

★ ★

## Exercice 1

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ \ln(x) + \ln(y) = 0 \end{cases}$$

★

## Exercice 2

On considère la fonction  $f : x \mapsto x e^{-x}$  définie sur  $[0, +\infty[$ .

- 1) Étudier les variations de  $f$  sur  $[0, +\infty[$
- 2) Déterminer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$
- 3) Calculer l'équation de la tangente à la courbe de  $f$  en  $x = 0$  et en  $x = 1$   
*On rappelle que lorsque  $f$  est une fonction dérivable, l'équation de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse  $a$  est*

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

- 4) Représenter la courbe représentative de  $f$  dans un repère, en faisant apparaître les tangentes aux points d'abscisse 0 et 1.

★

## Exercice 3

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$1) f : x \mapsto \frac{3x+1}{2x+5}$$

$$3) f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$2) f : x \mapsto \ln\left(\frac{x^2-3x+2}{x+7}\right)$$

$$4) f : x \mapsto \tan(\exp(x^2))$$

★

## Exercice 4

Pour chacune des fonctions suivantes

- Déterminer l'ensemble de définition
- Étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition et préciser les équations des asymptotes éventuelles.
- Étudier les variations

$$1) f_1(x) = (x+2)e^{-x}$$

$$4) f_4(x) = \ln(2 + \sin x)$$

$$2) f_2(x) = \ln(x+1) - x^2$$

$$5) f_5(x) = \ln(\cos^2 x)$$

$$3) f_3(x) = \sqrt{e^x - 1} - x$$

$$6) f_6(x) = \sqrt{\tan x}$$

★

## Exercice 5

Étudier l'existence d'asymptotes horizontales pour les fonctions suivantes :

$$1) f_1(x) = \frac{e^x + 2x}{e^x - x}$$

$$4) f_4(x) = \frac{x^2 + x + e^{2x}}{x^2 - e^x}$$

$$2) f_2(x) = \frac{\ln x + x^2}{1 - \ln x}$$

$$5) f_5 = \frac{(\ln x)^{100}}{\sqrt{x}}$$

$$3) f_3(x) = \frac{x^2 + x + 1}{1 - 3x}$$

$$6) f_6 = \frac{1 + \sqrt{e^x}}{1 + e\sqrt{x}}$$

★

## Exercice 6

Soit  $0 < a < b$  deux réels fixés. On considère la fonction  $f$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par

$$f(x) = \sqrt{x+b} - \sqrt{x+a}$$

- 1) Montrer que  $f(x) = \frac{b-a}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}$
- 2) En déduire la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

★ ★

**Exercice 7**

Soit  $n, m \in \mathbb{N}^*$  deux entiers et soit  $f$  la fonction définie par

$$\forall x \in ]1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$$

- 1) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = n$  et  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x - 1} = m$
- 2) En déduire la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers 1.

★

**Exercice 8**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, 1[$  par

$$\forall x \in [0, 1[, \quad f(x) = \frac{e^{-8x}}{1-x}$$

Dresser le tableau de variations complet (avec limites) de la fonction  $f$ .  
Représenter la courbe représentative de  $f$  dans un repère.

★ ★

**Exercice 9**

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$
- 2) Étudier les asymptotes de  $f$  et représenter sa courbe représentative dans un repère.

★ ★

**Exercice 10**

On considère la fonction  $f : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ .

- 1) Déterminer le domaine de définition de  $f$
- 2) Montrer que  $f$  peut se prolonger par continuité en une fonction  $\hat{f}$  continue sur  $\mathbb{R}$ .

★ ★

**Exercice 11**

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (x-1) \ln(|x-1|)$$

Montrer que  $f$  peut se prolonger par continuité en une fonction  $\hat{f}$  continue sur  $\mathbb{R}$ .

★

**Exercice 12**

On considère la fonction  $f : x \mapsto x + \ln x$

- 1) Montrer qu'il existe un unique réel  $\alpha \in ]0, +\infty[$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .
- 2) Donner un encadrement d'amplitude 1 de  $\alpha$

★

## Exercice 13

1)  $f$  est la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x e^x - 1$$

- a) Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$  et étudier ses variations.
- b) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $[0; +\infty[$
- c) Déterminer le signe de  $f(x)$  suivant la valeur de  $x$

2)  $g$  est la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$g(x) = (x - 1)(e^x - 1)$$

- a) Déterminer la limite de la fonction  $g$  en  $+\infty$  et étudier le sens de variation de  $g$
- b) Montrer que  $g(\alpha) = -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$

★

## Exercice 14

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une fonction continue. Montrer que  $f$  admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe un réel  $x \in [0, 1]$  tel que  $f(x) = x$ .

★

## Exercice 15

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{1 + x^2}$ .

- 1) Montrer que l'équation  $f(x) = \frac{1}{2}$  admet exactement deux solutions dans  $\mathbb{R}$ . On note  $x_1$  et  $x_2$  ces solutions.
- 2) Montrer que  $x_1 = -x_2$  et que  $|x_1| < 1$ .

★

## Exercice 16

Soit  $k \in \mathbb{R}$ . Déterminer en fonction de la valeur de  $k$  le nombre de solutions de l'équation  $x^4 - x^3 = k$ .

★ ★

## Exercice 17

Montrer que l'équation  $\cos(x) = e^{-x^2}$  admet une infinité de solutions.

★ ★

## Exercice 18

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $f_n$  la fonction définie sur  $[0, 1]$  par  $f_n(x) = x^n + x - 1$

- 1) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique réel  $x_n \in ]0, 1[$  tel que  $f_n(x_n) = 0$ .
- 2) Montrer que la suite  $(x_n)$  est strictement croissante.
- 3) En déduire que  $(x_n)$  converge vers une limite  $\ell \leq 1$ .
- 4) On suppose que  $\ell < 1$ . Étudier la limite de  $(f_n(x_n))$  et conclure.

★ ★

## Exercice 19

On admet dans cet exercice que  $0,69 < \ln 2 < 0,7$ .

## Partie 1

On considère l'application  $g : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g(x) = x^2 + \ln x$

- 1) Montrer que  $g$  est continue et strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  et déterminer les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$
- 2) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution sur  $]0; +\infty[$ . On note  $\alpha$  l'unique solution de cette équation.
- 3) Montrer que  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ .

## Partie 2

On note  $I = [\frac{1}{2}; 1]$  et on considère l'application  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\ln x$

- 4)
  - a) Montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $I$
  - b) Montrer que  $\frac{1}{2} < f(\frac{1}{2}) < f(1) < 1$
  - c) En déduire que  $\forall x \in I, f(x) \in I$
- 5) On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ 
  - a) Calculer  $u_1$
  - b) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$
  - c) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
  - d) Montrer que la suite  $(u_n)$  converge et que sa limite est  $\alpha$ .

★ ★

**Exercice 20**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue qui admet une limite finie en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . Montrer que  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

★

**Exercice 21**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1 - e^{3x}}{1 + e^{3x}}$ .

- 1) Déterminer  $f(\mathbb{R})$
- 2) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $f(\mathbb{R})$ .
- 3) Déterminer une expression de  $f^{-1}(x)$  en fonction de  $x$ .

★

**Exercice 22**

On considère les fonctions  $\text{ch}$  et  $\text{sh}$  (cosinus et sinus hyperboliques) définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- 1) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$
- 2) Étudier la parité de  $\text{ch}$  et  $\text{sh}$
- 3) Montrer que  $\forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ch}(a+b) = \text{ch}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(a)\text{sh}(b)$  et  $\text{sh}(a+b) = \text{ch}(a)\text{sh}(b) + \text{sh}(a)\text{ch}(b)$ .
- 4) Justifier que  $\text{ch}$  et  $\text{sh}$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  et montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}'(x) = \text{sh}(x)$  et  $\text{sh}'(x) = \text{ch}(x)$ .
- 5) Montrer que  $x \mapsto \text{sh}(x)$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$
- 6) Étudier les limites de  $\text{sh}(x)$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$  et en déduire que  $\text{sh}$  admet une bijection réciproque.
- 7) Déterminer une formule explicite de  $\text{sh}^{-1}(x)$ .
- 8) Justifier que  $\text{sh}^{-1}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et montrer que sa dérivée est  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ .

★

**Exercice 23**

Soit  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$  une fonction polynôme de degré  $n \geq 1$ .

Montrer que  $P$  est une fonction paire si et seulement si tous ses coefficients de degrés impairs sont nuls.

Montrer que  $P$  est une fonction impaire si et seulement si tous ses coefficients de degrés pairs sont nuls.

★ ★

**Exercice 24**

Soit  $P$  un polynôme de degré  $n \geq 1$ .

- 1) Montrer que si  $n$  est impair, alors  $P$  admet au moins une racine réelle.
- 2) Montrer que si  $n$  pair, alors  $P$  admet un extremum global.

---

★ ★ ★  
**Exercice 25**

---

Dans cet exercice, on s'intéresse au problème suivant : étant donné  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  une famille de  $n$  réels distincts, et  $b_1, b_2, \dots, b_n$  une famille de  $n$  réels quelconques, on souhaite déterminer un polynôme  $P$  de degré  $n-1$  tel que  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $P(a_k) = b_k$  (c'est un problème **d'interpolation**).

- 1) Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose  $L_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{X - a_j}{a_k - a_j}$  appelé  $k$ -ième **polynôme interpolateur de Lagrange**. Montrer

que  $\forall (k, i) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  on a

$$L_k(a_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 2) Soit  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . Montrer que  $P = \sum_{k=1}^n P(a_k) L_k$ .  
3) En déduire un polynôme qui répond au problème posé.

---

★ ★  
**Exercice 26**

---

Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$