Programme de khôlle de maths n° 4

Semaine du 7 Octobre

Cours

Révisions : études de fonctions. Savoir déterminer l'ensemble de définition, étudier les variations, le signe, les limites aux bornes de l'ensemble de définition, les asymptotes verticales et horizontales. Toutes les fonctions vues au lycée. TVI.

Chapitre 2 : Logique

- Logique : propositions, connecteurs, quantificateurs, implications et équivalences.
- Lois de De Morgan
- $(A \Rightarrow B) \iff (\neg A \vee B)$, négation de $A \Rightarrow B$: $A \wedge \neg B$
- Raisonnement par l'absurde, par contraposée, par disjonction de cas (par ex : (in)équations avec valeur absolue), par analyse-synthèse (résolution d'(in)équations).

Chapitre 3 : Ensembles et applications

- Egalité, inclusion d'ensembles
- Ensemble vide, ensemble $\mathcal{P}(E)$ des sous-ensembles d'un ensemble E, ensemble $F \setminus E = \{x \in F, x \notin E\}$.
- Union et intersection de deux ensembles, complémentaire dans un ensemble.
- Union et intersection d'une famille quelconque d'ensembles.
- Produit cartésien, n-uplet (définitions)
- Application $f : E \to F$, ensemble de départ, ensemble d'arrivée, image directe $f(A)$ de $A \in \mathcal{P}(E)$, image réciproque $f^{-1}(A)$ de $A \in \mathcal{P}(F)$.
- Restriction d'une application, prolongement d'une application
- Injection, surjection, bijection. Application réciproque d'une bijection. Application identité. $f : E \to F$ est une bijection si et seulement si il existe $g : F \to E$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et alors $f^{-1} = g$.

Questions de cours et exercices vus en classe

- Démontrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Soient A,B,C trois parties de E. Montrer que
  1. $A \cap B = C \iff B \subset A$
  2. $A \cup B = B \iff A \subset B$
  3. $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C \iff B = C$
  4. $\overline{A} \subset B \iff \overline{B} \subset A$
- Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ et que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
- Montrer que :
  1. $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow g$ surjective
  2. $g \circ f$ injective $\Longrightarrow f$ injective

Exercices

1. Montrer que f injective et g injective $\Longrightarrow g \circ f$ injective et que f surjective et g surjective $\Longrightarrow g \circ f$ surjective.
2. Montrer que si $f : E \to F$ est injective on a pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
3. Montrer que toute restriction d'une injection est une injection et que tout prolongement d'une surjection est une surjection.
   Plus précisément : soit $A \subset E$, soit $f : E \to F$ une injection et $g : A \to F$ une surjection. Montrer que $f_{|A}$ est une injection et montrer que si $\widetilde{g} : E \to F$ vérifie $\forall x \in A, \widetilde{g}(x) = g(x)$, alors $\widetilde{g}$ est une surjection.
4. Soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}, (x; y) \mapsto (x+2y; -x-3y)$. Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.
5. Soit $f : E \to E$ une application d'un ensemble E vers lui-même telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.
6. Les applications suivantes sont-elles injectives/surjectives/les deux ?

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$

(b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n^2$

(c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n+1$

(d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n^2$

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$

(f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - x^2$

(g) $f : [1; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - x^2$

(h) $f : [1; +\infty[\to [0; +\infty[$, $x \mapsto x^3 - x^2$