★
Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x\,\mathrm{e}^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

1) Montrer qu'il existe une variable aléatoire X telle que f est une densité de X.
2) Déterminer F_X la fonction de répartition de X
3) Tracer l'allure de la courbe représentative de F_X
4) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
5) On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire bien définie. Déterminer la loi suivie par Y.

★
Exercice 2

(Loi β de première espèce) Pour tous réels a et b, on note, sous réserve d'existence : $I(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t$

1) Montrer que $I(a,b)$ existe si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$.
2) Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que $bI(a+1,b) = aI(a,b+1)$ et $I(a,b+1) + I(a+1,b) = I(a,b)$.
   En déduire $I(a+1,b) = \dfrac{a}{a+b} I(a,b)$.
3) Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{I(a,b)} t^{a-1}(1-t)^{b-1} & \text{si } t \in]0;1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
   Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle X.
4) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

★ ★ ★
Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$

1) Montrer que f est une fonction de densité d'une variable aléatoire X. Cette loi s'appelle **loi logistique standard.**
2) Montrer que X admet une espérance puis déterminer $\mathbb{E}[X]$ sans calcul d'intégrale.
3) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0;1[)$. Déterminer la loi de $\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$

Si S et T sont deux variables aléatoires indépendantes de densité respective g et h, pour tout réel x, on note $g * h(x)$ l'intégrale suivante lorsqu'elle converge :

$$g * h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)h(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Si $g * h$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, on admet que $S+T$ est une variable à densité dont la fonction de densité est la fonction $g * h$ (et que celle-ci vérifie toutes les propriétés d'une densité).

4) Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi exponentielle de paramètre 1.
   On pose $Z = \ln\left(\dfrac{U}{V}\right)$. Montrer que Z suit la loi logistique standard.

★ ★ ★
Exercice 4

(D'après ESCP 2012) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{2}{\pi}\arctan(\mathrm{e}^x)$

1) a) Montrer qu'il existe une variable à densité X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que F est la fonction de répartition de X
   b) Déterminer la fonction de densité de X
   c) Montrer que X admet des moments à tout ordre et calculer son espérance
2) On pose $Y = \mathrm{e}^X$.
   a) Montrer que Y est une variable à densité et déterminer une densité de Y

   b) La variable Y admet-elle une espérance ?

3) Soient $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant la même loi que Y. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \max(Y_1, ..., Y_n)$.

   a) Déterminer la fonction de répartition de M_n

   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Z_n = \dfrac{n}{M_n}$. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Z telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = F_Z(x)$ (où F_{Z_n} désigne la fonction de répartition de Z_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et F_Z désigne la fonction de répartition de Z).

★ ★

Exercice 5

(D'après ESCP 2022) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, de densités respectives f_1 et f_2 strictement positives et dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x^2 + y^2) = f_1(x)f_2(y)$.

1) Dans cette question seulement on suppose que X_1 et X_2 suivent la loi normale centrée réduite. Déterminer $g(x)$.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f_1'(x)}{2xf_1(x)} = \dfrac{g'(x^2+y^2)}{g(x^2+y^2)}$

3) On pose $h(x) = \dfrac{f_1'(x)}{xf_1(x)}$.

   a) Montrer que h est constante sur $\mathbb{R}^*$. On note cette constante a

   b) Soit $k : x \longmapsto f_1(x)\,\mathrm{e}^{-ax^2/2}$. Montrer que k est constante sur $\mathbb{R}$.

   c) En déduire l'expression de $f_1(x)$

4) a) Montrer que $a < 0$

   b) En déduire la loi de X_1 puis la loi de X_2.

★ ★ ★

Exercice 6

(D'après ENSAE 2013) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi, et telles que X admet une espérance. Le but de cet exercice est de démontrer qu'alors $\mathbb{E}[|X - Y|] \leq \mathbb{E}[|X + Y|]$.
On notera $\mathbf{1}_A$ la variable aléatoire qui vaut 1 si l'événement A est réalisé et 0 sinon.

1) Soit T une variable aléatoire de densité f, telle que $\mathbb{P}(T \geq 0) = 1$, et qui admet une espérance.
   Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} t\mathbb{P}(T > t) = 0$, puis que $\mathbb{E}[T] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T > t)\,\mathrm{d}t$.

2) Si X est à densité, la variable $X\mathbf{1}_{\{X\geq 0\}}$ est-elle aussi à densité ?

3) On admet dorénavant que les résultats de la première question sont également valables lorsque T n'admet pas de densité. On note $Z = \min(|X|, |Y|)$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[Z\mathbf{1}_{\{X\geq 0\}\cap\{Y\geq 0\}}\right] = \int_0^{+\infty} \left(\mathbb{P}(X > t)\right)^2 \mathrm{d}t$$

4) Conclure. On pourra notamment utiliser l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}\left[|X + Y| - |X - Y|\right] = 2\mathbb{E}\left[Z\left(\mathbf{1}_{\{XY\geq 0\}} - \mathbf{1}_{\{XY<0\}}\right)\right]$$

Le coin des Khûbes

⋆⋆⋆
Exercice 7

D'après ENS Lyon 2024) Si n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et si $x_1, \ldots, x_n$ est une liste de réels, pour tout entier k de $\{1, \ldots, n\}$, on note $s_k(x_1, \ldots, x_n)$ le k-ième élément de la liste lorsqu'on range $x_1, \ldots, x_n$ par ordre croissant. Ainsi, $s_1(x_1, \ldots, x_n)$ est le plus petit élément de la liste et $s_n(x_1, \ldots, x_n)$ est le plus grand élément de la liste. On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ qui suivent toutes la même loi. Pour tout entier k de $\{1, \ldots, n\}$, on note Y_k la variable aléatoire égale à $s_k(X_1, \ldots, X_n)$.

1) Soit k un entier de $\{1, \ldots, n\}$ et x un réel. Montrer que :

$$P(Y_k \leq x) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} (P(X_1 \leq x))^i (P(X_1 > x))^{n-i}$$

2) Montrer que la fonction F définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
On suppose dans la suite de cet exercice que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ ont toutes pour fonction de répartition la fonction F définie précédemment.

3) Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ admettent-elles une espérance ?

4) Soit k un entier de $\{1, \ldots, n\}$. On admet que Y_k est une variable à densité. Vérifier qu'une densité de Y_k est la fonction h_k définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_k(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} \binom{n-1}{k-1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{n-k+3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et donner un équivalent de $h_k(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5) On suppose dans cette question que $n \geq 3$ et que $k \in \{1, \ldots, n-2\}$. Montrer que Y_k admet une espérance.

⋆
Exercice 8

Soit c un réel et soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{1+x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) Déterminer c tel que f soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire.

2) Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que $Y = \dfrac{1}{X} - \left\lfloor \dfrac{1}{X} \right\rfloor$ est une variable à densité qui suit la même loi que X.