TD 2 : Sommes et projecteurs (Indications)

Indications pour l'exercice 1 :

Raisonner par double implication, utiliser la caractérisation $F+G=F\oplus G \iff \left\{\begin{array}{l} F\cap G=\{0\} \\ E=F+G \end{array}\right.$

Indications pour l'exercice 2 :

1. Vérifier que $q^2=q$
2. $x\in \mathrm{Ker}(p)\cap\mathrm{Ker}(q) \Rightarrow x=0$ est immédiat en appliquant les définitions.
   Tout $x\in E$ s'écrit $x=x-p(x)+p(x)$.
3. Raisonner par inclusion et égalité des dimensions obtenue grâce au théorème du rang. On peut aussi utiliser directement les résultats du cours.

Indications pour l'exercice 3 :

1. $E_1\cap E_2=\{0\}$ est facile.
   Pour montrer que $\mathbb{R}^3=E_1+E_2$: raisonner par analyse-synthèse. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on suppose qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ et $(x',y',z')\in E_2$ tels que
   $$(x,y,z)=(a,a,a)+(x',y',z')$$
   et on cherche à exprimer a, x', y', z' en fonction de (x,y,z).
2. Utiliser la décomposition précédente pour écrire $p(x,y,z)$ en fonction de (x,y,z).
3. La réunion d'une base de $\mathrm{Im}(p)=E_2$ et d'une base de $\mathrm{Ker}(p)=E_1$ est une base de E. La matrice de passage P de la base canonique à cette base vérifie l'égalité voulue.

Indications pour l'exercice 4 :

1. A est la matrice d'un projecteur si et seulement si $A^2=A$.
2. Rappel : $\mathrm{Im}(A)$ est engendré par les colonnes de A.
3. Prendre un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(A)$ et un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(A)$, ils forment une base dans laquelle la matrice du projecteur est $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Indications pour l'exercice 5 :

1. Utiliser le théorème du rang pour obtenir des égalités de dimensions. Les inclusions $\mathrm{Ker}(u)\subset\mathrm{Ker}(u^2)$ et $\mathrm{Im}(u^2)\subset\mathrm{Im}(u)$ sont toujours vraies.
2. Non : chercher un endomorphisme simple qui vérifie l'une des trois propositions équivalentes de la question précédente.

Indications pour l'exercice 6 :

1. Un sous-espace vectoriel strict de E est un sous-espace vectoriel de E différent de E.
   Pour trouver un supplémentaire : raisonner dans l'autre sens en cherchant à construire un polynôme de F à partir d'un polynôme $P\in\mathbb{R}_n[X]$ quelconque.
2. Idem.
3. Idem.

Indications pour l'exercice 7 :

Décomposer les vecteurs de E dans la somme directe $E=\mathrm{Ker}(q)\oplus\mathrm{Im}(q)$.

Indications pour l'exercice 8 :

Lorsque p est un projecteur, on a $x\in\mathrm{Im}(p)\iff p(x)=x$

Indications pour l'exercice 9 :

1. Raisonner par analyse-synthèse pour montrer que $E = F + G$.
2. Utiliser la décomposition obtenue dans la question précédente.

Indications pour l'exercice 10 :

1. Pour le sens direct montrer que si $p + q$ est un projecteur $p \circ q = -q \circ p$ et $p \circ q = q \circ p$.
2. Si p est un projecteur, $x \in \mathrm{Im}(p) \iff p(x) = x$.

Indications pour l'exercice 11 :

1. Utiliser l'hypothèse $g \circ f \circ g = g$.
2. Raisonner par analyse synthèse.
3. Simple vérification. On peut raisonner sur les polynômes ou bien invoquer directement le théorème fondamental de l'analyse.

Indications pour l'exercice 12 :

1. Trouver une base de E dans laquelle la matrice représentative de p est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$
2. Utiliser la formule de Grassmann pour obtenir la majoration. L'inégalité obtenue est une égalité si et seulement si toutes les inégalités intermédiaires sont des égalités.
3. Le sens indirect est une simple vérification de l'égalité $p^2 = p$.
   Le sens direct nécessite d'utiliser les résultats des deux questions précédentes. La question 1 donne $\mathrm{rg}(p) = \sum \mathrm{rg}(p_i) \geq \dim(\mathrm{Im}(p_1) + \cdots + \mathrm{Im}(p_n))$ et l'inclusion $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(p_1) + \cdots + \mathrm{Im}(p_n)$ est facile...

Indications pour l'exercice 13 :

Montrer d'abord $(i) \iff (ii)$ et $(iii) \Rightarrow (i)$.

En posant H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E, $u_{|H}$ est un isomorphisme de H vers $\mathrm{Im}(u)$.

Si on suppose que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$ on peut définir ensuite v sur $\mathrm{Ker}(u) \oplus H$ à l'aide de $u_{|H}^{-1}$ de sorte à vérifier l'égalité voulue.

Indications pour l'exercice 14 :

1. Utiliser l'inégalité $\mathrm{rg}(AB) \leq \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B))$.
2. (a) Le théorème du rang et l'inclusion $\mathrm{Ker}(a) \subset \mathrm{Ker}(a^2)$ donne $\mathrm{Ker}(a) = \mathrm{Ker}(a^2)$. On montre alors classiquement que $\mathrm{Im}(a) \cap \mathrm{Ker}(a) = \{0\}$ et le théorème du rang permet de conclure à l'égalité des dimensions.
   (b) Prendre une base composée d'une base de $\mathrm{Im}(a)$ et une base de $\mathrm{Ker}(a)$, dans cette base la matrice de a a la forme voulue.
   (c) Définir un pseudo inverse à l'aide de B^{-1} dans la base précédente.
3. (a) Reprendre la même base que dans la question 2.b). La stabilité de $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$ par a' garantissent la forme de la matrice.
   (b) Les propriétés de pseudo-inverse suffisent pour montrer que aa' es un projecteur. On montre ensuite $\mathrm{Ker}(aa') = \mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(aa') = \mathrm{Im}(a)$ et en faisant le même changement de base qu'aux questions précédentes on voit que $P^{-1}(AA')P = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
   (c) Si A' est pseudo-inverse de A, la matrice D trouvée à la question 3.a) est l'inverse de B grâce à 3.c), or l'inverse est unique.