⋆

Exercice 1 — Voir correction

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que X suit la loi normale centrée réduite et U suit la loi uniforme sur $\{-1;1\}$. On pose $Y = UX$. Déterminer la loi de Y

⋆

Exercice 2 — Voir correction

(Loi de Laplace) Soit $c > 0$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{c}{2}\,\mathrm{e}^{-c|x|}$

1) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle X.
2) Déterminer la fonction de répartition F de X
3) Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X admet un moment d'ordre n
5) En déduire que X admet une variance et la calculer.

⋆

Exercice 3 — Voir correction

Soit c un réel strictement positif et f la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} x^{-4} & \text{si } x \notin [-1;1] \\ c & \text{si } x \in [-1;1] \end{cases}$.

1) Déterminer l'unique valeur de c telle que f est la fonction de densité d'une variable aléatoire X.
2) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
3) Déterminer l'ensemble des valeurs de $r \in \mathbb{N}^*$ telles que X admet un moment d'ordre r.

⋆

Exercice 4 — Voir correction

Soient λ et μ deux réels strictement positifs. On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes telles que X suit une loi exponentielle de paramètre λ et Y suit une loi exponentielle de paramètre μ.
On pose $Z = \min(X, Y)$.

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, que vaut $\mathbb{P}(X > x)$?
2) Pour $x \geq 0$, que vaut $\mathbb{P}(Z > x)$?
3) Déterminer la loi de Z

⋆

Exercice 5 — Voir correction

Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et soit $L \in \mathbb{R}_+^*$. On s'intéresse à la variable aléatoire discrète X définie par $X = \left\lceil \frac{Y}{L} \right\rceil$ où $\lceil x \rceil$ désigne le plus petit entier k tel que $x \leq k$ (partie entière supérieure).

1) Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
2) Montrer que X suit une loi géométrique dont on précisera les paramètres.
3) Peut on choisir L pour que X et Y ait la même espérance ?

⋆

Exercice 6 — Voir correction

(Loi de Cauchy) Soit $\alpha > 0$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \alpha \cdot \arctan(x) + \frac{1}{2}$.

1) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X. Préciser sa densité f.
2) Montrer que X n'admet ni espérance, ni variance.
3) Déterminer la loi de $Z = \frac{1}{X}$.

⋆ ⋆

Exercice 7 — Voir correction

(Oral ENS 2023) Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 2.

1) Calculer $\mathbb{P}(4X \leq X^2 + 3)$

2) Calculer $\mathbb{E}[\sin(X)]$ après avoir démontré son existence.

⋆ ⋆
Exercice 8 — **Voir correction**

Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui suivent toutes la même loi telle que $\mathbb{E}[X_n] = V(X_n) = 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

1) Pour tout entier $n > t$, comparer les événements $(T_n < t)$ et $(|T_n - n| \geq n - t)$
2) Calculer $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} (T_n < t)\right)$.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 9 — **Voir correction**

(Oral ENS 2023) On construit aléatoirement un intervalle de la manière suivante. On tire tout d'abord son milieu M selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On tire ensuite la longueur totale L de l'intervalle, qui est indépendante de M et suit une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$. On note $[X, Y]$ l'intervalle aléatoire ainsi produit.

1) Expliquer rapidement pourquoi $X = M - \dfrac{L}{2}$ et $Y = M + \dfrac{L}{2}$
2) a) Calculer les espérances $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$
   b) Calculer les variance $V(X)$ et $V(Y)$

On introduit Z la variable aléatoire qui vaut 1 quand $X > 0$ et qui vaut 0 quand $X \leq 0$

3) Calculer $\mathbb{P}(Z = 0)$. En déduire la loi de Z et son espérance.
4) Montrer que pour tous réels y et z, il y a au plus un choix de (λ, μ) qui vérifie $\mathbb{E}[Y] = y$ et $\mathbb{E}[Z] = z$.

Le coin des Khûbes

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 10 — **Voir correction**

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Calculer

$$I = \int_0^1 \mathbb{E}(\max(x, U)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \mathbb{E}\left(\int_0^1 \max(x, U)\,\mathrm{d}x\right)$$

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 11 — **Voir correction**

(Oral ENS 2024) Soit $n \geq 1$ un entier et soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes, toutes de loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$P(X_i \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - e^{-t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

On note $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1) Déterminer la fonction de répartition de M_n, notée F_n, ainsi que sa densité, notée f_n.
2) Montrer, sans trop de calculs, que $\mathbb{E}[M_n] \leq n$.
3) Vérifier que $t(1 - F_n(t))$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.
4) En déduire, après une intégration par parties, que

$$\mathbb{E}[M_n] = \int_0^{+\infty} (1 - F_n(t))\,dt.$$

5) Montrer que

$$\mathbb{E}[M_n] = \int_0^1 \frac{1 - y^n}{1 - y}\,dy$$

et établir finalement que

$$\mathbb{E}[M_n] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

⋆⋆⋆
Exercice 12 **Voir correction**

(Oral ENS 2024) Dans tout cet exercice, α désigne un réel strictement positif fixé. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f_α donnée par

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1], \\ \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \in]1, +\infty[. \end{cases}$$

1) Calculer, pour tout réel t, la quantité $P(X > t)$.
2) À quelle condition sur α la variable aléatoire X admet-elle une espérance finie ? Lorsque cette condition est vérifiée, donner la valeur de $\mathbb{E}[X]$.
3) Pour tout réel x, on note $\lceil x \rceil$ l'unique entier k tel que $k-1 < x \leq k$. Le nombre $\lceil x \rceil$ s'appelle la partie entière supérieure de x. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \lceil \ln(X) \rceil$.
4) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et toutes de densité f_α. On pose

$$Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n).$$

Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la quantité $P\big(n(Y_n - 1) > t\big)$ converge, quand n tend vers $+\infty$, vers une limite que l'on déterminera.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 : Pour déterminer la loi d'une variable à densité quelconque, il est souvent pertinent de s'intéresser à sa fonction de répartition. Notons F_Y la fonction de répartition de Y.
Soit $x \in \mathbb{R}$, calculons $F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x)$.

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= \mathbb{P}(UX \leq x) \\
&= \mathbb{P}(\{U = 1\} \cap \{X \leq x\} + \mathbb{P}(\{U = -1\} \cap \{X \geq -x\} & \text{par incompatibilité de ces deux événements} \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X \leq x) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X \geq -x) & \text{par indépendance de } X \text{ et de } Y
\end{aligned}$$

Pour la loi normale, il est important de retenir que $\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \geq -x)$. En effet, soit f la fonction de densité de X (qui est une fonction paire), alors par changement de variable $u = -t$ on a :

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-x}^{+\infty} f(-u)\,\mathrm{d}u = \int_{-x}^{+\infty} f(u)\,\mathrm{d}u = \mathbb{P}(X \geq -x)$$

Ce raisonnement marche pour n'importe quelle fonction de densité f paire.
On en conclut finalement que $F_Y(x) = 2 \times \frac{1}{2}\mathbb{P}(X \leq x) = F_X(x)$. Y a la même fonction de répartition que X donc Y suit la même loi que X.

Correction de l'exercice 2 :

1) Pour qu'il existe X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que f est une densité de X, il suffit d'avoir
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$
   - f est continue sur $\mathbb{R}$
   - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$

   Dans le cas présent, on a bien $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{c}{2}\,\mathrm{e}^{-c|x|} \geq 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x > 0$ et $c > 0$.
   De plus, $x \mapsto -c|x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc par composition de fonctions continues f est continue.
   Enfin, $\mathrm{e}^{-c|x|} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissance comparée donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
   Pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{c}{2}\int_{-x}^{0} \mathrm{e}^{-c|t|}\,\mathrm{d}t + \frac{c}{2}\int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-c|t|}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{c}{2}\int_{-x}^{0} \mathrm{e}^{ct}\,\mathrm{d}t + \frac{c}{2}\int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-ct}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{c}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{ct}}{c}\right]_{-x}^{0} + \frac{c}{2}\left[-\frac{\mathrm{e}^{-ct}}{c}\right]_{0}^{x} \\
&= \frac{c}{2} \times \left(\frac{1}{c} - \frac{\mathrm{e}^{-cx}}{c} - \frac{\mathrm{e}^{-cx}}{c} + \frac{1}{c}\right) \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-cx} \\
&\xrightarrow[x \to +\infty]{} 1
\end{aligned}$$

   donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
   On en conclut qu'il existe une variable aléatoire X telle que f est une densité de X.

2) Soit F la fonction de répartition de X, on a

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-\infty;0[, \quad F(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) && \text{par définition} \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{c}{2}\,\mathrm{e}^{-c|t|}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{c}{2}\,\mathrm{e}^{ct}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{y\to-\infty} \int_{y}^{x} \frac{c}{2}\,\mathrm{e}^{ct}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{y\to-\infty} \left[\frac{\mathrm{e}^{ct}}{2}\right]_y^x \\
&= \lim_{y\to-\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{cx}-\mathrm{e}^{cy}}{2}\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{cx}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall x \in]0;+\infty[, \quad F(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\
&= \mathbb{P}(X \leq 0) + \mathbb{P}(0 \leq X \leq x) \\
&= \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} \frac{c}{2}\,\mathrm{e}^{-ct}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} + \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-cx}}{2}\right) \\
&= \frac{2-\mathrm{e}^{-cx}}{2}
\end{aligned}$$

3) X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.
Par parité de $t \mapsto |tf(t)|$, il suffit de montrer que $\int_{0}^{+\infty} |tf(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.
On a $x\,\mathrm{e}^{-cx} = o(\frac{1}{x^2})$ lorsque $x \to +\infty$ par croissance comparée donc $\int_0^{+\infty} \frac{c}{2}\,\mathrm{e}^{-cx}\,\mathrm{d}x$ converge.
De plus, $t \mapsto tf(t)$ est impaire car f est paire, donc $\mathbb{E}[X] = 0$. En effet, on a $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\int_{-x}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-x}^{0} tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{x}^{0} (-u)f(-u)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{0}^{x} uf(u)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} tf(t)\,\mathrm{d}t && \text{car } f \text{ est paire} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi par passage à la limite lorsque $x \to +\infty$ on obtient $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\frac{c}{2}t^{n+2}\,\mathrm{e}^{-ct} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $\frac{c}{2}t^n\,\mathrm{e}^{-ct} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{c}{2}t^n\,\mathrm{e}^{-c|t|}\,\mathrm{d}t$ converge.
De même, $\frac{c}{2}t^{n+2}\,\mathrm{e}^{ct} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ lorsque $t \to -\infty$ donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} \frac{c}{2}t^n\,\mathrm{e}^{-c|t|}\,\mathrm{d}t$ converge.
Ainsi, X admet un moment d'ordre n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) X admet un moment d'ordre 2 d'après la question précédente, donc X admet une variance. D'après le théorème de Koenig-Huygens, on a $V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2]$ car $\mathbb{E}[X] = 0$.

Calculons $\mathbb{E}[X^2]$ par intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{2} t^2\, \mathrm{e}^{-c|t|}\, \mathrm{d}t \\
&= 2 \times \frac{c}{2} \int_0^{+\infty} t^2\, \mathrm{e}^{-c|t|}\, \mathrm{d}t && \text{par parité de l'intégrande} \\
&= c \lim_{x\to+\infty} \int_0^x t^2\, \mathrm{e}^{-ct}\, \mathrm{d}t \\
&= c \lim_{x\to+\infty} \left(\left[-\frac{t^2\, \mathrm{e}^{-ct}}{c} \right]_0^x + \int_0^x \frac{2t\, \mathrm{e}^{-ct}}{c}\, \mathrm{d}t \right) \\
&= c \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{x^2\, \mathrm{e}^{-cx}}{c} + \left[-\frac{2t\, \mathrm{e}^{-ct}}{c^2} \right]_0^x + \int_0^x \frac{2\, \mathrm{e}^{-ct}}{c^2}\, \mathrm{d}t \right) \\
&= c \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{x^2\, \mathrm{e}^{-cx}}{c} - \frac{2x\, \mathrm{e}^{-cx}}{c^2} + \left[-\frac{2\, \mathrm{e}^{-ct}}{c^3} \right]_0^x \right) \\
&= c \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{x^2\, \mathrm{e}^{-cx}}{c} - \frac{2x\, \mathrm{e}^{-cx}}{c^2} + \frac{2 - 2\, \mathrm{e}^{-cx}}{c^3} \right) \\
&= \frac{2}{c^2}
\end{aligned}$$

par croissances comparée et opérations de limites. Finalement, $V(X) = \dfrac{2}{c^2}$.

Correction de l'exercice 4 :

1) Pour $x \geq 0$, on a $\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$
Pour $x < 0$, on a $\mathbb{P}(X > 0) = 1$ car X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
2) Pour $x \geq 0$, on a $\mathbb{P}(Z > x) = \mathbb{P}(\{X > x\} \cap \{Y > x\}) = \mathbb{P}(X > x) \times \mathbb{P}(Y > x)$ par indépendance de X et Y. En effet, $Z > x$ si et seulement si $\min(X, Y) > x$ donc si et seulement si $X > x$ et $Y > x$.
Ainsi, $\mathbb{P}(Z > x) = e^{-\lambda x}\, \mathrm{e}^{-\mu x} = \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)x}$.
3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x > 0$ on a $\mathbb{P}(Z \leq x) = 1 - \mathbb{P}(Z > x) = 1 - \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)x}$ et si $x < 0$on a $\mathbb{P}(Z \leq x) = 0$ car Z est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
On reconnait la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$ donc Z suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$.

Correction de l'exercice 5 :

1) Y est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ donc X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y \in]k-1; k]) = \mathbb{P}(Y \in](k-1)L; kL]) = \int_{(k-1)L}^{kL} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda t} \right]_{(k-1)L}^{kL} = \mathrm{e}^{-\lambda(k-1)L} - \mathrm{e}^{-\lambda k L}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on a donc $\mathbb{P}(X = k) = (\mathrm{e}^{-\lambda L})^{k-1} - (\mathrm{e}^{-\lambda L})^k = (\mathrm{e}^{-\lambda L})^{k-1}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda L}) = (\mathrm{e}^{-\lambda L})^{k-1}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda L})$
Ainsi, X suit une loi géométrique de paramètre $1 - \mathrm{e}^{-\lambda L}$.
3) $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda L}}$ car X suit une loi géométrique de paramètre $1 - \mathrm{e}^{-\lambda L}$.
$\mathbb{E}[Y] = \dfrac{1}{\lambda}$ car Y suit une loi exponentielle de paramètre λ.
On cherche donc s'il existe un réel $L > 0$ tel que $\dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda L}} = \dfrac{1}{\lambda}$.
$\dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda L}} = \dfrac{1}{\lambda} \iff 1 - \mathrm{e}^{-\lambda L} = \lambda \iff \mathrm{e}^{-\lambda L} = 1 - \lambda$.
Si $\lambda \geq 1$, cette équation n'a pas de solution.
Si $\lambda \in [0; 1[$, cette équation admet pour unique solution $L = -\dfrac{\ln(1 - \lambda)}{\lambda}$

Correction de l'exercice 6 :

1)

2)

3) Soit $Z = \dfrac{1}{X}$, notons F_Z la fonction de répartition de Z.

La fonction de répartition de X est $F_X : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \dfrac{1}{\pi(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\arctan(x)}{\pi} + \dfrac{1}{2}$.

Soit $x > 0$ un réel :

$$\begin{aligned}
F_Z(x) &= \mathbb{P}(Z \leq x) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \leq x\right) \\
&= \mathbb{P}(X < 0) + \mathbb{P}\left(\{X > 0\} \cap \left\{\frac{1}{X} \leq x\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}(X < 0) + \mathbb{P}(X \geq \frac{1}{x}) \\
&= F_X(0) + (1 - F_X(1/x)) \\
&= \frac{1}{2} + 1 - \left(\frac{\arctan(1/x)}{\pi} + \frac{1}{2}\right) \\
&= 1 - \frac{\arctan(1/x)}{\pi}
\end{aligned}$$

Si $x = 0$, $F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leq 0) = \mathbb{P}(\frac{1}{X} \leq 0) = \mathbb{P}(X \leq 0) = \dfrac{1}{2}$

Si $x < 0$, on a

$$\begin{aligned}
F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leq x)& \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \leq x\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{1}{x} \leq X < 0\right) \\
&= F_X(0) - F_X(1/x) \\
&= \frac{1}{2} - \left(\frac{\arctan(1/x)}{\pi} + \frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{\arctan(1/x)}{\pi}
\end{aligned}$$

Finalement, F_Z est définie par $F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\arctan(1/x)}{\pi} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ -\dfrac{\arctan(1/x)}{\pi} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

F_Z est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, donc partout sauf en un point, et $\forall x \in \mathbb{R}^*, F_Z'(x) = \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{\arctan'(1/x)}{\pi} = \dfrac{1}{\pi x^2}\dfrac{1}{1+(1/x)^2} = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)} = f(x)$

Puisque $F_Z'(x) = F_X'(x) = f(x)$ en tout point sauf un on en conclut que f est une fonction de densité de Z, Z suit la même loi que X.

Correction de l'exercice 7 :

1) Pour tout réel x, $4x \leq x^2 + 3 \iff x^2 + 3 - 4x \geq 0 \iff (x-4)(x+1) \geq 0 \iff x \in]-\infty; -1[\cup]4; +\infty[$.

On en déduit que $\mathbb{P}(4X \leq X^2 + 3) = \mathbb{P}(X \leq -1) + \mathbb{P}(X \geq 4) = \mathbb{P}(X \geq 4) = \int_4^{+\infty} 2\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-8}$.

2) Il faut montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |\sin(x)| 2\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$ converge. Or, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|\sin(x)| \leq 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq |\sin(x)| 2\,\mathrm{e}^{-2x} \leq 2\,\mathrm{e}^{-2x}$. La fonction $x \mapsto 2\,\mathrm{e}^{-2x}$ est la densité de X donc $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge donc $\int_0^{+\infty} |\sin(x)| 2\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$ converge.

Pour tout réel $A > 0$, on a :

$$\int_0^A 2\sin(x)\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left[-2\cos(x)\,\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^A + \int_0^A 4\cos(x)\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

$$= -2\cos(A)\,\mathrm{e}^{-2A} + 2 + \left[4\sin(x)\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x\right]_0^A - \int_0^A 8\sin(x)\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2 - 2\cos(A)\,\mathrm{e}^{-2A} + 4\sin(A)\,\mathrm{e}^{-2A} - 0 - 4\int_0^A 2_sin(x)\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

De plus, $\lim\limits_{A\to+\infty} \cos(A)\,\mathrm{e}^{-2A} = 0$ et $\lim\limits_{A\to+\infty} \sin(A)\,\mathrm{e}^{-2A} = 0$ car $|\cos(A)\,\mathrm{e}^{-2A}| \leq \mathrm{e}^{-2A}$ et $|\sin(A)\,\mathrm{e}^{-2A}| \leq \mathrm{e}^{-2A}$. En notant $I = \int_0^{+\infty} 2\sin(x)\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$, on obtient en passant à la limite lorsque $A \to +\infty$ de chaque côté de l'égalité :

$$I = 2 - 4I$$

d'où $5I = 2$ et finalement $I = \dfrac{2}{5} = 0,4$.

Correction de l'exercice 8 :

1) Si $T_n < t$ alors $-T_n > -t$ donc $n - T_n > n - t$. Puisque $T_n < t < n$, on a $|T_n - n| = n - T_n$.
Ainsi, on a $(T_n < t) \subset (|T_n - n| \geq n - t)$.

2) Pour tout $k > t$, on a $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}(T_n < t) \subset (T_k < t) \subset (|T_k - k| \geq k - t)$ donc $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}(T_n < t)\right) \leq \mathbb{P}\left(|T_k - k| \geq k - t\right)$.
Or $\mathbb{E}[T_k] = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}[X_i] = k$ et $V(T_k) = \sum_{i=1}^k V(X_i) = k$ par indépendance des (X_i).
Ainsi, d'après le théorème de Bienaymé-Tchebychev, $\mathbb{P}(|T_k - k| \geq k - t) \leq \dfrac{V(T_k)}{(k-t)^2} \leq \dfrac{k}{(k-t)^2}$.
Or $\dfrac{k}{(k-t)^2} \sim \dfrac{k}{k^2} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.
Puisque quel que soit k on a $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}(T_n < t)\right) \leq \dfrac{k}{(k-t)^2}$ et que le membre de droite tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$, cela implique que $\forall \varepsilon > 0$ on a $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}(T_n < t)\right) \leq \varepsilon$ donc $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}(T_n < t)\right) = 0$.

Correction de l'exercice 9 :

1) Si M est le milieu de l'intervalle $[X, Y]$ et que L est sa longueur, alors $M = \dfrac{X+Y}{2}$ et $L = Y - X$ donc $\begin{cases} 2M &= X+Y \\ L &= Y-X \end{cases}$.
En sommant ces deux lignes on obtient $2Y = 2M + L$ donc $Y = M + \dfrac{L}{2}$ et en les soustrayant on obtient $2X = 2M - L$ donc $X = M - \dfrac{L}{2}$.

2) a) Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[M] - \dfrac{1}{2}\mathbb{E}[L] = \lambda - \dfrac{1}{2\mu}$ et $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[M] + \dfrac{1}{2}\mathbb{E}[L] = \lambda + \dfrac{1}{2\mu}$.

b) M et $-\dfrac{L}{2}$ sont indépendantes d'après le lemme des coalitions, donc $V(X) = V(M) + V\left(-\dfrac{L}{2}\right) = V(M) + \dfrac{1}{4}V(L) = \lambda + \dfrac{1}{4\mu^2}$
De même, $V(Y) = V(M) + V\left(\dfrac{1}{2}L\right) = V(M) + \dfrac{1}{4}V(L) = \lambda + \dfrac{1}{4\mu^2}$.

3) $\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(X \leq 0) = \mathbb{P}\left(M - \frac{L}{2} \leq 0\right) = \mathbb{P}(L \geq 2M)$
On appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(M = k)_{k\in\mathbb{N}}$ on obtient :

$$\mathbb{P}(L \geq 2M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(L \geq 2M, M = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(M = k) \times \mathbb{P}(L \geq 2M | M = k)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(M=k)\mathbb{P}(L \geq 2k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-2k\mu} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda \mathrm{e}^{-2\mu})^k}{k!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda \mathrm{e}^{-2\mu}} \\
&= \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{-2\mu}-1)}
\end{aligned}
$$

On en déduit que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 1 - \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{-2\mu}-1)}$, donc $\mathbb{E}[Z] = p = 1 - \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{-2\mu}-1)}$.

4) Soient y et z deux réels. Le système $\begin{cases} \mathbb{E}[Y] &= y \\ \mathbb{E}[Z] &= z \end{cases}$ est équivalent au système $\begin{cases} \lambda + \frac{1}{2\mu} &= y \\ 1 - \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{-2\mu}-1)} &= z \end{cases}$.

Puisque $\mu > 0$ et $\lambda > 0$, on a $0 < \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{-2\mu}-1)} < 1$, donc ce système n'a pas de solution si $z \notin]0;1[$. Si $z \in]0;1[$, la deuxième équation est équivalente à $\lambda(\mathrm{e}^{-2\mu}-1) = \ln(1-z)$.

Soit $z \in]0;1[$ et supposons que (λ, μ) est une solution du système. Alors $\lambda = y - \dfrac{1}{2\mu}$ donc la deuxième ligne donne $\left(y - \dfrac{1}{2\mu}\right)(\mathrm{e}^{-2\mu}-1) = \ln(1-z)$. Puisque $\ln(1-z) < 0$ et $\mathrm{e}^{-2\mu}-1 < 0$, on a nécessairement $y - \dfrac{1}{2\mu} > 0$ donc $\mu > \max\left(0, \frac{1}{2y}\right)$.

En posant $f(\mu) = \left(y - \dfrac{1}{2\mu}\right)(\mathrm{e}^{-2\mu}-1)$ on obtient $f'(\mu) = \underbrace{\dfrac{1}{2\mu^2}(\mathrm{e}^{-2\mu}-1)}_{<0} - \underbrace{\left(2y - \dfrac{1}{\mu}\right)}_{<0}\underbrace{\mathrm{e}^{-2\mu}}_{>0}$ d'où l'on déduit que $f'(\mu) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\left]\max\left(0, \frac{1}{2y}\right); +\infty\right[$. L'équation $f(\mu) = \ln(1-z)$ admet donc au plus une solution μ, donc il existe au plus une solution (λ, μ) puisque $\lambda = y - \dfrac{1}{2\mu}$.

Correction de l'exercice 10 : Soit $x \in [0,1]$ un réel fixé. Pour tout $t \in [0,1]$, posons $\varphi_x(t) = \max(x,t) = \begin{cases} x & \text{si } t \leq x \\ t & \text{si } t > x \end{cases}$.
φ_x est une fonction continue à valeurs dans $[0,1]$.
Si on note f la fonction de densité de U, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_x(t)| f(t)\,\mathrm{d}t$ converge car f est nulle en dehors de $[0,1]$. D'après le théorème de transfert on a donc :

$$
\begin{aligned}
\forall x \in [0,1], \quad \mathbb{E}(\max(x,U)) &= \int_0^1 \varphi_x(t) f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x x\,\mathrm{d}t + \int_x^1 t\,\mathrm{d}t \\
&= x^2 + \frac{1^2 - x^2}{2} \\
&= \frac{1+x^2}{2}
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \mathbb{E}(\max(x,U))\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1+x^2}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{2}{3}$$

Intéressons-nous à la variable aléatoire $V = \int_0^1 \max(x, U)\,\mathrm{d}x$.
Pour tout $t \in [0,1]$ on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \max(x,t)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \varphi_x(t)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^t t\,\mathrm{d}x + \int_t^1 x\,\mathrm{d}x \\ &= t^2 + \frac{1-t^2}{2} \\ &= \frac{1+t^2}{2}\end{aligned}$$

donc $V = \dfrac{1+U^2}{2}$, ainsi $\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}\left(\dfrac{1+U^2}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(1+\mathbb{E}(U^2))$ et $\mathbb{E}(U^2) = V(U) + \mathbb{E}(U)^2$ (d'après la formule de Koenig-Huygens) donc $\mathbb{E}(U^2) = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 11 :

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(M_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \mathbb{P}(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \ldots, X_n \leq x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

   Par indépendance des (X_i) :

$$\forall x \geq 0, \quad \mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x)^n = (1 - \mathrm{e}^{-x})^n$$

   F_n est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x \in]-\infty;0[, \quad F_n'(x) = 0$$

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad F_n'(x) = n\,\mathrm{e}^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}$$

   donc M_n admet une densité f_n définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} n\,\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

2) On a d'abord $x^3 f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} nx^3\,\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée donc $xf_n(x) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ donc par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente on montre que M_n admet une espérance.
   Pour tout $x \geq 0$ on a $0 \leq 1 - \mathrm{e}^{-x} \leq 1$ donc $0 \leq nx\,\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} \leq nx\,\mathrm{e}^{-x}$.
   On a donc $\int_0^{+\infty} xf_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{+\infty} nx\,\mathrm{e}^{-x} = n\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = n$ (calcul classique).

3) Pour tout $t \geq 0$, $t(1-F_n(t)) = t\int_t^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_t^{+\infty} xf_n(x)\,\mathrm{d}x$ et comme $\int_0^{+\infty} xf_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_t^{+\infty} xf_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
   Par comparaison on en conclut que $\lim\limits_{t\to+\infty} t(1-F_n(t)) = 0$.

4) Soit $A > 0$. Comme $F_n - 1$ est une primitive de f_n on peut écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^A xf_n(x)\,\mathrm{d}x &= [x(F_n(x)-1)]_0^A - \int_0^A (F_n(x)-1)\,\mathrm{d}x \\ &= -A(1-F_n(A)) + \int_0^A (1-F_n(x))\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

   $\mathbb{E}(M_n)$ existe donc le membre de gauche converge lorsque $A \to +\infty$, et $\lim\limits_{A\to+\infty} A(1-F_n(A)) = 0$,on en conclut que $\int_0^A (1-F_n(x))\,\mathrm{d}x$ admet une limite aussi et par passage à la limte dans l'égalité ci-dessus :

$$\mathbb{E}(M_n) = \int_0^{+\infty} (1-F_n(x))\,\mathrm{d}x$$

5) En posant le changement de variable $u = 1 - \mathrm{e}^{-t}$ on a $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ donc $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{1-u}$ et on peut écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} (1 - F_n(t))\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \left(1 - (1-\mathrm{e}^{-t})^n\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Finalement, comme pour tout $u \in [0,1[$ on a $\dfrac{1-u^n}{1-u} = \sum_{k=0}^{n-1} u^k$ on peut écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u}\,\mathrm{d}u &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} u^k\,\mathrm{d}u \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 u^k\,\mathrm{d}u && \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\end{aligned}$$

d'où $\mathbb{E}(M_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Correction de l'exercice 12 :

1) Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $t \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > t) &= \int_t^{+\infty} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-x^{-\alpha}\right]_t^{+\infty} \\ &= t^{-\alpha}\end{aligned}$$

Ainsi on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X > t) = \begin{cases} \frac{1}{t^\alpha} & \text{si } t \geq 1 \\ 1 & \text{si } t < 1 \end{cases}$

2) X admet une espérance finie si et seulement si l'intégrale $\int_1^{+\infty} x f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Or $x f_\alpha(x) = \dfrac{\alpha}{x^\alpha}$ donc cette intégrale converge si et seulement si $\alpha > 1$.
Si $\alpha > 1$ on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_1^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{\alpha x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-1}\end{aligned}$$

3) Y est à valeurs entière donc c'est une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(k-1 < \ln(X) \leq k)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(\mathrm{e}^{k-1} < X < \mathrm{e}^k) \\
&= \int_{\mathrm{e}^{k-1}}^{\mathrm{e}^k} \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-x^{-\alpha}\right]_{\mathrm{e}^{k-1}}^{\mathrm{e}^k} \\
&= \mathrm{e}^{-\alpha(k-1)} - \mathrm{e}^{-\alpha k} \\
&= (\mathrm{e}^{-\alpha})^{k-1}(1-\mathrm{e}^{-\alpha}) \qquad = p(1-p)^{k-1}
\end{aligned}$$

en posant $p = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha}$. On reconnait une loi géométrique de paramètre $1 - \mathrm{e}^{-\alpha}$.

4) Par un calcul direct :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(n(Y_n - 1) > t) &= \mathbb{P}\left(Y_n > \frac{t}{n} + 1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_1 > \frac{t}{n} + 1, \dots X_n > \frac{t}{n} + 1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_1 > \frac{t}{n} + 1\right)^n \\
&= \left(\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-\alpha}\right)^n \\
&= \left(\exp\left(-\alpha n \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

Or $\ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{t}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\alpha n \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) = -\alpha t$ d'où par composition :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(n(Y_n - 1)) = \mathrm{e}^{-\alpha t}$$