★
Exercice 1

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1) Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F et $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E
2) Montrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
3) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.
   a) Montrer que $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.
   b) Montrer que f est injective si et seulement si $\big(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\big)$ est une famille libre.
   c) Montrer que f est un isomorphisme si et seulement si $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ est une base de F
4) Rappeler le théorème de la base incomplète, puis démontrer le théorème du rang : $\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E)$.

★
Exercice 2

Dans chaque cas, déterminer si F est un sous-espace vectoriel de E et le cas échéant déterminer une base de F.

1) $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x = 0 \quad \text{et} \quad y = 0\right\}$, $E = \mathbb{R}^3$
2) $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0\right\}$, $E = \mathbb{R}^3$
3) $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z &=& 0 \\ y-z+2t &=& 0 \\ x-3y+z-t &=& 0 \end{array}\right.\right\}$, $E = \mathbb{R}^4$
4) $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad \left\{\begin{array}{rcl} 3x-y+2z+t &=& 0 \\ -x+y-z &=& 0 \\ 2x+z+t &=& 0 \end{array}\right.\right\}$, $E = \mathbb{R}^4$

★
Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère l'ensemble $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E
2) Montrer que F est le noyau d'une application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ que l'on précisera.
3) En déduire la dimension de F.

★
Exercice 4

Pour chacune des matrices suivantes, déterminer le rang, la dimension du noyau, une base de l'image et une base du noyau.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

★ ★
Exercice 5

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note A^T la transposée d'une matrice A.

1) Montrer qu'il existe 6 réels a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3 tels que $M_{i,j} = a_i b_j$ pour tout $(i,j) \in \{1,2,3\}^2$
2) Justifier qu'il existe deux matrices colonnes A et B tels que $M = AB^T$.
3) Montrer que $M^2 = \mathrm{tr}(M)M$

★ ★
Exercice 6

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

⋆ ⋆
Exercice 7

On pose $T = D + N$ où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer une expression de T^n en fonction de D, N et n, puis en fonction seulement de n.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 8

On appelle **homothétie** de E tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = \lambda \mathrm{id}_E$ pour un certain réel λ.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E qui laisse stable toute droite vectorielle de E (on dit que $F \subset E$ est stable par u si $u(F) \subset F$). Montrer que u est une homothétie.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 9

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et soient f et g deux endomorphismes de E.

1) Montrer que $\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
2) Montrer que $\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$ si et seulement si $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g = \{0\}$ et $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g = E$

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 10

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice fixée. Résoudre l'équation $X +^t X = \mathrm{tr}(X)A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 11

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note f_A l'application qui à tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $\mathrm{tr}(AX)$.

1) Montrer que quel que soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.
2) Montrer que l'application suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$$
$$A \longmapsto f_A$$

Le coin des Khûbes

⋆ ⋆
Exercice 12

Soit n un entier naturel non nul et soit u l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $u(P) = P(1-X)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

1) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Montrer que $u^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$.
3) En déduire qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul tel que $P(1-X) = P(X)$ ou $P(1-X) = -P(X)$.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 13

(ENS 2024) On considère une application φ non-constante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a :

$$\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$$

Attention ! L'application φ n'est pas supposée linéaire.

1) a) Soit O la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\varphi(O)$.
   b) Soit I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\varphi(I)$.
2) Montrer que si une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors $\varphi(A)$ est non-nul.
3) a) Soient A et B deux matrice de même rang. Montrer que $\varphi(A)$ est non-nul si et seulement si $\varphi(B)$ est non-nul.
   b) Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que A^m est nulle. Déterminer $\varphi(A)$.
   c) En déduire que si une matrice A vérifie $\varphi(A) \neq 0$, alors elle est inversible.