

I. Fonctions réelles de la variable réelle

Définition 7.1

Une **fonction réelle de la variable réelle** est une application $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ où $D_f \subset \mathbb{R}$. L'ensemble D_f est appelé **domaine de définition de f** .

1. Vocabulaire

a. Graphe

Définition 7.2

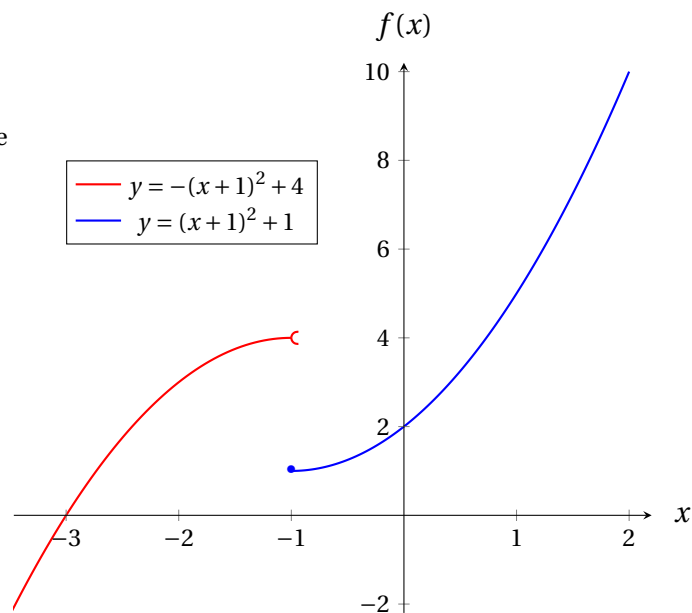
Soit f une fonction réelle définie sur D_f . On appelle **graphe de f** l'ensemble $\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$. Cet ensemble est une partie de \mathbb{R}^2 , on peut donc le représenter dans un plan muni d'un repère.

Exemple 7.1

Considérons la fonction suivante :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} -(x+1)^2 + 4 & \text{si } x < -1 \\ (x+1)^2 + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

f est définie sur \mathbb{R} , une partie de son graphe est représentée ci-contre :



b. Variations

Définition 7.3

Soit c un réel fixé et $D \subset \mathbb{R}$. On appelle **fonction constante égale à c sur D** la fonction

$$\begin{array}{ccc} f : & D & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & c \end{array}$$

On appelle **fonction nulle** la fonction

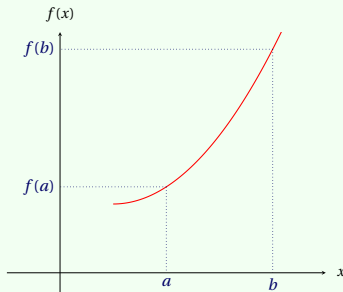
$$\begin{array}{ccc} f : & D & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}$$

c'est à dire la fonction constante égale à 0.

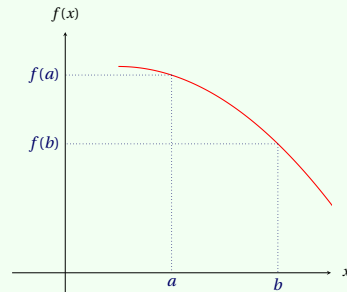
Définition 7.4

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un **intervalle** I . On dit que

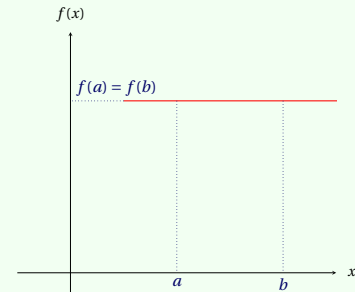
- f est **croissante** sur I si $\forall (a, b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$
- f est **décroissante** sur I si $\forall (a, b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$
- f est **constante** sur I si $\forall (a, b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) = f(b)$



Fonction croissante



Fonction décroissante



Fonction constante

On dit que f est **monotone** sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I .

c. Fonction périodique**Définition 7.5**

Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **périodique** s'il existe un réel $T \neq 0$ tel que pour tout réel $x \in D_f$ pour lequel $x + T \in D_f$ on a $f(x + T) = f(x)$. On dit alors que T est une **période** de f (ou que f est T -périodique).

Exemple 7.2

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π .

La fonction tangente est périodique de période π . En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

Remarque

Si f est T -périodique, alors f est aussi $2T$ -périodique, $3T$ -périodique, etc. La période d'une fonction périodique n'est donc pas unique.

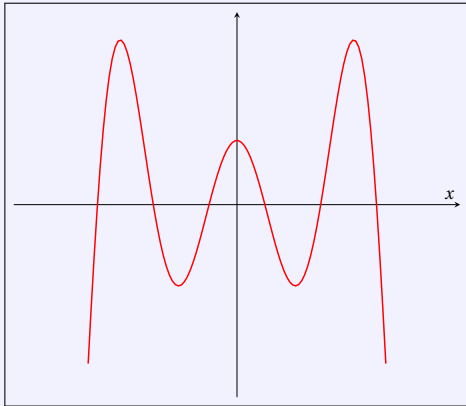
d. Parité**Définition 7.6**

Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ (on dit que D_f est symétrique par rapport à 0).

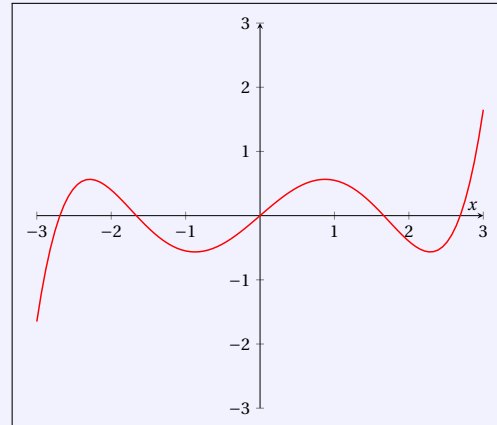
- On dit que f est **paire** si $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$
- On dit que f est **impaire** si $\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x)$.

Propriété 7.1

- La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. En effet, si $(x, f(x)) \in \mathcal{C}_f$, alors $(-x, f(-x)) = (-x, f(x))$ est un point de \mathcal{C}_f . Ces deux points sont bien symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
- De même, la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Fonction paire



Fonction impaire

Remarque

Si f est paire, alors $f(0) = 0$. En effet, il faut avoir $f(-0) = -f(0)$ donc $f(0) = -f(0)$ d'où $2f(0) = 0$ et finalement $f(0) = 0$.

Exemple 7.3

Quelques fonctions paires :

- $x \mapsto x^n$ lorsque $n \in \mathbb{Z}$ est pair (d'où le nom)
- $x \mapsto \cos x$

Quelques fonctions impaires :

- $x \mapsto x^n$ lorsque $n \in \mathbb{Z}$ est impair
- $x \mapsto \sin x$
- $x \mapsto \tan x$
- $x \mapsto \frac{1}{x}$

Propriété 7.2

La seule fonction à la fois paire et impaire sur un intervalle centrée en 0 est la fonction nulle $x \mapsto 0$.

e. Opérations**Définition 7.7**

Si f et g sont deux fonctions définies sur un même domaine D , on définit sur D les fonctions **somme** et **produit** de f et g , notées $f + g$ et $f \times g$, par

$$\forall x \in D, (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in D, (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

si de plus g ne s'annule pas sur D on peut définir la fonction quotient $\frac{f}{g}$ par

$$\forall x \in D, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

f. Majorant, minorant, extrema**Définition 7.8**

Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que

- f est **majorée** s'il existe un réel M tel que $\forall x \in D_f, f(x) \leq M$. On dit alors que M est un **majorant** de f
- f est **minorée** s'il existe un réel m tel que $\forall x \in D_f, f(x) \geq m$. On dit alors que m est un **minorant** de f .
- f est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.
- f admet un minimum sur D_f s'il existe un réel $a \in D_f$ tel que $\forall x \in D_f, f(x) \geq f(a)$. Le réel $m = f(a)$ s'appelle alors **minimum** de f sur D_f et on dit qu'il est **atteint en a** .
- f admet un maximum sur D_f s'il existe un réel $a \in D_f$ tel que $\forall x \in D_f, f(x) \leq f(a)$. Le réel $M = f(a)$ s'appelle alors **maximum** de f sur D_f et on dit qu'il est **atteint en a** .
- On appelle **extremum** un minimum ou un maximum. .

2. Fonctions de référence

L'allure des graphes des fonctions suivantes doit être connu. Connaître le graphe peut souvent aider à comprendre comment résoudre un problème, ou à se souvenir des limites usuelles.

a. Fonctions affines et affines par morceaux

Définition 7.9

Une fonction affine est une fonction polynôme de degré au plus 1, c'est à dire une fonction de la forme $f : x \mapsto ax + b$ où a et b sont des réels fixés.

Sa courbe représentative est une droite d'équation réduite $y = ax + b$. a est le **coefficient directeur** de cette droite et b est son **ordonnée à l'origine**.

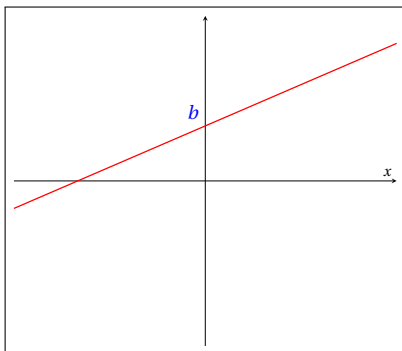
Définition 7.10

On dit qu'une fonction $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ est **affine par morceaux** s'il existe une suite d'intervalles deux à deux disjoints $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} I_n = D_f$ et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f|_{I_n}$ est une fonction affine.

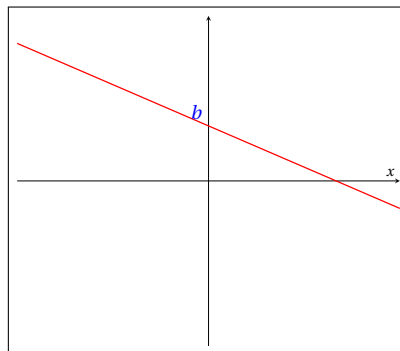
Exemple 7.4

- La fonction valeur absolue est affine par morceau. Sa restriction à $] -\infty; 0[$ est la fonction $x \mapsto -x$ et sa restriction à $[0; +\infty[$ est $x \mapsto x$.
- La fonction **partie entière**, qui à un réel x associe l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$, est affine par morceaux. Sa restriction à chaque intervalle de la forme $[n, n+1[$ est constante (donc affine).

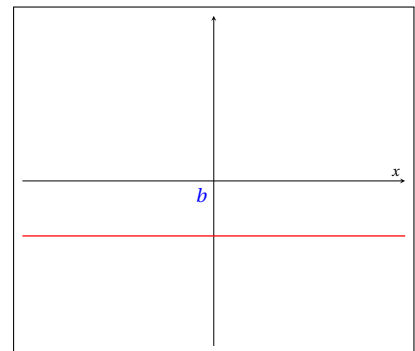
b. Courbe représentative d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$



$a > 0$

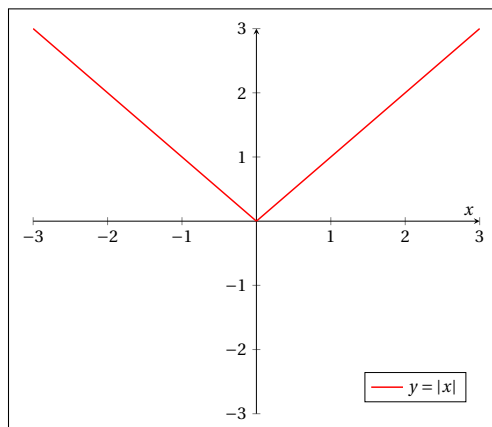


$a < 0$

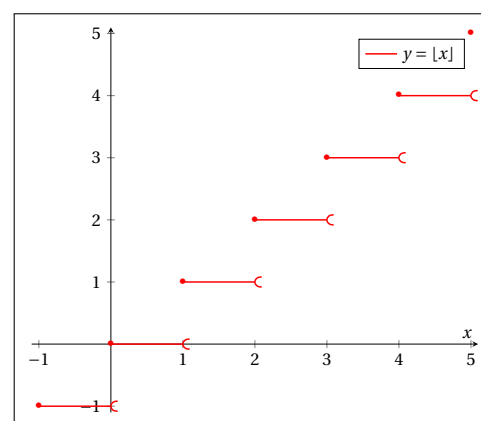


$a = 0$

c. Courbe représentative de la fonction valeur absolue et de la fonction partie entière



Fonction $x \mapsto |x|$



Fonction $x \mapsto [x]$

d. Fonction polynôme de degré 2

Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction de la forme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Définition 7.11

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme de degré 2. On appelle **discriminant de f** le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$

On rappelle les deux propriétés suivantes :

Propriété 7.3

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme de degré 2. Alors

- Si $a > 0$, f est décroissante sur $]-\infty; \frac{-b}{2a}[$ et croissante sur $]\frac{-b}{2a}; +\infty[$.
- Si $a < 0$, f est croissante sur $]-\infty; \frac{-b}{2a}[$ et décroissante sur $]\frac{-b}{2a}; +\infty[$.

Propriété 7.4

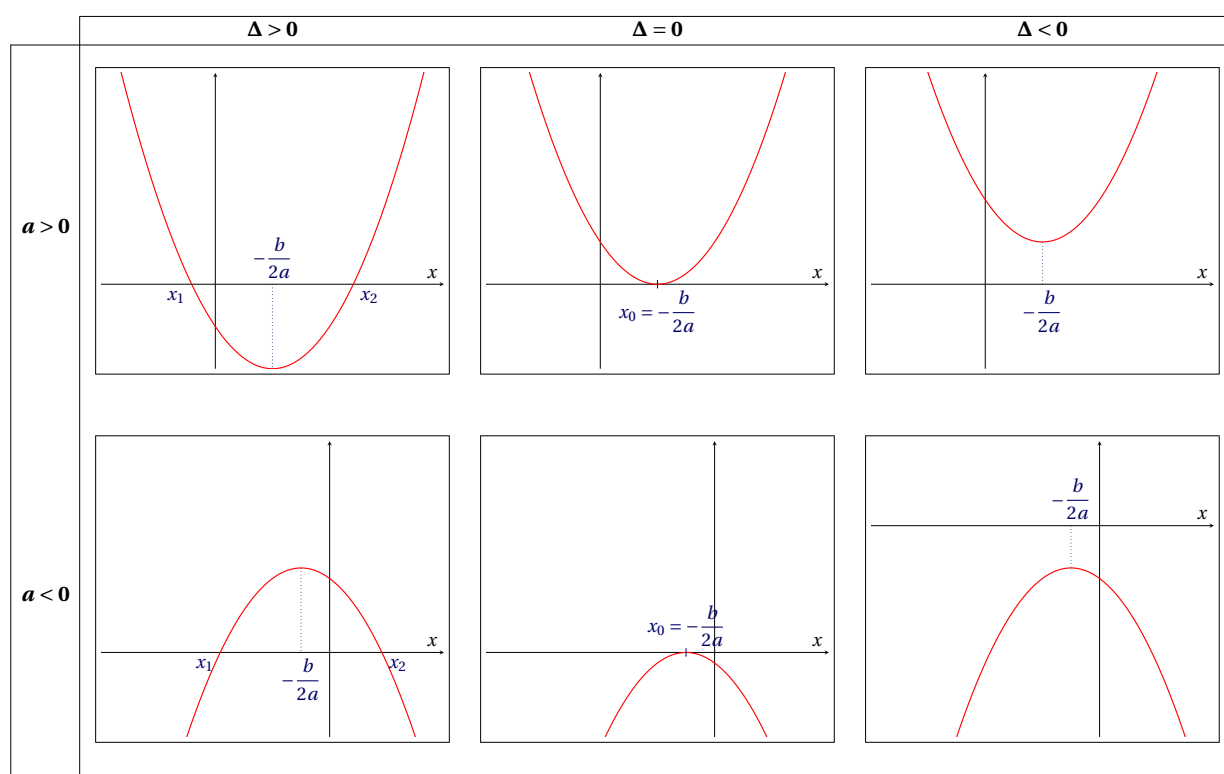
- Si $\Delta > 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions réelles, notées x_1 et x_2 et données par

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

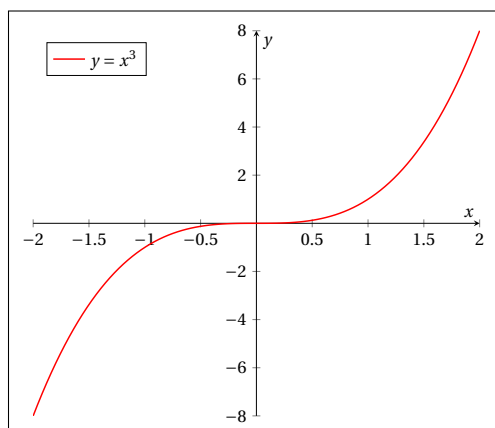
- Si $\Delta = 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle, notée x_0 et donnée par

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

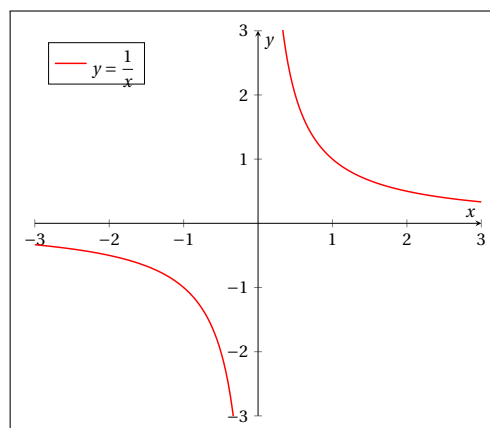
- Si $\Delta < 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution réelle.

e. Courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2

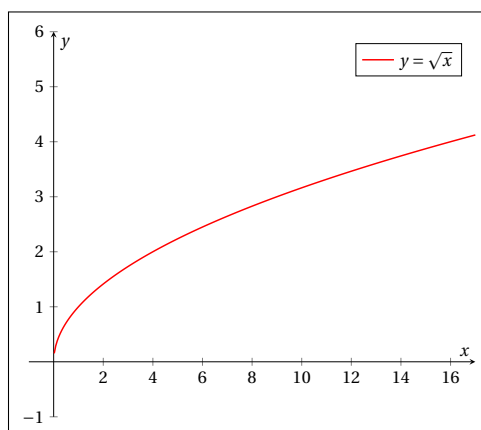
f. Fonctions cube, inverse, racine carrée, racine cubique



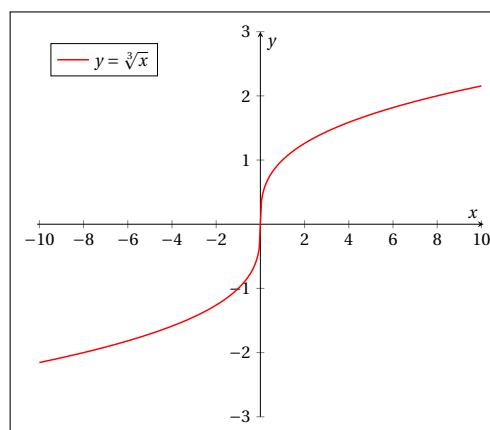
Fonction $x \mapsto x^3$ définie sur \mathbb{R}



Fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur \mathbb{R}^*



Fonction $x \mapsto \sqrt{x} = x^{1/2}$ définie sur $[0; +\infty[$



Fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ définie sur \mathbb{R}

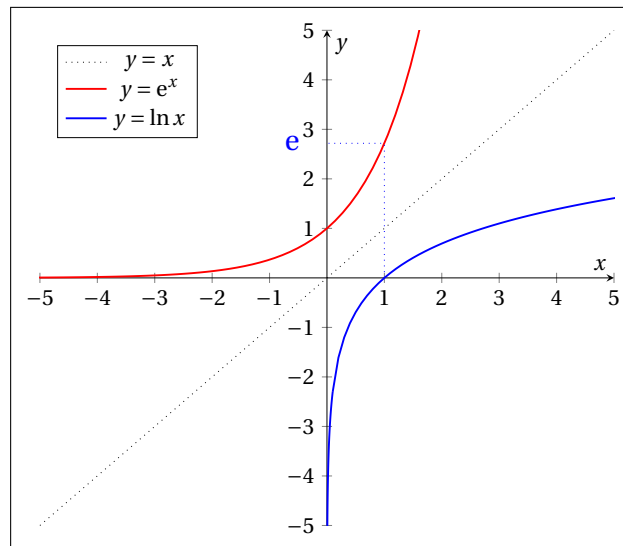
g. Fonctions exponentielle et logarithme

Définition 7.12

La fonction logarithme naturel, notée \ln , est l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ s'annulant en 1. La fonction logarithme naturel réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers \mathbb{R} . La fonction exponentielle, notée \exp , est définie comme étant l'application réciproque de \ln .

Ainsi, on a

- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\exp(x)) = x$
- $\forall x \in]0, +\infty[, \exp(\ln(x)) = x$



Fonction $x \mapsto e^x$ définie sur \mathbb{R}
Fonction $x \mapsto \ln x$ définie sur $]0; +\infty[$

Propriété 7.5 (Propriétés analytiques de la fonction exponentielle)

- $x \mapsto e^x$ est dérivable et $(e^x)' = e^x$
- $e^0 = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$
- $x \mapsto e^x$ est strictement croissante
- $e^x = 1 \iff x = 0$
- $e^x > 1 \iff x > 0$
- $e^x < 1 \iff x < 0$

Propriété 7.6 (Propriétés algébriques de la fonction exponentielle)

- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, e^{a+b} = e^a e^b$
- $\forall a \in \mathbb{R}, e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (e^a)^n = e^{na}$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{e^a} = e^{a/2}$

Définition 7.13

Si $(a, b) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, on définit a^b par :

$$a^b = e^{b \ln(a)}$$

Ainsi, la dernière propriété peut se généraliser en $\forall (a, b) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, (e^a)^b = e^{ab}$.

Propriétés 7.7 (Propriétés analytiques de la fonction logarithme)

- $x \mapsto \ln x$ est dérivable et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $\ln(1) = 0$
- $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln x = 0 \iff x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln x > 0 \iff x > 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln x < 0 \iff x < 1$

Propriétés 7.8 (Propriétés algébriques de la fonction logarithme)

- $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{Z}, \ln(a^n) = n \ln a$
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

→ Exercice de cours n° 1.

→ Exercice de cours n° 2.

→ Exercice de cours n° 3.

Définition 7.14

Soit $b > 0$ un réel tel que $b \neq 1$. Le logarithme en base b est l'application qui à un réel x strictement positif associe l'unique réel y tel que $b^y = x$. On la note \log_b .

Remarque

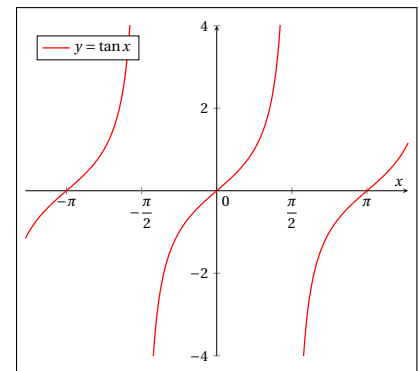
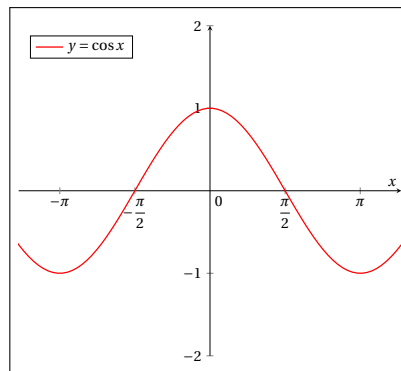
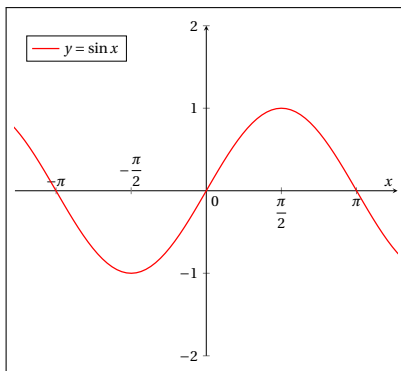
On a $b^y = x \iff e^{y \ln(b)} = x \iff y \ln(b) = \ln(x) \iff y = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$ car $b \neq 1$ donc $\ln(b) \neq 0$.

Ainsi, pour tout $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, on a $\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$

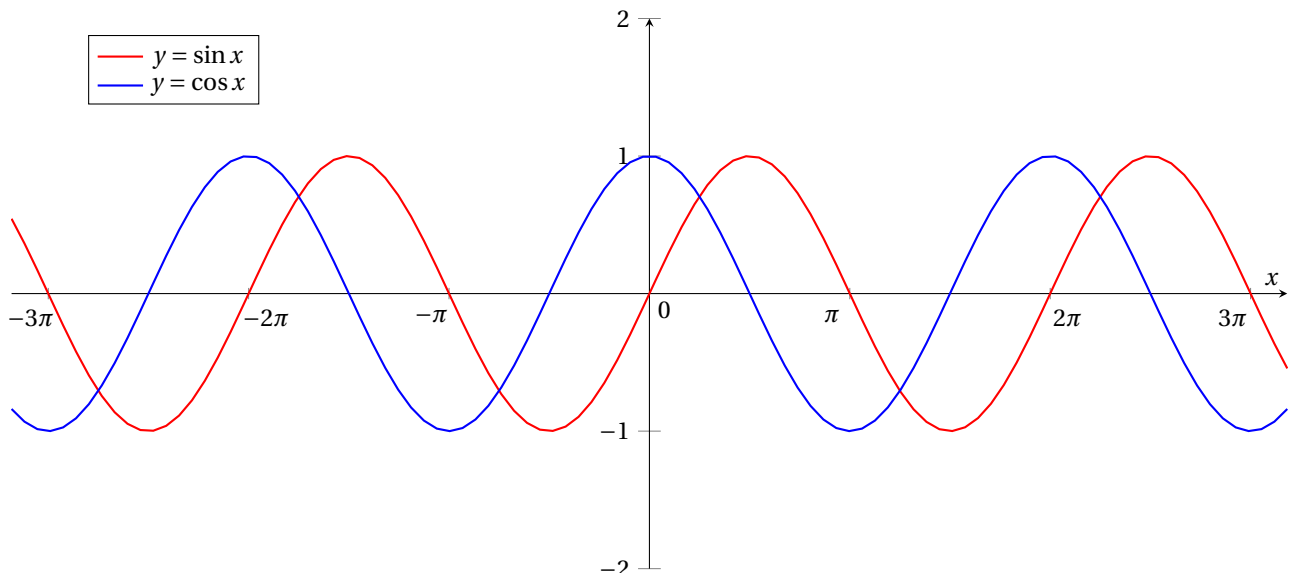
Propriété 7.9

Quelle que soit la base b , le logarithme en base b vérifie les mêmes propriétés algébriques que le logarithme naturel.

h. Fonctions trigonométriques



Sinus et cosinus ensemble :



3. Fonctions polynômes de degré n

Définition 7.15

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle **polynôme à coefficients réels de degré n** une expression $P(X)$ de la forme

$$P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

où $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $a_n \neq 0$ et où X désigne une **indéterminée**. Si l'indéterminée est une variable réelle x , alors P définit une fonction réelle de la variable réelle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

Une telle fonction est une **fonction polynôme de degré n** .

- Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, le réel a_k s'appelle **coefficient de degré k**
- le coefficient a_n s'appelle **coefficient dominant de P** .
- Si $a_n = 1$, on dit que P est un polynôme **unitaire**.
- On appelle **polynôme nul** le polynôme dont tous les coefficients sont nuls.
- On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n , et $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n .

Remarque

On distingue un **polynôme** et une **fonction polynôme** car l'indéterminée X peut être remplacée par différents objets mathématiques.

Par abus de langage on appelle parfois polynôme une fonction polynôme.

Définition 7.16

On note $\deg(P) = n$ si P est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Par convention, on pose $\deg(P) = -\infty$ si P est le polynôme nul.

Remarque

- La fonction associée au polynôme nul est la fonction nulle.
- Les fonctions polynômes de degré 0 sont les fonctions constantes.
- Les fonctions polynômes de degré 1 sont les fonctions affines.

Propriété 7.10

Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ une fonction polynôme de degré n (avec $a_n \neq 0$). Alors P est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$$

Remarque

Si P est une fonction polynôme de degré n , alors P' est une fonction polynôme de degré $n-1$.

Si on note $P^{(k)}$ la dérivée k -ième de P , alors $P^{(k)}$ est un polynôme de degré $n-k$. En particulier, $P^{(n)}$ est constant et $P^{(k)} = 0$ dès que $k > n$.

→ Exercice de cours n° 4.

Propriété 7.11

- Une fonction polynôme est la fonction nulle sur \mathbb{R} si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
- Deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si elles ont même degré et tous leurs coefficients sont égaux.

Propriété 7.12

Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels. Alors

- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$

- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$
- $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ si $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
- $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$

Définition 7.17

On appelle **racine** d'un polynôme P tout nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) = 0$.

Propriété 7.13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Pour tout réel λ ,

$$\lambda \text{ est une racine de } P \iff \text{il existe } Q \in \mathbb{R}_{n-1}[x] \text{ tel que } P(x) = (x - \lambda)Q(x).$$

→ Exercice de cours n°5.

Propriété 7.14

Une fonction polynôme de degré n non nulle admet au plus n racines distinctes. Autrement dit, le seul polynôme de degré inférieur ou égal à n qui admet $n + 1$ racines distinctes est le polynôme nul.

→ Exercice de cours n°6.

II. Limites

Dans toute cette section et sauf exception, D_f est une partie de \mathbb{R} et f est une fonction définie sur D_f à valeurs dans \mathbb{R} .

Intuitivement, on dira que « f a pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $a \in \overline{\mathbb{R}}$ » si les valeurs de $f(x)$ « s'approchent » de ℓ lorsque la valeur de x « s'approche » de a . Les définitions suivantes visent à donner un sens rigoureux au verbe « s'approcher ».

1. Limite en $+\infty$, limite en $-\infty$

a. Limite infinie

Définition 7.18

On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x > x_0 \Rightarrow f(x) > A$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Remarque

Sans changer le sens de cette définition, on peut lui ajouter quelques mots qui ne sont pas nécessaires du point de vue logique mais aident à la compréhension :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si quel que soit le réel A , **aussi grand soit-il**, il existe un réel x_0 **qui peut dépendre de** A tel que pour tout réel $x > x_0$ on a $f(x) > A$.

On définit de même les limites infinies en $\pm\infty$:

Définition 7.19

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x > x_0 \Rightarrow f(x) < A$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x < x_0 \Rightarrow f(x) > A$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x < x_0 \Rightarrow f(x) < A$

→ Exercice de cours n°7.

b. Limite finie

Définition 7.20

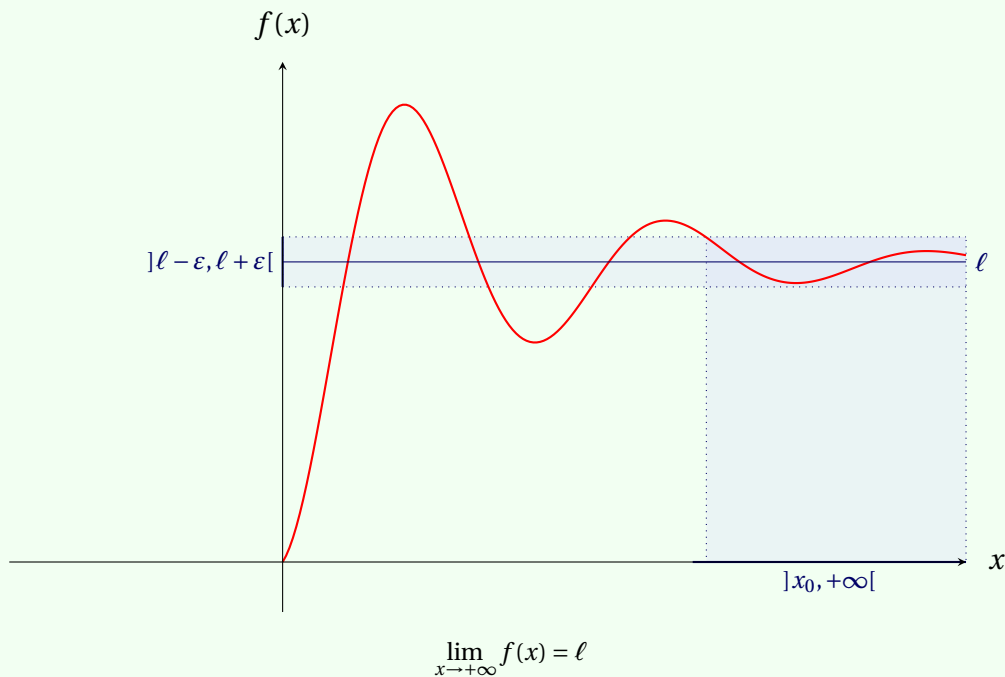
Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que f admet pour limite le réel ℓ en $+\infty$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x > x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

- f admet pour limite le réel ℓ en $-\infty$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$



Remarque

On rappelle que $|f(x) - \ell| < \varepsilon \iff f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$

Remarque

Sans changer le sens de cette définition, on peut la reformuler de la façon suivante :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ si pour tout réel ε strictement positif, **aussi petit soit-il**, il existe un réel x_0 **qui peut dépendre de ε** tel que pour tout $x > x_0$, la distance entre $f(x)$ et ℓ est inférieure à ε .

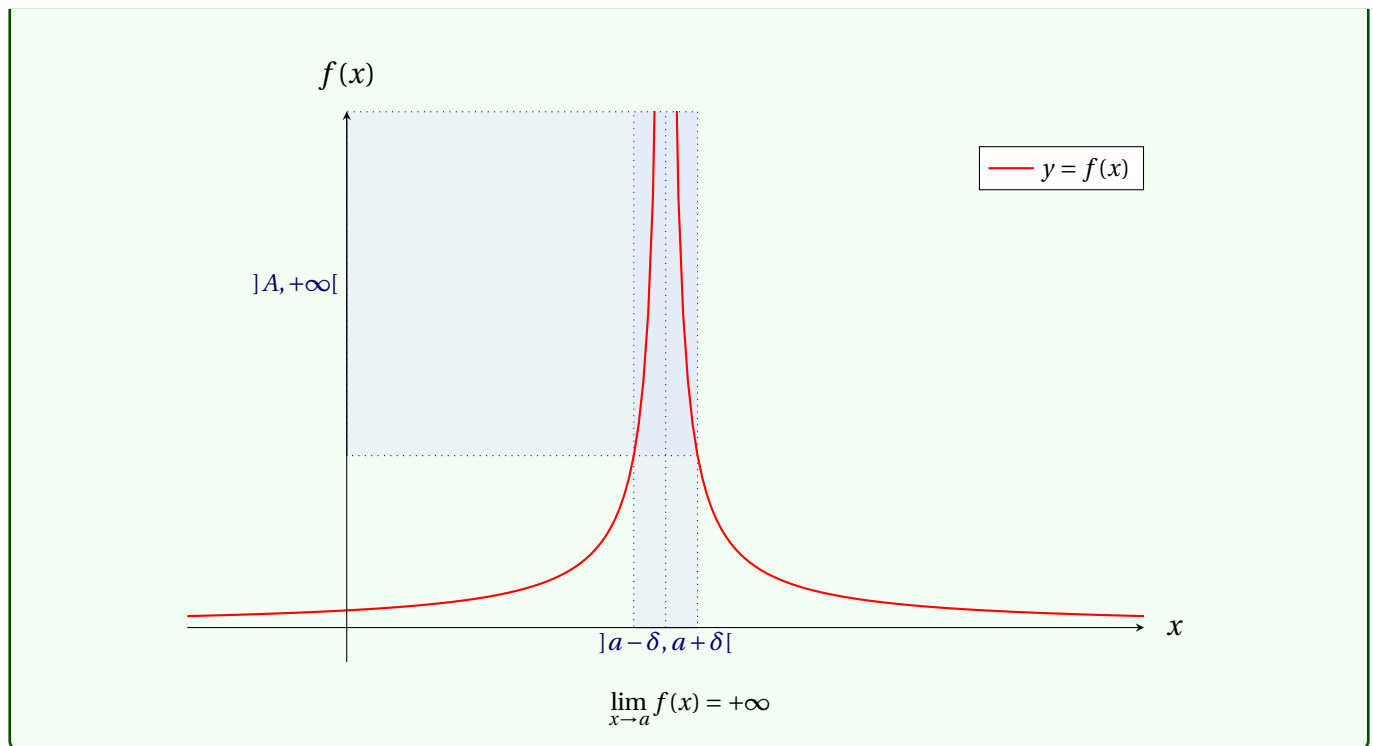
→ Exercice de cours n°8.

2. Limite en un réel a

Définition 7.21

f admet pour limite $+\infty$ en a , si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > A$$



On peut définir de même les autres types de limite en un réel a :

Définition 7.22

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < A$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Proposition 7.15 (Unicité de la limite)

Si f tend vers une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers un réel a , ou x tend vers $\pm\infty$, alors ℓ est unique.

3. Définition unifiée

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ la **droite réelle achevée**. On utilise cette notation **uniquement dans le cours** pour généraliser plus facilement des définitions et des propriétés sur les limites.

Les différentes définitions de limites vues dans les sections précédentes peuvent être synthétisé en une seule grâce à la notion de **voisinage**.

Définition 7.23

Un **voisinage** d'un réel a est un intervalle de la forme $]a - \delta, a + \delta[$ avec $\delta > 0$.

Un **voisinage** de $+\infty$ (respectivement de $-\infty$) est un intervalle de la forme $]A; +\infty[$ (respectivement de la forme $] -\infty, A[$ avec $A \in \mathbb{R}$).

Définition 7.24

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. f admet pour limite ℓ lorsque x tend vers a si pour tout voisinage V_ℓ de ℓ , il existe un voisinage V_a de a tel que $f(V_a) \subset V_\ell$ (autrement dit tel que $\forall x \in V_a, f(x) \in V_\ell$).

En adaptant la définition de voisinage selon la valeur réelle ou infinie de a et de ℓ , on retrouve dans cette définition toutes les définitions de limites précédentes.

4. Limites et monotonie

Proposition 7.16 (théorème de la limite monotone)

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone.

- Si f est croissante et majorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie en b .
- Si f est croissante et non majorée sur $]a, b[$, alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$
- Si f est croissante et minorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie en a
- Si f est croissante et non minorée sur $]a, b[$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Remarque

On a des propositions analogues lorsque f est décroissante sur $]a, b[$

Proposition 7.17

- Si f est croissante sur $]a, b[$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \ell$, alors $\forall x \in]a, b[, f(x) \leq \ell$.
- Si f est croissante sur $]a, b[$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, alors $\forall x \in]a, b[, \ell \leq f(x)$.
- Si f est décroissante sur $]a, b[$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \ell$, alors $\forall x \in]a, b[, f(x) \geq \ell$
- Si f est décroissante sur $]a, b[$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, alors $\forall x \in]a, b[, a \geq f(x)$.

5. Théorèmes de comparaison

Dans toute cette section, f, g et h sont trois fonctions définies dans un voisinage de a , avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 7.18 (passage à la limite dans une inégalité)

Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x dans un voisinage de a et que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$.

Remarque

Le passage à la limite dans une inégalité stricte donne une inégalité **large** :

$$\text{Si } V \text{ est un voisinage de } a, \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell' \\ \forall x \in V, f(x) < g(x) \end{array} \right. \Rightarrow \ell \leq \ell'$$

Proposition 7.19

Supposons que $f(x) \leq g(x)$ dans un voisinage de a .

- si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$
- si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

Théorème 7.20 des gendarmes

Supposons que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ dans un voisinage de a . Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$.

6. Limite à gauche, limite à droite

Définition 7.25

Limite à gauche

- On dit que f tend vers $+\infty$ à gauche en $a \in I$, et on note $\lim_{x \rightarrow a}^- f(x) = \lim_{x \rightarrow a}^- f(x) = +\infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, x \in]a - \delta, a[\Rightarrow f(x) > A$$

- On dit que f tend vers un réel ℓ à gauche en $a \in I$, et on note $\lim_{x \rightarrow a}^- f(x) = \lim_{x \rightarrow a}^- f(x) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, x \in]a - \delta, a[\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Limite à droite

- On dit que f tend vers $+\infty$ à droite en $a \in I$, et on note $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, x \in]a, a + \delta[\Rightarrow f(x) > A$$

- On dit que f tend vers un réel ℓ à droite en $a \in I$, et on note $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, x \in]a, a + \delta[\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Remarque

On définit de même $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$.

Exemple 7.5

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 3^+} \lfloor x \rfloor = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} \lfloor x \rfloor = 2$. En effet, pour tout $x \in]3 - \delta, 3[$ avec δ suffisamment petit, on a $\lfloor x \rfloor = 2$.

Proposition 7.21

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On a

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

7. Asymptotes**Définition 7.26**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

On dit que

- f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$ en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ (ou si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$)
- f admet une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$

Remarque

Graphiquement, une asymptote est une droite indiscernable de la courbe de f à l'infini.

Une fonction peut admettre au plus 2 asymptotes horizontales, mais une infinité d'asymptotes verticales

Exemple 7.6

- La fonction inverse admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 0$
- La fonction exponentielle admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$
- La fonction tangente admet une infinité d'asymptotes verticales, d'équation $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

III. Calcul de limites**1. Opérations sur les limites**

Dans cette section, a désigne un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$, et ℓ désigne un réel fini.

a. Somme

Proposition 7.22

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \dots$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \dots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \dots$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

b. Produit

Proposition 7.23

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \dots$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \dots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times g(x) = \dots$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

c. Quotient

Proposition 7.24

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$:

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \dots$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \dots$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$
alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	FI	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$:

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \dots$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \dots$	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0
alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Remarque

On note $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell^+$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell^-$) si $g(x)$ tend vers 0 en gardant des valeurs supérieures ou égales à ℓ (respectivement inférieures ou égales à ℓ).
Autrement dit :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell^+ \iff \forall \varepsilon, \exists \delta > 0, |x - a| < \delta \Rightarrow g(x) \in [\ell, \ell + \varepsilon[$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell^- \iff \forall \varepsilon, \exists \delta > 0, |x - a| < \delta \Rightarrow g(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell]$$

Ainsi, la notation $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0^+$ si $g(x)$ tend vers 0 en gardant des valeurs positive

$$\forall \varepsilon, \exists \delta > 0, |x - a| < \delta \Rightarrow 0 \leq g(x) < \varepsilon$$

(de même pour $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0^-$)

2. Composition de limites

Proposition 7.25

Soient a, b, c trois réels, ou $\pm\infty$, et soient f et g deux fonctions telles que $g \circ f$ soit définie dans un voisinage de a . Supposons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et que $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$. Alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = c$

Exemple 7.7

Calculer la limite de $x \mapsto e^{-1/x}$ en 0^+ et en 0^- .

3. Croissances comparée

a. Négligeabilité

Définition 7.27

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de a .

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a , et on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$, s'il existe une fonction $\varepsilon : V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ et $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$

Si g ne s'annule pas au voisinage de a , cette définition est équivalente à $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

→ Exercice de cours n°9.

Les règles sont les mêmes que pour les suites :

Propriété 7.26

Soit $a \in \mathbb{R}$, ou $a = \pm\infty$, et f, g et h trois fonctions définies au voisinage de a .

- Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$
- Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$, alors $f(x)h(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)h(x))$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ si et seulement si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(1)$

Par composition de limites, on obtient la proposition suivante :

Proposition 7.27

Supposons que $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$

- Si $\lim_{x \rightarrow b} h(x) = a$, alors $f(h(x)) \underset{x \rightarrow b}{=} o(g(h(x)))$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, alors $f(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(g(u_n))$

On peut donc poser des changements de variables dans les relations de négligeabilité lorsque les limites correspondent.

b. Comparaisons usuelles

Proposition 7.28 (croissances comparées)

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ deux réels. On a les limites suivantes :

Limite	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x ^\beta e^{\alpha x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta \ln x ^\alpha = 0$
Notation de Landau	$x^\beta \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{\alpha x})$	$e^{\alpha x} \underset{x \rightarrow -\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$	$(\ln x)^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta)$	$ \ln x ^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$

Remarque

En particulier, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$
 et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$

→ Exercice de cours n° 10.

c. Équivalence**Définition 7.28**

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage V de a . On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de a s'il existe une fonction α vérifiant $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 1$ telle que $\forall x \in V$, $f(x) = \alpha(x)g(x)$.

On note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$.

Si $g(x)$ ne s'annule pas au voisinage de a , cette définition est équivalente à $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Les propriétés de l'équivalence sont les mêmes que pour les suites :

Propriété 7.29

$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ si et seulement si $f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$.

Propriété 7.30 (Opérations sur les équivalents)

Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$ et soient f, g, h et k quatre fonctions définies au voisinage de a .

- Si $f(x) \sim g(x)$, alors $g(x) \sim f(x)$
- Si $f(x) \sim g(x)$ et que $g(x) \sim h(x)$, alors $f(x) \sim h(x)$
- Si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $f(x) \sim \ell \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$
- Si $f(x) \sim g(x)$ et $h(x) \sim k(x)$
 - ▷ $f(x)h(x) \sim g(x)k(x)$
 - ▷ $\frac{f(x)}{h(x)} \sim \frac{g(x)}{k(x)}$ si $h(x)$ et $k(x)$ ne s'annulent pas
- Si f et g sont strictement positives et telles que $f(x) \sim g(x)$ et si $a \in \mathbb{R}$, alors $f(x)^a \sim g(x)^a$. En particulier $\sqrt{f(x)} \sim \sqrt{g(x)}$.

Remarque

Attention : On n'ajoute pas des équivalences.

En général $f(x) \sim g(x) \not\Rightarrow f(x) + k(x) \sim g(x) + k(x)$

Par exemple : $x^2 + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$ et $1 - x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x^2$ mais $x^2 + 1 + 1 - x^2 \sim 2 \not\sim 0$.

Par composition de limites, on a immédiatement le résultat suivant :

Proposition 7.31

Soient $(a, b) \in (\overline{\mathbb{R}})^2$. Si $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$ et que $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$, alors $f(h(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(h(x))$.

Exemple 7.8

On sait que $x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\ln(x)^2 + \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)^2$.

Remarque

Attention : On ne compose pas des équivalences à gauche. En général, $f(x) \sim g(x) \nRightarrow h \circ f(x) \sim h \circ g(x)$

Par exemple $x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1}}{e^x} = e^1 \neq 1$ donc $e^{x+1} \not\sim e^x$.

→ Exercice de cours n° 11.

d. Équivalents usuels**Proposition 7.32**

Soit $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un polynôme.

- Lorsque $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, $P(x)$ est équivalent à son terme de plus haut degré.
- Lorsque $x \rightarrow 0$, $P(x)$ est équivalent à son terme de plus petit degré non nul.

Proposition 7.33

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in I$. Alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$$

On en déduit les égalités suivantes

Propriété 7.34 (développements limités à l'ordre 1)

Lorsque $x \rightarrow 0$ on a :

- | | |
|----------------------------|--|
| • $\sin x = x + o(x)$ | • $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$ |
| • $\cos x = 1 + o(x)$ | • $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ |
| • $\exp(x) = 1 + x + o(x)$ | • $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$ |
| • $\ln(1+x) = x + o(x)$ | |

→ Exercice de cours n° 12.

On peut exprimer ces développements limités sous forme d'équivalents :

Propriété 7.35 (équivalents usuels)

Lorsque $x \rightarrow 0$ on a :

- | | |
|--|--|
| • $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ | • $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}x$ |
| • $\cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$ | • $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$ |
| • $\exp(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ | • $\frac{1}{1-x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ |
| • $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ | |

→ Exercice de cours n° 13.

IV. Continuité

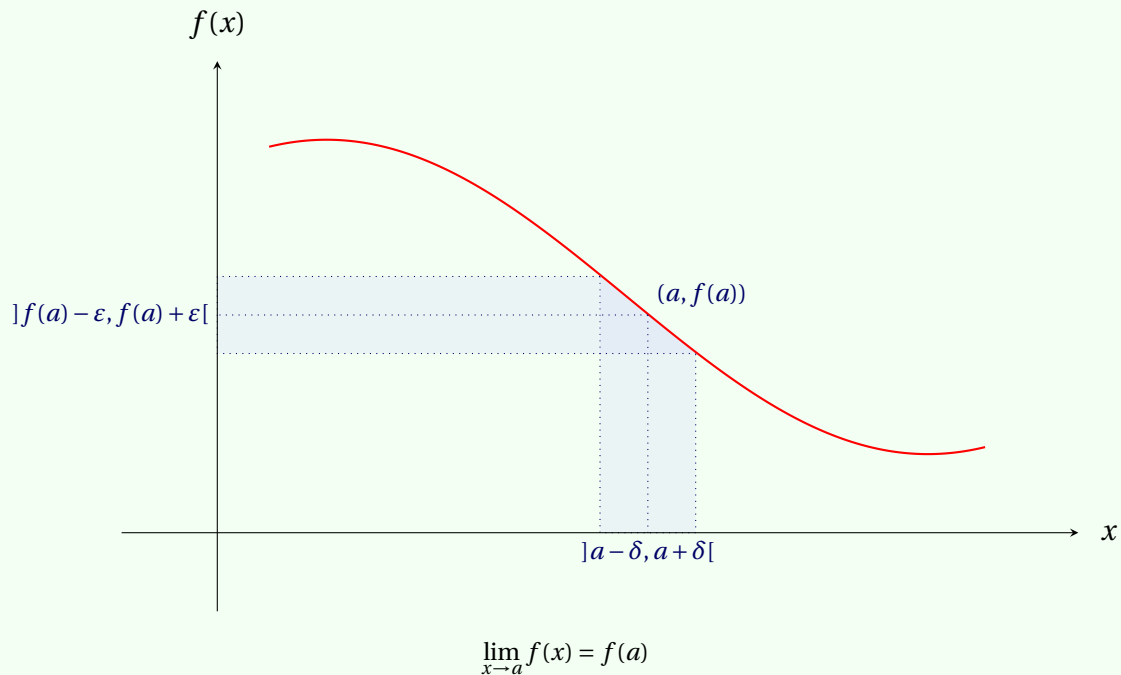
Dans toute cette section I désigne un intervalle réel.

1. Définition

Définition 7.29

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et soit $a \in I$. On dit que f est **continue en a** si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, c'est à dire si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$



Définition 7.30

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I . On dit que f est **continue sur I** si f est continue en a quel que soit $a \in I$.

Propriété 7.36 (admise)

La plupart des fonctions de référence sont continues sur tout intervalle où elles sont définies :

- Toute fonction polynôme est continue sur \mathbb{R}
- $x \mapsto \sin x$ est continue sur \mathbb{R}
- $x \mapsto \cos x$ est continue sur \mathbb{R}
- $x \mapsto \tan x$ est continue sur $] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
- $x \mapsto e^x$ est continue sur \mathbb{R}
- $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0, +\infty[$
- $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas continue sur \mathbb{R}^* car \mathbb{R}^* n'est pas un intervalle, mais elle est continue sur $] -\infty, 0[$ et continue sur $]0, +\infty[$.

Remarque

La fonction partie entière n'est pas continue sur \mathbb{R}

→ Exercice de cours n° 14.

Propriété 7.37 (Opérations)

Soit f et g deux fonctions continues sur I . Alors

- $f + g$ est continue sur I
- $f \times g$ est continue sur I

- Si $\forall x \in I, g(x) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I .

Propriété 7.38 (Composée de fonctions continues)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ continue telles que $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I .

2. Prolongement par continuité

Définition 7.31

Soit I un intervalle et $a \in I$ et soit $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **prolongeable par continuité en a** s'il existe un prolongement de f à I continu sur I , c'est à dire une fonction $\hat{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I et telle que $\forall x \in I \setminus \{a\}, \hat{f}(x) = f(x)$.

Proposition 7.39

Soit I un intervalle, soit $a \in I$ et soit f une fonction continue définie sur $I \setminus \{a\}$. f est prolongeable par continuité en a si et seulement si f admet une limite finie en a .

→ Exercice de cours n° 15.

Proposition 7.40

Si a n'est pas une borne de I , alors f est prolongeable par continuité en a si et seulement si f admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite en a et que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

→ Exercice de cours n° 16.

3. Applications

a. Continuité et suites

Proposition 7.41

Si (u_n) converge vers une limite finie ℓ , et que f est une fonction continue en ℓ , alors $f(u_n)$ converge aussi et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

→ Exercice de cours n° 17.

Exemple 7.9

Un contre exemple avec une fonction non continue : $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

Le fait que (u_n) converge n'entraîne pas nécessairement que $(\lfloor u_n \rfloor)$ converge. Exemple avec la suite $1 + \frac{(-1)^n}{n}$ qui converge vers 1, mais pour $n \geq 2$ on a :

$$\triangleright \text{ Si } n \text{ est pair } \left\lfloor 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\rfloor = \left\lfloor 1 + \frac{1}{n} \right\rfloor = 1$$

$$\triangleright \text{ Si } n \text{ est impair } \left\lfloor 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\rfloor = \left\lfloor 1 - \frac{1}{n} \right\rfloor = 0$$

donc la suite $\left(\left\lfloor 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\rfloor \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge.

Proposition 7.42

Plus généralement, si $(a, b) \in (\mathbb{R})^2$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = b$.

b. Continuité et monotonie

Propriété 7.43

Soient $a < b$ deux réels. Alors

- Si f est continue sur $[a, b]$ et monotone sur $]a, b[$ alors f est monotone sur $[a, b]$.
- Si f est continue sur $[a, b]$ et strictement monotone sur $]a, b[$ alors f est strictement monotone sur $[a, b]$

c. Théorème des valeurs intermédiaire

Théorème 7.44 (des valeurs intermédiaires)

Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue**. Soit $\alpha \in [f(a), f(b)]$ (ou $\alpha \in [f(b), f(a)]$ le cas échéant). Alors il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \alpha$.

Remarque

Le théorème est encore vrai si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ (ou les deux). On remplace alors $f(a)$ par $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $f(b)$ par $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

→ Exercice de cours n° 18.

Remarque

Les équations à une inconnue x peuvent souvent se ramener à une équation de la forme $g(x) = 0$. Lorsqu'on cherche à démontrer l'existence d'un antécédent de 0 par la fonction g , le théorème des valeurs intermédiaires peut se formuler de la façon suivante :

Si g est continue et que $g(a)g(b) \leq 0$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$

En effet, $g(a)g(b) \leq 0$ signifie que $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes contraires donc que 0 est compris entre $g(a)$ et $g(b)$, le TVI s'applique donc.

→ Exercice de cours n° 19.

Théorème 7.45 (Corollaire du TVI)

Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$. Soit $\alpha \in [f(a), f(b)]$ (ou $\alpha \in [f(b), f(a)]$ le cas échéant). Alors il existe un **unique** réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \alpha$.

Remarque

Le corollaire est encore vrai si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ (ou les deux). On remplace alors $f(a)$ par $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $f(b)$ par $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

→ Exercice de cours n° 20.

Proposition 7.46 (conséquence du TVI)

Si I est un intervalle et que f est continue sur I , alors $f(I)$ est un intervalle.

d. Théorème des valeurs atteintes

Définition 7.32

On appelle **intervalle fermé borné** ou **segment** tout intervalle qui contient ses bornes, de la forme $[a, b]$.

Théorème 7.47 (des valeurs atteintes, admis)

Si I est un intervalle fermé borné, alors $f(I)$ est un intervalle fermé borné.

En particulier, si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes : elle admet un minimum et un maximum sur $[a, b]$.

e. Théorème de la bijection

Une autre formulation du corollaire du TVI est le **théorème de la bijection**

Théorème 7.48 de la bijection

Soient $a < b$ deux réels et soit $I = [a; b]$. Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I . Alors $J = f(I)$ est un intervalle dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$ et f réalise une bijection de I vers J . De plus, sa fonction réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur J , de même sens de variation que f .

Remarque

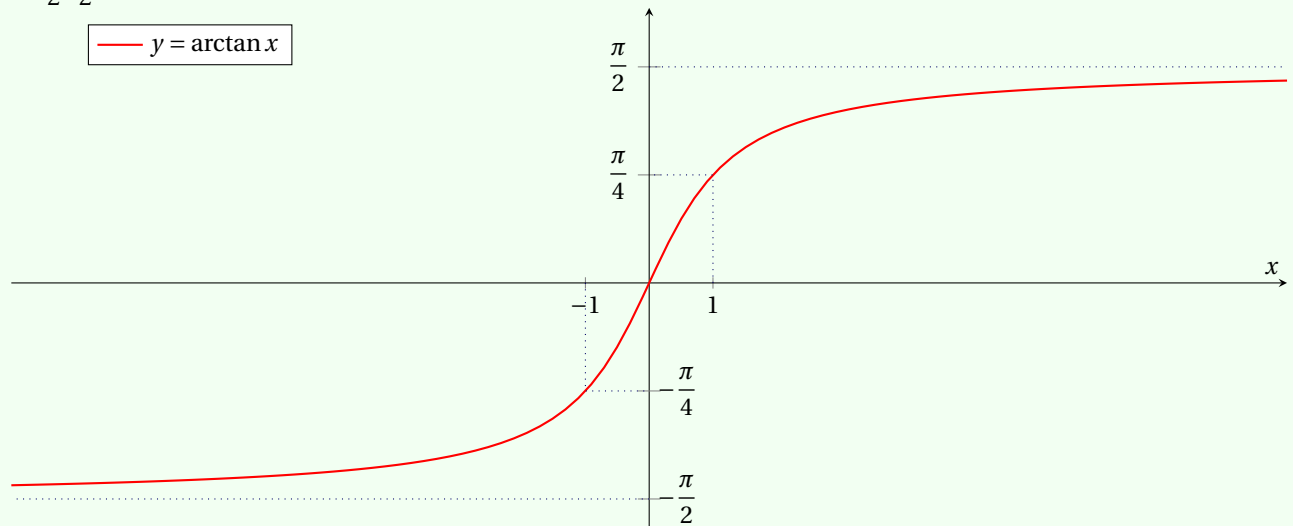
Le théorème de la bijection est encore vrai si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, on remplace alors $f(a)$ et $f(b)$ par $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ le cas échéant.

Le théorème est aussi vrai si l'une des bornes est ouverte, l'image d'une borne ouverte est alors ouverte et l'image d'une borne fermée est fermée.

→ Exercice de cours n° 21.

f. Fonction arctangente**Définition 7.33**

La fonction $x \mapsto \tan x$ est continue et strictement croissante sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. De plus, $\tan(I) = \mathbb{R}$. En vertu du théorème de la bijection, il existe donc une fonction notée \arctan définie et continue sur \mathbb{R} et à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$.



On retient que $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.

→ Exercice de cours n° 22.

Propriété 7.49

Soient I et J deux intervalles et f une bijection de I vers J dérivable sur I . Si f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est dérivable sur J et on a :

$$\forall x \in J, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Propriété 7.50

La fonction \arctan est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Exercices de cours

Exercice 1

Montrer les deux inégalités suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq x + 1 \quad ; \quad \forall x > 0, \quad \ln(1 + x) \leq x$$

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\frac{e^x + e^{2x}}{1 + e^{-x}}$

2. $\frac{2\ln(2) + \ln(9)}{\ln(6)}$

3. $\ln(x^2 - 4) - \ln(x + 2)$

4. $\ln\left(e^{x^2} \times (e^{2-2x})^2\right) e^{-\ln(x-2)}$

5. $\exp\left(\sum_{k=1}^n \ln(k^2 + k) - \ln(k + 1)\right)$

6. $x + \ln(1 + e^{-x}) + \ln(1 - e^x)$

Exercice 3

Résoudre les équations et inéquations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivantes :

a) $e^{2x} + 2e^x = e^x + 6$

b) $\ln(2) + \ln(x - 1) + \ln(x - 3) = \ln(4 - 4x)$

c) $2\ln(x)^2 - \ln(x) - 1 = 0$

Exercice 4

Montrer qu'il n'existe aucun polynôme P tel que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = P(x)$.

Exercice 5

Factoriser les polynômes suivants :

a) $f(X) = X^3 + X^2 - 2$

b) $g(X) = X^3 + X^2 + X + 1$

c) $h(X) = X^3 - 2X^2 + X - 2$

Exercice 6

Déterminer l'ensemble des polynômes à coefficients réels P tels que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x + 1) = P(x)$.

Exercice 7

Montrer en utilisant uniquement la définition que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Exercice 8

Montrer en utilisant uniquement la définition que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Exercice 9

Montrer que $x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^3)$ et $x^3 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$.

Exercice 10

Déterminer les limites des fonctions suivantes lorsque x tend vers $+\infty$

1. $f(x) = (\ln x)^3 e^{-x}$

3. $h(x) = \ln(x) \times \frac{x+1}{e^x}$

2. $g(x) = e^{4x} - x^2 e^{3x} \ln(x)$

4. $k(x) = \frac{\ln(\ln(x))}{\sqrt{\ln(x)}}$

Exercice 11

Démontrer les équivalents suivants :

1. $\sqrt{x+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{x}$

3. $e^x + x^3 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$

5. $\ln x + 2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln x$

2. $\ln(x+x^2) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2\ln(x)$

4. $e^x + x^3 \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} x^3$

6. $\ln x + \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$

Exercice 12

Utiliser des développements limités à l'ordre 1 pour calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{9+x}-3}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{\sin(x)\sqrt{1-x}}$

Exercice 13

Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes au voisinage de a :

1. $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}, a = +\infty$

3. $h(x) = \frac{\ln(e^{1/x} + 1)}{e^{\ln(x)+x} - x}, a = 0$

2. $g(x) = \ln(x^2 + x) - \ln(x^2), a = +\infty$

4. $k(x) = 1 - \cos^2(\sqrt{x}), a = 0$

Exercice 14

Étudier la continuité des deux fonctions suivantes :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 0 \\ \cos(x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad ; \quad x \longmapsto \begin{cases} 3-x^2 & \text{si } x < -2 \\ x+1 & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Exercice 15

On considère la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ définie sur \mathbb{R}^* . Montrer que f peut se prolonger par continuité en une fonction définie sur \mathbb{R} .

Exercice 16

On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{1+\ln(x)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Montrer que f se prolonge par continuité en une fonction définie sur \mathbb{R} .

Exercice 17

Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$ et $u_0 = 3$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 18

Soit $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^{1-x}$.

Montrer qu'il existe au moins deux réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \frac{1}{2}$.

Exercice 19

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Montrer qu'il existe un réel $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = f(1 - c)$.

Exercice 20

Montrer qu'il existe un unique réel $x_0 \in]0, 1[$ tel que $\sin\left(\frac{\pi x_0}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Exercice 21

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{2 - 6e^x}{1 + 2e^x}$ réalise une bijection de \mathbb{R} vers un intervalle que l'on déterminera.

Exercice 22

Déterminer la valeur de $\arctan(-\sqrt{3})$ et $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$