Programme de khôlle de maths n° 23

Semaine du 17 avril

Cours

Chapitre 14 : Suites de variables aléatoires

- Indépendances d'une famille finie ou infinie de variables aléatoires
- Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ sont des variables aléatoires réelles discrètes, elles sont indépendantes ssi $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, $\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1)\mathbb{P}(X_2 = x_2) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n)$
- Lemme des coalitions (admis)
- $V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n) + 2 \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$
- Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ sont indépendantes, alors $\mathbb{E}(X_1 X_2 \cdots X_n) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) \cdots \mathbb{E}(X_n)$
- Si X et Y sont indépendantes et admettent un moment d'ordre 2, alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. La réciproque est fausse, contre-exemple vu en TD : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1, 0, 1\})$ et $Y = X^2$
- Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes et admettent un moment d'ordre 2, alors $V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$
- Loi géométrique, loi Binomiale, loi de Poisson. À connaître : valeurs prises par X, probabilités, espérance et variance.
- Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p, alors $S = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi binomiale de paramètres (n, p).
- Soit $\lambda > 0$, si pour tout n entier avec $n > \lambda$, S_n suit la loi $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(S_n = k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{e}^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Questions de cours

- **Questions de cours**
  - Montrer que si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = \lambda$.
  - Montrer que si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ alors X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$
  - Montrer que si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(T > k) = (1-p)^k$
  - Montrer que la suite de lois binomiales $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ converge en loi vers $\mathcal{P}(\lambda)$, c'est à dire : si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit la loi $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(S_n = k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{e}^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$.
- **Exercices vus en classe**
  - Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ avec X et Y indépendantes, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
  - X et Y indépendantes suivent $\mathcal{G}(p)$, loi de $S = X + Y$ et de $U = \min(X, Y)$. Espérance de S, montrer que U suit une loi géométrique. Indépendance de S et U ?
  - $X = \mathcal{U}(\{-1, 0, 1\})$ et $Y = X^2$. Loi du couple (X, Y) ? Montrer que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ mais que X et Y ne sont pas indépendantes.