

★

Exercice 1

Voir correction

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^3 = A$.

★

Exercice 2

Voir correction

Soit A une matrice carrée de taille n telle que $A^4 = I_n$ et $A^3 \neq A$. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

★

Exercice 3

Voir correction

Soit ϕ l'application qui à tout polynôme $P(X)$ associe le polynôme $\phi(P) = P(X) - (X-1)P'(X) + \frac{(X-1)^2}{2}P''(X)$.

- 1) Pour tout entier positif n , montrer que ϕ définit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[x]$. déterminer son noyau.
- 2) On se place dans cette question uniquement dans le cas $n = 2$: déterminer la matrice représentative de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
- 3) En fonction de n , combien ϕ admet-il de valeurs propres distinctes ?

★

Exercice 4

Voir correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que AB est diagonalisable.

- 1) Montrer que si A ou B est inversible, alors BA est diagonalisable.
- 2) Si A et B ne sont pas inversible, a-t-on toujours ce résultat ?

★ ★

Exercice 5

Voir correction

Soit a un réel non nul et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1/a & 1 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 1 \end{pmatrix}$.

- 1) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A . A est-elle diagonalisable ?

On fixe un entier $n \geq 1$ et $2n$ réels a_1, \dots, a_n et b_1, \dots, b_n (certains d'entre eux peuvent être nuls).

On note M la matrice $(a_i b_j)_{1 \leq i, j \leq n}$.

- 2) Montrer que $M = A$ pour des paramètres n , a_i et b_j à préciser.
- 3) Donner les valeurs propres de M (et leur multiplicité) en fonction des a_i et des b_j dans le cas général, et indiquer une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité de M .

★ ★

Exercice 6

Voir correction

On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on considère l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = [(X^2 - 1)P']'$$

- 1) Calculer la matrice de f dans la base canonique.
- 2) Déterminer les valeurs propres de f .
- 3) Montrer que f est diagonalisable.

★ ★

Exercice 7

Voir correction

Soit f un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$ tel que $\text{rg}(f) \leq 1$ et $f^3 + f = 0$.

- 1) Montrer que 0 est l'unique valeur propre de f .
- 2) On suppose que $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
 - a) Montrer que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$
 - b) En déduire une contradiction. Conclure.

★ ★ ★

Exercice 8

Voir correction

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 - 5u^2 + 6u = 0$. Étudier la diagonalisabilité de u .

★ ★ ★

Exercice 9

Voir correction

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme nilpotent de E , de rang $n - 1$.

- Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $0 \leq \dim(\operatorname{Im}(u^k)) - \dim(\operatorname{Im}(u^{k+1})) \leq 1$
Indication : appliquer le théorème du rang à la restriction de u à $\operatorname{Im}(u^k)$
- Montrer que s'il existe $k_0 \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ tel que $\operatorname{Ker}(u^{k_0}) = \operatorname{Ker}(u^{k_0+1})$, alors $\operatorname{Ker}(u^{k_0}) = E$.
- En déduire que la suite $(\dim(\operatorname{Ker}(u^k)))_{0 \leq k \leq n}$ forme une suite strictement croissante, puis que $\dim(\operatorname{Ker}(u^k)) = k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
- Montrer que les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par u sont les $\operatorname{Ker}(u^k)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

★ ★

Exercice 10

Voir correction

On appelle **matrice stochastique** une matrice carrée à coefficients positifs telle que la somme des coefficients de chaque ligne soit égale à 1.

$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice stochastique si $\begin{cases} \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \geq 0 \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1 \end{cases}$.

- Montrer que si A, B sont deux matrices stochastiques, alors AB est stochastique.
- Montrer que si A est une matrice stochastique, alors 1 est valeur propre de A .
- Montrer que toute valeur propre λ de A vérifie $|\lambda| \leq 1$

★ ★ ★

Exercice 11

Voir correction

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et I la matrice identité de taille n .

- Montrer que s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $AB - BA = \alpha I$, alors A et B commutent.
- Soit $W \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.
 - Montrer que si W est diagonalisable, alors $\operatorname{tr}(W) \neq 0$
 - Montrer que si $\operatorname{tr}(W) \neq 0$, alors W est diagonalisable.
 - Montrer que si la trace de W est nulle, alors $W^2 = 0$
- On suppose que $V = AB - BA$ est de rang 1. Montrer que pour tout entier k , $VA^kV = 0$. On pourra commencer par montrer que $(VA^k)^2 = 0$.

Le coin des khûbes

★ ★

Exercice 12

Voir correction

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité $A^k B - BA^k = kA^k$
- L'ensemble des matrices nilpotentes forme-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
- Montrer que A est nilpotente en étudiant l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto MB - BM$.

★ ★

Exercice 13

Voir correction

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et a et b deux réels **distincts**. on note Id_E l'application identité de E . Dans tout l'exercice, f désigne un endomorphisme de E vérifiant :

$$f^2 - (a + b)f + ab\operatorname{Id}_E = 0 \tag{1}$$

- Quelles sont les homothéties vérifiant la relation (1) ?
- Déterminer une condition suffisante portant sur les deux réels a et b pour que f soit bijective. Calculer alors f^{-1} .
 - On suppose que f n'est pas une homothétie. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les deux réels a et b pour que f soit un projecteur.

On suppose désormais que f n'est **pas** une homothétie.

- 3) a) Déterminer deux réels λ et μ tels que $f = \lambda(f - a\text{Id}_E) + \mu(f - b\text{Id}_E)$
 b) En déduire qu'il existe deux projecteurs p et q tels que $f = bp + aq$ et $p \circ p = p \circ q = 0$
- 4) On suppose désormais que a et b sont non nuls. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f^n = b^n p + a^n q \quad (2)$$

Pour tout entier $n > 0$ si f est bijective, on définit f^{-n} par $f^{-n} = (f^{-1})^n$. La relation (2) est-elle vérifiée pour tout $n \in \mathbb{Z}$?

★ ★ ★

Exercice 14

Voir correction

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension fini.

- 1) Soit u un endomorphisme diagonalisable de E . Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , alors $u|_F$ est diagonalisable.
- 2) Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent. Montrer que u et v possèdent une base commune de diagonalisation, c'est à dire qu'il existe une base \mathcal{B} telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ sont toutes deux diagonales.
- 3) Soit f un endomorphisme inversible de E tel que f^2 et f^3 sont diagonalisables. Montrer que f est diagonalisable.

Correction des exercices

Correction de l'exercice 1 : L'idée est de d'abord diagonaliser A .

$\det(A - XI) = (-5 - X)(-2 - X) - 18 = X^2 + 7X - 8 = (X + 8)(X - 1)$. Ce trinôme a deux racines : $X_1 = -8$ et $X_2 = 1$, donc A a deux valeurs propres distinctes, 1 et -8 . On en déduit que A est diagonalisable, donc qu'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$. En posant $B = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}$, on a donc $B^3 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^3 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} P^{-1} = A$.

Correction de l'exercice 2 : $X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de A et $X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$. Ses seules racines sont -1 et 1 donc ce sont les seules valeurs propres possibles de A .

Élever au carré une matrice diagonale avec seulement des -1 et des 1 sur la diagonale donne la matrice identité. Si A était diagonalisable, A^2 serait semblable à I_n donc égale à I_n . L'égalité $A^2 = I_n$ donnerait ensuite $A^3 = A$, ce qui contredit les hypothèses de l'énoncé. On en conclut que A n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 3 :

- 1) Toutes les dérivées d'un polynôme sont des polynômes, un produit et une somme de polynôme est un polynôme donc si $P \in \mathbb{R}_n[x]$, $\phi(P)$ est un polynôme et on a : $\deg((X - 1)P'(X)) = \deg(X - 1) + \deg(P'(X)) \leq 1 + n - 1 \leq n$ et $\deg(\frac{(X - 1)^2}{2}P''(X)) = \deg(\frac{(X - 1)^2}{2}) + \deg(P''(X)) \leq 2 + n - 2 \leq n$, donc par somme $\deg(\phi(P)) \leq n$ donc $\phi(P) \in \mathbb{R}_n[x]$.
- 2) Dans le cas $n = 2$, une base possible de $\mathbb{R}_2[x]$ est $(1, X, X^2)$. On a $\phi(1) = 1$, $\phi(X) = X - (X - 1) = 1$ et $\phi(X^2) = X^2 - 2X(X - 1) + 2\frac{(X - 1)^2}{2} = -X^2 + 2X + X^2 - 2X + 1 = 1$. La matrice de ϕ dans cette base est donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 3) On peut constater que si P est de degré $k \leq n$, alors $\phi(P)$ est de degré inférieur ou égal à k . Ainsi, dans la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$, la matrice de ϕ est triangulaire supérieure et ses valeurs propres se lisent alors sur la diagonale.

$$\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad \phi(X^k) = X^k - k(X - 1)X^{k-1} + k(k - 1)\frac{X^2 - 2X + 1}{2}X^{k-2}$$

Le terme de degré k de $\phi(X^k)$ est donc $1 - k + \frac{k(k - 1)}{2} = \frac{k^2 - 3k + 2}{2}$.

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2)$ a pour dérivée $f'(x) = x - \frac{3}{2}$ donc est strictement croissante sur $[2; +\infty[$. Ainsi, les valeurs $\frac{k^2 - 3k + 2}{2}$ sont toutes distinctes lorsque k parcourt $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

De plus, $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$, et on savait déjà que 0 et 1 était valeur propre grâce à la question précédente. $f(2) = 0$ redonne la valeur propre 0 et $f(3) = 1$ redonne la valeur propre 1. À partir de $k = 4$ on a $f(k) \geq 3$ donc on obtient uniquement de nouvelles valeurs propres.

En conclusion, les valeurs propres de ϕ sont $\left\{ \frac{k^2 - 3k + 2}{2}, k \in \llbracket 2, n \rrbracket \right\}$, cet endomorphisme possède donc $n - 1$ valeurs propres distinctes.

Correction de l'exercice 4 :

- 1) Supposons A inversible, alors $BA = A^{-1}ABA$ donc BA est semblable à AB . Puisque AB est diagonalisable, BA est semblable à une matrice diagonalisable donc diagonalisable.
(En effet, il existe P inversible et D diagonale telles que $AB = PDP^{-1}$ donc $BA = A^{-1}PDP^{-1}A = (P^{-1}A)^{-1}D(P^{-1}A)$). De même, supposons B inversible, alors $BA = BABB^{-1}$ donc BA est semblable à AB , donc est diagonalisable.
- 2) Si A et B ne sont pas inversible ce résultat n'est plus vrai. On a par exemple avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc AB est diagonale donc diagonalisable, mais $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. BA n'est pas diagonalisable : en effet elle est triangulaire supérieure avec uniquement des 0 sur la diagonale. Si elle était diagonalisable elle aurait pour seule valeur propre 0 donc serait égale à la matrice nulle.
Dans cet exemple AB est donc diagonalisable mais BA ne l'est pas.

Correction de l'exercice 5 :

- 1) On remarque que les trois colonnes de A sont colinéaires à la première, en la multipliant par a et par a^2 .

Ainsi, A est de rang 1 donc son noyau est de dimension 2. De plus, on remarque que $A \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a^2 \\ 3a \\ 3 \end{pmatrix} = 3X$ donc

$X = \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 3.

La somme des dimensions des sous espaces propres associés aux valeurs propres 3 et 0 est supérieure ou égale à 3 donc A est diagonalisable.

- 2) Pour $n = 3$ et $(a_1, a_2, a_3) = (1, a, a^2)$ et $(b_1, b_2, b_3) = (1, 1/a, 1/a^2)$ (c'est à dire $a_i = a^{i-1}$ et $b_j = a^{1-j}$) on a $a_i b_j = a^{i-j}$ et donc on a bien $A = (a_i b_j)_{1 \leq i, j \leq n}$.
- 3) Si $M = 0$, elle est diagonalisable avec pour seule valeur propre 0.

Sinon, M est de rang 1 car toutes ses colonnes sont de la forme $b_j \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ donc toutes colinéaires. Ainsi 0 est valeur propre de M de multiplicité $n - 1$.

Raisonnons par analyse synthèse : soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et supposons qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $MX = \lambda X$

Puisque $\text{Im}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right)$ et que $\lambda X \in \text{Im}(M)$ alors $X \in \text{Im}(M)$, il existe donc un réel μ tel que $X = \mu \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

On a alors

$$MX = \mu \cdot \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_1 b_j a_j \\ \sum_{j=1}^n a_2 b_j a_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_n b_j a_j \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n b_j a_j \begin{pmatrix} \mu a_1 \\ \mu a_2 \\ \vdots \\ \mu a_n \end{pmatrix} = \text{tr}(M) \cdot X$$

donc la valeur propre associée à X est $\text{tr}(M)$.

Réciproquement, le même calcul montre que $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre $\text{tr}(M)$.

En conclusion, il y a trois cas possibles :

- Ou bien $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$, auquel cas $M = 0$ donc M est diagonalisable.
- Ou bien $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq 0$, et $\text{tr}(M) \neq 0$, auquel cas M admet deux valeurs propres : 0, de multiplicité $n - 1$, et $\text{tr}(M)$, de multiplicité 1, et donc M est diagonalisable.
- Ou bien $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq 0$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \neq 0$, et $\text{tr}(M) = 0$. Dans ce cas, la seule valeur propre de M est 0 mais M n'est pas la matrice nulle, donc M n'est pas diagonalisable.

Ainsi M est diagonalisable si et seulement si $M = 0$ ou si $\text{tr}(M) \neq 0$.

Correction de l'exercice 6 :

- 1) Pour $P = 1$, $P' = 0$ donc $f(P) = 0$

Pour $P = X$, $P' = 1$ donc $f(P) = (X^2 - 1)' = 2X$

Pour $P = X^2$, $P' = 2X$ donc $f(P) = (2(X^2 - 1)X)' = 4X^2 + 2(X^2 - 1) = 6X^2 - 2$

Pour $P = X^k$, $P' = kX^{k-1}$ donc $f(P) = (k(X^2 - 1)X^{k-1})' = 2kXX^{k-1} + k(k-1)(X^2 - 1)X^{k-2} = (k + k^2)X^k - (k^2 - k)X^{k-2}$.

2) Dans la base canonique, la matrice de f est une matrice triangulaire supérieure :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & k^2 + k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & n^2 + n \end{pmatrix}$$

dont les coefficients diagonaux sont $(k^2 + k)_{0 \leq k \leq n}$. Ainsi, $\text{sp}(f) = \{k^2 + k \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

3) Les valeurs propres de f sont toutes distinctes car la suite $(k^2 + k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante (différentes façon de le montrer : montrer que $u_{n+1} - u_n > 0$, montrer que $x \mapsto x^2 + x$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, etc...). La matrice de f est de taille $n + 1$ et elle a $n + 1$ valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable.

Correction de l'exercice 7 :

1) $X^3 + X$ est un polynôme annulateur de f . Comme $X^3 + X = X(X^2 + 1)$, sa seule racine est 0 donc la seule valeur propre possible de f est 0.

Comme f est de rang 0 ou 1 et que $\dim(E) \geq 2$, alors le théorème du rang donne $\dim(\text{Ker}(f)) \geq 1$ donc 0 est valeur propre de f .

2) Supposons $f \neq 0$

a) Si f est de rang 0, alors $f = 0$ et le résultat est évident. Si f est de rang 1, il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$ et $\text{Im}(f) = \text{Vect}(x_0)$. De plus, $f(x_0) \in \text{Im}(f)$ donc il existe λ_0 tel que $f(x_0) = \lambda_0 x_0$. Or 0 est la seule valeur propre de f donc $\lambda_0 = 0$. Ainsi, $f(x_0) = 0$ donc pour tout $y \in \text{Im}(f)$, il existe μ tel que $y = \mu x_0$ et $f(y) = \mu f(x_0) = 0$. On en déduit que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

b) Pour tout $x \in E$, $f(x) \in \text{Im}(f)$ donc $f(x) \in \text{Ker}(f)$ et ainsi $f^2(x) = 0$. On a donc $f^2 = 0$ donc $f^3 = 0$ et donc $f = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $f \neq 0$.

On en conclut que le seul endomorphisme f de E vérifiant $\text{rg}(f) \leq 1$ et $f^3 + f = 0$ est l'endomorphisme nul.

Correction de l'exercice 8 : On remarque que $u^3 - 5u^2 + 6u = u \circ (u^2 - 5u + 6\text{id}) = u \circ (u - 2\text{id}) \circ (u - 3\text{id})$. Ainsi, $\text{Ker}(u \circ (u - 2\text{id}) \circ (u - 3\text{id})) = \text{Ker}(0_{\mathcal{L}(E)}) = E$.

Première Méthode (avec $\dim(\text{Ker}(f \circ g)) \leq \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(g))$:

Montrons préalablement que si f et g sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors $\dim(\text{Ker}(f \circ g)) \leq \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(g))$:

La restriction $f|_{\text{Im}(g)}$ de f à $\text{Im}(g)$ vérifie $\text{Im}(f|_{\text{Im}(g)}) = \text{Im}(f \circ g)$, si on applique le théorème du rang à $f|_{\text{Im}(g)}$ on obtient donc :

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}(g)) &= \text{rg}(f|_{\text{Im}(g)}) + \dim(\text{Ker}(f|_{\text{Im}(g)})) \\ n - \dim(\text{Ker}(g)) &= \text{rg}(f \circ g) + \dim(\text{Ker}(f|_{\text{Im}(g)})) \\ n - \dim(\text{Ker}(g)) &= n - \dim(\text{Ker}(f \circ g)) + \dim(\text{Ker}(f|_{\text{Im}(g)})) \end{aligned}$$

d'où $\dim(\text{Ker}(f \circ g)) = \dim(\text{Ker}(g)) + \dim(\text{Ker}(f|_{\text{Im}(g)}))$. Or $\text{Ker}(f|_{\text{Im}(g)}) \subset \text{Ker}(f)$ (car $x \in \text{Ker}(f|_{\text{Im}(g)}) \Rightarrow f|_{\text{Im}(g)}(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$), d'où l'inégalité voulue.

D'après le cours, $\text{Ker}(u)$, $\text{Ker}(u - 2\text{id})$ et $\text{Ker}(u - 3\text{id})$ sont en somme directe (avec éventuellement certains des ces sous-espaces vectoriels réduits à $\{0\}$). On a donc

$$\text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u - 2\text{id}) \oplus \text{Ker}(u - 3\text{id}) \subset E \quad (1)$$

et puisque la somme est directe on a $\dim(\text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u - 2\text{id}) \oplus \text{Ker}(u - 3\text{id})) = \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Ker}(u - 2\text{id})) + \dim(\text{Ker}(u - 3\text{id}))$.

D'après l'inégalité sur les noyaux montrée (qui s'étend par récurrence immédiate à une composition de plusieurs endomorphismes) :

$$\dim(\text{Ker}(u \circ (u - 2\text{id}) \circ (u - 3\text{id}))) \leq \underbrace{\dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Ker}(u - 2\text{id})) + \dim(\text{Ker}(u - 3\text{id}))}_{=\dim(\text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u - 2\text{id}) \oplus \text{Ker}(u - 3\text{id}))} \quad (2)$$

Or $u \circ (u - 2\text{id}) \circ (u - 3\text{id}) = 0$ donc $\text{Ker}(u \circ (u - 2\text{id}) \circ (u - 3\text{id})) = \text{Ker}(0) = E$ et donc l'inégalité (2) donne

$$\dim(E) \leq \dim(\text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u - 2\text{id}) \oplus \text{Ker}(u - 3\text{id})) \leq \dim(E)$$

Donc toutes ces inégalités sont des égalités et l'inclusion (1) est une égalité. Ainsi, $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u - 2\text{Id}) \oplus \text{Ker}(u - 3\text{Id})$ donc u est diagonalisable avec $\text{Sp}(u) \subset \{0, 2, 3\}$.

Remarque : On peut appliquer cette méthode dès lors qu'on dispose d'un polynôme annulateur de u qui est **scindé à racines simples**, c'est à dire qui s'écrit sous la forme $\prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$ avec tous les λ_k distincts.

Seconde méthode (par analyse-synthèse) : Soit $x \in E$. On cherche à écrire x sous la forme $x = x_1 + x_2 + x_3$ avec $x_1 \in \text{Ker}(u)$, $x_2 \in \text{Ker}(u - 2\text{id})$ et $x_3 \in \text{Ker}(u - 3\text{id})$. Supposons que ce soit le cas et appliquons u , on obtient

$$u(x) = 0 + 2x_2 + 3x_3$$

en appliquant de nouveau u :

$$u^2(x) = 4x_2 + 9x_3$$

$$\text{On résout le système } \begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = u(x) \\ 4x_2 + 9x_3 = u^2(x) \end{cases} \text{ et on trouve } \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}(3u(x) - u^2(x)) \\ x_3 = \frac{1}{3}(-2u(x) + u^2(x)) \end{cases}.$$

Réciproquement, si on pose $x_2 = \frac{1}{2}(3u(x) - u^2(x))$, $x_3 = \frac{1}{3}(-2u(x) + u^2(x))$ et $x_1 = x - x_2 - x_3 = x - \frac{5}{6}u(x) + \frac{1}{6}u^2(x)$, alors

$$u(x_2) - 2x_2 = \frac{1}{2}(3u^2(x) - u^3(x)) - 3u(x) + u^2(x) = \frac{1}{2}(-u^3(x) + 5u^2(x) - 6u(x)) = 0 \quad \text{car } u^3 - 5u^2 + 6u = 0$$

on a bien $x_2 \in \text{Ker}(u - 2\text{id})$.

$$u(x_3) - 3x_3 = \frac{1}{3}(-2u^2(x) + u^3(x)) + 2u(x) - u^2(x) = \frac{1}{3}(u^3(x) - 5u^2(x) + 6u(x)) = 0$$

on a bien $x_3 \in \text{Ker}(u - 3\text{id})$

$$u(x_1) = u(x) - \frac{5}{6}u^2(x) + \frac{1}{6}u^3(x) = \frac{1}{6}(u^3(x) - 5u^2(x) + 6u(x)) = 0$$

On a bien $x_1 \in \text{Ker}(u)$.

Ainsi, $x \in \text{Ker}(u) + \text{Ker}(u - 2\text{id}) + \text{Ker}(u - 3\text{id})$, donc $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u - 2\text{id}) \oplus \text{Ker}(u - 3\text{id})$, u est donc diagonalisable avec $\text{Sp}(u) \subset \{0; 2; 3\}$.

Correction de l'exercice 9 :

- 1) On sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Im}(u^{k+1}) \subset \text{Im}(u^k)$ donc $\dim(\text{Im}(u^k)) - \dim(\text{Im}(u^{k+1})) \geq 0$.

Considérons la restriction de u à $\text{Im}(u^k)$ et appliquons le théorème du rang

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}(u^k)) &= \text{rg}(u|_{\text{Im}(u^k)}) + \dim(\text{Ker}(u|_{\text{Im}(u^k)})) \\ &= \text{rg}(u^{k+1}) + \dim(\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u^k)) \end{aligned}$$

Or $\text{rg}(u) = n - 1$ donc $\dim(\text{Ker}(u)) = 1$ et donc $\dim(\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u^k)) \leq 1$, d'où le résultat.

- 2) Supposons qu'il existe $k_0 \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ tel que $\text{Ker}(u^{k_0}) = \text{Ker}(u^{k_0+1})$.

Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(k) : \text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^{k+1})$ pour $k \geq k_0$

- **Initialisation** : La propriété est vraie pour $k = k_0$ par hypothèse
- **Hérédité** : Supposons la propriété vraie pour un rang k . On sait que $\text{Ker}(u^{k+1}) \subset \text{Ker}(u^{k+2})$, montrons l'inclusion réciproque :
soit $x \in \text{Ker}(u^{k+2})$. Alors $u(x) \in \text{Ker}(u^{k+1})$ mais $\text{Ker}(u^{k+1}) = \text{Ker}(u^k)$ par hypothèse de récurrence, donc $u^k(u(x)) = 0$, autrement dit $u^{k+1}(x) = 0$ et donc $x \in \text{Ker}(u^{k+1})$. Ainsi $\text{Ker}(u^{k+2}) \subset \text{Ker}(u^{k+1})$
- **Conclusion** : Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $k \geq k_0$ on a $\text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^{k+1})$

Or on sait que u est nilpotente donc $u^n = 0$, et $\text{Ker}(u^n) = \text{Ker}(0) = E$, donc $\text{Ker}(u^{k_0}) = E$.

- 3) Pour tout $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, $\text{Ker}(u^k) \subset \text{Ker}(u^{k+1})$ donc la suite $(\dim(\text{Ker}(u^k)))_{0 \leq k \leq n}$ est croissante. Supposons qu'elle ne soit pas strictement croissante, alors il existe un rang $k_0 \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ tel que $\dim(\text{Ker}(u^{k_0})) = \dim(\text{Ker}(u^{k_0+1}))$, donc $\text{Ker}(u^{k_0}) = \text{Ker}(u^{k_0+1})$. On en déduit d'après la question précédente que $\text{Ker}(u^{k_0}) = E$.

Ainsi d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im}(u^{k_0})) = 0$. Mais $\text{rg}(u) = n - 1$ et le rang de u^k ne décroît au plus que de 1 en 1 d'après la question 1. On ne peut donc avoir $\dim(u^k) = 0$ que pour $k \geq n$. Contradiction, donc la suite $(\dim(\text{Ker}(u^k)))_{0 \leq k \leq n}$ est strictement croissante.

Puisque $\dim(\text{Ker}(u^0)) = \dim(\text{Ker}(\text{id})) = 0$ et que $\dim(\text{Ker}(u^n)) = n$, on en déduit que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\dim(\text{Ker}(u^k)) = k$.

- 4) Les $\text{Ker}(u^k)$ sont stables par u

Réciproquement, soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u . $u|_F$ est aussi nilpotente donc en prenant $k = \dim(F)$ on a $u|_F^k = 0$. Ainsi, $F \subset \text{Ker}(u^k)$, et puisque $\dim(\text{Ker}(u^k)) = k$ on en conclut par égalité des dimensions que $F = \text{Ker}(u^k)$. Ainsi, les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par u sont bien les $\text{Ker}(u^k)$.

Correction de l'exercice 10 :

- 1) Supposons que $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont deux matrices stochastiques. Posons $C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = AB$. Alors pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$ donc $c_{i,j} \geq 0$ comme somme de termes positifs, et

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n c_{i,j} &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{i,k} \underbrace{\sum_{j=1}^n b_{k,j}}_{=1} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{i,k} && \text{car } B \text{ est stochastique} \\ &= 1 && \text{car } A \text{ est stochastique} \end{aligned}$$

donc $C = AB$ est stochastique.

- 2) 1 est valeur propre de A pour le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

- 3) Soit λ une valeur propre de A . Alors il existe un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$, ce qui se traduit par

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = \lambda x_i$$

Choisissons $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|$ et appliquons la valeur absolue à l'égalité précédemment obtenue :

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j \right| = |\lambda| \times |x_{i_0}|$$

donc par inégalité triangulaire :

$$|\lambda| \times |x_{i_0}| \leq \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} |x_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} |x_{i_0}|$$

par définition de i_0 , et car pour tout (i,j) , $a_{i,j} \geq 0$. Puisque $\sum_{j=1}^n a_{i_0,j} = 1$, on en déduit finalement que $|\lambda| \times |x_{i_0}| \leq |x_{i_0}|$. Or x_{i_0} est nécessairement non nul car $X \neq 0$. On en déduit finalement que $|\lambda| \leq 1$.

Correction de l'exercice 11 :

- 1) Si $AB - BA = \alpha I$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(\alpha I) = n\alpha$. Or, $\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0$ donc nécessairement $\alpha = 0$ et on a alors $AB - BA = 0$ donc $AB = BA$.
- 2) a) Supposons W diagonalisable. Puisque W est de rang 1, donc 0 est valeur propre de W et le sous-espace propre associé, $\text{Ker}(W)$, est de dimension $n - 1$. W a donc au plus une autre valeur propre λ , et $\lambda \neq 0$ sinon W serait nulle donc de rang 0. Le sous-espace propre associé à λ est de dimension 1 donc il existe une matrice inversible P

$$\text{telle que } W = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors $\text{tr}(W) = \lambda \neq 0$.

- b) Supposons que $\text{tr}(W) \neq 0$

Soit $w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'application canoniquement associée à W . $\text{Im}(w)$ est de dimension 1 donc si $e_1 \in \text{Im}(w)$ est non nul on peut le compléter en une base (e_1, e_2, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n . Dans cette base, la matrice de w est de la forme

$$W' = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } (w_1, w_2, \dots, w_n) \neq (0, 0, \dots, 0) \text{ et } W \text{ est donc semblable à cette matrice.}$$

Deux matrices semblable ont la même trace donc $\text{tr}(W) = w_1$. Si $\text{tr}(W) \neq 0$, alors $w_1 \neq 0$ donc w_1 est une valeur propre non nulle de W' donc de W (car W' est triangulaire supérieure). On en déduit que W est diagonalisable car $\dim(\text{Ker}(W)) = n - 1$ et $\dim(E_{w_1}) \geq 1$.

- c) Si $\text{tr}(W) = 0$, alors $w(e_1) = 0$ et puisque $\forall k \geq 2, w(e_k) = w_k \cdot e_1$ on a $w^2(e_k) = w_k \cdot w(e_1) = 0$. Puisque w^2 est nulle sur une base de \mathbb{R}^n elle est nulle sur \mathbb{R}^n , donc $W^2 = 0$.
- 3) Soit $k \in \mathbb{N}$. V est de rang 1 donc VA^k est de rang inférieur ou égal à 1. Si VA^k est de rang 0, alors $VA^kV = 0$ et il n'y a plus rien à montrer.

Supposons donc que VA^k est de rang 1 alors on peut appliquer les résultats de la question 2. Puisque $\text{tr}(VA^k) = \text{tr}(ABA^k - BA^{k+1}) = \text{tr}(ABA^k) - \text{tr}(BA^{k+1}) = \text{tr}(BA^{k+1}) - \text{tr}(BA^{k+1}) = 0$, on a $(VA^k)^2 = 0$ d'après la question 2)c).

Cela implique que $\text{Im}(VA^k) \subset \text{Ker}(VA^k)$.

Puisque V est de rang 1 et que $\text{Im}(VA^k) \subset \text{Im}(V)$, on a $\text{Im}(V) = \text{Im}(VA^k)$ par égalité des dimensions, donc $\text{Im}(V) \subset \text{Ker}(VA^k)$ d'où $VA^kV = 0$.

Correction de l'exercice 12 :

- 1) Pour $k = 0$ on a :

$$A^k B - BA^k = B - B = 0 \quad \text{et} \quad kA^k = 0$$

donc l'égalité est vraie pour $k = 0$.

Si elle est vraie pour un entier k , alors

$$\begin{aligned} kA^{k+1} &= A(A^k B - BA^k) \\ &= A^{k+1}B - ABA^k \end{aligned}$$

Or on a $AB = A + BA$ d'après l'égalité de départ donc :

$$\begin{aligned} &= A^{k+1}B - (A + BA)A^k \\ &= A^{k+1}B - BA^{k+1} - A^{k+1} \end{aligned}$$

d'où $A^{k+1}B - BA^{k+1} = kA^{k+1} + A^{k+1} = (k+1)A^{k+1}$.

- 2) Non, par exemple pour $n = 2$ si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A^2 = B^2 = 0$ et pourtant $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas, donc l'ensemble des matrices nilpotentes n'est pas stable par addition.
- 3) φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (facile) et d'après la question 1), A^k est valeur propre de φ associé à la valeur propre k pour tout entier k .

Si on avait $A^k \neq 0$ pour une infinité de valeurs de k , alors φ aurait une infinité de valeurs propres distinctes correspondant à ces valeurs de k . Ceci est impossible donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$.

Correction de l'exercice 13 :

- 1) Supposons que f est une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant la relation (1).

On a $f = \lambda \text{Id}_E$ donc $f^2 = \lambda^2 \text{Id}_E$ et ainsi :

$$\begin{aligned} f^2 - (a+b)f + ab\text{Id}_E &= 0 \implies (\lambda^2 - (a+b)\lambda + ab)\text{Id}_E = 0 \\ &\implies \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab = 0 \\ &\implies (\lambda - a)(\lambda - b) = 0 \\ &\implies \lambda = a \quad \text{ou} \quad \lambda = b \end{aligned}$$

donc $\lambda \in \{a; b\}$. Réciproquement, si $\lambda = a$ alors $f^2 - (a+b)f + ab\text{Id}_E = (a^2 - (a+b)a + ab)\text{Id}_E = 0$ et de même si $\lambda = b$.

Les homothéties qui vérifient (1) sont donc les homothéties de rapport a ou b .

- 2) La relation (1) est équivalente à $f \circ (f - (a+b)\text{Id}_E) = -ab\text{Id}_E$. Si a et b sont non nuls, alors $ab \neq 0$ et on peut écrire :

$$f \circ \frac{-1}{ab}(f - (a+b)\text{Id}_E) = \text{Id}_E$$

donc f est inversible et $f^{-1} = \frac{-1}{ab}(f - (a+b)\text{Id}_E)$.

- 3) Raisonnons par analyse-synthèse : si f est un projecteur, alors $f^2 = f$ donc la relation (1) donne :

$$(1 - a - b)f + ab\text{Id}_E = 0$$

Si $a + b \neq 1$, alors $f = -\frac{ab}{1 - a - b}\text{Id}_E$ donc f est une homothétie. On a donc nécessairement $a + b = 1$ et la relation 1 donne $ab\text{Id}_E = 0$ donc $a = 0$ ou $b = 0$.

On a donc nécessairement $(a, b) \in \{(1, 0); (0, 1)\}$.

Réciproquement, supposons que $a = 1$ et $b = 0$, alors la relation (1) donne :

$$f^2 - f = 0$$

donc f est un projecteur.

- 4) Raisonnons par analyse-synthèse : supposons que λ et μ sont deux réels tels que $f = \lambda(f - a\text{Id}_E) + \mu(f - b\text{Id}_E)$. Alors :

$$(1 - \lambda - \mu)f + (\lambda a + \mu b)\text{Id}_E = 0$$

or f n'est pas une homothétie donc la famille (Id_E, f) est libre donc

$$\begin{cases} 1 - \lambda - \mu &= 0 \\ \lambda a + \mu b &= 0 \end{cases}$$

d'où l'on déduit que $\lambda = \frac{b}{b-a}$ et $\mu = \frac{a}{a-b}$ (car a et b sont distincts).

Réciproquement, on a bien :

$$\begin{aligned} \frac{b}{b-a}(f - a\text{Id}_E) + \frac{a}{a-b}(f - b\text{Id}_E) &= \left(\frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a}\right)f + \left(\frac{-ab}{b-a} + \frac{-ab}{a-b}\right)\text{Id}_E \\ &= f \end{aligned}$$

- 5) Posons $p = \frac{1}{b-a}(f - a\text{Id}_E)$ et $q = \frac{1}{a-b}(f - b\text{Id}_E)$. On a alors :

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{1}{(b-a)^2}(f^2 - 2af + a^2\text{Id}_E) \\ &= \frac{1}{(b-a)^2}((a+b)f - ab\text{Id}_E - 2af + a^2\text{Id}_E) && \text{en utilisant (1) pour exprimer } f^2 \\ &= \frac{1}{(b-a)^2}((b-a)f - a(b-a)\text{Id}_E) \\ &= \frac{1}{b-a}(f - a\text{Id}_E) \\ &= p \end{aligned}$$

et on vérifie de même que $q^2 = q$.

On a aussi :

$$p \circ q = \frac{-1}{(b-a)^2}(f - a\text{Id}_E) \circ (f - b\text{Id}_E)$$

$$= 0 \quad \text{car } (X-a)(X-b) \text{ est un polynôme annulateur de } f \text{ d'après (1)}$$

et $p \circ q = q \circ p$ car deux polynômes de l'endomorphisme f commutent.

- 6) La relation est vraie pour $n = 1$ d'après la question précédente et si $f^n = b^n p + a^n q$ pour un certain entier n alors :

$$\begin{aligned} f^{n+1} &= (bp + aq) \circ (b^n p + a^n q) \\ &= b^{n+1} p^2 + \underbrace{b p \circ q}_{=0} + \underbrace{a q \circ p}_{=0} + a^{n+1} q^2 \\ &= b^{n+1} p + a^{n+1} q \end{aligned}$$

donc par récurrence elle est vraie pour tout entier n .

Montrons que $f^{-1} = b^{-1}p + a^{-1}q$:

$$(b^{-1}p + a^{-1}q) \circ (bp + aq) = bb^{-1}p^2 + aa^{-1}q = p^2 + q^2 = p + q$$

Or $p + q = \frac{1}{b-a}(f - a\text{Id}_E) - \frac{1}{b-a}(f - b\text{Id}_E) = \frac{b-a}{b-a}\text{Id}_E = \text{Id}_E$ donc $b^{-1}p + a^{-1}q$ est bien l'inverse de f , et par récurrence immédiate on montre de même que $f^{-n} = (f^{-1})^n = b^{-n}p + a^{-n}q$. La relation (1) est donc vérifiée pour tout entier $n \in \mathbb{Z}^*$.

Enfin, $f^0 = \text{Id}_E$ et $b^0p + a^0q = p + q = \text{Id}_E$

Correction de l'exercice 14 :

- 1) Soient $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_r}$ les sous-espaces propres de u . On a alors $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$. Pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$ posons $F_k = F \cap E_{\lambda_k}$ et montrons que

$$F = F_1 + \dots + F_r$$

Attention : dans le cas général on a $F \cap (E_1 + \dots + E_r) \neq (F \cap E_1) + \dots + (F \cap E_r)$ (ex avec $F = \text{Vect}((1, 1))$, $E_1 = \text{Vect}((1, 0))$ et $E_2 = \text{Vect}((0, 1))$, il faut donc utiliser ici le fait que F est stable par u .

Soit $x \in F \cap (E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_r})$, alors $x = x_1 + \dots + x_r$ avec pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$, $x_k \in E_{\lambda_k}$ et $x \in F$.

Alors $u(x) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r \in F$ et $\lambda_r x = \lambda_r x_1 + \dots + \lambda_r x_r \in F$ donc en faisant la différence on obtient :

$$(\lambda_1 - \lambda_r)x_1 + \dots + (\lambda_{r-1} - \lambda_r)x_r \in F$$

On réitère jusqu'à obtenir $x_1 \in F$, puis on déduit en remontant les itérations $x_2 \in F$ et ainsi de suite jusqu'à $x_r \in F$. Ainsi on a bien $x \in (F \cap E_1) + \dots + (F \cap E_r)$.

De plus, les (F_k) sont en somme directe car les E_{λ_k} le sont d'après le cours, donc finalement $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_r$.

Sur chaque F_k on a $u_{F_k} = \lambda_k \text{Id}_{F_k}$ donc F est somme de sous-espaces propres de u_F , donc u_F est diagonalisable.

- 2) Commençons par montrer que les sous-espaces propres de u sont stables par v : notons $(E_\lambda)_{\lambda \in \text{Spec}(u)}$ les sous-espaces propres de u . Soit $\lambda \in \text{Spec}(u)$, alors pour tout $x \in E_\lambda$ on a $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$ car u et v commutent, donc $v(x) \in E_\lambda$. Ainsi E_λ est stable par v .

Chaque restriction $v|_{E_\lambda}$ est diagonalisable sur E_λ d'après la 1ère question car v est diagonalisable. Ainsi pour chaque $\lambda \in \text{Spec}(u)$ il existe une base $\mathcal{B}_\lambda = (e_1^\lambda, \dots, e_{r_\lambda}^\lambda)$ de E_λ dans laquelle v est diagonale, et tous les vecteurs de cette base sont des vecteurs propres de u puisqu'ils sont dans E_λ .

En regroupant toutes les bases \mathcal{B}_λ pour toutes les valeurs de λ dans $\text{Spec}(u)$ on obtient une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont diagonales.

- 3) f^2 et f^3 commutent car $f^2 \circ f^3 = f^5 = f^3 \circ f^2$, donc d'après la question 2) il existe une base \mathcal{B} telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^3)$ sont diagonales. Leurs valeurs propres sont non nulles car f est inversible donc f^2 et f^3 le sont aussi.

Pour un vecteur e de la base \mathcal{B} , il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\mu \in \mathbb{R}^*$ tels que $f^2(e) = \lambda e$ et $f^3(e) = \mu e$.

Alors $f^2(e) = \lambda e \Rightarrow f^3(e) = \lambda f(e)$ donc $\mu e = \lambda f(e)$ donc $f(e) = \frac{\mu}{\lambda} e$. Ainsi e est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\frac{\mu}{\lambda}$.

La base \mathcal{B} est donc une base de vecteurs propres de f , la matrice représentative de f dans cette base est donc diagonale donc f est diagonalisable.