Chapitre 5
Nombres réels

I. Calcul dans $\mathbb{R}$

Définition 5.1

On admet l'existence de l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$.
Cet ensemble muni de l'addition et de la multiplication, noté $(\mathbb{R}, +, \times)$ est ce que les mathématicien appellent un **corps** (HP), c'est à dire un ensemble vérifiant les propriétés suivantes :

- Il existe un élément neutre pour l'addition, le nombre 0 :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ x + 0 = 0 + x = x$$
- Tout réel a un inverse pour l'addition, appelé opposé :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}, x + y = y + x = 0$$
On note $-x$ l'opposé de x.
- L'addition est commutative :
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y = y + x$$
- Il existe un élément neutre pour la multiplication, le nombre 1 :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ 1 \times x = x \times 1 = x$$
- Tout réel non nul admet un inverse pour la multiplication :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \exists y \in \mathbb{R}^*,\ x \times y = y \times x = 1$$
On note $\frac{1}{x}$ l'inverse de x
- La multiplication est distributive par rapport à l'addition :
$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x \times (y + z) = x \times y + x \times z$$

De plus le corps des réels est commutatif, cela se dit d'un corps dans lequel la multiplication est aussi commutative.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est aussi un corps, il est inclus dans le corps des réels : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
Certains nombres réels, comme π ou $\sqrt{2}$ ne sont pas rationnels. On a $\pi, \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

L'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres rationnels n'est pas un corps : les éléments différents de 1 et -1 n'ont pas d'inverse pour la multiplication.

Proposition 5.1 (admise)

L'ensemble des réels peut être mis en bijection avec l'ensemble des points d'une droite gradué, chaque point ayant pour abscisse le réel associé par cette bijection. Cette droite s'appelle la **droite numérique réelle**.
En revanche, $\mathbb{R}$ ne peut pas être mis en bijection avec $\mathbb{N}$ comme on peut le prouver avec l'argument diagonal de Georg Cantor.

Propriété 5.2 (admise)

En plus de la distributivité, l'ensemble des réels vérifie les propriété suivantes :

- **Associativité de la multiplication et de l'addition :**
$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{et} \quad a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

- **Commutativité de la multiplication et de l'addition :**

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a+b=b+a \quad \text{et} \quad a\times b = b\times a$$

II. Manipulation d'inégalité, intervalle

Définition 5.2

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une **relation d'ordre** $\leq$, c'est à dire une relation vérifiant les trois propriété suivantes :

- $\forall x\in\mathbb{R},\ x\leq x$ (réfléxivité)
- $\forall x,y\in\mathbb{R},\ x\leq y$ et $y\leq x \Longrightarrow x=y$ (antisymétrie)
- $\forall x,y,z\in\mathbb{R},\ x\leq y$ et $y\leq z\Longrightarrow x\leq z$ (transitivité)

On note $x<y$ si $x\leq y$ et $x\neq y$.
On note $x\geq y$ si $y\leq x$ (une seule définition suffit).

On rappelle les règles de calcul suivantes :

Proposition 5.3

Pour tout $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ on a

- Si $a\leq b$, alors $a+c\leq b+c$
- Si $a\leq b$ et $c\leq d$ alors $a+c\leq b+d$
- Si $a\leq b$ et $c<d$ alors $a+c<b+d$.
- Si $a\leq b$ et $c\geq 0$, alors $ac\leq bc$.
- Si $a\leq b$ et $c\leq 0$, alors $ac\geq bc$.
- Si $a\leq b$ et $c>0$, alors $\dfrac{a}{c}\leq\dfrac{b}{c}$.
- Si $a\leq b$ et $c<0$, alors $\dfrac{a}{c}\geq\dfrac{b}{c}$.
- Si $a\leq b$ et si a et b sont de même signe, alors $\dfrac{1}{a}\geq\dfrac{1}{b}$.

Définition 5.3

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ deux réels avec $a<b$. On utilisera les notations suivantes pour les intervalles de nombres :

- $]a;b[=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$
- $[a;b[=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x<b\}$
- $]a;b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\leq b\}$
- $[a;b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x\leq b\}$
- $]a;+\infty[=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\}$
- $]-\infty;b[=\{x\in\mathbb{R}\mid x<b\}$
- $[a;+\infty[=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x\}$
- $]-\infty;b]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq b\}$

On appelle **segment** un intervalle fermé borné de la forme $[a;b]$

Définition 5.4

On note $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$ et $\mathbb{R}^*$ les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ respectivement privés de $\{0\}$.
On peut ainsi écrire $\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$. On note aussi $\mathbb{R}_+=[0,+\infty[$, $\mathbb{R}_+^*=]0,+\infty[$, $\mathbb{R}_-=]-\infty,0]$ et $\mathbb{R}_-^*=]-\infty,0[$.

III. Borne supérieure, borne inférieure

Définition 5.5

Soit $A\subset\mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$.

- Un réel M est un **majorant** de A si $\forall x\in A, x\leq M$
- Un réel m est un **minorant** de A si $\forall x\in A, m\leq x$
- Un réel $M\in A$ est le **maximum** de A si $\forall x\in A,\ x\leq M$. On note alors $M=\max(A)$
- Un réel $m\in A$ est le **minimum** de A si $\forall x\in A,\ m\leq x$. On note alors $m=\min(A)$
- Le plus petit majorant de A, s'il existe, s'appelle la **borne supérieure de** A. On note ce nombre $\sup(A)$
- Le plus petit minorant de A, s'il existe, s'appelle la **borne inférieure de** A. On note ce nombre $\inf(A)$.

Exemple 5.1

- 5 est un majorant de $[0,1]$
- 1 est le maximum de $[0,1]$
- 2 est la borne inférieure de $[2;4]$ et c'est aussi son minimum
- 2 est la borne inférieur de $]2;4]$ mais ce n'est pas son minimum

Remarque

On ne note max, min, sup, inf que s'ils existent (comme pour une limite).
Par exemple $\max[0,1[$ n'existe pas, et $\inf \mathbb{Z}$ n'existent pas.

Remarque

Si le maximum (respectivement le minimum) d'un ensemble A existe, alors c'est forcément la borne supérieur de A (respectivement sa borne inférieure). La réciproque est fausse.

Si A est fini, alors $\min(A)$ et $\max(A)$ existent. La notion de borne supérieure/borne inférieure est donc superflue pour un ensemble fini.

Définition 5.6

Si x et y sont deux réels, on note $\max(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq y \\ y & \text{si } y \geq x \end{cases}$. Autrement dit $\max(x,y) = \max(\{x,y\})$.
On définit de même $\min(x,y) = \min(\{x,y\})$.

Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une famille finie de réels, on définit de même $\max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $\min(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Définition 5.7(extremum sur un ensemble)

Si $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un ensemble E, on note s'ils existent :

- $\max\limits_{x \in E}(f(x)) = \max(f(E)) = \max\left\{f(x) \mid x \in E\right\}$
- $\min\limits_{x \in E}(f(x)) = \min(f(E)) = \min\left\{f(x) \mid x \in E\right\}$

Exemple 5.2

$\max\limits_{k \in [\![1,10]\!]}(k(6-k)) = \max\{5,8,9,8,5,0,-7,-16,-27,-40\} = 9$

Remarque

On note de même la borne inférieure et la borne supérieure d'une fonction définie sur un ensemble si elles existent.
Exemple : $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \dfrac{1}{n} = 0$.

Propriété 5.4

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$. Alors $M \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de A si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :

- $\forall x \in A, x \leq M$ (M est un majorant de A)
- $\forall m < M, \exists a \in A, m < a$ (c'est le plus petit des majorants)

Propriété 5.5 de la borne supérieure (admise)

- Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Toute partie minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure

Remarque

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels n'a pas la propriété de la borne supérieure.
Considérons par exemple l'ensemble $A = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\}$. Cet ensemble est majoré, par 3 par exemple, mais il

n'admet pas de borne supérieure.
La démonstration est complexe, n'essayez pas de la faire chez vous.
Intuitivement, on comprend que la borne supérieure, si elle existait, devrait être égale à $\sqrt{2}$ qui n'est pas un rationnel.

IV. Valeur absolue

Définition 5.8

Soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle **valeur absolue** de x le nombre noté $|x|$ et défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Si (a, b) est un couple de réels, le nombre $|b-a|$ est la **distance de** a **à** b sur la droite numérique.

Propriété 5.6

- $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = 0 \iff x = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall d > 0, |x| = d \iff x = d \quad \text{ou} \quad x = -d$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall d > 0, |x| \leq d \iff x \in [-d\ ;\ d]$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, \forall d > 0, |x-a| \leq d \iff x \in [a-d\ ;\ a+d]$.

Définition 5.9

Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle **voisinage de** a tout intervalle de la forme $I =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$.
On a alors $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\iff |x-a| < \varepsilon$.

On appelle **voisinage de** $+\infty$ (respectivement de $-\infty$) tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$ (respectivement $]-\infty, A[$ avec $A \in \mathbb{R}$).

Propriété 5.7

Pour tous réels x, y on a $|x| \times |y| = |xy|$ et si $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

Propriété 5.8 (Inégalités triangulaires)

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

- $|x+y| \leq |x| + |y|$
- $||x| - |y|| \leq |x-y|$

V. Partie entière d'un réel

Propriété 5.9 (admise)

L'ensemble $\mathbb{R}$ est **archimédien**, c'est à dire que pour tous réels a et b vérifiant $0 < a < b$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $na > b$.

On déduit de cette propriété l'existence et l'unicité de la **partie entière d'un nombre réel**.

Définition 5.10

Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$ la **partie entière de** x défini comme étant l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.

On retiendra que $\lfloor x \rfloor$ peut être défini par l'inégalité

$$\boxed{\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1}$$

On note parfois $\lceil x \rceil$ la partie entière supérieure de x, c'est à dire l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n-1 < x \leq n$.

Propriété 5.10

La fonction $x \mapsto E(x)$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, autrement dit pour tout réels x, y on a $x \leq y \Rightarrow E(x) \leq E(y)$.

Propriété 5.11

Pour tout réel x, $E(x+1) = E(x)+1$.

VI. Racine carrée

Proposition 5.12 (admise)

Pour tout réel positif x il existe un unique réel positif a noté $a = \sqrt{x}$ tel que $a^2 = x$.

Remarque

$\sqrt{x}$ est défini comme étant l'unique solution **positive** de l'équation $a^2 = x$ d'inconnue a.

Propriété 5.13

Pour tout réel x on a $\sqrt{x^2} = |x|$

Remarque

L'égalité $\sqrt{x^2} = x$ est **fausse en général**. Elle n'est vraie que lorsque $x \geq 0$.
L'égalité $(\sqrt{x})^2 = x$ est vraie dès lors que $\sqrt{x}$ est bien défini, c'est à dire aussi lorsque $x \geq 0$.

Propriété 5.14

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction strictement croissante sur $[0;+\infty[$:

$$\forall a, b \in [0;+\infty[,\ a < b \Longrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

Propriété 5.15

Pour tous réels $a, b \geq 0$ on a

- $\sqrt{a} = 0$ si et seulement si $a = 0$
- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ si $b \neq 0$
- $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ avec égalité si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$

Définition 5.11

Si a et b sont des réels et c est un réel positif, on appelle **quantité conjuguée** de $a + b\sqrt{c}$ le nombre $a - b\sqrt{c}$. Cette quantité est parfois utile pour simplifier des expressions.

VII. Fonction puissance réelle

Définition 5.12

Soit x un réel **strictement positif** et $a \in \mathbb{R}$ quelconque. On définit le nombre x^a par

$$x^a = \mathrm{e}^{a \ln(x)}$$

Remarque

Cette définition coïncide avec la notation d'exposant entier : si $a \in \mathbb{Z}$ on a $\mathrm{e}^{a \ln(x)} = (\mathrm{e}^{\ln x})^a = x^a$ par propriété de l'exponentielle.

Propriété 5.16 (Racine n-ième)

Si $x > 0$ est un réel on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(x^{1/n})^n = x$.

Remarque

En particulier, on a $\forall x > 0$, $\sqrt{x} = x^{1/2}$.
De façon général, pour $x > 0$ on note $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$

Propriété 5.17

Toutes les propriétés algébriques des exposants sont encore vraies pour les exposants réels :

- $\forall x > 0, x^0 = 1$
- $\forall x > 0, \forall a \in \mathbb{R},\ x^{-a} = \dfrac{1}{x^a}$
- $\forall x, y > 0, \forall a \in \mathbb{R},\ (xy)^a = x^a y^a$
- $\forall x, y > 0, \forall a \in \mathbb{R},\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^a = \dfrac{x^a}{y^a}$
- $\forall x > 0, \forall a, b \in \mathbb{R}, x^{a+b} = x^a x^b$
- $\forall x > 0, \forall a, b \in \mathbb{R}, x^{a-b} = \dfrac{x^a}{x^b}$
- $\forall x > 0, \forall a, b \in \mathbb{R}, (x^a)^b = x^{ab}$

Propriété 5.18

Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x^a$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est $x \mapsto ax^{a-1}$.
On en déduit en particulier que $x \mapsto x^a$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ si $a > 0$, et strictement décroissante si $a < 0$.

Remarque

L'écriture de x^n sous la forme $\mathrm{e}^{n\ln(x)}$ est parfois appelée « forme exponentielle de x^n ». Elle peut être utile même lorsque n est un entier.