Chapitre 7

Analyse

I. Fonctions réelles de la variable réelle

Définition 7.1

Une **fonction réelle de la variable réelle** est une application $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ où $D_f \subset \mathbb{R}$. L'ensemble D_f est appelé **domaine de définition de** f.

1. Vocabulaire

a. Graphe

Définition 7.2

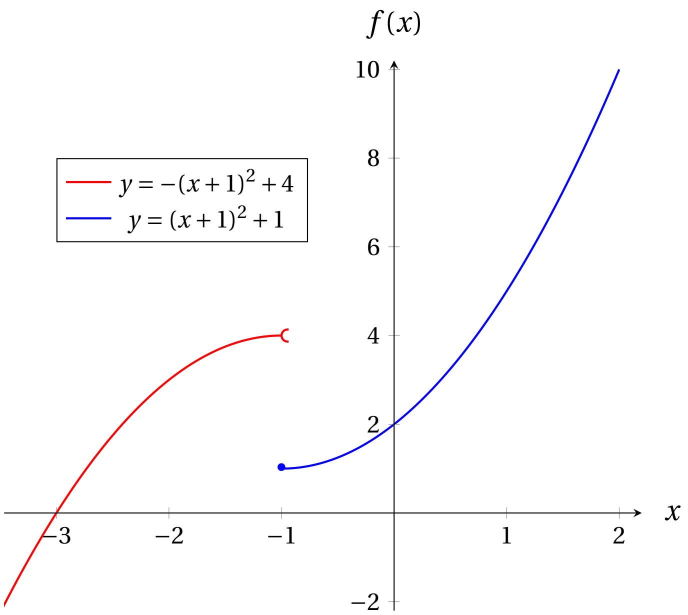
Soit f une fonction réelle définie sur D_f. On appelle **graphe de** f l'ensemble $\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$.
Cet ensemble est une partie de $\mathbb{R}^2$, on peut donc le représenter dans un plan muni d'un repère.

Exemple 7.1

Considérons la fonction suivante :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} -(x+1)^2+4 & \text{si } x < -1 \\ (x+1)^2+1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

f est définie sur $\mathbb{R}$, une partie de son graphe est représentée ci-contre :



b. Variations

Définition 7.3

Soit c un réel fixé et $D \subset \mathbb{R}$. On appelle **fonction constante égale à** c **sur** D la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & c \end{array}$$

On appelle **fonction nulle** la fonction

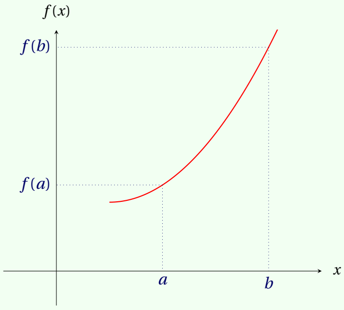
$$f: \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}$$

c'est à dire la fonction constante égale à 0.

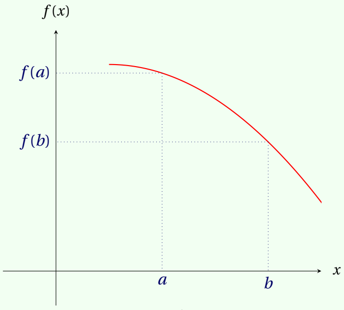
Définition 7.4

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un **intervalle** I. On dit que

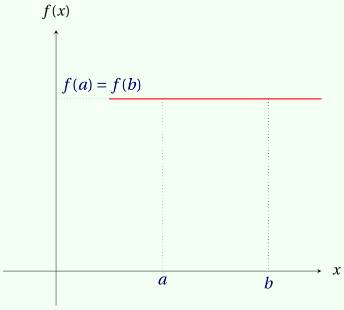
- f est **croissante** sur I si $\forall (a,b) \in I^2,\ a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$
- f est **décroissante** sur I si $\forall (a,b) \in I^2,\ a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$
- f est **constante** sur I si $\forall (a,b) \in I^2,\ a < b \Rightarrow f(a) = f(b)$



Fonction croissante



Fonction décroissante



Fonction constante

On dit que f est **monotone** sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.

c. Fonction périodique

Définition 7.5

Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est périodique s'il existe un réel $T \neq 0$ tel que pour tout réel $x \in D_f$ pour lequel $x + T \in D_f$ on a $f(x+T) = f(x)$. On dit alors que T est une **période** de f (ou que f est T-périodique).

Exemple 7.2

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π.
La fonction tangente est périodique de période π. En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad \tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

Remarque

Si f est T-périodique, alors f est aussi $2T$-périodique, $3T$-périodique, etc. La période d'une fonction périodique n'est donc pas unique.

d. Parité

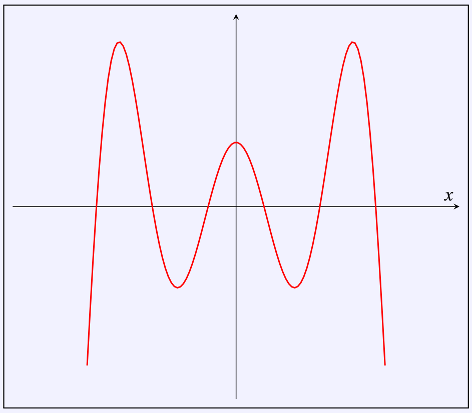
Définition 7.6

Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ (on dit que D_f est symétrique par rapport à 0).

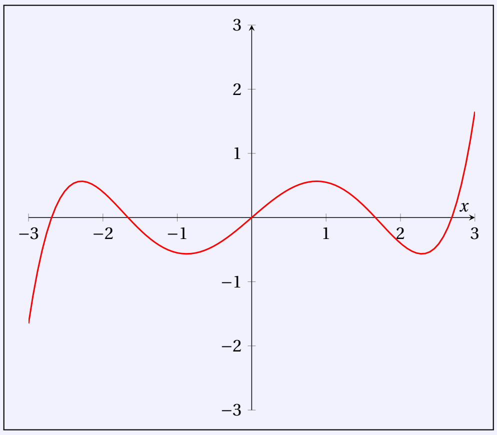
- On dit que f est **paire** si $\forall x \in D_f,\ f(-x) = f(x)$
- On dit que f est **impaire** si $\forall x \in D_f,\ f(-x) = -f(x)$.

Propriété 7.1

- La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. En effet, si $(x, f(x)) \in \mathcal{C}_f$, alors $(-x, f(-x)) = (-x, f(x))$ est un point de $\mathcal{C}_f$. Ces deux points sont bien symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
- De même, la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Fonction paire



Fonction impaire

Remarque

Si f est paire, alors $f(0) = 0$. En effet, il faut avoir $f(-0) = -f(0)$ donc $f(0) = -f(0)$ d'où $2f(0) = 0$ et finalement $f(0) = 0$.

Exemple 7.3

Quelques fonctions paires :

- $x \longmapsto x^n$ lorsque $n \in \mathbb{Z}$ est pair (d'où le nom)
- $x \longmapsto \cos x$

Quelques fonctions impaires :

- $x \longmapsto x^n$ lorsque $n \in \mathbb{Z}$ est impair
- $x \longmapsto \sin x$
- $x \longmapsto \tan x$
- $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

Propriété 7.2

La seule fonction à la fois paire et impaire sur un intervalle centrée en 0 est la fonction nulle $x \longmapsto 0$.

e. Opérations

Définition 7.7

Si f et g sont deux fonctions définies sur un même domaine D, on définit sur D les fonctions **somme** et **produit** de f et g, notées $f+g$ et $f \times g$, par

$$\forall x \in D,\ (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in D,\ (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

si de plus g ne s'annule pas sur D on peut définir la fonction quotient $\dfrac{f}{g}$ par

$$\forall x \in D,\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

f. Majorant, minorant, extrema

Définition 7.8

Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que

- f est **majorée** s'il existe un réel M tel que $\forall x \in D_f$, $f(x) \leq M$. On dit alors que M est un **majorant** de f
- f est **minorée** s'il existe un réel m tel que $\forall x \in D_f$, $f(x) \geq m$. On dit alors que m est un **minorant** de f.
- f est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.
- f admet un minimum sur D_f s'il existe un réel $a \in D_f$ tel que $\forall x \in D_f$, $f(x) \geq f(a)$. Le réel $m = f(a)$ s'appelle alors **minimum** de f sur D_f et on dit qu'il est **atteint en** a.
- f admet un maximum sur D_f s'il existe un réel $a \in D_f$ tel que $\forall x \in D_f$, $f(x) \leq f(a)$. Le réel $M = f(a)$ s'appelle alors **maximum** de f sur D_f et on dit qu'il est **atteint en** a.
- On appelle **extremum** un minimum ou un maximum. .

2. Fonctions de référence

L'allure des graphes des fonctions suivantes doit être connu. Connaitre le graphe peut souvent aider à comprendre comment résoudre un problème, ou à se souvenir des limites usuelles.

a. Fonctions affines et affines par morceaux

Définition 7.9

Une fonction affine est une fonction polynôme de degré au plus 1, c'est à dire une fonction de la forme $f : x \longmapsto ax+b$ où a et b sont des réels fixés.

Sa courbe représentative est une droite d'équation réduite $y = ax+b$. a est le **coefficient directeur** de cette droite et b est son **ordonnée à l'origine**.

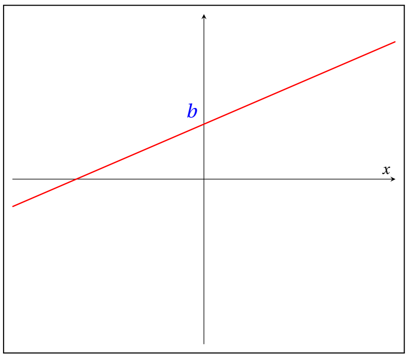
Définition 7.10

On dit qu'une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ est **affine par morceaux** s'il existe une suite d'intervalles deux à deux disjoints $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} I_n = D_f$ et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{|I_n}$ est une fonction affine.

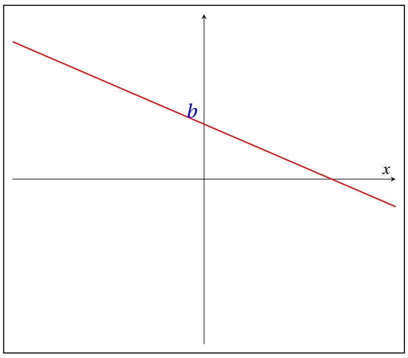
Exemple 7.4

- La fonction valeur absolue est affine par morceau. Sa restriction à $]-\infty;0[$ est la fonction $x \mapsto -x$ et sa restriction à $[0;+\infty[$ est $x \mapsto x$.
- La fonction **partie entière**, qui à un réel x associe l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$, est affine par morceaux. Sa restriction à chaque intervalle de la forme $[n, n+1[$ est constante (donc affine).

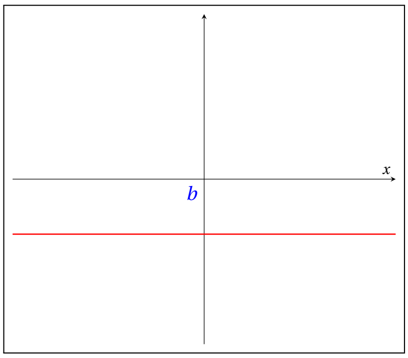
b. Courbe représentative d'une fonction affine $f : x \longmapsto ax+b$



$a > 0$

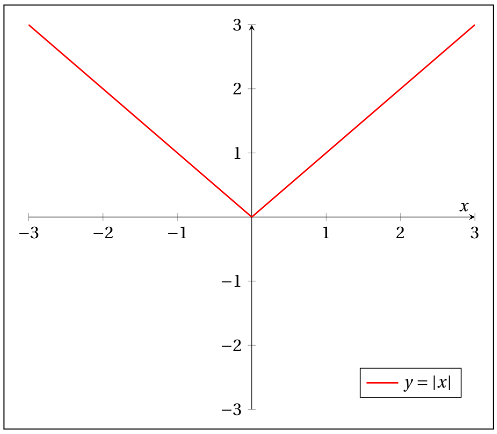


$a < 0$

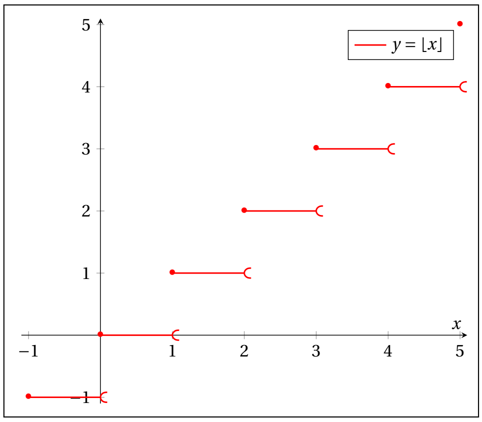


$a = 0$

c. Courbe représentative de la fonction valeur absolue et de la fonction partie entière



Fonction $x \mapsto |x|$



Fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$

d. Fonction polynôme de degré 2

Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction de la forme $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Définition 7.11

Soit $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$ une fonction polynôme de degré 2. On appelle **discriminant de** f le nombre $\Delta = b^2-4ac$

On rappelle les deux propriété suivante :

Propriété 7.3

Soit $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$ une fonction polynôme de degré 2. Alors

- Si $a>0$, f est décroissante sur $]-\infty; \frac{-b}{2a}[$ et croissante sur $]\frac{-b}{2a}; +\infty[$.
- Si $a<0$, f est croissante sur $]-\infty; \frac{-b}{2a}[$ et décroissante sur $]\frac{-b}{2a}; +\infty[$.

Propriété 7.4

- Si $\Delta>0$, l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions réelles, notées x_1 et x_2 et données par

$$\boxed{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

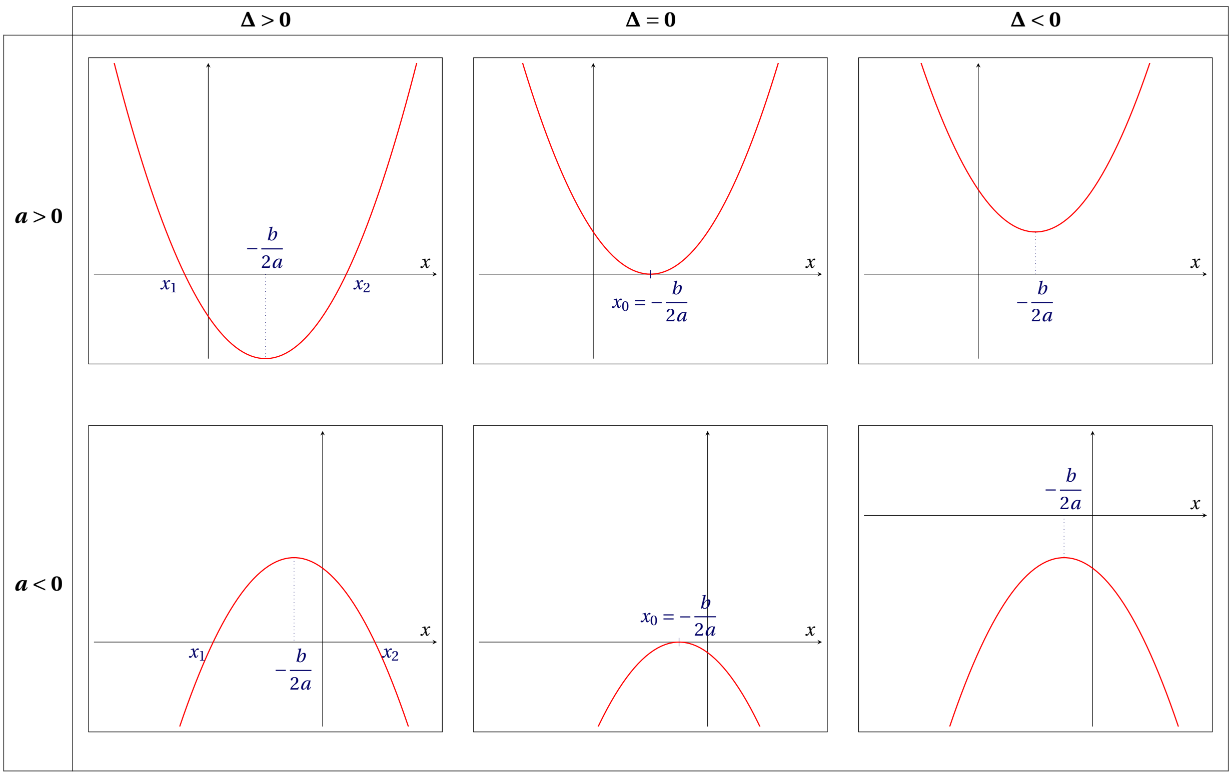
- Si $\Delta=0$, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution réelle, notée x_0 et donnée par

$$\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a}}$$

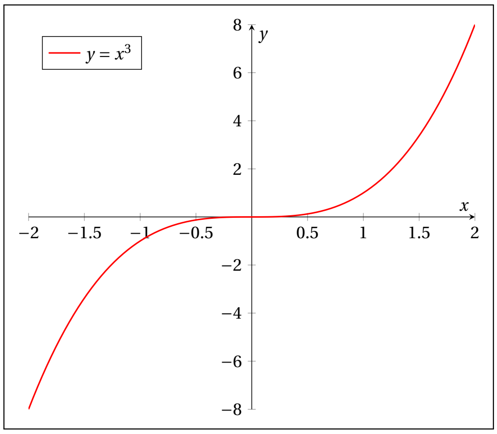
- Si $\Delta<0$, l'équation $f(x)=0$ n'admet aucune solution réelle.

e. Courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2

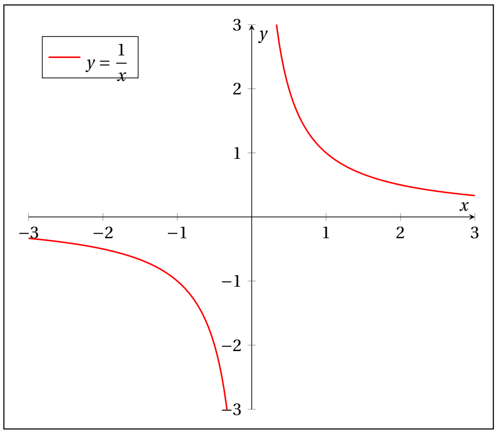
.



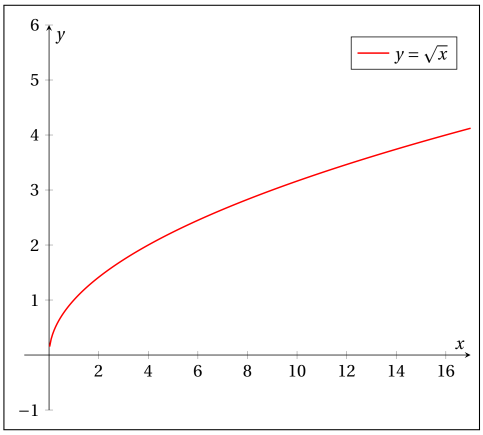
f. Fonctions cube, inverse, racine carrée, racine cubique



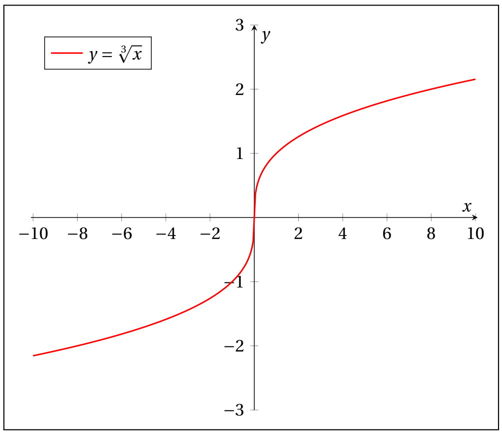
Fonction $x \mapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$



Fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$



Fonction $x \mapsto \sqrt{x} = x^{1/2}$ définie sur $[0; +\infty[$



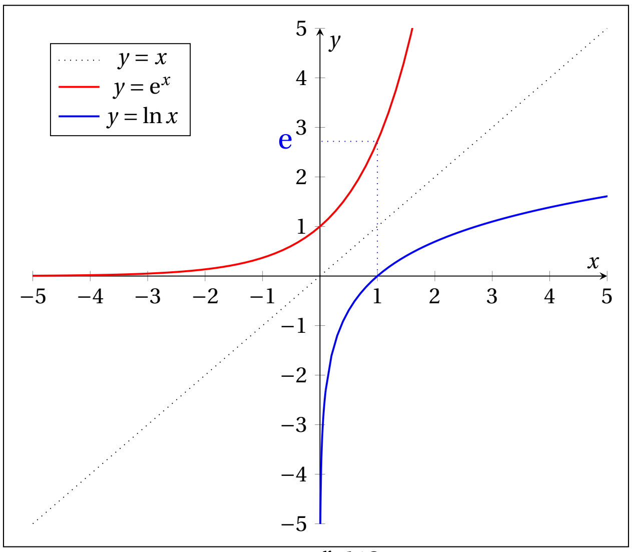
Fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ définie sur $\mathbb{R}$

g. Fonctions exponentielle et logarithme

Définition 7.12

La fonction logarithme naturel, notée ln, est l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ s'annulant en 1.
La fonction logarithme naturel réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$. La fonction exponentielle, notée exp, est définie comme étant l'application réciproque de ln.
Ainsi, on a

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x$
- $\forall x \in]0, +\infty[,\ \exp(\ln(x)) = x$



Fonction $x \mapsto e^x$ définie sur $\mathbb{R}$
Fonction $x \mapsto \ln x$ définie sur $]0;+\infty[$

Propriété 7.5 (Propriétés analytiques de la fonction exponentielle)

- $x \mapsto e^x$ est dérivable et $(e^x)' = e^x$
- $e^0 = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$
- $x \mapsto e^x$ est strictement croissante
- $e^x = 1 \iff x = 0$
- $e^x > 1 \iff x > 0$
- $e^x < 1 \iff x < 0$

Propriété 7.6 (Propriétés algébriques de la fonction exponentielle)

- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ e^{a+b} = e^a e^b$
- $\forall a \in \mathbb{R},\ e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},\ (e^a)^n = e^{na}$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{e^a} = e^{a/2}$

Définition 7.13

Si $(a,b) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}$, on définit a^b par :

$$a^b = e^{b\ln(a)}$$

Ainsi, la dernière propriété peut se généraliser en $\forall (a,b) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R},\ (e^a)^b = e^{ab}$.

Propriétés 7.7 (Propriétés analytiques de la fonction logarithme)

- $x \mapsto \ln x$ est dérivable et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
- $\ln(1) = 0$
- $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln x = 0 \iff x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln x > 0 \iff x > 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln x < 0 \iff x < 1$

Propriétés 7.8 (Propriétés algébriques de la fonction logarithme)

- $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ \ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{Z},\ \ln(a^n) = n\ln a$
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln a$

$\rightarrow$ **Exercice de cours n° 1.**

→ **Exercice de cours n° 2.**

→ **Exercice de cours n° 3.**

Définition 7.14

Soit $b > 0$ un réel tel que $b \neq 1$. Le logarithme en base b est l'application qui à un réel x strictement positif associe l'unique réel y tel que $b^y = x$. On la note $\log_b$.

Remarque

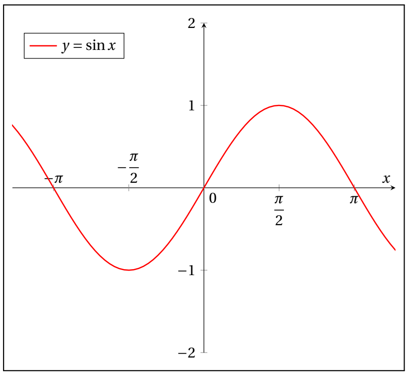
On a $b^y = x \iff e^{y\ln(b)} = x \iff y\ln(b) = \ln(x) \iff y = \dfrac{\ln(x)}{\ln(b)}$ car $b \neq 1$ donc $\ln(b) \neq 0$.

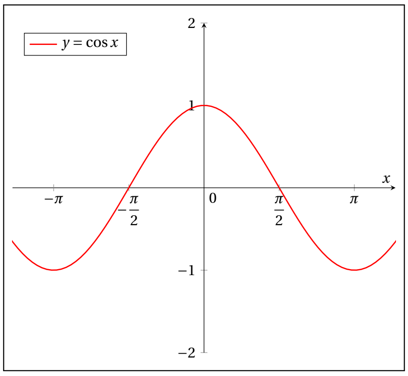
Ainsi, pour tout $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, on a $\log_b(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(b)}$

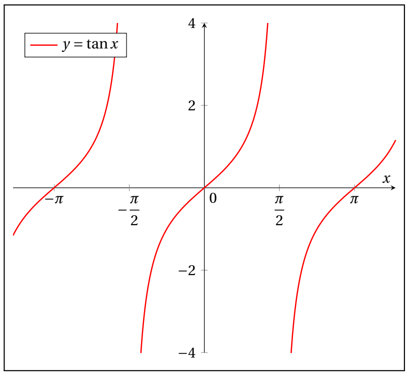
Propriété 7.9

Quelle que soit la base b, le logarithme en base b vérifie les mêmes propriétés algébriques que le logarithme naturel.

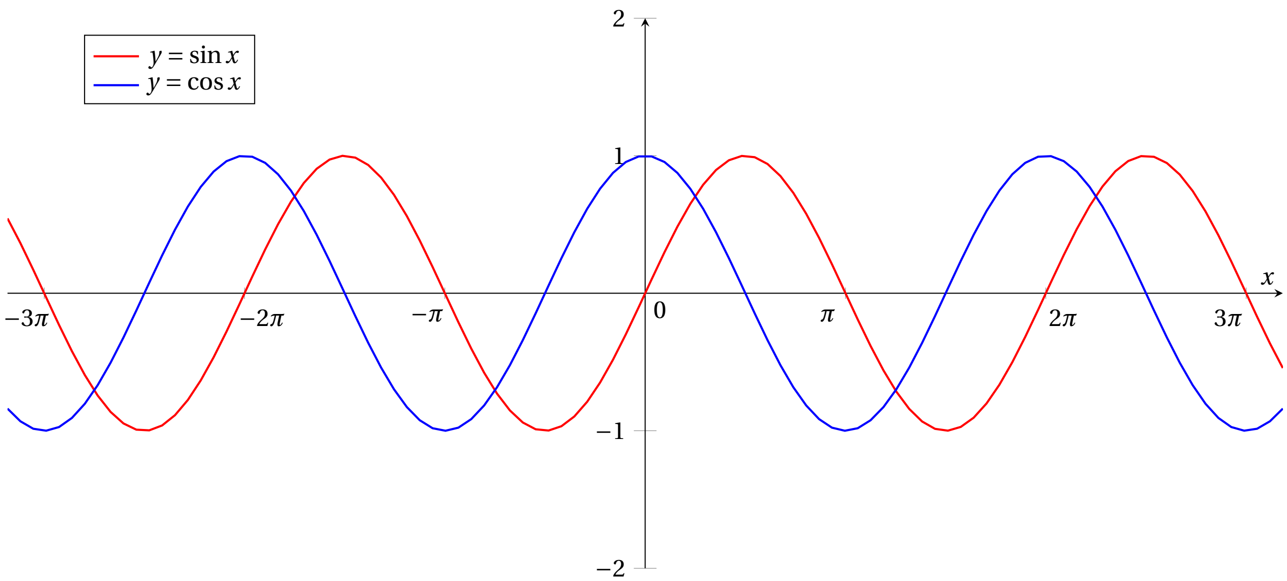
h. Fonctions trigonométriques







Sinus et cosinus ensemble :



3. Fonctions polynômes de degré n

Définition 7.15

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle **polynôme à coefficients réels de degré** n une expression $P(X)$ de la forme

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

où $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $a_n \neq 0$ et où X désigne une **indéterminée**. Si l'indéterminée est une variable réelle x, alors P définit une fonction réelle de la variable réelle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Une telle fonction est une **fonction polynôme de degré n**.

- Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, le réel a_k s'appelle **coefficient de degré** k
- le coefficient a_n s'appelle **coefficient dominant de P**.
- Si $a_n = 1$, on dit que P est un polynôme **unitaire**.
- On appelle **polynôme nul** le polynôme dont tous les coefficients sont nuls.
- On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n, et $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

Remarque

On distingue un **polynôme** et une **fonction polynôme** car l'indéterminée X peut être remplacée par différents objets mathématiques.

Par abus de langage on appelle parfois polynôme une fonction polynôme.

Définition 7.16

On note $\deg(P) = n$ si P est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Par convention, on pose $\deg(P) = -\infty$ si P est le polynôme nul.

Remarque

- La fonction associée au polynôme nul est la fonction nulle.
- Les fonctions polynômes de degré 0 sont les fonctions constantes.
- Les fonctions polynômes de degré 1 sont les fonctions affines.

Propriété 7.10

Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ une fonction polynôme de degré n (avec $a_n \neq 0$). Alors P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$$

Remarque

Si P est une fonction polynôme de degré n, alors P' est une fonction polynôme de degré $n-1$.
Si on note $P^{(k)}$ la dérivée k-ième de P, alors $P^{(k)}$ est un polynôme de degré $n-k$. En particulier, $P^{(n)}$ est constant et $P^{(k)} = 0$ dès que $k > n$.

→ **Exercice de cours n° 4.**

Propriété 7.11

- Une fonction polynôme est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
- Deux fonctions polynômiales sont égales si et seulement si elles ont même degré et tous leurs coefficients sont égaux.

Propriété 7.12

Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels. Alors

- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$

- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$
- $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ si $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
- $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$

Définition 7.17

On appelle **racine** d'un polynôme P tout nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) = 0$.

Propriété 7.13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Pour tout réel λ,

$$\lambda \text{ est une racine de } P \iff \text{il existe } Q \in \mathbb{R}_{n-1}[x] \text{ tel que } P(x) = (x-\lambda)Q(x).$$

$\rightarrow$ **Exercice de cours n°5.**

Propriété 7.14

Une fonction polynôme de degré n non nulle admet au plus n racines distinctes. Autrement dit, le seul polynôme de degré inférieur ou égal à n qui admet $n+1$ racines distinctes est le polynôme nul.

$\rightarrow$ **Exercice de cours n°6.**

II. Limites

Dans toute cette section et sauf exception, D_f est une partie de $\mathbb{R}$ et f est une fonction définie sur D_f à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Intuitivement, on dira que « f a pour limite $\ell \in \overline{R}$ lorsque x tend vers $a \in \overline{R}$ » si les valeurs de $f(x)$ « s'approchent » de ℓ lorsque la valeur de x « s'approche » de a. Les définitions suivantes visent à donner un sens rigoureux au verbe « s'approcher ».

1. Limite en $+\infty$, limite en $-\infty$

a. Limite infinie

Définition 7.18

On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x > x_0 \Rightarrow f(x) > A$$

On note alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

Remarque

Sans changer le sens de cette définition, on peut lui ajouter quelques mots qui ne sont pas nécessaires du point de vue logique mais aident à la compréhension :

> $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si quel que soit le réel A, **aussi grand soit-il**, il existe un réel x_0 **qui peut dépendre de** A tel que pour tout réel $x > x_0$ on a $f(x) > A$.

On définit de même les limites infinies en $\pm\infty$:

Définition 7.19

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x > x_0 \Rightarrow f(x) < A$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x < x_0 \Rightarrow f(x) > A$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x < x_0 \Rightarrow f(x) < A$

$\rightarrow$ **Exercice de cours n°7.**

b. Limite finie

Définition 7.20

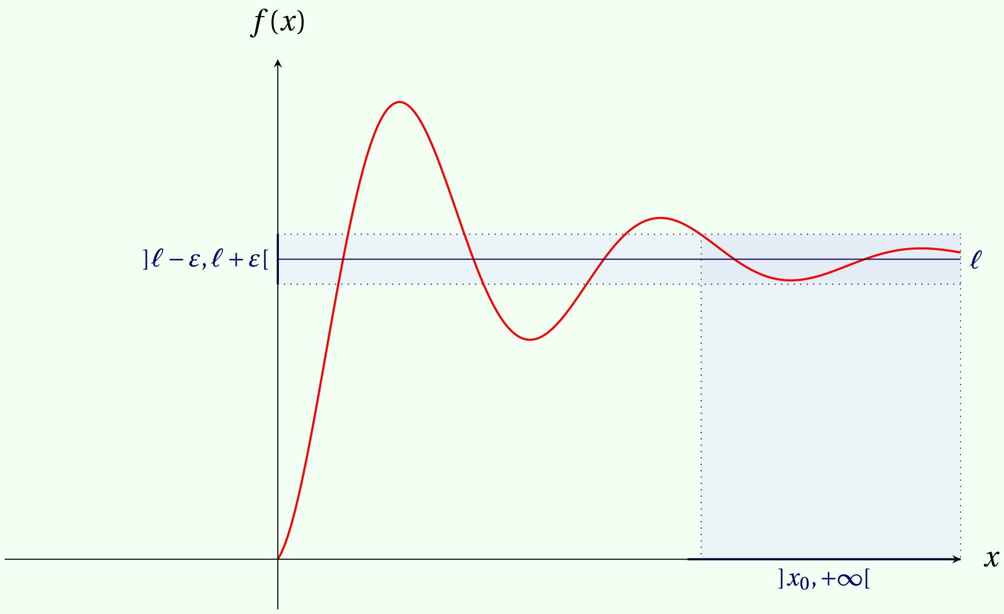
Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que f admet pour limite le réel ℓ en $+\infty$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x > x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

- f admet pour limite le réel ℓ en $-\infty$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

Remarque

On rappelle que $|f(x) - \ell| < \varepsilon \iff f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$

Remarque

Sans changer le sens de cette définition, on peut la reformuler de la façon suivante :

> $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ si pour tout réel ε strictement positif, **aussi petit soit-il**, il existe un réel x_0 **qui peut dépendre de** ε tel que pour tout $x > x_0$, la distance entre $f(x)$ et ℓ est inférieure à ε.

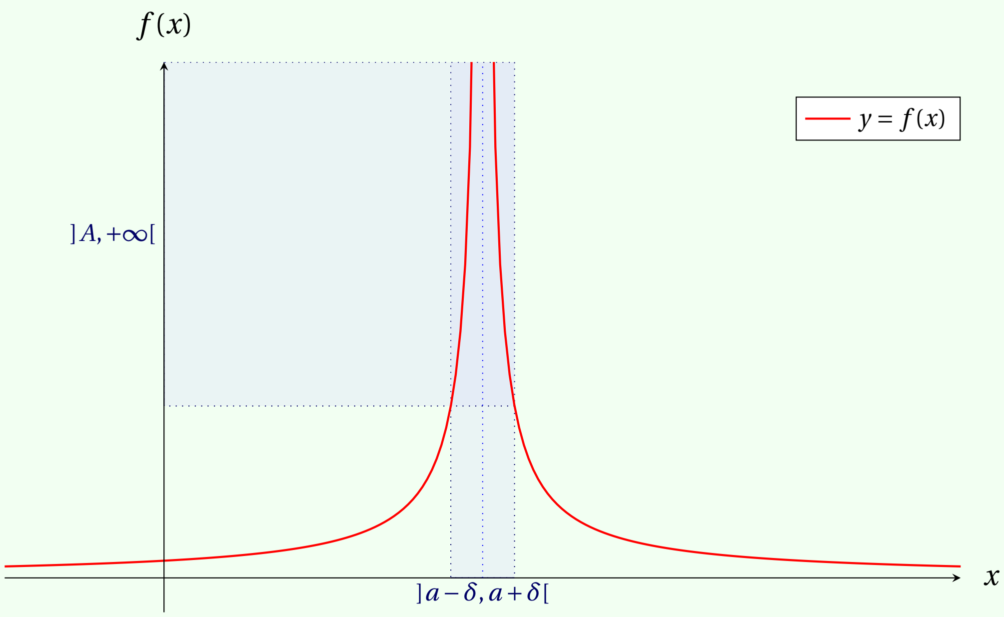
→ **Exercice de cours n°8.**

2. Limite en un réel a

Définition 7.21

f admet pour limite $+\infty$ en a, si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f \setminus \{a\}, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > A$$



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

On peut définir de même les autres types de limite en un réel a :

Définition 7.22

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f \setminus \{a\},\ |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < A$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f \setminus \{a\},\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Proposition 7.15 (Unicité de la limite)

Si f tend vers une limite $\ell \in \overline{R}$ lorsque x tend vers un réel a, ou x tend vers $\pm\infty$, alors ℓ est unique.

3. Définition unifiée

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ la **droite réelle achevée**. On utilise cette notation **uniquement dans le cours** pour généraliser plus facilement des définitions et des propriétés sur les limites.

Les différentes définitions de limites vues dans les sections précédentes peuvent être synthétisé en une seule grâce à la notion de **voisinage**.

Définition 7.23

Un **voisinage** d'un réel a est un intervalle de la forme $]a-\delta, a+\delta[$ avec $\delta > 0$.
Un **voisinage** de $+\infty$ (respectivement de $-\infty$) est un intervalle de la forme $]A; +\infty[$ (respectivement de la forme $]-\infty, A[$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Définition 7.24

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. f admet pour limite ℓ lorsque x tend vers a si pour tout voisinage V_ℓ de ℓ, il existe un voisinage V_a de a tel que $f(V_a) \subset f(V_\ell)$ (autrement dit tel que $\forall x \in V_a, f(x) \in V_\ell$).

En adaptant la définition de voisinage selon la valeur réelle ou infinie de a et de ℓ, on retrouve dans cette définition toutes les définitions de limites précédentes.

4. Limites et monotonie

Proposition 7.16 (théorème de la limite monotone)

Soient $a, b \in \overline{R}$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction monotone.

- Si f est croissante et majorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie en b.
- Si f est croissante et non majorée sur $]a, b[$, alors $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$
- Si f est décroissante et minorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie en a
- Si f est décroissante et non minorée sur $]a, b[$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Proposition 7.17

- Si f est croissante sur $]a, b[$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \ell$, alors $\forall x \in]a, b[$, $f(x) \leq \ell$.
- Si f est croissante sur $]a, b[$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, alors $\forall x \in]a, b[$, $\ell \leq f(x)$.
- Si f est décroissante sur $]a, b[$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \ell$, alors $\forall x \in]a, b[$, $f(x) \geq \ell$
- Si f est décroissante sur $]a, b[$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, alors $\forall x \in]a, b[$, $a \geq f(x)$.

5. Théorèmes de comparaison

Dans toute cette section, f, g et h sont trois fonctions définies dans un voisinage de a, avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 7.18 (passage à la limite dans une inégalité)

Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x dans un voisinage de a et que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$.

Remarque

Le passage à la limite dans une inégalité stricte donne une inégalité **large** :

$$\text{Si } V \text{ est un voisinage de } a, \left\{\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell' \\ \forall x \in V, f(x) < g(x) \end{array}\right. \implies \ell \leq \ell'$$

Proposition 7.19

Supposons que $f(x) \leq g(x)$ dans un voisinage de a.

- si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$
- si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

Théorème 7.20 des gendarmes

Supposons que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ dans un voisinage de a. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$.

6. Limite à gauche, limite à droite

Définition 7.25

Limite à gauche

- On dit que f tend vers $+\infty$ à gauche en $a \in I$, et on note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, x \in]a-\delta, a[\Rightarrow f(x) > A$$

- On dit que f tend vers un réel ℓ à gauche en $a \in I$, et on note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, x \in]a-\delta, a[\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Limite à droite

- On dit que f tend vers $+\infty$ à droite en $a \in I$, et on note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, x \in]a, a+\delta[\Rightarrow f(x) > A$$

- On dit que f tend vers un réel ℓ à droite en $a \in I$, et on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, x \in]a, a+\delta[\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Remarque

On définit de même $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

Exemple 7.5

- $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 3^+} \lfloor x \rfloor = 3$ et $\lim\limits_{x \to 3^-} \lfloor x \rfloor = 2$. En effet, pour tout $x \in]3-\delta, 3[$ avec δ suffisamment petit, on a $\lfloor x \rfloor = 2$.

Proposition 7.21

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On a

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

7. Asymptotes

Définition 7.26

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.
On dit que

- f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$ en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ (ou si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$)
- f admet une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

Remarque

Graphiquement, une asymptote est une droite indiscernable de la courbe de f à l'infini.

Une fonction peut admettre au plus 2 asymptotes horizontales, mais une infinité d'asymptotes verticales

Exemple 7.6

- La fonction inverse admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 0$
- La fonction exponentielle admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$
- La fonction tangente admet une infinité d'asymptote verticales, d'équation $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

III. Calcul de limites

1. Opérations sur les limites

Dans cette section, a désigne un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$, et ℓ désigne un réel fini.

a. Somme

Proposition 7.22

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \cdots$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \cdots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x)) = \cdots$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

b. Produit

Proposition 7.23

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \cdots$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \cdots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x) = \cdots$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

c. Quotient

Proposition 7.24

Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$:

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \cdots$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \cdots$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$
alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \cdots$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	FI	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$:

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \cdots$	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \cdots$	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0
alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \cdots$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Remarque

On note $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell^+$ (respectivement $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell^-$) si $g(x)$ tend vers 0 en gardant des valeurs supérieure ou égal à ℓ (respectivement inférieure ou égale à ℓ).
Autrement dit :

$$\lim_{x\to a} g(x) = \ell^+ \iff \forall\varepsilon, \exists\delta>0, |x-a|<\delta \Rightarrow g(x)\in[\ell, \ell+\varepsilon[$$

$$\lim_{x\to a} g(x) = \ell^- \iff \forall \varepsilon, \exists \delta > 0, |x-a| < \delta \Rightarrow g(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell]$$

Ainsi, la notation $\lim_{x\to a} g(x) = 0^+$ si $g(x)$ tend vers 0 en gardant des valeurs positive

$$\forall \varepsilon, \exists \delta > 0, |x-a| < \delta \Rightarrow 0 \leq g(x) < \varepsilon$$

(de même pour $\lim_{x\to a} g(x) = 0^-$)

2. Composition de limites

Proposition 7.25

Soient a,b, c trois réels, ou $\pm\infty$, et soient f et g deux fonctions telles que $g\circ f$ soit définie dans un voisinage de a. Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et que $\lim_{x\to b} g(x) = c$. Alors $\lim_{x\to a} g\circ f(x) = c$

Exemple 7.7

Calculer la limite de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-1/x}$ en 0^+ et en 0^-.

3. Croissances comparée

a. Négligeabilité

Définition 7.27

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et $a \in I$.
On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a, et on note $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$, s'il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$

Si g ne s'annule pas au voisinage de a, cette définition est équivalente à $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

→ Exercice de cours n°9.

Les règles sont les mêmes que pour les suites :

Propriété 7.26

Soit $a \in \mathbb{R}$, ou $a = \pm\infty$, et f, g et h trois fonctions définies au voisinage de a.

- Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$
- Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$, alors $f(x)h(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x)h(x))$
- $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ si et seulement si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(1)$

b. Comparaisons usuelles

Proposition 7.27 (croissances comparées)

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ deux réels. On a les limites suivantes :

Limite	$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^\beta}{\mathrm{e}^{\alpha x}} = 0$	$\lim_{x\to-\infty} x^\beta \mathrm{e}^{\alpha x} = 0$ si $\beta \in \mathbb{N}^*$	$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$	$\lim_{x\to 0^+} x^\beta \lvert\ln x\rvert^\alpha = 0$
Notation de Landau	$x^\beta \underset{+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{\alpha x})$	$\mathrm{e}^{\alpha x} \underset{-\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\beta}\right)$	$(\ln x)^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$	$\lvert\ln x\rvert^\alpha \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\beta}\right)$

Remarque

En particulier, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty}$, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0}$, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0}$, $\boxed{\lim_{x\to 0} x\ln x = 0}$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty}$, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x = 0}$, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0}$, $\boxed{\lim_{x\to 0} x^n\ln x = 0}$

→ **Exercice de cours n° 10.**

c. Équivalence

Définition 7.28

Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a. On dit que f est **équivalente à** g au voisinage de a s'il existe une fonction α vérifiant $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 1$ telle que $\forall x \in D_f \cap D_g$, $f(x) = \alpha(x)g(x)$.
On note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Si $g(x)$ ne s'annule pas au voisinage de a, cette définition est équivalente à $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Les propriétés de l'équivalence sont les mêmes que pour les suites :

Propriété 7.28

$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si et seulement si $f(x) - g(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$.

Propriété 7.29 (Opérations sur les équivalents)

Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$ et soient f, g, h et k quatre fonctions définies au voisinage de a.

- Si $f(x) \sim g(x)$, alors $g(x) \sim f(x)$
- Si $f(x) \sim g(x)$ et que $g(x) \sim h(x)$, alors $f(x) \sim h(x)$
- Si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $f(x) \sim \ell \iff \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$
- Si $f(x) \sim g(x)$ et $h(x) \sim k(x)$
  - ▷ $f(x)h(x) \sim g(x)k(x)$
  - ▷ $\dfrac{f(x)}{h(x)} \sim \dfrac{g(x)}{k(x)}$ si $h(x)$ et $k(x)$ ne s'annulent pas
- Si f et g sont strictement positives et telles que $f(x) \sim g(x)$ et si $a \in \mathbb{R}$, alors $f(x)^a \sim g(x)^a$. En particulier $\sqrt{f(x)} \sim \sqrt{g(x)}$.

Remarque

Attention : On n'ajoute pas des équivalence.
En général $f(x) \sim g(x) \not\Rightarrow f(x) + k(x) \sim g(x) + k(x)$
Par exemple : $x^2 + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ et $1 - x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^2$ mais $x^2 + 1 + 1 - x^2 \sim 2 \nsim 0$.

Par composition de limites, on a immédiatement le résultat suivant :

Proposition 7.30

Soient $(a,b) \in (\overline{\mathbb{R}})^2$. Si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$ et que $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$, alors $f(h(x)) \underset{x\to a}{\sim} g(h(x))$.

Exemple 7.8

On sait que $x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc $\ln(x)^2 + \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)^2$.

Remarque

Attention : On ne compose pas des équivalences à gauche
En général, $f(x) \sim g(x) \not\Rightarrow h \circ f(x) \sim h \circ g(x)$
Par exemple $x + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ mais $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x+1}}{e^x} = e^1 \neq 1$ donc $e^{x+1} \nsim e^x$.

→ **Exercice de cours n° 11.**

d. Équivalents usuels

Proposition 7.31

Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polynôme.

- Lorsque $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, $P(x)$ est équivalent à son terme de plus haut degré.
- Lorsque $x \to 0$, $P(x)$ est équivalent à son terme de plus petit degré non nul.

Proposition 7.32

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in I$. Alors

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \mathrm{o}(x-a)$$

On en déduit les égalités suivantes

Propriété 7.33 (développements limités à l'ordre 1)

Lorsque $x \to 0$ on a :

- $\sin x = x + o(x)$
- $\cos x = 1 + o(x)$
- $\exp(x) = 1 + x + o(x)$
- $\ln(1+x) = x + o(x)$
- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$

→ **Exercice de cours n$^{\mathrm{o}}$ 12.**

On peut exprimer ces développements limités sous forme d'équivalents :

Propriété 7.34 (équivalents usuels)

Lorsque $x \to 0$ on a :

- $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1$
- $\exp(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x$
- $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$
- $\frac{1}{1-x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$

→ **Exercice de cours n$^{\mathrm{o}}$ 13.**

IV. Continuité

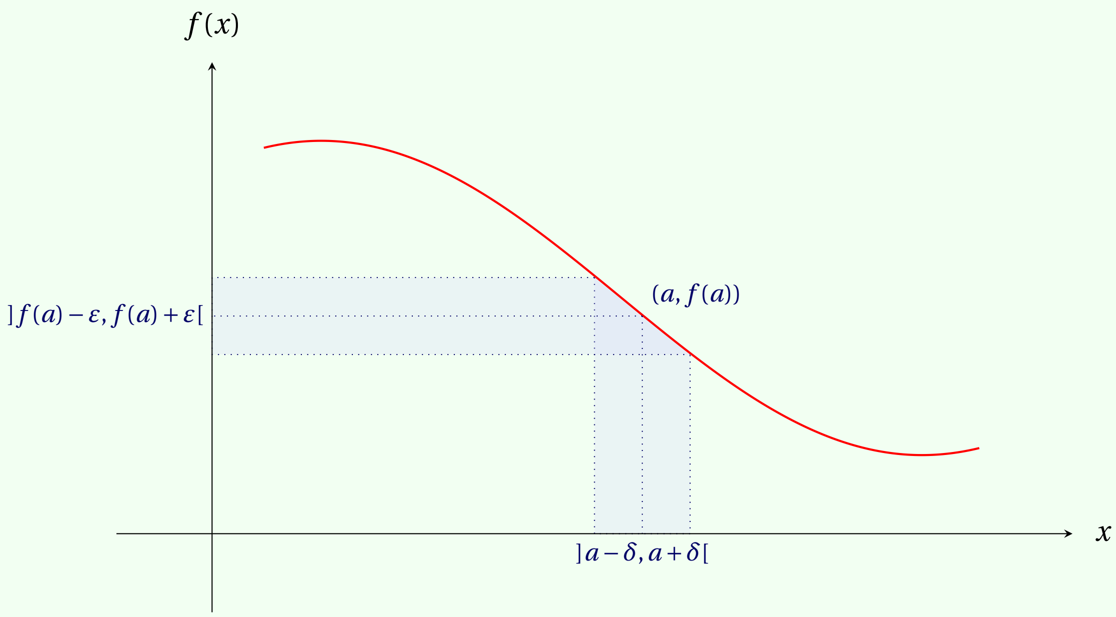
Dans toute cette section I désigne un intervalle réel.

1. Définition

Définition 7.29

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et soit $a \in I$.
On dit que f est **continue en** a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, c'est à dire si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon}$$



$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Définition 7.30

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I. On dit que f est **continue sur** I si f est continue en a quel que soit $a \in I$.

Propriété 7.35 (admise)

La plupart des fonctions de référence sont continues sur tout intervalle où elles sont définies :

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$
- $x \longmapsto \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $x \longmapsto \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $x \longmapsto \tan x$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
- $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $x \longmapsto \ln x$ est continue sur $]0, +\infty[$
- $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}^*$ car $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle, mais elle est continue sur $]-\infty, 0[$ et continue sur $]0, +\infty[$.

Remarque

La fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$

→ **Exercice de cours n^o 14.**

Propriété 7.36 (Opérations)

Soit f et g deux fonctions continues sur I. Alors

- $f + g$ est continue sur I
- $f \times g$ est continue sur I
- Si $\forall x \in I, g(x) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue

Propriété 7.37 (Composée de fonctions continues)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I.

2. Prolongement par continuité

Définition 7.31

Soit I un intervalle et $a \in I$ et soit $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **prolongeable par continuité en** a s'il existe un prolongement de f à I continu sur I, c'est à dire une fonction $\hat{f} : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et telle que $\hat{f}|_{I\setminus\{a\}} = f$.

Proposition 7.38

Soit I un intervalle, soit $a \in I$ et soit f une fonction continue définie sur $I \setminus \{a\}$. f est prolongeable par continuité en a si et seulement si f admet une limite finie en a.

→ **Exercice de cours n° 15.**

Proposition 7.39

Si a n'est pas une borne de I, alors f est prolongeable par continuité en a si et seulement si f admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite en a et que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

→ **Exercice de cours n° 16.**

3. Applications

a. Continuité et suites

Proposition 7.40

Si (u_n) converge vers une limite finie ℓ, et que f est une fonction continue en ℓ, alors $f(u_n)$ converge aussi et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

→ **Exercice de cours n° 17.**

Exemple 7.9

Un contre exemple avec une fonction non continue : $f : x \longmapsto \lfloor x \rfloor$.

Le fait que (u_n) converge n'entraine pas nécessairement que $(\lfloor u_n \rfloor)$ converge. Exemple avec la suite $1 + \frac{(-1)^n}{n}$ qui converge vers 1, mais pour $n \geq 2$ on a :

- ▷ Si n est pair $\left\lfloor 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\rfloor = \left\lfloor 1 + \frac{1}{n} \right\rfloor = 1$
- ▷ Si n est impair $\left\lfloor 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\rfloor = \left\lfloor 1 - \frac{1}{n} \right\rfloor = 0$

donc la suite $\left(\lfloor 1 + \frac{(-1)^n}{n} \rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

b. Continuité et monotonie

Propriété 7.41

Soient $a < b$ deux réels. Alors

- Si f est continue sur $[a, b]$ et monotone sur $]a, b[$ alors f est monotone sur $[a, b]$.
- Si f est continue sur $[a, b]$ et strictement monotone sur $]a, b[$ alors f est strictement monotone sur $[a, b]$

c. Théorème des valeurs intermédiaire

Théorème 7.42 (des valeurs intermédiaires)

Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue**. Soit $\alpha \in [f(a), f(b)]$ (ou $\alpha \in [f(b), f(a)]$ le cas échéant). Alors il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \alpha$.

Remarque

Le théorème est encore vrai si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ (ou les deux). On remplace alors $f(a)$ par $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $f(b)$ par $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

→ **Exercice de cours n° 18.**

Remarque

Les équations à une inconnue x peuvent souvent se ramener à une équation de la forme $g(x) = 0$. Lorsqu'on cherche à démontrer l'existence d'un antécédent de 0 par la fonction g, le théorème des valeurs intermédiaires peut se formuler de la façon suivante :

Si g est continue et que $g(a)g(b) \leq 0$, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$

En effet, $g(a)g(b) \leq 0$ signifie que $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes contraires donc que 0 est compris entre $g(a)$ et $g(b)$, le TVI s'applique donc.

→ **Exercice de cours n° 19.**

Théorème 7.43 (Corollaire du TVI)

Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur $[a,b]$. Soit $\alpha \in [f(a), f(b)]$ (ou $\alpha \in [f(b), f(a)]$ le cas échéant). Alors il existe un **unique** réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \alpha$.

Remarque

Le corollaire est encore vrai si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ (ou les deux). On remplace alors $f(a)$ par $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $f(b)$ par $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

→ **Exercice de cours n° 20.**

Proposition 7.44 (conséquence du TVI)

Si I est un intervalle et que f est continue sur I, alors $f(I)$ est un intervalle.

d. Théorème des valeurs atteintes

Définition 7.32

On appelle **intervalle fermé borné** tout intervalle de la forme $[a;b]$.

Théorème 7.45 (des valeurs atteintes, admis)

Si I est un intervalle fermé borné, alors $f(I)$ est un intervalle fermé borné.
En particulier, si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, alors f est bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes, c'est à dire qu'elle admet un minimum et un maximum sur $[a,b]$.

e. Théorème de la bijection

Une autre formulation du corollaire du TVI est le **théorème de la bijection**

Théorème 7.46 de la bijection

Soient $a < b$ deux réels et soit $I = [a;b]$. Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I. Alors $J = f(I)$ est un intervalle dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$ et f réalise une bijection de I vers J. De plus, sa fonction réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur J, de même sens de variation que f.

Remarque

Le théorème de la bijection est encore vrai si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, on remplace alors $f(a)$ et $f(b)$ par $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ le cas échéant.

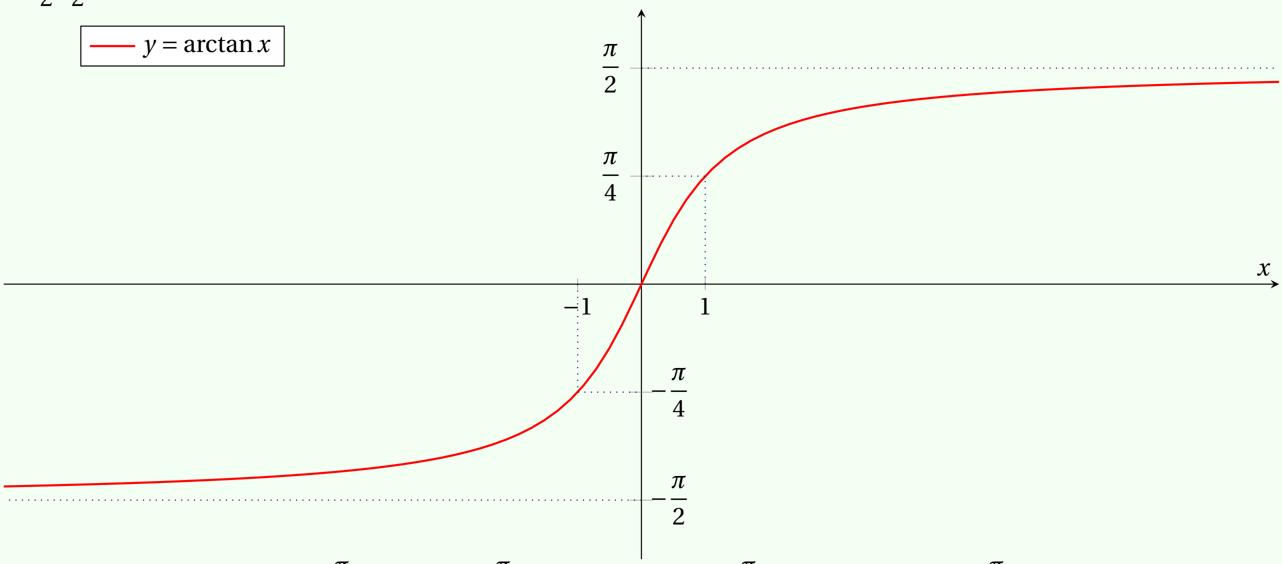
Le théorème est aussi vrai si l'une des bornes est ouverte, l'image d'une borne ouverte est alors ouverte et l'image d'une borne fermée est fermée.

→ **Exercice de cours n° 21.**

f. Fonction arctangente

Définition 7.33

La fonction $x \longmapsto \tan x$ est continue et strictement croissante sur $I =]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. De plus, $\tan(I) = \mathbb{R}$. En vertu du théorème de la bijection, il existe donc une fonction notée arctan définie et continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$.



On retient que $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.

→ **Exercice de cours n° 22.**

Propriété 7.47

Soient I et J deux intervalles et f une bijection de I vers J dérivable sur I. Si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et on a :

$$\boxed{\forall x \in J, \quad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}}$$

Propriété 7.48

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Exercices de cours

Exercice 1

Montrer les deux inégalités suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \geq x+1 \quad ; \quad \forall x>0, \quad \ln(1+x) \leq x$$

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$
2. $\dfrac{2\ln(2)+\ln(9)}{\ln(6)}$
3. $\ln(x^2-4)-\ln(x+2)$
4. $\ln\left(\mathrm{e}^{x^2}\times(\mathrm{e}^{2-2x})^2\right)\mathrm{e}^{-\ln(x-2)}$
5. $\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(k^2+k)-\ln(k+1)\right)$
6. $x+\ln(1+\mathrm{e}^{-x})+\ln(1-\mathrm{e}^x)$

Exercice 3

Résoudre les équations et inéquations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivantes :

a) $\mathrm{e}^{2x}+2\,\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x+6$

b) $\ln(2)+\ln(x-1)+\ln(x-3)=\ln(4-4x)$

c) $2\ln(x)^2-\ln(x)-1=0$

Exercice 4

Montrer qu'il n'existe aucun polynôme P tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x=P(x)$.

Exercice 5

Factoriser les polynômes suivants :

a) $f(X)=X^3+X^2-2$

b) $g(X)=X^3+X^2+X+1$

c) $h(X)=X^3-2X^2+X-2$

Exercice 6

Déterminer l'ensemble des polynômes à coefficients réels P tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x+1)=P(x)$.

Exercice 7

Montrer en utilisant uniquement la définition que $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$.

Exercice 8

Montrer en utilisant uniquement la définition que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

Exercice 9

Montrer que $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x^3)$ et $x^3 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^2)$.

Exercice 10

Déterminer les limites des fonctions suivantes lorsque x tend vers $+\infty$

1. $f(x)=(\ln x)^3\,\mathrm{e}^{-x}$
2. $g(x)=\mathrm{e}^{4x}-x^2\,\mathrm{e}^{3x}\ln(x)$
3. $h(x)=\ln(x)\times\dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x}$
4. $k(x)=\dfrac{\ln(\ln(x))}{\sqrt{\ln(x)}}$

Exercice 11

Démontrer les équivalents suivants :

1. $\sqrt{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$
2. $\ln(x+x^2) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\ln(x)$
3. $e^x + x^3 \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$
4. $e^x + x^3 \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3$
5. $\ln x + 2 \underset{x\to 0}{\sim} \ln x$
6. $\ln x + \frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}$

Exercice 12

Utiliser des développement limités à l'ordre 1 pour calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{3+x}-1}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x^2)}{\sin(x)\sqrt{1-x}}$

Exercice 13

Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes au voisinage de a :

1. $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, $a = +\infty$
2. $g(x) = \ln(x^2+x) - \ln(x^2)$, $a = +\infty$
3. $h(x) = \dfrac{\ln(e^{1/x}+1)}{e^{\ln(x)+x} - x}$, $a = 0$
4. $k(x) = 1 - \cos^2(\sqrt{x})$, $a = 0$

Exercice 14

Étudier la continuité des deux fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 0 \\ \cos(x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \quad ; \quad g : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 3-x^2 & \text{si } x < -2 \\ x+1 & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 15

On considère la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Montrer que f peut se prolonger par continuité en une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16

On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{1+\ln(x)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Montrer que f se prolonge par continuité en une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17

Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$ et $u_0 = 3$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 18

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x e^{1-x}$.
Montrer qu'il existe au moins deux réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 19

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Montrer qu'il existe un réel $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = f(1-c)$.

Exercice 20

Montrer qu'il existe un unique réel $x_0 \in]0,1[$ tel que $\sin\left(\dfrac{\pi x_0}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Exercice 21

Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2-6\,\mathrm{e}^x}{1+2\,\mathrm{e}^x}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle que l'on déterminera.

Exercice 22

Déterminer la valeur de $\arctan(-\sqrt{3})$ et $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$