⋆
Exercice 1

Soit E un espace vectoriel, soient F et G deux sous espaces vectoriels de E et soient $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de F et $\mathcal{G} = (g_1, g_2, \dots, g_r)$ une base de G.
Montrer que F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_r)$ est une base de E.

⋆
Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E. on pose $q = \mathrm{Id} - p$.

1) Montrer que q est un projecteur.
2) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(q)$.
3) Montrer que $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(p)$.

⋆
Exercice 3

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$

1) Montrer que $E_1 = \{(a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 1)\right)$ et $E_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\right\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$
2) On considère la projection sur E_2 parallèlement à E_1, c'est à dire le projecteur $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\mathrm{Im}(p) = E_2$ et $\mathrm{Ker}(p) = E_1$. Déterminer la matrice A de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3) Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et son inverse P^{-1} telles que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

⋆
Exercice 4

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & -a \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1) Pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice A est-elle la matrice d'un projecteur ?
2) Déterminer alors les sous espaces caractéristiques $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ de ce projecteur.
3) Déterminer une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et son inverse P^{-1} telles que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

⋆ ⋆
Exercice 5

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1) Montrer qu'il y a équivalence entre les trois propositions suivantes :
   (i) $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$
   (ii) $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$
   (iii) $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$

   Indication : on pourra montrer (i) $\Leftrightarrow$ (ii), (i) $\Rightarrow$ (iii) et (iii) $\Rightarrow$ (ii)
2) Un endomorphisme vérifiant les propositions ci-dessus est-il nécessairement un projecteur ?

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 6

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec $n \geq 2$.

1) $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel strict de E puis déterminer un supplémentaire de F dans E.
2) Même question avec $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = P(2) = 0$.
3) Généraliser à $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(x_1) = P(x_2) = \cdots = P(x_k) = 0\}$ avec $1 \leq k \leq n$ et $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ des réels distincts.

⋆ ⋆
Exercice 7

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E, et q un projecteur de E.
Montrer que F est stable par q si et seulement si $F = (F \cap \mathrm{Ker}(q)) \oplus (F \cap \mathrm{Im}(q))$.

⋆ ⋆
Exercice 8

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, p un projecteur de E et u un endomorphisme de E. Montrer que p et u commutent si et seulement si $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u.

⋆ ⋆
Exercice 9

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], R)$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On admet que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension infinie). Soit $F = \left\{ f \in E \middle| \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ et $G = \left\{ f \in E \mid f \text{ est constante} \right\}$.

1) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
2) Soit p la projection sur F parallèlement à G. Que vaut $p(f)$ pour $f \in E$?

⋆ ⋆
Exercice 10

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs.

1) Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$
2) Montrer que si $p + q$ est un projecteur, $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 11

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont en somme directe.
2) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont supplémentaires dans E.
3) On pose $E = \mathbb{R}_n[x]$, $F = \mathbb{R}_{n-1}[x]$. On pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{n-1}[x] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-1}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[x] \\ P & \longmapsto & \left(x \mapsto \int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t\right) \end{array}$$

Vérifier que f et g satisfont les conditions de l'énoncé.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 12

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p)$.
2) Montrer par récurrence que si $F_1, F_2, \dots, F_n$ est une famille de sous espaces vectoriels de E on a

$$\dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_n) \leq \dim(F_1) + \dim(F_2) + \cdots + \dim(F_n)$$

avec égalité si et seulement si $F_1, F_2, \dots, F_n$ sont en somme directe.
3) Soit $p_1, p_2, \dots, p_n$ une famille de projecteurs. Montrer que $p = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ est un projecteur si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$.
Indication : commencer par montrer que si p est un projecteur alors $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \mathrm{Im}(p_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(p_n)$.

Le coin des Khûbes

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 13

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$
(ii) $u^2 = 0$ et $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(E)/2$
(iii) $u^2 = 0$ et il existe un endomorphisme v tel que $u \circ v + v \circ u = \mathrm{Id}_E$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 14

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. On dit qu'une matrice $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un pseudo-inverse de A lorsque les trois égalités suivantes sont satisfaites :

$$AA' = A'A \qquad (i)$$

$$A = AA'A \qquad (ii)$$

$$A' = A'AA' \qquad (iii)$$

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé.

1) Supposons que A admette un pseudo-inverse. Montrer qu'alors $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(a^2)$.
2) Réciproquement, supposons dans cette question que $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(a^2)$. On note r le rang de a.
   a) Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(a) \oplus \mathrm{Ker}(a)$
   b) Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ avec B inversible et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telles que $A = P \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$
   c) Montrer que A admet au moins un pseudo-inverse.
3) On suppose que A admet un pseudo inverse A' et on note a' l'endomorphisme canoniquement associé à A'. On garde les matrices B et P de la question précédente.
   a) Montrer que $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$ sont stables par a' et montrer qu'il existe $D \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ telle que $A' = P \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.
   b) Montrer que aa' est un projecteur dont on précisera le noyau et l'image en fonction de ceux de a. Préciser ce que vaut $P^{-1}(AA')P$.
   c) Montrer que A admet au plus un pseudo-inverse.