CHAPITRE 17

NOMBRES COMPLEXES

I. Définitions

1. Ensemble des complexes

Définition 17.1

On suppose l'existence d'un nombre imaginaire, noté i, tel que $i^2 = -1$. Dans les calculs, on traite i comme une variable. On définit l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, comme étant l'ensemble des nombres z s'écrivant sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont deux réels. L'écriture d'un nombre complexe sous cette forme s'appelle la **forme algébrique**. a s'appelle alors la **partie réelle** de z et b s'appelle la **partie imaginaire** de z. On note $a = \Re(z)$ et $b = \Im(z)$.

Exemple 17.1

- $z = 3 - 2i$ est un nombre complexe, $\Re(z) = 3$ et $\Im(z) = -2$.
- $z = 4$ est un nombre complexe, $\Re(z) = 4$ et $\Im(z) = 0$
- $z = 3i$ est un nombre complexe, $\Re(z) = 0$ et $\Im(z) = 3$.

Propriété 17.1 (admise)

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad z = z' \iff \begin{cases} \Re(z) = \Re(z') \\ \Im(z) = \Im(z') \end{cases}$$

En particulier, $z = 0$ si et seulement si $\Re(z) = \Im(z) = 0$.

Remarque

L'ensemble $\mathbb{C}$ est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, la famille $(1, i)$ en est une base

Définition 17.2

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

- z est un nombre réel si et seulement si $\Im(z) = 0$. Puisque tout nombre réel est aussi un nombre complexe, on peut écrire $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Si $\Re(z) = a = 0$, on dit que z est un **nombre imaginaire pur**. On note $i\mathbb{R} = \{ib \mid b \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des imaginaires purs

2. Opérations

a. Somme et produit

Les règles d'addition et de multiplication sur les complexes sont les mêmes que pour les réels, on traite i comme une variable en simplifiant les i^2 en -1.

Propriété 17.2

La somme de deux nombres complexes est un nombre complexe, le produit de deux nombres complexes est un nombre complexe. Plus précisément, si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ sont deux nombres complexes, avec $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$, on a

- $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + (b + b')i$
- $(a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$

→ **Exercice de cours n^o 1.**

Propriété 17.3

Le produit de deux nombres complexes z et z' est nul si et seulement si l'un de ces nombres est nul :

$$zz' = 0 \iff z = 0 \quad \text{ou} \quad z' = 0$$

Remarque

On peut donc utiliser toutes les règles de calcul connues sur les réels avec les nombres complexes **mais** il n'existe pas d'ordre sur $\mathbb{C}$ qui soit compatible avec ces règles de calcul.
En effet, les suppositions $i<0$ et $i>0$ amènent toutes les deux à des contradictions :

$$i<0 \Rightarrow i^2>0 \Rightarrow -1>0 \Rightarrow i>0 \quad \text{(en multipliant à la fin par } -i \text{ qui est positif)}$$

$$i>0 \Rightarrow i^2>0 \Rightarrow -1>0 \Rightarrow i<0 \quad \text{(en multipliant à la fin par } -i \text{ qui est négatif)}$$

Remarque

- L'ensemble $\mathbb{C}$ muni de l'addition et de la multiplication définie ci-dessus peut être défini comme étant l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations

$$\forall((a,b),(a',b')) \in (\mathbb{R}^2)^2, \quad (a,b)+(a',b')=(a+a',b+b') \quad \text{et} \quad (a,b)\times(a',b')=(aa'-bb',ab'+a'b)$$

  le nombre i est alors défini comme étant l'élément $(0,1)$ de cet ensemble, et tout nombre réel a est associé à l'élément $(a,0)$.
- La matrice $J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ vérifie $J^2=-I$. L'ensemble des nombres complexes peut être défini comme étant l'ensemble

$$\left\{aI+bJ \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

  muni des opérations habituelles sur les matrices. Le nombre i est alors associé à la matrice J et tout nombre réel a est associé à la matrice aI.

b. Identités remarquables

Propriété 17.4

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, alors :

- $(z_1+z_2)^2 = z_1^2+2z_1z_2+z_2^2$
- $(z_1-z_2)^2 = z_1^2-2z_1z_2+z_2^2$
- $(z_1+z_2)(z_1-z_2) = z_1^2-z_2^2$
- $(z_1+iz_2)^2 = z_1^2+2iz_1z_2-z_2^2$
- $(z_1-iz_2)^2 = z_1^2-2iz_1z_2-z_2^2$
- $(z_1+iz_2)(z_1-iz_2) = z_1^2+z_2^2$

Formule du binôme de Newton, pour tout entier n on a :

$$(z_1+z_2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z_1^k z_2^{n-k} = \binom{n}{0}z_2^n+\binom{n}{1}z_1z_2^{n-1}+\binom{n}{2}z_1^2z_2^{n-2}+\cdots+\binom{n}{n-2}z_1^{n-2}z_2^2+\binom{n}{n-1}z_1^{n-1}z_2+\binom{n}{n}z_1^n$$

c. Conjugué

Remarque

Si $a,b\in\mathbb{R}$, alors $(a+ib)\times(a-ib)=a^2+b^2\in\mathbb{R}_+$.

Définition 17.3

Le **conjugué** d'un nombre complexe $z=a+ib$, est le nombre complexe noté $\overline{z}$, défini par :

$$\overline{z}=a-ib$$

Propriété 17.5

Pour tout nombre complexe $z=a+ib$, on a $z\overline{z}=a^2+b^2$ donc $z\overline{z}\in\mathbb{R}_+$.

d. Inverse

Propriété 17.6

Si $z \in \mathbb{C}$, on appelle **inverse** de z tout nombre complexe z' tel que $z \times z' = 1$.
Tout nombre complexe z non nul possède un unique inverse que l'on note $\frac{1}{z}$

→ **Exercice de cours n° 2.**

→ **Exercice de cours n° 3.**

Définition 17.4

Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, on définit le quotient de z par z', noté $\frac{z}{z'}$ par :

$$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$$

Remarque

En pratique, on multiplie au numérateur et au dénominateur par le conjugué du dénominateur.

→ **Exercice de cours n° 4.**

Remarque

Tout complexe a un opposé pour l'addition et un inverse pour la multiplication, on dit que $\mathbb{C}$ est un corps (commutatif).
L'enemble des réels et l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels sont aussi des corps. L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs n'est pas un corps.
Si $\mathbb{K}$ est un corps, on note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times m$ à coefficients dans $\mathbb{K}$

3. Propriétés du conjugué

Propriété 17.7

Pour tout nombre complexe z, on a :

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z\overline{z} = |z|^2$
- $z + \overline{z} = 2\Re(z)$
- $z - \overline{z} = 2i\Im(z)$
- z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$
- z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$

Remarque

On en déduit que pour tout nombre complexe z,

$$\Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad \Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2}$$

Propriété 17.8

Quel que soit $z, z' \in \mathbb{C}$, on a

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \overline{z^n} = \overline{z}^n$

→ **Exercice de cours n° 5.**

II. Équation du second degré

Dans la première partie, on a vue que $2i$ et $(-2i)$ étaient solution de l'équation $x^2 = -4$. De façon générale :

Propriété 17.9

L'équation $x^2 = a$ où $a < 0$ admet deux solutions complexes : $x_1 = i\sqrt{-a}$ et $x_2 = -i\sqrt{-a}$

Exemple 17.2

L'équation $x^2 = -25$ admet deux solutions : $x_1 = i\sqrt{5}$ et $x_2 = -i\sqrt{5}$

Propriété 17.10

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c **sont des nombres réels**. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions **réelles** :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions **complexes** :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

→ **Exercice de cours n°6.**

Propriété 17.11

Si $P(z) = az^2 + bz + c$ est un polynôme de degré 2 qui admet deux racines distinctes (réelles ou complexes) z_1 et z_2, alors

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$$

Si P n'a qu'une seule racine z_0, alors

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = a(z - z_0)^2$$

→ **Exercice de cours n°7.**

Remarque

Les racines complexes d'un polynôme de degré 2 sont conjuguées l'une de l'autre :

$$\overline{\frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}} = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

De façon plus générale, on a la proposition suivante :

Proposition 17.12

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit P un polynôme de degré n **à coefficients réels**. Si λ est une racine complexe de P, alors $\overline{\lambda}$ aussi.

III. Le plan complexe

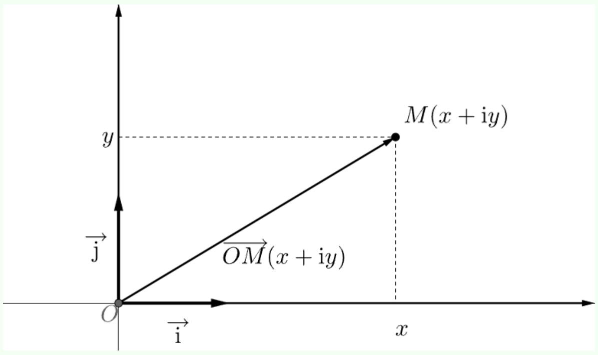
1. Définition

Définition 17.5

On considère le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
À tout nombre complexe $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on associe

- le point $M(z)$ de coordonnées (x, y)
- le vecteur $\vec{u}(z)$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

On dit alors que z est l'**affixe** de $M(z)$ et de $\vec{u}(z)$.



Réciproquement, à tout point du plan correspond un unique nombre complexe et à tout vecteur du plan correspond un unique nombre complexe.

- Si M est un point, on note z_M l'affixe de M
- Si $\vec{u}$ est un vecteur, on note $z_{\vec{u}}$ l'affixe de $\vec{u}$

On appelle alors l'axe $(O, \vec{i})$ l'**axe des réels** et l'axe $(O, \vec{j})$ l'**axe des imaginaires purs**.

2. Propriétés immédiates

On peut ainsi traduire quelques propriétés de géométrie repérée à l'aide des complexes :

Propriété 17.13

- Deux points du plan sont confondus si et seulement si ils ont la même affixe.
- Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont la même affixe.
- Si A et B sont deux points d'affixes z_A et z_B, alors $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
- Si A et B sont deux points d'affixe z_A et z_B, alors le milieu I de $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs d'affixe $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$, alors $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$.
- Si $\vec{u}$ a pour affixe $z_{\vec{u}}$ et que k est un réel, alors $k\vec{u}$ a pour affixe $kz_{\vec{u}}$.

Remarque

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.
On peut donc déterminer si deux vecteurs sont colinéaires en étudiant leurs affixes : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un **réel** k tel que $z_{\vec{u}} = kz_{\vec{v}}$ ou $z_{\vec{v}} = kz_{\vec{u}}$.

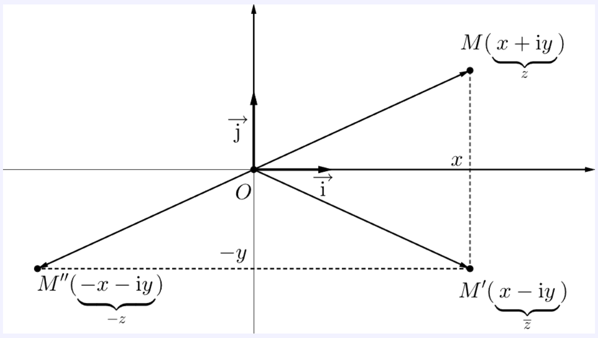
→ **Exercice de cours n°8.**

→ **Exercice de cours n°9.**

Propriété 17.14 (admise)

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe et $M(z)$ le point du plan complexe d'affixe z.

- Le symétrique de M par rapport à l'axe des réels a pour affixe $\overline{z}$
- Le symétrique de M par rapport à l'origine O du repère a pour affixe $-z$.



3. Module

Définition 17.6

On appelle **module** d'un nombre complexe $z = a + ib$ la distance de $M(z)$ à l'origine O du repère. On note

$$|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

Remarque

Le module étend la notion de valeur absolue à l'ensemble des complexes : si z est réel, alors

$$\underbrace{|z|}_{\text{module}} = \sqrt{\Re(z)^2} = \underbrace{|z|}_{\text{valeur absolue}}$$

Propriété 17.15

Si A a pour affixe z_A et B a pour affixe z_B, alors $AB = |z_B - z_A|$.

4. Propriétés du module

Propriété 17.16

Quel que soit $z, z' \in \mathbb{C}$, on a

- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- $|z^n| = |z|^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.
- $|z+z'| \leq |z|+|z'|$ avec égalité si et seulement si $z = \lambda z'$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Exemple 17.3

Calculer le module des nombres suivants :

- $z_1 = (3+i)(1-2i)$
- $z_2 = \dfrac{-6-7i}{1+i}$
- $z_3 = (\sqrt{2} + \sqrt{7}i)^4$

IV. Forme trigonométrique

1. Argument

Définition 17.7

On assimile le plan complexe à un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul et M le point du plan d'affixe z. Un **argument** de z est une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.

Remarque

On dit **un** argument car l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ n'est pas défini de façon unique, il est défini à un multiple de 2π près.

Remarque

Un point M du plan est déterminé de façon unique par la longueur OM et l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$
Si θ est un argument de z, il existe donc un lien entre $(x; y)$ et $(|z|; \theta)$, que l'on va explorer dans la section suivante.

2. Forme trigonométrique

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, et M le point du plan d'affixe z. Soit θ un argument de z et soit N le point du cercle trigonométrique tel que $\overrightarrow{OM} = |z|\overrightarrow{ON}$. N a le même argument que M donc l'affixe de N est :

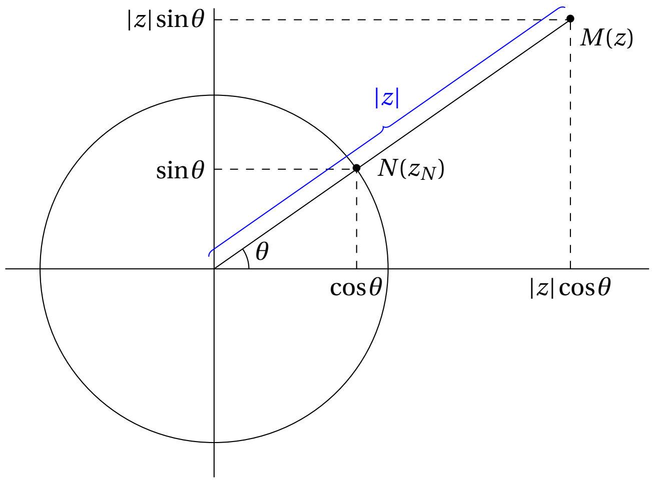
$$z_N = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

On en déduit que $z_M = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, ainsi :

$$z_M = |z|\cos(\theta) + i|z|\sin(\theta)$$

On a donc $x = |z|\cos(\theta)$ et $y = |z|\sin(\theta)$.
On en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$



Définition 17.8

L'écriture d'un nombre complexe z peut s'écrire sous la forme

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

où $r \in]0;+\infty[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Cette écriture est appelée **forme trigonométrique de** z. On a alors $r = |z|$ et $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété 17.17

Soit $z \in \mathbb{C}$, et soit θ un argument de z. Alors

$$\cos\theta = \frac{\Re(z)}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\Im(z)}{|z|}$$

Propriété 17.18

Soit z et z' deux nombres complexes. Soient θ un argument de z et θ' un argument de z'. Alors z et z' sont égaux si et seulement si $|z| = |z'|$ et s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta' + 2k\pi$.

3. Passage d'une forme à une autre

Exemple 17.4

Le nombre z de module 3 et d'argument $\frac{5\pi}{6}$ s'écrit sous forme algébrique :

$$z = 3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

Exemple 17.5

Pour écrire sous forme trigonométrique le nombre $z = 1 + i\sqrt{3}$, on commence par calculer son module :

$$|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

Ensuite, en notant θ un argument de z. On sait que $\cos(\theta) = \frac{\Re(z)}{|z|} = \frac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{\Im(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc on peut prendre $\theta = \frac{\pi}{3}$.
Finalement

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

→ **Exercice de cours n° 10.**

→ **Exercice de cours n° 11.**

→ **Exercice de cours n° 12.**

4. Propriétés de l'argument

Propriété 17.19

Soit z un nombre complexe. On note $\arg(z)$ un argument de z.

- z est un réel si et seulement si $\arg(z) = 0 + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
- z est un imaginaire pur si et seulement si $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Remarque

- $\arg(z) = 0 + k\pi$ signifie que $\arg(z)$ peut être égal à 0, π, 2π,3π,etc... ou $-\pi$,-2π, -3π,etc...
- $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ signifie que $\arg(z)$ peut être égal à $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3\pi}{2}$, $\dfrac{5\pi}{2}$, etc... ou $-\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{3\pi}{2}$, $-\dfrac{5\pi}{2}$, etc...

Propriété 17.20

Soit z un nombre complexe, alors

- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Propriété 17.21

Soient z et z' deux nombres complexes. Alors

(i) $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

(ii) $\arg(\dfrac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

(iii) $\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$

5. Interprétations géométriques

Remarque

Multiplier z par un nombre complexe de module $r > 0$ et d'argument $\theta \in \mathbb{R}$ donne le nombre complexe revient à appliquer à $M(z)$ une rotation de centre O et d'angle θ puis à appliquer une homothétie de centre 0 et de rapport r. En effet, si z' est le nombre complexe de module r et d'argument θ alors

$$|zz'| = |z|z' \quad \text{et} \quad \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Propriété 17.22

Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B.
Alors une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB})$ est $\arg(z_B - z_A)$

On en déduit la propriété suivante :

Propriété 17.23

Soient A, B, C et D quatre points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.
Alors une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$ est $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

V. Notation exponentielle

1. Définition

Définition 17.9

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On définit le nombre complexe $e^{i\theta}$ par :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Remarque

- $e^{i\theta}$ est un nombre complexe de module 1, son image est sur le cercle trigonométrique.
- Cette définition est cohérente avec la propriété selon laquelle $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$, car cela se traduit par $\mathrm{e}^{i\theta} \times \mathrm{e}^{i\theta'} = \mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$

→ **Exercice de cours n° 13.**

Propriété 17.24 (valeurs remarquables)

- $e^{i0} = 1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i\pi} = -1$ (parfois écrit $e^{i\pi} + 1 = 0$)
- $e^{-\frac{i\pi}{2}} = e^{\frac{3i\pi}{2}}$

On déduit des propriétés de l'argument les propriétés suivantes :

Propriété 17.25

- $|e^{i\theta}| = 1$
- $\arg(e^{i\theta}) = \theta$
- $\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{i\theta} \times \mathrm{e}^{i\theta'}$
- $\mathrm{e}^{-i\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}}$
- $\mathrm{e}^{i(\theta-\theta')} = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta'}}$
- $\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta'} \Longleftrightarrow \theta = \theta' + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$
- **Formule de Moivre :**
  $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Propriété 17.26

On déduit de la définition de l'exponentielle les égalités suivantes :

$$\cos\theta = \Re(\mathrm{e}^{i\theta}) \quad \text{et} \quad \sin\theta = \Im(\mathrm{e}^{i\theta})$$

Ou encore les égalités suivantes :

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, \quad \cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$$

→ **Exercice de cours n° 14.**

→ **Exercice de cours n° 15.**

2. Forme exponentielle

Proposition 17.27

Tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in [0, +\infty[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. De plus, $\rho = |z|$ et $\theta = \arg(z)[2\pi]$.

Exemple 17.6

Le nombre $z = 1 + \sqrt{3}i$ s'écrit sous forme exponentielle

$$z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2\,\mathrm{e}^{i\pi/3}$$

Exemple 17.7

Le nombre $z = -3e^{-i\frac{\pi}{2}}$ n'est pas sous forme exponentielle car $-3 < 0$.
Comme $e^{i\pi} = -1$ on peut écrire $-3 = 3e^{i\pi}$, et donc $z = 3e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{2}} = 3e^{i(\pi-\pi/2)} = 3e^{i\pi/2}$

Remarque

Si $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ est sous forme exponentielle, alors $\overline{z} = r\,\mathrm{e}^{-i\theta}$.

VI. Retour sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2

On rappelle la définition d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 :

Définition 17.10

Une suite (u_n) est dite **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe deux réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Si u_0 et u_1 sont donnés, une telle suite (u_n) est définie de façon unique.
On appelle alors **équation caractéristique** de (u_n) l'équation $r^2 = ar + b$.

et la proposition concernant le terme général d'une telle suite :

Proposition 17.28

Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $(E)\ :\ r^2 = ar + b$. On distingue trois cas :

- Si (E) admet deux solution réelles distinctes r_1 et r_2, alors il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

- Si (E) admet une solution double r_0, alors il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_0^n + \mu n r_0^n$$

- L'équation caractéristique n'admet aucune solution réelle. Elle admet donc deux solutions complexes conjuguées, $z_1 = r\,\mathrm{e}^{i\alpha}$ et $z_2 = r\,\mathrm{e}^{-i\alpha}$. Il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r^n \cos(n\alpha) + \mu r^n \sin(n\alpha)$$

En pratique, dans chaque cas, on trouve la valeur de λ et μ à l'aide des valeurs de u_0 et u_1.

→ Exercice de cours n° 16.

VII. Racines n-ième de l'unité

1. Définition

Définition 17.11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racine n-ième de l'unité** tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$.

Exemple 17.8

Les nombres 1, i, (-1) et $-i$ sont des racines 4-ièmes de l'unité.
En effet $1^4 = 1$, $(i)^4 = (-1)^2 = 1$, $(-1)^4 = 1^2 = 1$, et $(-i)^4 = i^4 = 1$.

2. Un théorème

Théorème 17.29

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité. Si on note U_n l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité, on a

$$U_n = \left\{ \xi_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

Exemple 17.9

Les racines 3-ième de l'unité sont 1, $\mathrm{e}^{2i\pi/3}$, et $\mathrm{e}^{4i\pi/3} = \mathrm{e}^{-2i\pi/3}$.

Remarque

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les points dont les affixes sont les racines n-ième de l'unité forment un polygône régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.

3. Applications

Propriété 17.30

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\xi_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Alors $U_n = \{\xi_1^k, k \in [\![0, n-1]\!]\}$

Cette propriété découle immédiatement du fait que $\xi_1^k = \left(e^{2i\pi/n}\right)^k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \xi_k$

Propriété 17.31

Soit $c \in \mathbb{C}^*$ un nombre complexe non nul. L'équation $z^n = c$ a exactement n solutions dans $\mathbb{C}$, données par

$$S = \{\sqrt[n]{|c|}\, e^{\frac{\theta+2ik\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]\}$$

avec $\theta = \arg(c)$.

Exercices de cours

Exercice 1

Écrire les nombres suivants sous forme algébrique :

a) $z_1 = (2+2i)\times(5-3i)$ b) $z_2 = i(i+1)(i+2)$ c) $z_3 = (2-2i)(2+2i)$ d) $z_4 = (\sqrt{3}+i)^6$

Exercice 2

Mettre sous forme algébrique le nombre $z = \dfrac{1}{3+2i}$

Exercice 3

Déterminer l'inverse du nombre i.

Exercice 4

Écrire sous forme algébrique les nombre suivants

1. $\dfrac{3+2i}{1+i}$
2. $\dfrac{1-i}{3i}$

Exercice 5

Calculer de deux façon différentes le conjugué des nombres suivants :

- $z_1 = (2-i)(3+5i)$
- $z_2 = \dfrac{3}{1-i}$
- $z_3 = (1+4i)^2$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2+2z+2=0$
2. $-4z^2+4z-5=0$
3. $5z^2+45=0$

Exercice 7

Factoriser dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$ les polynômes suivant :

a) $f(z) = z^3+z^2-2$ b) $g(z) = z^3+z^2+z+1$ c) $h(z) = z^3-2z^2+z-2$

Exercice 8

Soient A, B, C, D quatre points d'affixe respective $z_A = -2-i$, $z_B = 1-5i$, $z_C = 7-2i$ et $z_D = 4+2i$. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme et que O, A et D sont alignés.

Exercice 9

Soient A, B et C trois points du plan complexe d'affixes z_A, z_B et z_C. Pour tout réels strictement positifs (a,b,c), on définit le barycentre du triangle pondéré de sommets (A,a), (B,b) et (C,c) comme étant le point M vérifiant $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$.
Montrer que l'affixe z de M est $z = \dfrac{az_A+bz_B+cz_C}{a+b+c}$.

Exercice 10

Écrire sous forme trigonométrique le nombre $z = 5-5i$.

Exercice 11

Expliquer pourquoi $z = 5(\cos(\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{6})$ n'est pas sous forme trigonométrique, et l'écrire sous forme trigonométrique.

Exercice 12

Expliquer pourquoi $z = -6\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ n'est pas sous forme trigonométrique, puis l'écrire sous forme trigonométrique

Exercice 13

Pour tout nombre complexe $z = a + ib$, on définit e^z par $\mathrm{e}^{a+ib} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{ib}$. Montrer que la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*, z \mapsto \mathrm{e}^z$ est surjective.

Exercice 14

En exprimant de deux façons différentes les parties réelles et imaginaires de $(\mathrm{e}^{i\theta})^2$, retrouver les égalités

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \quad \text{et} \quad \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

Exercice 15

Calculer la somme suivante :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(x + ky)$$

Exercice 16

Déterminer le terme général de la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$$