Programme de khôlle de maths n° 8

Semaine du 20 Novembre

Cours

Chapitre 5 : Nombres réels

- Manipulation de nombres réels, inégalités, intervalles
- Borne supérieure, borne inférieure, maximum, minimum, majorant, minorant. Propriété de la borne supérieure (admis).
- Valeur absolue. $|x-a| \leq d \Longleftrightarrow x \in [a-d, a+d]$.
- Un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ est un intervalle de la forme $]a-\varepsilon; a+\varepsilon[$.
- Propriétés algébriques de la valeur absolue, inégalités triangulaires $|x+y| \leq |x|+|y|$ et $||x|-|y|| \leq |x-y|$.
- Partie entière de x notée $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$. $\mathbb{R}$ est archimédien (admis). Existence et unicité de la partie entière. $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante.
- Racine carrée. $\sqrt{x^2} = |x|$. $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Propriétés algébriques.
- Fonction puissance réelle : $\forall x > 0, \forall a \in \mathbb{R}, x^a := \mathrm{e}^{a \ln x}$. Propriétés algébrique. Racine n-ième de $x > 0$: $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$. Dérivée de $x \mapsto x^a$
- Formule du binôme de Newton : $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.
- Formule de factorisation : $x^n - y^n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1}$.

Questions de cours et exercices vus en classe

- Démontrer l'inégalité triangulaire $|x+y| \leq |x|+|y|$
- Démontrer l'existence et l'unicité de la partie entière d'un réel **positif** : soit $x \geq 0$, montrer qu'il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq x < n+1$.
- Montrer que la fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $E(x+1) = E(x)+1$ et que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
- Exo 1) Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\max(a,b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$ et $\min(a,b) = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}$.
- Exo 2) Déterminer l'ensemble des réels x tels que $E(-x) = -E(x)$
- Exo 3) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$
- Exo 4) Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{2^{n^3}}{3^{n^2}}$