TD 5 : Diagonalisation (Indications)

Indications pour l'exercice 1 :
Diagonaliser A puis postuler la solution.

Indications pour l'exercice 2 :
Quelle polynôme annule A et quelles sont ses racines ? En déduire que $A^2 = I_n$.

Indications pour l'exercice 3 :

1. Vérifier que ϕ est linéaire et que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.
2. La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $(1, X, X^2)$, calculer $\phi(1)$, $\phi(X)$ et $\phi(X^2)$.
3. Remarquer que la matrice représentative de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est triangulaire supérieure. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire supérieure sont ses coefficients diagonaux.

Indications pour l'exercice 4 :

1. Si A est inversible, alors $BA = A^{-1}ABA$
2. Penser à des contre-exemples classiques de matrices non diagonalisables et de matrices non nulles dont le produit est nul.

Indications pour l'exercice 5 :

1. Il est facile de voir que A est de rang 1 donc que 0 est valeur propre et que le sous-espace propre associé est de dimension 2. Une autre valeur propre de A se devine en cherchant un vecteur propre et on en déduit que A est diagonalisable.
2. Les 1 sur la diagonale de A imposent que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $a_i = \dfrac{1}{b_i}$.
3. Distinguer les cas $M = 0$ et $M \neq 0$, remarquer que $\mathrm{rg}(M) = 1$ (donc $\dim(\mathrm{Ker}(M)) = n - 1$, puis raisonner par analyse sur l'existence d'une valeur propre non nulle et d'un vecteur propre associé.

Indications pour l'exercice 6 :

1. La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $(1, X, ..., X^n)$. Calculer $f(X^k)$ pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$.
2. Remarquer que la matrice de la question précédente est triangulaire supérieure.
3. f possède $n + 1$ valeurs propres distinctes (il faut le justifier).

Indications pour l'exercice 7 :

1. Les valeurs propres de f sont racines de tout polynôme annulateur de f. Attention, il faut aussi montrer que 0 est bien valeur propre de f.
2. (a) Montrer que sous l'hypothèse $\mathrm{rg}(f) = 1$ les éléments de $\mathrm{Im}(f)$ sont des vecteurs propres de f.
   (b) Utiliser la question précédente pour montrer que $f^3 = 0$.

Indications pour l'exercice 8 :
Remarquer que $X^3 - 5X^2 + 6X = X(X-2)(X-3)$ est un polynôme annulateur de u, puis que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - 3\mathrm{Id}_E)$ en notant que $E = \mathrm{Ker}(0_{\mathcal{L}(E)}) = \mathrm{Ker}(u \circ (u - 2\mathrm{Id}_E) \circ (u - 3\mathrm{Id}_E))$ et en montrant que $\dim(\mathrm{Ker}(f \circ g)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g))$.

On peut aussi se passer de cette propriété hors programme et raisonner par analyse-synthèse pour montrer que tout vecteur de E peut s'écrire comme somme de vecteurs de chaque sous-espace propre.

Indications pour l'exercice 9 :

1. Appliquer le théorème du rang à la restriction de u à $\mathrm{Im}(u^k)$
2. Montrer que la suite $\mathrm{Ker}(u^k)$ est stationnaire à partir du rang k_0, c'est à dire que pour tout $k \geq k_0$, $\mathrm{Ker}(u^{k+1}) = \mathrm{Ker}(u^k)$.

3. Les suites $(\dim(\mathrm{Im}(u^k))$ et $(\dim(\mathrm{Ker}(u^k))$ sont reliées par le théorème du rang. Utiliser les deux questions précédentes et le fait que $rg(u) = n - 1$.
4. La restriction d'un endomorphisme nilpotent à un sous-espace stable est encore un endomorphisme nilpotent de ce sous-espace.

Indications pour l'exercice 10 :

1. Le coefficient (i, j) de AB est $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$, montrer que tous ces coefficients sont positifs et que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_k$
1
2. Considérer le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Considérer un vecteur propre X et poser le coefficient de X dont la valeur absolue est la plus grande.

Indications pour l'exercice 11 :

1. Considérer la trace.
2. (a) A quoi ressemble une matrice diagonale de rang 1 ?
   (b) Prendre un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(w)$ et compléter en une base de $\mathbb{R}^n$, puis étudier la matrice représentative de w dans cette base.
   (c) Utiliser la base de la question précédente.
3. On a $\mathrm{rg}(VA^k) \leq 1$. Si $\mathrm{rg}(VA^k) = 0$ alors $VA^k = 0$, sinon VA^k est de rang 1. Montrer qu'alors $\mathrm{tr}(VA^k) = 0$ donc que $(VA^k)^2 = 0$ d'après les questions précédentes.
   Par un raisonnement sur les dimensions, en déduire que $\mathrm{Im}(V) \subset \mathrm{Ker}(VA^k)$ pour conclure.

Indications pour l'exercice 12 :

1. Procéder par récurrence en utilisant la relation $AB = A + BA$.
2. Non, montrer par exemple qu'il n'est pas stable par somme en prenant des exemples classiques de matrices nilpotentes.
3. Par l'absurde : montrer que si A n'est pas nilpotente alors φ admet une infinité de valeurs propres distinctes grâce à la question 1).

Indications pour l'exercice 13 :

1. Raisonner par analyse synthèse, supposer que f est une homothétie de rapport λ...
2. (a) Remarquer que la relation (1) est équivalente à $f \circ (f - (a + b)\mathrm{Id}_E) = -ab\mathrm{Id}_E$.
   (b) Raisonner par analyse-synthèse : si f est un projecteur, alors $f^2 = f$...
3. (a) Raisonner (encore) par analyse-synthèse.
   (b) La question précédente donne une idée de ce qu'il faut poser pour p et q.
4. Raisonner par récurrence et développer. Pour $n \in \mathbb{Z}$, commencer par montrer que $f^{-1} = b^{-1}p + a^{-1}q$ et raisonner de la même façon sur $(f^{-1})^n$.

Indications pour l'exercice 14 :

1. Montrer par récurrence sur le nombre de sous-espaces propres de u que $F = (F \cap E_{\lambda_1}) \oplus (F \cap E_{\lambda_2}) \oplus \cdots \oplus (F \cap E_{\lambda_r})$ où $(E_{\lambda_i})_{1 \leq i \leq r}$ sont les sous-espaces propres de u.
2. Commencer par montrer que les sous-espaces propres de u sont stables par v, puis appliquer le résultat de la question précédente.
3. Étudier f sur une base qui diagonalise à la fois f^2 et f^3, montrer que cette base diagonalise aussi f.