⋆

Exercice 1

On lance deux dés équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6. On note X la somme des faces obtenues et Y le produit des faces obtenus.

1) Quels sont les valeurs prises par X ? Par Y ?
2) Déterminer la loi de probabilité de X et de Y
3) Calculer l'espérance de X et l'espérance de Y

⋆

Exercice 2

Un joueur paie 10€ pour jouer à un jeu qui consiste à tirer une carte au hasard dans un paquet de cartes.

- S'il pioche un As, il gagne a€, où a est un réel supérieur ou égal à 15.
- S'il pioche une figure (Roi, Dame, Valet), il gagne 15€
- S'il pioche un 8, un 9 ou un 10, il gagne 5€
- Dans tous les autres cas, il ne gagne rien.

On note X le gain algébrique du joueur.

1) Déterminer la loi de X en fonction de a.
2) Déterminer la fonction de répartition de X et la tracer
3) Calculer l'espérance de X en fonction de a
4) Quelle valeur faut-il donner à a pour que le jeu soit équitable, c'est à dire qu'il ait une espérance nulle ?

⋆

Exercice 3

On lance une pièce équilibrée à pile ou face trois fois de suite, et on note X le nombre de Piles obtenus.

1) Déterminer les valeurs prises par X
2) Déterminer la loi de X sous forme de tableau
3) Déterminer la fonction de répartition de X et tracer sa courbe représentative dans un repère.

⋆

Exercice 4

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On pioche successivement et avec remise k boules dans l'urne, et on note X la valeur maximale inscrite sur les boules tirées.

1) Donner $X(\Omega)$.
2) Calculer $\mathbb{P}(X \leq 1)$
3) Calculer $\mathbb{P}(X \leq i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$
4) En déduire la loi de X.

⋆

Exercice 5

Soit a un réel. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose $p_i = \dfrac{3a}{2^{i+2}}$.

1) Déterminer la valeur de a telle qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = i) = p_i$$

2) Montrer que X admet une espérance et calculer $\mathbb{E}[X]$.
3) Montrer que X admet une variance et calculer $V(X)$.

⋆

Exercice 6

On appelle **médiane** d'une variable aléatoire X n'importe quel réel $x_{1/2}$ tel que

$$\mathbb{P}\Big(X \leq x_{1/2}\Big) \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\Big(X \geq x_{1/2}\Big) \geq \frac{1}{2}$$

Si $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ avec I égal à $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$ et que les x_i sont rangés dans l'ordre croissante, montrer que $x_{1/2}$ est la plus petite valeur de x_i telle que $\mathbb{P}(X \leq x_{1/2}) \geq \dfrac{1}{2}$.

⋆ ⋆
Exercice 7

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}$ vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2 \times 3^{|k|}}$$

1) Vérifier que X est une variable aléatoire bien définie.
2) Montrer que X admet un moment d'ordre 1 et un moment d'ordre 2, et calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.
3) Montrer que pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \dfrac{3}{2a^2}$

⋆
Exercice 8

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X > k) = (1 - p)^k$$

⋆
Exercice 9

Soit $q \in]0, 1[$ et soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} 1 - q^{\lfloor x \rfloor} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière inférieure de x, c'est à dire l'unique entier relatif n tel que $n \leqslant x < n + 1$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
2) Montrer que F est croissante
3) Montrer qu'il existe une variable aléatoire X telle que F est la fonction de répartition de X.

⋆
Exercice 10

Soit $\lambda > 0$ un réel et soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

1) On pose $Y = X^2$. Déterminer pour quelles valeurs de λ la variable aléatoire Y admet une espérance et calculer $\mathbb{E}[Y]$ le cas échéant.
2) On pose $Z = X!$. Déterminer pour quelles valeurs de λ la variable aléatoire Z admet une espérance et calculer $\mathbb{E}[Z]$ le cas échéant.

⋆
Exercice 11

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p avec $p \in]0\,;1[$. On pose $Y = \mathrm{e}^X$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur l'entier r pour que Y admette un moment d'ordre r et calculer $E[Y^r]$ lorsque c'est possible.

⋆ ⋆
Exercice 12

(D'après oraux ENS 2019) Un gardien de nuit dispose de 10 clés indiscernables dans l'obscurité, et dont une seule permet d'ouvrir une certaine porte. Selon son état, il a deux méthodes possibles pour ouvrir la porte :

A. À jeun, il effectue des essais successifs en retirant les clés déjà essayées.

B. Ivre, à chaque nouvel essai, il utilise une clé prise au hasard parmi les 10 clés.

On note X_A le nombre de clés essayées (y compris la bonne) avant d'ouvrir la porte dans le cas **A** et X_B le nombre de clés essayées (y compris la bonne) avant d'ouvrir la porte dans le cas **B**.

1) Déterminer la loi de la variable aléatoire X_A et son espérance
2) Déterminer la loi de la variable aléatoire X_B et son espérance
3) On sait que le gardien est ivre un jour sur quatre. Un jour, après avoir essayé 8 clés, il n'a toujours pas réussi à ouvrir la porte. Calculer la probabilité pour qu'il soit ivre.

⋆⋆⋆
Exercice 13

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages avec remise et on note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts qui ont été tirées lors des k premiers tirages. On pose $Y_0 = 0$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit Z_k la variable aléatoire égale à 1 si le k-ième tirage amène un numéro qui n'a pas encore été tiré, et égale à 0 sinon. On remarque que $Z_1 = 1$.

1) Déterminer la loi de Z_2.
2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la valeur de $\mathbb{P}_{\{Y_k=j\}}(Z_{k+1} = 1)$. En déduire : $\mathbb{P}(Z_{k+1} = 1) = 1 - \frac{1}{n}\mathbb{E}[Y_k]$
3) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $Y_k = \sum_{j=1}^{k} Z_j$, montrer :
$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = 1) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\mathbb{P}(Z_j = 1)$$
4) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Z_k = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$.
5) Déterminer alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'espérance de Y_k.

⋆
Exercice 14

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{E}[X]$ existe et $\mathbb{P}(X > 0) > 0$.
Soit Y la variable aléatoire définie par
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y = k) = \frac{k\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{E}[X]}$$

1) Montrer que la variable aléatoire Y est bien définie.
2) On suppose dans cette question que X suit une loi de Poisson. Montrer que $X + 1$ et Y ont la même loi.
3) Réciproquement, on suppose dans cette question que Y et $X + 1$ on la même loi. Montrer que X suit une loi de Poisson.

⋆⋆⋆
Exercice 15

(D'après oraux ESCP 2016) On dispose de deux urnes U_1 et U_2 et de n boules numérotées de 1 à n (avec $n \geq 2$).
Soit m un entier fixé tel que $0 \leq m \leq n$. On place au hasard m boules dans l'urne U_1 et les $n - m$ autres dans l'urne U_2.
On choisit au hasard un entier j de $[\![1, n]\!]$ et on déplace la boule numéro j de l'urne dans laquelle elle se trouve pour la mettre dans l'autre urne.
On répète indéfiniment cette expérience. Pour tout $k \geq 1$, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans l'urne U_1 à l'issue des k premières expériences.

1) Donner la loi de X_1 et calculer $\mathbb{E}(X_1)$
2) Déterminer pour tout k et pour tout i une relation entre $\mathbb{P}(X_{k+1} = i)$, $\mathbb{P}(X_k = i - 1)$ et $\mathbb{P}(X_k = i + 1)$.
3) Soit G_k le polynôme défini par $G_k(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X_k = i)t^i$.
   a) Donner une expression de $\mathbb{E}(X_k)$ à l'aide de la fonction G_k
   b) Déterminer une relation entre $G_{k+1}(t)$, $G_k(t)$ et $G'_k(t)$.
   c) En déduire l'expression de $\mathbb{E}(X_k)$ en fonction de n. Déterminer $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{E}(X_k)$

⋆⋆⋆
Exercice 16

Soit X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui admet une espérance.

1) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} n\mathbb{P}(X > n) = 0$
2) Montrer que $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$.

★ ★ ★

Exercice 17

On lance un dé truqué qui tombe sur 6 avec probabilité p. On le lance plusieurs fois de suite et on note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués au moment ou on obtient 6 pour la r-ième fois. Déterminer la loi suivie par X.

★ ★

Exercice 18

Un sac contient n pièces numérotées de 1 à n. On pioche une pièce au hasard et on la lance. On note X le numéro de la pièce, et on pose $Y = kX$ avec

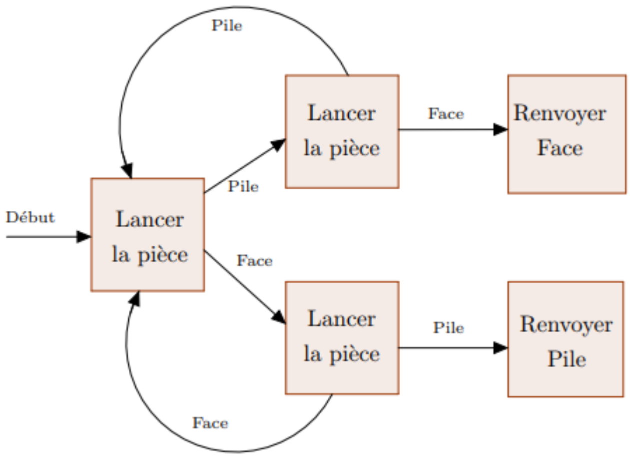
$$k = \begin{cases} 1 & \text{si la pièce est tombée sur face} \\ -1 & \text{si la pièce est tombée sur pile} \end{cases}$$

1) Déterminer la loi suivie par X
2) Calculer l'espérance de X
3) Déterminer la loi suivie par Y
4) On pose $Z = Y^2 - X$. Calculer l'espérance de Z

★ ★

Exercice 19

(D'après ENS 2017) On dispose d'une pièce truquée qui renvoie « pile » avec une probabilité $p \in]0,1[$ et on souhaite s'en servir pour générer un pile ou face équilibré. John von Neumann a imaginé l'algorithme suivant (où les lancers successifs de la pièce truquée se font indépendamment) :



On note $T \in \{2, 4, 6, ...\}$ la variable aléatoire donnée par le nombre de lancers néccessaire pour que l'algorithme se termine, et $R \in \{P, F\}$ le résultat de l'algorithme (où on note P pour « pile » et F pour « face »).

1) Que valent T et R si on obtient comme premiers tirages $PPPPFFPPPFFP$?
2) Démontrer que pour tout $k > 1$,

$$\mathbb{P}(T = 2k) = (p^2 + (1-p)^2)^{k-1} 2p(1-p)$$

   En déduit que l'algorithme se termine presque sûrement, c'est à dire que $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$.
3) Démontrer que l'algorithme renvoie bien « pile » ou « face » avec même probabilité, c'est à dire que $\mathbb{P}(R = \ pile\ ) = \frac{1}{2}$.
4) Calculer $\mathbb{E}[T]$.

★ ★ ★

Exercice 20

Entropie d'une variable aléatoire discrète (d'après BCE ESSEC 2019)

Partie A : Logarithme de base 2

La fonction logarithme de base 2, notée $\log_2$, est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\log_2(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$, où ln est la fonction logarithme népérien.

1) Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a $\log_2(xy) = \log_2(x) + \log_2(y)$.
2) Vérifier que pour tout réel α, $\log_2(2^\alpha) = \alpha$.
3) Montrer que la fonction $\log_2$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\log_2'(x)$.
4) On considère la fonction f définie pour tout $t \in [0\,;1]$ par

$$f(t) = \begin{cases} -t\log_2(t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

   a) Démontrer que f est continue sur $[0\,;1]$
   b) Étudier les variations de f sur $[0\,;1]$
   c) Montrer que la limite de $f'(t)$ lorsque t tend vers 0 est $+\infty$.
   d) Tracer la courbe représentative de f sur $[0\,;1]$. On pourra utilise $0,36 < e^{-1} < 0,37$

Partie B - Entropie Dans cette partie, on considère X une variable aléatoire de loi à support dans $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ où n est un entier naturel telle que $\forall k \in \{0, 1,..., \}$, $\mathbb{P}(X = k) > 0$. On appelle **entropie** de X le réel

$$H(X) = \sum_{k=0}^{n} -\mathbb{P}(X = k)\log_2(\mathbb{P}(X = k))$$

5) On définit la fonction $g : \{0,..., n\} \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant $g(k) = \log_2(\mathbb{P}(X = k))$ pour k élément de $\{0, 1,..., n\}$. Montrer que $H(X) = -\mathbb{E}(g(X))$.
6) Montrer que $H(X) \geq 0$
7) Soit p un réel tel que $0 < p < 1$. On suppose dans cette question que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p.
   a) Calculer $H(X)$ en fonction de p. On note ψ la fonction qui à p associe $H(X)$.
   b) Justifier que ψ est deux fois dérivable sur $]0\,;1[$ et montrer que pour tout $p \in]0\,;1[$ on a $\psi''(p) < 0$
   c) Calculer $\psi'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et en déduire la valeur p_0 où ψ est maximale.
8) On suppose dans cette question que la loi de X est à support $\{0, 1, 2, 3\}$. Calculer l'entropie de X
   a) si X suit la loi uniforme sur $\{0, 1, 2, 3\}$
   b) si X suit la loi :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4} \quad ; \quad \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{8}$$

Partie C - Entropie maximum

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et soit X une variable aléatoire à support dans $\{1, 2,..., n\}$. Le but de cette partie est de montrer que l'entropie de X est maximale si X suit la loi uniforme sur $\{1, 2,..., n\}$. Pour tout $k \in \{1, 2,..., n\}$, on note p_k le réel $\mathbb{P}(X = x_k)$.

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{1, 2,..., n\}$.

9) Montrer que $H(U) = \log_2(n)$.
10) Montrer que $H(U) - H(X) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log_2\left(\dfrac{1}{np_k}\right)$.
11) Montrer que pour tout $x > 0$, $\log_2(x) \leq \dfrac{1}{\ln(2)}(x - 1)$.

    Indication : On pourra étudier la fonction $f : x \mapsto \log_2(x) - \dfrac{1}{\ln(2)}(x - 1)$ définie sur $]0\,;+\infty[$.
12) Déduire des questions précédentes que $H(U) - H(X) \geq 0$. Conclure.