card}(A)+\operatorname{card}(B)-\operatorname{card}(A\cap B)$$

Démonstration : *On a $A\cup B=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)$ et ces deux unions sont disjointes.*
Ainsi,

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A\cup B)&=\operatorname{card}(A\cap\overline{B})+\operatorname{card}(A\cap B)+\operatorname{card}(\overline{A}\cap B)\\&=\operatorname{card}(A)+\operatorname{card}(\overline{A}\cap B)\end{aligned}$$

Comme $(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap B)=B$ et que cette union est disjointe, on a $\operatorname{card}(\overline{A}\cap B)=\operatorname{card}(B)-\operatorname{card}(A\cap B)$. Ainsi

$$\operatorname{card}(A\cup B)=\operatorname{card}(A)+\operatorname{card}(B)-\operatorname{card}(A\cap B)$$

□

Pour n ensembles, il existe une formule du crible généralisé (hors programme) :

Proposition

Soient $(A_1,A_2,\dots,A_n)$ une famille finie d'ensembles. Alors

$$\operatorname{card}(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\operatorname{card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cup A_{i_k})$$

→ Exercice de cours n° 14.

3. Partition

Définition

Soit E un ensemble. Une **partition** de E est une famille de parties non vides de E deux à deux disjointes et dont l'union est E, c'est à dire une famille $(E_i)_{i\in I}$ telle que

$$\bigcup_{i\in I}E_i=E\quad\text{et}\quad\forall i\in I,\forall j\in I, i\neq j\Rightarrow E_i\cap E_j=\varnothing$$

Exemple 13 : Des partitions possibles de $\{a,b,c,d\}$ sont

- $\{a\},\{b,c,d\}$
- $\{a,c\},\{b\},\{d\}$,
- $\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}$,
- etc.

Proposition

Si E est un ensemble fini et $(E_1, E_2, ..., E_n)$ est une partition de E, alors $\text{card}(E) = \sum_{k=1}^{n} \text{card}(E_i)$.

<u>*Démonstration :*</u> *Par récurrence sur n, exercice* □

Proposition

Soit E un ensemble de cardinal n. L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E a pour cardinal 2^n.

<u>*Démonstration :*</u> *On raisonne par récurrence sur n. Notons $\mathscr{P}(n)$: « l'ensemble des parties d'un ensemble de cardinal n a pour cardinal 2^n ».*

- ***Initialisation :*** *On commence à $n = 1$. Soit $E = \{e\}$ un ensemble à 1 élément.*
  Les parties de E sont $\varnothing$ et $\{e\}$, donc $\mathscr{P}(E)$ a pour cardinal $2 = 2^1$. La propriété est vraie au rang 1.
- ***Hérédité :*** *Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie pour un certain rang n, et considérons un ensemble E à $n+1$ éléments.*
  Soit $a \in E$ un élément quelconque. On partitionne $\mathscr{P}(E)$ en deux parties distinctes :
  - *L'ensemble P_1 des parties de E qui contiennent l'élément a.*
  - *L'ensemble P_2 des parties de E qui ne contiennent pas l'élément a.*

  On considère l'application $f : P_2 \to P_1, F \longmapsto F \cup \{a\}$. Alors f est une bijection (voir l'exercice suivant) donc $\text{card}(P_1) = \text{card}(P_2)$.
  Or, P_2 est l'ensemble des parties de $E \setminus \{a\}$. L'ensemble $E \setminus \{a\}$ a pour cardinal n donc par hypothèse de récurrence, $\text{card}(F_2) = 2^n$.
  Comme E est l'union disjointe de P_1 et P_2, on a $\text{card}(E) = \text{card}(P_1) + \text{card}(P_2) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$
- ***Conclusion :*** *Par principe de récurrence, on en conclut que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

□

→ **Exercice de cours n° 15.**

4. Produit cartésien

Définition

Soient A et B deux ensembles. Le **produit cartésien** $A \times B$ est l'ensemble des couples (a, b) où $a \in A$ et $b \in B$.
Un couple d'élément est un ensemble **ordonné**, c'est à dire que $(a, b) \neq (b, a)$.

Exemple 14 : Soit $A = \{1, 2\}$ et $B = \{a, b, c\}$. L'ensemble $A \times B$ s'écrit en extension :

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

Propriété

Soient A et B deux ensembles finis. Alors $A \times B$ est un ensemble fini et

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B)$$

<u>*Démonstration :*</u> *Pour chaque choix d'un élément de A, il y a $\text{card}(B)$ choix d'un élément de B, donc le total de choix possibles pour un élément de $A \times B$ est $\text{card}(A) \times \text{card}(B)$.* □

→ **Exercice de cours n° 16.**

→ **Exercice de cours n° 17.**

Définition

Si $(E_1, E_2, ..., E_n)$ est une famille finie d'ensembles, alors

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(e_1, e_2, ..., e_n) \mid \forall i \in [\![1, n]\!], e_i \in E_i\}$$

5. n-uplets

Définition

Soit E un ensemble et n un entier. Un n-uplet d'éléments de E est un élément de $\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$. On note cet ensemble E^n.

Remarque

Un n-uplet est une **liste ordonnée de n éléments de** E (avec éventuellement des répétitions).

Exemple 15 : (b, a, b, a, r) est un 5-uplet de l'ensemble $\{a, b, r\}$.

Remarque

Un 2-uplet s'appelle aussi un couple, un 3-uplet s'appelle aussi un triplet, etc...

Propriété

Si E est un ensemble fini de cardinal p, le nombre de n-uplets de E distincts est p^n.

Démonstration : $\text{card}(E \times E \times \cdots \times E) = \text{card}(E) \times \cdots \times \text{card}(E) = \text{card}(E)^n$ □

Exemple 16 : Un digicode d'immeuble comporte 5 symboles parmi 10 chiffres et 2 lettres qui peuvent éventuellement se répéter. Un code pour cet immeuble est un 5-uplet d'un ensemble à 12 éléments, il y a donc $12^5 \simeq 250000$ codes possibles

Exemple 17 : Si $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ est un ensemble de cardinal n, considérons l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \{0,1\}^n \\ A & \longmapsto & (e_i)_{1 \le i \le n} \end{array}$$

où pour tout i, $e_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in A \\ 0 & \text{si } x_i \notin A \end{cases}$. Cette application est bijective, autrement dit chaque n-uplet de $\{0,1\}^n$ caractérise de façon unique une partie de E.

Injectivité : Supposons que $f(A) = f(B)$, notons $(e_1, \ldots, e_n) = f(A)$ et $(f_1, ..., f_n) = f(B)$, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $e_i = f_i$, donc $x_i \in A \Longleftrightarrow x_i \in B$, donc $A = B$.

Surjectivité : Soit $(e_1, ..., e_n) \in \{0,1\}^n$. Soit $A = \{x_i \in E \mid e_i = 1\}$, alors $f(A) = (e_1, ..., e_n)$ par définition de f, donc f est surjective.

On en déduit que $\text{card}(\mathscr{P}(E)) = \text{card}(\{0,1\}^n) = (\text{card}(\{0,1\})^n = 2^n$.

6. Arrangements

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n et k un entier avec $1 \le k \le n$. Un k-**arrangement** de E est un k-uplet de E **sans répétition**.

Remarque

D'autres définitiions possibles d'un k-arrangement :

- Un k-arrangement est une liste ordonnée de k éléments distincts de E.
- Un k-arrangement de E est une partie de E **ordonnée** à k éléments.
- Un k-arrangement est une application injective de $\{1, 2, \ldots, k\}$ dans E.

Exemple 18 : $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Le couple $(5, 2)$ est un 2-arrangement de E. Le couple $(2, 5)$ est un autre 2-arrangement de E.

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Une permutation de E est un n-arrangement de E, autrement dit c'est une liste ordonnée de tous les éléments de E.

Remarque

On définit $n!$ par $0! = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = n \times (n-1)!$.

On a donc $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = \prod_{k=1}^{n} k$

Proposition

Soit E un ensemble de cardinal n et $0 \leq k \leq n$ un entier.

- Le nombre de k-arrangements de E, noté A_n^k, est donné par la formule

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)$$

- Le nombre de permutation de E est $n!$

Démonstration : Pour choisir un k-arrangement de E on a n choix pour le premier élément, puis $(n-1)$ choix pour le second, etc... On a donc $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$ choix différents.
Une permutation est un n-arrangement d'un ensemble à n éléments donc $A_n^n = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$. □

7. Combinaisons

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n et $0 \leq k \leq n$ un entier. Une k-combinaison de E est une partie à k éléments de E.

Remarque

Une combinaison est **non ordonnée**.

Exemple 19 : On reprend $E = \{1,2,3,4,5\}$.
L'ensemble $\{5,2\}$ est une 2-combinaison de E.
L'ensemble $\{2,5\}$ est cette fois ci la même 2-combinaison de E puisque $\{2,5\} = \{5,2\}$.

Proposition

Le nombre de k-combinaisons de E, noté C_n^k ou $\binom{n}{k}$ (se lit « k parmi n »), est donné par la formule

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Démonstration : Une combinaison est un arrangement qui n'est pas ordonné.
Pour chaque partie F de E à k éléments, il y a $k!$ façons d'ordonner F. Ainsi, à chaque k-combinaison correspondent $k!$ k-arrangements, d'où $k! \times C_n^k = A_n^k$ et finalement $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. □

→ **Exercice de cours n° 18.**

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Démonstration : Soit E un ensemble à n éléments. Notons :

- *E_0 : l'ensemble des parties de E qui ont 0 élément*
- *E_1 : l'ensemble des parties de E qui ont 1 élément*
- *E_2 : l'ensemble des parties de E qui ont 2 éléments*
- $\vdots$
- *E_k : l'ensemble des parties de E qui ont k éléments*
- $\vdots$
- *E_n : l'ensemble des parties de E qui ont n éléments*

Alors $(E_0, E_1, ..., E_n)$ est une partition de E. Ainsi, $\text{card}(E) = \sum_{k=0}^{n} \text{card}(E_k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ d'après la proposition 3.
Or on sait d'après une proposition précédente que $\text{card}(E) = 2^n$, d'où l'égalité voulue. □

Exercices de cours

Exercice 1 Voir correction

Soient $E=\{n\in\mathbb{N}\mid \exists k\in\mathbb{N}, n=6k\}$ et $F=\{n\in\mathbb{R}\mid \exists k\in\mathbb{N}, n=3k\}$. Montrer que $E\subset F$.

Exercice 2 Voir correction

Déterminer $\mathscr{P}(E)$ dans les cas suivants :

1. $E=\{0,1\}$
2. $E=\{a,b,c\}$
3. $E=\mathscr{P}(\{1\})$

Exercice 3 Voir correction

Déterminer $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing)))$

Exercice 4 Voir correction

Soit E un ensemble et A,B,C trois parties de E.
Montrer les équivalences suivantes :

1. $A\cap B=B \Leftrightarrow B\subset A$
2. $A\cup B=B \Leftrightarrow A\subset B$
3. $A\cap B=A\cap C$ et $A\cup B=A\cup C \;\Leftrightarrow B=C$
4. $\overline{A}\subset B \Leftrightarrow \overline{B}\subset A$

Exercice 5 Voir correction

Déterminer les ensembles $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[n,n+1[$ et $B=\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}[0,\dfrac{1}{n}[$.

Exercice 6 Voir correction

On considère $E=\mathbb{R}$, $F=\mathbb{R}$ et $f:E\longmapsto F,\ x\longmapsto \mathrm{e}^x$
Compléter sans justifier

a) $f(\mathbb{R})=\ldots\ldots$
b) $f(\mathbb{R}_+)=\ldots\ldots$
c) $f(R_-)=\ldots\ldots$
d) $f([-1;1])=\ldots\ldots$
e) $f^{-1}(\mathbb{R})=\ldots\ldots$
f) $f^{-1}(]0;1])=\ldots\ldots$
g) $f^{-1}(\mathbb{R}_-)=\ldots\ldots$
h) $f^{-1}(\{-1\})=\ldots\ldots$
i) $f^{-1}([-1;1])=\ldots\ldots$

Exercice 7 Voir correction

On considère $E=\{1,2\}^2$ et $f:E\to\mathbb{R}$ définie pour tout $(x,y)\in\{1,2\}^2$ par $f(x,y)=3x-2y$. Déterminer $f(E)$ puis $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$

Exercice 8 Voir correction

Trouver un exemple d'application $f:E\to F$ telle que $f(A\cap B)\neq f(A)\cap f(B)$.

Exercice 9 Voir correction

Soient E et F deux ensembles et soit $f:E\to F$ une application.
Soit $A\in\mathscr{P}(E)$ et $B\in\mathscr{P}(F)$

1. Montrer que $A\subset f^{-1}(f(A))$
2. Montrer que $f(f^{-1}(B))\subset B$
3. Donner un exemple d'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $A\subset\mathbb{R}$ telle que $A\neq f^{-1}(f(A))$

Exercice 10 **Voir correction**

Soit $E = \mathbb{R}, F = \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow F, x \longmapsto 3x - 1$. Montrer que f est injective.

Exercice 11 **Voir correction**

Soit $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow F, x \longmapsto x^2$. Montrer que f n'est pas injective.

Exercice 12 **Voir correction**

Soit $E = \mathbb{R}$, $F = [3; +\infty[$ et $f : x \longmapsto x^2 + 3$. Montrer que f est surjective.

Exercice 13 **Voir correction**

n personnes se rencontrent à une fête et échangent des poignées de mains. Montrer qu'au moins 2 personnes ont échangé le même nombre de poignées de mains.

Exercice 14 **Voir correction**

Appliquer la formule du crible généralisé à $A \cup B \cup C$ et à $A \cup B \cup C \cup D$

Exercice 15 **Voir correction**

Soit e un ensemble et a un élément de E fixé. On note $P_1 = \{A \in \mathscr{P}(E) \mid a \in A\}$ et $P_2 = \{A \in \mathscr{P}(E) \mid a \notin A\}$. Montrer que l'application $f : P_2 \to P_1, F \longmapsto F \cup \{a\}$ est une bijection.

Exercice 16 **Voir correction**

Soit A et B deux ensembles finis de cardinal n et m, et soient $f : A \to [\![1, n]\!]$ et $g : B \to [\![1, m]\!]$ deux bijections. Déterminer une bijection de $A \times B$ vers $[\![1, nm]\!]$ en fonction de f et g.

Exercice 17 **Voir correction**

Soit $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{c, d\}$. Écrire la liste de tous les éléments de $E \times F \times F$.

Exercice 18 **Voir correction**

Calculer

1. Le nombre de mot de passe de 10 caractères incluant des lettres majuscules ou minuscules et des chiffres.
2. Le nombre de résultat de tiercé possibles pour une course à 12 chevaux (un résultat = les trois premiers chevaux dans l'ordre).
3. Le nombre de façon de classer 6 candidats à un entretien d'embauche
4. Le nombre de façon de choisir 4 élèves délégués dans une classe de 40 élèves.
5. Le nombre de façon de choisir 4 élèves délégués en respectant la parité dans une classe de 15 garçons et 25 filles.
6. Le nombre de nombres palindromes à 128 chiffres (un nombre palindrome = un nombre qui se lit dans les deux sens comme 51315 ou 2002)
7. Le nombre de mains au poker contenant un carré (une main = 5 cartes parmi 52, un carré = 4 cartes de la même valeur)

Correction des exercices

Correction de l'exercice 1 :
Méthode 1 : Soit $x \in E$, alors il existe k tel que $x = 6k$. On peut écrire $x = 3 \times (2k)$, il existe donc $k' \in \mathbb{N}$ tel que $x = 3k'$. Ainsi, $x \in F$ donc finalement $E \subset F$.

Méthode 2 : E est l'ensemble des multiples de 6, F est l'ensemble des multiples de 3, un multiple de 6 est aussi un multiple de 3 donc $E \subset F$.
Correction de l'exercice 2 :

1. $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
2. $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$
3. Déterminons d'abord E. $E = \{\varnothing, \{1\}\}$.
   Ainsi, $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{1\}\}, \{\varnothing, \{1\}\}\}$.

Correction de l'exercice 3 :

- On a $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ car le seul sous ensemble de $\varnothing$ est $\varnothing$: on a $\varnothing \subset \varnothing$.
- $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ car $\varnothing \subset E$ quel que soit E, et parce que $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$
- $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

Correction de l'exercice 4 :

1. On montre une double équivalence.
   <u>Sens $\Rightarrow$</u> : Supposons que $A \cap B = B$, et soit $x \in B$.
   Alors $x \in A \cap B$ car $B = A \cap B$, donc $x \in A$. Ainsi, $B \subset A$.
   On en déduit que $A \cap B = B \Rightarrow B \subset A$.
   <u>Sens $\Leftarrow$</u> : Supposons que $B \subset A$. On veut montrer que $A \cap B = B$, donc on prouve une double inclusion.
   Soit $x \in A \cap B$, alors $x \in B$ donc $A \cap B \subset B$.
   Réciproquement, si $x \in B$, alors $x \in A$ car $B \subset A$, donc finalement $x \in A \cap B$. On en déduit que $B \subset A \cap B$ et donc finalement que $A \cap B = B$. Ainsi, on a aussi $B \subset A \Rightarrow A \cap B$
   <u>Conclusion :</u> On a donc $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subset A$.
2. <u>Sens $\Rightarrow$</u> : On suppose que $A \cup B = B$.
   Soit $x \in A$, alors $x \in A \cup B$. Or $A \cup B = B$ donc $x \in B$. Ainsi, $A \subset B$.
   <u>Sens $\Leftarrow$</u> : Supposons que $A \subset B$.
   Soit $x \in A \cup B$, alors $x \in A$ ou $x \in B$. Si $x \in A$, alors $x \in B$ car $A \subset B$. Dans tous les cas, on a donc $x \in B$ et ainsi $A \cup B \subset B$.
   Soit $x \in B$, alors $x \in A \cup B$ par définition donc $B \subset A \cup B$. On a donc $A \cup B = B$.
   <u>Conclusion :</u> On a donc $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$.
3. <u>Sens $\Rightarrow$</u> : Supposons que $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$.
   Soit $x \in B$, alors $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cup C$. Soit $x \in A$, soit $x \in C$

   - Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B$ donc $x \in A \cap C$ par hypothèse. Ainsi, $x \in C$.
   - Si $x \in C$, alors $x \in C$.

   Dans tous les cas, on a $x \in C$, donc $B \subset C$.
   Réciproquement, si $x \in C$, alors $x \in A \cup C$ donc $x \in A \cup B$. Soit $x \in A$, soit $x \in B$.

   - Si $x \in A$, alors $x \in A \cap C$ donc $x \in A \cap B$ par hypothèse. Ainsi, $x \in B$.
   - Si $x \in C$ il n'y a rien à dire.

   dans tous les cas on a donc $x \in C$, ainsi $C \subset B$.

<u>Sens $\Leftarrow$</u> : Supposons que $B = C$, alors $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$.
<u>Sens $\Rightarrow$</u> : Supposons que $\overline{A} \subset B$.
Soit $x \in \overline{B}$. Alors $x \in E$ et $x \notin B$. On a donc $x \notin \overline{A}$ car $\overline{A} \subset B$.
Ainsi, $x \in \overline{\overline{A}}$ donc $x \in A$. On a $\overline{B} \subset A$.
<u>Sens $\Leftarrow$</u> : Supposons que $\overline{B} \subset A$, le même raisonnement en inversant les rôles de A et de B permet de montrer que $\overline{B} \subset B$.
Correction de l'exercice 5 :

- Montrons que $A = [0, +\infty[$. Soit $x \in A$, alors $\exists n \in \mathbb{N}, x \in [n, n+1[$. Ainsi, $x \geq 0$ donc $x \in [0, +\infty[$ et ainsi, $A \subset [0, +\infty[$.
  Réciproquement, si $x \in [0, +\infty[$, on sait qu'il existe un plus grand entier inférieur à x noté $\lfloor x \rfloor$, qui vérifie $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Ainsi, en posant $n = \lfloor x \rfloor$, on a $x \in [n, n+1[$, donc $x \in A$ et ainsi $[0, +\infty[\subset A$.

- Montrons que $B = \{0\}$.
  Soit $x \in B$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, \frac{1}{n}[$ donc $x \geq 0$. Supposons que $x > 0$, alors il existe un rang n_0 tel que $\frac{1}{n_0} < x$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Ainsi, $x \notin [0, \frac{1}{n_0}[$ donc $x \notin B$. Contradiction, donc $x = 0$. On a donc $B \subset \{0\}$.
  Réciproquement, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \in [0, \frac{1}{n}[$ donc $0 \in B$, autrement dit $\{0\} \subset B$.
  Finalement, on a $B = \{0\}$.

Correction de l'exercice 6 :

a) $f(\mathbb{R}) = \ldots\ldots$
b) $f(\mathbb{R}_+) = \ldots\ldots$
c) $f(R_-) = \ldots\ldots$
d) $f^{-1}(\mathbb{R}) = \ldots\ldots$
e) $f^{-1}(]0;1]) = \ldots\ldots$
f) $f^{-1}(\mathbb{R}_-) = \ldots\ldots$
g) $f^{-1}(\{-1\}) = \ldots\ldots$

Correction de l'exercice 7 : E contient 4 éléments (pour en être sur, on applique la formule $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(\{1,2\})^2 = 2^2 = 4$).
En extension :

$$E = \{\{1,1\},\{1,2\},\{2,1\},\{2,2\}\}$$

On peut faire la liste de toutes les images :

- $f(1,1) = 3 \times 1 - 2 \times 1 = 1$
- $f(1,2) = 3 \times 1 - 2 \times 2 = -1$
- $f(2,1) = 3 \times 2 - 2 \times 1 = 4$
- $f(2,2) = 3 \times 2 - 2 \times 2 = 2$

Finalement, $f(E) = \{-1,1,2,4\}$.
On a donc $f^{-1}(\mathbb{R}_+) = \{\{1,1\},\{2,1\},\{2,2\}\}$
Correction de l'exercice 8 : Considérons la fonction $f : R \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ et les ensembles $A =]-\infty;-1]$ et $B = [1;+\infty[$. Alors $A \cap B = \varnothing$ donc $f(A \cap B) = \varnothing$, mais $f(A) = f(B) = [1;+\infty[$ donc $f(A) \cap f(B) = [1;+\infty[$.
Correction de l'exercice 9 :

1. Soit $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$.
   Or $f^{-1}(f(A)) = \{x \in E \mid f(x) \in f(A)\}$ donc $x \in f^{-1}(f(A)$ par définition. On a donc $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Alors il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Puisque $x \in f^{-1}(B)$, par définition on a $f(x) \in B$ donc $y \in B$. Ainsi, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
3. On considère la fonction carrée $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty[, x \mapsto x^2$ et $A = [0,1]$.
   Alors $f(A) = [0,1]$ et $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}([0,1]) = [-1,1]$, donc $A \neq f^{-1}(f(A))$.

Correction de l'exercice 10 : Soient $x, y \in \mathbb{R}$, supposons que $f(x) = f(y)$, alors

$$3x - 1 = 3y - 1$$
$$3x = 3y$$
$$x = y$$

donc f est injective.
Correction de l'exercice 11 : Soit $x = -2$ et $y = 2$. On a $f(x) = f(y) = 4$ mais $x \neq y$, f n'est pas injective.
Correction de l'exercice 12 : Soit $y \in [3;+\infty[$. On a

$$\begin{aligned} x^2 + 3 = y &\iff x^2 = y - 3 \\ &\iff x = \sqrt{y-3} \end{aligned}$$

comme $y \geq 3$, $y - 3 \geq 0$ donc $\sqrt{y-3}$ est bien définie. Le réel $x = \sqrt{y-3}$ est un antécédent de y par f, donc f est surjective.
Correction de l'exercice 13 :
Cas 1 : $n = 2$**.** Soit les deux personnes se serrent la main, soit elles ne se serrent pas la main, dans les deux cas elles ont échangé le même nombre de poignée de main.
Si $n \geq 3$, on distingue encore trois cas :

Cas 2 : au moins 2 personnes ne serrent la main à personne. Dans ce cas 2 personnes serrent 0 mains ce qui répond positivement à la question.
Cas 3 : tout le monde serre la main à au moins une personne. Dans ce cas, chaque personne sert entre 1 et $n-1$ mains. Puisqu'il y a n personnes en tout et qu'il y a $n-1$ nombres entre 1 et $n-1$, il y a au moins 2 personnes qui ont serré le même nombre de mains, ce qui répond positivement à la question.
Cas 4 : exactement 1 personne ne serre la main à personne. Dans ce cas, si $n=3$ on se retrouve dans le cas 1 et si $n\geq 4$ on se retrouve dans le cas 3. Dans tous les cas le résultat est vrai.
Correction de l'exercice 14 :

$$\text{card}(A\cup B\cup C)=\text{card}(A)+\text{card}(B)+\text{card}(C)-\text{card}(A\cap B)-\text{card}(A\cap C)-\text{card}(B\cap C)+\text{card}(A\cap B\cap C)$$

$$\begin{aligned}\text{card}(A\cup B\cup C\cup D)=&\text{card}(A)+\text{card}(B)+\text{card}(C)+\text{card}(D)\\&-\text{card}(A\cap B)-\text{card}(A\cap C)-\text{card}(A\cap D)-\text{card}(B\cap C)-\text{card}(B\cap D)-\text{card}(C\cap D)\\&+\text{card}(A\cap B\cap C)+\text{card}(A\cap B\cap D)+\text{card}(A\cap C\cap D)+\text{card}(B\cap C\cap D)\\&-\text{card}(A\cap B\cap C\cap D)\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 15 :

- **Injectivité** : soit $(F_1,F_2)\in P_2^2$, et supposons que $F_1\cup\{a\}=F_2\cup\{a\}$. On souhaite montrer que $F_1=F_2$.
  On raisonne par double inclusion : soit $x\in F_1$. Alors $x\in F_1\cup\{a\}=F_2\cup\{a\}$ et comme $F_1\in P_2$, $a\notin F_1$ donc $x\neq a$. On a donc $x\in F_2$.
  De même, si $x\in F_2$, alors $x\in F_1$, donc finalement $F_1=F_2$.
- **Surjectivité** : soit $F\in P_1$. Par définition, F est une partie de E qui contient l'élément $\{a\}$. Soit $G=F\setminus\{a\}$. Alors $G\in P_2$, et $f(G)=(F\setminus\{a\})\cup\{a\}=F$. Donc f est surjective

f est injective et surjective donc f est bijective.
Correction de l'exercice 16 : Considérons l'application suivante :

$$\begin{array}{cccc}\varphi: & A\times B & \longrightarrow & [\![1,nm]\!]\\ & (a,b) & \longmapsto & m\times(f(a)-1)+g(b)\end{array}$$

Vérifions d'abord que cette application est bien à valeurs dans $[\![1,nm$
$rrbracket$: pour tout $(a,b)\in A\times B$, $1\leq f(a)\leq n$ donc $0\leq f(a)-1\leq n-1$ et $0\leq m(f(a)-1)\leq mn-m$ et $1\leq g(b)\leq m$ donc par somme $1\leq m(f(a)-1)+g(b)\leq mn-m+m\leq mn$.
Montrons maintenant que cette application est bien bijective :
φ injective : Supposons que $\varphi(a,b)=\varphi(a',b')$. Notons r le reste dans la division euclidienne de $\varphi(a,b)$ par m. On remarque que $g(b)=m$ si et seulement si $r=0$ et $g(b)=r$ dans les autres cas, ainsi $g(b)=g(b')$. On déduit immédiatement de l'égalité $m(f(a)-1)+g(b)=m(f(a')-1)+g(b)$ que $f(a)=f(a')$
φ surjective : Soit $k\in[\![1,nm]\!]$. Notons r le reste de la division euclidienne de k par m en posant $r=m$ si le reste est nul. Ainsi, $r\in[\![1,m]\!]$ et on pose alors $b=g^{-1}(r)$.
On remarque que $k\geq g(b)$. On pose donc ensuite, sous réserve de définition, $a=f^{-1}\left(\frac{k-g(b)}{m}+1\right)$ de sorte que $k=m(f(a)-1)+f(b)$. On note que grâce à la définition de b, $k-g(b)$ est bien divisible par m. Il faut donc simplement vérifier qu'on a bien $\frac{k-g(b)}{m}+1\in[\![1,n]\!]$. En effet, $0\leq k-g(b)\leq mn-m$ et $0\leq\frac{k-g(b)}{m}\leq n-1$ donc finalement $1\leq\frac{k-g(b)}{m}+1\leq n$.
Correction de l'exercice 17 :

$$\begin{aligned}E\times F\times F=&\{(1,c,c),(1,c,d),(1,d,c),(1,d,d)\\&(2,c,c),(2,c,d),(2,d,c),(2,d,d)\\&(3,c,c),(3,c,d),(3,d,c),(3,d,d)\}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 18 :

1. Un mot de passe de 10 caractères est le choix d'un 10-uplet dans un ensemble à $26\times2+10=62$ éléments. Il y a donc 62^{10} choix possibles.
2. Un résultat de tiercé est un k-uplet ordonné à 3 éléments d'un ensemble à 12 éléments, donc le nombre de résultat possibles est $A_{12}^3=\frac{12!}{9!}=12\times11\times10=1320$
3. Le nombre de façon de classer 6 candidats à un entretien d'embauche est le nombre de permutation de 6 éléments, il y a donc $6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$ façons de classer ces candidats.

4. Choisir 4 élèves dans une classe de 40 revient à choisir une partie à 4 éléments d'un ensemble à 40 éléments, le nombre de choix possibles est donc

$$\binom{40}{4} = \frac{40!}{4! \times 36!} = \frac{40 \times 39 \times 38 \times 37}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 10 \times 13 \times 19 \times 37 = 91390$$

5. Le nombre de façons de choisir 2 garçons parmi 15 est $\binom{15}{2} = \dfrac{15!}{2! \times 13!} = \dfrac{15 \times 14}{2} = 105$.

   Le nombre de façons de choisir 2 filles parmi 25 est $\binom{25}{2} = \dfrac{25!}{2! \times 23!} = \dfrac{25 \times 24}{2} = 300$

   Il y a donc $105 \times 300 = 31500$ façons de former un quatuor de délégué constitué de 2 garçons et 2 filles.
6. Choisir un palindrome à 128 chiffre revient à choisir le premier chiffre qui doit être différent de 0, soit 9 possibilité, puis les 63 chiffres suivants, soit 10^{63} possibilités. On a ainsi fixé les 64 premiers chiffres du palindrome, les 64 chiffres suivant sont nécessairement les mêmes dans l'ordre inverse. Il y a donc 9×10^{63} palindromes à 128 chiffres.
7. Choisir une main contenant un carré revient à choisir la valeur du carré (As, Roi, Dame, etc...), puis à choisir la cinquième carte parmi les $52 - 4 = 48$ cartes restants. Il y a donc $13 \times 48 = 624$.