- 1) Soient a_1,a_2,\ldots,a_n des réels positifs. Montrer que si $\sum_{k=1}^n a_k=0$ alors $\forall k\in [\![1,n]\!],\,a_k=0$
- 2) Soient $x_1, x_2, \dots x_n$ des réels tels que $\sum_{k=1}^n x_k = n$ et $\sum_{k=1}^n x_k^2 = n$. Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!], \ x_k = 1$.

Exercice 2 -

Déterminer si chacun des ensembles suivants admet une borne supérieure/inférieure ou un maximum/un minimum

$$1) \ A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

3)
$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$$

$$2) B = \left\{ \frac{n-1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

4)
$$D = \{x + y \mid x \in]3, 5[, y \in]-1, 1]\}$$

Exercice 3

Montrer que $1 + |xy - 1| \le (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$.

Exercice 4

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1)
$$|x-6| \le \frac{1}{2}$$

4)
$$\frac{1}{x+3} > x-1$$

7)
$$4\exp(2x) - 4\exp(x) + 1 = 0$$

2)
$$|x+1| + |x-3| = 5$$

$$5) \ \frac{1}{x^2 - 4} \le 3$$

$$8) \ \sqrt{x-1} = \sqrt{1-x}$$

9) $\sqrt{3x-2} = x$

3)
$$|x-4|+|x|=1$$

6)
$$x^3 + x^2 - x - 1 = 0$$

Exercice 5

Soient a et b deux nombres réels. Montrer que

$$\max(a,b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$$
 et $\min(a,b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$

Exercice 6 -

Soient a et b deux réels positifs. On appelle **moyenne géométrique** de a et de b le nombre $g(a,b)=\sqrt{ab}=(ab)^{1/2}$, on appelle moyenne harmonique de a et de b le nombre $h(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ et on appelle moyenne quadratique de aet de b le nombre $q(a,b) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

La moyenne arithmétique de a et de b est le nombre noté $m(a,b)=\frac{a+b}{2}$. Le but de cet exercice est de montrer que quels que soient les réels positifs a et b on a

$$h(a,b) \le g(a,b) \le m(a,b) \le q(a,b)$$

- 1) Montrer que pour tous réels $a, b \in \mathbb{R}$, on a $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.
- 2) En déduire l'inégalité (2)
- 3) Déduire de cette inégalité l'inégalité (1)
- 4) Démontrer l'inégalité (3)

Exercice 7

Déterminer l'ensemble des réels x tels que E(-x) = -E(x).

* - Exercice 8 -

Soit x un réel fixé. Déterminer $\lim_{n\to +\infty} \frac{E(nx)}{n}$ où E(x) désigne la partie entière de x.

* * Exercice 9 -

- a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, E(x+1) = E(x)$
- b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$
- c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) = E(2x)$

Exercice 10 —

Écrire $\frac{3}{4-2\sqrt{7}}$ et $\frac{8+3\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$ sans racine au dénominateur.

Exercice 11

Déterminer la limite de la suite $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

* Exercice 12 ------

Calculer $\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

* Exercice 13 ------

Simplifier $\sqrt{1+2^{2/3}+2^{-2/3}}$.

*
Exercice 14

Déterminer la limite de $u_n = \frac{2^{n^3}}{3^{n^2}}$

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $x^{x/2} = \left(\frac{x}{2}\right)^x$ après avoir déterminé l'ensemble de définition de cette équation.