Programme de khôlle de maths n° 4

Semaine du 9 Octobre

Cours

Révisions : études de fonctions. Savoir déterminer l'ensemble de définition, étudier les variations, le signe, les limites aux bornes de l'ensemble de définition, les asymptotes verticales et horizontales. Toutes les fonctions vues au lycée. TVI.

Chapitre 2 : Logique

- Logique : propositions, connecteurs, quantificateurs, implication et équivalences.
- Raisonnement par l'absurde, par contraposée, par disjonction de cas, par analyse-synthèse.

Chapitre 3 : Ensembles et applications

- Egalité, inclusion, union, intersection, complémentaire.
- Ensemble vide, ensemble $\mathcal{P}(E)$ des sous-ensembles d'un ensemble E.
- Union et intersection d'une famille quelconque d'ensembles.
- Application $f : E \to F$, ensemble de départ, ensemble d'arrivée, image directe $f(A)$ de $A \in \mathcal{P}(E)$, image réciproque $f^{-1}(B)$ avec $B \in \mathcal{P}(F)$
- Injection, surjection, bijection
- $f : E \to F$ est une bijection ssi $\exists g : F \to E$ tq $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$

Questions de cours et exercice

- **Questions de cours et exercices vus en classe**
  - Démontrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - Démontrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ et que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
  - Démontrer que $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective et $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.
  - Soient A,B,C trois partie de E. Montrer que
    1. $A \cap B = C \iff B \subset A$
    2. $A \cup B = B \iff A \subset B$
    3. $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C \iff B = C$
    4. $\overline{A} \subset B \iff \overline{B} \subset A$
  - Déterminer les ensembles $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n+1[$ et $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0; \frac{1}{n}[$
  - Trouver un exemple d'application $f : E \to F$ et de sous ensembles A, B de E tels que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$
  - Montrer que
    1. $A \subset f^{-1}(f(A))$
    2. $f(f^{-1}(B)) \subset B$
    3. Trouver f telle que $A \neq f^{-1}(f(A))$
  - Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ est bijective et déterminer f^{-1}

Exercices

Exercice 1 : Exprimer la négation de f est injective, f est surjective, f est bijective.

Exercice 2 : Montrer que $A = B \iff A \cap B = A \cup B$

Exercice 3 :

Montrer que $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Exercice 4 : Soit $f : E \to F$. Trouver une condition sur f pour que $\forall B \subset F$, $f(f^{-1}(B)) = B$

Trouver une condition sur f pour que $\forall A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

Exercice 5 : Trouver une bijection de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Z}$ (et démontrer que c'en est une).

Exercice 6 : On considère $f : R \to [-1;1], x \mapsto \cos(x)$.

Donner un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $f_{|I}$ soit surjective mais non injective, un autre tel que $f_{|I}$ soit injective mais non surjective, un autre tel que $f_{|I}$ soit bijective.

Exercice 7 : soient A, B, C trois ensembles tels que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que $A \subset B \subset C$.

Exercice 8 :

On suppose que $A \cup B = A \cap C$ et $B \cup C = B \cap A$ et $C \cup A = C \cap B$.

Montrer que $A = B = C$.

Exercice 9 : Montrer que la composée de deux surjections est une surjections, la composée de deux injections est une injection. Conclure sur la composée de deux bijections.

Exercice 10 : Soit $f : E \to F$. Montrer que f est injective ssi $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 11 : Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (x + 2y, -x - 3y)$ est bijective et déterminer son application réciproque.

Exercice 12 : Montrer que la seule application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ qui vérifie $f(n + 1) > f(f(n))$ pour tout n est l'identité.

Indication : par récurrence

Exercice 13 : Soit E un ensemble et $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 14 : Montrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Que peut on dire de $\mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$?

Exercice 15 : Existe-t-il f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f \circ g = x^2$ et $g \circ f = x^3$.

Indication : non

Exercice 16 : Montrer que $f : E \to F$ est bijective ssi $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

Exercice 17 : Étudier l'injectivité et la surjectivité de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (y - 2x, 2y - x, x + y)$