CHAPITRE 1

TRIGONOMÉTRIE

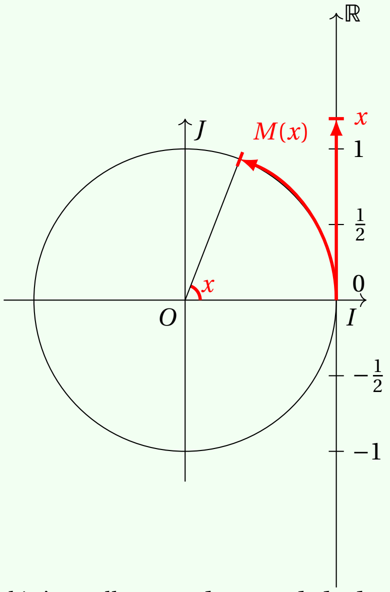
I. Fonctions sinus, cosinus, et tangente

1. Définitions

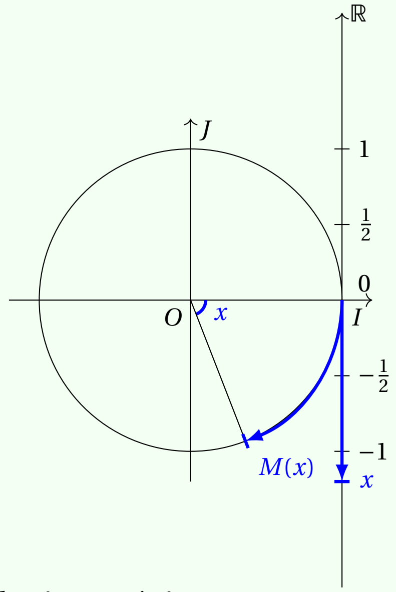
Définition 1.1

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O et de rayon 1. À chaque réel x, on associe le point $M(x)$ du cercle trigonométrique tel que $M(x)$ est l'extrémité de l'arc du cercle trigonométrique partant de I et de longueur $|x|$, en tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre lorsque $x \geq 0$, et dans le sens des aiguilles d'une montre lorsque $x < 0$. $M(0)$ est le point I.

Cas $x > 0$:



Cas $x < 0$:



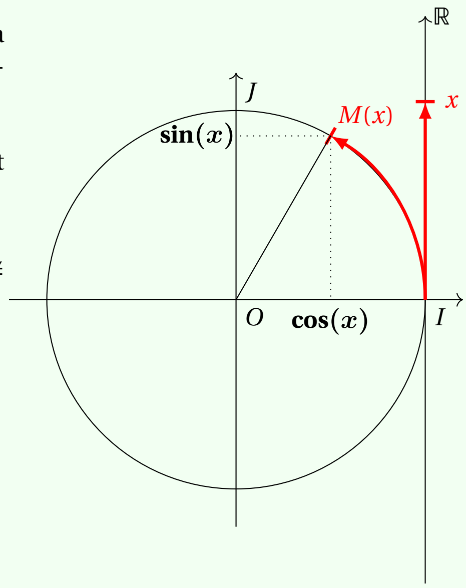
Ce procédé s'appelle **enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique**.

Si $M(x)$ est le point associé au réel x par enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique, alors x est une mesure de l'angle orienté $\widehat{IOM}$ qui **n'est pas le degré**. Cette unité d'angle s'appelle le **radian**. On a par exemple $360^o = 2\pi$ rad puisque le périmètre d'un cercle de rayon 1 est 2π.

Pour tout réel x, on considère le point $M(x)$ associé à x par enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique (l'enroulement peut éventuellement faire plusieurs tours de cercle dans un sens ou dans l'autre).

On appelle **cosinus de** x l'abscisse de $M(x)$, et **sinus de** x l'ordonnée du point $M(x)$. On note ces deux nombres $\mathbf{cos}(x)$ et $\mathbf{sin}(x)$.

On appelle tangente de x le nombre défini par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ lorsque $\cos(x) \neq 0$.
$\tan(x)$ est le **coefficient directeur** de la droite $OM(x)$.



Les fonctions $x \longmapsto \cos x$ **et** $x \longmapsto \sin x$ **sont définies sur** $\mathbb{R}$.

La fonction $x \longmapsto \tan x$ **est définie sur** $\mathbb{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Remarque

On peut enrouler la droite numérique une infinité de fois autour du cercle dans chaque sens, ainsi à partir de $x = 2\pi$ on a fait un tour complet et on recommence un nouveau tour. À chaque valeur réelle de x correspond un unique point sur le cercle, mais à chaque point du cercle correspond une infinité de valeurs réelles (qui diffèrent toutes d'un multiple de 2π).

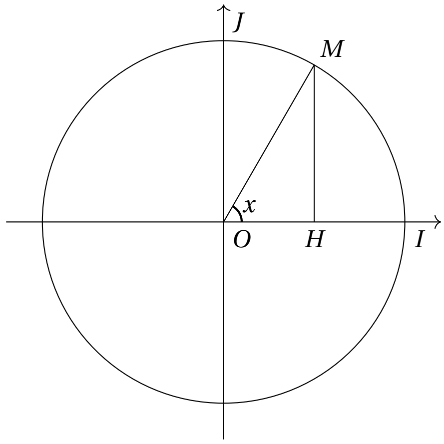
Remarque

Si on note H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, alors ces définitions du sinus et du cosinus coïncide avec la définition du sinus et du cosinus de l'angle x dans le triangle OHM :

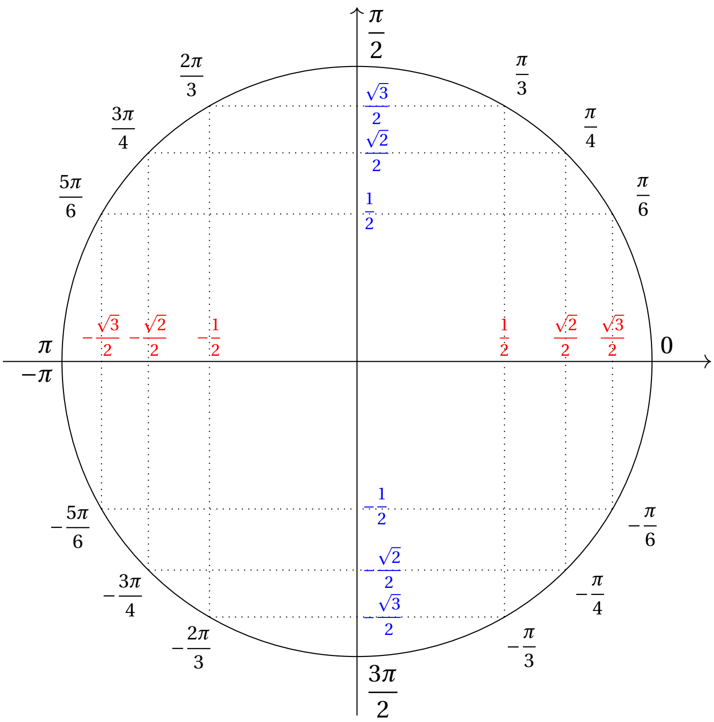
$$\cos(x) = \frac{OH}{OM} = OH$$

$$\sin(x) = \frac{HM}{OM} = HM$$

car ici $OM = 1$.



2. Valeurs remarquables (à connaître par coeur)



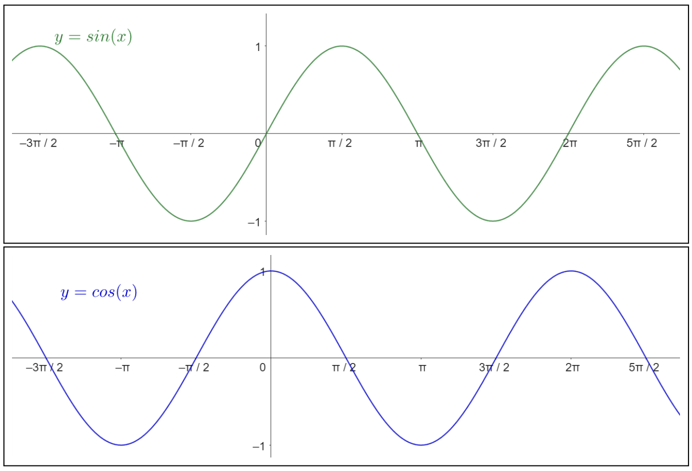
En noir x, en rouge $\cos(x)$, en bleu $\sin(x)$.

Angle θ en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Angle θ en degrés	0	30	45	60	90	120	135	150	180
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

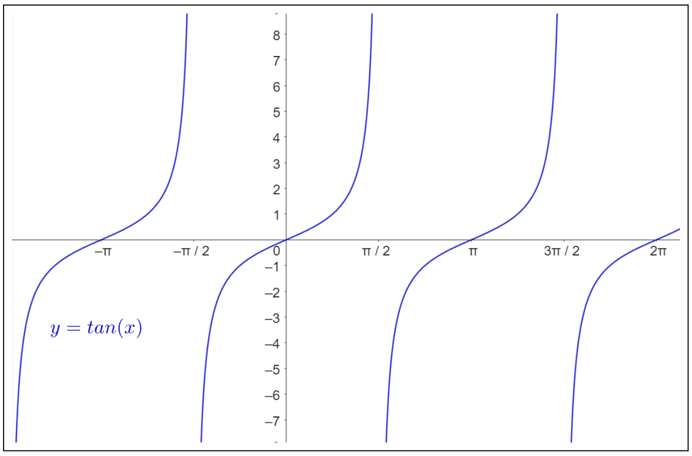
II. Propriétés

1. Courbes représentatives

a. Fonctions sinus et cosinus



b. Fonction tangente



2. Périodicité

Le motif de la courbe représentative des fonctions sinus et cosinus sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$ se répète sur $\mathbb{R}$. On dit que les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques**. La définition formelle d'une fonction périodique est la suivante :

Définition 1.2

Une fonction f définie sur un domaine $\mathcal{D}$ est dite **périodique** s'il existe un réel T, appelé **période de** f, tel que pour tout $x \in \mathcal{D}$

$$x + T \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x)$$

Propriété 1.1 (admise)

Les fonctions cos et sin sont périodique de période 2π. La fonction tangente est périodique de période π.
Autrement dit on a :

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $\tan(x+\pi) = \tan(x)$

On a aussi, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$,

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $\tan(x+k\pi) = \tan(x)$

Remarque

Il suffit donc de connaître les fonctions sinus et cosinus sur un intervalle de longueur 2π pour les connaître sur $\mathbb{R}$ (par exemple sur $]-\pi;\pi[$ ou sur $]0;2\pi[$).

→ **Exercice de cours n^{o} 1.**

→ **Exercice de cours n^{o} 2.**

3. Parité

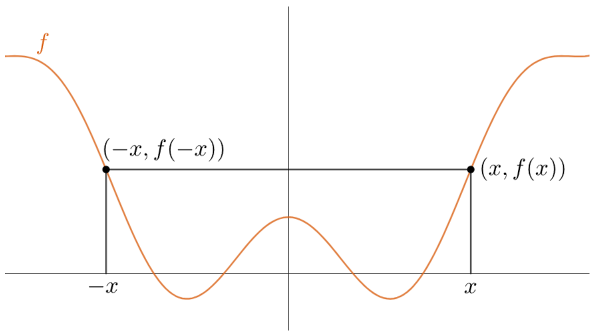
Définition 1.3

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}$ tel que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $-x \in \mathcal{D}$ (un tel domaine est dit **symétrique par rapport à 0**). On dit que f est...

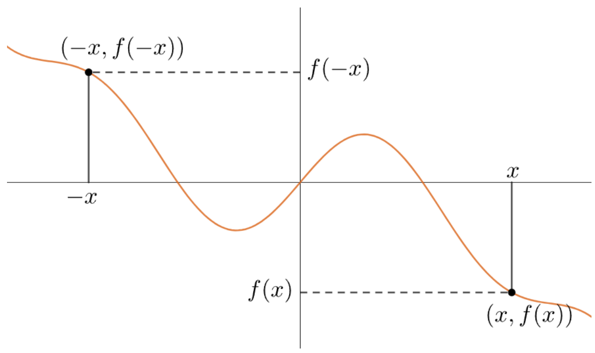
- ...**paire** si pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = f(x)$
- ...**impaire** si pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = -f(x)$

Remarque

Une fonction paire est une fonction dont la courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Une fonction impaire est une fonction dont la courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Une fonction paire



Une fonction impaire

Propriété 1.2 (admise)

La fonction cosinus est paire sur $\mathbb{R}$, c'est à dire que $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(-x) = \cos(x)$
La fonction sinus est impaire sur $\mathbb{R}$, c'est à dire que $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(-x) = -\sin(x)$

4. Continuité et dérivabilité

Propriété 1.3 (admise)

Les fonctions $x \longmapsto \sin(x)$ et $x \longmapsto \cos(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
La fonction tangente est continue sur $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi ; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

→ **Exercice de cours n°3.**

Propriété 1.4 (admise)

Les fonctions $x \longmapsto \sin(x)$ et $x \longmapsto \cos(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

♡
- $\sin'(x) = \cos x$
- $\cos'(x) = -\sin x$

La fonction $x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi ; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$, et

♡
$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

→ **Exercice de cours n°4.**

→ **Exercice de cours n°5.**

→ **Exercice de cours n°6.**

III. Formules

Propriété 1.5

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

♡
- $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Remarque

La notation $\cos^2 x$ signifie $(\cos(x))^2$

→ **Exercice de cours n°7.**

→ **Exercice de cours n°8.**

Propriété 1.6 d'addition (admise)

Pour tous réels $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Remarque

Les deux dernières formules se déduisent des deux premières.

→ **Exercice de cours n°9.**

Conséquence :

Propriété 1.7 de duplication (admise)

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$

→ **Exercice de cours n°10.**

IV. Applications

1. Équations trigonométriques

Proposition 1.8

Soit $a \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à l'équation $\cos x = a$ dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$

- Si $a > 1$ ou $a < -1$, l'équation n'a pas de solution, $\mathcal{S} = \varnothing$
- Si $a = 1$, l'équation a pour unique solution $x = 0$
- Si $-1 < a < 1$, l'équation a deux solutions, θ et $-\theta$ avec θ tel que $\cos\theta = a$
- Si $a = -1$, l'équation a deux solutions $x = -\pi$ et $x = \pi$.

→ **Exercice de cours n°11.**

→ **Exercice de cours n°12.**

Proposition 1.9

Soit $a \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à l'équation $\sin x = a$ dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$

- Si $a > 1$ ou $a < -1$, l'équation n'a pas de solution, $\mathcal{S} = \varnothing$
- Si $a = 1$, l'équation a pour unique solution $x = \dfrac{\pi}{2}$
- Si $0 < a < 1$, l'équation a deux solutions, θ et $\pi - \theta$ avec θ tel que $\sin\theta = a$
- Si $-1 < a < 0$, l'équation a deux solutions $x = \theta$ et $x = -\pi - \theta$ avec θ tel que $\sin\theta = a$.
- Si $a = -1$, l'équation a pour unique solution $x = -\dfrac{\pi}{2}$

→ **Exercice de cours n°13.**

→ **Exercice de cours n°14.**

2. Inéquations trigonométriques.

On résout les inéquations de la forme $\cos x \geq a$, $\cos x \leq a$, $\sin x \geq a$ et $\sin x \leq a$ en s'aidant du cercle trigonométrique et en appliquant les propositions de la section précédente.

→ **Exercice de cours n°15.**

3. Limites à connaître

Proposition 1.10

On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$

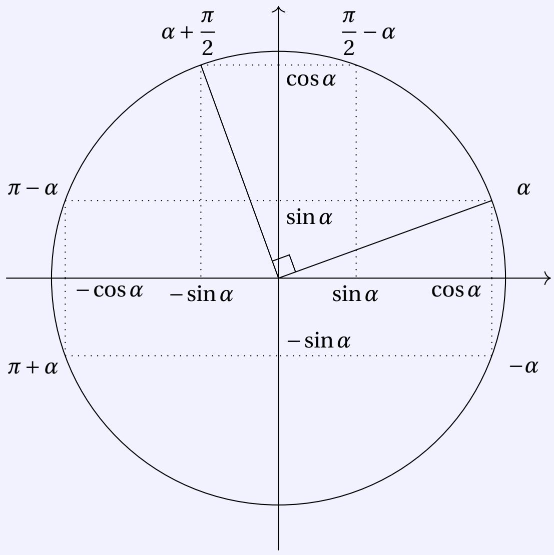
→ **Exercice de cours n° 16.**

V. Compléments

1. Formules supplémentaires

Propriétés 1.11 géométriques (admises)

Les proprietes suivantes se démontrent aisément avec les formules d'addition, mais elles se comprennent mieux dans leur sens géométrique illustré ci-contre.



Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :

- $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
- $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$
- $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha)$
- $\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ on a

- $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
- $\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$
- $\tan\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{\tan\alpha}$ (pour $\alpha \notin \{0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$)
- $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dfrac{1}{\tan\alpha}$ (pour $\alpha \notin \{0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$)

Conséquences graphiques

Si on trace les courbes des fonctions sinus et cosinus dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath}\,)$:

- La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées
- La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- La courbe de la fonction sinus est l'image de la courbe de la fonction cosinus par une translation de vecteur $\dfrac{\pi}{2}\vec{\imath}$

Application :

2. Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$:

Proposition 1.12

Dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$, on a

$$\cos a = \cos b \iff a = b \quad \text{ou} \quad a = -b$$

Dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$, on a

$$\sin a = \sin b \iff a = b \quad \text{ou} \quad a = \pi - b$$

Dans $\mathbb{R}$, on a donc

$$\cos a = \cos b \iff a = b + 2k\pi \quad \text{ou} \quad a = -b + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

et

$$\sin a = \sin b \Longleftrightarrow a = b + 2k\pi \quad \text{ou} \quad a = \pi - b + 2k\pi, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

→ **Exercice de cours n° 17.**

→ **Exercice de cours n° 18.**

→ **Exercice de cours n° 19.**

Exercices de cours

Exercice 1

Calculer $\sin(217\pi)$ et $\cos\left(-\dfrac{35\pi}{4}\right)$

Exercice 2

Déterminer **une** période $T > 0$ de chacune des fonctions suivantes (sans se soucier de leurs ensembles de définition).

1. $f(x) = 4\sin\left(\dfrac{3x}{7}\right)$
2. $g(x) = \cos(2x) - \sin(x)$
3. $h(x) = \cos(3x)\sin(2x)$
4. $k(x) = \dfrac{\cos(12x+1)}{2+\sin^2(8x)}$
5. $m(x) = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
6. $n(x) = \tan(3x)$

Exercice 3

Démontrer qu'il existe un réel $x \in [0;\pi]$ tel que $\cos(x) = \dfrac{\pi^3}{64}$.

Exercice 4

Calculer la dérivée de la fonction $g : x \longmapsto x^5\cos(3x)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

Exercice 5

Calculer la dérivée de la fonction $h : x \longmapsto \sin(\mathrm{e}^x)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

On admet dans chaque cas que la fonction est définie et dérivable sur I. Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I

1. $f(x) = \dfrac{\sin(3x)}{\cos(x)}$, $\quad I = [0;\pi/2[$
2. $g(x) = \ln(3\cos^2(5x))$, $I =]0;\frac{\pi}{10}[$
3. $h(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{x\cos x}}$, $I = \mathbb{R}$
4. $k(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\tan x}}$, $\quad I =]0;\pi/2[$.

Exercice 7

Déterminer la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x\sin x + x^2}{x^2}$ définie sur $]0;+\infty[$.

Exercice 8

Déterminer dans chaque cas la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a.

1. $\dfrac{\cos x}{x}$, $a = -\infty$
2. $\dfrac{\sqrt{x}\sin x - \sqrt{x}\cos x}{x}$, $a = +\infty$.

Exercice 9

En remarquant que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}$, calculer $\cos(\dfrac{\pi}{12})$.

Exercice 10

Calculer $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

Exercice 11

Résoudre $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ dans $[-\pi;\pi]$

Exercice 12

Résoudre $\cos(4x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}]$.

Exercice 13

Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'équation $\sin x = \dfrac{1}{2}$

Exercice 14

Résoudre dans $[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}]$ l'équation $\sin(2x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 15

1. Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation $\cos x \leq \dfrac{1}{2}$.
2. Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation $\sin x \leq \dfrac{1}{2}$.
3. Résoudre dans $[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}]$ l'inéquation $\cos(3x) \geq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 16

Déterminer les limites suivante :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{5x}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(2\pi x)}{x-1}$

Exercice 17

Résoudre dans $]-\pi;\pi[$ puis dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$

Exercice 18

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\cos(3x) \leq -\dfrac{1}{2}$

Exercice 19

1. Résoudre dans $]-\pi;\pi[$ puis dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = -\dfrac{1}{2}$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(5x) + \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{2x}{3}\right) \geq -3$