

FONCTIONS EXPONENTIELLE ET LOGARITHME

Définitions

La fonction exponentielle est définie comme étant l'unique fonction f dérivable sur \mathbb{R} et vérifiant les deux conditions suivantes :

- $f(0) = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)$.

On peut alors démontrer que cette fonction réalise une bijection de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^{+*} , et on définit le logarithme naturel comme étant la bijection réciproque de cette application.

On a donc

- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$
- $\forall x \in]0; +\infty[, e^{\ln(x)} = x$

Propriétés analytique de l'exponentielle

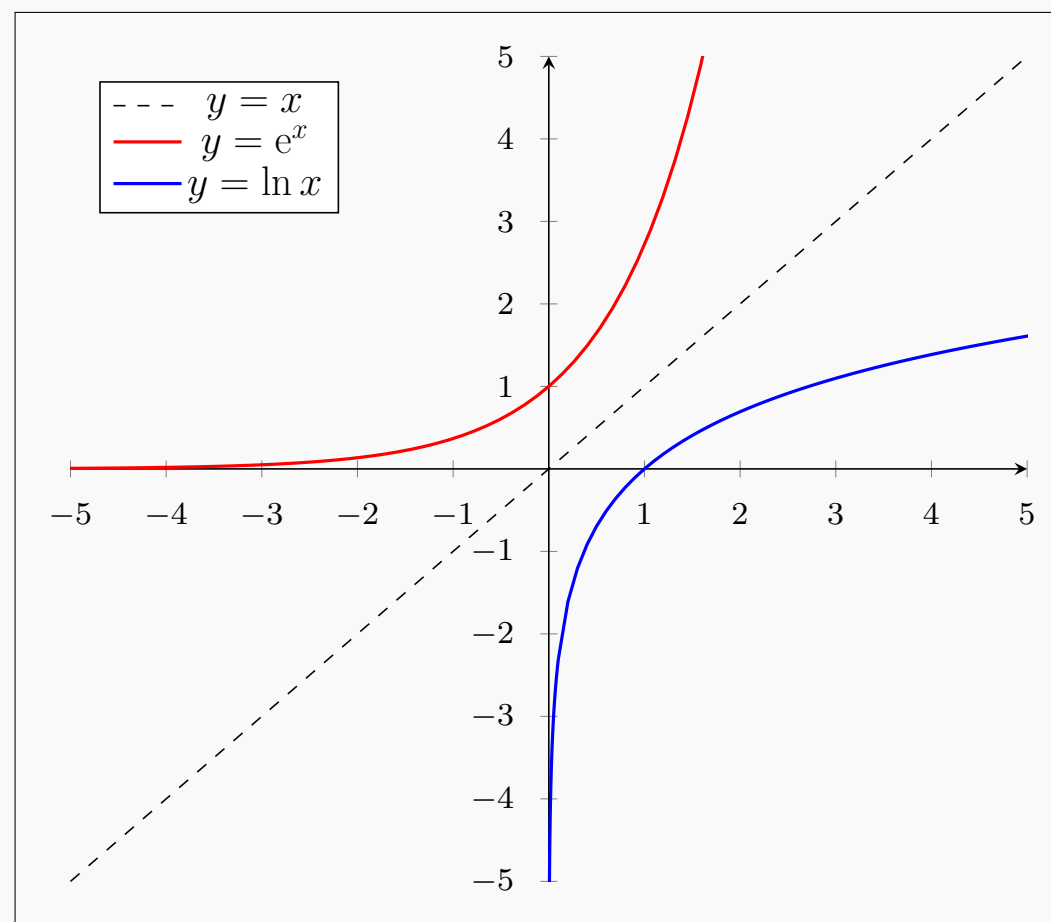
- $\exp(0) = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$
- $x \mapsto \exp(x)$ est dérivable sur \mathbb{R}
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- $x \mapsto \exp(x)$ est strictement croissante sur \mathbb{R} et réalise une bijection de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^{+*}

Propriétés algébrique de l'exponentielle

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $e^x := \exp(x)$.
Pour tous réels x et y et tout entier n , on a

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $e^{nx} = (e^x)^n$
- $\sqrt{e^x} = e^{x/2}$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^x = e^y \iff x = y$
- $e^x \leq e^y \iff x \leq y$

Fonctions exponentielle $x \mapsto e^x$



Fonction $x \mapsto e^x$ définie sur \mathbb{R}
Fonction $x \mapsto \ln x$ définie sur $]0; +\infty[$

Propriétés analytique du logarithme naturel

- $\ln(1) = 0$
- $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln'(x) = \frac{1}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur \mathbb{R}^{+*} et réalise une bijection de \mathbb{R}^{+*} vers \mathbb{R}

Propriétés algébrique du logarithme naturel

Pour tous réels strictement positifs x et y et tout entier relatif n , on a

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(x^n) = n \ln(x)$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$
- $\ln(x) = \ln(y) \iff x = y$
- $\ln(x) \leq \ln(y) \iff x \leq y$