Programme de khôlle de maths n° 9

Semaine du 27 Novembre

Cours

Chapitre 6 : Suites numériques

- Vocabulaire sur les suites : majorée, minorée, bornée, croissante, décroissante
- Suites arithmétiques, suites géométriques, suites arithmético-géométriques, suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (cas où l'équation caractéristique admet des solutions réelles uniquement)
- Limites infinie, limite finie.
- Unicité de la limite
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$
- (u_n) converge ssi (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite
- (u_n) bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \pm\infty \Rightarrow \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.
- Limites de référence
- Calcul de limites : opérations, composition par une fonction continue, passage à la limite dans une inégalité ou dans une égalité.
- Théorèmes de convergence : limite monotone, théorèmes de comparaison, suites adjacentes.
- Comparaison asymptotique : relation de négligeabilité, notation de Landau. Croissances comparée de $n!$, a^n, n^b et $\ln(n)^c$ pour $a, b, c > 0$.
- Equivalence de suites, notation $u_n \sim v_n$, propriétés des équivalences.
- Si P est un polynôme, $P(n)$ est équivalent à son terme de plus haut degré et $P(1/n)$ est équivalent à son terme de plus petit degré non nul.
- Équivalents usuels : si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\sin(u_n) \sim u_n$, $\ln(1+u_n) \sim u_n$, $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$, $\dfrac{1}{1-u_n} \sim u_n$, $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.

Questions de cours

- Démontrer la formule du binôme de Newton : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}$, $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.
- Démontrer l'unicité de la limite
- Démontrer qu'une suite convergente est bornée
- Démontrer que deux suites adjacentes convergent vers une même limite.

Exercice 1 :

Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n^2 + 3}{3u_n^2 + 4}$ selon la valeur de u_0.

Exercice 2 :

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $0 < x_0 < y_0$ et $\begin{cases} x_{n+1} & = & \dfrac{x_n^2}{x_n + y_n} \\ y_{n+1} & = & \dfrac{y_n^2}{x_n + y_n} \end{cases}$

1. Montrer que $(y_n - x_n)$ est constante.
2. En déduire que (x_n) est croissante
3. Montrer que (x_n) et (y_n) sont convergentes et déterminer leurs limites respectives.

Correction : $y_n - x_n = y_0 - x_0 > 0$ donc $y_n < x_n$ et donc $x_{n+1} \leq \dfrac{x_n^2}{2x_n} \leq \dfrac{x_n}{2}$

Par récurrence immédiate $x_n \leq \dfrac{x_0}{2^n}$ donc $x_n \to 0$ et donc $y_n \to y_0 - x_0$

Exercice 3 :

Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -2u_n + n^2 - 2$. Déterminer a, b, c tels que (v_n) définie par $v_n = u_n + an^2 + bn + c$ soit géométrique, en déduire la valeur de u_n en fonction de n

Exercice 4 :

Limite de $u_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$

Limite de $u_n = \dfrac{(n+2)!}{(n^2+1) \times n!}$

Limite de $u_n = 2^n - 3^n + 4^n$, de $v_n = \dfrac{\ln(1 + \mathrm{e}^x)}{\sqrt{x}}$

Limite de $u_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1/n}$, $v_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1/\ln(n)}$ et $w_n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{1/\sqrt{\ln(n)}}$

Exercice 5 :

Soit f une application injective de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = +\infty$.

Exercice 6 : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{a}$

Correction : Montrer que $u_{n+1}^2 - a = \dfrac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n}$, en déduire que $\forall n, u_n \geq \sqrt{a}$ puis que (u_n) est décroissante pour $n \geq 1$

Exercice 7 :

Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} - 1$

Exercice 8 :

$u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 + u_n}$ (mq si u_n converge vers ℓ alors $\ell = -1 + \sqrt{2}$, puis que $|u_{n+1} - \ell| = |\dfrac{1}{2+u_n} - \dfrac{1}{2+\ell}| = \dfrac{|u_n - \ell|}{(2+u_n)(2+\ell)} \leq \dfrac{1}{4}|u_n - \ell|$ puis que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Exercice 9 :

Étude de la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2}{3}$

Correction : Montrer d'abord que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 3$, ensuite que (u_n) est croissante, en déduire sa limite.

Exercice 10 :

On définit la suite (u_n) par $u_n = \sum_{k=0}^{n} k!$ Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{n!} = 1$.

Correction : $\dfrac{u_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{k!}{n!} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{k!}{n!} = 1 + \dfrac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2} \dfrac{k!}{n!}$

Or, pour $k = n-1$ on a $\dfrac{k!}{n!} = \dfrac{1}{n}$

pour $k = n-2$ on a $\dfrac{k!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)}$

pour $k = n-3$ on a $\dfrac{k!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)(n-2)}$

De façon générale, pour $k \in [0; n-2]$ on a $\dfrac{k!}{n!} \leq \dfrac{1}{n(n-1)}$ donc $\sum_{k=0}^{n-2} \dfrac{k!}{n!} \leq \sum_{k=0}^{n-2} \dfrac{1}{n(n-1)} \leq (n-1) \times \dfrac{1}{n(n-1)} \leq \dfrac{1}{n}$.

Finalement, $\dfrac{u_n}{n!} \leq 1 + \dfrac{2}{n}$ et on conclut par encadrement.

Exercice 11 :

Étudier la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \dfrac{n}{n^2 + k}$.

(encadrer et montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$).

Exercice 12 :

Etudier la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + \sqrt{2u_n}}$

(mq par réc que (u_n) décroit, puis que la limite vérifie $\ell^4 - 2\ell^3 + \ell^2 - 2\ell = 0$, donc $\ell = 2$ ou $\ell = 0$,mq (u_n) est minorée par 2).

Exercice 13 :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=0$ et $\lim_{n\to+\infty}(\mathrm{e}^{u_n}+\mathrm{e}^{v_n})=2$. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent et déterminer leurs limites.

Exercice 14 :

Soit (u_n) telle que $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\ell\in\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\ell$. En déduire $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$ et $w_n=\dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{n!}}$.

Exercice 15 :