Programme de khôlle de maths n° 4

Semaine du 10 Octobre

Cours

Chapitre 3 : Ensembles et applications

Chapitre 4 : Raisonnements par récurrence

- Ensembles, inclusions, parties d'un ensemble
- Union, intersection.
- Applications, injection, surjections, bijections
- Dénombrement : cardinal de $\mathcal{P}(E)$, nombre de k-uplets, de k-arrangements, de k-combinaisons d'un ensemble fini de cardinal n. Notations A_n^k et $C_n^k = \binom{n}{k}$.
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
- Utilisation du symbole $\sum$ et du symbole $\prod$, changement d'indice, sommes télescopiques
- Récurrence simple, récurrence double, récurrence forte

Questions de cours et exercice

- **Questions de cours**
  - Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective et que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
  - Soit $f : E \to F$ une application, et A,B deux parties de E. Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
  - Montrer que $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - Démonstration de $\mathcal{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ et de $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
- **Exercices vus en classe**
  - Irrationalité de $\sqrt{2}$ (raisonnement par l'absurde)
  - a est un réel. Si $\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon$ alors $a = 0$ (raisonnement par contraposée).
  - Montrer que pour tout entier n, $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3 (raisonnement par disjonction de cas).
  - Résolution d'équation de type $\sqrt{4x+1} = x$ (raisonnement par analyse-synthèse)
  - Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire (raisonnement par analyse-synthèse)
  - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto \begin{cases} n-1 & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$. Alors $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ donc bijective mais f pas surjective et g pas injectives
  - Différence symétrique $A \Delta B$
  - Exercices de dénombrement classiques : nombre de choix au loto, au tiercé, nombre de façon de choisir des délégués/des suppléants en respectant la parité ou non, nombre de mains de poker contenant un full
  - $B \subset C \iff \begin{cases} A \cap B \subset A \cap C \\ A \cup B \subset A \cup C \end{cases}$
  - Montrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ et que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$ et donner un exemple de cas où l'inclusion est stricte.

- $u_0 = 2$, $u_1 = 12$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 12u_{n+1} - 35u_n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5^n + 7^n$ (par récurrence double, sans utiliser la propriété sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2)

- $F_0 = 0$,$F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n < \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$.

- $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que $\forall n \geq 1, u_n = 2^{n-1}$