CHAPITRE 6

SUITES NUMÉRIQUES

I. Généralités

1. Définitions

a. Suites numériques

Définition 6.1

Une **suite numérique** est une fonction u définie sur $\mathbb{N}$, ou sur une partie I de $\mathbb{N}$. Pour tout entier n on note $u_n = u(n)$:

$$u: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

- u_n désigne le **terme de rang** n (ou **terme d'indice** n) de la suite.
- Pour désigner la suite u on peut écrire u, ou (u_n), ou encore $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou $(u_n)_{n\in I}$ le cas échéant).

On fera donc bien la distinction entre le **terme** u_n qui est un nombre réel, et la **suite** (u_n).

Remarque

Une suite peut être définie de plusieurs façons, par exemple :

- de façon explicite

  Exemple : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{1+3n}{\mathrm{e}^n}$

- par son (ou ses) premier(s) terme(s) et une relation de récurrence :

  Exemple : $u_1 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, u_{n+1} = 3u_n - 2$

  Exemple : $u_0 = 1, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

  Exemple : $u_0 = 1, \text{et} \quad \forall n \geq 0, u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$

- de façon implicite, comme solution d'une équation qui dépend de n

  Exemple : si (E_n) : $x^n + \ln(x) = 0$, on peut montrer en étudiant la fonction $f_n : x \longmapsto x^n + \ln(x)$ que (E_n) admet une unique solution sur $]0;+\infty[$. Si on note u_n cette solution, cela définit une suite u_n (voir par exemple DST n°1).

Remarque

Une suite numérique est une famille de nombres réels indexée par $\mathbb{N}$ ou par une partie de $\mathbb{N}$.

b. Suites minorée, majorée, bornée

Définition 6.2

Soit (u_n) une suite numérique définie sur $I \subset \mathbb{N}$. On dit que (u_n) est...

- ...**majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in I$, $u_n \leq M$;
- ...**minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in I$, $m \leq u_n$;
- ...**bornée** s'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in I$, $m \leq u_n \leq M$.

2. Variations

Définition 6.3

Soit (u_n) une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$. On dit que (u_n) est...

- ...**croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$, autrement dit si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$;
- ...**décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$, autrement dit si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$;
- ...**constante** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.

Remarque

Dans le cas bien précis où (u_n) est définie de façon explicite par $u_n = f(n)$ où f est une fonction, alors si f est monotone sur $[0;+\infty[$, u_n est monotone et de même sens de variation sur $[0;+\infty[$.
En effet, on a alors $u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n)$ et le signe de $f(n+1) - f(n)$ est constant si f est monotone.

Attention, il ne faut pas confondre ce cas avec celui d'une suite définie par récurrence : par exemple si $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{1}{2}x$. La fonction f est croissante mais la suite (u_n) est décroissante !

→ **Exercice de cours n° 1.**

II. Cas particuliers

1. Suites arithmétiques

Définition 6.4

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** s'il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. On appelle alors **raison** de la suite (u_n) ce réel r.

Propriété 6.1

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r

- Si $r > 0$, (u_n) est croissante
- Si $r < 0$, (u_n) est décroissante
- Si $r = 0$, (u_n) est constante

Propriété 6.2 (Terme général d'une suite arithmétique)

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$. Alors

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$
- $\forall n, p \in \mathbb{N}, n \geq p, u_n = u_0 + (n-p)r$

2. Suites géométriques

Définition 6.5

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **géométrique** s'il existe un réel q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times q$. On appelle alors **raison** de la suite (u_n) ce réel q.

Propriété 6.3

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 > 0$

- Si $q > 1$, (u_n) est croissante
- Si $0 < q < 1$, (u_n) est décroissante
- Si $q = 1$, (u_n) est constante
- Si $q \leq 0$, (u_n) n'est pas monotone.

Remarque

Si (u_n) est une suite géométrique avec $u_0 < 0$ et $q > 0$, alors la propriété précédente reste vraie en échangeant « croissante »et « décroissante ».

Propriété 6.4 (Terme général d'une suite géométrique)

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$. Alors

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$
- $\forall n, p \in \mathbb{N}, n \geq p, u_n = u_0 \times q^{n-p}$

→ **Exercice de cours n°2.**

→ **Exercice de cours n°3.**

3. Suites arithmético-géométriques

Définition 6.6

Une suite numérique (u_n) est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels a et b avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

La proposition et la propriété suivante sont à savoir redémontrer en situation.

Proposition 6.5

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ et soit r l'unique réel tel que $r = ar + b$, c'est à dire $r = \dfrac{b}{1-a}$.
Alors, la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - r$ est une suite géométrique de raison a.

Une conséquence immédiate est la propriété suivante :

Propriété 6.6 (Terme général d'une suite arithmético-géométrique)

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ et posons $r = \dfrac{b}{1-a}$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a^n(u_0 - r) + r$

4. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 6.7

Une suite (u_n) est dite **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe deux réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Si u_0 et u_1 sont donnés, une telle suite (u_n) est définie de façon unique.
On appelle alors **équation caractéristique** de (u_n) l'équation $r^2 = ar + b$.

Proposition 6.7 (Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2)

Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $(E)\ :\ r^2 = ar + b$. On distingue trois cas :

- Si (E) admet deux solution réelles distinctes r_1 et r_2, alors il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

- Si (E) admet une solution double r_0, alors il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_0^n + \mu n r_0^n$$

- L'équation caractéristique n'admet aucune solution réelle. Elle admet donc deux solutions complexes conjuguées, $z_1 = r\,\mathrm{e}^{\imath\alpha}$ et $z_2 = r\,\mathrm{e}^{-\imath\alpha}$ (voir chapitre 9). Il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r^n \cos(n\alpha) + \mu r^n \sin(n\alpha)$$

En pratique, dans chaque cas, on trouve la valeur de λ et μ à l'aide des valeurs de u_0 et u_1.

→ **Exercice de cours n°4.**

III. Limites

Dans la suite de ce chapitre, on note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Cette notation est réservé au cours et servira seulement à gagner du temps en regroupant plusieurs cas en un seul.

1. Généralités

a. Limite finie, limite infinie

Définition 6.8

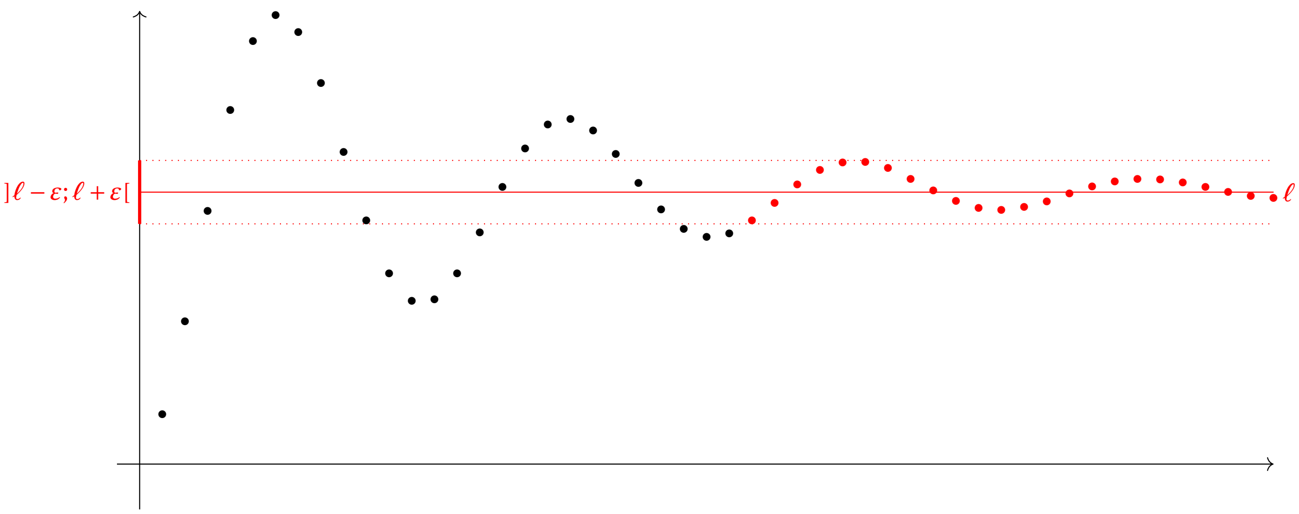
Soit (u_n) une suite numérique. On dit que...

- ...(u_n) tend vers $+\infty$, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Autrement dit, (u_n) a pour limite $+\infty$ si :
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n > A$$
.
- ...(u_n) tend vers $-\infty$, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, si tout intervalle de la forme $]-\infty;A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Autrement dit, (u_n) a pour limite $-\infty$ si :
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n < A$$
.

→ **Exercice de cours n°5.**

Définition 6.9

Soit (u_n) une suite numérique et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) admet pour limite ℓ, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Une formulation équivalente est :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \in]\ell-\varepsilon;\ell+\varepsilon[$$
.
Une autre formulation est
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$



À partir d'un certain rang les termes de la suite ne sortent plus de l'intervalle $]\ell-\varepsilon;\ell+\varepsilon[$
et ce **quel que soit la valeur de** ε

Remarque

Pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, on note aussi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Définition 6.10

- Si (u_n) admet une limite finie, on dit que (u_n) converge.
- Si (u_n) admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$, ou si (u_n) n'admet pas de limite on dit que (u_n) diverge.

Exemple 6.1

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge
- $(-1)^n$ vaut alternativement -1 et 1, donc elle ne converge pas.
  En effet, supposons qu'il existe un réel ℓ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, tous les termes de la suite sont contenus dans $]\ell-\varepsilon;\ell+\varepsilon[$ à partir d'un certain rang.
  Si $\ell \neq -1$ et $\ell \neq 1$, alors il suffit de choisir ε tel que $]\ell-\varepsilon;\ell+\varepsilon[$ ne contienne ni 1 ni -1 (en prenant $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\min(|\ell-1|,|\ell+1|)$). Alors, aucun terme de la suite n'appartient à $]\ell-\varepsilon;\ell+\varepsilon[$.
  Si $\ell = 1$, on prend $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Aucun terme impair de la suite n'appartient à $]1-\dfrac{1}{2};1+\dfrac{1}{2}[$ donc (u_n) ne converge pas vers 1.
  Si $\ell = -1$, on prend $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Aucun terme pair de la suite n'appartient à $]-1-\dfrac{1}{2};-1+\dfrac{1}{2}[$ donc (u_n) ne converge pas vers -1.
  On dit que $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$ donc $(\mathrm{e}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

b. Unicité de la limite

Proposition 6.8

La limite d'une suite est unique. Si $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell'$, alors $\ell = \ell'$.

c. Caractérisations de la limite

Remarque

Si $\ell \in \mathbb{R}$, une formulation équivalente de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ est $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0$

Il est parfois plus pratique de manipuler des termes positifs uniquement. À cet effet, la proposition suivante peut rendre service :

Proposition 6.9

Soit (u_n) une suite numérique et ℓ un réel

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$

d. Quelques critères de convergence

Proposition 6.10

Soit (u_n) une suite convergente. Alors (u_n) est bornée.

Remarque

Le fait d'être bornée est une condition **nécessaire** mais **non suffisante** de convergence. Par exemple la suite définie par $u_n = (-1)^n$ est bornée mais diverge.

Une **suite extraite** d'une suite (u_n) est une suite dont les termes sont certains termes de la suite (u_n) pris dans le même ordre, c'est à dire une suite v définie par $v_n = u_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. Cette définition générale n'est pas à connaître mais les exemples utilisés ci-dessous doivent être connus :

Proposition 6.11

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute **suite extraite** de (u_n) converge vers ℓ. En particulier :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell$.

Proposition 6.12 (admise)

Pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell \end{cases}$

Exemple 6.2

On peut déduire de cette proposition que la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite finie ou infinie. En effet, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} -1 = -1$, si (u_n) avait une limite cela contredirait la proposition.

Proposition 6.13

Soit (u_n) une suite bornée et v_n une suite qui tend vers 0. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$.

Proposition 6.14

Soit (v_n) une suite qui ne s'annule pas telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} |v_n| = +\infty$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{v_n} = 0$

Proposition 6.15

Soit (u_n) une suite bornée et (v_n) une suite qui ne s'annule pas telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} |v_n| = +\infty$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$

2. Limites de référence

Lemme 6.16

Soit a un réel strictement positif. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

On déduit de ce lemme la proposition suivante :

Proposition 6.17

Soit q un nombre réel.

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q < -1$, alors q^n n'a pas de limite.

Proposition 6.18

- $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$

Proposition 6.19

Pour tout $\alpha > 0$, on a

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

IV. Calcul de limites

1. Opérations sur les limites

Proposition 6.20

Multiplication par un réel

- Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $a > 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} a \times u_n = +\infty$
- Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $a < 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} a \times u_n = -\infty$
- Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $a > 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} a \times u_n = -\infty$
- Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $a < 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} a \times u_n = +\infty$

Proposition 6.21

Dans ces tableaux, ℓ et ℓ' désignent des nombres réels.

Somme

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Produit

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} (u_n v_n)$	$\ell\ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Inverse

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \neq 0$	0_+	0_-	$\pm\infty$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Quotient

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	0_+ ou 0_-	0
$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	FI	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI

Exemple 6.3

- $\lim_{n\to+\infty} (3n^2 + 2n) = +\infty$ car $\lim_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} 2n = +\infty$
- $\lim_{n\to+\infty} (3 + \frac{2}{n}) = 3$ car $\lim_{n\to+\infty} 3 = 3$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$

Exemple 6.4

Deux exemples de formes indéterminées :
$u_n = 2n^2$ et $v_n = -4n^2$, alors $u_n + v_n = -2n^2$ donc $\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = -\infty$
$u_n = 5n$ et $v_n = -2n$, alors $u_n + v_n = 3n$ donc $\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.

Remarque

« Forme indéterminée » ne veut pas forcément dire qu'il n'y a pas de limite, dans certains cas la limite peut être déterminée par un raisonnement plus approfondi.

Remarque

La notation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0_+$ (respectivement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0_-$) signifie $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang (respectivement $u_n < 0$ à partir d'un certain rang). Par exemple $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0_+$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\mathrm{e}^{-n} = 0_-$.
On n'utilise ces notations que lorsqu'elles sont pertinentes, c'est à dire dans un calcul intermédiaire pour lever une indéterminée de signe.

Exemple 6.5

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n^2+n}{3n+5}$.
Par somme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2+n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (3n+5) = +\infty$. C'est donc une forme indéterminée.
Pour lever l'indétermination, on factorise par le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur :

$$u_n = \frac{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(3+\dfrac{5}{n}\right)} = \frac{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{3+\dfrac{5}{n}}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} = 0$, donc par somme, quotient et produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Proposition 6.22 (passage à la limité dans une inégalité ou une égalité)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes, et soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$.

- Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$, alors $\ell \leq \ell'$.
- Si à partir d'un certain rang $u_n = v_n$, alors $\ell = \ell'$.

2. Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Une suite définie par une relation de récurrence peut être de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une certaine fonction. Toutes les propositions énoncés dans cette sections sont à savoir redémontrer dans chaque cas particulier.
Pour savoir si u est bien définie, il faut faire attention à l'ensemble de définition de f.

→ Exercice de cours n°6.

Définition 6.11

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que I est **stable par** f si pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.

Proposition 6.23

Soit f une foncton définie sur un intervalle I telle que I est stable par f.
Alors, toute suite définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.

Proposition 6.24

Si (u_n) est une suite qui converge vers un réel ℓ et que f est une fonction continue en ℓ, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

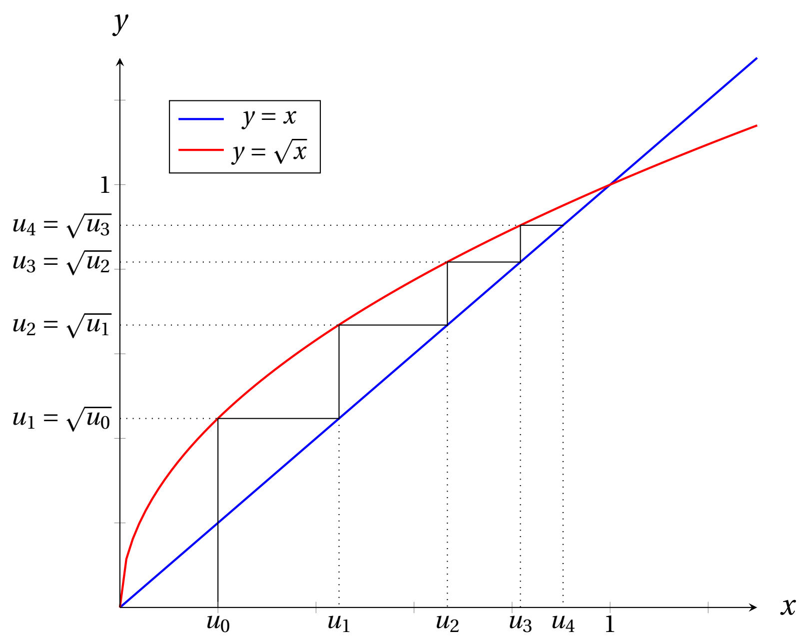
→ Exercice de cours n°7.

Remarque

Dans l'exemple précédent, ℓ vérifie l'équation $\ell = f(\ell)$. On dit que ℓ est un **point fixe** de f.
Si f est une fonction continue, une suite convergente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ admet pour limite un point fixe de f.

Si f est une fonction continue et sans points fixe, alors (u_n) diverge. Cela peut servir à prouver qu'une suite croissante tend vers $+\infty$ de façon indirecte (voir exercice d'approfondissement n°15 par exemple)

On peut déterminer graphiquement les termes d'une suite définie par une relation de récurrence en représentant la courbe $y = f(x)$ et la droite $y = x$. Dans l'exemple ci-dessous, on considère la suite définie par $u_0 = 0,2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$



V. Théorèmes de convergence

1. Suites monotones

Théorème 6.25 de la limite monotone

Soit (u_n) une suite numérique.

- Si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) converge.
- Si (u_n) est croissante et non majorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Si (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) converge.
- Si (u_n) est décroissante et non minorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Remarque

Ce résultat peut se résumer de la façon suivante : si (u_n) est croissante, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Remarque

Ce théorème est parfois appelé à tort « théorème de convergence monotone » par confusion avec un autre théorème qui porte ce nom.

Proposition 6.26 (suites monotones convergentes)

- Soit (u_n) une suite croissante qui converge vers un réel ℓ. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell$.
- Soit (v_n) une suite décroissante qui converge vers un réel ℓ'. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq \ell'$.

2. Théorèmes de comparaison

Théorème 6.27 de comparaison

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

→ **Exercice de cours n° 8.**

Théorème 6.28 des gendarmes (ou d'encadrement)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang.
Si (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite finie ℓ, alors (v_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

→ **Exercice de cours n° 9.**

→ **Exercice de cours n° 10.**

3. Suites adjacentes

Définition 6.12

Deux suites (a_n) et (b_n) sont dites **adjacentes** si les trois conditions suivantes sont remplies :

- (a_n) est croissante
- (b_n) est décroissante
- $\lim_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$

Proposition 6.29

Si (a_n) et (b_n) sont adjacentes, alors (a_n) et (b_n) convergent et $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell \in \mathbb{R}$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \leq \ell \leq b_n$$

→ **Exercice de cours n° 11.**

→ **Exercice de cours n° 12.**

VI. Comparaison asymptotique

1. Négligeabilité

Définition 6.13(négligeabilité)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) est **négligeable devant** (v_n) s'il existe une suite (ε_n) avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \varepsilon_n v_n$. On note $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$ (notation de Landau).

Si (v_n) ne s'annule pas, $u_n = o(v_n) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

→ **Exercice de cours n° 13.**

Propriété 6.30

Soient (a_n), (b_n) et (c_n) sont trois suites.

- Si $a_n = o(b_n)$ et $b_n = o(c_n)$, alors $a_n = o(c_n)$.
- Si $a_n = o(c_n)$ et $b_n = o(c_n)$, alors $a_n + b_n = o(c_n)$

Propriété 6.31

Si $a_n = o(b_n)$, alors quelle que soit la suite (c_n) on a $a_n c_n = o(b_n c_n)$.

Propriété 6.32

Soit (u_n) une suite. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ si et seulement si $u_n = o(1)$.

Proposition 6.33 (croissance comparée de suites usuelles, admise)

Soit $a, b, c > 0$ trois réels. On a

- $\boxed{a^n = o(n!)}$, c'est à dire : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0}$
- Si $a > 1$, $\boxed{n^b = o(a^n)}$, c'est à dire : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^b}{a^n} = 0}$

  En particulier pour $a = \mathrm{e}$, $\boxed{n^b = o(\mathrm{e}^n)}$, c'est à dire : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^b}{\mathrm{e}^n} = 0}$
- $\boxed{(\ln n)^c = o(n^b)}$, c'est à dire : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^c}{n^b} = 0}$

  En particulier pour $b = \dfrac{1}{2}$, $\boxed{(\ln(n))^c = o(\sqrt{n})}$, c'est à dire : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln(n))^c}{\sqrt{n}} = 0}$

→ **Exercice de cours n° 14.**

2. Équivalence

Définition 6.14(équivalence de suites)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) est **équivalente à** (v_n) s'il existe une suite (α_n) avec $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ telle que $u_n = \alpha_n v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $u_n \sim v_n$

Si (v_n) ne s'annule pas, $u_n \sim v_n \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

Propriété 6.34

Soient (a_n), (b_n) et (c_n) trois suites.

- Si $(a_n) \sim (b_n)$, alors $(b_n) \sim (a_n)$
- Si $(a_n) \sim (b_n)$ et que $(b_n) \sim (c_n)$ alors $(a_n) \sim (c_n)$

Propriété 6.35

On a $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n - v_n = o(v_n)$.

→ **Exercice de cours n° 15.**

Propriété 6.36

Soit (u_n) une suite et ℓ un réel non nul.
$(u_n) \sim \ell$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Propriété 6.37

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $u_n \sim v_n$, alors (u_n) et (v_n) sont de même nature (toutes deux convergentes ou bien toutes deux divergentes) et (u_n) et (v_n) ont la même limite le cas échéant.

Proposition 6.38 (Opérations sur les équivalences)

Soient (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) quatre suites telles que $a_n \sim b_n$ et $c_n \sim d_n$. Alors

- $a_n c_n \sim b_n d_n$

- $\dfrac{a_n}{c_n} \sim \dfrac{b_n}{d_n}$

Remarque

En règle général, on ne peut pas additionner des équivalences.
Par exemple, $n^2+1 \sim n^2$ et $-n^2 \sim -n^2$ mais $n^2+1-n^2 \nsim n^2+(-n^2)$.

Proposition 6.39

Soit $(P(n))$ une suite où P est un polynôme. Alors $P(n)$ est équivalent à son terme de plus haut degré et $P(1/n)$ est équivalent au terme de plus petit degré non nul.

→ **Exercice de cours n° 16.**

Proposition 6.40 (Équivalents usuels)

Si (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Alors

- $\boxed{\sin(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} u_n}$ ou de façon équivalente $\boxed{\sin(u_n) \underset{n\to\infty}{=} u_n + o(u_n)}$
- $\boxed{\cos(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} 1}$ ou de façon équivalente $\boxed{\cos(u_n) \underset{n\to\infty}{=} 1 + o(u_n)}$
- $\boxed{\dfrac{1}{1-u_n} - 1 \sim u_n}$ ou de façon équivalente $\boxed{\dfrac{1}{1-u_n} = 1 + u_n + o(u_n)}$
- $\boxed{\ln(1+u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} u_n}$ ou de façon équivalente $\boxed{\ln(1+u_n) \underset{n\to\infty}{=} u_n + o(u_n)}$
- $\boxed{\mathrm{e}^{u_n} - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} u_n}$ ou de façon équivalente $\boxed{\mathrm{e}^{u_n} \underset{n\to\infty}{=} 1 + u_n + o(u_n)}$

→ **Exercice de cours n° 17.**

→ **Exercice de cours n° 18.**

Exercices de cours

Exercice 1

Étudier les variations de la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{n^2+4}{n+1}$.

Exercice 2

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 5.
Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \mathrm{e}^{u_n}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3\sqrt{7^n}}{2^{2n}}$. Montrer que u_n est géométrique et préciser sa raison.

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
Déterminer une expression du terme général de (u_n).

Exercice 5

Montrer à l'aide de la définition que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n+3}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 6

Considérons la suite u définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 1}$. Cette suite est-elle bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n+1}{u_n+1}$.

1. Étudier les variations de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x+1}$ sur son ensemble de définition.
2. En déduire que l'intervalle $[1;2]$ est stable par f
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$
4. En déduire que u_n converge et préciser sa limite.

Exercice 8

Étudier la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \exp\left(\dfrac{\sqrt{n} \times \sin(n) - \sqrt{n}}{n \tan\left(\frac{1}{n}\right) + \sqrt{n}}\right) + n^2$.

Exercice 9

Étudier la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{\sin(3n)}{n}$.

Exercice 10

Étudier la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n^2 - n\sin n}{7 - 3n^2}$.

Exercice 11

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{5u_n+2v_n}{7} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 3 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{2u_n+5v_n}{7} \end{array}\right.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$
2. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. Soit (a_n) et (b_n) les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$.
Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes et en déduire que (u_n) converge.

Exercice 13

Montrer que si $0 < a < b$ on a $n^a = o(n^b)$ et $a^n = o(b^n)$

Exercice 14

Déterminer les limite de $u_n = \dfrac{(\ln n)^{2023}}{\sqrt{n}}$ et de $v_n = \dfrac{n^{10} \times \ln(n)^{100}}{1000^n}$

Exercice 15

Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n^{3/2}\left(\frac{1}{n-\ln(n)} - \frac{1}{n}\right) = 0$.

Exercice 16

Calculer la limite de $u_n = \dfrac{7n^5 - 4n^3 + 2n^2 - 1}{3 + 2n^2 - 11n^5}$ et celle de $v_n = \dfrac{\frac{6}{n^3} - \frac{2}{n^4} + \frac{6}{n^7}}{\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}}{-2+6n+3n^2}}$

Exercice 17

Montrer que pour tout réel x, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$.

Exercice 18

Étudier dans chaque cas la limite de la suite (u_n)

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{3n+2}{n^2+5n+1}$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{5n^2+3n}{3n^2+2}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\sin(\pi/n))}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} - 1}$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n(\ln(1+n) - \ln n)$
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n^{1/n}$
6. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (3n)^{1/\sqrt{n}}$