★

Exercice 1 — Voir correction

Étudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$

4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{1/x}-1\right)\mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^{-\pi/3}}{\sqrt{1+\ln(1+\sqrt{x})}}\,\mathrm{d}x$

6) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{t}\right)\right)\mathrm{d}t$

★ ★

Exercice 2 — Voir correction

(D'après oraux ESCP voie ECS)

1) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{x+1}}$ converge. On pose $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{x+1}}$.
2) Montrer que $f(1)=\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$
3) Montrer que f est décroissante sur son domaine de définition.
4) a) Montrer que pour tout $x>0$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t+t^{x+1}}$ est convergente. On note $g(x)$ sa valeur.
   b) Montrer à l'aide d'un changement de variable que $g(x)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{t^{x-1}\,\mathrm{d}t}{t^x(1+t^x)}=\frac{1}{x}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)}$
   c) Vérifier que pour tout $u>0$, $\dfrac{1}{u(1+u)}=\dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{1+u}$ et en déduire la valeur de $g(x)$.
5) a) Montrer que pour tout $x>0$, on a : $0\leq f(x)\leq \dfrac{\ln 2}{x}$
   b) Montrer que pour tout $x>0$, on a : $0\leq \dfrac{\ln 2}{x}-f(x)\leq \dfrac{1}{2x+1}$
   c) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de 0.

★

Exercice 3 — Voir correction

Soit $p\in]0;1[$ un réel fixé. Un magasin de vêtement étudie les habitudes de ses clients et établit que pour chaque client entrant dans la boutique, la probabilité qu'il achète un article est p et la probabilité qu'il reparte sans rien acheter est $1-p$.

1) 10 clients entrent successivement dans la boutique. On note X le nombre de client qui achètent un article. Quelle est la loi suivie par X ? Rappeler la formule pour $E(X)$ et $V(X)$ dans le cas général.
2) Une infinité de clients entrent successivement dans la boutique. On note Y le rang du premier client qui achète un article. Quelle est la loi suivie par Y ? Rappeler $E(Y)$ et $V(Y)$
3) Dans une journée, N clients visitent la boutique où N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$. On note S le nombre de clients qui achète un article dans une journée.
   a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Si on suppose que $N=n$, quelle est la loi suivie par S ?
   b) En déduire que pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}^2$, si $k\leq n$ alors $\mathbb{P}(N=n,S=k)=\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}\times\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.
   c) Déterminer la loi suivie par S.

★

Exercice 4 — Voir correction

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p\in]0;1[$. Déterminer la loi de $X+Y$.

⋆ ⋆
Exercice 5 — Voir correction

(D'après oraux ESCP) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)$.
2) Montrer que X admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(X > k)$ converge.
3) Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on effectue p tirages successifs et avec remise dans une urne contenant n boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à n et on note X le plus grand numéro obtenu.
   a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ déterminer $\mathbb{P}(X \leq k)$ puis en déduire la loi de X
   b) Déterminer $E(X)$ en fonction de n et p.

⋆
Exercice 6 — Voir correction

Un institut de sondage souhaite déterminer la proportion p des habitants d'une population ayant l'intention de voter "oui" à un référendum. On assimile le choix de n personne au hasard dans la population à la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p. On note X_n le nombre de personnes ayant l'intention de voter "oui" parmi l'échantillon de n personnes.

1) Quelle est la loi suivie par X_n ? Rappeler son espérance et sa variance en fonction des paramètres de l'énoncé.
2) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\dfrac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$
3) En déduire une condition sur n pour que $\dfrac{X_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure à 95%.

⋆ ⋆
Exercice 7 — Voir correction

(ENS 2024) On s'intéresse à des événements $B_1, \ldots, B_{100}$. On fait l'hypothèse suivante :

$$\forall k \in \{1, \ldots, 100\}, \quad \mathbb{P}(B_k) = \frac{1}{100}.$$

Pour tout $k \in \{1, \ldots, 100\}$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque B_k a lieu et 0 sinon. Autrement dit, la variable aléatoire X_k est l'indicatrice de B_k. Enfin, on introduit la variable aléatoire $S = \sum_{k=1}^{100} X_k$.

1) Pour cette question et cette question seulement, on suppose les variables aléatoires X_k indépendantes.
   Quelle est alors la loi de S ?
2) Pour cette question et cette question seulement, on suppose les événements B_k deux à deux disjoints.
   Quelle est alors la loi de S ?
3) Calculer l'espérance de S.
4) Démontrer que pour tous i et j dans $\{1, \ldots, 100\}$, la covariance de X_i et X_j vérifie : $0 \leq \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \leq \dfrac{99}{10\,000}$.
5) Montrer que l'espérance de S^2 est inférieure ou égale à 100. Est-il possible de trouver des variables aléatoires X_k de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{100}$ telles que l'espérance de S^2 soit égale à 100 ?

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 8 — Voir correction

(D'après oraux ENS) Le but de cet exercice est de prouver qu'il n'est pas possible de truquer deux dés de sorte à ce que la somme des dés suive une loi uniforme sur $\{2, 3, \ldots, 12\}$.
Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, 6\}$ et telles que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ $\mathbb{P}(U = k) > 0$ et $P(V = k) > 0$. On note $S = U + V$

1) Si U et V suivent une loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 6\}$, est-ce que S suit la loi uniforme sur $\{2, 3, \ldots, 12\}$?
2) Montrer que $P(x) = \mathbb{E}[x^S]$ est un polynôme que l'on explicitera.
3) Démontrer que $\mathbb{E}[x^S] = \mathbb{E}[x^U] \times \mathbb{E}[x^V]$
4) Montrer qu'un polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle.
5) Aboutir à une contradiction, conclure.

Le coin des Khûbes

⋆

Exercice 9 — Voir correction

(ENS 2024) Pour $p \in [0,1]$, on se donne $(X_1, X_2, X_3, \dots)$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que chaque X_i soit de loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout entier $n \geq 1$, on s'intéresse à la quantité

$$f_n(p) = \mathbb{P}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leq n/2\right).$$

1) Calculer les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4. *On demande seulement des formules, pas de simplifier ces formules.*
2) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est polynomiale de degré au plus n.
3) On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la variables aléatoires $\overline{X_n} = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n) = E(X_1)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|\overline{X_n} - E(X_1)| \geq \varepsilon) = 0$$

Ce résultat est connu sous le nom de **loi faible des grands nombres**.

(3) Soit $p \in [0,1]$ tel que $p \neq 1/2$. Démontrer que la suite $(f_n(p))$ admet une limite quand n tend vers $+\infty$ et calculer cette limite, dont la valeur peut dépendre de p. *On pourra utiliser la loi faible des grands nombres.*

⋆

Exercice 10 — Voir correction

(ENS 2024) Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. On suppose que X et Y sont indépendantes. Pour tout entier $n \geq 0$, on note $p_X(n) = \mathbb{P}(X = n)$ et $p_Y(n) = \mathbb{P}(Y = n)$.

1) Combien vaut $\sum_{n=0}^{\infty} p_X(n)$? Pourquoi ?
2) Soit (a_n) une suite croissante majorée de nombres réels. On suppose que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}(X = Y \text{ et } X \leq n) \leq a_n.$$

Montrer que la suite (a_n) converge et qu'on a l'inégalité $\mathbb{P}(X = Y) \leq \lim_{n\to\infty} a_n$.

3) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, on a l'inégalité

$$\mathbb{P}(X = Y \text{ et } X \leq n) \leq \sqrt{\left(\sum_{i=0}^{n} p_X(i)^2\right)\left(\sum_{j=0}^{n} p_Y(j)^2\right)}.$$

4) En déduire l'inégalité suivante :

$$\mathbb{P}(X = Y) \leq \sqrt{\left(\sum_{i=0}^{\infty} p_X(i)^2\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} p_Y(j)^2\right)}.$$

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) La fonction $x \mapsto x^3 \,\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ est continue sur $[0;+\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues, donc il y a une seule impropriété en $+\infty$.
Or $x^2 \times x^3 \,\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} = x^5 \,\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} = X^{10} \,\mathrm{e}^{-X}$ en posant $X = \sqrt{x}$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} X^{10}\,\mathrm{e}^{-X} = 0$ par croissance comparée.
On en déduit que $x^3\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge par comparaison avec l'intégrale de Riemann convergente $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

2) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0;1[$ car $1-t^2$ ne s'annule pas sur cet intervalle. Il y a donc une seule impropriété en $t=1$.
Pour $t \in [0;1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}\sqrt{1-t}} \underset{t\to1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$
Or, le changement de variable $u = 1-t$ montre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2}\sqrt{u}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2}u^{1/2}}$ et cette intégrale converge d'après le critère de Riemann car $\dfrac{1}{2} < 1$.

3) La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{1-t}$ est continue sur $]0;1[$ car $1-t$ ne s'annule pas sur cet intervalle. Il y a une impropriété en 0 et en 1.
Lorsque $t \to 0$ on a $\dfrac{\ln t}{1-t} \underset{t\to0}{\sim} \ln t$ et $t^{1/2}\ln t \xrightarrow[t\to0]{} 0$ donc $\ln t \underset{t\to0}{=} \dfrac{1}{t^{1/2}}$ et donc par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ converge, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$ converge.
Lorsque $t \to 1$, en posant le changement de variable $u = 1-t$ on obtient

$$\int_{1/2}^1 \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t = \frac{0}{1/2}\frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

Or lorsque $u \to 0$ on a $\dfrac{\ln(1-u)}{u} \sim -1$ donc $\lim\limits_{u\to0} \dfrac{\ln(1-u)}{u} = -1$ donc la fonction $\dfrac{\ln(1-u)}{u}$ se prolonge par continuité en 0, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u$ est donc faussement impropre en 0 donc convergente.
On en déduit que $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$ converge, donc finalement que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

4) La fonction $x \mapsto \left(\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{1/x} - 1\right)$ est continue sur $[1;+\infty[$, il y a donc une impropriété en $+\infty$.
On a

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{1/x} - 1 &= \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) - 1 \\
&= \exp\left(\frac{1}{x\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) - 1\right) && \text{car } \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\
&= \frac{1}{x\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) && \text{par composition avec le DL } \exp(u) = 1+u \text{ en } 0 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{1}{x\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x^{3/2}}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann convergente car $\dfrac{3}{2} > 1$. On en conclut par comparaison que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{1/x} - 1\right)\mathrm{d}x$ est convergente.

5) Pour tout $x \geq 1$, $\ln(1+\sqrt{x}) \geq 0$ donc $1+\ln(1+\sqrt{x}) \geq 1$ et finalement $\sqrt{1+\ln(1+\sqrt{x})} \geq 1$.
Ainsi, $\forall x \geq 1$, $\dfrac{x^{-\pi/3}}{\sqrt{1+\ln(1+\sqrt{x})}} \leq \dfrac{1}{x^{\pi/3}}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\pi/3}}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann convergente car $\pi > 3$ donc $\pi/3 > 1$. Par comparaison l'intégrale converge.

6) La fonction $f : t \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{t}\right)$ est continue sur $]1;+\infty[$ et on a $\forall t>1,\ f(t)=\ln\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$ par propriété du logarithme.

   Lorsque t tend vers $+\infty$, $\ln\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\sim -\frac{1}{t^2}$ donc $\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge par comparaison avec l'intégrale de Riemann convergente $\int_2^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$

   Lorsque t tend vers 1, $f(t)=\ln(t+1)+\ln(t-1)-2\ln(t)$. Or $\int_1^2 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^2 \ln(t+1)\,\mathrm{d}t$ n'ont aucune impropriété donc convergent, et $\int_1^2 \ln(t-1)\,\mathrm{d}t$ a la même nature que $\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ par le changement de variable $x=t-1$, et cette dernière intégrale converge selon le critère de Riemann car $x^{1/2}\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Finalement, $\int_1^{+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{t}\right)\right)\mathrm{d}t$ converge.

Correction de l'exercice 2 :

1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$ la fonction $t\mapsto \frac{1}{1+t+t^{x+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ si $x\geq -1$ et sur $\mathbb{R}^*$ si $x<-1$. Dans tous les cas elle est continue sur $[1;+\infty$ donc l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^{x+1}}\,\mathrm{d}t$ n'a qu'une seule impropriété en $+\infty$.

   Si $x>0$, alors $\frac{1}{1+t+t^{x+1}}\sim\frac{1}{t^{x+1}}$ et $x+1>1$ donc $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{x+1}}$ converge donc l'intégrale converge par comparaison.

   Si $x=0$, alors $\frac{1}{1+t+t^{x+1}}=\frac{1}{1+2t}\sim\frac{1}{2t}$, et si $x<0$ alors $\frac{1}{1+t+t^{x+1}}\sim\frac{1}{1+t}\sim\frac{1}{t}$. Dans ces deux cas, puisque l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge alors l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^{x+1}}\,\mathrm{d}t$ diverge.

   On en conclut que $\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^{x+1}}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x>0$

2) $f(1)=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\int_{3/2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ grâce au changement de variable $u=t+\frac{1}{2}$.

   Or,

$$\begin{aligned}
\int_{3/2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} &= \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)\right]_{3/2}^{+\infty}\\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\times\arctan(\sqrt{3})\\
&= \frac{\pi}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}\\
&= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

   d'où le résultat.

3) Soient $0<x<y$ deux réels. Alors pour tout $t\geq 1$, $t^{x+1}\leq t^{y+1}$ donc $\frac{1}{1+t+t^{x+1}}\geq\frac{1}{1+t+t^{y+1}}$ et en intégrant ces inégalités sur $[1;+\infty[$ on obtient bien $f(x)\geq f(y)$ donc f est décroissante sur $]0;+\infty[$.

4) a) Comme pour la question 1, la fonction $t\mapsto\frac{1}{t+t^{x+1}}$ est continue sur $[1;+\infty[$ et si $x>0$ alors $\frac{1}{t+t^{x+1}}\sim\frac{1}{t^{x+1}}$ avec $x+1>0$ donc $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t+t^{x+1}}$ converge par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente.

   b) On pose $u=t^x$, avec $\mathrm{d}u=xtx-1\,\mathrm{d}t$. Pour trouver les bornes, on a $1^x=1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}t^x=+\infty$.

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int_1^{+\infty}\frac{1}{t+t^{x+1}}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_1^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{t^x+t^{2x}}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_1^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{t^x(1+t^x)}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)}$$

c) Pour tout $u>0$, $\dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{1+u}=\dfrac{1+u-u}{u(1+u)}=\dfrac{1}{u(1+u)}$. Pour tout $A>0$ on a :

$$\begin{aligned}\int_1^A\frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)} &= \int_1^A\frac{\mathrm{d}u}{u}-\int_1^A\frac{\mathrm{d}u}{1+u}\\ &= \ln(A)-\ln(1)-\ln(A+1)+\ln(2)\\ &= \ln(2)-\ln\left(1+\frac{1}{A}\right)\\ &\xrightarrow[A\to+\infty]{} \ln(2)\end{aligned}$$

donc $g(x)=\dfrac{\ln(2)}{x}$.

d) Pour tout $x>0$ et pour tout $t\in[1;+\infty[$ on a $1+t+t^{x+1}\geq t+t^{x+1}$ donc $\dfrac{1}{1+t+t^{x+1}}\leq\dfrac{1}{t+t^{x+1}}$ donc en intégrant cette inégalité sur $[1;+\infty[$ on obtient $f(x)\leq g(x)$. Enfin, f est positive comme intégrale d'une fonction positive donc $0\leq f(x)\leq\dfrac{\ln(2)}{x}$.

e) Soit $x>0$. On a $g(x)-f(x)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t+t^{x+1}}-\frac{1}{1+t+t^{x+1}}\right)\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+t^{x+1})(1+t+t^{x+1})}$.
En développant le dénominateur, on trouve $(t+t^{x+1})(1+t+t^{x+1})\geq t^{2x+2}$ ce qui permet de majorer l'intégrale précédente et d'obtenir :

$$\begin{aligned}g(x)-f(x) &\leq \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{2x+2}}\\ &\leq \left[\frac{-t^{-(2x+1)}}{2x+1}\right]_1^{+\infty}\\ &\leq \frac{1}{2x+1}\end{aligned}$$

donc finalement $0\leq g(x)-f(x)\leq\dfrac{1}{2x+1}$ ce qui est le résultat voulu.

f) L'inégalité de la question 5.a et le fait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 2}{x}=0$ donne par encadrement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

L'inégalité de la question 5.b donne $\dfrac{\ln 2}{x}-\dfrac{1}{2x+1}\leq f(x)$ donc $1-\dfrac{x}{\ln(2)(2x+1)}\leq\dfrac{xf(x)}{\ln(2)}$ et l'inégalité de la question 5.a donne $\dfrac{xf(x)}{\ln(2)}\leq 1$.
Puisque $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(1-\frac{x}{\ln(2)(2x+1)}\right)=1$ on a par encadrement $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{xf(x)}{\ln(2)}=1$ donc $f(x)\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{\ln 2}{x}$.

Correction de l'exercice 3 :

1) X compte le nombre de succès dans la répétition de 10 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de succès : « le client achète un article » avec probabilité de succès p. X suit donc une loi binomiale de paramètres $(10,p)$.
Dans le cas général (n répétitions), $\mathbb{E}[X]=np$ et $V(X)=np(1-p)$ donc ici $\mathbb{E}[X]=10p$ et $V(X)=10p(1-p)$.

2) Y est le rang du premier succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p, donc Y suit une loi géométrique de paramètre p.
$\mathbb{E}[Y]=\dfrac{1}{p}$ et $V(Y)=\dfrac{1-p}{p^2}$.

3) a) Supposons que $N=n$, alors S suit une loi binomiale de paramètre (n,p). Si $k\in\mathbb{N}$ avec $k\leq n$, alors la probabilité de $(S=k)$ sachant que $(N=n)$ est réalisé est $\mathbb{P}(S=k\mid N=n)=\binom{n}{k}x^k(1-p)^{n-k}$. Si $k>n$, alors $\mathbb{P}(S=k\mid N=n)=0$.

b) On en déduit que pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}^2$, si $k\le n$ alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N=n,S=k)&=\mathbb{P}(N=n)\times\mathbb{P}(S=k\mid N=n)\\&=\mathrm{e}^{-\lambda}\times\frac{\lambda^n}{n!}\times\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\end{aligned}$$

c) La famille $(N=n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S=k)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n,S=k)\\&=\sum_{n=k}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\times\frac{\lambda^n}{n!}\times\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} &&\text{car } \mathbb{P}(N=n,S=k)=0 \text{ pour } k>n\\&=\mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^kp^k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-k}(1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!}\\&=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}\\&=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}(\lambda p)^k\,\mathrm{e}^{\lambda-\lambda p}}{k!}\\&=\mathrm{e}^{-\lambda p}\,\frac{(\lambda p)^k}{k!}\end{aligned}$$

donc S suit une loi de Poisson de paramètre λp.

Correction de l'exercice 4 : X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ donc $X+Y$ est à valeurs dans $[\![2;+\infty[\![$.
Soit $k\in[\![2;+\infty[\![$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=k)&=\sum_{\substack{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2\\i+j=k}}\mathbb{P}(X=i,Y=j)\\&=\sum_{i=1}^{k-1}\mathbb{P}(X=i,Y=k-i)\\&=\sum_{i=1}^{k-1}\mathbb{P}(X=i)\times\mathbb{P}(Y=k-i) &&\text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}\\&=\sum_{i=1}^{k-1}p(1-p)^{i-1}\times p(1-p)^{k-i-1}\\&=\sum_{i=1}^{k-1}p^2(1-p)^{k-2}\\&=(k-1)p^2(1-p)^{k-2}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5 :

1) Pour tout entier $k\in\mathbb{N}^*$, on a l'union disjointe $(X>k-1)=(X>k)\cup(X=k)$ donc $\mathbb{P}(X>k-1)-\mathbb{P}(X>k)=\mathbb{P}(X=k)$.
Pour $k=0$, on a $k\mathbb{P}(X=k)=0$. Ainsi, on peut écrire

$$\sum_{k=0}^{n}k\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{n}k(\mathbb{P}(X>k-1)-\mathbb{P}(X>k))$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X > k-1) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X > k) \\
&= \sum_{k'=0}^{n-1} (k'+1)\mathbb{P}(X > k') - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X > k) && \text{changement d'indice } k' = k-1 \\
&= \sum_{k'=0}^{n-1} (k'+1)\mathbb{P}(X > k') - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X > k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k'+1-k)\mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)
\end{aligned}
$$

2) Supposons que la série $\sum_{k\geq 0}\mathbb{P}(X > k)$ converge. Il existe donc un réel $M \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X > k) \leq M$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) \leq \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X > k) \leq M$ donc $\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k)$ est majoré par M. C'est une série à terme positifs majorée donc elle converge, donc X admet une espérance.
Réciproquement, supposons que X admette une espérance et montrons que $\sum_{k\geq 0}\mathbb{P}(X > k)$ converge. Puisque X admet une espérance, la série $\sum_{k\geq 0} k\mathbb{P}(X = k)$ converge.
D'après l'égalité établie à la question précédente, il suffit de montrer que $(n\mathbb{P}(X > n))$ converge.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$
\begin{aligned}
n\mathbb{P}(X > n) &= n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = k) \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) && \text{car } \forall k \geq n+1,\ n \leq k-1 \leq k
\end{aligned}
$$

Or, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X] = 0$.
Ainsi, $n\mathbb{P}(X > n)$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} n\mathbb{P}(X > n) = 0$. On en déduit que $\sum_{k\geq 0}\mathbb{P}(X > k)$ converge.

3) Notons X_i le résultat du i-ème tirage avec $1 \leq i \leq p$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \leq k) = \mathbb{P}(X_1 \leq k, X_2 \leq k, \dots, X_p \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p$ puisque les p tirages sont indépendants et suivent chacun une loi uniforme.
On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, on a $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1) = \begin{cases} \left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p & \text{si } k \geq 2 \\ \left(\frac{1}{n}\right)^p & \text{si } k = 1 \end{cases}$

4) On en déduit que $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X > k)$ d'après la question 1.
Ainsi

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \mathbb{P}(X \leq k)) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^p\right) \\
&= n - \frac{1}{n^p}\sum_{k=0}^{n-1} k^p
\end{aligned}
$$

Correction de l'exercice 6 :

1) X_n suit une loi binomiale de paramètres (n,p). $\mathbb{E}[X] = np$ et $V(X) = np(1-p)$.
2) Soit $\varepsilon > 0$. X_n admet une variance donc $\dfrac{X_n}{n}$ aussi et d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on a
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - \mathbb{E}\left[\frac{X_n}{n}\right]\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V\left(\frac{X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}$$
Or, $\mathbb{E}\left[\dfrac{X_n}{n}\right] = \dfrac{1}{n}\mathbb{E}[X_n] = \dfrac{np}{n} = p$ et $V\left(\dfrac{X_n}{n}\right) = \dfrac{V(X_n)}{n^2} = \dfrac{np(1-p)}{n^2} = \dfrac{p(1-p)}{n}$.
Ainsi, on obtient
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$
Enfin, la fonction $x \mapsto x(1-x)$ atteint son maximum sur $[0;1]$ en $x = \dfrac{1}{2}$ (c'est un polynôme de degré 2 dont les racines sont 0 et 1) et ce maximum vaut $\dfrac{1}{4}$. On en déduit que $\forall p \in [0;1],\ p(1-p) \leq \dfrac{1}{4}$ et on en conclut finalement
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$
3) Pour que $\dfrac{X_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure à 95%, il faut poser $\varepsilon = 10^{-2}$ et chercher n tel que $\dfrac{1}{4n\varepsilon^2} < 0,05$, car ainsi on aura $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 0,95$
On résout $\dfrac{1}{4n\varepsilon^2} < 0,05$ et on trouve $n > \dfrac{1}{4 \times 0,05 \times 10^{-4}}$ donc $n > \dfrac{10^4}{0,2}$ c'est à dire $n > 50000$.

Correction de l'exercice 8 :

1) Si U et V suivent la loi uniforme sur $\{1,2,\dots,6\}$, on a $\mathbb{P}(U+V=2) = \mathbb{P}(U=1, V=1) = \mathbb{P}(U=1)\mathbb{P}(V=1) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{36}$ par indépendance de U et V.
Si S suivait la loi uniforme sur $\{2,3,\dots 12\}$ on devrait avoir $\mathbb{P}(U+V=2) = \dfrac{1}{11}$.
2) D'après la formule de transfert, $\mathbb{P}(x) = \mathbb{E}[x^S] = \sum_{k=2}^{12} x^k \mathbb{P}(S=k) = \sum_{k=2}^{12} \dfrac{1}{11} \times x^k = \dfrac{1}{11}(x^2 + x^3 + \dots + x^12)$
3) On a $\mathbb{E}[x^S] = \mathbb{E}[x^{U+V}] = \mathbb{E}[x^U \times x^V]$. Or U et V sont indépendantes donc x^U et x^V sont indépendantes, on en déduit que $\mathbb{E}[x^U \times x^V] = \mathbb{E}[x^U] \cdot \mathbb{E}[x^V]$ d'où le résultat.
4) Soit P un polynôme à coefficient réel de degré impair n. Alors il existe une famille de réels $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
Ainsi, $P(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n x^n$ et $P(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} a_n x^n$.
Si $a_n > 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$, et si $a_n < 0$ c'est l'inverse.
Dans tous les cas, P est une fonction continue dont les limites aux bornes sont $-\infty$ et $+\infty$. Puisque $0 \in]\lim\limits_{x\to-\infty} P(x); \lim\limits_{x\to+\infty} P(x)$ on en déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires que $P(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
5) On a $P(x) = \dfrac{1}{11}(x^2 + x^3 + \dots + x^{12}) = \dfrac{x^2}{11}(1 + x + x^2 + \dots + x^{10}) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{11} \times \dfrac{x^{11}-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$
Ainsi, $P(x) = 0 \iff x^2 = 0$ car la seule racine de $x^{11} - 1$ est $x = 1$, mais $P(1) = 1 \neq 0$. La seule racine de P est donc 0.
De plus, $\mathbb{E}[x^U]$ et $\mathbb{E}[x^V]$ sont aussi des polynômes en x de degré 6 : $\mathbb{E}[x^U] = \sum_{k=1}^{6} x^k \mathbb{P}(U=k)$ et $\mathbb{E}[x^V] = \sum_{k=1}^{6} x^k \mathbb{P}(V=k)$ d'où
$$\mathbb{E}[x^U] \cdot \mathbb{E}[x^V] = \left(\sum_{k=1}^{6} x^k \mathbb{P}(U=k)\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{6} x^k \mathbb{P}(V=k)\right) = x^2 \sum_{k=0}^{5} x^k \mathbb{P}(U=k+1) \times \sum_{k=0}^{5} x^k \mathbb{P}(V=k+1)$$
Notons $Q(x) = \sum_{k=0}^{5} x^k \mathbb{P}(U=k+1)$ et $R(x) = \sum_{k=0}^{5} x^k \mathbb{P}(V=k+1)$. Q et R sont des polynômes de degré pairs donc ils ont chacun une racine **non nulle** car $Q(0) = \mathbb{P}(U=1) \neq 0$ et $R(0) = \mathbb{P}(V=1) \neq 0$.
D'après la question 3, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $P(x) = Q(x) \cdot R(x)$, donc P devrait avoir au moins une racine non nulle, contradiction.
On en déduit qu'il est impossible de truquer deux dés de sorte que la somme des dés suive une loi uniforme sur $\{2,3,\dots,12\}$.

Correction de l'exercice 9 :

1) Pour tout $p \in [0,1]$, $f_1(p) = \mathbb{P}(X_1 \leq \frac{1}{2}) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - p$
$f_2(p) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 \leq 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 \leq 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = 1 - p + p(1-p) = 1 - p^2$
$f_3(p) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 \leq \frac{3}{2}) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 \leq 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 + X_3 \leq 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0) = pf_2(p) + p(1-p)^2$
$f_4(p) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 2) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 + X_3 + X_4 \leq 2) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 + X_3 + X_4 \leq 1) = (1-p)(\mathbb{P}(X_2 = 0, X_3 + X_4 \leq 2) + \mathbb{P}(X_2 = 1, X_3 + X_4 \leq 1)) + pf_3(p) = (1-p)((1-p) + pf_2(p)) + pf_3(p)$

2) On peut écrire l'événement $(X_1 + \cdots + X_n \leq n/2)$ comme une réunion fini d'événements disjoints :

$$(X_1 + \cdots + X_n \leq n/2) = \bigcup_{\substack{(i_1,\ldots,i_n) \in \{0,1\}^n \\ i_1 + \cdots + i_n \leq n/2}} (X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots, X_n = i_n)$$

et la probabilité de chaque événement dans cette union est un polynôme en p :

$$\forall (i_1, \ldots, i_n) \in \{\{0,1\}^n \mid i_1 + \cdots + i_n \leq n/2\} \quad \mathbb{P}(X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = p^{i_1 + \cdots + i_n}(1-p)^{n - i_1 - \cdots - i_n}$$

donc $f_n(p) = \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leq n/2) = \displaystyle\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_n) \in \{0,1\}^n \\ i_1 + \cdots + i_n \leq n/2}} p^{i_1 + \cdots + i_n}(1-p)^{n - i_1 - \cdots - i_n}$, c'est donc un polynôme de degré $\leq n$.

3) On a $V(\overline{X_n}) = \dfrac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \dfrac{np(1-p)}{n^2} = \dfrac{p(1-p)}{n}$ et d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on a :

$$\mathbb{P}(|\overline{X_n} - E(X_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\overline{X_n}}{\varepsilon} \leq \frac{p(1-p)}{n}$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|\overline{X_n} - E(X_n)| \geq \varepsilon) = 0$ par comparaison.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in [0,1]$ on a $E(X_1) = p$. On distingue deux cas selon que $p > \dfrac{1}{2}$ ou $p < \dfrac{1}{2}$.

— Si $p < \dfrac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} f_n(p) &= \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leq n/2) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \leq \frac{1}{2}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - p \leq \frac{1}{2} - p\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - E(X_1)\right| \leq \frac{1}{2} - p\right) \end{aligned}$$

or $\dfrac{1}{2} - p > 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - p\right| \leq \dfrac{1}{2} - p\right) = 1$ d'après la loi faible des grands nombres.
Comme $f_n(p) \leq 1$ on en déduit par encadrement que $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(p) = 1$.

— Si $p > \dfrac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} f_n(p) &= \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \leq \frac{1}{2}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(-\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \geq -\frac{1}{2}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(p - \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \geq p - \frac{1}{2}\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\left|p - \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right| \geq p - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-p\right| \geq p-\frac{1}{2}\right)$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-p\right| \geq p-\frac{1}{2}\right)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(p)=0$ par encadrement.