$\star$

Exercice 1 — Voir correction

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^t + t^{1/t}}\,\mathrm{d}t$

2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_0^{9} \frac{1}{3-\sqrt{9-t}}\,\mathrm{d}t$

4) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(u)}\,\mathrm{d}u$

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$

6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\tan^2(t)}\,\mathrm{d}t$

7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+x)^{1/3}-x^{1/3}}{x^{2/5}}\,\mathrm{d}x$

8) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t-\sin^2(t)\sqrt{t}}$

9) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$

$\star\star\star$

Exercice 2 — Voir correction

Partie A : séries de Riemann convergentes

1) Soit $\alpha > 0$ un réel. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [k; k+1]$ on a :

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

et en déduire que

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

2) En déduire que pour tout entier naturel n non nul :

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

3) Montrer que $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Partie B : deux équivalents

4) En reprenant l'encadrement de la question 2), montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$$

5) Soit $\lambda < 1$. Montrer que de même que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\lambda} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{1-\lambda}}{1-\lambda}$$

6) Trouver tous les nombres réels α, $\beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k^\alpha = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^\beta$$

Partie C : cas général

7) Montrer que si f est une fonction positive, continue et décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$, alors pour tout entier naturel n

$$0 \leq \int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq f(0) + \int_0^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

8) En déduire que la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature (toutes deux convergentes ou bien toutes deux divergentes).

9) Donner un contre exemple d'une fonction positive non monotone f telle que $\sum f(n)$ converge mais $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, et un contre exemple d'une fonction positive non monotone g telle que $\sum g(n)$ diverge mais $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

10) En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$

Partie D : transformation d'Abel

11) Montrer à l'aide d'une intégration par partie que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

12) Soit x un réel qui n'est pas un multiple de 2π. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikx} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

13) En déduire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\right| \leq M$.

14) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k$, et $S_0 = 0$. En utilisant le fait que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sin n = S_n - S_{n-1}$ Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k} = \frac{S_n}{n} + \sum_{k=1}^{n} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

15) En déduire la nature de la série de terme général $\frac{\sin n}{n}$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 3 — Voir correction

(D'après ESCP voie ECS 2013) Pour toutes fonctions f et g continues sur $\mathbb{R}$ et telles que pour tout réel x, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)|\,\mathrm{d}t$ converge, on note $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$. La fonction $f \star g$ ainsi définie s'appelle le **produit de convolution de** f **et** g.

1) On suppose dans cette question que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge et que g est bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f \star g$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$.

2) On suppose dans cette question que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2\,\mathrm{d}t$ convergent. Montrer que $f \star g$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\lambda_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h_n(t) = \begin{cases} \dfrac{(1-t^2)^n}{\lambda_n} & \text{si } t \in [-1;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   a) Montrer à l'aide du changement de variable $t = \cos\theta$ que $\lambda_n = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2n+1} d\theta$.

   On admet que $\lambda_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$

   b) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

   c) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} h_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

   d) Déterminer pour tout réel x, $\lim_{n\to+\infty} (f \star h_n)(x)$ pour f continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

Le coin de Khûbes

⋆

Exercice 4 **Voir correction**

(D'après ESCP 2024)
Soient $0 < a < b$ des réels et $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \neq 0$ par :

$$f(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2} \, \mathrm{d}t$$

1) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calcule sa dérivée f'
2) Montrer que pour tout $t > 0$, on a :
$$\frac{1}{t} - \frac{t}{6} \leq \frac{\sin t}{t^2} \leq \frac{1}{t}$$
3) En déduire que f admet un prolongement par continuité en 0. Dans la question suivante, on note encore f la fonction ainsi prolongée.
4) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) La fonction $f : t \mapsto t^t + t^{1/t} = \exp(t \ln t) + \exp(\ln(t)/t))$ est continue sur $]0;+\infty[$ par opérations usuelles de fonctions usuelles. Il y a deux impropriétés, une en 0 et une en $+\infty$

   En $+\infty$: pour $t \geq 2$ on a $t^t \geq t^2$ et comme $t^{1/t} \geq 0$ on a $t^t + t^{1/t} \geq t^2$ d'où $\dfrac{1}{t^t + t^{1/t}} \leq \dfrac{1}{t^2}$. Puisque $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge selon le critère de Riemann, on en déduit par le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^t + t^{1/t}}\,\mathrm{d}t$ converge.

   En 0 : $t \ln t \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ et $\dfrac{\ln t}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} -\infty$ donc $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \exp(0) = 1$ par composition de limites. f se prolonge par continuité en 0 donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

   Finalement, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^t + t^{1/t}}\,\mathrm{d}t$ converge.

2) $x \mapsto \tan x$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, il y a donc deux impropriétés : en $-\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{\pi}{2}$.
   En $-\frac{\pi}{2}$: Sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, une primitive de $\tan x$ est $x \mapsto -\ln(\cos x)$ donc pour $A \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[$ on a

   $$\int_A^0 \tan x\,\mathrm{d}x = [-\ln(\cos x)]_A^0 = -\ln(1) + \ln(\cos(A)) \xrightarrow[A\to -\frac{\pi}{2}]{} -\infty$$

   donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \tan x\,\mathrm{d}x$ diverge.
   En $\frac{\pi}{2}$: De même, pour tout $A \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$,

   $$\int_0^A \tan x\,\mathrm{d}x = [-\ln(\cos x)]_0^A = -\ln(1) + \ln(\cos(A)) \xrightarrow[A\to \frac{\pi}{2}]{} +\infty$$

   donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,\mathrm{d}x$ diverge aussi.

3) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{3-\sqrt{9-t}}$ est continue sur $]0;9]$ par opérations usuelles de fonctions usuelles. Il y a une seule impropriété en 0.

   $$\begin{aligned} 3-\sqrt{9-t} &= 3 - 3\sqrt{1-\frac{t}{9}} \\ &\underset{t\to 0}{=} 3 - 3(1 - \frac{t}{18} + o(t) \\ &\underset{t\to 0}{=} \frac{t}{6} + o(t) \qquad \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{6} \end{aligned}$$

   donc $f(t) \sim \dfrac{6}{t}$, or $\displaystyle\int_0^1 \frac{6}{t}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann divergente, donc par comparaison $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge donc l'intégrale diverge.

4) La fonction $f : u \mapsto \sqrt{\tan u}$ est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ comme composée de fonctions continues. Il y a une seule impropriété en $\frac{\pi}{2}$.
   Pour $A \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et avec le changement de variable $x = \dfrac{\pi}{2} - u$, $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$, on a :

   $$\int_0^A \sqrt{\tan u}\,\mathrm{d}u = \int_0^A \sqrt{\frac{\sin u}{\cos u}}\,\mathrm{d}u = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-A} \sqrt{\frac{\cos x}{\sin x}}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}-A}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\cos x}{\sin x}}\,\mathrm{d}x$$

   Or lorsque x tend vers 0, $\dfrac{\cos x}{\sin x} \sim \dfrac{1}{x}$ donc $\sqrt{\dfrac{\cos x}{\sin x}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$ converge donc l'intégrale précédente admet une limite finie lorsque A tend vers $\frac{\pi}{2}$. On en conclut que l'intégrale converge.

5) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ est continue sur $]0;+\infty[$ et prolongeable par continuité en 0 car $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$.

Il y a donc une seule impropriété en $+\infty$. Pour $t \geq 1$ on a $\dfrac{\ln(1+t)}{t} \geq \dfrac{\ln 2}{t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann divergente donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln 2}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge, et donc par comparaison $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge, donc l'intégrale diverge.

6) La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\tan^2(t)}$ est continue sur $[0;+\infty[$, il y a donc une seule impropriété en $+\infty$.

Pour tout $t \geq 0$, $1+\tan^2(t) \geq 1$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\tan^2 t} \leq \mathrm{e}^{-t}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge (en calculant la primitive, ou en comparant avec une intégrale convergente grâce à $t^2\,\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ par exemple).

Ainsi l'intégrale converge d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives.

7) La fonction $x \mapsto \dfrac{(1+x)^{1/3} - x^{1/3}}{x^{2/5}}$ est continue sur $]0;+\infty[$, il y a donc deux impropriétés : en 0 et en $+\infty$.

En 0 on a simplement $(1+x)^{1/3} - x^{1/3} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ donc $\dfrac{(1+x)^{1/3} - x^{1/3}}{x^{2/5}} \sim \dfrac{1}{x^{2/5}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{2/5}}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann convergente car $\dfrac{2}{5} < 1$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1+x)^{1/3} - x^{1/3}}{x^{2/5}}\,\mathrm{d}x$ converge.

En $+\infty$, on a $(1+x)^{1/3} - x^{1/3} = x^{1/3}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{1/3} - x^{1/3} = x^{1/3}\left(1 + \dfrac{1}{3x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) - x^{1/3} = \dfrac{1}{3x^{2/3}} + o\left(\dfrac{1}{x^{2/3}}\right) \sim \dfrac{1}{3x^{2/3}}$.
Ainsi, $\dfrac{(1+x)^{1/3} - x^{1/3}}{x^{2/5}} \sim \dfrac{1}{3x^{2/3}\times x^{2/5}} \sim \dfrac{1}{3x^{16/15}}$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{16/15}}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann convergente car $\dfrac{16}{15} > 1$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(1+x)^{1/3} - x^{1/3}}{x^{2/5}}\,\mathrm{d}x$ converge par comparaison.

8) La fonction $t \mapsto t - \sin^2(t)\sqrt{t}$ est continue sur $[0;+\infty[$. Pour $t > 1$ on a $0 \leq \sin^2(t) \leq 1$ et $\sqrt{t} < t$ donc $t - \sin^2(t)\sqrt{t} > 0$ donc ne s'annule pas sur $]1;+\infty[$.
Sur $[0;1]$, montrons que l'équation $t - \sin^2(t)\sqrt{t} = 0$ admet 0 comme unique solution : $t - \sin^2(t)\sqrt{t} = 0 \iff \sqrt{t}(\sqrt{t} - \sin^2 t) = 0 \iff t = 0$ ou $\sqrt{t} - \sin^2(t) = 0 \iff t = 0$ ou $t = \sin^4(t)$. car $\sqrt{t} \geq 0$
Or, $\forall t \in]0;1]$, $\sin t < t$ donc $\sin^4 t < t^4 \leq t$ car $t \leq 1$. donc l'équation $t - \sin^2(t)\sqrt{t}$ admet 0 pour seule solution sur $[0;+\infty[$. Ainsi l'intégrale n'a que deux impropriétés : en 0 et en $+\infty$

En 0 on a $\sin(t) = t + o(t)$ donc $t - \sin^2(t)\sqrt{t} = t - t^{3/2} + o(t^{3/2}) \sim t$. Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t - \sin^2(t)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ diverge.
En $+\infty$, $t - \sin^2\sqrt{t} \sim t$ car $\dfrac{\sin^2(t)\sqrt{t}}{t} = \dfrac{\sin^2 t}{\sqrt{t}}$ avec $\sin^2 t$ est borné et $\lim\limits_{t\to+\infty} \sqrt{t} = +\infty$, donc $\dfrac{\sin^2 t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge également donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t - \sin^2(t)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ diverge aussi.

9) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$ est continue sur $]0;1[$ et se prolonge par continuité en 0 car $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{\ln t} = 0$. Il y a donc une seule impropriété en 1. En posant le changement de variable $u = 1 - x$ on a pour tout $A \in]0;1[$

$$\int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{\ln x} = \int_1^{1-A} \frac{-1}{\ln(1-u)}\,\mathrm{d}u = \int_{1-A}^1 \frac{\mathrm{d}u}{\ln(1-u)}$$

Or $\ln(1-u) \underset{u\to 0}{\sim} -u$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$ diverge donc par comparaison d'intégrale de fonctions positives $\displaystyle\int_0^1 \frac{-1}{\ln(1-u)}\,\mathrm{d}u$ diverge donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\ln(1-u)}\,\mathrm{d}u$ diverge donc l'intégrale diverge.

Correction de l'exercice 2 :

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $[k, k+1]$. Pour tout $t \in [k, k+1]$ on a $k \leq t \leq k+1$ donc :

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

puis en intégrant cette inégalité sur $[k, k+1]$ on obtient :

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

car l'intégrale d'une constante sur l'intervalle $[k, k+1]$ est égale à cette constante.

2) Par somme d'inégalités on a d'une part :

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

et d'autre part :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

d'où l'encadrement voulu.

3) Supposons que $\alpha > 1$. Alors $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge donc la suite $\left(\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ converge donc est majorée. Ainsi $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée donc converge.

Supposons que $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge. Alors la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ est majorée, donc $\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est majorée. Puisque la fonction $A \mapsto \int_1^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est croissante cela signifie que cette fonction est majorée donc elle admet une limite lorsque $A \to +\infty$. Ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge donc $\alpha > 1$.

4) Pour $\alpha = 1$ on a :

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

donc

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

Comme $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n}}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\frac{1+\ln(n)}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, en divisant par $\ln(n)$ dans l'encadrement ci-dessus on obtient par encadrement $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1$, donc $\sum_{k=1}^{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

5) Si $\lambda < 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\lambda} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\lambda} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\lambda}$$

donc

$$\frac{1-(n+1)^{-\lambda+1}}{-\lambda+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\lambda} \leq 1 + \frac{1-n^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}$$

Or $\frac{1-(n+1)^{1-\lambda}}{1-\lambda} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1-n^{1-\lambda}}{1-\lambda} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\lambda}}{1-\lambda}$ donc en divisant par $\frac{n^{1-\lambda}}{1-\lambda}$ dans l'inégalité précédente on obtient par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\lambda}{n^{1-\lambda}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\lambda} = 1$$

d'où $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\lambda} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\lambda}}{1-\lambda}$

6) On a pour tout $n \geq 1$, $\left(\sum_{k=1}^n k\right)^\beta = \frac{n^\beta (n+1)^\beta}{2^\beta}$.

Supposons que $\sum_{k=1}^n k^\alpha = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^\beta$. On distingue plusieurs cas :

— Si $\alpha < -1$, alors $\sum\limits_{k\geq 1} k^\alpha$ converge, donc si on note $S > 0$ sa somme on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} S$$

▷ Si $\beta > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\beta(n+1)^\beta}{2^\beta} = +\infty$ donc contredit $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n k^\alpha = S$.

▷ Si $\beta = 0$, le membre de droite est constant mais pas le membre de gauche.

▷ Si $\beta < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\beta(n+1)^\beta}{2} = 0$ ce qui contredit aussi le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n k^\alpha = S > 0$.

— Si $\alpha = -1$, alors $\sum_{k=1}^n k^{-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ d'après la question 4)

▷ Si $\beta > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\beta(n+1)^\beta}{2} \sim \dfrac{n^{2\beta}}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^{2\beta}}{2\ln(n)} = +\infty$ donc $\dfrac{n^{2\beta}}{2^\beta} \neg \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

▷ Si $\beta = 0$, le membre de droite est constant mais pas le membre de gauche.

▷ Si $\beta < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\beta(n+1)^\beta}{2} = 0$ ce qui contredit le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n k^{-1} = +\infty$

— Si $\alpha > -1$, alors $\sum_{k=1}^n k^\alpha = \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{k^{-\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{1+\alpha}}{1+\alpha}$ d'après la question 5)

▷ Si $\beta > 0$, on a $\dfrac{n^\beta(n+1)^\beta}{2} \sim \dfrac{n^{2\beta}}{2}$. Si l'égalité est vérifiée, il faut nécessairement que $\dfrac{n^{1+\alpha}}{1+\alpha} \sim \dfrac{n^{2\beta}}{2^\beta}$, donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{1+\alpha-2\beta} = \dfrac{1+\alpha}{2^\beta}$.

Il faut donc nécessairement $1+\alpha-2\beta = 0$ et donc $1+\alpha = 2^\beta$.

Si $\alpha = 2\beta - 1$, l'équation $1+\alpha = 2^\beta$ équivaut à $2\beta = 2^\beta$. La fonction $f : x \mapsto 2^x - 2x = \mathrm{e}^{x\ln(2)} - 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \ln(2)2^x - 2 = 2(\ln(2)2^{x-1} - 1)$$

donc $f'(x) \geq 0 \iff 2^{x-1} \geq \dfrac{1}{\ln(2)} \iff \mathrm{e}^{(x-1)\ln(2)} \geq \dfrac{1}{\ln(2)} \iff x \geq 1 - \dfrac{\ln(\ln(2))}{\ln(2)}$

Or $\sqrt{e} < 2 < \mathrm{e}$ donc $\dfrac{1}{2} < \ln(2) < 1$ donc $-\ln(2) < \ln(\ln(2)) < 0$ d'où :

$$1 < 1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(2)} < 2$$

Notons $x_0 = 1 - \dfrac{\ln(\ln(2))}{\ln(2)}$. On en déduit le tableau de variation suivant pour f :

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Calculons $f(x_0)$:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 2^{1-\frac{\ln(\ln(2))}{\ln(2}} - 2 + \frac{2\ln(\ln(2))}{\ln(2)} \\ &= \frac{2}{2^{\ln(\ln(2))/\ln(2}} - 2 + \frac{2\ln(\ln(2))}{\ln(2)} \\ &= \frac{2}{\ln(2)} - 2 + \frac{2\ln(\ln(2))}{\ln(2)} && = 2\left(\frac{1+\ln(\ln(2))}{\ln(2)} - 1\right) \end{aligned}$$

Or pour tout $x \in]0, +\infty[$, $1 + \ln x \leq x$ avec égalité si et seulement si $x = 1$ (facile à montrer par une étude de fonction ou par convexité), donc $1 + \ln(\ln(2)) < \ln(2)$ d'où $f(x_0) < 0$ d'où l'on déduit grâce au théorème des valeurs intermédiaires que f ne s'annule que deux fois. Or f a deux racines évidentes : 1 et 2 donc ce sont les seules solutions de l'équation $2^x = 2x$. Cela donne deux couples de solutions : $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ et $(\alpha, \beta) = (3, 2)$. L'égalité $\sum_{k=1}^n k^1 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^1$ est triviale, et on a de plus :

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$$

- ▷ Si $\beta = 0$, alors le membre de droite est constant mais pas le membre de gauche
- ▷ Si $\beta < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\beta(n+1)^\beta}{2^\beta} = 0$ ce qui contredit $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n k^\alpha = +\infty$.

Finalement, les seuls réels pour lesquels l'égalité est vraie pour tout entier n sont $\alpha = 1, \beta = 1$ et $\alpha = 3, \beta = 2$.

7) On peut s'inspirer de la partie A : pour tout entier $k \geq 0$ on a $\forall t \in [k, k+1]$, $f(k) \geq f(t) \geq f(k+1)$ donc en intégrant sur $[k, k+1]$ on obtient :

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k)$$

En faisant la somme pour k allant de 0 à n :

$$\int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^n f(k)$$

et

$$\sum_{k=0}^n f(k) = f(0) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leq f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où l'encadrement voulu.

8) f est positive donc la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite des sommes partielle est majorée.
Si $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, la suite $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geq 0}$ converge donc est majorée, donc d'après l'encadrement précédent, la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^n f(k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, donc converge.

Réciproquement, si $\left(\sum_{k=0}^n f(k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors elle est majorée donc $\left(\int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par un réel M.
Pour tout réel A on a donc $\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\lfloor A\rfloor+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq M$ par positivité de f, donc $\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite lorsque A tend vers $+\infty$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

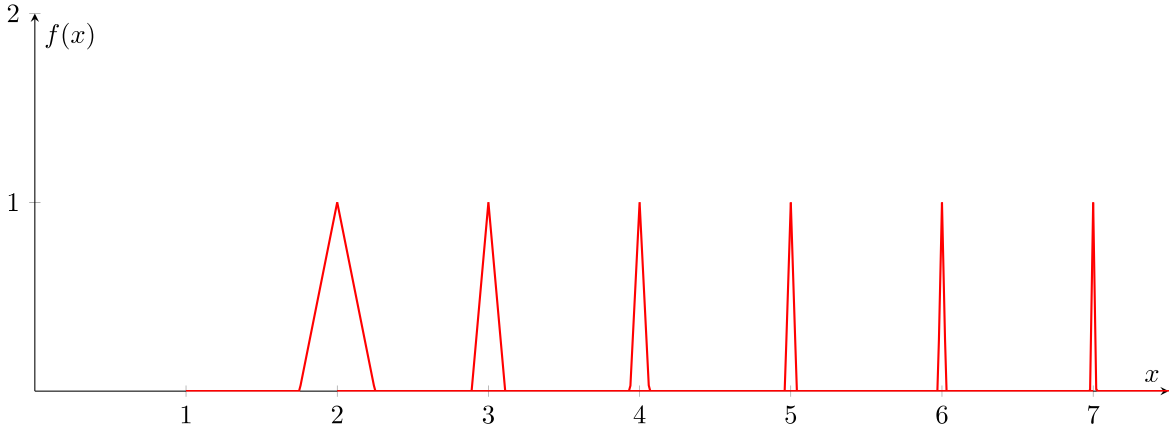
9) Si on pose $f(x) = |\sin(\pi x)|$, alors $f(n) = 0$ pour tout entier naturel n donc la somme $\sum f(n)$ converge.
Pour tout entier k, $\int_k^{k+1} |\sin(\pi x)|\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi}$ (distinguer les cas k pair et k impair) donc $\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2(n+1)}{\pi} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

Si pour tout $k \geq 2$, on définit f sur l'intervalle $[k - \frac{1}{2}; k + \frac{1}{2}]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [k - \frac{1}{2}, k - \frac{1}{k^2}] \\ k^2\left(x - k + \frac{1}{k^2}\right) & \text{si } x \in [k - \frac{1}{k^2}, k] \\ -k^2\left(x - k - \frac{1}{k^2}\right) & \text{si } x \in [k, k + \frac{1}{k^2}] \\ 0 & \text{si } x \in [k + \frac{1}{k^2}] \end{cases}$$

autrement dit :

$$\forall x \in [k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}], f(x) = \max(0, 1 - |k^2(x-k)|$$



L'aire sous chaque triangle est $\frac{1}{4}$ pui $\frac{1}{9}$ puis $\frac{1}{16}$, etc. et $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge. En revanche, $\sum_{n\geq 2} f(n) = \sum_{n\geq 1} 1$ diverge.

10) D'abord la somme converge bien quelle que soit la valeur de $a > 0$ puisque $\frac{a}{n^2+a^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.
Posons pour tout $a > 0$ et pour tout $x \in [1;+\infty[$: $f_a(x) = \frac{a}{x^2+a^2}$.
Pour tout $a > 0$, f_a est positive et décroissante sur $[1;+\infty[$, et une primitive de f_a est $F_a : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$ donc l'encadrement de la question 7) donne :

$$\arctan\left(\frac{n+1}{a}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq \frac{1}{a} + \arctan\left(\frac{n}{a}\right)$$

donc en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ on obtient :

$$\frac{\pi}{2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{\pi}{2}$$

et lorsque a tend vers $+\infty$ on a $\lim\limits_{a\to+\infty} \frac{\pi}{2} = \lim\limits_{a\to+\infty} \left(\frac{1}{a} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ donc par encadrement :

$$\lim_{a\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2}$$

11) La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue, et $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ donc elle est prolongeable par continuité en 0. L'intégrale est donc faussement impropre en 0.
Soit $A > 0$ un réel. On a :

$$\begin{aligned}\int_1^A \frac{\sin t}{t} &= \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \cos(1) - \frac{\cos(A)}{A} - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or cos est bornée donc $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{\cos A}{A} = 0$ et pour tout $t \geq 1$, $\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente donc par comparaison $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente. On en déduit que $\int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ admet une limite lorsque A tend vers $+\infty$ donc finalement $\int_1^A \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ admet une limite lorsque $A \to +\infty$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

12) $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikx} = \sum_{k=0}^{2n} \mathrm{e}^{i(k-n)x}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{e}^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} (\mathrm{e}^{ix})^k \\
&= \mathrm{e}^{-inx} \, \frac{\mathrm{e}^{i(2n+1)x} - 1}{\mathrm{e}^{ix} - 1} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)x} - \mathrm{e}^{-inx}}{\mathrm{e}^{ix} - 1} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{ix/2}(\mathrm{e}^{i(n+\frac{1}{2})x} - \mathrm{e}^{-i(n+\frac{1}{2})x})}{\mathrm{e}^{ix/2}(\mathrm{e}^{ix/2} - \mathrm{e}^{-ix/2})} \\
&= \frac{2i \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

13) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sin k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{ik} - \mathrm{e}^{-ik}}{2i} \\
&= \frac{1}{2i} \left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik} - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-ik} \right) \\
&= \frac{1}{2i} \left(\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ik} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{2i} \left(\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)} - 1 \right)
\end{aligned}
$$

donc par inégalité triangulaire :

$$
\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{n} \sin k \right| &\leq \frac{1}{2} \left(\left| \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}{\left|\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right|} \right| + 1 \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right|} + 1 \right)
\end{aligned}
$$

donc la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \sin k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

14) Soit $n \geq 1$ un entier. On a :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \left(S_k - S_{k-1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{S_{k-1}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{k+1} \\
&= \frac{S_n}{n} - S_0 + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \frac{S_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)
\end{aligned}
$$

15) La suite $(|S_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{n}=0$ et

$$\begin{aligned}\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \left|S_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right| &= \frac{|S_k|}{k(k+1)}\\ &\leq \frac{M}{k(k+1)}\end{aligned}$$

Or $\dfrac{M}{k(k+1)}\underset{k\to+\infty}{\sim}\dfrac{M}{k^2}$ et la série $\sum\frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente donc par comparaison la série $\sum S_k(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})$ est absolument convergente donc convergente. On en conclut que $\sum_{k=1}^n\dfrac{\sin k}{k}$ admet une limite lorsque $n\to+\infty$ donc la série de terme général $\dfrac{\sin n}{n}$ converge.

Correction de l'exercice 3 :

1) g est bornée sur $\mathbb{R}$, soit donc $M\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in\mathbb{R},\ |g(x)|\leq M$.

Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $t\in\mathbb{R}$, $|f(t)g(x-t)|\leq M|f(t)|$, donc pour tout réels $A<B$, $\displaystyle\int_A^B|f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t|\leq M\int_A^B|f(t)|$ d'après l'inégalité précédente. La convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t$ entraîne donc celle de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$ pour tout réel x, et donc celle de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$ (qui est absolument convergente donc convergente). Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(f\star g)(x)$ est bien définie. De plus, par passage à la limite et par inégalité triangulaire on obtient

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t\right|\leq\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)g(x-t)|\,\mathrm{d}t\leq M\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, $f\star g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et bornée : $\forall x\in\mathbb{R},\ |f\star g(x)|\leq M\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t$.

2) Pour tout réels a,b, $|ab|\leq\dfrac{a^2+b^2}{2}$ (il suffit de développer dans les inégalité $(a-b)^2\geq0$ et $(a+b)^2\geq0$)

Ainsi, pour tout réels x et t, $|f(t)g(x-t)|\leq\dfrac{1}{2}\big((f(t)^2+g(x-t)^2\big)$.

Or l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(f(t))^2\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(g(x-t))^2\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(g(t))^2\,\mathrm{d}t$ par le changement de variable $u=x-t$, donc convergente. Ainsi d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)g(x-t)|\,\mathrm{d}t$ converge. De plus,

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)g(x-t)|\,\mathrm{d}t && \text{par inégalité triangulaire}\\ &\leq\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(f(t))^2\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(g(x-t))^2\,\mathrm{d}t\\ &\leq\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(f(t))^2\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(g(u))^2\,\mathrm{d}u && \text{en posant } u=x-t\end{aligned}$$

donc $f\star g(x)$ est bornée.

3) On pose $t=\cos\theta$, avec $\mathrm{d}t=-\sin\theta d\theta$. cos est bijective de $[0;\pi/2]$ sur $[0;1]$ et $\cos(0)=1$ et $\cos(\pi/2)=0$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1(1-t^2)^n &= 2\int_0^1(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t && \text{par parité}\\ &=2\int_{\pi/2}^0(1-\cos^2(\theta))^n(-\sin\theta)d\theta\\ &=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\theta\sin\theta d\theta\\ &=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}\theta d\theta\end{aligned}$$

4) Par définition de λ_n, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^n}{\lambda_n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda_n} \times \lambda_n = 1$.

5) Soit $\varepsilon > 0$. Alors pour tout $t \in [-1; -\varepsilon] \cup [\varepsilon; 1]$ on a $t^2 \geq \varepsilon^2$ donc $1 - t^2 < 1 - \varepsilon^2$ donc $h_n(t) \leq \dfrac{(1-\varepsilon^2)^n}{\lambda_n}$.
On a donc

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-\varepsilon} h_n(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\varepsilon}^{+\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t && \text{par parité de } h_n \\
&= \int_{\varepsilon}^{1} h_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_{\varepsilon}^{1} \frac{(1-\varepsilon^2)^n}{\lambda_n} \\
&\leq (1-\varepsilon) \times \frac{(1-\varepsilon^2)^n}{\lambda_n}
\end{aligned}$$

Or $\lambda_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{n} \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{n^{1/2}}$ d'après l'énoncé, et $(1-\varepsilon^2) < 1$ donc par croissance comparée $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(1-\varepsilon^2)^n}{\lambda_n} = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} h_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

6) Commençons par remarquer que f est continue et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge donc $f \star g$ est bien défini sur $\mathbb{R}$.

Soit x un réel fixé. Montrons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (f \star h_n)(x) = f(x)$. Soit $\varepsilon > 0$. f est continue en x donc il existe $\delta > 0$ tel que $\forall t \in [x-\delta, x+\delta],\ |f(t) - f(x)| < \varepsilon$. Enfin, f est bornée donc soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f(t)| \leq M$.
Le changement de variable $u = x - t$ donne $(f \star h_n)(x) = (h_n \star f)(x)$

$$\begin{aligned}
(f \star h_n)(x) - f(x) &= (h_n \star f)(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) h_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)(f(x-t) - f(x))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{-\delta} h_n(t)(f(x-t) - f(x))\,\mathrm{d}t + \int_{-\delta}^{\delta} h_n(t)(f(x-t) - f(x))\,\mathrm{d}t + \int_{\delta}^{+\infty} h_n(t)(f(x-t) - f(x))\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\infty}^{-\delta} h_n(t)(f(x-t) - f(x))\,\mathrm{d}t \right| &\leq \int_{-\infty}^{-\delta} |h_n(t)|(|f(x-t) - f(x)|)\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_{-\infty}^{-\delta} |h_n(t)|(|f(x-t)| + |f(x)|)\,\mathrm{d}t \\
&\leq 2M \int_{-\infty}^{-\delta} h_n(t)\,\mathrm{d}t && \text{car } h_n(t) \geq 0
\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2M \int_{-\infty}^{-\delta} h_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$ d'après la question précédente. De même, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\delta}^{+\infty} h_n(t)(f(x) - f(x-t))\,\mathrm{d}t = 0$ donc il existe un rang n_0 tel que pour $n \geq n_0$, ces deux intégrales sont inférieures à ε en valeur absolue.
Enfin, pour tout $t \in]-\delta, \delta[$, on a $|x - (x-t)| < \delta$ donc $|f(x) - f(x-t)| \leq \varepsilon$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\delta}^{\delta} h_n(t)(f(x-t) - f(x))\,\mathrm{d}t \right| &\leq \int_{-\delta}^{\delta} h_n(t)|f(x-t) - f(x)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} h_n(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} h_n(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t \leq 1$ car h_n est positive, donc finalement pour $n \geq n_0$,

$$|(f \star h_n)(x) - f(x)| \leq 3\varepsilon$$

En posant au début $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{3}$ et en faisant ces mêmes raisonnements sur ε', on obtient $|(f \star h_n)(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ à partir d'un certain rang, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (f \star h_n)(x) = f(x)$.

Correction de l'exercice 4 :

1) La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc admet une primitive F_1 sur $]-\infty; 0[$ et une primitive F_2 sur $]0; +\infty[$.
Pour tout $x > 0$, on a $f(x) = F_2(bx) - F_2(ax)$ donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ par somme et composition de fonctions dérivables et

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = bF_2'(bx) - aF_2'(ax) = b\frac{\sin bx}{b^2x^2} - a\frac{\sin ax}{a^2x^2} = \frac{\sin bx}{bx^2} - \frac{\sin ax}{ax^2}$$

De même, pour tout $x < 0$, on a $f(x) = F_1(bx) - F_1(ax)$ donc f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ par somme et composition de fonctions dérivables et

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = bF_1'(bx) - aF_1'(ax) = b\frac{\sin bx}{b^2x^2} - a\frac{\sin ax}{a^2x^2} = \frac{\sin bx}{bx^2} - \frac{\sin ax}{ax^2}$$

Finalement f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = \dfrac{\sin bx}{bx^2} - \dfrac{\sin ax}{ax^2}$

2) Soit $t > 0$. Pour tout $x \in [0, t]$ on a $\sin^{(3)}(x) = -\cos(x)$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 donne :

$$|\sin t - t - 0| \leq \frac{\sup_{x\in[0,t]} |\sin^{(3)}(x)| t^3}{6}$$

donc

$$|\sin t - t| \leq \frac{t^3}{6}$$

donc pour tout réel $t > 0$, $t - \dfrac{t^3}{6} \leq \sin t$ et l'inégalité $\sin t \leq t$ se démontre facilement en étudiant la fonction $t \mapsto t - \sin t$ d'où

$$t - \frac{t^3}{6} \leq \sin t \leq t$$

En divisant par t^2 on obtient donc bien :

$$\frac{1}{t} - \frac{t}{6} \leq \frac{\sin t}{t^2} \leq \frac{1}{t}$$

3) En intégrant l'inégalité ci-dessus on obtient pour tout $x > 0$:

$$\int_{ax}^{bx} \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{6}\right) \mathrm{d}t \leq f(x) \leq \int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

donc

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{b^2x^2 - a^2x^2}{12} \leq f(x) \leq \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

donc par encadrement $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

De plus on remarque que f est impaire donc on a aussi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 0$ Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

4) On sait déjà que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Étudions la dérivabilité en 0. On a, pour tout $x > 0$ et d'après la question précédente

$$-\frac{b^2x^2 - a^2x^2}{12} \leq f(x) - \ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq 0$$

donc

$$-\frac{b^2x - a^2x}{12} \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq 0$$

d'où par encadrement $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 0$. Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

f' est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ par opérations. Étudions la limite lorsque $x \to 0$, $x \neq 0$, de $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
\forall x \neq 0, \quad f'(x) &= \frac{\sin(bx)}{bx^2} - \frac{\sin(ax)}{ax^2} \\
&= \frac{bx - \frac{b^3x^3}{6} + o(x^3)}{bx^2} - \frac{ax - \frac{a^3x^3}{6} + ox^3)}{ax^2} \\
&= \frac{1}{x} - \frac{b^2x}{6} + o(x) - \frac{1}{x} + \frac{a^2x}{6} + o(x) & = \frac{a^2 - b^2}{6}x + o(x)
\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f'(x) = 0 = f'(0)$. Ainsi f' est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est $\mathcal{C}^1$.