⋆ ⋆
Exercice 1

Soit $A = \{(t^2, t^3) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 = y^2\}$ deux parties de $\mathbb{R}^2$.
Montrer que $A = B$.

⋆ ⋆
Exercice 2

Soit E un ensemble non vide. Pour toute partie A de E, on notera $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E,et on appellera **fonction caractéristique de** A et on notera f_A la fonction de E vers $\{0,1\}$ définie par

$$\forall x \in E, \quad f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

On considère dans toute la suite deux parties quelconques A et B de E, et f_A etf_B les fonctions caractéristiques respectives de A et de B.

1) Montrer que $A = B$ si et seulement si $\forall x \in E,\ f_A(x) = f_B(x)$.
2) Montrer que $A \subset B$ si et seulement si $\forall x \in E, f_A(x) \leq f_B(x)$
3) De quel ensemble la fonction $1 - f_A$ est-elle la fonction caractéristique ? Justifier.
4) Montrer que $f_A \times f_B = f_{A\cap B}$.
5) En remarquant que $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, en déduire que $f_{A\setminus B} = f_A - f_{A\cap B}$.
6) Montrer que $f_A + f_B - f_A \times f_B = f_{A\cup B}$.
7) À l'aide des questions précédentes, exprimer la fonction caractéristique de $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ en fonction de f_A et f_B

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 3

Soit E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. On note $A\Delta B$ la différence symétrique de A et B définie par :

$$A\Delta B = \big\{x \in A \cup B; x \notin A \cap B\big\}$$

1) Représenter par un diagramme de Venn les éléments de $A\Delta B$.
2) Montrer que $A\Delta B = (A \cap \complement_E B) \cup (\complement_E A \cap B)$.
3) Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\varnothing$, $A\Delta E$ et $A\Delta\complement_E A$.
4) Démontrer que pour tous A, B, C sous ensembles de E, on a :

$$(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$$

⋆ ⋆
Exercice 4

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application de E vers F.
Soient A et B deux parties de E.

1) Montrer que $f(B) \setminus f(A) \subset f(B \setminus A)$
2) Montrer qu'il n'y a pas égalité dans le cas général.
3) Montrer que l'égalité a lieu si f est injective
4) En déduire que si f est une bijection de E vers F, alors pour toute partie A de E on a $f\left(\complement_E A\right) = \complement_F f(A)$
5) Montrer que si $M \subset F$ et $N \subset F$, $f^{-1}(M \setminus N) = f^{-1}(M) \setminus f^{-1}(N)$
6) Montrer que si $N \subset F$, on a $f^{-1}\left(\complement_F N\right) = \complement_E f^{-1}(N)$

⋆
Exercice 5

Soient E, F et G trois ensembles et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective
2) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective
3) Trouver un exemple d'applications f et g telles que $g \circ f$ est bijective avec g non injective et f non surjective.

⋆
Exercice 6

Pour un ensemble fini E on considère l'application card suivante :

$$\text{card} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ A & \longmapsto & \text{card}(A) \end{array}$$

Pour quel(s) ensemble(s) E cette application est-elle injective ?

⋆
Exercice 7

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x+y, x-y)$.
Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 8

Pour chacune des applications ci-dessous, déterminer si elle est injective, surjective, bijective.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$
2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x\ ;\ y) \longmapsto x^2 - y^2$
3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x\ ;\ -x)$
4) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x\ ,\ y) \mapsto (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y\ ,\ x+y)$
5) $f : [-\pi; \pi[\to [-1;1]^2$, $x \mapsto (\cos(x)\ ,\ \sin(x))$
6) $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}^*$, $(x\ ,\ n) \mapsto (x^n\ ,\ n)$

⋆ ⋆
Exercice 9

Au poker on appelle une « main » un ensemble de 5 cartes choisies dans un paquet de 52 cartes. Les différentes figures possibles sont la paire (2 cartes de même valeur), la double paire, le brelan (trois cartes de même valeur), la quinte (séquence de 5 cartes consécutive, indifféremment de la couleur), la couleur (5 cartes de la même couleur), le full (3 cartes de même valeur + 2 cartes de même valeur), le carré (4 cartes de même valeur), la quinte flush (5 cartes consécutives et de même couleur),la quinte flush royale (quinte flush se terminant par un As).
Combien existe-t-il de mains contenant ...

1) une quinte flush royale ?
2) une quinte flush (non royale) ?
3) une couleur (sans quinte flush)
4) un full ?
5) un carré ?
6) une double paire ?
7) une paire (et rien d'autre) ?
8) un brelan (et rien d'autre) ?

⋆ ⋆
Exercice 10

6 personnes doivent s'asseoir sur 10 sièges dans une salle de cinéma.

1) Combien y a-t-il de choix possibles pour réserver les 6 sièges ?
2) Combien y a-t-il de choix possibles pour asseoir les 6 personnes sans avoir réservé les sièges ? En ayant réservé les sièges ?
3) Combien y a-t-il de choix possibles pour faire en sorte d'alterner garçons et filles dans le placement ? (le groupe comporte 3 garçons et 3 filles)

⋆ ⋆

Exercice 11

Déterminer dans chaque cas un prolongement $\tilde{f}$ de f à $\mathbb{R}$ tel que $\tilde{f}$ est bijective. Déterminer dans chaque cas un intervalle I telle que la restriction $g_{|I}$ de g à I est injective :

1) $f : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$
2) $f :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \ln(x+1)$
3) $f : [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \mathrm{e}^x$
4) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \cos(3x)$
5) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto (x-2)^2$
6) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{-x}$

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$. On souhaite montrer l'égalité suivante de deux façons différentes :

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

1) Démontrer cette égalité par le calcul.
2) On considère l'ensemble $E = \{1, 2, ..., n+1\}$ de cardinal $n+1$. On note E_p le nombre de parties de E à $k+1$ éléments pour lesquelles le plus grand de ces éléments est p.
   Montrer que $\text{card}(E) = \text{card}(E_{k+1}) + \text{card}(E_{k+1}) + \cdots + \text{card}(E_{n+1})$ et conclure.