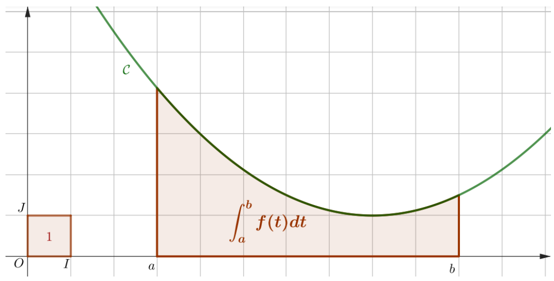
CHAPITRE 16

INTÉGRATION

I. Généralités

1. Introduction

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$, continue sur $[a;b]$ et à valeurs positives. Dans un repère orthonormé (O,I,J), l'**unité d'aire** est l'aire du carré de côtés $[OI]$ et $[OJ]$. Si $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f dans ce domaine, **l'intégrale de f entre a et b**, notée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, représente l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisse, la courbe $\mathcal{C}$, et les axes d'équation $x=a$ et $x=b$.

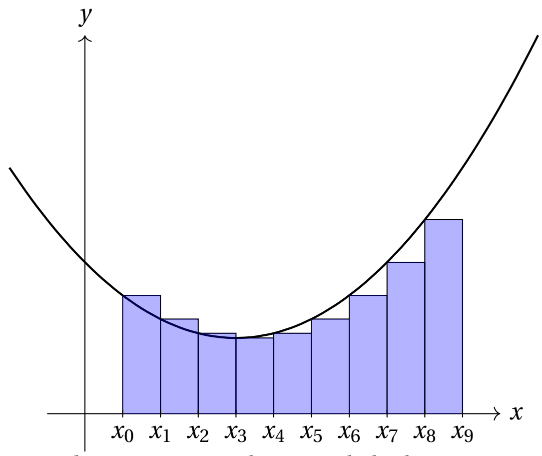


→ Exercice de cours n° 1.

2. Intégrale de Riemann

L'idée de Riemann pour définir l'aire sous la courbe d'une fonction est de l'approximer par une somme d'aire de petits rectangles.
En simplifiant un peu, si $\sigma=(x_0,\dots,x_n)$ est une subdivision d'un intervalle $[a;b]$, c'est à dire une famille de réels tels que $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$, alors la somme

$$S(f,\sigma)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i-x_{i-1})$$



est une assez bonne approximation de l'aire entre la courbe de f et l'axe des abscisse, du moment que le pas p de la division est suffisamment petit (on définit $p=\max_{1\leq i\leq n}\{x_i-x_{i-1}\}$)

Une fonction f est dite **intégrable** au sens de Riemann si $S(f,\sigma)$ admet une limite lorsque p tend vers 0, et l'intégrale de f entre a et b est définie comme étant cette limite :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{p\to 0} S(f,\sigma)$$

Il faut bien sûr prouver que cette limite ne dépend pas de la subdivision choisie mais cela n'est pas tout à fait dans l'esprit du programme de BL, ce résultat sera admis.

Remarque

Pour une subdivision de $[a;b]$ en n parties égales, si on note $\mathrm{d}t=x_i-x_{i-1}$, alors

$$S(f,\sigma)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\mathrm{d}t$$

d'où la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ où $\mathrm{d}t$ désigne une quantité infinitésimale et $\int$ est un S pour « Somme ».

Définition 16.1

Une fonction f est dite **continue par morceaux** sur un intervalle $[a;b]$ s'il existe une subdivision $(x_0,\dots,x_n)$ de $[a;b]$ telle que la restriction de f à tout intervalle de la forme $]x_{i-1};x_i[$ est continue avec une limite à droite en x_{i-1} et une limite à gauche en x_i.

Proposition 16.1 (admise)

Toute fonction continue par morceaux sur $[a;b]$ est intégrable au sens de Riemann. On note $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ la valeur de cette intégrale.

Remarque

La variable d'intégration est un variable muette, ainsi :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\heartsuit)\mathrm{d}\heartsuit$$

3. Intégrale de fonctions positives

Proposition 16.2 (admise)

Si f est une fonction continue par morceaux et positive sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire de la surface définie par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

Proposition 16.3

Si f est continue par morceaux et positive sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$ avec égalité si et seulement si f est nulle sur $[a;b]$.

4. Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Proposition 16.4 (admise)

Si f est une fonction continue par morceaux et de signe quelconque sur $[a;b]$, alors on peut choisir une subdivision $(x_0,\dots,x_n)$ telle que f est de signe constant sur chaque intervalle de la forme $]x_{i-1};x_i[$.
On a alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{\substack{i=1\\ f\geqslant 0 \text{ sur }]x_{i-1};x_i[}}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{\substack{i=1\\ f\leqslant 0 \text{ sur }]x_{i-1};x_i[}}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (-f(t))\,\mathrm{d}t$$

Remarque

L'intégrale d'une fonction f entre a et b donne donc l'**aire algébrique** entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses entre les droites d'équation $x=a$ et $x=b$, c'est à dire une aire comptée **positivement** au dessus de l'axe des abscisse et négativement en dessous.

→ **Exercice de cours n° 2.**

5. Propriétés générales

Propriété 16.5

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$ et $c \in [a;b]$, on a

$$\int_c^c f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

(l'aire d'un segment est nulle).

Propriété 16.6 (Relation de Chasles)

Soient $a,b,c \in I$ avec $a \leq b \leq c$. Alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Définition 16.2

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, on définie $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ par

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque

Cette définition est ainsi compatible avec la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

et la relation de Chasles reste alors vraie pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ dans un ordre quelconque :

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Propriété 16.7 (Intégrale d'une fonction constante)

Si $\forall x \in [a,b]$, $f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$, alors

$$\int_a^b f(x) = k(b-a)$$

Propriété 16.8 (Linéarité de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a;b]$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux réels. Alors

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque

L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([a,b]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \end{array}$ est une application linéaire.

Propriété 16.9 (croissance de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ telles que $f \leq g$, c'est à dire $\forall x \in [a;b]$, $f(x) \leq g(x)$. Alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

→ **Exercice de cours n° 3.**

Propriété 16.10 (Inégalité triangulaire)

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$. Alors

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Définition 16.3

f est une fonction définie et continue sur I et $a, b \in I$ avec $a < b$, on appelle **valeur moyenne de** f **sur** $[a,b]$ le réel μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Propriété 16.11 (Inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient $a, b \in I$ avec $a \leq b$.

- S'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in [a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq M(b-a)$$

- S'il existe un réel M tel que pour tout $x \in [a,b]$, $|f(x)| \leq M$, alors

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq M(b-a)$$

6. Théorème fondamental

Définition 16.4

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle **primitive de f sur I** toute fonction F définie et dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$, $F'(x) = f$.

Exemple 16.1

- Une primitive de $x \longmapsto x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}$.
- Une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto \mathrm{e}^x$.
- Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$ est $x \longmapsto -\dfrac{1}{x}$.
- Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ est $x \longmapsto \ln x$.

Propriété 16.12

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors il existe une constante c telle que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + c$.

Remarque

Si f admet une primitive F sur I, alors elle admet une infinité de primitives sur I, toutes de la forme $F + c$ où c est une constante.

Propriété 16.13 (tableaux de primitives)

$f(x)$	**Définie sur**	**Primitive F de f**
k avec $k \in \mathbb{R}$ fixé	$\mathbb{R}$ si $n \geq 1$ $\mathbb{R}^*$ si $n \leq -2$	$F(x) = kx + C$
x^n avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ fixé	$\mathbb{R}$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x+a}$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé	$\mathbb{R} \setminus \{-a\}$	$F(x) = \ln\|x+a\|$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	$F(x) = \mathrm{e}^x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \sin x$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = -\cos x$
$1 + \tan^2(x)$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \tan(x)$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \arctan(x)$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$

Si u est une fonction :

Fonction f	**Primitive F**
$u'(x)(u(x))^n$	$\dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\|u(x)\|)$
$u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$	$\mathrm{e}^{u(x)}$
$\dfrac{u'(x)}{(u(x))^n}$	$\dfrac{-1}{(n-1)(u(x))^{n-1}}$
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}$

Théorème 16.14

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Soit F la fonction définie sur $[a;b]$ par

$$F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

alors F est dérivable sur $[a;b]$ et $\forall x \in [a;b]$, $F'(x) = f(x)$.

Propriété 16.15

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. Si F est une primitive quelconque de f sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Remarque

La fonction $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
Toute fonction f continue sur $[a;b]$ admet donc une primitive : la fonction $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, et toute ses primitives sont de la forme $F + c$ avec c constante.

Définition 16.5

Si F est une fonction, on note $\Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple 16.2

Calculons $\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^0}{2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^2-1}{2}\end{aligned}$$

→ **Exercice de cours n° 4.**

Remarque

Le théorème fondamental de l'analyse établit un lien entre intégrale et primitive, il ne faut cependant pas confondre les deux ! L'intégrale d'une fonction entre deux bornes fixées est un réel, une valeur numérique, alors qu'une primitive est une fonction.

II. Calcul d'intégrale

1. Intégration par partie

Propriété 16.16 (Intégration par partie)

Soient u et v deux fonctions définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)$$

Remarque

Sans la lourdeur des notations, on retient : $\int u'v = [uv] - \int uv'$.

Exemple 16.3

Calculons $I = \int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

On pose $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x$, on a alors $u'(x) = \mathrm{e}^x$ donc $I = \int_0^1 u'(x)v(x) = [x\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 1 \times \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 0 - [\mathrm{e}^x]_0^1 = \mathrm{e} - 0 - \mathrm{e} + 1 = 1$

→ **Exercice de cours n° 5.**

→ **Exercice de cours n° 6.**

2. Changement de variable

Propriété 16.17

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a;b]$ avec $\varphi([a;b]) \subset I$.
Alors

$$\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque

Le plus souvent on choisit une fonction φ qui est une bijection strictement monotone pour pouvoir écrire $t = \varphi(u) \iff u = \varphi^{-1}(t)$.
On admet alors qu'on peut substituer directement grâce à : $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ et $\mathrm{d}u = (\varphi^{-1})'(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple 16.4

Calculons $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)}}\,\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $\boxed{u = \ln(t)}$.

On a donc $t = \mathrm{e}^u$. ($\varphi : u \longmapsto \mathrm{e}^u$ et $\varphi^{-1} : t \longmapsto \ln(t)$). Alors $\boxed{\mathrm{d}u = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}$.

De plus, $\ln(\mathrm{e}) = 1$ et $\ln(\mathrm{e}^3) = 3$, on a donc finalement :

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)}}\,\mathrm{d}t = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \left[2\sqrt{u}\right]_1^3 = 2\sqrt{3} - 2$$

→ **Exercice de cours n°7.**

→ **Exercice de cours n°8.**

Remarque

La méthode décrite dans l'exercice précédent peut se généraliser pour calculer l'intégrale de n'importe quelle fonction de la forme $x \mapsto \dfrac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}$ avec α, β, a, b, c des réels. Cette généralisation n'est pas au programme mais ce type d'exercice guidé est à savoir faire.

3. Fonctions paires, fonctions impaires

Propriété 16.18

On considère une fonction f définie et continue sur un intervalle de la forme $[-a, a]$ avec a un réel positif.

- Si f est impaire sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- Si f est paire sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

→ **Exercice de cours n°9.**

4. Sommes de Riemann

Par définition de l'intégrale de Riemann, on a la propriété suivante :

Propriété 16.19 (admis)

Si f est une fonction continue sur $[a; b]$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

En particulier, si f est une fonction continue sur $[0; 1]$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 16.5

On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Déterminons la limite de u_n.

On remarque que pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$

En posant $f(x) = \frac{1}{1+x}$ qui est continue sur $[0; 1]$, on a

$$u_n = \frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(0 + k \times \frac{1-0}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

donc d'après la propriété des sommes de Riemann, (u_n) converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$$

→ **Exercice de cours n°10.**

Exercices de cours

Exercice 1

En raisonnant géométriquement, calculer

1. $\displaystyle\int_{-2}^{3} 7\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_{1}^{3} (5-x)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{-2}^{2} |x|\,\mathrm{d}x$

Exercice 2

Représenter la fonction $f : x \longmapsto |x-3|-2$ sur l'intervalle $[-3;5]$ et calculer $\int_{-3}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$ géométriquement.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \mathrm{e}$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \leq I_n$.
3. Que peut-on en déduire sur I_n ?

Exercice 4

Calculer

1. $\displaystyle\int_0^1 \tan(u)\,\mathrm{d}u$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_4^{25} \frac{3}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{3+t}$
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^1 x^4(x^5+1)^3\,\mathrm{d}x$

Exercice 5

Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide d'une intégration par partie.

Exercice 6

Calculer à l'aide de deux intégrations par parties successives : $I = \displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

Exercice 7

Calculer $\displaystyle\int_5^{2\sqrt{3}+3} \frac{1}{(x-3)^2+4}\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'un changement de variable linéaire

Exercice 8

On souhaite calculer $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{5x+1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$

1. Déterminer deux réels α et β tels que $x^2+3x+1 = (x-\alpha)^2+\beta$.
2. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in [1;2]$, $\dfrac{5x+1}{x^2+3x+1} = \dfrac{a}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + b\dfrac{2x+3}{x^2+3x+1}$
3. À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{x-\alpha}{\beta}$, calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{a}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$
4. En déduire la valeur de I.

Exercice 9

Calculer $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^4 \sin x}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(3x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 10

On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$. Déterminer la limite de u_n