

## I. Fonctions réelles de la variable réelle

### Définition 7.1

Une **fonction réelle de la variable réelle** est une application  $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$  où  $D_f \subset \mathbb{R}$ . L'ensemble  $D_f$  est appelé **domaine de définition de  $f$** .

## 1. Vocabulaire

### a. Graphe

### Définition 7.2

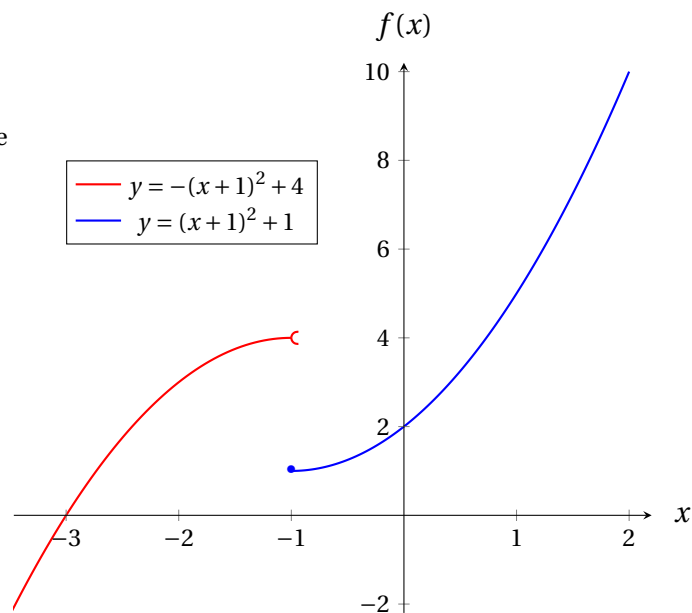
Soit  $f$  une fonction réelle définie sur  $D_f$ . On appelle **graphe de  $f$**  l'ensemble  $\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$ . Cet ensemble est une partie de  $\mathbb{R}^2$ , on peut donc le représenter dans un plan muni d'un repère.

### Exemple 7.1

Considérons la fonction suivante :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} -(x+1)^2 + 4 & \text{si } x < -1 \\ (x+1)^2 + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

$f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , une partie de son graphe est représentée ci-contre :



### b. Variations

### Définition 7.3

Soit  $c$  un réel fixé et  $D \subset \mathbb{R}$ . On appelle **fonction constante égale à  $c$  sur  $D$**  la fonction

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto c \end{aligned}$$

On appelle **fonction nulle** la fonction

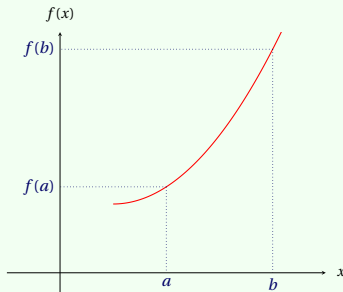
$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

c'est à dire la fonction constante égale à 0.

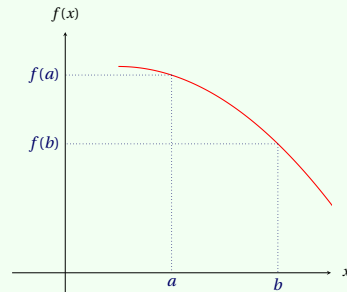
**Définition 7.4**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un **intervalle**  $I$ . On dit que

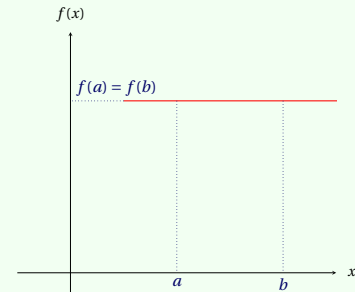
- $f$  est **croissante** sur  $I$  si  $\forall (a, b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$
- $f$  est **décroissante** sur  $I$  si  $\forall (a, b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$
- $f$  est **constante** sur  $I$  si  $\forall (a, b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) = f(b)$



Fonction croissante



Fonction décroissante



Fonction constante

On dit que  $f$  est **monotone** sur  $I$  si elle est croissante sur  $I$  ou décroissante sur  $I$ .

**c. Fonction périodique****Définition 7.5**

Soit  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On dit que  $f$  est périodique s'il existe un réel  $T \neq 0$  tel que pour tout réel  $x \in D_f$  pour lequel  $x + T \in D_f$  on a  $f(x + T) = f(x)$ . On dit alors que  $T$  est une **période** de  $f$  (ou que  $f$  est  $T$ -périodique).

**Exemple 7.2**

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période  $2\pi$ .

La fonction tangente est périodique de période  $\pi$ . En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

**Remarque**

Si  $f$  est  $T$ -périodique, alors  $f$  est aussi  $2T$ -périodique,  $3T$ -périodique, etc. La période d'une fonction périodique n'est donc pas unique.

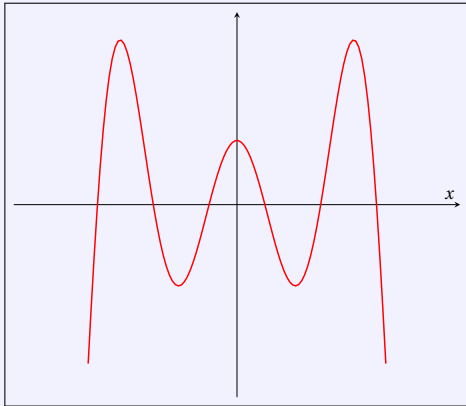
**d. Parité****Définition 7.6**

Soit  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  une application telle que  $\forall x \in D_f, -x \in D_f$  (on dit que  $D_f$  est symétrique par rapport à 0).

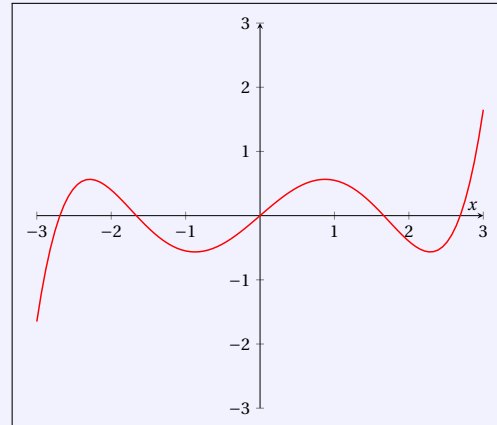
- On dit que  $f$  est **paire** si  $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$
- On dit que  $f$  est **impaire** si  $\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x)$ .

**Propriété 7.1**

- La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. En effet, si  $(x, f(x)) \in \mathcal{C}_f$ , alors  $(-x, f(-x)) = (-x, f(x))$  est un point de  $\mathcal{C}_f$ . Ces deux points sont bien symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
- De même, la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Fonction paire



Fonction impaire

**Remarque**

Si  $f$  est paire, alors  $f(0) = 0$ . En effet, il faut avoir  $f(-0) = -f(0)$  donc  $f(0) = -f(0)$  d'où  $2f(0) = 0$  et finalement  $f(0) = 0$ .

**Exemple 7.3**

Quelques fonctions paires :

- $x \mapsto x^n$  lorsque  $n \in \mathbb{Z}$  est pair (d'où le nom)
- $x \mapsto \cos x$

Quelques fonctions impaires :

- $x \mapsto x^n$  lorsque  $n \in \mathbb{Z}$  est impair
- $x \mapsto \sin x$
- $x \mapsto \tan x$
- $x \mapsto \frac{1}{x}$

**Propriété 7.2**

La seule fonction à la fois paire et impaire sur un intervalle centrée en 0 est la fonction nulle  $x \mapsto 0$ .

**e. Opérations****Définition 7.7**

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions définies sur un même domaine  $D$ , on définit sur  $D$  les fonctions **somme** et **produit** de  $f$  et  $g$ , notées  $f + g$  et  $f \times g$ , par

$$\forall x \in D, (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in D, (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

si de plus  $g$  ne s'annule pas sur  $D$  on peut définir la fonction quotient  $\frac{f}{g}$  par

$$\forall x \in D, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

**f. Majorant, minorant, extrema****Définition 7.8**

Soit  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On dit que

- $f$  est **majorée** s'il existe un réel  $M$  tel que  $\forall x \in D_f, f(x) \leq M$ . On dit alors que  $M$  est un **majorant** de  $f$
- $f$  est **minorée** s'il existe un réel  $m$  tel que  $\forall x \in D_f, f(x) \geq m$ . On dit alors que  $m$  est un **minorant** de  $f$ .
- $f$  est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.
- $f$  admet un minimum sur  $D_f$  s'il existe un réel  $a \in D_f$  tel que  $\forall x \in D_f, f(x) \geq f(a)$ . Le réel  $m = f(a)$  s'appelle alors **minimum** de  $f$  sur  $D_f$  et on dit qu'il est **atteint en  $a$** .
- $f$  admet un maximum sur  $D_f$  s'il existe un réel  $a \in D_f$  tel que  $\forall x \in D_f, f(x) \leq f(a)$ . Le réel  $M = f(a)$  s'appelle alors **maximum** de  $f$  sur  $D_f$  et on dit qu'il est **atteint en  $a$** .
- On appelle **extremum** un minimum ou un maximum. .

## 2. Fonctions de référence

L'allure des graphes des fonctions suivantes doit être connu. Connaître le graphe peut souvent aider à comprendre comment résoudre un problème, ou à se souvenir des limites usuelles.

### a. Fonctions affines et affines par morceaux

#### Définition 7.9

Une fonction affine est une fonction polynôme de degré au plus 1, c'est à dire une fonction de la forme  $f : x \mapsto ax + b$  où  $a$  et  $b$  sont des réels fixés.

Sa courbe représentative est une droite d'équation réduite  $y = ax + b$ .  $a$  est le **coefficient directeur** de cette droite et  $b$  est son **ordonnée à l'origine**.

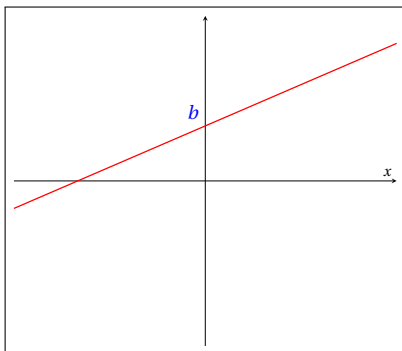
#### Définition 7.10

On dit qu'une fonction  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  est **affine par morceaux** s'il existe une suite d'intervalles deux à deux disjoints  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\bigcup_{n=0}^{+\infty} I_n = D_f$  et telle que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f|_{I_n}$  est une fonction affine.

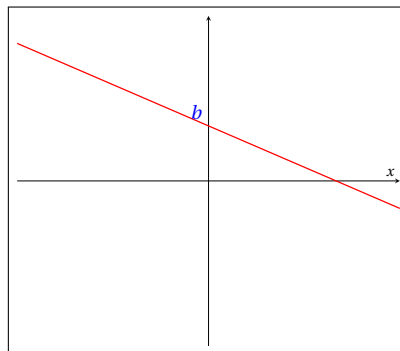
#### Exemple 7.4

- La fonction valeur absolue est affine par morceau. Sa restriction à  $] -\infty; 0[$  est la fonction  $x \mapsto -x$  et sa restriction à  $[0; +\infty[$  est  $x \mapsto x$ .
- La fonction **partie entière**, qui à un réel  $x$  associe l'unique entier  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $n \leq x < n+1$ , est affine par morceaux. Sa restriction à chaque intervalle de la forme  $[n, n+1[$  est constante (donc affine).

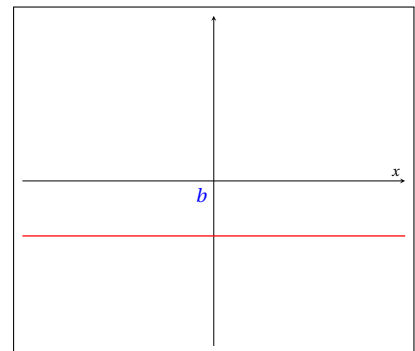
### b. Courbe représentative d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$



$a > 0$

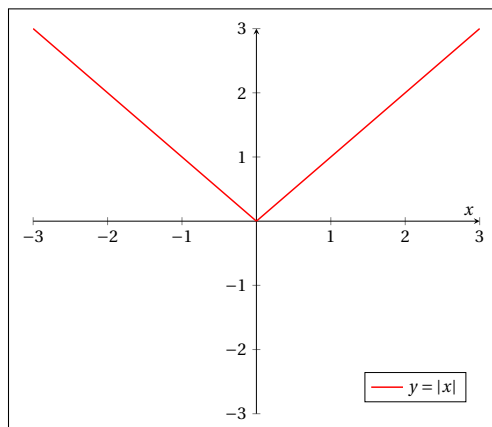


$a < 0$

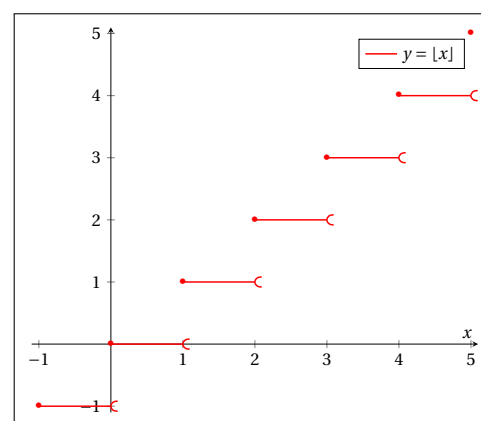


$a = 0$

### c. Courbe représentative de la fonction valeur absolue et de la fonction partie entière



Fonction  $x \mapsto |x|$



Fonction  $x \mapsto [x]$

### d. Fonction polynôme de degré 2

Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction de la forme  $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$  où  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

**Définition 7.11**

Soit  $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$  une fonction polynôme de degré 2. On appelle **discriminant de  $f$**  le nombre  $\Delta = b^2 - 4ac$

On rappelle les deux propriétés suivantes :

**Propriété 7.3**

Soit  $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$  une fonction polynôme de degré 2. Alors

- Si  $a > 0$ ,  $f$  est décroissante sur  $] -\infty; \frac{-b}{2a} [$  et croissante sur  $] \frac{-b}{2a}; +\infty [$ .
- Si  $a < 0$ ,  $f$  est croissante sur  $] -\infty; \frac{-b}{2a} [$  et décroissante sur  $] \frac{-b}{2a}; +\infty [$ .

**Propriété 7.4**

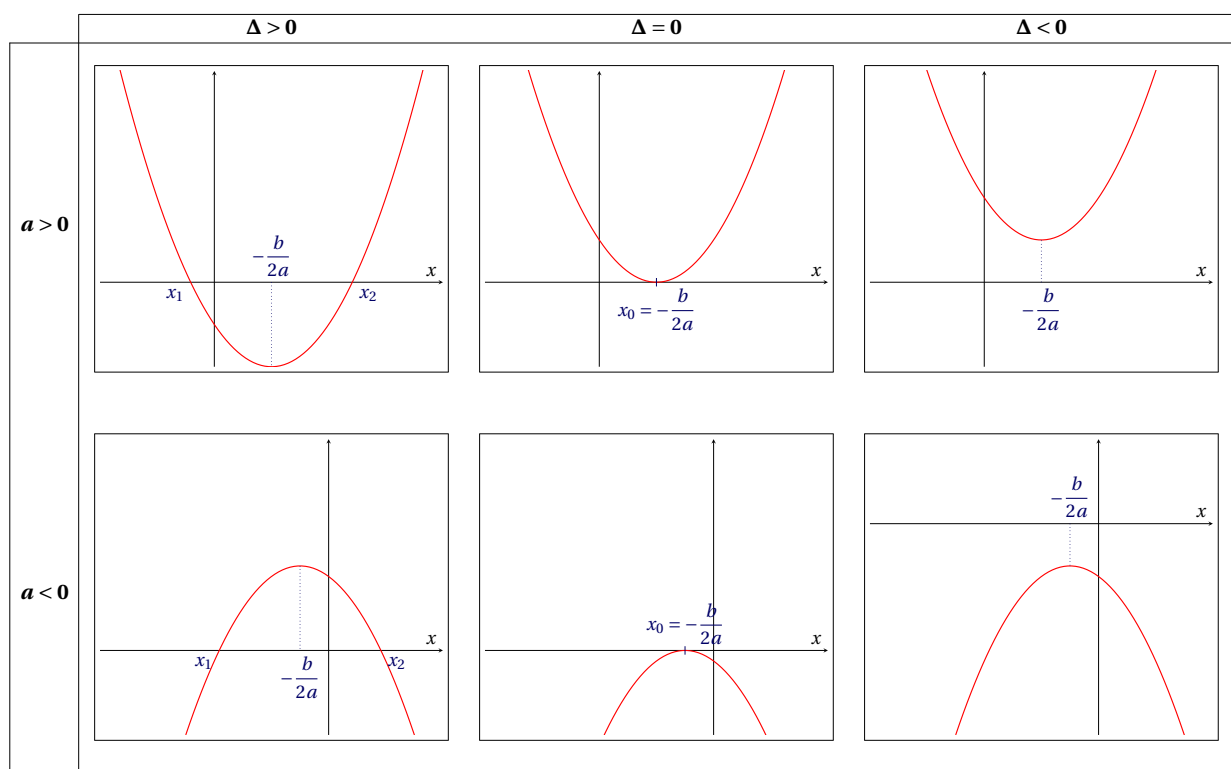
- Si  $\Delta > 0$ , l'équation  $f(x) = 0$  admet deux solutions réelles, notées  $x_1$  et  $x_2$  et données par

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

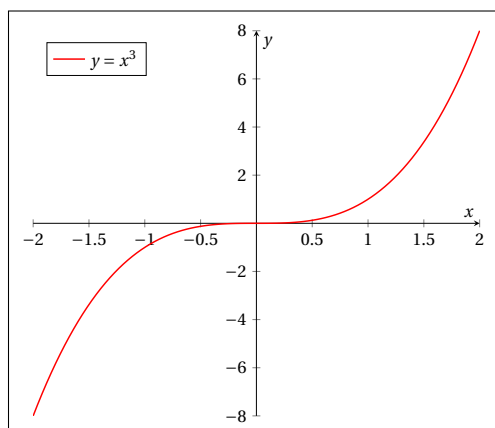
- Si  $\Delta = 0$ , l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution réelle, notée  $x_0$  et donnée par

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

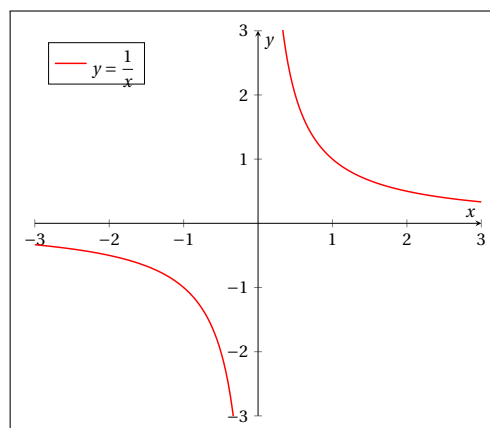
- Si  $\Delta < 0$ , l'équation  $f(x) = 0$  n'admet aucune solution réelle.

**e. Courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2**

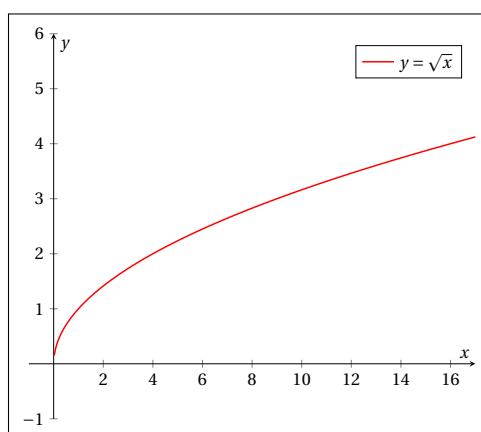
## f. Fonctions cube, inverse, racine carrée, racine cubique



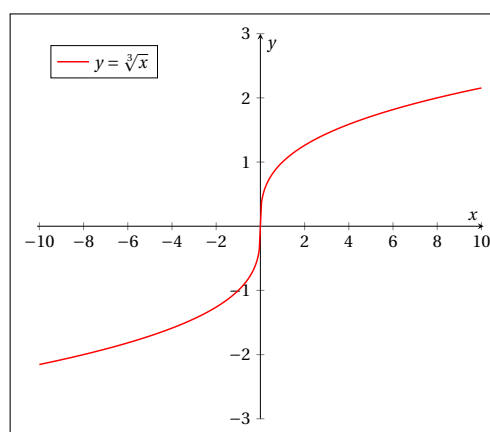
Fonction  $x \mapsto x^3$  définie sur  $\mathbb{R}$



Fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  définie sur  $\mathbb{R}^*$



Fonction  $x \mapsto \sqrt{x} = x^{1/2}$  définie sur  $[0; +\infty[$



Fonction  $x \mapsto \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$  définie sur  $\mathbb{R}$

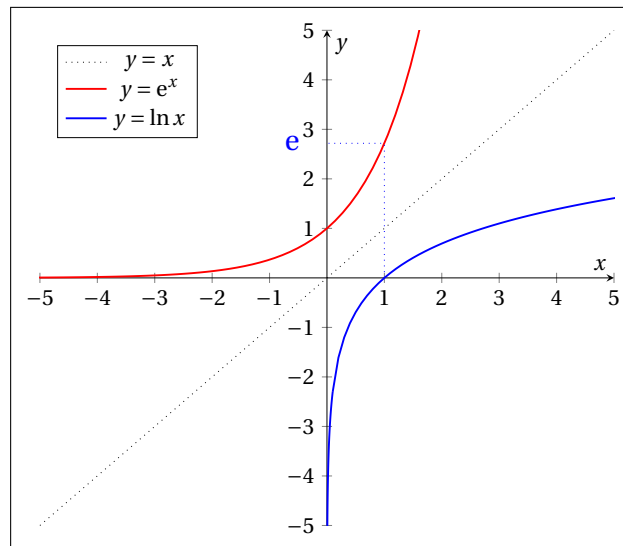
## g. Fonctions exponentielle et logarithme

### Définition 7.12

La fonction logarithme naturel, notée  $\ln$ , est l'unique primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $]0; +\infty[$  s'annulant en 1. La fonction logarithme naturel réalise une bijection de  $]0; +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$ . La fonction exponentielle, notée  $\exp$ , est définie comme étant l'application réciproque de  $\ln$ .

Ainsi, on a

- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\exp(x)) = x$
- $\forall x \in ]0, +\infty[, \exp(\ln(x)) = x$



Fonction  $x \mapsto e^x$  définie sur  $\mathbb{R}$   
Fonction  $x \mapsto \ln x$  définie sur  $]0; +\infty[$

### Propriété 7.5 (Propriétés analytiques de la fonction exponentielle)

- $x \mapsto e^x$  est dérivable et  $(e^x)' = e^x$
- $e^0 = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$
- $x \mapsto e^x$  est strictement croissante
- $e^x = 1 \iff x = 0$
- $e^x > 1 \iff x > 0$
- $e^x < 1 \iff x < 0$

### Propriété 7.6 (Propriétés algébriques de la fonction exponentielle)

- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, e^{a+b} = e^a e^b$
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (e^a)^n = e^{na}$
- $\forall a \in \mathbb{R}, e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{e^a} = e^{a/2}$

### Définition 7.13

Si  $(a, b) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ , on définit  $a^b$  par :

$$a^b = e^{b \ln(a)}$$

Ainsi, la dernière propriété peut se généraliser en  $\forall (a, b) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}, (e^a)^b = e^{ab}$ .

### Propriétés 7.7 (Propriétés analytiques de la fonction logarithme)

- $x \mapsto \ln x$  est dérivable et  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $\ln(1) = 0$
- $x \mapsto \ln x$  est strictement croissante
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln x = 0 \iff x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln x > 0 \iff x > 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln x < 0 \iff x < 1$

### Propriétés 7.8 (Propriétés algébriques de la fonction logarithme)

- $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{Z}, \ln(a^n) = n \ln a$
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

→ Exercice de cours n° 1.

→ Exercice de cours n° 2.

→ Exercice de cours n° 3.

### Définition 7.14

Soit  $b > 0$  un réel tel que  $b \neq 1$ . Le logarithme en base  $b$  est l'application qui à un réel  $x$  strictement positif associe l'unique réel  $y$  tel que  $b^y = x$ . On la note  $\log_b$ .

### Remarque

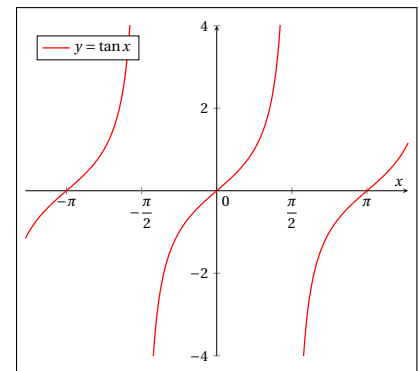
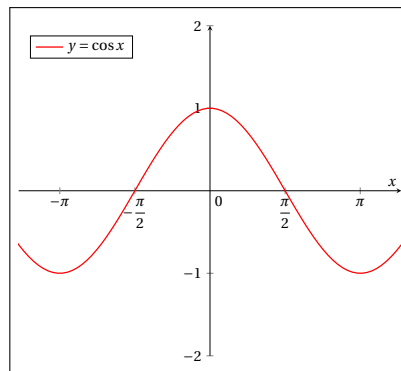
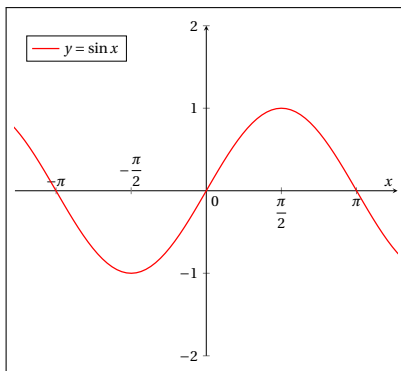
On a  $b^y = x \iff e^{y \ln(b)} = x \iff y \ln(b) = \ln(x) \iff y = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$  car  $b \neq 1$  donc  $\ln(b) \neq 0$ .

Ainsi, pour tout  $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ , on a  $\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$

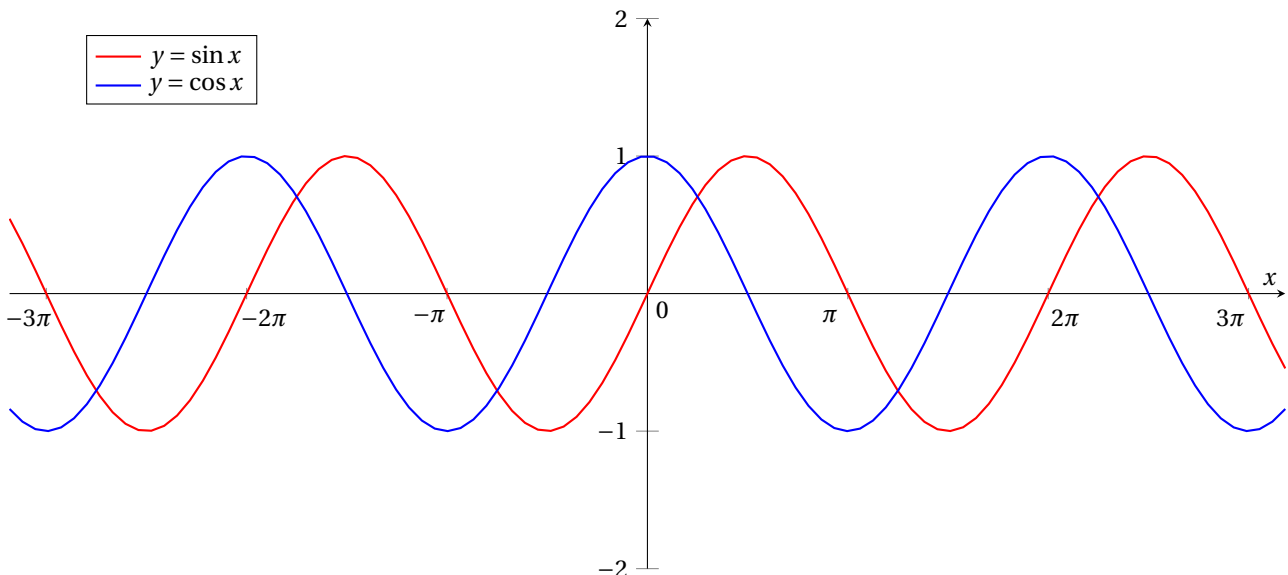
### Propriété 7.9

Quelle que soit la base  $b$ , le logarithme en base  $b$  vérifie les mêmes propriétés algébriques que le logarithme naturel.

## h. Fonctions trigonométriques



Sinus et cosinus ensemble :



## 3. Fonctions polynômes de degré $n$

### Définition 7.15

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On appelle **polynôme à coefficients réels de degré  $n$**  une expression  $P(X)$  de la forme

$$P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$



où  $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  avec  $a_n \neq 0$  et où  $X$  désigne une **indéterminée**. Si l'indéterminée est une variable réelle  $x$ , alors  $P$  définit une fonction réelle de la variable réelle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

Une telle fonction est une **fonction polynôme de degré  $n$** .

- Pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , le réel  $a_k$  s'appelle **coefficient de degré  $k$**
- le coefficient  $a_n$  s'appelle **coefficient dominant de  $P$** .
- Si  $a_n = 1$ , on dit que  $P$  est un polynôme **unitaire**.
- On appelle **polynôme nul** le polynôme dont tous les coefficients sont nuls.
- On note  $\mathbb{R}_n[X]$  l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ , et  $\mathbb{R}_n[x]$  l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à  $n$ .

### Remarque

On distingue un **polynôme** et une **fonction polynôme** car l'indéterminée  $X$  peut être remplacée par différents objets mathématiques.

Par abus de langage on appelle parfois polynôme une fonction polynôme.

### Définition 7.16

On note  $\deg(P) = n$  si  $P$  est un polynôme de degré  $n \in \mathbb{N}$ . Par convention, on pose  $\deg(P) = -\infty$  si  $P$  est le polynôme nul.

### Remarque

- La fonction associée au polynôme nul est la fonction nulle.
- Les fonctions polynômes de degré 0 sont les fonctions constantes.
- Les fonctions polynômes de degré 1 sont les fonctions affines.

### Propriété 7.10

Soit  $P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$  une fonction polynôme de degré  $n$  (avec  $a_n \neq 0$ ). Alors  $P$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$$

### Remarque

Si  $P$  est une fonction polynôme de degré  $n$ , alors  $P'$  est une fonction polynôme de degré  $n-1$ .

Si on note  $P^{(k)}$  la dérivée  $k$ -ième de  $P$ , alors  $P^{(k)}$  est un polynôme de degré  $n-k$ . En particulier,  $P^{(n)}$  est constant et  $P^{(k)} = 0$  dès que  $k > n$ .

→ Exercice de cours n° 4.

### Propriété 7.11

- Une fonction polynôme est la fonction nulle sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
- Deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si elles ont même degré et tous leurs coefficients sont égaux.

### Propriété 7.12

Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes à coefficients réels. Alors

- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$

- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$
- $\deg(\lambda P) = \deg(P)$  si  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .
- $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$

**Définition 7.17**

On appelle **racine** d'un polynôme  $P$  tout nombre  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $P(\lambda) = 0$ .

**Propriété 7.13**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $P \in \mathbb{R}_n[x]$ . Pour tout réel  $\lambda$ ,

$$\lambda \text{ est une racine de } P \iff \text{il existe } Q \in \mathbb{R}_{n-1}[x] \text{ tel que } P(x) = (x - \lambda)Q(x).$$

→ Exercice de cours n°5.

**Propriété 7.14**

Une fonction polynôme de degré  $n$  non nulle admet au plus  $n$  racines distinctes. Autrement dit, le seul polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$  qui admet  $n + 1$  racines distinctes est le polynôme nul.

→ Exercice de cours n°6.

## II. Limites

Dans toute cette section et sauf exception,  $D_f$  est une partie de  $\mathbb{R}$  et  $f$  est une fonction définie sur  $D_f$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Intuitivement, on dira que «  $f$  a pour limite  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$  lorsque  $x$  tend vers  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  » si les valeurs de  $f(x)$  « s'approchent » de  $\ell$  lorsque la valeur de  $x$  « s'approche » de  $a$ . Les définitions suivantes visent à donner un sens rigoureux au verbe « s'approcher ».

### 1. Limite en $+\infty$ , limite en $-\infty$

#### a. Limite infinie

**Définition 7.18**

On dit que  $f$  admet pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$  si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x > x_0 \Rightarrow f(x) > A$$

On note alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  ou  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ .

#### Remarque

Sans changer le sens de cette définition, on peut lui ajouter quelques mots qui ne sont pas nécessaires du point de vue logique mais aident à la compréhension :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  si quel que soit le réel  $A$ , **aussi grand soit-il**, il existe un réel  $x_0$  **qui peut dépendre de**  $A$  tel que pour tout réel  $x > x_0$  on a  $f(x) > A$ .

On définit de même les limites infinies en  $\pm\infty$  :

**Définition 7.19**

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x > x_0 \Rightarrow f(x) < A$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x < x_0 \Rightarrow f(x) > A$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x < x_0 \Rightarrow f(x) < A$

→ Exercice de cours n°7.

## b. Limite finie

### Définition 7.20

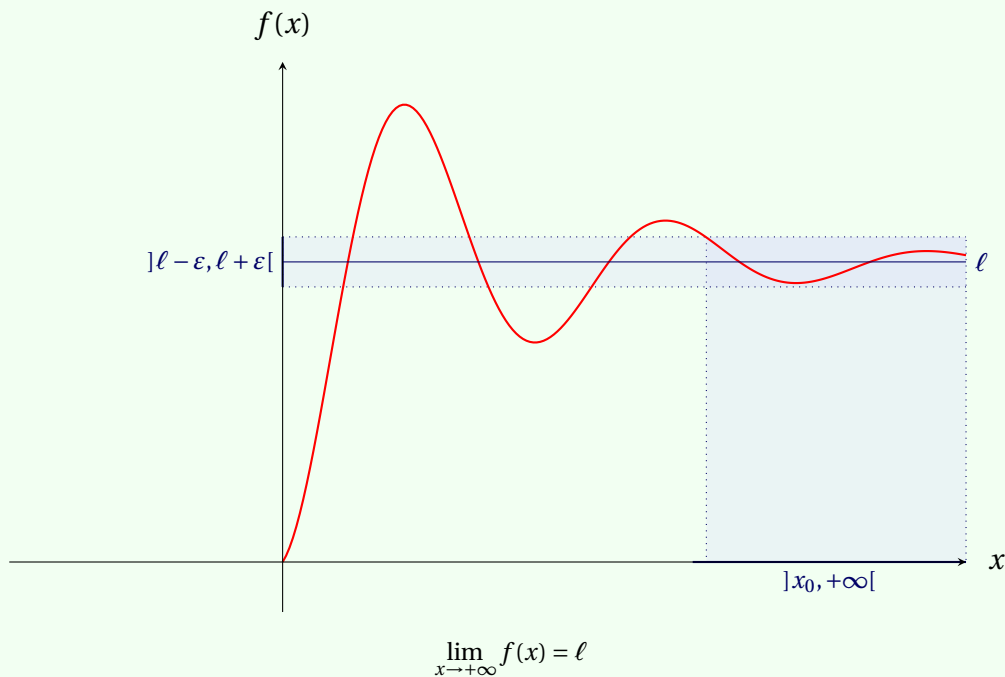
Soit  $\ell \in \mathbb{R}$ .

- On dit que  $f$  admet pour limite le réel  $\ell$  en  $+\infty$ , si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x > x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

- $f$  admet pour limite le réel  $\ell$  en  $-\infty$ , si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$



### Remarque

On rappelle que  $|f(x) - \ell| < \varepsilon \iff f(x) \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$

### Remarque

Sans changer le sens de cette définition, on peut la reformuler de la façon suivante :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  si pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, **aussi petit soit-il**, il existe un réel  $x_0$  **qui peut dépendre de  $\varepsilon$**  tel que pour tout  $x > x_0$ , la distance entre  $f(x)$  et  $\ell$  est inférieure à  $\varepsilon$ .

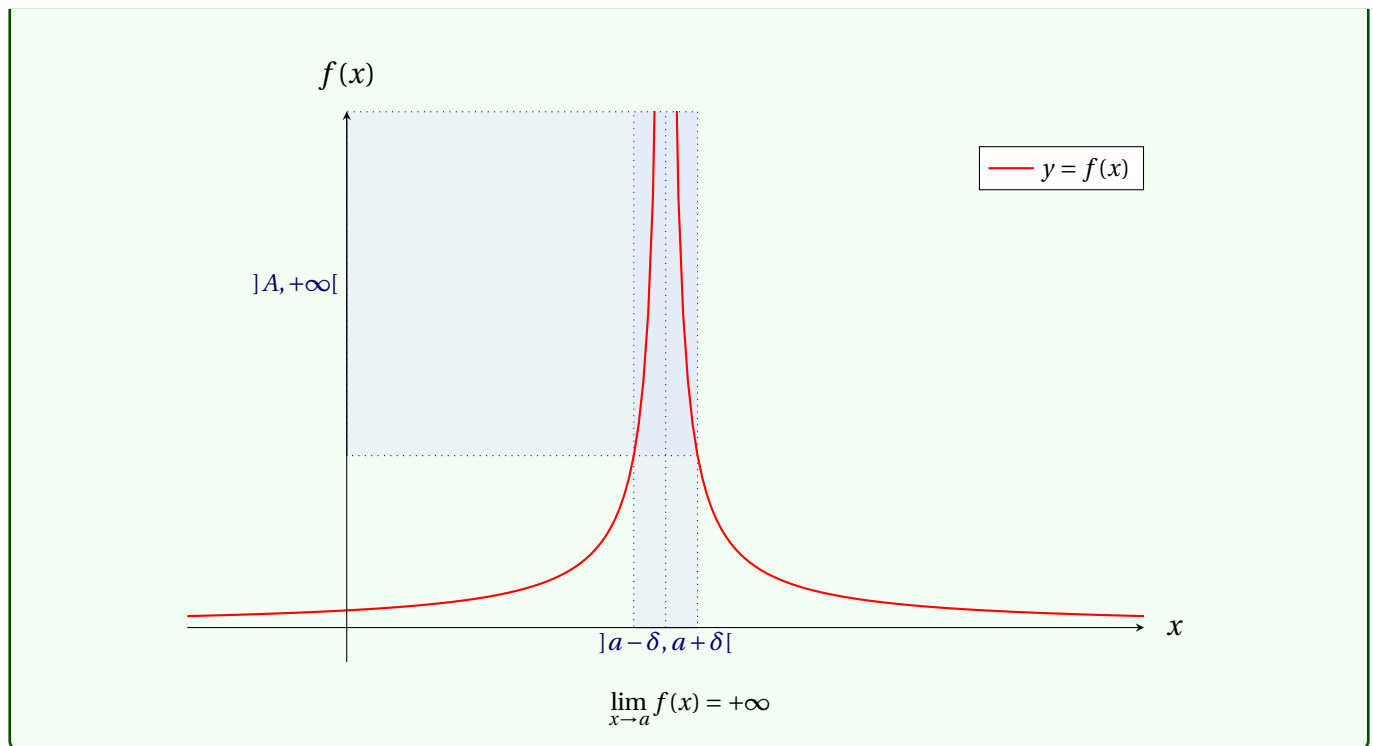
→ Exercice de cours n°8.

## 2. Limite en un réel $a$

### Définition 7.21

$f$  admet pour limite  $+\infty$  en  $a$ , si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f \setminus \{a\}, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > A$$



On peut définir de même les autres types de limite en un réel  $a$  :

### Définition 7.22

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f \setminus \{a\}, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < A$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f \setminus \{a\}, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

### Proposition 7.15 (Unicité de la limite)

Si  $f$  tend vers une limite  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$  lorsque  $x$  tend vers un réel  $a$ , ou  $x$  tend vers  $\pm\infty$ , alors  $\ell$  est unique.

## 3. Définition unifiée

On note  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$  la **droite réelle achevée**. On utilise cette notation **uniquement dans le cours** pour généraliser plus facilement des définitions et des propriétés sur les limites.

Les différentes définitions de limites vues dans les sections précédentes peuvent être synthétisé en une seule grâce à la notion de **voisinage**.

### Définition 7.23

Un **voisinage** d'un réel  $a$  est un intervalle de la forme  $]a - \delta, a + \delta[$  avec  $\delta > 0$ .

Un **voisinage** de  $+\infty$  (respectivement de  $-\infty$ ) est un intervalle de la forme  $]A; +\infty[$  (respectivement de la forme  $] -\infty, A[$  avec  $A \in \mathbb{R}$ ).

### Définition 7.24

Soient  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ .  $f$  admet pour limite  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  si pour tout voisinage  $V_\ell$  de  $\ell$ , il existe un voisinage  $V_a$  de  $a$  tel que  $f(V_a) \subset V_\ell$  (autrement dit tel que  $\forall x \in V_a, f(x) \in V_\ell$ ).

En adaptant la définition de voisinage selon la valeur réelle ou infinie de  $a$  et de  $\ell$ , on retrouve dans cette définition toutes les définitions de limites précédentes.

## 4. Limites et monotonie

### Proposition 7.16 (théorème de la limite monotone)

Soient  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction monotone.

- Si  $f$  est croissante et majorée sur  $]a, b[$ , alors  $f$  admet une limite finie en  $b$ .
- Si  $f$  est croissante et non majorée sur  $]a, b[$ , alors  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$
- Si  $f$  est décroissante et minorée sur  $]a, b[$ , alors  $f$  admet une limite finie en  $a$
- Si  $f$  est décroissante et non minorée sur  $]a, b[$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .

### Proposition 7.17

- Si  $f$  est croissante sur  $]a, b[$  et  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \ell$ , alors  $\forall x \in ]a, b[, f(x) \leq \ell$ .
- Si  $f$  est croissante sur  $]a, b[$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ , alors  $\forall x \in ]a, b[, \ell \leq f(x)$ .
- Si  $f$  est décroissante sur  $]a, b[$  et  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \ell$ , alors  $\forall x \in ]a, b[, f(x) \geq \ell$
- Si  $f$  est décroissante sur  $]a, b[$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ , alors  $\forall x \in ]a, b[, a \geq f(x)$ .

## 5. Théorèmes de comparaison

Dans toute cette section,  $f, g$  et  $h$  sont trois fonctions définies dans un voisinage de  $a$ , avec  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ .

### Proposition 7.18 (passage à la limite dans une inégalité)

Si  $f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x$  dans un voisinage de  $a$  et que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$ , alors  $\ell \leq \ell'$ .

### Remarque

Le passage à la limite dans une inégalité stricte donne une inégalité **large** :

$$\text{Si } V \text{ est un voisinage de } a, \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell' \\ \forall x \in V, f(x) < g(x) \end{array} \right. \implies \ell \leq \ell'$$

### Proposition 7.19

Supposons que  $f(x) \leq g(x)$  dans un voisinage de  $a$ .

- si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$
- si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

### Théorème 7.20 des gendarmes

Supposons que  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  dans un voisinage de  $a$ . Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$  avec  $\ell \in \mathbb{R}$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ .

## 6. Limite à gauche, limite à droite

### Définition 7.25

#### Limite à gauche

- On dit que  $f$  tend vers  $+\infty$  à gauche en  $a \in I$ , et on note  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ , si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, x \in ]a - \delta, a[ \implies f(x) > A$$

- On dit que  $f$  tend vers un réel  $\ell$  à gauche en  $a \in I$ , et on note  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$ , si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, x \in ]a - \delta, a[ \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

#### Limite à droite

- On dit que  $f$  tend vers  $+\infty$  à droite en  $a \in I$ , et on note  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ , si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, x \in ]a, a + \delta[ \Rightarrow f(x) > A$$

- On dit que  $f$  tend vers un réel  $\ell$  à droite en  $a \in I$ , et on note  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$ , si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, x \in ]a, a + \delta[ \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

### Remarque

On définit de même  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ .

### Exemple 7.5

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 3^+} \lfloor x \rfloor = 3$  et  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \lfloor x \rfloor = 2$ . En effet, pour tout  $x \in ]3 - \delta, 3[$  avec  $\delta$  suffisamment petit, on a  $\lfloor x \rfloor = 2$ .

### Proposition 7.21

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in I$ . On a

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

## 7. Asymptotes

### Définition 7.26

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in \mathbb{R}$ .

On dit que

- $f$  admet une asymptote verticale d'équation  $x = a$  en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$  (ou si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ )
- $f$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = \ell$  si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$

### Remarque

Graphiquement, une asymptote est une droite indiscernable de la courbe de  $f$  à l'infini.

Une fonction peut admettre au plus 2 asymptotes horizontales, mais une infinité d'asymptotes verticales

### Exemple 7.6

- La fonction inverse admet une asymptote verticale d'équation  $x = 0$  et une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$
- La fonction exponentielle admet une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$
- La fonction tangente admet une infinité d'asymptotes verticales, d'équation  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

## III. Calcul de limites

### 1. Opérations sur les limites

Dans cette section,  $a$  désigne un réel, ou  $+\infty$ , ou  $-\infty$ , et  $\ell$  désigne un réel fini.

#### a. Somme

**Proposition 7.22**

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \dots$	$\ell$	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \dots$	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \dots$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

**b. Produit****Proposition 7.23**

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \dots$	$\ell$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \dots$	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times g(x) = \dots$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

**c. Quotient****Proposition 7.24**Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$  :

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \dots$	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \dots$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$
alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	FI	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  :

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \dots$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \dots$	$0^+$	$0^-$	$0^+$	$0^-$	$0^+$	$0^-$	$0^+$	$0^-$	0
alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

**Remarque**

On note  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell^+$  (respectivement  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell^-$ ) si  $g(x)$  tend vers 0 en gardant des valeurs supérieures ou égales à  $\ell$  (respectivement inférieures ou égales à  $\ell$ ).  
Autrement dit :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell^+ \iff \forall \varepsilon, \exists \delta > 0, |x - a| < \delta \Rightarrow g(x) \in [\ell, \ell + \varepsilon[$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell^- \iff \forall \varepsilon, \exists \delta > 0, |x - a| < \delta \Rightarrow g(x) \in ]\ell - \varepsilon, \ell]$$

Ainsi, la notation  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0^+$  si  $g(x)$  tend vers 0 en gardant des valeurs positive

$$\forall \varepsilon, \exists \delta > 0, |x - a| < \delta \Rightarrow 0 \leq g(x) < \varepsilon$$

(de même pour  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0^-$ )

## 2. Composition de limites

### Proposition 7.25

Soient  $a, b, c$  trois réels, ou  $\pm\infty$ , et soient  $f$  et  $g$  deux fonctions telles que  $g \circ f$  soit définie dans un voisinage de  $a$ . Supposons que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et que  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = c$

### Exemple 7.7

Calculer la limite de  $x \mapsto e^{-1/x}$  en  $0^+$  et en  $0^-$ .

## 3. Croissances comparée

### a. Négligeabilité

#### Définition 7.27

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ .

On dit que  $f$  est négligeable devant  $g$  au voisinage de  $a$ , et on note  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ , s'il existe une fonction  $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$  et  $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$

Si  $g$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ , cette définition est équivalente à  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .

→ Exercice de cours n°9.

Les règles sont les mêmes que pour les suites :

#### Propriété 7.26

Soit  $a \in \mathbb{R}$ , ou  $a = \pm\infty$ , et  $f, g$  et  $h$  trois fonctions définies au voisinage de  $a$ .

- Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$  et  $g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$ , alors  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$
- Si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ , alors  $f(x)h(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)h(x))$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  si et seulement si  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(1)$

Par composition de limites, on obtient la proposition suivante :

#### Proposition 7.27

Supposons que  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$

- Si  $\lim_{x \rightarrow b} h(x) = a$ , alors  $f(h(x)) \underset{x \rightarrow b}{=} o(g(h(x)))$ .
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ , alors  $f(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(g(u_n))$

On peut donc poser des changements de variables dans les relations de négligeabilité lorsque les limites correspondent.

### b. Comparaisons usuelles

#### Proposition 7.28 (croissances comparées)

Soient  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  deux réels. On a les limites suivantes :



Limite	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\beta e^{\alpha x} = 0$ si $\beta \in \mathbb{N}^*$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta  \ln x ^\alpha = 0$
Notation de Landau	$x^\beta = o(e^{\alpha x})$	$e^{\alpha x} = o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$	$(\ln x)^\alpha = o(x^\beta)$	$ \ln x ^\alpha = o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$

**Remarque**

En particulier,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$   
 et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$

→ Exercice de cours n° 10.

**c. Équivalence****Définition 7.28**

Soit  $a \in \mathbb{R}$  ou  $a = \pm\infty$ . Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies dans un voisinage  $V$  de  $a$ . On dit que  $f$  est **équivalente** à  $g$  au voisinage de  $a$  s'il existe une fonction  $\alpha$  vérifiant  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 1$  telle que  $\forall x \in V$ ,  $f(x) = \alpha(x)g(x)$ .

On note  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ .

Si  $g(x)$  ne s'annule pas au voisinage de  $a$ , cette définition est équivalente à  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Les propriétés de l'équivalence sont les mêmes que pour les suites :

**Propriété 7.29**

$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$  si et seulement si  $f(x) - g(x) = o(g(x))$ .

**Propriété 7.30 (Opérations sur les équivalents)**

Soit  $a \in \mathbb{R}$  ou  $a = \pm\infty$  et soient  $f, g, h$  et  $k$  quatre fonctions définies au voisinage de  $a$ .

- Si  $f(x) \sim g(x)$ , alors  $g(x) \sim f(x)$
- Si  $f(x) \sim g(x)$  et que  $g(x) \sim h(x)$ , alors  $f(x) \sim h(x)$
- Si  $\ell \in \mathbb{R}^*$ , alors  $f(x) \sim \ell \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$
- Si  $f(x) \sim g(x)$  et  $h(x) \sim k(x)$ 
  - ▷  $f(x)h(x) \sim g(x)k(x)$
  - ▷  $\frac{f(x)}{h(x)} \sim \frac{g(x)}{k(x)}$  si  $h(x)$  et  $k(x)$  ne s'annulent pas
- Si  $f$  et  $g$  sont strictement positives et telles que  $f(x) \sim g(x)$  et si  $a \in \mathbb{R}$ , alors  $f(x)^a \sim g(x)^a$ . En particulier  $\sqrt{f(x)} \sim \sqrt{g(x)}$ .

**Remarque**

**Attention :** On n'ajoute pas des équivalences.

En général  $f(x) \sim g(x) \not\Rightarrow f(x) + k(x) \sim g(x) + k(x)$

Par exemple :  $x^2 + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$  et  $1 - x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x^2$  mais  $x^2 + 1 + 1 - x^2 \sim 2 \not\sim 0$ .

Par composition de limites, on a immédiatement le résultat suivant :

**Proposition 7.31**

Soient  $(a, b) \in (\overline{\mathbb{R}})^2$ . Si  $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$  et que  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ , alors  $f(h(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(h(x))$ .

**Exemple 7.8**

On sait que  $x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  donc  $\ln(x)^2 + \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)^2$ .

**Remarque**

**Attention :** On ne compose pas des équivalences à gauche. En général,  $f(x) \sim g(x) \nRightarrow h \circ f(x) \sim h \circ g(x)$

Par exemple  $x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$  mais  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1}}{e^x} = e^1 \neq 1$  donc  $e^{x+1} \not\sim e^x$ .

→ Exercice de cours n° 11.

**d. Équivalents usuels****Proposition 7.32**

Soit  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un polynôme.

- Lorsque  $x \rightarrow +\infty$  ou  $x \rightarrow -\infty$ ,  $P(x)$  est équivalent à son terme de plus haut degré.
- Lorsque  $x \rightarrow 0$ ,  $P(x)$  est équivalent à son terme de plus petit degré non nul.

**Proposition 7.33**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable en  $a \in I$ . Alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$$

On en déduit les égalités suivantes

**Propriété 7.34 (développements limités à l'ordre 1)**

Lorsque  $x \rightarrow 0$  on a :

- |                            |  |
|----------------------------|--|
| • $\sin x = x + o(x)$      | • $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$ |
| • $\cos x = 1 + o(x)$      | • $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$   |
| • $\exp(x) = 1 + x + o(x)$ | • $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$         |
| • $\ln(1+x) = x + o(x)$    |  |

→ Exercice de cours n° 12.

On peut exprimer ces développements limités sous forme d'équivalents :

**Propriété 7.35 (équivalents usuels)**

Lorsque  $x \rightarrow 0$  on a :

- |  |  |
|--|--|
| • $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$      | • $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}x$ |
| • $\cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$      | • $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$   |
| • $\exp(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ | • $\frac{1}{1-x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$         |
| • $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$    |  |

→ Exercice de cours n° 13.

**IV. Continuité**

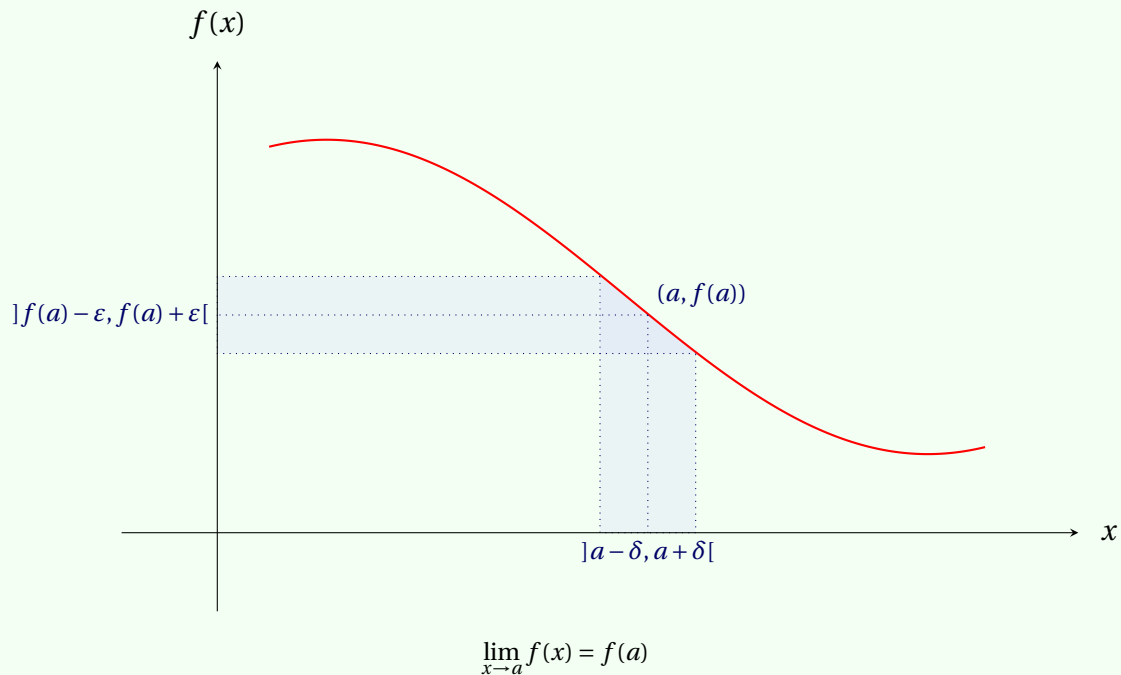
Dans toute cette section  $I$  désigne un intervalle réel.

## 1. Définition

### Définition 7.29

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur  $I$  et soit  $a \in I$ . On dit que  $f$  est **continue en  $a$**  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , c'est à dire si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$



### Définition 7.30

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur  $I$ . On dit que  $f$  est **continue sur  $I$**  si  $f$  est continue en  $a$  quel que soit  $a \in I$ .

### Propriété 7.36 (admise)

La plupart des fonctions de référence sont continues sur tout intervalle où elles sont définies :

- Toute fonction polynôme est continue sur  $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \sin x$  est continue sur  $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \cos x$  est continue sur  $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \tan x$  est continue sur  $] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi [$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .
- $x \mapsto e^x$  est continue sur  $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \ln x$  est continue sur  $]0, +\infty[$
- $x \mapsto \frac{1}{x}$  n'est pas continue sur  $\mathbb{R}^*$  car  $\mathbb{R}^*$  n'est pas un intervalle, mais elle est continue sur  $] -\infty, 0 [$  et continue sur  $]0, +\infty [$ .

### Remarque

La fonction partie entière n'est pas continue sur  $\mathbb{R}$

→ Exercice de cours n° 14.

### Propriété 7.37 (Opérations)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $I$ . Alors

- $f + g$  est continue sur  $I$
- $f \times g$  est continue sur  $I$

- Si  $\forall x \in I, g(x) \neq 0$ , alors  $\frac{f}{g}$  est continue sur  $I$ .

### Propriété 7.38 (Composée de fonctions continues)

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f(I) \subset J$ . Alors  $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $I$ .

## 2. Prolongement par continuité

### Définition 7.31

Soit  $I$  un intervalle et  $a \in I$  et soit  $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On dit que  $f$  est **prolongeable par continuité en**  $a$  s'il existe un prolongement de  $f$  à  $I$  continu sur  $I$ , c'est à dire une fonction  $\hat{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $I$  et telle que  $\hat{f}|_{I \setminus \{a\}} = f$ .

### Proposition 7.39

Soit  $I$  un intervalle, soit  $a \in I$  et soit  $f$  une fonction continue définie sur  $I \setminus \{a\}$ .  $f$  est prolongeable par continuité en  $a$  si et seulement si  $f$  admet une limite finie en  $a$ .

→ Exercice de cours n° 15.

### Proposition 7.40

Si  $a$  n'est pas une borne de  $I$ , alors  $f$  est prolongeable par continuité en  $a$  si et seulement si  $f$  admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite en  $a$  et que  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .

→ Exercice de cours n° 16.

## 3. Applications

### a. Continuité et suites

### Proposition 7.41

Si  $(u_n)$  converge vers une limite finie  $\ell$ , et que  $f$  est une fonction continue en  $\ell$ , alors  $f(u_n)$  converge aussi et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$ .

→ Exercice de cours n° 17.

### Exemple 7.9

Un contre exemple avec une fonction non continue :  $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ .

Le fait que  $(u_n)$  converge n'entraîne pas nécessairement que  $(\lfloor u_n \rfloor)$  converge. Exemple avec la suite  $1 + \frac{(-1)^n}{n}$  qui converge vers 1, mais pour  $n \geq 2$  on a :

$$\triangleright \text{ Si } n \text{ est pair } \left\lfloor 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\rfloor = \left\lfloor 1 + \frac{1}{n} \right\rfloor = 1$$

$$\triangleright \text{ Si } n \text{ est impair } \left\lfloor 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\rfloor = \left\lfloor 1 - \frac{1}{n} \right\rfloor = 0$$

donc la suite  $\left( \left\lfloor 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\rfloor \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  diverge.

### Proposition 7.42

Plus généralement, si  $(a, b) \in (\mathbb{R})^2$  et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = b$ .

## b. Continuité et monotonie

### Propriété 7.43

Soient  $a < b$  deux réels. Alors

- Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et monotone sur  $]a, b[$  alors  $f$  est monotone sur  $[a, b]$ .
- Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et strictement monotone sur  $]a, b[$  alors  $f$  est strictement monotone sur  $[a, b]$

## c. Théorème des valeurs intermédiaire

### Théorème 7.44 (des valeurs intermédiaires)

Soient  $a < b$  deux réels et soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction **continue**. Soit  $\alpha \in [f(a), f(b)]$  (ou  $\alpha \in [f(b), f(a)]$  le cas échéant). Alors il existe un réel  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \alpha$ .

### Remarque

Le théorème est encore vrai si  $a = -\infty$  ou  $b = +\infty$  (ou les deux). On remplace alors  $f(a)$  par  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $f(b)$  par  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

→ Exercice de cours n° 18.

### Remarque

Les équations à une inconnue  $x$  peuvent souvent se ramener à une équation de la forme  $g(x) = 0$ . Lorsqu'on cherche à démontrer l'existence d'un antécédent de 0 par la fonction  $g$ , le théorème des valeurs intermédiaires peut se formuler de la façon suivante :

Si  $g$  est continue et que  $g(a)g(b) \leq 0$ , alors il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $g(c) = 0$

En effet,  $g(a)g(b) \leq 0$  signifie que  $g(a)$  et  $g(b)$  sont de signes contraires donc que 0 est compris entre  $g(a)$  et  $g(b)$ , le TVI s'applique donc.

→ Exercice de cours n° 19.

### Théorème 7.45 (Corollaire du TVI)

Soient  $a < b$  deux réels et soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et strictement monotone sur  $[a, b]$ . Soit  $\alpha \in [f(a), f(b)]$  (ou  $\alpha \in [f(b), f(a)]$  le cas échéant). Alors il existe un **unique** réel  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \alpha$ .

### Remarque

Le corollaire est encore vrai si  $a = -\infty$  ou  $b = +\infty$  (ou les deux). On remplace alors  $f(a)$  par  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $f(b)$  par  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

→ Exercice de cours n° 20.

### Proposition 7.46 (conséquence du TVI)

Si  $I$  est un intervalle et que  $f$  est continue sur  $I$ , alors  $f(I)$  est un intervalle.

## d. Théorème des valeurs atteintes

### Définition 7.32

On appelle **intervalle fermé borné** ou **segment** tout intervalle qui contient ses bornes, de la forme  $[a, b]$ .

### Théorème 7.47 (des valeurs atteintes, admis)

Si  $I$  est un intervalle fermé borné, alors  $f(I)$  est un intervalle fermé borné.

En particulier, si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$ , alors  $f$  est bornée sur  $[a, b]$  et atteint ses bornes : elle admet un minimum et un maximum sur  $[a, b]$ .

## e. Théorème de la bijection

Une autre formulation du corollaire du TVI est le **théorème de la bijection**

**Théorème 7.48 de la bijection**

Soient  $a < b$  deux réels et soit  $I = [a; b]$ . Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur  $I$ . Alors  $J = f(I)$  est un intervalle dont les bornes sont  $f(a)$  et  $f(b)$  et  $f$  réalise une bijection de  $I$  vers  $J$ . De plus, sa fonction réciproque  $f^{-1}$  est continue et strictement monotone sur  $J$ , de même sens de variation que  $f$ .

**Remarque**

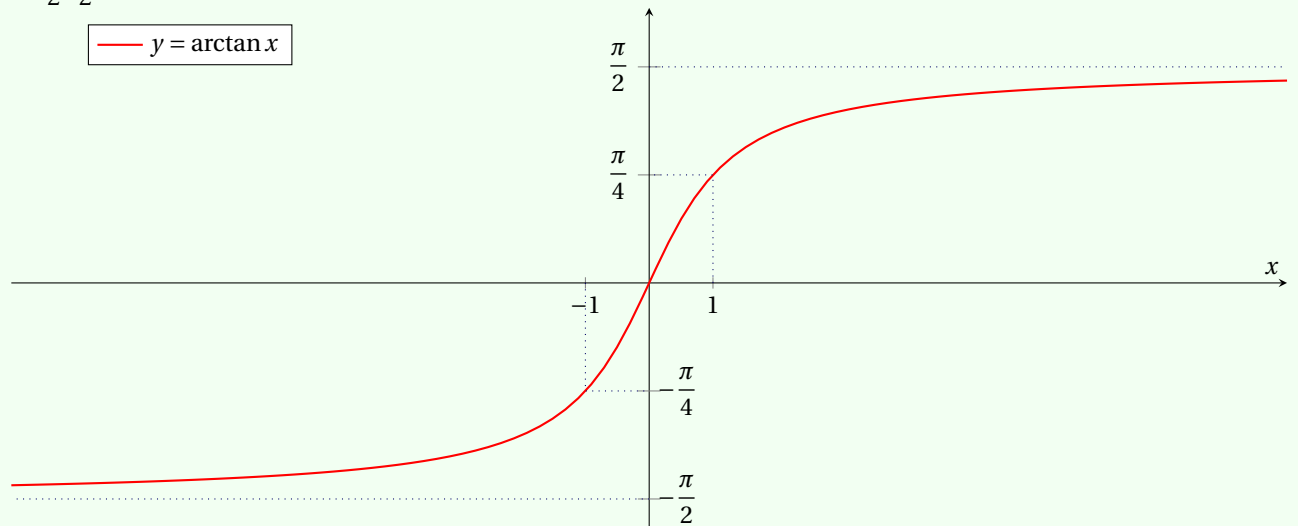
Le théorème de la bijection est encore vrai si  $a = -\infty$  ou  $b = +\infty$ , on remplace alors  $f(a)$  et  $f(b)$  par  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  le cas échéant.

Le théorème est aussi vrai si l'une des bornes est ouverte, l'image d'une borne ouverte est alors ouverte et l'image d'une borne fermée est fermée.

→ Exercice de cours n° 21.

**f. Fonction arctangente****Définition 7.33**

La fonction  $x \mapsto \tan x$  est continue et strictement croissante sur  $I = ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ . De plus,  $\tan(I) = \mathbb{R}$ . En vertu du théorème de la bijection, il existe donc une fonction notée  $\arctan$  définie et continue sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$ .



On retient que  $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ ,  $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ .

→ Exercice de cours n° 22.

**Propriété 7.49**

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles et  $f$  une bijection de  $I$  vers  $J$  dérivable sur  $I$ . Si  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$  et on a :

$$\forall x \in J, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

**Propriété 7.50**

La fonction  $\arctan$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

## Exercices de cours

### Exercice 1

Montrer les deux inégalités suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq x + 1 \quad ; \quad \forall x > 0, \quad \ln(1 + x) \leq x$$

### Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes :

1.  $\frac{e^x + e^{2x}}{1 + e^{-x}}$

2.  $\frac{2\ln(2) + \ln(9)}{\ln(6)}$

3.  $\ln(x^2 - 4) - \ln(x + 2)$

4.  $\ln\left(e^{x^2} \times (e^{2-2x})^2\right) e^{-\ln(x-2)}$

5.  $\exp\left(\sum_{k=1}^n \ln(k^2 + k) - \ln(k + 1)\right)$

6.  $x + \ln(1 + e^{-x}) + \ln(1 - e^x)$

### Exercice 3

Résoudre les équations et inéquations d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  suivantes :

a)  $e^{2x} + 2e^x = e^x + 6$

b)  $\ln(2) + \ln(x - 1) + \ln(x - 3) = \ln(4 - 4x)$

c)  $2\ln(x)^2 - \ln(x) - 1 = 0$

### Exercice 4

Montrer qu'il n'existe aucun polynôme  $P$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = P(x)$ .

### Exercice 5

Factoriser les polynômes suivants :

a)  $f(X) = X^3 + X^2 - 2$

b)  $g(X) = X^3 + X^2 + X + 1$

c)  $h(X) = X^3 - 2X^2 + X - 2$

### Exercice 6

Déterminer l'ensemble des polynômes à coefficients réels  $P$  tels que  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x + 1) = P(x)$ .

### Exercice 7

Montrer en utilisant uniquement la définition que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ .

### Exercice 8

Montrer en utilisant uniquement la définition que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ .

### Exercice 9

Montrer que  $x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^3)$  et  $x^3 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$ .

### Exercice 10

Déterminer les limites des fonctions suivantes lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$

1.  $f(x) = (\ln x)^3 e^{-x}$

3.  $h(x) = \ln(x) \times \frac{x+1}{e^x}$

2.  $g(x) = e^{4x} - x^2 e^{3x} \ln(x)$

4.  $k(x) = \frac{\ln(\ln(x))}{\sqrt{\ln(x)}}$

---

**Exercice 11**

---

Démontrer les équivalents suivants :

1.  $\sqrt{x+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{x}$

3.  $e^x + x^3 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$

5.  $\ln x + 2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln x$

2.  $\ln(x+x^2) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2\ln(x)$

4.  $e^x + x^3 \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} x^3$

6.  $\ln x + \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$

---

**Exercice 12**

---

Utiliser des développements limités à l'ordre 1 pour calculer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{3+x}-1}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{\sin(x)\sqrt{1-x}}$

---

**Exercice 13**

---

Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes au voisinage de  $a$  :

1.  $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}, a = +\infty$

3.  $h(x) = \frac{\ln(e^{1/x} + 1)}{e^{\ln(x)+x} - x}, a = 0$

2.  $g(x) = \ln(x^2 + x) - \ln(x^2), a = +\infty$

4.  $k(x) = 1 - \cos^2(\sqrt{x}), a = 0$

---

**Exercice 14**

---

Étudier la continuité des deux fonctions suivantes :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 0 \\ \cos(x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad ; \quad x \longmapsto \begin{cases} 3-x^2 & \text{si } x < -2 \\ x+1 & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

---

**Exercice 15**

---

On considère la fonction définie par  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  définie sur  $\mathbb{R}^*$ . Montrer que  $f$  peut se prolonger par continuité en une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ .

---

**Exercice 16**

---

On considère la fonction  $f$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{1+\ln(x)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Montrer que  $f$  se prolonge par continuité en une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ .

---

**Exercice 17**

---

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$  et  $u_0 = 3$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

---

**Exercice 18**

---

Soit  $f: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = xe^{1-x}$ .

Montrer qu'il existe au moins deux réels  $x \in \mathbb{R}$  tels que  $f(x) = \frac{1}{2}$ .



---

**Exercice 19**

---

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$ . Montrer qu'il existe un réel  $c \in [0, 1]$  tel que  $f(c) = f(1 - c)$ .

---

**Exercice 20**

---

Montrer qu'il existe un unique réel  $x_0 \in ]0, 1[$  tel que  $\sin\left(\frac{\pi x_0}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

---

**Exercice 21**

---

Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \frac{2 - 6e^x}{1 + 2e^x}$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers un intervalle que l'on déterminera.

---

**Exercice 22**

---

Déterminer la valeur de  $\arctan(-\sqrt{3})$  et  $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$