

Dans tout ce chapitre $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

I. Loi d'une variable aléatoire discrète

1. Généralités

a. Preamble

Définition 12.1

On appelle **ensemble dénombrable** un ensemble qui peut être mis en bijection avec \mathbb{N} .
Un ensemble E en bijection avec \mathbb{N} peut être indexé par \mathbb{N} et donc s'écrire sous la forme $E = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Propriété 12.1 (admise)

\mathbb{N} est dénombrable, \mathbb{Z} est dénombrable, \mathbb{Q} est dénombrable, mais \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

b. Variable aléatoire discrète

Définition 12.2

Une **variable aléatoire réelle discrète** X est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- $X(\Omega)$ est une partie de \mathbb{R} **finie ou dénombrable**
- Pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$.

Remarque

En pratique on ne se préoccupe pas de la seconde condition.

Remarque

De façon informelle, définir une variable aléatoire X c'est associer à chaque issu possible ω d'une expérience aléatoire un nombre réel $X(\omega)$. On parle de variable aléatoire discrète lorsque $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, c'est à dire lorsqu'on peut l'écrire sous la forme $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ avec I égal à \mathbb{N} ou \mathbb{Z} ou un ensemble fini.

Définition 12.3

Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur Ω .

- L'ensemble $X(\Omega)$ s'appelle **support de X** ou **ensemble des valeurs prises par X**
- Pour tout $x \in X(\Omega)$, on note $(X = x)$ l'événement $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$.

Remarque

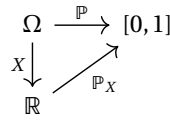
On définit de même les événements suivant :

- $(X \geq a) = X^{-1}([a, +\infty]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq a\}$
- $(X > a) = X^{-1}(]a, +\infty]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > a\}$
- $(a < X < b) = X^{-1}(]a, b]) = \{\omega \in \Omega \mid a < X(\omega) < b\}$
- Plus généralement, pour tout $A \subset \mathbb{R}$, on note : $(X \in A) = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$
- On note parfois ces événements avec des crochets ou des accolades plutôt que des parenthèses : $[X = x]$ et $\{X = x\}$ signifient la même chose que $(X = x)$.
- $(X \leq b) = X^{-1}(]-\infty, b]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq b\}$
- $(X < b) = X^{-1}(]-\infty, b]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < b\}$

Remarque

Une variable aléatoire n'est en fait ni une variable, ni aléatoire!

L'aspect aléatoire est modélisé par la fonction probabilité $\mathbb{P} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Une variable aléatoire X est simplement l'instrument pour traduire cette probabilité \mathbb{P} définie sur Ω en une probabilité \mathbb{P}_X définie sur \mathbb{R} (il serait plus correct de dire « définie sur les parties de Ω /les parties de \mathbb{R} ») :



Où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{x\}))$

Définition 12.4

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Si le support de X est fini, on dit que X est une **variable aléatoire réelle discrète finie**, sinon on dit que X est une **variable aléatoire discrète infinie**.

Exemple 12.1

- X égale au nombre d'élève présent en classe aujourd'hui a un support fini : $X(\Omega) = \llbracket 0, 39 \rrbracket$
- Y égale au nombre de jour avant le prochain orage est une variable aléatoire discrète infinie : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$
- Z égal à la taille d'une personne choisi au hasard dans la rue **n'est pas une variable discrète** : $Z(\Omega)$ est un intervalle de réels donc n'est pas dénombrable.

Propriété 12.2

Si X est une v.a.r.d. alors la famille $([X = x] \mid x \in X(\Omega))$ est une famille complète d'événements. On a donc

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$$

c. Opérations

Proposition 12.3 (admise)

- Si X est une v.a.r.d. et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors $aX + b$ est une v.a.r.d.
- Si X et Y sont deux variables aléatoires, alors $X + Y$ est une variable aléatoire.

2. Loi d'une v.a.r.d.

a. Généralités

Définition 12.5

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. On appelle **loi de X** la fonction

$$\begin{array}{ccc} f : X(\Omega) & \longrightarrow & [0, 1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}(X = x) \end{array}$$

La loi de X est la donnée de l'ensemble des valeurs prises par X et des probabilités associées à chacune de ces valeurs.

Remarque

Si $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ avec I égal à \mathbb{N} ou \mathbb{Z} ou un ensemble fini, alors la loi de X **est entièrement déterminée** par la famille $((x_i, p_i))_{i \in I}$ où pour tout $i \in I$, $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$. Si X est une variable aléatoire finie, on peut représenter cette loi sous forme d'un tableau

Valeurs x_i	x_1	\dots	x_n
Probabilité $\mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	\dots	p_n

Exemple 12.2

Un joueur joue à une loterie qui consiste à piocher une bille au hasard dans une urne contenant des billes indiscernables au toucher numérotées de 1 à 500. Il paie 1€ pour jouer à ce jeu.

- Si la bille piochée porte le numéro 500, on gagne 200€

- Si la bille piochée est un multiple de 50, on gagne 5€
- Dans tous les autres cas, on ne gagne rien.

On peut modéliser cette expérience par l'univers $\Omega = \llbracket 1; 500 \rrbracket$ muni de la probabilité uniforme, et par la variable aléatoire X suivante représentant le gain algébrique du joueur :

$$X: \Omega = \llbracket 1, 500 \rrbracket \longrightarrow \{-1, 4, 199\}$$

$$\omega \longmapsto X(\omega) = \begin{cases} 199 & \text{si } \omega = 500 \\ 4 & \text{si } \omega \text{ est un multiple de 50} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

La loi de X est alors donnée par le tableau suivant :

Valeurs x_i	-1	4	199
Probabilités $\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{490}{500}$	$\frac{9}{500}$	$\frac{1}{500}$

Propriété 12.4

Si X est une v.a.r.d. et que $X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs prises par X , alors pour tout $A \subset X(\Omega)$ on a

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$$

→ Exercice de cours n°1.

b. Condition d'existence d'une loi

Théorème 12.5 (admis)

- Si (x_1, \dots, x_n) est une famille finie de réels et (p_1, \dots, p_n) est une famille finie de réels positifs telle que $\sum_{k=1}^n p_k = 1$, alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X définie sur Ω telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$$

- Si $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille de réels et $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille de réels positifs telle que $\sum p_n$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$, alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X définie sur Ω telle que $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$$

Autrement dit, ce théorème stipule qu'il existe toujours une variable aléatoire prenant des valeurs données avec probabilité données du moment que la somme de toutes les probabilités fait 1.

Ce théorème permet de faire abstraction de la notion de variable aléatoire pour se concentrer sur la notion de **loi**.

→ Exercice de cours n°2.

3. Fonction de répartition

a. Généralités

Définition 12.6

Soit X une variable aléatoire. La **fonction de répartition** de X est la fonction F_X définie sur \mathbb{R} par

$$F_X: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \mathbb{P}(X \leq x)$$

Remarque

Pour une variable aléatoire discrète, la fonction de répartition est une **fonction en escalier** (i.e. une fonction constante par morceaux).

Propriété 12.6

Soit X une variable aléatoire et soit F_X sa fonction de répartition. Alors :

- $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(x) \leq 1$
- F_X est croissante.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
- Pour tout réels a et b vérifiant $a < b$, on a $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

b. Lien avec la loi**Propriété 12.7**

Soit X une variable aléatoire discrète dont le support est $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ et soit F_X sa fonction de répartition. Supposons que les x_i sont rangées par ordre croissant, c'est à dire que $\forall i \in \mathbb{N}, x_i < x_{i+1}$. Alors

$$\forall i \in I, \mathbb{P}(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$$

et

$$\forall i \in I, F_X(x_i) = \sum_{k=0}^i \mathbb{P}(X = x_k)$$

II. Moments d'une v.a.r.d.**1. Espérance****Définition 12.7**

Soit X une variable aléatoire discrète.

- Si X prend un nombre fini de valeurs $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, on appelle espérance de X et on note $\mathbb{E}(X)$ le réel défini par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n x_k \mathbb{P}(X = x_k)$$

- Si X prend un nombre infini de valeurs $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, alors on dit que X admet une espérance si et seulement si la série $\sum x_n \mathbb{P}(X = x_n)$ est **absolument convergente**. Dans ce cas, on appelle espérance de X et on note $\mathbb{E}(X)$ le réel défini par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \mathbb{P}(X = x_k)$$

Remarque

- Une variable aléatoire fini admet toujours une espérance.
- Si X est une variable aléatoire positive (i.e. $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0$), alors la série $\sum x_k \mathbb{P}(X = x_k)$ est positive. On note $\mathbb{E}(X) < +\infty$ si X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = +\infty$ sinon.
- On peut retenir la formule suivante, valable pour X finie ou infinie :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x)$$

- Si X est une variable aléatoire déterministe égale au réel a , alors $\mathbb{E}(X) = a$. En effet, on a alors $X(\Omega) = \{a\}$ et $\mathbb{P}(X = a) = 1$ d'où le résultat.

→ Exercice de cours n°3.

Propriété 12.8

Si X est une v.a.r.d. qui admettant une espérance et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors $aX + b$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

Propriété 12.9 (admise)

Soient X et Y deux v.a.r.d. qui admettent une espérance. Alors $X + Y$ admet une espérance et

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

Remarque

Grâce à la propriété précédente, si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on a également

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$$

autrement dit l'espérance est linéaire.

→ Exercice de cours n° 4.

Définition 12.8

Soit X une v.a.r.d. On dit que X est positive et on note $X \geq 0$ si pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geq 0$.

Propriété 12.10

Si X est une v.a.r.d. positive qui admet une espérance, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $\mathbb{P}(X = 0) = 1$

Propriété 12.11

Soient X et Y deux variable aléatoire réelle discrète. Si pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$, on note $X \leq Y$ et on a alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

Propriété 12.12

Soit X une variable aléatoire.

- Si $|X|$ admet une espérance, alors X admet une espérance
- Si $|X| \leq Y$ où Y est une variable aléatoire qui admet une espérance, alors X admet une espérance.

2. Transfert d'une variable aléatoire

Définition 12.9

Soit X une variable aléatoire discrète et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Alors la fonction $g(X)$ définie par

$$\begin{aligned} g(X): \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto g(X(\omega)) \end{aligned}$$

est une variable aléatoire discrète. On l'appelle le **transfert de X par g** .

Exemple 12.3

Soit X la variable aléatoire à valeurs dans $\{-4, -3, 1, 4\}$ définie par

$$\mathbb{P}(X = -4) = 0,2 \quad ; \quad \mathbb{P}(X = -3) = 0,3 \quad ; \quad \mathbb{P}(X = 1) = 0,1 \quad ; \quad \mathbb{P}(X = 4) = 0,4$$

Alors la variable $Y = X^2$ est à valeurs dans $\{1, 9, 16\}$ et sa loi est donnée par

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1) = 0,1 \quad ; \quad \mathbb{P}(Y = 9) = \mathbb{P}(X = -3) = 0,3; \quad \mathbb{P}(Y = 16) = \mathbb{P}(X = -4) + \mathbb{P}(X = 4) = 0,6$$

Propriété 12.13

Soit X une v.a.r.d. et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Soit $Y = g(X)$. Alors,

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x)$$

Théorème 12.14 (de transfert)

Soit X une v.a.r.d. dont le support est $\{x_i \mid i \in I\}$ avec $I = \mathbb{N}$ ou $I = \mathbb{Z}$ ou I un ensemble fini et soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Alors $g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série de terme général $g(x_n)\mathbb{P}(X = x_n)$ converge et dans ce cas on a :

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{i \in I} g(x_i) \mathbb{P}(X = x_i)$$

Remarque

On peut retenir l'égalité suivante, valable pour X finie ou infinie :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) \mathbb{P}(X = x)$$

→ Exercice de cours n° 5.

3. Moments

Définition 12.10

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ avec $I = \mathbb{N}$ ou $I = \mathbb{Z}$ ou I un ensemble fini, et Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On dit que X admet un moment d'ordre r si X^r admet une espérance, c'est à dire si la série de terme général $x_i^r \mathbb{P}(X = x_i)$ converge absolument, et on note

$$m_r = \mathbb{E}(X^r) = \sum_{i \in I} x_i^r \mathbb{P}(X = x_i)$$

Remarque

L'espérance d'une v.a.r.d. X (lorsqu'elle existe) est le moment d'ordre 1 de X .

Propriété 12.15

Si une variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2, alors elle admet un moment d'ordre 1 et de plus :

$$\mathbb{E}(X) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}$$

4. Variance

Définition 12.11

Soit X une variable aléatoire discrète. Si X admet un moment d'ordre 2, alors $X - \mathbb{E}(X)$ aussi, et on appelle variance de X le nombre défini par

$$V[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$$

On définit aussi l'écart-type de X , noté $\sigma(X)$, par

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque

- Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors la variance de X est

$$V(X) = \sum_{k=1}^n (x_k - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x_k)$$

- Si $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, alors X admet une variance si et seulement si la série de terme général $(x_n - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x_n)$ converge et d'après le théorème de transfert on a

$$V(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} (x_k - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x_k)$$

- On a $V(X) \geq 0$ avec $V(X) = 0$ si et seulement si $\mathbb{P}(X = 0) = 1$.

Théorème 12.16 (formule de König-Huygens)

X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2, et on a

$$V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}(X)^2$$

Propriété 12.17

Soit a et b deux réels et soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. Alors $aX + b$ admet une variance et

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Remarque

On en déduit que si X admet une variance alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.

5. Inégalités de concentration

Théorème 12.18 (Inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs positive admettant une espérance et soit a un réel strictement positif. Alors

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Théorème 12.19 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire discrète qui admet une variance. Alors pour tout réel $a > 0$ on a

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

→ Exercice de cours n°6.

III. Lois usuelles

1. Loi de Bernoulli

Définition 12.12

Soit $p \in [0, 1]$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli de paramètre p** et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ si :

- $X(\Omega) = \{0, 1\}$
- $\mathbb{P}(X = 1) = p$

Une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli s'appelle une variable de Bernoulli. Sa loi peut être décrite par le tableau suivant :

x_i	0	1
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$1 - p$	p

Remarque

Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p on a $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$

Exemple 12.4

On choisit un entier au hasard entre 1 et 10 selon une loi uniforme. On pose $X = 1$ si le nombre est un multiple de 4 et 0 sinon. X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

Propriété 12.20

Soit $p \in [0, 1]$ et soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p . Alors la fonction de répartition de X est la fonction F_X suivante :

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Définition 12.13

Soit $A \subset \Omega$, on appelle **fonction indicatrice de A** la fonction $\mathbb{1}_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ définie par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

Propriété 12.21

Soit $p \in [0, 1]$. Si X est une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p , alors X admet une espérance et une variance et

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1 - p)$$

Remarque

Si $A \subset \Omega$ et que $X = \mathbb{1}_A$, alors on a $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$.

2. Loi uniforme**Définition 12.14**

Soit (x_1, \dots, x_n) une famille de réels distincts. On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $\{x_1, \dots, x_n\}$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{x_1, \dots, x_n\})$ si

- $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = x_k) = \frac{1}{n}$

Propriété 12.22

Si X une v.a.r.d. telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Alors

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{x_1, \dots, x_n\}) \iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(X = x_j)$$

Remarque

Si E est une partie dénombrable de \mathbb{R} , il n'existe pas de loi p telle que $\forall x, y \in E, \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = y)$.

En effet, supposons que $E = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ et que $\forall (i, j) \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(X = x_j)$.

- Si pour tout $i \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = x_i) = 0$, alors la série de terme général $\mathbb{P}(X = x_n)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_n) = 0$.
- Si pour tout $i \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = x_i) > 0$, alors en notant $a = \mathbb{P}(X = x_i)$ on a

$$S_n = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = x_k)$$

$$= (n+1)a$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)a = +\infty$ car $a > 0$. Ainsi, la série de terme général $\mathbb{P}(X = x_k)$ ne converge pas, contradiction avec la condition $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_k) = 1$.

Propriété 12.23

Soit E un ensemble fini de réels et $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$. Alors, pour tout $A \subset E$, on a

$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)}$$

Propriété 12.24

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a < b$ et soit X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$. Posons $n = \text{card}([a, b]) = b - a + 1$. La fonction de répartition de X est la fonction F_X définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{k-a+1}{n} & \text{si } a \leq k \leq x < k+1 \leq b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

Propriété 12.25

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}([1, n])$, alors X admet une espérance et une variance et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

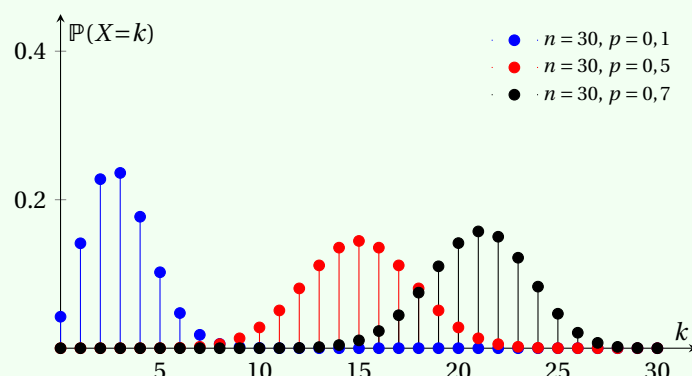
→ Exercice de cours n°7.

3. Loi binomiale

Définition 12.15

Soit $p \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi binomiale de paramètres n et p** et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ si :

- $X(\Omega) = [0, n]$
- $\forall k \in [0, n], \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

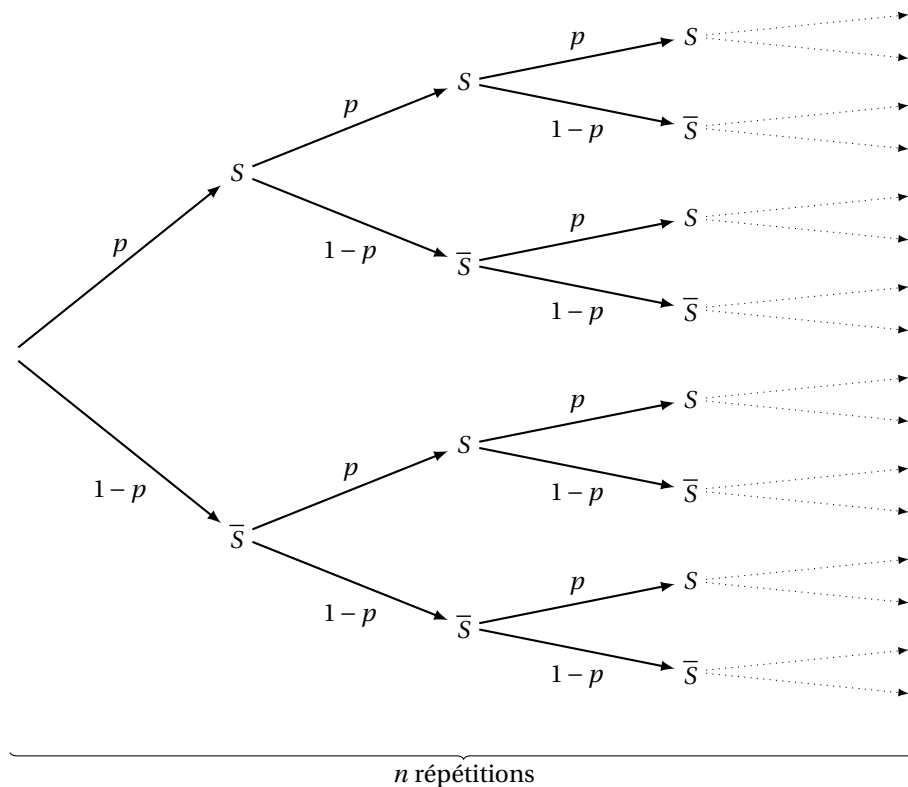


Remarque

On a bien $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1$ grâce à la formule du binôme de Newton.

Remarque

On appelle **épreuve de Bernoulli** une expérience aléatoire qui n'a que deux issus possibles, appelées « succès » et « échec ». X suit une loi binomiale de paramètres n et p lorsque X compte le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de probabilité de succès p (c'est ce qu'on appelle un **schéma de Bernoulli**). En effet, on peut représenter la situation par l'arbre suivant :



Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le nombre de succès est égal à k lorsque le chemin emprunté dans l'arbre contient k succès et $n - k$ échecs.

- Ces chemins sont au nombre de $\binom{n}{k}$ car en choisir un revient à choisir le rang des k succès parmi les n répétitions.
- La probabilité d'un tel chemin est $p^k (1-p)^{n-k}$ d'après la formule des probabilités composées

On en conclut que la probabilité d'obtenir exactement k succès est $\binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$.

Propriété 12.26

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors X admet une espérance et une variance et

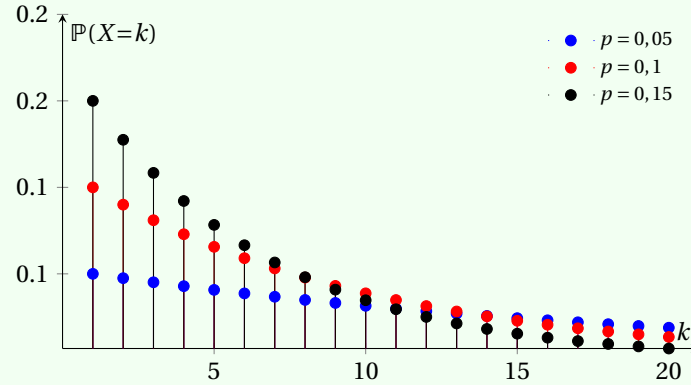
$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p)$$

4. Loi géométrique

Définition 12.16

Soit $p \in]0, 1[$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi géométrique de paramètre p** et on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ si :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$



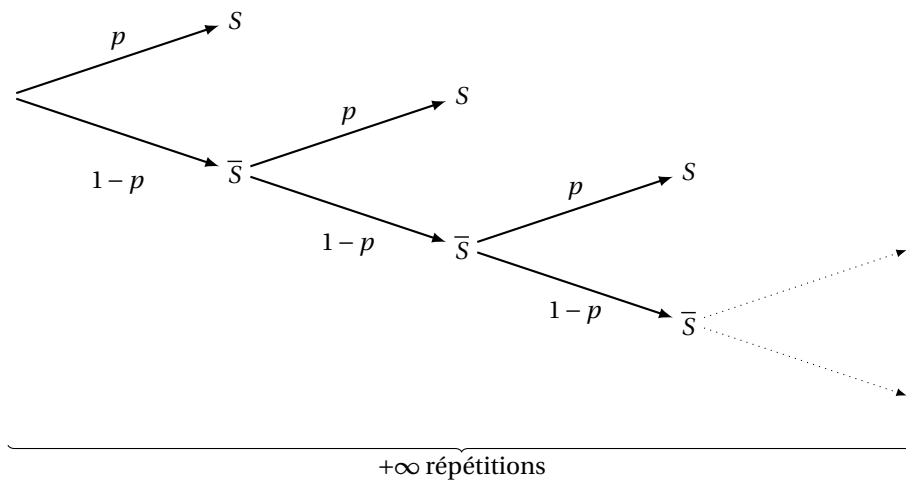
Remarque

$p \in]0, 1[$ donc $1-p \in]0, 1[$, ainsi la série $\sum_{k \geq 1} (1-p)^{k-1}$ est une série géométrique convergente et $\sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$. On a donc bien

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = p \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} = p \times \frac{1}{p} = 1$$

Remarque

Si on répète une même épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p de façon identique et indépendante et qu'on note X le rang d'apparition du premier succès, alors X suit la loi géométrique de paramètre p . On peut représenter cette situation par un arbre de



Pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(X = k)$ est réalisé si et seulement si les $k-1$ premières répétitions sont des échecs et la k -ème est un succès, c'est à dire si le chemin emprunté dans l'arbre est $\underbrace{\bar{S}\bar{S}\cdots\bar{S}}_{k-1 \text{ fois}}S$. La probabilité de ce chemin est $(1-p)^{k-1} \times p$

donc $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.

Propriété 12.27

Si X est une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, alors X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Proposition 12.28

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Alors la variable X est dite **sans mémoire**, c'est à dire que pour tout entiers $(n, p) \in \mathbb{N}$, on a :

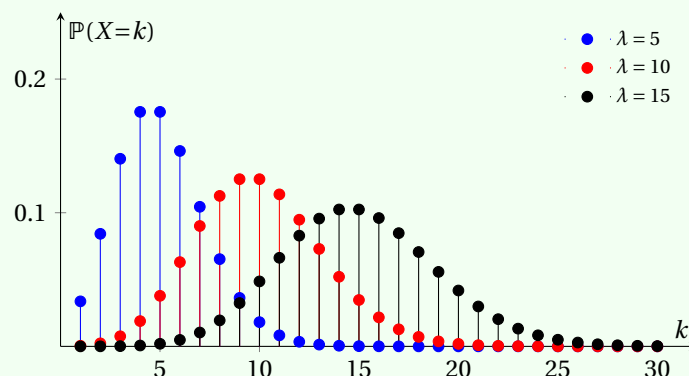
$$\mathbb{P}(X > n + p \mid X > n) = \mathbb{P}(X > p)$$

→ Exercice de cours n°8.

5. Loi de Poisson**Définition 12.17**

Soit $\lambda > 0$ un réel. On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi de Poisson de paramètre λ** et on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ si :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$
- $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

**Propriété 12.29**

Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ . Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout n à partir d'un certain rang, X_n suit la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$. Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$$

Remarque

Cette propriété permet d'interpréter la loi de Poisson comme étant une "limite" de loi binomiale. Pour une valeur de p très petite et une valeur de n très grande, la loi binomiale de paramètres n et p peut être très bien approximée par une loi de Poisson de paramètre np .

Remarque

On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans \mathbb{N} **converge en loi** vers une variable aléatoire X si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$.

Propriété 12.30

Soit $\lambda > 0$ un réel. Si X est une variable aléatoire suivant la loi de poisson de paramètre λ , alors X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = \lambda \quad \heartsuit \quad \text{et} \quad V(x) = \lambda$$

Exemple 12.5

Les compagnies d'assurances utilisent souvent la loi de Poisson pour modéliser le nombre de sinistres à indemniser et évaluer ainsi le coût d'une politique d'assurances et les risques associés.

Par exemple, si une compagnie d'assurance observe qu'une personne subit en moyenne un dégât des eaux tous les 15 ans, elle posera $\lambda = \frac{1}{15}$ égal au nombre moyen de dégât des eaux subi par année et par personne, et le nombre de dégâts des eaux qu'un assuré subit en un an suit alors une loi de Poisson de paramètre λ .

Exercices de cours

Exercice 1

Soit X une v.a.r.d. telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^{k+1}}$. Calculer la probabilité que X soit paire.

Exercice 2

- Justifier que $\sum \frac{1}{2^n}$ converge et que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1$
- En déduire qu'il existe une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ vérifiant $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^k}$
- Proposer une expérience aléatoire dont l'issue peut être modélisée par la variable aléatoire X .

Exercice 3

Dans chacun des exemples suivant, vérifier que la famille $(x_i, p_i)_{i \in I}$ définit bien la loi d'une variable aléatoire X , puis déterminer si X admet une espérance et la calculer le cas échéant.

- $(x_i, p_i)_{i \in I} = \left(i, \frac{1}{50}\right)_{1 \leq i \leq 50}$.
- $I = \mathbb{N}, \forall i \in I, x_i = i$ et $p_i = \frac{1}{2^{i+1}}$.
- $I = \mathbb{N}^*, \forall i \in I, x_i = 2^i$ et $p_i = \frac{1}{2^i}$.
- $I = \mathbb{Z}, \forall i \in I, x_i = i$ et $p_i = \frac{1}{2 \times 3^{|i|}}$.

Exercice 4

Une urne contient 2 boules blanches et $n - 2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise dans cette urne. On note X le rang du tirage de la première boule blanche, et Y le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne.

- Déterminer la loi de X et $\mathbb{E}[X]$.
- Exprimer Y en fonction de X et calculer $\mathbb{E}[Y]$.

Exercice 5

Soit X la variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \frac{2}{3^k}$, et soit $Y = 2^X$.

- Montrer que X existe.
- Calculer $\mathbb{E}(X)$
- Calculer $\mathbb{E}[Y]$

Exercice 6

La moyenne à un examen est de 8, avec un écart-type de 4 points dans les notes. On choisit un étudiant au hasard et on note X sa note.

- À l'aide de l'inégalité de Markov, démontrer que $\mathbb{P}(X \geq 14) \leq \frac{4}{7}$
- À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, démontrer que $\mathbb{P}(|X - 8| \geq 6) \leq \frac{4}{9}$.
- En déduire un majorant plus précis de $\mathbb{P}(X \geq 14)$.

Exercice 7

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a < b$ et soit X est une variable suivant la loi $\mathcal{U}([a, b])$. Montrer que X admet une espérance une variance et que :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

Indication : étudier la variable aléatoire Y définie par $Y = X - a + 1$

Exercice 8

Soit X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans \mathbb{N} . On suppose que X est sans mémoire, c'est à dire que :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}(X > n + p \mid X > n) = \mathbb{P}(X > p)$$

Montrer que X suit une loi géométrique.