
Programme de khôlle de maths n° 8

Semaine du 21 Novembre

Cours

Chapitre 6 : Analyse réelle

- Nombres réels, inégalités, intervalles, valeur absolue, partie entière, voisinage d'un nombre, voisinage de $\pm\infty$
- Identités remarquables, identité $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$, identité $x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1}$
- Inégalités triangulaires $|x+y| \leq |x| + |y|$ et $||x| - |y|| \leq |x-y|$.
- Majorant/minorant, maximum/minimum, borne supérieure/borne inférieure.
- Propriété de la borne supérieure, application aux suites croissantes majorées
- Fonctions réelles de la variables réelle
- Signe, variations, allure de la courbe de : fonctions affines, fonctions polynômes de degré 2, fonction racine carrée, fonction inverse, fonctions trigonométriques cos, sin et tan (pas encore arctan), fonctions exponentielles et logarithme.
- Puissance généralisée $\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}, a^b := e^{b \ln a}$
- Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire pour les fonctions strictement monotones.
- Limites de fonctions
- Négligeabilité, équivalence de fonctions au voisinage d'un réel ou de $\pm\infty$.
- Comparaisons usuelles entre $e^{\alpha x}$, x^β , $(\ln x)^\gamma$
- DL à l'ordre 1 au voisinage de 0 de $\sin x$, $\cos x$, \tan , e^x , $\ln(1+x)$, $\sqrt{1+x}$, $(1+x)^\alpha$, $\frac{1}{1-x}$

Questions de cours et exercice

• Questions de cours

- En admettant la propriété de la borne supérieure, démontrer que toute suite croissante et majorée converge.
- Démontrer l'inégalité triangulaire

- Démontrer l'identité $x^n - y^n = (x-y) \times \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k}$

- En rappelant que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, démontrer l'égalité $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

• Exercices vus en classe

Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a

a) $f(x) = \frac{e^{3x} - x^5}{(e^x + 2)^3}, \quad a = +\infty$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{x} \ln(x)}{x^{1/4}}, \quad a = 0$

b) $f(x) = \sqrt{x}^{\ln x}, \quad a = 0$

f) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad a = +\infty$

c) $f(x) = \frac{1}{x} \times e^{-1/x^2}, \quad a = 0^+$

g) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{x+3}, \quad a = +\infty$

d) $f(x) = x(e^{2/x} - 1), \quad a = +\infty$

h) $f(x) = \ln(\sin(\sqrt{\pi x})) - \ln(\ln(1+2x)), \quad a = 0$