

★

## Exercice 1

On considère l'application suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (y + z, x - y + z, z - 2x)$$

- 1) Montrer que  $f$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
- 2) Déterminer la matrice de  $f$  dans la base canonique  $\mathcal{B}_0$ .
- 3) On considère la base  $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$ .  
Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}}(f)$ ,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_0}(f)$ , et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$

★

## Exercice 2

On considère l'application suivante :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto (x + y, x - y, 2y - 3x)$$

- 1) Montrer que  $f$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
- 2) Déterminer la matrice de  $f$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$
- 3) On considère la base  $\mathcal{B} = ((1, 1), (0, 2))$  de  $\mathbb{R}^2$  et la base  $\mathcal{B}' = ((1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3))$  de  $\mathbb{R}^3$ .  
Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ .
- 4) Montrer que  $f$  est injective.
- 5) Déterminer une base de  $\text{im}(f)$ .

★

## Exercice 3

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  données par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- 1) Vérifier que  $A^2 = A$  et que  $B^2 = B$
- 2) Déterminer le rang de  $A$  ainsi que la dimension du noyau de  $A$
- 3) En notant  $I_2$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , montrer que  $I_2 - AB$  et que  $A + B - AB$  sont inversibles.

★★

## Exercice 4

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 et soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme non nul. On suppose que  $f^2 = 0$ , c'est à dire que  $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1) Montrer que  $\text{im}(f) \subset \ker(f)$
- 2) En déduire que  $0 < \text{rg}(f) \leq \dim(\ker(f)) < 3$
- 3) À l'aide du théorème du rang, déterminer  $\text{rg}(f)$  et  $\dim(\ker(f))$ .
- 4) Justifier qu'il existe  $u \in \mathbb{R}^3$  tel que  $f(u) \neq 0$ .
- 5) On pose  $v = f(u)$ . Justifier qu'il existe  $w \in \ker(f)$  tel que  $(v, w)$  est une base de  $\ker(f)$ .
- 6) Montrer que  $(v, w, u)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  qui répond au problème posé.

★

## Exercice 5

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que si  $f$  est une homothétie de  $E$ , alors la matrice représentative de  $f$  dans une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  ne dépend pas de la base choisie.

★

## Exercice 6

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que :  $\forall \mathbf{x} \in E, \exists \lambda \in \mathbb{R}, f(\mathbf{x}) = \lambda \cdot \mathbf{x}$   
 Montrer que :  $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in E, f(\mathbf{x}) = \lambda \cdot \mathbf{x}$ .

★ ★

## Exercice 7

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) &\longmapsto (3x + y + z, x - 2y + z, x + y, 2x + z) \end{aligned}$$

- 1) Montrer que  $f$  est une application linéaire
- 2) Déterminer la matrice de  $f$  dans la base canonique
- 3) On pose :

$$\mathcal{B} = ((2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = ((1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1))$$

Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et que  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbb{R}^4$

- 4) Déterminer la matrice de passage de la base canonique à  $\mathcal{B}$  et la matrice de passage de  $\mathcal{B}'$  à la base canonique.
- 5) En déduire  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$  la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ .
- 6) Déterminer  $\text{Im}(f)$  et  $\text{Ker}(f)$ .

★

## Exercice 8

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soient les matrices carrées de taille  $n$  suivante :  $A = (2^{i+j})_{1 \leq i, j \leq n}$  et  $B = (i + j)_{1 \leq i, j \leq n}$

- 1) Écrire  $A$  et  $B$  dans le cas  $n = 5$
- 2) Déterminer le rang de  $A$  et le rang de  $B$  dans le cas général
- 3) Déterminer une base de  $\text{Ker}(A)$  et une base de  $\text{Ker}(B)$  dans le cas  $n = 5$ .

★ ★

## Exercice 9

Soit  $n \geq 2$  un entier et soit  $A = (\sin(i + j))_{1 \leq i, j \leq n}$ . Montrer que  $\text{rg}(A) \leq 2$ .

★ ★

## Exercice 10

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

On note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

- 1) a) Calculer  $(A - I)^2$   
 b) En déduire que  $A$  est inversible et écrire  $A^{-1}$  comme combinaison linéaire de  $I$  et  $A$ .
- 2) On pose  $u_1 = (f - \text{Id})(e_1)$  et  $u_2 = e_1 + e_3$ .  
 a) Montrer que le rang de  $(f - \text{Id})$  est égal à 1. En déduire la dimension de  $\text{Ker}(f - \text{Id})$ .  
 b) Justifier que  $(u_1, u_2)$  est une base de  $\text{Ker}(f - \text{Id})$
- 3) Montrer que la famille  $(u_1, u_2, e_1)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$
- 4) Déterminer la matrice  $T$  de  $f$  dans cette base.
- 5) Soit la matrice  $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Justifier que  $P$  est inversible puis écrire la relation existant entre les matrices  $A, T, P$  et  $P^{-1}$ .

★ ★  
Exercice 11

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  une matrice carrée de taille  $n$ . On dit que  $A$  est une matrice stochastique si les deux conditions suivantes sont remplies :

- $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \geq 0$
- $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$

1) Soient  $A$  et  $B$  deux matrice stochastiques. Montrer que  $AB$  est stochastique.

2) On considère la matrice  $A = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ .

- a) Vérifier que  $A$  est stochastique.
- b) Justifier que  $A^n$  est stochastique.
- c) Calculer le rang de  $A$ .
- d) On pose  $e_1 = (1, 1, 1)$ ,  $e_2 = (0, -1, 1)$  et  $e_3 = (-2, 1, 1)$  et  $X_1, X_2, X_3$  les vecteurs colonnes correspondant. Montrer que  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- e) Exprimer  $AX_1, AX_2$  et  $AX_3$  en fonction de  $X_1, X_2$  et  $X_3$  et en déduire qu'il existe une matrice inversible  $P$  telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Préciser la matrice  $P$  et déterminer son inverse  $P^{-1}$ .

f) Déterminer une expression de  $A^n$  en fonction de  $n$ .

★ ★ ★  
Exercice 12

On veut démontrer dans cet exercice la formule d'inversion de Pascal : on suppose que  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont deux suites de

réels telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k$ .

Le but de l'exercice est de montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère l'application

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) &\longmapsto P(X+1) \end{aligned}$$

- 1) Montrer que  $u$  définit bien un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- 2) Montrer que  $u$  est inversible d'inverse :

$$\begin{aligned} v : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) &\longmapsto P(X-1) \end{aligned}$$

3) Exprimer les matrices de  $u$  et de  $v$  dans la base canonique  $\mathcal{B}_0 = (1, X, \dots, X^n)$ .

4) On note  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$  et  $N = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(v)$ , et on note  $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ .

Montrer que  $X^T = Y^T M$  et en déduire l'égalité voulue.