★
Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^3 = A$.

★
Exercice 2

Soit ϕ l'application qui à tout polynôme $P(X)$ associe le polynôme $\phi(P) = P(X) - (X-1)P'(X) + \dfrac{(X-1)^2}{2}P''(X)$.

1) Pour tout entier positif n, montrer que ϕ définit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[x]$. déterminer son noyau.
2) On se place dans cette question uniquement dans le cas $n = 2$: donner une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer la matrice de ϕ dans cette base.
3) Quelles sont, en fonction de n, les valeurs propres de ϕ ?

★
Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que AB est diagonalisable.

1) Montrer que si A ou B est inversible, alors BA est diagonalisable.
2) Si A et B ne sont pas inversible, a-t-on toujours ce résultat ?

★ ★
Exercice 4

Soit a un réel non nul et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1/a & 1 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer valeurs et vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

On fixe un entier $n \geq 1$ et $2n$ réels $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ (certains d'entre eux peuvent être nuls).
On note M la matrice $(a_i b_j)_{1 \leq i,j \leq n}$.

2) Montrer que $M = A$ pour des paramètres n, a_i et b_j à préciser.
3) Donner les valeurs propres de M (et leur multiplicité) en fonction des a_i et des b_j dans le cas général, et indiquer une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité de M.

★ ★
Exercice 5

On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on considère l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = [(X^2-1)P']'$$

1) Calculer la matrice de f dans la base canonique.
2) Déterminer les valeurs propres de f.
3) Montrer que f est diagonalisable.

★ ★
Exercice 6

Soit f un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$ tel que $\mathrm{rg}(f) \leq 1$ et $f^3 + f = 0$.

1) Montrer que 0 est l'unique valeur propre de f.
2) On suppose que $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
   a) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$
   b) En déduire une contradiction. Conclure.

★ ★
Exercice 7

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 - 5u^2 + 6u = 0$. Étudier la diagonalisabilité de u.

★ ★ ★

Exercice 8

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme nilpotent de E, de rang $n-1$.

1) Montrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $0 \leq \dim(\mathrm{Im}(u^k)) - \dim(\mathrm{Im}(u^{k+1})) \leq 1$
   Indication : appliquer le théorème du rang à la restriction de u à $\mathrm{Im}(u^k)$
2) Montrer que s'il existe $k_0 \in [\![0,n-1]\!]$ tel que $\mathrm{Ker}(u^{k_0}) = \mathrm{Ker}(u^{k_0+1})$, alors $\mathrm{Ker}(u^{k_0}) = E$.
3) En déduire que la suite $(\dim(\mathrm{Ker}(u^k)))_{0\leqslant k\leqslant n}$ forme une suite strictement croissante, puis que $\dim(\mathrm{Ker}(u^k)) = k$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.
4) Montrer que les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par u sont les $\mathrm{Ker}(u^k)$ pour $k \in [\![0,n]\!]$.

★ ★

Exercice 9

On appelle **matrice stochastique** une matrice carrée à coefficients positifs telle que la somme des coefficients de chaque ligne soit égale à 1.

$A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une matrice stochastique si $\begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \geq 0 \\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1 \end{cases}$.

1) Montrer que si A, B sont deux matrices stochastiques, alors AB est stochastique.
2) Montrer que si A est une matrice stochastique, alors 1 est valeur propre de A.
3) Montrer que toute valeur propre λ de A vérifie $|\lambda| \leqslant 1$

★ ★ ★

Exercice 10

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et I la matrice identité de taille n.

1) Montrer que s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $AB - BA = \alpha I$, alors A et B commutent. (*Indication : considérer la trace*).
2) Soit $W \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.
   a) Montrer que si W est diagonalisable, alors $\mathrm{tr}(W) \neq 0$
   b) Montrer que si $\mathrm{tr}(W) \neq 0$, alors W est diagonalisable.
   c) Montrer que si la trace de W est nulle, alors $W^2 = 0$
3) On suppose que $V = AB - BA$ est de rang 1. Montrer que pour tout entier k, $VA^kV = 0$. On pourra commencer par montrer que $(VA^k)^2 = 0$.