

★

Exercice 1

Voir correction

Soit E un espace vectoriel, soient F et G deux sous espaces vectoriels de E et soient $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de F et $\mathcal{G} = (g_1, g_2, \dots, g_r)$ une base de G .

Montrer que F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_r)$ est une base de E .

★

Exercice 2

Voir correction

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E . on pose $q = \text{Id} - p$.

- 1) Montrer que q est un projecteur.
- 2) Montrer que $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Ker}(q)$.
- 3) Montrer que $\text{Ker}(p) = \text{Im}(q)$ et $\text{Ker}(q) = \text{Im}(p)$.

★

Exercice 3

Voir correction

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$

- 1) Montrer que $E_1 = \{(a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1, 1))$ et $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3
- 2) On considère la projection sur E_2 parallèlement à E_1 , c'est à dire le projecteur $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\text{Im}(p) = E_2$ et $\text{Ker}(p) = E_1$. Déterminer la matrice A de p dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

- 3) Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et son inverse P^{-1} telles que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

★

Exercice 4

Voir correction

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & -a \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

- 1) Pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice A est-elle la matrice d'un projecteur?
- 2) Déterminer alors les sous espaces caractéristiques $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$ de ce projecteur.

- 3) Déterminer une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et son inverse P^{-1} telles que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

★ ★

Exercice 5

Voir correction

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- 1) Montrer qu'il y a équivalence entre les trois propositions suivantes :

- (i) $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$
- (ii) $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$
- (iii) $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$

Indication : on pourra montrer (i) \Leftrightarrow (ii), (i) \Rightarrow (iii) et (iii) \Rightarrow (ii)

- 2) Un endomorphisme vérifiant les propositions ci-dessus est-il nécessairement un projecteur?

★ ★ ★

Exercice 6

Voir correction

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec $n \geq 2$.

- 1) $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel strict de E puis déterminer un supplémentaire de F dans E .
- 2) Même question avec $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = P(2) = 0\}$.
- 3) Généraliser à $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_k) = 0\}$ avec $1 \leq k \leq n$ et $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ des réels distincts.

★ ★

Exercice 7

Voir correction

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E , et q un projecteur de E .
Montrer que F est stable par q si et seulement si $F = (F \cap \text{Ker}(q)) \oplus (F \cap \text{Im}(q))$.

★ ★

Exercice 8

Voir correction

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, p un projecteur de E et u un endomorphisme de E . Montrer que p et u commutent si et seulement si $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont stables par u .

★ ★

Exercice 9

Voir correction

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . On admet que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel (de dimension infinie). Soit $F = \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}$ et $G = \{ f \in E \mid f \text{ est constante} \}$.

- 1) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .
- 2) Soit p la projection sur F parallèlement à G . Que vaut $p(f)$ pour $f \in E$?

★ ★

Exercice 10

Voir correction

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs.

- 1) Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$
- 2) Montrer que si $p + q$ est un projecteur, $\text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$ et $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$

★ ★ ★

Exercice 11

Voir correction

Soient E et F deux \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie et soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

- 1) Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(g)$ sont en somme directe.
- 2) Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(g)$ sont supplémentaires dans E .
- 3) On pose $E = \mathbb{R}_n[x]$, $F = \mathbb{R}_{n-1}[x]$. On pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{n-1}[x] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-1}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[x] \\ P & \longmapsto & (x \mapsto \int_0^x P(t) dt) \end{array}$$

Vérifier que f et g satisfont les conditions de l'énoncé.

★ ★ ★

Exercice 12

Voir correction

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.

- 1) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que $\text{rg}(p) = \text{tr}(p)$.
- 2) Montrer par récurrence que si F_1, F_2, \dots, F_n est une famille de sous espaces vectoriels de E on a

$$\dim(F_1 + F_2 + \dots + F_n) \leq \dim(F_1) + \dim(F_2) + \dots + \dim(F_n)$$

avec égalité si et seulement si F_1, F_2, \dots, F_n sont en somme directe.

- 3) Soit p_1, p_2, \dots, p_n une famille de projecteurs. Montrer que $p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ est un projecteur si et seulement si $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j, p_i \circ p_j = 0$.

Indication : commencer par montrer que si p est un projecteur alors $\text{Im}(p) = \text{Im}(p_1) \oplus \text{Im}(p_2) \oplus \dots \oplus \text{Im}(p_n)$.

Le coin des Khûbes

★ ★ ★

Exercice 13

Voir correction

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$
- (ii) $u^2 = 0$ et $\dim(\text{Ker}(u)) = \dim(\text{Im}(u)) = \dim(E)/2$
- (iii) $u^2 = 0$ et il existe un endomorphisme v tel que $u \circ v + v \circ u = \text{Id}_E$.

★ ★ ★
Exercice 14

— Voir correction —

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. On dit qu'une matrice $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un pseudo-inverse de A lorsque les trois égalités suivantes sont satisfaites :

$$AA' = A'A \quad (i)$$

$$A = AA'A \quad (ii)$$

$$A' = A'AA' \quad (iii)$$

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et a l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé.

- 1) Supposons que A admette un pseudo-inverse. Montrer qu'alors $\text{rg}(a) = \text{rg}(a^2)$.
- 2) Réciproquement, supposons dans cette question que $\text{rg}(a) = \text{rg}(a^2)$. On note r le rang de a .
 - a) Montrer que $\mathbb{R}^n = \text{Im}(a) \oplus \text{Ker}(a)$
 - b) Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ avec B inversible et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telles que $A = P \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$
 - c) Montrer que A admet au moins un pseudo-inverse.
- 3) On suppose que A admet un pseudo inverse A' et on note a' l'endomorphisme canoniquement associé à A' . On garde les matrices B et P de la question précédente.
 - a) Montrer que $\text{Ker}(a)$ et $\text{Im}(a)$ sont stables par a' et montrer qu'il existe $D \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ telle que $A' = P \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.
 - b) Montrer que aa' est un projecteur dont on précisera le noyau et l'image en fonction de ceux de a . Préciser ce que vaut $P^{-1}(AA')P$.
 - c) Montrer que A admet au plus un pseudo-inverse.

Correction des exercices

Correction de l'exercice 1 : Supposons que $E = F \oplus G$. Alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ donc $\dim(E) = p + r$.

Montrons que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_r)$ est une famille génératrice de E : pour tout vecteur $u \in E$, il existe $f \in F$ et $g \in G$ tel que $u = f + g$ car $E = F + G$. Puisque \mathcal{F} est une base de F et \mathcal{G} est une base de G , il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ et $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ des réels tels que $f = \lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 + \dots + \lambda_p \cdot f_p$ et $g = \mu_1 \cdot g_1 + \mu_2 \cdot g_2 + \dots + \mu_r \cdot g_r$.

Ainsi, $u = \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i + \sum_{j=1}^r \mu_j g_j$. La famille $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_r)$ est bien une famille génératrice de E , et puisque son nombre d'éléments est égal à la dimension de E c'est donc une base de E .

Réciproquement, supposons que $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_r)$ soit une base de E .

Montrons que $E = F + G$: Soit $u \in E$ un vecteur, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ tels que $u = \underbrace{\sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot f_i}_{\in F} + \sum_{j=1}^r \mu_j g_j$

donc $u \in F + G$. Ainsi, $E \subset F + G$ donc $E = F + G$ car $F + G \subset E$.

Montrons que $F \cap G = \{0\}$: Soit $u \in F \cap G$. Alors, $u \in F$ donc il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ des réels tel que $u = \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i$, et $u \in G$ donc il existe des réels $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ tels que $u = \sum_{j=1}^r \mu_j g_j$. Ainsi, $0 = u - u = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_p f_p - \mu_1 g_1 - \mu_2 g_2 - \dots - \mu_r g_r = 0$. Or $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_r)$ est une base de E donc une famille libre, ainsi $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_r = 0$. Finalement $u = 0$, donc on a bien $F \cap G = \{0\}$.

On en conclut que $E = F \oplus G$.

On a montré que $E = F \oplus G$ si et seulement si $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_r)$ est une base de E .

Remarque : on peut aussi montrer que $F \cap G = \{0\}$ en analysant les dimensions : puisqu'on a montré que $F + G = E$, on en déduit que $\dim(F + G) = \dim(E) = p + r$, donc d'après l'égalité $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ on en déduit que $p + r = p + r - \dim(F \cap G)$ donc que $\dim(F \cap G) = 0$, et donc $F \cap G = \{0\}$.

Correction de l'exercice 2 :

- $q^2 = (\text{Id} - p)^2 = \text{Id} - 2p + p^2 = \text{Id} - 2p + p = \text{Id} - p$ car Id et p commutent. Ainsi $q^2 = q$ donc q est un projecteur.
- Soit $x \in \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$. Alors $p(x) = 0$ et $q(x) = x - p(x) = 0$ d'où $x = 0$. Ainsi $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q) = \{0\}$ donc $\text{Ker}(p)$ et $\text{Ker}(q)$ sont en somme directe.
De plus, pour tout $x \in E$, $x = x - p(x) + p(x)$. Or $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0$ car p est un projecteur, et $q(p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0$. On a donc $x - p(x) \in \text{Ker}(p)$ et $p(x) \in \text{Ker}(q)$ donc $x \in \text{Ker}(p) + \text{Ker}(q)$. On en conclut que $E = \text{Ker}(p) + \text{Ker}(q)$ donc finalement que $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Ker}(q)$.
- Soit $x \in \text{Im}(q)$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = y - p(y)$, donc $p(x) = p(y) - p^2(y) = 0$ et donc $x \in \text{Ker}(p)$. On a donc $\text{Im}(q) \subset \text{Ker}(p)$.

En notant $\dim(E) = n$ et en appliquant la formule de Grassmann au résultat de la question précédente on obtient :

$$n = \dim(E) = \dim(\text{Ker}(p)) + \dim(\text{Ker}(q)) - \underbrace{\dim(\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q))}_{=0} = \dim(\text{Ker}(p)) + \dim(\text{Ker}(q))$$

d'où $\dim(\text{Ker}(p)) = n - \dim(\text{Ker}(q)) = \text{rg}(q)$. On en conclut que $\text{Im}(q) = \text{Ker}(p)$ par inclusion et égalité des dimensions. De la même façon on a $\dim(\text{Ker}(q)) = n - \dim(\text{Ker}(p)) = \text{rg}(p)$. Pour tout $x \in \text{Im}(p)$, il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$ donc $q(x) = p(y) - p^2(y) = 0$ et ainsi $x \in \text{Ker}(q)$, ce qui prouve que $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(q)$ et permet donc de conclure que $\text{Im}(p) = \text{Ker}(q)$.

Correction de l'exercice 3 :

- Montrons que $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$:** On a $E_1 \subset \mathbb{R}^3$ et $E_2 \subset \mathbb{R}^3$ donc $E_1 + E_2 \subset \mathbb{R}^3$.

Raisonnons par analyse-synthèse pour montrer l'inclusion réciproque.

Analyse : Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, supposons que $u = (a, a, a) + (x', y', z')$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ tels que $x' + y' + z' = 0$.

Alors $\begin{cases} x = a + x' \\ y = a + y' \\ z = a + z' \end{cases}$, donc $x + y + z = 3a + \underbrace{(x' + y' + z')}_{=0} = 3a$. On en déduit que $a = \frac{1}{3}(x + y + z)$, et on a alors

$$x' = x - \frac{1}{3}(x + y + z), \quad y' = y - \frac{1}{3}(x + y + z), \quad \text{et} \quad z' = z - \frac{1}{3}(x + y + z).$$

Synthèse : Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ quelconque. Posons $a = \frac{1}{3}(x + y + z)$ et posons $x' = x - a$, $y' = y - a$ et $z' = z - a$.

Alors $x' + y' + z' = x + y + z - 3a = x + y + z - (x + y + z) = 0$, donc $(x', y', z') \in E_2$.

De plus, $\underbrace{(a, a, a)}_{\in E_1} + \underbrace{(x', y', z')}_{\in E_2} = (a + x', a + y', a + z') = (x, y, z)$. Ainsi, $(x, y, z) \in E_1 + E_2$, donc $\mathbb{R}^3 \subset E_1 + E_2$ et donc

finalement $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$

Montrons que $E_1 \cap E_2 = \{(0, 0, 0)\}$: Soit $u \in E_1 \cap E_2$. Alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u = (a, a, a)$. De plus, $a + a + a = 0$ donc $3a = 0$ et ainsi $a = 0$, on a donc $u = (0, 0, 0)$ et finalement $E_1 \cap E_2 = \{(0, 0, 0)\}$.

On en conclut que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

- 2) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur quelconque, alors $(x, y, z) = \underbrace{(a, a, a)}_{\in E_1} + \underbrace{(x', y', z')}_{\in E_2}$ avec $a = \frac{1}{3}(x, y, z)$ et $x' = x - a$, $y' = y - a$ et $z' = z - a$ d'après la question précédente. On en déduit que

$$\begin{aligned} p(x, y, z) &= (x', y', z') \\ &= \left(x - \frac{1}{3}(x + y + z), y - \frac{1}{3}(x + y + z), z - \frac{1}{3}(x + y + z) \right) \\ &= \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \right) \end{aligned}$$

On en déduit que la matrice de p dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

- 3) p est un projecteur donc $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$. $\dim(\text{Ker}(p)) = \dim(E_1) = 2$ et $\dim(\text{Im}(p)) = \dim(E_2) = 3 - \dim(E_1) = 2$. En prenant une base (e_1, e_2) de E_2 à laquelle on adjoint une base (e_3) de E_1 , on obtient une base (e_1, e_2, e_3) de E dans laquelle la matrice représentative de p est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice de passage P de la base canonique à la base (e_1, e_2, e_3) vérifie donc $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 4 :

- 1) A est la matrice d'un projecteur si et seulement si $A^2 = A$.

Or $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 - a & -a^2 + a \\ a - 1 & -a + 1 \end{pmatrix}$ donc A est la matrice d'un projecteur si et seulement si $\begin{cases} a^2 - a = a \\ -a^2 + a = -a \\ a - 1 = 1 \\ -a + 1 = -1 \end{cases}$.

La seule solution de ce système est $a = 2$ donc $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- 2) $\text{Im}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. $X \in \text{Ker}(A) \iff \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff x - y = 0 \iff x = y$ donc $\text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

On en conclut que A est la projection sur $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ parallèlement à $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

- 3) Notons p le projecteur associé à la matrice A dans la base canonique de \mathbb{R}^2 . En posant $e_1 = (2, 1)$ et $e_2 = (1, 1)$, on a $e_1 \in \text{Im}(p)$ et $e_2 \in \text{Ker}(p)$, donc $p(e_1) = e_1$ et $p(e_2) = 0$, et (e_1, e_2) est une base de \mathbb{R}^2 . Dans cette base, la matrice de p est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

En posant $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2) , on a donc $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Il ne reste plus qu'à déterminer P^{-1} :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2, \quad P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} 2x + y = x' \\ x + y = y' \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = x' - y' \\ y = -x' + 2y' \end{cases} \end{aligned}$$

donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On peut vérifier par le calcul qu'on a bien $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 5 :

- 1) Suivant l'indication de l'énoncé, commençons par montrer que $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

On a toujours $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$ et $\text{Im}(u^2) \subset \text{Im}(u)$. Ainsi dans les deux cas l'égalité des dimensions est une condition nécessaire et suffisante pour avoir égalité de ces sous-espaces vectoriels.

Or d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(u)) = \dim(\text{Ker}(u^2)) \iff \dim(E) - \text{rg}(u) = \dim(E) - \text{rg}(u^2) \iff \text{rg}(u) = \text{rg}(u^2)$.

Ainsi, on a donc bien $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2) \iff \text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$.

Montrons que $(i) \implies (iii)$

Supposons que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$, et soit $x \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)$. Alors il existe un vecteur $y \in E$ tel que $x = u(y)$, et $u(x) = 0$ donc $u(u(y)) = 0$. Ainsi $y \in \text{Ker}(u^2)$ mais puisque $\text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u)$ on en déduit que $u(y) = 0$ donc $x = 0$. Ainsi $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$, ils sont donc en somme directe donc $\dim(\text{Ker}(u) + \text{Im}(u)) = \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Im}(u))$. Or d'après le théorème du rang $\dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(E)$, donc finalement $\text{Ker}(u) + \text{Im}(u) = E$ et ainsi $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = E$.

On a donc montré que $(i) \implies (iii)$.

Montrons que $(iii) \implies (ii)$

Supposons que $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$, et soit $x \in \text{Im}(u)$. Alors il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$. Comme $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$ il existe un unique couple $(y_1, y_2) \in \text{Ker}(u) \times \text{Im}(u)$ tel que $y = y_1 + y_2$.

Ainsi, $x = u(y_1 + y_2) = u(y_2)$ car $y_1 \in \text{Ker}(u)$. Comme $y_2 \in \text{Im}(u)$, il existe un vecteur $y_3 \in E$ tel que $y_2 = u(y_3)$ ce qui entraîne $x = u(u(y_3))$ donc finalement $x \in \text{Im}(u^2)$. On a montré que $\text{Im}(u) \subset \text{Im}(u^2)$ et puisque l'inclusion $\text{Im}(u^2) \subset \text{Im}(u)$ est toujours vraie on en conclut finalement que $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$.

On a donc montré que $(iii) \implies (ii)$

Conclusion : puisque $(i) \iff (ii)$ et que $(i) \implies (iii)$ et $(iii) \implies (ii)$, on conclut à l'équivalence de ces trois propositions.

- 2) Les propositions précédentes sont évidemment vraies pour les projecteurs, mais elles sont aussi vraies pour tout isomorphismes puisqu'on a alors $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2) = \{0\}$ et $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2) = E$, ainsi que pour tout endomorphisme diagonalisable.

Correction de l'exercice 6 :

- 1) Soient $P, Q \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Le polynôme nul appartient à F donc F est non vide.

$(\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = 0$ car $P, Q \in F$ donc $\lambda P + \mu Q \in F$. Ainsi F est stable par combinaison linéaire.

Enfin, $F \neq E$ car $X \in E$ mais $X \notin F$. En effet, si $P(X) = X$ alors $P(1) = 1 \neq 0$.

F est donc bien un sous-espace vectoriel strict de E .

Soit P un polynôme de E quelconque. Posons $Q(X) = P(X) - P(1)$, Q est alors un polynôme de même degré que P qui appartient à F , et on a $P(X) = Q(X) + P(1)$.

Tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ peut donc s'écrire comme somme d'un polynôme de F et d'un polynôme constant. Soit donc $G = \text{Vect}(1)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ constitué des polynômes constants. On vient de montrer que $F + G = E$. Pour montrer que $F \oplus G = E$ il suffit donc de montrer que $F \cap G = \{0\}$.

Soit $P \in F \cap G$. P est constant donc $P(X) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$, et $P \in F$ donc $P(1) = 0 = a$. Ainsi P est le polynôme constant, donc $F \cap G = \{0\}$.

Finalement $F \oplus \text{Vect}(1) = E$.

- 2) On vérifie de façon analogue à la question 1 que F est un sous-espace vectoriel de E .

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ quelconque. Pour obtenir un polynôme qui s'annule en 1 et en 2, il suffit de lui soustraire un polynôme de degré 1 qui vaut $P(1)$ en 1 et $P(2)$ en 2.

Posons $R(X) = \frac{P(2) - P(1)}{2 - 1}(X - 1) + P(1) = (P(2) - P(1))X + 2P(1) - P(2)$, ce polynôme vérifie $R(1) = P(1)$ et $R(2) = P(2)$, ainsi en posant $Q(X) = P(X) - R(X)$, on a bien $\deg(Q) \leq \max(\deg(P), \deg(R)) \leq n$ car $n \geq 2$, et $Q \in F$.

Tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ peut donc s'écrire comme somme d'un polynôme de F et d'un polynôme de degré 1. Posons $G = \text{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$, on a montré que $F + G = E$ et il reste à montrer que $F \cap G = \{0\}$.

Soit $P \in F \cap G$. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $P(X) = aX + b$ et $F(1) = F(2) = 0$ donne $\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$ d'où $a = b = 0$.

On a donc bien $F \cap G = \{0\}$ d'où l'on conclut que $F \oplus G = E$.

3) On vérifie de façon analogue aux deux premières questions que F est un sous-espace vectoriel de E .

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ que l'on cherche à écrire comme somme d'un polynôme de F et d'un autre polynôme.

Il suffit de trouver un polynôme R tel que $R(x_1) = P(x_1)$, $R(x_2) = P(x_2)$, ..., $R(x_k) = P(x_k)$. On peut penser aux polynômes interpolateurs de Lagrange et poser

$$R(X) = \sum_{i=1}^k P(x_i) \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^k (X - x_j)}{\prod_{j=1, j \neq i}^k (x_i - x_j)}$$

Ce polynôme est un polynôme de degré k qui vérifie la condition énoncé, donc en posant $Q(X) = P(X) - R(X)$ on a $Q \in F$ et P peut alors s'écrire comme somme d'un polynôme de F et d'un polynôme de degré $k-1$.

Posons $G = \text{Vect}(1, X, X^2, \dots, X^{k-1}) = \mathbb{R}_{k-1}[X]$. On a déjà montré que $F + G = E$.

Si $P \in F \cap G$, P est un polynôme de degré $k-1$ (car $P \in G$) qui s'annule k fois (car $P \in F$). Ainsi P est le polynôme nul, donc finalement $F \cap G = \{0\}$.

$F \oplus G = E$ donc G est un supplémentaire de F dans E .

Correction de l'exercice 7 : Sens direct : supposons que F est stable par q . Puisque q est un projecteur de E on a $E = \text{Ker}(q) \oplus \text{Im}(q)$. Tout vecteur x de F est dans E et peut donc s'écrire $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \text{Ker}(q)$ et $x_2 \in \text{Im}(q)$.

On a alors $q(x) = \underbrace{q(x_1)}_{=0} + \underbrace{q(x_2)}_{=x_2} = x_2$. Comme F est stable par q , $q(x) \in F$ donc $x_2 \in F$. Il s'ensuit que $x_1 = x - x_2 \in F$

donc finalement $x_1 \in F \cap \text{Ker}(q)$ et $x_2 \in F \cap \text{Im}(q)$. On a montré que $F = (F \cap \text{Ker}(q)) + (F \cap \text{Im}(q))$

De plus, $F \cap \text{Ker}(q)$ et $F \cap \text{Im}(q)$ sont clairement en somme directe car $\text{Ker}(q)$ et $\text{Im}(q)$ le sont.

Ainsi, on a bien $F = (F \cap \text{Ker}(q)) \oplus (F \cap \text{Im}(q))$.

Sens indirect : supposons que $F = (F \cap \text{Ker}(q)) \oplus (F \cap \text{Im}(q))$.

Soit $x \in F$, montrons que $q(x) \in F$. Par hypothèse, il existe $x_1 \in F \cap \text{Ker}(q)$ et $x_2 \in F \cap \text{Im}(q)$ tels que $x = x_1 + x_2$, donc $q(x) = x_2 \in F \cap \text{Im}(q)$ donc $q(x) \in F$. Ainsi F est bien stable par q .

Correction de l'exercice 8 : Sens direct : supposons que p et u commutent.

Soit $x \in \text{Ker}(p)$, alors $p(x) = 0$ donc $u(p(x)) = 0$ donc $p(u(x)) = 0$. Ainsi, $u(x) \in \text{Ker}(p)$. On a montré que $\text{Ker}(p)$ est stable par u .

Soit $y \in \text{Im}(p)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$ donc $u(y) = u(p(x)) = p(u(x))$ par hypothèse, donc $u(y) \in \text{Im}(p)$. On a montré que $\text{Im}(p)$ est stable par u .

Sens indirect : supposons que $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont stables par u .

p est un projecteur donc $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$ donc tout vecteur x de E peut s'écrire $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \text{Im}(p)$ et $x_2 \in \text{Ker}(p)$, donc $u(p(x)) = u(x_1)$ et $p(u(x)) = p(u(x_1)) + p(u(x_2))$. Or $u(x_1) \in \text{Im}(p)$ et $u(x_2) \in \text{Ker}(p)$ par stabilité donc $p(u(x)) = u(x_1)$. On a donc bien $u(p(x)) = p(u(x))$ pour tout vecteur x de E , donc p et u commutent.

Correction de l'exercice 9 :

1) Montrons d'abord que F et G sont en somme directe.

Soit $f \in F \cap G$, il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [0, 1], f(x) = a$. Ainsi $\int_0^1 f(t) dt = a$, mais puisque $f \in F$ on a $a = 0$ donc $f = 0$. Ainsi, $F \cap G = \{0_E\}$, ils sont donc en somme directe.

Montrons maintenant que $F + G = E$. Soit $f \in E$. Posons $a = \int_0^1 f(t) dt$. Soit g la fonction définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = f(x) - a$.

Alors $\int_0^1 g(t) dt = \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 a dt = a - a = 0$. Ainsi $g \in G$ et $f = g + a$ donc $f \in F + G$. On a donc bien $E = F + G$.

2) Pour $f \in E$, on a vu dans la question précédente que $f = g + a$ avec $a = \int_0^1 f(t) dt$ et puisque F et G sont en somme directe cette décomposition est unique.

Ainsi, $\forall x \in [0, 1], p(f)(x) = f(x) - \int_0^1 f(t) dt$.

Correction de l'exercice 10 :

1) Supposons que $p \circ q = q \circ p = 0$. Alors $(p+q) \circ (p+q) = p^2 + \underbrace{p \circ q}_{=0} + \underbrace{q \circ p}_{=0} + q^2 = p^2 + q^2 = p+q$. Ainsi $(p+q)^2 = p+q$

donc $p+q$ est un projecteur.

Supposons que $p+q$ soit un projecteur.

On a donc $(p+q)^2 = p+q$ d'où $p \circ q + q \circ p = 0$

Ainsi :

$$p \circ q = -q \circ p$$

donc

$$\begin{aligned} p^2 \circ q &= -p \circ q \circ p && \text{en composant par } p \\ p \circ q &= -(-q \circ p) \circ p \end{aligned}$$

donc

$$p \circ q = q \circ p^2$$

donc

$$p \circ q = q \circ p$$

Ainsi $p \circ q = -q \circ p$ et $p \circ q = q \circ p$ donc $p \circ q = -p \circ q$ d'où $2p \circ q = 0$ donc $p \circ q = 0$ et il s'ensuit que $q \circ p = 0$.

2) Supposons que $p + q$ est un projecteur.

L'inclusion $\text{Im}(p + q) \subset \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$ est claire. Réciproquement, si $y \in \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$, il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $y = p(x_1) + q(x_2)$ donc $(p + q)(y) = p^2(x_1) + p \circ q(x_2) + q \circ p(x_1) + q^2(x_2) = p(x_1) + q(x_2) = y$ car $p \circ q = q \circ p = 0$ d'après la question précédente. Ainsi $y \in \text{Im}(p + q)$ donc finalement $\text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$.

Montrons que la somme est directe : si $y \in \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$, alors $y = p(x_1) = q(x_2)$ pour un certain $(x_1, x_2) \in E^2$, donc $y = p(y) = p(q(x_2)) = 0$, donc $\text{Im}(p) \cap \text{Im}(q) = \{0\}$.

Finalement on a bien $\text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$.

L'inclusion $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p + q)$ est claire.

Soit $x \in \text{Ker}(p + q)$. Alors $p(x) = -q(x)$ donc $p^2(x) = -p(q(x)) = 0$ donc $p(x) = 0$. Ainsi $x \in \text{Ker}(p)$. De même en composant par q on obtient $0 = q(p(x)) = -q^2(x)$ donc $q(x) = 0$ donc $x \in \text{Ker}(q)$. Finalement $\text{Ker}(p + q) \subset \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$ donc on a bien $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

Correction de l'exercice 11 :

1) Soit $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(g)$. Alors il existe $y \in F$ tel que $g(y) = x$, et $f(x) = 0 = f(g(y))$. En composant cette égalité par g , on obtient $g(f(g(y))) = 0$ mais puisque $g \circ f \circ g = g$ on a finalement $g(y) = 0$, d'où $x = 0$.

Ainsi $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$, $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(g)$ sont en somme directe.

2) Soit $x \in E$. Raisonnons par analyse-synthèse et supposons que l'on a $x = y + z$ avec $y \in \text{Ker}(f)$ et $z \in \text{Im}(g)$. Il existe donc $z' \in F$ tel que $z = g(z')$.

En composant l'égalité $x = y + z$ par f on obtient $f(x) = f(z) = f(g(z'))$, puis en composant par g on obtient $g(f(x)) = g(f(g(z'))) = g(z') = z$.

Réciproquement, si l'on pose $z = g(f(x))$ et $y = x - z = x - g(f(x))$, on aura $x = y + z$ par définition de y et z , et il reste à vérifier que $y \in \text{Ker}(f)$ et que $z \in \text{Im}(g)$. La relation $z \in \text{Im}(g)$ est évidente car $z = g(f(x))$.

Enfin, $f(y) = f(x) - f(z) = f(x) - f(g(f(x))) = f(x) - f(x) = 0$ puisqu'on a l'égalité $f \circ g \circ f = f$. Ainsi $y \in \text{Ker}(f)$.

Finalement on a bien $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g) = E$

3) Soit $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \in \mathbb{R}_n[x]$.

On a alors

$$\begin{aligned} f(P)(x) &= \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k \\ g(f(P))(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} \int_0^x t^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} \frac{x^{k+1}}{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} x^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^n a_k x^k \\
f(g(f(P)))(x) &= \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k
\end{aligned}$$

donc on a bien $f \circ g \circ f = f$

De même,

$$\begin{aligned}
g(P)(x) &= \sum_{k=0}^n a_k \int_0^x t^k dt \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{a_k t^{k+1}}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1} t^k}{k} \\
f(g(P))(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1} k t^{k-1}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} t^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^n a_k t^k \\
&= P
\end{aligned}$$

$$g(f(g(P))) = g(P)$$

Correction de l'exercice 12 :

- 1) p est un projecteur donc $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$.

Soit (e_1, e_2, \dots, e_p) une base de $\text{Im}(p)$ et $(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ une base de $\text{Ker}(p)$. Alors $(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de E et dans cette base la matrice de p est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

le nombre de 1 dans cette matrice est égal à la dimension de $\text{Im}(p)$, donc $\text{tr}(p) = \text{tr}(A) = p = \text{rg}(p)$.

Ainsi, tout projecteur a son rang égal à sa trace.

- 2) Raisonnons par récurrence comme suggéré par l'énoncé. On note $\mathcal{P}(n)$: « Si F_1, F_2, \dots, F_n est une famille de sous espaces vectoriels de E on a $\dim(F_1 + F_2 + \dots + F_n) \leq \dim(F_1) + \dim(F_2) + \dots + \dim(F_n)$ avec égalité si et seulement si F_1, F_2, \dots, F_n sont en somme directe. ».

- **Initialisation** : Pour $n = 2$, on a $\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2)$ d'où $\dim(F_1 + F_2) \leq \dim(F_1) + \dim(F_2)$ avec égalité si et seulement si $\dim(F_1 \cap F_2) = 0$, si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, si et seulement si F_1 et F_2 sont en somme directe. Ainsi $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

- **Hérédité** : Soit $n \geq 2$ un entier tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Soit F_1, F_2, \dots, F_{n+1} une famille de sous espaces vectoriels de E .

Alors, $\dim(F_1 + F_2 + \dots + F_{n+1}) = \dim(F_1 + F_2 + \dots + F_n) + \dim(F_{n+1}) - \dim((F_1 + F_2 + \dots + F_n) \cap F_{n+1})$

Or, par hypothèse de récurrence, on a $\dim(F_1 + F_2 + \dots + F_n) \leq \dim(F_1) + \dim(F_2) + \dots + \dim(F_n)$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \dim(F_1 + F_2 + \dots + F_{n+1}) &\leq \dim(F_1) + \dim(F_2) + \dots + \dim(F_n) + \dim(F_{n+1}) - \dim((F_1 + F_2 + \dots + F_n) \cap F_{n+1}) \\ &\leq \dim(F_1) + \dim(F_2) + \dots + \dim(F_{n+1}) \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si toutes les inégalités sont des égalités, c'est à dire si et seulement si $\dim(F_1 + F_2 + \dots + F_n) = \dim(F_1) + \dim(F_2) + \dots + \dim(F_n)$ ET $\dim((F_1 + F_2 + \dots + F_n) \cap F_{n+1}) = 0$.

Par hypothèse de récurrence, il y a égalité si et seulement si F_1, F_2, \dots, F_n sont en somme directe ET $(F_1 + F_2 + \dots + F_n) \cap F_{n+1} = \{0\}$, c'est à dire si et seulement si F_1, F_2, \dots, F_n sont en somme directe et F_{n+1} est en somme directe avec $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n$. Cette condition est vérifiée si et seulement si F_1, F_2, \dots, F_{n+1} sont en somme directe, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** : Par principe de récurrence on en conclut que $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

3) Le sens réciproque est le plus facile, supposons que $\forall(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j, p_i \circ p_j = 0$. Alors

$$\begin{aligned} (p_1 + p_2 + \dots + p_n)^2 &= p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2 \\ &\quad + p_1 \circ p_2 + p_1 \circ p_3 + \dots + p_1 \circ p_n \\ &\quad + p_2 \circ p_1 + p_2 \circ p_3 + \dots + p_2 \circ p_n \\ &\quad \vdots \\ &\quad + p_n \circ p_1 + p_n \circ p_2 + \dots + p_n \circ p_{n-1} \\ &= p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2 \\ &= p_1 + p_2 + \dots + p_n \end{aligned} \quad \text{car } p_1, p_2, \dots, p_n \text{ sont des projecteurs}$$

ainsi, $p_1 + p_2 + \dots + p_n$ est un projecteur.

Réciproquement, supposons que $p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ soit un projecteur.

Remarquons que $\text{Im}(p) \subset \text{Im}(p_1) + \text{Im}(p_2) + \dots + \text{Im}(p_n)$ (**1**). En effet, $\forall x \in E, p(x) = \sum_{i=1}^n p_i(x) \in \text{Im}(p_1) + \text{Im}(p_2) + \dots + \text{Im}(p_n)$.

On a $\text{tr}(p) = \text{tr}(p_1) + \text{tr}(p_2) + \dots + \text{tr}(p_n) = \text{rg}(p_1) + \text{rg}(p_2) + \dots + \text{rg}(p_n)$ d'après la question 1 et par linéarité de la trace.

D'autre part, puisque p est un projecteur, on a aussi $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$. Finalement, $\dim(\text{Im}(p)) = \sum_{i=1}^n \dim(\text{Im}(p_i)) \geq \dim(\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_n))$ donc on conclut grâce à l'inclusion (**1**) que $\text{Im}(p) = \text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_n)$.

De plus, d'après la question 2 puisqu'on est dans un cas d'égalité entre $\dim(\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_n))$ et $\dim(p_1) + \dots + \dim(p_n)$, alors ces espaces vectoriels sont en somme directe.

Finalement, on a $\text{Im}(p) = \text{Im}(p_1) \oplus \text{Im}(p_2) \oplus \dots \oplus \text{Im}(p_n)$.

Montrons maintenant que $\forall(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j$ on a $p_i \circ p_j = 0$.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$ et soit $x \in E$. Alors $p_j(x) \in \text{Im}(p_j)$ donc $p_j(x) \in \text{Im}(p)$. On a donc $p(p_j(x)) = p_j(x)$, c'est à dire $\sum_{i=1}^n p_i \circ p_j(x) = p_j(x)$. En retranchant $p_j(x)$ de chaque côté, on obtient $\sum_{i \neq j}^n p_i \circ p_j(x) = 0$.

Or $\forall i \in \{1, \dots, n\}, p_i \circ p_j(x) \in \text{Im}(p_i)$. Puisque les $\text{Im}(p_i)$ sont en somme directe, on en déduit que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ on a $p_i \circ p_j(x) = 0$.

Correction de l'exercice 13 : Supposons $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$. Alors clairement $u^2 = 0$ et $\dim(\text{Ker}(u)) + \text{rg}(u) = 2 \dim(\text{Ker}(u)) = \dim(E)$

Réciproquement, si $u^2 = 0$ alors $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$ et l'égalité des dimensions fournit l'égalité $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$.

Supposons les deux premiers points vrais et montrons le troisième. Soit H un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E . L'application $u|_H : H \rightarrow \text{Im}(u)$ est un isomorphisme d'après la démo du théorème du rang. Soit $u|_H^{-1}$ l'isomorphisme réciproque. Soit v l'application définie sur $\text{Im}(u) \oplus H$ par $v(x + y) = u|_H^{-1}(x) + f(y)$.

On a alors $u|_H^{-1}(x) \in H$ et $u|_H(y) \in \text{Im}(u) = \text{Ker}(u)$, donc $u(v(x + y)) = u(u|_H^{-1}(x)) + 0 = x$.

d'autre part, $v(u(x + y)) = v(u(y)) = u|_H^{-1}(u(y)) = y$ car $u(y) \in \text{Im}(u)$.

Ainsi on a bien $u(v(x+y)) + v(u(x+y)) = x+y$ donc $u \circ v + v \circ u = \text{Id}_E$.

Réciproquement, supposons $u^2 = 0$ et il existe v tel que $u \circ v + v \circ u = \text{Id}_E$. Soit $x \in \text{Ker}(u)$. Alors $x = u(v(x)) + v(u(x)) = u(v(x))$ donc $x \in \text{Im}(u)$. Réciproquement si $x \in \text{Im}(u)$, alors $x = u(y)$ donc $u(x) = u^2(y) = 0$ donc $x \in \text{Ker}(u)$. On a bien $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$.

Correction de l'exercice 14 :

- 1) En multipliant par A dans l'égalité (i) on obtient $A^2 A' = A A' A = A$ d'après l'égalité (ii). Ainsi $\text{rg}(A) \leq \min(\text{rg}(A^2), \text{rg}(A')) \leq \text{rg}(A)$.

Réciproquement, on a $\text{Im}(A^2) \subset \text{Im}(A)$ donc $\text{rg}(A^2) \leq \text{rg}(A)$.

On en conclut que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^2)$ donc $\text{rg}(a) = \text{rg}(a^2)$.

- 2) a) Puisque $\text{Im}(a^2) \subset \text{Im}(a)$ et que $\text{rg}(a^2) = \text{rg}(a)$, on a égalité des dimensions donc $\text{Im}(a^2) = \text{Im}(a)$. En appliquant le théorème du rang on en déduit immédiatement que $\dim(\text{Ker}(a^2)) = \dim(\text{Ker}(a))$ et comme $\text{Ker}(a) \subset \text{Ker}(a^2)$ on en déduit aussi que $\text{Ker}(a) = \text{Ker}(a^2)$.

Soit $x \in \text{Im}(a) \cap \text{Ker}(a)$. Alors il existe $x' \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = a(x')$. De plus $0 = a(x) = a^2(x')$ donc $x' \in \text{Ker}(a^2)$. Puisque $\text{Ker}(a^2) = \text{Ker}(a)$ on a donc $x' \in \text{Ker}(a)$ donc $x = a(x') = 0$. Ainsi $\text{Im}(a)$ et $\text{Ker}(a)$ sont en somme directe, et puisque $\dim(\text{Im}(a) \oplus \text{Ker}(a)) = \dim(\text{Im}(a)) + \dim(\text{Ker}(a)) = n$ d'après le théorème du rang, donc par égalité des dimensions on a finalement :

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \text{Im}(a) \oplus \text{Ker}(a)}$$

- b) Soit (e_1, \dots, e_r) une base de $\text{Im}(a)$ et (e_{r+1}, \dots, e_n) une base de $\text{Ker}(a)$. D'après la question précédente, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est alors une base de \mathbb{R}^n et dans cette base on a : $a(e_1), \dots, a(e_r) \in \text{Im}(a)$ et $a(e_{r+1}) = a(e_{r+2}) = \dots = a(e_n) = 0$.

La matrice représentative de a dans la base (e_1, \dots, e_n) est donc de la forme $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où B est une matrice carrée de taille r . Cette matrice par bloc a le même rang que B car les autres lignes sont des 0, et comme le rang de cette matrice est $\text{rg}(a) = r$ on a finalement $\text{rg}(B) = r$, donc B est inversible.

Si P est la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^n à la base \mathcal{B} , alors on a d'après la formule de changement de base :

$$A = P \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

- c) Soit B' la matrice de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ inverse de B . En posant $A' = P \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ on obtient en faisant le produit par blocs :

$$AA' = P \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} BB' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

et de même :

$$A'A = P \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} B'B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

donc $AA' = A'A$.

De même, on calcule :

$$AA'A = P \begin{pmatrix} BB'B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = A$$

et

$$A'AA' = P \begin{pmatrix} B'BB' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = A'$$

La matrice A' est donc bien un pseudo-inverse de A .

- 3) Soit $x \in \text{Ker}(a)$. On a $a(a'(x)) = a'(a(x)) = a'(0) = 0$ donc $a'(x) \in \text{Ker}(a)$. Ainsi $\text{Ker}(a)$ est stable par a' .
- 4) Soit $y \in \text{Im}(a)$. Il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = a(x)$, donc $a'(y) = a'(a(x)) = a(a'(x)) \in \text{Im}(a)$ donc $\text{Im}(a)$ est stable par a' .

En reprenant la base \mathcal{B} de la question 2)b) la matrice représentative de a' dans cette base est de la forme $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

avec D une matrice carrée de taille r . La formule de changement de base donne donc bien $A' = P \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.

5) Comme a' est un pseudo inverse de a on a $aa' = aa'aa' = (aa')^2$ donc aa' est un projecteur.

Soit x un vecteur de $\text{Ker}(aa')$. Puisque $aa' = a'a$ on a $x \in \text{Ker}(a'a)$ donc $a(x) = a(a'(a(x))) = a(0) = 0$. Ainsi $x \in \text{Ker}(a)$. Réciproquement si $x \in \text{Ker}(a)$ on a $0 = a'(a(x)) = a'(a'(x))$ donc $x \in \text{Ker}(aa')$. On en conclut que $\boxed{\text{Ker}(aa') = \text{Ker}(a)}$.

De même, si $y \in \text{Im}(aa')$ alors $y \in \text{Im}(a)$, et si $y \in \text{Im}(a)$ alors $y \in \text{Im}(aa'a)$ donc $y \in \text{Im}(aa')$. Ainsi, $\boxed{\text{Im}(aa') = \text{Im}(a)}$.

Enfin la matrice $P^{-1}(AA')P$ représente le projecteur aa' dans la base \mathcal{B} . Or comme $\text{Im}(aa') = \text{Im}(a)$ et que $\text{Ker}(aa') = \text{Ker}(a)$ on a $\mathbb{R}^n = \text{Im}(aa') \oplus \text{Ker}(aa')$. Dans cette base, la matrice représentative de aa' est $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc :

$$P^{-1}(AA')P = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6) Puisque on a $P^{-1}(AA')P = \begin{pmatrix} BD & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ selon les questions précédentes, alors $BD = I_r$ donc D est nécessairement l'inverse de B . L'inverse d'une matrice étant unique, cela suffit à prouver l'unicité du pseudo-inverse si il existe.