Chapitre 14

Représentations matricielles

I. Représentation matricielle

1. Vecteurs

Définition 14.1

Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Tout vecteur $\boldsymbol{x} \in E$ admet une unique décomposition dans la base $\mathcal{B}$:

$$\exists!(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \boldsymbol{x} = x_1 \cdot \boldsymbol{e_1} + \cdots + x_n \cdot \boldsymbol{e_n}$$

où réels $x_1, \ldots, x_n$ s'appellent **coordonnées de $\boldsymbol{x}$** dans la base $\mathcal{B}$.

On appelle **vecteur colonne associé à $\boldsymbol{x}$ dans la base** $\mathcal{B}$ et on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x})$ la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Proposition 14.1

Si E est un espace vectoriel de dimension finie n et que $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n})$ est une base de E, alors l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ x_1 \cdot \boldsymbol{e_1} + \cdots + x_n \cdot \boldsymbol{e_n} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

est alors un isomorphisme entre E et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Remarque

Si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont deux vecteurs de E associés aux vecteurs colonnes X et Y dans une base, alors $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \Longleftrightarrow X = Y$.

Exemple 14.1

On considère $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2, X^3)$ et le polynôme $P = X^3 - 2X^2 + 3X + 4 \in E$.

Le vecteur colonne associé à P dans la base $\mathcal{B}_0$ est $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exemple 14.2

Le vecteur colonne associé à $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

On dit que X est le vecteur colonne **canoniquement associé** au vecteur $\boldsymbol{x}$

2. Applications linéaires

a. Généralités

D'après la section précédente, tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ et à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par l'écriture d'un vecteur dans une base. Toute application linéaire entre deux espaces vectoriels peut donc se ramener à une application linéaire qui associe un vecteur colonne à un autre, et nous allons voir que ces applications peuvent être représentées par des matrices.

Soient :

- E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives m et n
- $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
- $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_m})$ une base de E et $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{e'_1}, \ldots, \boldsymbol{e'_n})$ une base de F.

Constat n°1 : Pour tout vecteur $\boldsymbol{x} = x_1 \cdot \boldsymbol{e_1} + \cdots x_m \cdot \boldsymbol{e_m} \in E$, on a $f(\boldsymbol{x}) = x_1 \cdot f(\boldsymbol{e_1}) + \cdots + x_m \cdot f(\boldsymbol{e_m})$ car f est linéaire.

L'application f est donc **entièrement déterminée par la donnée de** $f(\boldsymbol{e_1}), \ldots, f(\boldsymbol{e_m})$.

Constat n°2 : Pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, $f(\boldsymbol{e_j})$ peut s'écrire dans la base $\mathcal{B}'$: $f(\boldsymbol{e_j}) = a_{1,j} \cdot \boldsymbol{e'_1} + \cdots + a_{n,j} \cdot \boldsymbol{e'_n}$ où $(a_{1,j}, \ldots, a_{n,j}) \in \mathbb{R}^n$ sont les coordonnées de $f(\boldsymbol{e_j})$ dans la base $\mathcal{B}'$.

L'expression de $f(\boldsymbol{x})$ dans la base $\mathcal{B}'$ est alors entièrement déterminée par la famille $(a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$:

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot f(\boldsymbol{e_j}) = \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \cdot \boldsymbol{e'_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} x_j \right) \cdot \boldsymbol{e'_i}$$

La i-ème coordonnée de $f(\boldsymbol{x})$ dans la base $\mathcal{B}'$ est $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} x_j$. Si on pose $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, alors AX est le vecteur colonne dont la i-ème coordonnée est $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} x_j$, c'est à dire le vecteur colonne associé à $f(\boldsymbol{x})$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Définition 14.2

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension respective m et n, soit $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_m})$ une base de E et soit $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{e'_1}, \ldots, \boldsymbol{e'_n})$ une base de F.

Pour toute application $f \in \mathcal{L}(E, F)$ on appelle **matrice représentative** de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, la matrice de taille $n \times m$ dont la j-ème colonne est le vecteur colonne associé à $f(\boldsymbol{e_j})$, pour tout $j \in [\![1, m]\!]$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(\boldsymbol{e_1}) & & & f(\boldsymbol{e_j}) \text{ dans la base } \mathcal{B}' & & f(\boldsymbol{e_m}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \boldsymbol{e'_1} \\ \boldsymbol{e'_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{e'_n} \end{array}$$

D'après ce qui précède, pour tout $\boldsymbol{x} \in E$ et tout $\boldsymbol{y} \in F$, si $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x})$, $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\boldsymbol{y})$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ alors :

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \Longleftrightarrow AX = Y$$

Exemple 14.3

On considère l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, 2y - x)$, et on considère les vecteurs $\boldsymbol{e_1} = (1, 0)$, $\boldsymbol{e_2} = (2, 2)$, $\boldsymbol{f_1} = (0, 1)$ et $\boldsymbol{f_2} = (1, 1)$. On admet que les familles $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ et $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2})$ sont alors des bases de $\mathbb{R}^2$.
Pour déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$, il faut exprimer $\varphi(\boldsymbol{e_1})$ et $\varphi(\boldsymbol{e_2})$ dans la base $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2})$.
On calcule : $\varphi(\boldsymbol{e_1}) = (1, -1)$ et $\varphi(\boldsymbol{e_2}) = (4, 2)$

$$(1, -1) = a \cdot \boldsymbol{f_1} + b \cdot \boldsymbol{f_2} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 1 & = & b \\ -1 & = & a + b \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -2 \\ b & = & 1 \end{array} \right.$$

$$(4, 2) = a \cdot \boldsymbol{f_1} + b \cdot \boldsymbol{f_2} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 4 & = & b \\ 2 & = & a + b \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -2 \\ b & = & 4 \end{array} \right.$$

donc $\varphi(\boldsymbol{e_1}) = -2 \cdot \boldsymbol{f_1} + 1 \cdot \boldsymbol{f_2}$ et $\varphi(\boldsymbol{e_2}) = -2 \cdot \boldsymbol{f_1} + 4 \cdot \boldsymbol{f_2}$. On a donc finalement

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \varphi(\boldsymbol{e_1}) & \varphi(\boldsymbol{e_2}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \boldsymbol{f_1} \\ \boldsymbol{f_2} \end{array}}$$

Remarque

La matrice associée à une application linéaire **dépend du choix de la base de départ et de la base d'arrivée**.

→ **Exercice de cours n° 1.**

→ **Exercice de cours n° 2.**

Définition 14.3

On appelle **application canoniquement associée à une matrice** $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ l'application $A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m, \quad A(\boldsymbol{x}) = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{1,j} x_j \ , \ \sum_{j=1}^{m} a_{2,j} x_j \ , \ \cdots \ , \ \sum_{j=1}^{m} a_{n,j} x_j \right) \in \mathbb{R}^n$$

Si $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ est le vecteur colonne canoniquement associé à $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est le vecteur colonne canoniquement associé à $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, alors

$$A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \Longleftrightarrow AX = Y$$

L'application linéaire canoniquement associé à A se traduit donc dans les bases canonique de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ par l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

On dit que A est **injective** (resp. **surjective**) si l'application linéaire canoniquement associée à A l'est.

Exemple 14.4

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. L'application linéaire canoniquement associée à A s'écrit en colonne de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & AX = \begin{pmatrix} x - 2y + 3z \\ 2x + z \end{pmatrix} \end{array}$$

L'application linéaire canoniquement associée à A est l'application $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \longmapsto (x - 2y + 3z, 2x + z)$.

Remarque

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est l'application linéaire canoniquement associée à A si et seulement si A est la matrice représentative de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^m$ et de $\mathbb{R}^n$.

b. Cas des endomorphismes

Dans toute cette section E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Définition 14.4

Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ on appelle matrice représentative de u dans **la** base $\mathcal{B}$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$, on la note simplement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Exemple 14.5

On considère l'application $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $P(X) \mapsto P(1 - X)$.

- $\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $u(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(1 - X) = \lambda P(1 - X) + \mu Q(1 - X) = \lambda u(P) + \mu u(Q)$, donc u est linéaire.
- Si $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $u(P) = a(1 - X)^2 + b(1 - X) + c = aX^2 - (2a + b)X + a + b + c$ donc $u(P) \in \mathbb{R}_2[X]$. Ainsi u va bien de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Finalement $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$. Considérons la base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ et cherchons la matrice représentative de u dans cette base.

- $u(1) = 1$
- $u(X) = 1 - X$
- $u(X^2) = (1 - X)^2 = X^2 - 2X + 1$

donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

Proposition 14.2

Quelle que soit la base $\mathcal{B}$ de E on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = I_n$.

Remarque

La réciproque est vraie aussi : si $\mathcal{B}$ est une base et que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = I_n$ alors $f = \mathrm{Id}_E$. En effet, si $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n})$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = I_n \Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], f(\boldsymbol{e_k}) = \boldsymbol{e_k}$. Ainsi, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} f(x_1 \cdot \boldsymbol{e_1} + \dots + x_n \cdot \boldsymbol{e_n}) &= x_1 \cdot f(\boldsymbol{e_1}) + \dots + x_n \cdot f(\boldsymbol{e_n}) \\ &= x_1 \cdot \boldsymbol{e_1} + \dots + x_n \cdot \boldsymbol{e_n} \end{aligned}$$

donc $\forall \boldsymbol{x} \in E$, $f(x) = x$ et donc $f = \mathrm{Id}_E$

Remarque

Si $\mathcal{B}'$ est une base différente de $\mathcal{B}$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}) \neq I_n$, et on peut avoir $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = I_n$ sans que f soit l'identité.

Définition 14.5

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On appelle **homothétie de E de rapport λ** l'application $f : E \to E$, $\boldsymbol{x} \mapsto \lambda \cdot \boldsymbol{x}$ (c'est à dire $f = \lambda \cdot \mathrm{Id}_E$).
Quelle que soit la base $\mathcal{B}$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \lambda \cdot I$.

c. Image, noyau

Définition 14.6

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

- L'image de A est l'ensemble $\mathrm{Im}(A) = \{AX \mid X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})\}$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}$
- Le noyau de A est l'ensemble $\mathrm{Ker}(A) = \left\{X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$

Remarque

- On peut assimiler l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ puisqu'ils sont canoniquement isomorphes. Toutefois, on notera toujours en minuscule les éléments de $\mathbb{R}^n$ et en majuscule les éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: si $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ on note X le vecteur colonne canoniquement associé à $\boldsymbol{x}$.
- Si f est l'application linéaire canoniquement associée à A, alors $\mathrm{Im}(A)$ est l'ensemble des vecteurs colonnes canoniquement associés aux vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ est l'ensemble des vecteurs colonnes canoniquement associés aux vecteurs de $\mathrm{Ker}(f)$.

  Pour cette raison, on appelle parfois image et noyau d'une matrice A l'image et le noyau de f (qui sont alors des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^m$ respectivement)

Remarque

Notons $C_1, C_2, \dots, C_m \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ les colonnes de la matrice A.

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Alors $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_m)$. En effet,

$$\begin{aligned} Y \in \mathrm{Im}(A) &\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), Y = AX \\ &\iff \exists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, Y = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_m \\ | & | & & | \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &\iff \exists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, Y = x_1 C_1 + x_2 C_2 + \cdots + x_n C_n \\ &\iff Y \in \mathrm{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_n) \end{aligned}$$

→ **Exercice de cours n°3.**

Proposition 14.3

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies m et n. Si f est une application linéaire de E vers F, et A la matrice représentative de f dans **des bases quelconques**. Alors

- f est injective si et seulement si les colonnes de A forment une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
- f est surjective si et seulement si les colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
- f est bijective si et seulement si les colonnes de A forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Proposition 14.4

Si A est la matrice représentative d'une application linéaire f **dans des bases quelconques**, alors

- f est injective si et seulement si A est injective, si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{0_{\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})}\}$.
- f est surjective si et seulement si A est surjective, si et seulement si $\mathrm{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

3. Opérations

Propriété 14.5

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, soit $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Alors

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f+g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)}$$

Remarque

La somme de deux matrices représente donc la somme de deux applications linéaires exprimées dans les mêmes bases.

Proposition 14.6

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie m et n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Remarque

Autrement dit, **une fois des bases fixées**, la représentation d'une application linéaire par une matrice est unique et toute matrice représente une certaine application linéaire dans ces bases.

Remarque

On déduit de cette proposition que $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = n \times m$.

→ **Exercice de cours n°4.**

Propriété 14.7

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimensions finis, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F, et $\mathcal{B}''$ une base de G. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ on a alors

$$\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)}$$

Remarque

Le produit de deux matrice représente donc la composition de deux applications linéaires lorsque la base d'arrivée de la première application correspond à la base de départ de la deuxième.

On en déduit immédiatement les propriétés suivante

Propriété 14.8

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors pour tout entier n, la matrice représentative de f^n dans la base $\mathcal{B}$ est A^n :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^n = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n)$$

Propriété 14.9

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de même dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Alors f est bijective si et seulement si $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est inversible et dans ce cas on a :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)^{-1} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right)$$

→ **Exercice de cours n^{o} 5.**

II. Changement de base

1. Cas général

Motivation : soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur d'un espace vectoriel E, et soient $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n})$ et $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{e'_1}, \dots, \boldsymbol{e'_n})$ deux bases de E.
Le vecteur $\boldsymbol{x}$ a alors une décomposition dans chaque base :

$$\boldsymbol{x} = x_1 \cdot \boldsymbol{e_1} + \dots + x_n \cdot \boldsymbol{e_n} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{x} = x'_1 \cdot \boldsymbol{e'_1} + \dots + x'_n \cdot \boldsymbol{e'_n}$$

donc on peut associer à x le vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$ et le vecteur colonne $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

On peut naturellement se demander s'il existe une « recette » pour passer de X à X' qui ne dépend pas du vecteur choisi. La réponse est oui !

- En décomposant chaque vecteur de la base $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ il existe une famille de réels $(p_{i,j})$ telle que $\boldsymbol{e'_j} = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} \boldsymbol{e_i}$.
- En posant la matrice $P = (p_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$, on remarque qu'on peut alors écrire

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= x'_1 \cdot \boldsymbol{e'_1} + \dots + x'_n \cdot \boldsymbol{e'_n} \\ &= x'_1 \sum_{i=1}^{n} p_{i,1} \cdot \boldsymbol{e_i} + \dots + x'_n \sum_{i=1}^{n} e_{i,n} \cdot \boldsymbol{e_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x'_j p_{i,j} \right) \cdot \boldsymbol{e_i} \end{aligned}$$

donc le vecteur colonne associé à $\boldsymbol{x}$ dans la base $\mathcal{B}$ est $X = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} x'_j p_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} x'_j p_{n,j} \end{pmatrix} = PX'$.

La matrice P s'appelle alors **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Une définition équivalente et plus concise d'une matrice de passage est la suivante :

Définition 14.7

Soit E un espace vectoriel et soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. La **matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$**, notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, est définie par

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$$

C'est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs colonnes associés à $(e_1',\dots,e_n')$ dans la base $(e_1,\dots,e_n)$.

Propriété 14.10

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases d'un espace vectoriel E et soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Pour tout vecteur $\boldsymbol{x} \in E$, si X est le vecteur colonne associé à $\boldsymbol{x}$ dans la base $\mathcal{B}$ et X' le vecteur colonne associé à x dans la base $\mathcal{B}'$, alors $X = PX'$. Autrement dit :

$$\forall \boldsymbol{x} \in E,\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x}) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\boldsymbol{x})$$

Remarque

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ permet en fait de passer d'un vecteur connu dans la base $\mathcal{B}'$ à un vecteur colonne dans la base $\mathcal{B}$.

Propriété 14.11

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases d'un espace vectoriel E et si P est la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors P est inversible et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est P^{-1} :

$$\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$$

Proposition 14.12 Formule de changement de base

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ deux bases de E et $\mathcal{F}$,$\mathcal{F}'$ deux bases de F.

Soit A la matrice de f dans les bases $\mathcal{E},\mathcal{F}$ et B la matrice de f dans les bases $\mathcal{E}',\mathcal{F}'$. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}'$.

$$\boxed{\text{Alors,} \quad B = Q^{-1}AP}$$

Autrement dit

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(f) = P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}}$$

Définition 14.8

On dit que deux matrices A et B sont **équivalentes** et on note $A \sim B$ s'il existe deux matrices inversibles P et Q telles que :

$$B = Q^{-1}AP$$

Remarque

Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles représentent une même application linéaire dans des bases différentes.

Propriété 14.13

Pour toutes matrices A,B, et C :

- $A \sim A$ (réflexivité)
- Si $A \sim B$ alors $B \sim A$ (symétrie)
- Si $A \sim B$ et $B \sim C$ alors $A \sim C$ (transitivité)

→ **Exercice de cours n°6.**

Proposition 14.14

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension respective m et n et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si $r = \mathrm{rg}(f)$, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{B}'$ de F dans lesquelles la matrice de f est la matrice J_r définie par blocs de la façon suivante :

$$J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,m-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,m-r} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où $0_{p,q}$ est la matrice nulle de taille $p \times q$ et I_r est la matrice identité de taille r.

2. Cas des endomorphismes

Propriété 14.15

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Soit f est un endomorphisme de E, et soient A la matrice de f dans **la** base $\mathcal{B}$ et B la matrice de f dans **la** base $\mathcal{B}'$. Alors

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}}$$

Définition 14.9

On dit que deux matrices carrées A et B sont **semblables** s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$.

Remarque

Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, avec la même base au départ et à l'arrivée. Deux matrices semblables sont donc équivalentes mais la réciproque est fausse (bien qu'en français le mot « équivalent » soit plus fort que « semblable », c'est un faux ami).

3. Trace d'un endomorphisme

Rappel

Pour toutes matrices carrées M et N de même taile on a $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$.

Proposition 14.16

Deux matrices carrées semblables ont la même trace.

Définition 14.10

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Toutes les matrices représentatives de u dans une base sont semblables entre elles, ainsi leur trace ne dépend pas de la base choisie d'après la proposition précédente. On définit la trace de u par $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$ où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E.

III. Rang

1. Nouvelle définition

Rappel

- Le rang d'une application linéaire f est la dimension de $\mathrm{Im}(f)$
- Le rang d'une matrice A est le nombre de lignes non nulles dans une forme échelonnée de A.

Nous allons adopter provisoirement la définition suivante du rang d'une matrice, et montrer à la fin de cette section qu'elle est équivalente à la définition rappelée ci-dessus.

Définition 14.11

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On appelle rang de A et on note $\text{rg}(A)$ le rang de l'application linéaire canoniquemnt associée à A.

Remarque

C'est à dire $\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A))$.

Remarque

Il est facile de voir que cette nouvelle définition du rang coïncide avec l'ancienne dans le cas d'une matrice A est échelonnée en ligne. Si A admet p lignes non nulles, il est clair que $\text{rg}(A) \leq p$ et que les p premières colonnes de A sont linéairements indépendantes donc $\dim(\text{Im}(A)) \geq p$, ainsi $\text{rg}(A) = p$.

Proposition 14.17

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$. Alors $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B))$.

Propriété 14.18

Le produit d'une matrice A par une matrice inversible (à gauche ou à droite) a le même rang que A : si P est inversible alors

$$\text{rg}(AP) = \text{rg}(PA) = \text{rg}(A)$$

Proposition 14.19

Une matrice A est de rang r si et seulement si elle est équivalente à une matrice de la forme J_r, où J_r est la matrice définie dans la proposition 14.14

Proposition 14.20

Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang. En conséquence de cela, une application linéaire a le même rang que sa matrice représentative **dans des bases quelconques.**

2. Rang d'une famille de vecteurs

Définition 14.12

Si $(v_1, \dots, v_p)$ est une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E, on appelle rang de cette famille et on note $\text{rg}(v_1, \dots, v_p)$ la dimension de $\text{Vect}\left(v_1, \dots, v_p\right)$.

Proposition 14.21

Si E est de dimension finie et $\mathcal{B}$ est une base de E, alors le rang d'une famille de vecteurs $(v_1, \dots, v_p)$ est le rang de la matrice dont les colonnes sont les vecteurs colonnes associés à $(v_1, \dots, v_p)$ dans la base $\mathcal{B}$.

3. Retour sur le pivot de Gauss

Proposition 14.22

Les opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes d'une matrice correspondent à des produits par des matrices inversibles. Si A' est obtenue à partir de A par des opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes, on a donc $A' \sim A$.

On en déduit que toute matrice est équivalente à une matrice échelonnée en ligne, donc a le même rang que cette matrice. On peut noter que cela marche aussi avec un échelonnage en colonne. On en déduit finalement la proposition suivante.

Proposition 14.23

Le rang d'une matrice A est au choix

- La dimension de $\text{Im}(A)$
- Le rang d'une application linéaire représentée par A dans des bases quelconques

- Le nombre de ligne non nulles dans une forme échelonnée en ligne de A
- Le nombre de colonne non nulles dans une forme échelonnée en colonne de A

4. Théorème du rang

Théorème 14.24 (du rang)

Soit f une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie E et F. Alors

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \mathrm{rg}(\varphi) = \dim(E)}$$

Soit A une matrice réelle de taille $n \times m$. Alors

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A) = m}$$

→ **Exercice de cours n°7.**

→ **Exercice de cours n°8.**

5. Rang et inverse

Théorème 14.25

Soit A une matrice carrée de taille $n \in \mathbb{N}^*$. Les propositions suivantes sont toutes équivalentes entre elles :

(i) A est inversible

(ii) A est injective

(iii) A est surjective

(iv) A est bijective

(v) A est de rang n

(vi) $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$

(vii) $\mathrm{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

IV. Compléments sur le pivot de Gauss

1. Opérations sur les lignes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E_{i,j}$ la matrice carrée dont les coefficients sont tous nuls sauf celui de la i-ième ligne et j-ième colonne qui vaut 1.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$, on a

$$E_{i,j}A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} & & \overset{j}{\downarrow} & & \end{array} \\ \\ i\rightarrow & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{array}{c c} \\ \\ \\ i\rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & a_{j,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, multiplier A à gauche par $E_{i,j}$ donne une matrice qui n'a que des zéros sauf sa i-ème ligne qui est la j-ième ligne de A. Cette remarque permet d'interpréter les opérations sur les lignes comme des multiplications à gauche par une matrice inversible, et donc de justifier que ces opérations conservent le rang :

- Échanger L_i et L_j. Cela revient à multiplier à gauche par la matrice I_n dans laquelle on a échangé les lignes i et j. C'est une matrice inversible donc multiplier par cette matrice ne change pas le rang.
- Remplacer L_i par λL_i avec $\lambda \neq 0$. Cela revient à multiplier à gauche par la matrice diagonale qui n'a que des 1 sauf un λ à la i-ème ligne/colonne (matrice inversible donc ne change pas le rang).

- Remplacer L_i par $L_i + \lambda L_j$. Cela revient à multiplier à gauche par la matrice $I + \lambda E_{i,j}$ où $E_{i,j}$ est la matrice qui n'a que des zéros sauf un 1 sur la i-ième ligne et j-ième colonne.

  $I + \lambda E_{j,i}$ est une matrice triangulaire inversible donc multiplier par cette matrice ne change pas le rang

De même, les opérations sur les colonnes peuvent être assimilés à des multiplications à droite par la même famille de matrices inversibles.

2. Image et noyau

On met A et I l'une en dessous de l'autre et on fait des opérations sur les colonnes jusqu'à obtenir une matrice échelonnée en colonne A' au dessus d'une matrice I'. L'image de A est alors l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonne non nuls dans la matrice A', et le noyau de A est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de I' qui sont sous les colonnes nulles de A'.

Exemple 14.6

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, déterminer le noyau et l'image de A.

On a

$$\left(\begin{array}{cccc} 3 & -2 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 2 & -5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} \left(\begin{array}{cccc} -1 & -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xleftrightarrow[C_4 \leftarrow C_4 - 5C_1]{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + 3C_1}} \left(\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -6 \\ 4 & -7 & 14 & -21 \\ 2 & -5 & 10 & -15 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xleftrightarrow[C_4 \leftarrow C_4 - 3C_2]{C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2} \left(\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On lit alors $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Exercices de cours

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x - y, x + y)$ et soit $\mathcal{B} = \big((1,1),(1,-1)\big)$. On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Justifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$
2. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0}(f)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}(f)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

Exercice 2

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 3.
2. Montrer que $\mathcal{B} = ((-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(0,0,0,1)))$ est une base de E
3. Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z, t) \mapsto (4x - 2y, y + t, z - t)$. Déterminer la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0}(\varphi)$ où $\mathcal{B}_0$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le noyau et l'image de A.

Exercice 4

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e_1},\dots,\boldsymbol{e_m})$ une base de E et $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{e_1},\dots,\boldsymbol{e_n})$ une base de F. À partir de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, construire une base de $\mathcal{L}(E,F)$.

Exercice 5

Montrer que l'application $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $P \longmapsto P + P'$ est bijective en utilisant une matrice représentative de u.

Exercice 6

Montrer que si A et B sont équivalentes, alors ${}^tA$ et ${}^tB$ sont équivalentes.

Exercice 7

On considère l'application $\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, 2z-y, x+2z) \end{array}$.

1. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera A.
2. Mettre A sous forme échelonnée et en déduire le rang de A
3. En déduire que φ n'est pas injective.

Exercice 8

On considère l'application $\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, z-2y, x+2z, y-3x) \end{array}$.

1. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique
2. Déterminer $\mathrm{rg}(\varphi)$
3. En déduire que φ est injective.