★

Exercice 1 — Voir correction

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{4u_n + 2}$. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$

1) Montrer par récurrence que (u_n) et (v_n) sont bien définies.
2) Déterminer la nature de la suite v_n.
3) En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

★

Exercice 2 — Voir correction

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n - 1$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 2$. Montrer que v_n est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
2) En déduire une expression du terme général de (u_n).
3) En déduire la limite de (u_n) lorsque $n \to +\infty$

★

Exercice 3 — Voir correction

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 9$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 3}{2}$.
Déterminer une expression du terme général de (u_n) puis déterminer la limite de (u_n) si elle existe.

★

Exercice 4 — Voir correction

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = -2u_n + 5$.
Déterminer une expression du terme général de (u_n) puis déterminer la limite de (u_n) si elle existe.

★

Exercice 5 — Voir correction

Déterminer une expression de (u_n) en fonction de n dans chaque cas.

1) (u_n) est la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 8$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 2u_n$.
2) (u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} - \dfrac{3}{4}u_n$

★

Exercice 6 — Voir correction

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}n\right) - \sqrt{3}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}n\right)$.
Montrer que u_n vérifie :

$$\begin{cases} u_0 &= 3 \\ u_1 &= -3 \\ u_{n+2} &= -u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

★

Exercice 7 — Voir correction

Étudier dans chaque cas la limite de la suite (u_n). On pourra utiliser un nombre dérivé.

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\cos(1/n) - 1}{1/n}$
2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$
3) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$
4) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n(\mathrm{e}^{-1/n} - 1)$

★

Exercice 8 — Voir correction

Étudier la limite des suites suivantes :

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 + e^{-n^2 \cos(n)}$
2) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 \sin n - n^3$
3) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\ln n)^{1/n}$
4) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\sin n}{n}$
5) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n(-1)^n - n^2}{3n^2+1}$

★

Exercice 9 — Voir correction

Déterminer la limite des suites suivantes :

1) $e^{-0{,}001\times n}\, n^{2021}$
2) $n!\, e^{-n}$
3) $(3n)!\, e^{-n}$
4) $\dfrac{(\ln n)^{2021}}{\sqrt{n}}$

★

Exercice 10 — Voir correction

Déterminer dans chaque cas la limite de la suite (u_n)

a) $u_n = \dfrac{e^{2n-1} + e^{n^2}}{e^{n^2+2}}$
b) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2-n+1}}{\sqrt{4n^2+2n+1}}$
c) $u_n = \ln(1+n) - \ln(n)$
d) $u_n = \ln(n) + \ln(2n+1) - 2\ln(n)$
e) $u_n = \dfrac{(8n^3+1)^{\frac{1}{3}}}{(9n^2+1)^{\frac{1}{2}}}$
f) $u_n = \dfrac{\sqrt{\ln(n)}}{\ln(\sqrt{n})}$

★ ★

Exercice 11 — Voir correction

Déterminer dans chaque cas la limite de la suite (u_n)

a) $u_n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\ln(n+1) - \ln(n)}$
b) $u_n = n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)$
c) $u_n = \dfrac{4n^3+2n+1}{3\ln(n^{2022} + e^n)}$

★

Exercice 12 — Voir correction

Déterminer dans chaque cas la limite de la suite (u_n)

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{3n^2-4}{6-7n^2}$
b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2n^2\sqrt{n}-3}{2-n^3}$
c) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1-\sqrt{n\cos^2(n)}}{n\sqrt{n}}$
d) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

★ ★

Exercice 13 — Voir correction

Déterminer dans chaque cas un équivalent simple de u_n

a) $u_n = \sqrt{n+50}$
b) $u_n = n^4 + 2e^{-n} + \dfrac{1}{n} - n^3 - n^2$
c) $u_n = \dfrac{\sqrt{1+2n+5n^2}}{\ln(1+n^2)}$
d) $u_n = \sin\left(\dfrac{\ln(n)}{n+\sqrt{n}}\right)$
e) $u_n = \dfrac{e^{1/n} + \cos(e^{-n})}{\sqrt{n^4+n+1}}$
f) $u_n = n^3\left(e^{\frac{a}{\sqrt{n}}} + e^{\frac{b}{n}} + e^{\frac{c}{n^2}} - 3\right)$

★

Exercice 14 — Voir correction

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$.

1) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2) Déterminer, selon la valeur de u_0, la limite de la suite (u_n)

⋆

Exercice 15 — Voir correction

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2}$.

1) Montrer que la suite (u_n) est bien définie
2) Étudier la monotonie de la suite (u_n)
3) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

⋆ ⋆

Exercice 16 — Voir correction

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x^n + \ln x$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0;1[$. On note u_n cette solution.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. En exprimant $f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n)$ de deux façons différentes, déterminer le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis en déduire que (u_n) est croissante
3) Justifier que (u_n) converge vers un réel ℓ, puis montrer que $\ell = 1$.

⋆ ⋆

Exercice 17 — Voir correction

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi[$. On note x_n cette solution.
2) Justifier que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$

⋆ ⋆

Exercice 18 — Voir correction

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0, v_0 \in \mathbb{R}_+^*$ avec $u_0 < v_0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < v_n$
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \leq \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$
3) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Conclure.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 19 — Voir correction

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}^*$ qui converge vers un réel ℓ, et soit (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

En utilisant la définition de la limite,montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ (ce résultat est connu sous le nom de **Théorème de Cesàro**).

⋆ ⋆

Exercice 20 — Voir correction

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

★ ★

Exercice 21 — Voir correction

Dans cet exercice, on considère la suite (H_n) définie pour tout entier naturel non nul n par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1) Soient (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = H_n - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

   a) Montrer que pour tout réel $x > -1$, on a $\ln(1+x) \leq x$.
   Indication : On pourra étudier la fonction $f : x \longmapsto x - \ln(1+x)$.
   b) Montrer que (u_n) est une suite décroissante et que (v_n) est une suite croissante.
   c) Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite γ.
   d) En déduire un équivalent simple de H_n
   e) Montrer que $\gamma > 0$.

★ ★

Exercice 22 — Voir correction

Soit $a > 0$ un réel. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k u_k}{k}$

1) Montrer par récurrence simple que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $3^n \geq n+2$
2) Montrer par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq an$
3) En déduire la limite de (u_n).

★ ★

Exercice 23 — Voir correction

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ et $0 \leqslant v_n \leqslant 3$.
On suppose que $(u_n v_n)$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 6$. Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes et préciser leurs limites.

★

Exercice 24 — Voir correction

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{2u_n}}{\mathrm{e}^{u_n} + 1}$

On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{x} + 1}$.

1) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et u_{n+1} sont bien définis et $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$
3) Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$.
4) En déduire que l'équation $f(x) = x$ n'a aucune solution réelle. Conclure sur la limite de (u_n).

★

Exercice 25 — Voir correction

Le but de cet exercice est de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^n}{n!} = 0$.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{e}^n$ et $v_n = n!$.

1) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2} \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$
2) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n \leq C \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-n_0} v_n$.
3) Conclure.

⋆⋆⋆

Exercice 26 — Voir correction

1) Dans cette question on démontre le théorème de Césàro (voir exercice 19) dans un cas particulier. On considère une suite (a_n) croissante qui converge vers un réel ℓ et on pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k$.
   a) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité $b_n \leq a_n$
   b) Montrer que la suite (b_n) est croissante.
   c) Montrer que la suite (b_n) converge vers un réel ℓ' qui vérifie $\ell' \leq \ell$.
   d) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité $b_{2n} \geq \dfrac{b_n + a_n}{2}$
   e) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.
2) On se propose d'étudier maintenant la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$.
   a) Montrer que pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et supérieur ou égal à 1.
   b) Montrer que (u_n) est croissante.
   c) Montrer que si (u_n) converge vers un réel ℓ, alors $\ell = 0$. Conclure sur la limite de (u_n).
3) Recherche d'un équivalent de u_n
   a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \dfrac{1}{2}$
   b) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x} - x$, puis en déduire que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est croissante.
   c) Utiliser la première question pour établir que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2}$.

⋆⋆⋆

Exercice 27 — Voir correction

Le but de cet exercice est de démontrer l'irrationalité du nombre e.
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

1) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire qu'elles convergent vers une même limite ℓ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n < \ell < v_n$.
2) Montrer par l'absurde que ℓ est irrationnel.
3) En utilisant une intégration par parties, montrer par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right| \leq \dfrac{1}{n!}$
5) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}$. Conclure.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) On note $\mathcal{P}(n)$: "u_n est bien défini et $u_n > 0$" et on raisonne par récurrence
   - **Initialisation :** $u_0 = 3 > 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - **Hérédité :** Supposons que $\mathcal{P}(n$ soit vraie pour un certain rang n. Alors $4u_n + 2 > 2 > 0$ donc $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{4u_n+2}$ est bien défini et $u_{n+1} > 0$ car $u_n > 0$.
   - **Conclusion :** Par principe de récurrence, $\boxed{\text{on en conclut que } u_n \text{ est bien défini pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et que } u_n > 0}$

   On en déduit que $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $u_n \neq 0$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}} \\ &= \frac{1}{\frac{2u_n}{4u_n+2}} \\ &= \frac{4u_n+2}{2u_n} \\ &= \frac{4u_n}{2u_n} + \frac{2}{2u_n} \\ &= 2 + \frac{1}{u_n} \\ &= 2 + v_n \end{aligned}$$

   Ainsi, (v_n) est une suite arithmétique de raison 2.
3) (v_n) est une suite arithmétique et $v_0 = \dfrac{1}{u_0} = \dfrac{1}{3}$. On en déduit que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{3} + 2n}$

   On a alors $\boxed{u_n = \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{\frac{1}{3} + 2n} = \dfrac{3}{1+6n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$

Correction de l'exercice 2 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2 \\ &= \frac{3}{2}u_n - 1 - 2 \\ &= \frac{3}{2}u_n - 3 \\ &= \frac{3}{2}(u_n - 2) \\ &= \frac{3}{2}v_n \end{aligned}$$

   donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = -1$.
2) On en déduit que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -\left(\frac{3}{2}\right)^n.}$.

   Ainsi, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + 2$, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2 - \left(\frac{3}{2}\right)^n}$$

3) Comme $1 < \frac{3}{2}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ donc $\boxed{\text{par opérations } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty.}$

Correction de l'exercice 3 : On reconnaît une suite arithmético-géométrique : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{2}u_n - \frac{3}{2}$. D'après le cours, on sait qu'il existe un réel r tel que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - r$ est géométrique. Si on ne se souvient plus de la formule pour retrouver r, on peut procéder d'une des façons suivantes :

Méthode 1 :

$$\begin{aligned}(v_n) \text{ est géométrique} &\iff \exists q \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = qv_n\\ &\iff \exists q \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - r = q(u_n - r)\\ &\iff \exists q \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_n - 3}{2} - r = qu_n - qr\\ &\iff \exists q \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{1}{2} - q\right)u_n = (1-q)r + \frac{3}{2}\end{aligned}$$

En posant $q = \frac{1}{2}$ et r tel que $(1-q)r + \frac{3}{2} = 0$ on aura bien l'égalité voulue. On pose donc $r = \frac{-\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}} = -3$.

Méthode 2 :
r est un point fixe de la fonction $f : x \longmapsto \frac{x-3}{2}$ donc $r = \frac{r-3}{2}$, on retrouve $r = -3$

Soit donc (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 3$. Alors

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} &= u_{n+1} + 3\\ &= \frac{u_n - 3}{2} + 3\\ &= \frac{v_n - 3 - 3}{2} + 3\\ &= \frac{v_n}{2} - 3 + 3\\ &= \frac{v_n}{2}\end{aligned}$$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. On en déduit que pour tout entier n, $v_n = \frac{1}{2^n}v_0 = \frac{1}{2^n}(u_0 + 3) = \frac{12}{2^n}$, donc pour tout entier n, $u_n = \frac{12}{2^n} - 3$.
Puisque $2 > 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3$ par opérations sur les limites.

Correction de l'exercice 4 : On cherche r tel que $r = -2r + 5$, on trouve $r = \frac{5}{3}$.
On pose $v_n = u_n - \frac{5}{3}$ pour tout entier n, on a alors

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{5}{3}\\ &= -2u_n + 5 - \frac{5}{3}\\ &= -2(v_n + \frac{5}{3}) + 5 - \frac{5}{3}\\ &= -2v_n - \frac{10}{3} + \frac{15}{3} - \frac{5}{3}\\ &= -2v_n\end{aligned}$$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison -2. On en déduit que pour tout entier n, $v_n = (-2)^n v_0 = (-2)^n(u_0 - \frac{5}{3}) = -\frac{1}{3} \times (-2)^n$.
Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + \dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{3} - \dfrac{1}{3} \times (-2)^n$.
Si (u_n) convergeait, alors par opération sur les limites $(-2)^n$ convergerait. Or $-2 < -1$ donc $(-2)^n$ diverge.

Correction de l'exercice 5 :

1) L'équation caractéristique de cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est

$$r^2 - 4r + 2 = 0$$

dont le discriminant est $\Delta = 4^2 - 4 \times 2 = 8$.
Les racines sont $r_1 = \dfrac{4-\sqrt{8}}{2} = 2 - \sqrt{2}$ et $r_2 = \dfrac{4+\sqrt{8}}{2} = 2 + \sqrt{2}$.
Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda(2-\sqrt{2})^n + \mu(2+\sqrt{2})^n$$

Comme $u_0 = 3$ et $u_1 = 8$, on en déduit que

$$\begin{cases} \lambda(2-\sqrt{2})^0 + \mu(2+\sqrt{2})^0 = 3 \\ \lambda(2-\sqrt{2})^1 + \mu(2+\sqrt{2})^1 = 8 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ \lambda(2-\sqrt{2}) + \mu(2+\sqrt{2}) = 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mu = 3 - \lambda \\ \lambda(2-\sqrt{2}) + (3-\lambda)(2+\sqrt{2}) = 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mu = 3 - \lambda \\ -2\sqrt{2}\lambda = 2 - 3\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mu = 3 - \lambda \\ \lambda = \dfrac{3\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Donc $\lambda = \dfrac{3-\sqrt{2}}{2}$ et $\mu = \dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$.
Finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\frac{3-\sqrt{2}}{2}\right)(2-\sqrt{2})^n + \left(\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right)(2+\sqrt{2})^n}$$

2) L'équation caractéristique de cette suite récurrence linéaire d'ordre 2 est

$$r^2 - 2 + \frac{3}{4}$$

dont le discriminant est $\Delta = 4 - 4 \times \dfrac{3}{4} = 1$ et les racines sont $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{1}}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $r_2 = \dfrac{2+\sqrt{1}}{2} = \dfrac{3}{2}$.
Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\frac{1}{2^n} + \mu\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Comme $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$, on a

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \dfrac{1}{2}\lambda + \dfrac{3}{2}\mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ -\lambda = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -\dfrac{1}{2^n} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^n}$

Correction de l'exercice 6 : On a $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$ donc $u_0 = 3\times 1 - \sqrt{3}\times 0 = 3$.
De plus, $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc

$$\begin{aligned} u_1 &= 3\times\left(-\frac{1}{2}\right) - \sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \\ &= -3 \end{aligned}$$

Finalement, on a $u_{n+2} = 3\cos\left(\frac{2\pi}{3}n + \frac{4\pi}{3}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}n + \frac{4\pi}{3}\right)$
Ainsi,

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right)\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) - \sqrt{3}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right)\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)\right) \\ &= 3\left(-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right)\right) - \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)\left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right] + \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right)\left[2\sqrt{3}\right] \\ &= 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \end{aligned}$$

Or, d'autre part, on a

$$\begin{aligned} -u_{n+1} - u_n &= -3\cos\left(\frac{2\pi}{3}n + \frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}n + \frac{2\pi}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \\ &= \cancel{\frac{3}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right) + \cancel{\frac{3}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)} - \cancel{3\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)} + \sqrt{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \\ &= 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \end{aligned}$$

donc on a bien $\boxed{u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n}$.

Correction de l'exercice 7 :

1) On sait que cos est dérivable en 0 et que $\cos'(0) = \sin(0) = 0$.
   On en déduit, par définition de la dérivabilité, que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0$.
   Ainsi, puisque $\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a par composition de limites $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\cos(1/n) - 1}{1/n} = 0$
2) On sait que ln est dérivable en 1 et que $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$.
   On en déduit, par définition de la dérivabilité, que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
   Ainsi, puisque $\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a par composition de limites $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n}}{1/n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$
3) On sait que sin est dérivable en 0 et que $\sin'(0) = \cos(0) = 1$.
   On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.
   Ainsi, puisque $\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a par composition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin(1/n)}{1/n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n\sin(1/n) = 1$.
4) On sait que exp est dérivable en 0 et que $\exp'(0) = \exp(0) = 1$.
   On en déduit, par définition de la limite, que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.
   Ainsi, puisque $dfrac1n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a par composition de limites $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^(-1/n) - 1}{-1/n} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n(e^{-1/n} - 1) = -1$.

Correction de l'exercice 8 :

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geq 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 + \mathrm{e}^{-n^2\cos(n)} \geq n^2$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2) $u_n = n^3\left(\dfrac{\sin n}{n} - n\right)$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leq sinn \leq 1$ donc $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\sin n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$, d'après le théorème des gendarmes $\dfrac{\sin n}{n}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$.
Par opérations sur les limites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \mathrm{e}^{\ln(\ln n)/n}$
Or, $\dfrac{\ln(\ln(n))}{n} = \dfrac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} \times \dfrac{\ln(n)}{n}$. Comme $\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on a par composition et par croissance comparée $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln(n))}{\ln n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$. Ainsi, par produit de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln(n))}{n} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ par composition de limites.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin n \leq 1$ donc $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\sin n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on a d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $-n \leq n(-1)^n \leq n$ et $-n - n^2 \leq n(-1)^n - n^2 \leq n - n^2$. Comme $3n^2 + 1 > 0$ on a

$$\frac{-n-n^2}{3n^2+1} \leq \frac{n(-1)^n - n^2}{3n^2+1} \leq \frac{n-n^2}{3n^2+1}$$

On a $\dfrac{-n-n^2}{3n^2+1} = \dfrac{n^2(-1-\frac{1}{n}}{n^2(3+\frac{1}{n^2}} = \dfrac{-1-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\dfrac{1}{3}$ par opérations sur les limites.
On a aussi $\dfrac{n-n^2}{3n^2+1} = \dfrac{n^2(1-\frac{1}{n}}{n^2(3+\frac{1}{n^2}} = \dfrac{-1+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\dfrac{1}{3}$ par opérations sur les limites.
Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 9 :

1) Par comparaison usuelle on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}001\times n} \times n^{2021} = 0$

2) Par comparaison usuelle on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n!\,\mathrm{e}^{-n} = +\infty$.

3) On a $(3n)!\,\mathrm{e}^{-n} = (3n)!\,\mathrm{e}^{-3n}\,\mathrm{e}^{2n}$
Par comparaison usuelle, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n = +\infty$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (3n)!\,\mathrm{e}^(-3n) = +\infty$. Par produit,on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (3n)!\,\mathrm{e}^{-n} = +\infty$.

4) Par comparaison usuelle, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^{2021}}{\sqrt{n}} = 0$.

5)

Correction de l'exercice 10 :

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\mathrm{e}^{2n-1} + \mathrm{e}^{n^2}}{\mathrm{e}^{n^2+2}} \\ &= \mathrm{e}^{2n-1-n^2-2} + \mathrm{e}^{-2} \\ &= \mathrm{e}^{-n^2+2n-3} + \mathrm{e}^{-2} \end{aligned}$$

Or $-n^2+2n-3 \sim -n^2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(-n^2+2n-3) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n^2+2n-3} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}^{-2}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = \sqrt{\dfrac{n^2-n+1}{4n^2+2n+1}}$.
Or, $\dfrac{n^2-n+1}{4n^2+2n+1} \sim \dfrac{n^2}{4n^2} \sim \dfrac{1}{4}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-n+1}{4n^2+2n+1} = \dfrac{1}{4}$. Par composition de limites on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(\frac{1+n}{n}\right) \\ &= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ donc par composition de limites $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln(1) = 0$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \ln(n) + \ln(2n+1) - 2\ln(n) \\ &= \ln(2n+1) - \ln(n) \\ &= \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) \\ &= \ln\left(2+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right) = 2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln(2)$ par composition de limites.

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(8n^3)^{1/3} \times \left(1+\frac{1}{8n^3}\right)^{1/3}}{(9n^2)^{1/2}\left(1+\frac{1}{9n^2}\right)^{1/2}} \\ &= \frac{2n\left(1+\frac{1}{8n^3}\right)^{1/3}}{3n\left(1+\frac{1}{9n^2}\right)^{1/2}} \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{8n^3}\right)^{1/3} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{9n^2}\right)^{1/2} = 1$ par composition de limites, donc par produit et quotient de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$.

f) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\sqrt{\ln(n)}}{\ln(\sqrt{n})} \\ &= \frac{\sqrt{\ln(n)}}{\frac{1}{2}\ln(n)} \\ &= 2\frac{\sqrt{\ln(n)}}{\ln(n)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\ln(n)}} \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Correction de l'exercice 11 :

a) Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ on a $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$.

Finalement, $u_n \sim \frac{1/n}{1/n} \sim 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

b) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$ donc $\mathrm{e}^{\frac{2}{n}} = 1 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{2}{n}\right)$. Ainsi, $u_n = n \times \left(1+\frac{2}{n}+o\left(\frac{2}{n}\right) - 1\right) = 2 + o(2)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

c) On a $4n^3+2n+1 \sim 4n^3$, et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $3\ln(n^{2022}+\mathrm{e}^n) = 3\ln(e^n(n^{2022}\,\mathrm{e}^{-n}+1) = 3n+3\ln(n^{2022}\,\mathrm{e}^{-n}+1)$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{2022}\,\mathrm{e}^{-n} = 0$ par croissance comparée donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\ln(n^{2022}\,\mathrm{e}^{-n}+1) = \ln(1) = 0$. Ainsi, $3\ln(n^{2022}\,\mathrm{e}^{-n}+1) = o(3n)$ donc finalement $3\ln(n^{2022}+\mathrm{e}^n) \sim 3n$.
On en déduit finalement que $u_n \sim \dfrac{4n^3}{3n} \sim \dfrac{4n^2}{3}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Correction de l'exercice 12 :

a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{n^2\left(3-\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{6}{n^2}-7\right)} \qquad = \frac{3-\frac{4}{n^2}}{\frac{6}{n^2}-7}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 3-\dfrac{4}{n^2} = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6}{n^2}-7 = -7$ donc par opérations sur les limites, (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{-3}{7}$.

b) Pour tout $n \in_N$

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n^2\sqrt{n}\left(2-\frac{3}{n^2\sqrt{n}}\right)}{n^3\left(\frac{2}{n^3}-1\right)} \\ &= \frac{2-\frac{3}{n^2\sqrt{n}}}{\sqrt{n}\left(\frac{2}{n^3}-1\right)} && \text{car } \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\dfrac{3}{n^2\sqrt{n}}\right) = 2$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{n^3}-1\right) = -1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ par opérations sur les limites.

c) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0 \le \cos^2(n) \le 1$ donc $0 \le n\cos^2(n) \le n$ et ainsi $0 \le \sqrt{n\cos^2(n)} \le \sqrt{n}$. On a donc pour tout entier n,

$$0 \ge -\sqrt{n\cos^2(n)} \ge -\sqrt{n}$$
$$1 \ge 1-\sqrt{n\cos^2(n)} \ge 1-\sqrt{n}$$
$$\frac{1}{n\sqrt{n} \ge \frac{1-\sqrt{n\cos^2(n)}}{n\sqrt{n}}} \ge \frac{1-\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

Or $\dfrac{1}{n\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ et $\dfrac{1-\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}-1}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ donc par théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

d) Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \\ &= \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\times(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Or pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sqrt{n+1} \ge \sqrt{n}$ car la fonction racine carrée est croissante, donc $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \ge 2\sqrt{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$ (limite de référence). Ainsi par théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) = +\infty$ donc par inverse de limite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Correction de l'exercice 13 :

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{n\left(1+\frac{50}{n}\right)} = \sqrt{n} \times \sqrt{1+\frac{50}{n}}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{50}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $u_n \sim \sqrt{n}$.

b) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\,\mathrm{e}^{-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, et $n^4 - n^3 - n^2 \sim n^4$ donc $2\,\mathrm{e}^{-n} = o(n^4)$ et $\dfrac{1}{n} = o(n^4)$ donc finalement $u_n \sim n^4$.

c) $\sqrt{1+2n+5n^2} = \sqrt{5n^2} \times \sqrt{1+\frac{2}{5n}+\frac{1}{5n^2}} \sim \sqrt{5n^2}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{2}{5n}+\frac{1}{5n^2}} = 1$.

De même, $\ln(1+n^2) = \ln(n^2) + \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \ln(n^2) \sim 2\ln(n)$

Donc $u_n \sim \dfrac{\sqrt{5n^2}}{2\ln(n)} \sim \dfrac{\sqrt{5}n}{2\ln(n)}$.

d) On a $\sqrt{n} = o(n)$ donc $n+\sqrt{n} \sim n$. Ainsi, $\dfrac{\ln n}{n+\sqrt{n}} \sim \dfrac{\ln n}{n}$ donc $\dfrac{\ln n}{n+\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc $\sin\left(\dfrac{\ln n}{n+\sqrt{n}}\right) \sim \dfrac{\ln n}{n+\sqrt{n}} \sim \dfrac{\ln n}{n}$.

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{1/n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(\mathrm{e}^{-n}) = \cos(0) = 1$ donc $\mathrm{e}^{1/n} + \cos(\mathrm{e}^{-n}) \sim 2$.

De plus, $\sqrt{n^4+n+1} = \sqrt{n^4} \times \sqrt{1+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}} \sim \sqrt{n^4} \sim n^2$ car $\sqrt{1+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Ainsi, $u_n \sim \dfrac{2}{n^2}$.

f) $\mathrm{e}^{a/\sqrt{n}} = 1 + \dfrac{a}{\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{a}{\sqrt{n}}\right)$

$\mathrm{e}^{b/n} = 1 + \dfrac{b}{n} + o\left(\dfrac{b}{n}\right)$

$\mathrm{e}^{c/n^2} = 1 + \dfrac{c}{n^2} + o\left(\dfrac{b}{n^2}\right)$.

Ainsi, $u_n = n^3\left(3 + \dfrac{a}{\sqrt{n}} + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2} - 3 + o\left(\dfrac{a}{\sqrt{n}}\right) + o\left(\dfrac{b}{n}\right) + o\left(\dfrac{c}{n^2}\right)\right)$.

Si $a \neq 0$, alors $\dfrac{c}{n^2} = o\left(\dfrac{b}{n}\right)$ et $\dfrac{b}{n} = o\left(\dfrac{a}{\sqrt{n}}\right)$.

Ainsi, $u_n = n^3 \times \left(\dfrac{a}{\sqrt{n}} + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2} + o\left(\dfrac{a}{\sqrt{n}}\right)\right) = n^3 \times \left(\dfrac{a}{\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{a}{\sqrt{n}}\right)\right) = an^2\sqrt{n} + o\left(an^2\sqrt{n}\right)$ donc $u_n \sim an^2\sqrt{n}$.

Si $a = 0$ et $b \neq 0$, on a $u_n = n^3 \times \left(\dfrac{b}{n} + o\left(\dfrac{b}{n}\right)\right)$ donc $u_n \sim bn^2$

Si $a = 0$ et $b = 0$, alors $u_n = n^3 \times \left(\dfrac{c}{n^2} + o\left(\dfrac{c}{n^2}\right)\right) \sim cn$.

Correction de l'exercice 14 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n^2+1}{2} - u_n \\ &= \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2} \\ &= \frac{(u_n-1)^2}{2} \end{aligned}$$

comme $(u_n-1)^2 \geq 0$, on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc (u_n) est croissante.

2) (u_n) est croissante donc il y a deux possibilités

— Soit (u_n) est majorée, dans ce cas elle admet une limite finie ℓ

— Soit (u_n) est non majorée et tend vers $+\infty$.

Analyse : Supposons d'abord que (u_n) admette une limite finie ℓ. Alors, par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$ et par opérations sur les limites, on obtient $\ell = \dfrac{\ell^2+1}{2}$. La seule solution de cette équation est $\ell = 1$.

Puisque (u_n) est croissante, cela implique que $u_0 \leq 1$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 1$. On remarque que $u_n < -1 \Rightarrow \dfrac{u_n^2+1}{2} > 1$ donc une condition plus forte est $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq u_n \leq 1$

Synthèse : Supposons que $-1 \leq u_0 \leq 1$ et montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N},\ -1 \leq u_n \leq 1$.

- **Initialisation :** On a $-1 \leq u_0 \leq 1$ par hypothèse donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

- **Hérédité :** On suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq u_n \leq 1$. Alors $0 \leq u_n^2 \leq 1$ donc $1 \leq u_n^2 + 1 \leq 2$ et finalement $0 \leq \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{u_n^2+1}{2} \leq 1$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- **Conlusion :** Par principe de récurrence on en conclut que $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, si $-1 \leq u_0 \leq 1$, (u_n) est bornée donc (u_n) converge vers 1 comme vu dans la première partie de la réponse.
Si $|u_0| > 1$, alors $u_1 > 1$. Comme (u_n) est croissante, on en déduit que (u_n) ne peut pas converger vers 1 (sinon on aurait $1 \geq u_1 > 1$. Comme 1 est la seule limite possible, on en conclut que (u_n) ne converge pas. (u_n) est croissante et elle ne converge pas donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Correction de l'exercice 15 :

1) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$.
   - **Initialisation :** On a $u_0 = 1 > 0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$
   - **Hérédité :** Supposons que $u_n > 0$ pour un certain rang n, alors u_{n+1} est bien défini et $u_{n+1} > 0$ car $\dfrac{1}{u_n^2} > 0$ et $u_n > 0$.
   - **Conclusion :** Par principe de récurrence, on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n^2} \geq 0$ donc (u_n) est croissante.
3) Une suite croissante est soit convergente, soit elle tend vers $+\infty$.
   Supposons que (u_n) soit convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, par unicité de la limite et par opérations de limites, on a $\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell^2}$, donc $\dfrac{1}{\ell^2} = 0$. Cette équation n'a aucune solution, donc (u_n) ne peut pas converger. On en conclut que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Correction de l'exercice 16 :

1) f_n est dérivable sur $]0;1]$ comme somme de fonction dérivables sur cet intervalle, et $\forall x \in]0;1]$, $f_n'(x) = nx^{n-1} + \dfrac{1}{x}$.
   Pour tout $x \in]0;1]$ on a $f_n'(x) > 0$ donc f_n est strictement croissante sur $]0;1]$.
   De plus, f_n est continue sur $]0;1]$ (car dérivable sur $]0;1]$) et $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = -\infty$ et $f_n(1) = 1$. Puisque $0 \in]\lim\limits_{x \to 0} f_n(x); f_n(1)[$, on en conclut d'après le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe une unique solution à l'équation $f_n(x) = 0$ dans l'intervalle $]0;1[$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a d'une part
   $$\begin{aligned} f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) &= u_n^{n+1} + \ln u_n - u_n^n - \ln u_n \\ &= u_n^n(u_n - 1) \end{aligned}$$
   et d'autre part $f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) = f_{n+1}(u_n)$ car $f_n(u_n) = 0$.
   Puisque $u_n \in]0;1[$, $u_n^n(u_n - 1) < 0$ donc $f_{n+1}(u_n) < 0$.
   Puisque $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ et que f_{n+1} est croissante sur $]0;1[$, on en déduit que $u_n < u_{n+1}$. Ceci étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ on en conclut finalement que (u_n) est croissante.
3) (u_n) est croissante d'après la question 2) et majorée par 1 d'après la question 1), donc (u_n) est convergente. Soit ℓ la limite de (u_n), alors $\forall n \in \mathbb{N}$, puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 1$ alors $\ell \leq 1$, et puisque (u_n) est croissante on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq 1$.
   Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \ell^n = 0$ et puisque $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n^n \leq \ell^n$ on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^n = 0$.
   Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n^n + \ln u_n = 0$, donc par passage à la limite et par continuité de ln on obtient $\ln(\ell) = 0$ donc $\ell = 1$. Contradiction, donc $\ell = 1$.

Correction de l'exercice 17 :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, La fonction $f : x \mapsto \tan x - x$ est continue et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi[$, et $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}+n\pi} \tan x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+n\pi} \tan x = +\infty$ par somme de limites. De plus $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi[$, $f'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x)$. f' est strictement positive sur $]-\frac{\pi}{2}+n\pi; n\pi[$ et sur $]n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi[$ donc f est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi[$.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un unique réel $x_n \in]-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi[$ tel que $\tan x_n = x_n$.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $-\frac{\pi}{2} + n\pi \leq x_n \leq \frac{\pi}{2} + n\pi$ donc $-\frac{\pi}{2n\pi} + 1 \leq \dfrac{x_n}{2n\pi} \leq \frac{\pi}{2n\pi} + 1$ et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{\pi}{2n\pi} + 1\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\pi}{2n\pi} + 1\right) = 1$ on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_n}{2n\pi} = 1$, donc $x_n \sim n\pi$.

Correction de l'exercice 18 :

1) On raisonne par récurrence :

— **Initialisation :** Par hypothèse, on a $u_0 < v_0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

— **Hérédité :** Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < u_n < v_n$. On a $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ donc on a immédiatement $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$.
Montrons que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ avec égalité si et seulement si $x = y$:
On a $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ avec égalité si et seulement si $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ c'est à dire si $x = y$.
Or $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{xy}$ car $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
Finalement, on a bien

$$\begin{aligned} x + y - 2\sqrt{xy} &\geq 0 && \text{avec égalité si et seulement si } x = y \\ \frac{x+y}{2} &\geq \sqrt{xy} && \text{avec égalité si et seulement si } x = y \end{aligned}$$

Comme $u_n \neq v_n$, on a bien $\sqrt{u_n v_n} < \dfrac{u_n + v_n}{2}$ donc $0 < u_{n+1} < v_{n+1}$, la propriété est vraie au rang $n + 1$.

— **Conclusion :** Par principe de récurrence, on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < v_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} \\ &= \frac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2 \\ &\leq \frac{1}{2}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}) \\ &\leq \frac{1}{2}(v_n - u_n) \end{aligned}$$

Par récurrence immédiate, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < v_n - u_n < \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0) = 0$ on en déduit d'après le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n \to +\infty}(v_n - u_n) = 0$.
Montrons que l'une de ces suites est croissante et l'autre décroissante.
Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{u_n v_n} - u_n \\ &= \sqrt{u_n v_n} - \sqrt{u_n u_n} \\ &= \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) \end{aligned}$$

comme $v_n > u_n$ et que la fonction racine carrée est strictement croissante, on a $\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n} > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.
Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_n + v_n}{2} - v_n \\ &= \frac{u_n + v_n - 2v_n}{2} \\ &= \frac{u_n - v_n}{2} \end{aligned}$$

comme $v_n > u_n$, on a $v_{n+1} - v_n < 0$, la suite (v_n) est donc strictement décroissante.
On en conclut que (u_n) est (v_n) sont des suites adjacentes, elles convergent donc toutes deux vers la même limite ℓ.

Le passage à la limite dans les égalités $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ donne $\ell = \sqrt{\ell^2} = \ell$ et $\ell = \dfrac{\ell + \ell}{2}$, cela ne nous apprend donc rien sur la limite ℓ.

On ne peut rien dire sur ℓ à part que $u_0 \leq \ell \leq v_0$.

Correction de l'exercice 19 :
On a $\ell = n \times \dfrac{\ell}{n} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\ell}{n}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_n - \ell &= \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ell}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k - \ell}{n} \end{aligned}$$

On sait que (u_n) converge vers ℓ, donc il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$.
Pour $n \geq n_0$, on a $\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n_0} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k$. La deuxième somme peut être encadrée de la façon suivante :

$$\sum_{k=n_0}^{n} (\ell - \varepsilon) \leq \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{n} (\ell + \varepsilon)$$

donc

$$-\sum_{k=n_0}^{n} \varepsilon \leq \sum_{k=n_0}^{n} (u_k - \ell) \leq \sum_{k=n_0}^{n} \varepsilon$$

et finalement

$$-\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n} \varepsilon \leq \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n} (u_k - \ell) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n} \varepsilon$$

En ajoutant $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k - \ell)$ de chaque côté de l'inégalité, on obtient

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k - \ell) - \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n} \varepsilon \leq w_n \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k - \ell) + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n} \varepsilon$$

Comme $\dfrac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n} \varepsilon = \dfrac{n - n_0}{n}\varepsilon \leq \varepsilon$, on obtient :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k - \ell) - \varepsilon \leq w_n \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k - \ell) + \varepsilon$$

Puisque n_0 est fixé, $\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k - \ell)$ est un réel fixé. Ainsi $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k - \ell)$ converge vers 0, donc il existe un entier n_1 tel que

$$\forall n \geq n_1,\ -\varepsilon \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k - \ell) \leq \varepsilon$$

En posant $n_2 = \max(n_0, n_1)$, on a en combinant les inégalités précédemment obtenues

$$\forall n \geq n_2,\ -2\varepsilon \leq w_n - \ell \leq 2\varepsilon$$

Pour un réel $\varepsilon > 0$ fixé, en posant $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$, on a d'après la question précédente

$$\exists n_2, \forall n \geq n_2,\ -2\varepsilon' \leq w_n - \ell \leq 2\varepsilon'$$

donc

$$\exists n_2, \forall n \geq n_2,\ -\varepsilon \leq w_n - \ell \leq \varepsilon$$

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} (w_n - \ell) = 0$, autrement dit que $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$.

Correction de l'exercice 20 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n, et v_n sont des réels strictement positifs donc l'inégalité donnée est équivalente à

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$$

autrement dit la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_n}{v_n} \leq \dfrac{u_0}{v_0}$ par une récurrence immédiate, donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_0 v_n$.
On conclut par théorème de comparaison que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_0 v_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ car $u_0 > 0$.

Correction de l'exercice 21 :

1) a) On étudie la fonction $f : x \longmapsto x - \ln(1+x)$ définie sur $]-1;+\infty[$.
Cette fonction est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables et pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$.
Pour $x > -1$ on a $1+x > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que x. On a donc

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

f atteint son minimum en 0 donc pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $f(x) \geq f(0) = 0$. On a conclut que pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Or, $-\dfrac{1}{n+1} > -1$ donc d'après la question précédente on a $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) \leq -\dfrac{1}{n+1}$. Finalement,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &\leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \\
&= H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{1}{n} > -1$ donc d'après la question précédente $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n}$ et ainsi $-\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \geq -\dfrac{1}{n}$. Finalement

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &\geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \leq u_n$ et $v_{n+1} \geq v_n$ donc (u_n) est décroissante et (v_n) est croissante.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - v_n = u_n - u_n + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$ donc $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.
Comme de plus (u_n) est décroissante et (v_n) est croissante d'après la question précédente, on en conclut que (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes. Ainsi, d'après le cours, (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel γ.

d) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = u_n + \ln(n)$. Ainsi, pour tout $n \geq 2$, on a $\frac{H_n}{\ln(n)} = \frac{u_n}{\ln(n)} + 1$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = \gamma$ et $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$ on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$, autrement dit $H_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$.

e) (v_n) est une suite croissante et $v_2 = u_2 - \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} - \ln(2) - \frac{1}{2} = 1 - \ln(2)$. Or $\ln(2) < \ln(\mathrm{e}) = 1$ donc $v_2 > 0$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq v_2$ donc par passage à la limite $\gamma \geq v_2 > 0$ donc $\gamma > 0$.

Correction de l'exercice 22 :

1) Pour $n = 1$, $3^1 = 3$ et $1 + 2 = 3$ donc $3^1 \geq 1 + 2$. La propriété est donc vraie pour $n = 1$
Supposons que $3^n \geq n + 2$ pour un certain entier n. Alors en multipliant par 3 on obtient

$$3^{n+1} \geq 3n + 6$$

Or $3n + 6 = \underbrace{2n + 3}_{\geq 0} + n + 3 \geq n + 3$ donc $3^{n+1} \geq n + 3$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$
La propriété est héréditaire et elle est vraie pour $n = 1$, on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $3^n \geq n + 2$.

2) Pour $n = 1$ on a $u_1 = a$ par hypothèse, et $a \times 1 = a$ donc on a bien $u_1 \geq a \times 1$, la propriété est vraie pour $n = 1$.
Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ on ait $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $u_k \geq ak$.
Alors

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k a_k}{k} \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k \times ak}{k} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&\geq a \sum_{k=1}^{n} 3^k \\
&\geq 3a \sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} \\
&\geq 3a \sum_{j=0}^{n-1} 3^j \\
&\geq 3a \times \frac{3^{n-1+1} - 1}{3 - 1} \\
&\geq 3a \times \frac{3^n - 1}{2} \\
&\geq \frac{3a}{2} \times (3^n - 1) \\
&\geq \frac{3a}{2} \times (n + 2 - 1) && \text{d'après la question précédente} \\
&\geq a(n+1) && \text{car } \frac{3}{2} \geq 1
\end{aligned}$$

donc la propriété est vraie au rang $n + 1$

3) Puisque $a > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} an = +\infty$ donc par comparaison $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Correction de l'exercice 23 : Puisque $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_n v_n \leq 2v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq 3$ donc $0 \leq 2v_n \leq 6$.

On obtient l'encadrement suivant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n v_n \leq 2v_n \leq 6$. Or par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 6$ donc d'après le théorème d'encadrement on en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2v_n = 6$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$.
De la même façon on montre que (u_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Correction de l'exercice 24 :

1) Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x + 1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $\mathrm{e}^x + 1 > 0$. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
De plus, pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\,\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^x + 1) - \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} \\ &= \frac{2\,\mathrm{e}^{3x} + 2\,\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{3x}}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{3x} + 2\,\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{3x} > 0$ et $\mathrm{e}^{2x} > 0$ et $(\mathrm{e}^x + 1)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$. On en conclut que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) On note $\mathcal{P}(n)$: « u_n est bien défini et $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$ » et on raisonne par récurrence.

— **Initialisation :** u_0 est bien défini et $u_1 = \dfrac{\mathrm{e}^0}{\mathrm{e}^0 + 1} = \dfrac{1}{2} \geq u_0$ donc u_0 et u_1 sont bien définis et $0 \leq u_0 \leq u_1$.

— **Hérédité :** Supposons qu'il existe un entier n tel que u_n et u_{n+1} sont bien définis et tel que $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$.
Puisque f est bien définie sur $\mathbb{R}$, $u_{n+2} = f(u_{n+1})$ est bien défini. Puisque f est croissante sur $\mathbb{R}$, on a $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ donc
$$0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2}$$
Ainsi, u_{n+1} et u_{n+2} sont bien définis et $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2}$, $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

— **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et u_{n+1} sont bien définis et $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$.

3) On pose $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$ et on étudie les variations de g sur $\mathbb{R}$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$$

On a $g'(x) \geq 0 \iff \mathrm{e}^x \geq 1 \iff x \geq 0$ et $g'(x) \leq 0 \iff \mathrm{e}^x \leq 1 \iff x \leq 0$, donc g est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et croissante sur $]0, +\infty[$ et admet donc un minimum en 0.
$g(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq g(0) \geq 0$, d'où le résultat voulu.

4) Supposons qu'il existe un réel x solution de l'équation $f(x) = x$.
Alors $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x + 1} = x$ donc $\mathrm{e}^{2x} = x\,\mathrm{e}^x + x$.
Or $\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x \geq \mathrm{e}^x(1 + x)$ d'après la question précédente car $e^x > 0$.
Ainsi, $x\,\mathrm{e}^x + x \geq \mathrm{e}^x(1 + x)$ donc $x\,\mathrm{e}^x + x \geq \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x$ et on obtient finalement $x \geq \mathrm{e}^x$, ce qui est faux pour tout $x \in \mathbb{R}$ d'après la question précédente.
Contradiction, donc l'équation $f(x) = x$ n'admet aucune solution réelle.
Puisque (u_n) est une suite croissante d'après la question 2., elle est soit majorée et convergente, soit non majorée et elle tend vers $+\infty$.
Supposons qu'elle converge vers une limite ℓ, alors on aurait $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$ car f est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.
Par unicité de la limite on aurait donc $\ell = f(\ell)$ ce qui est impossible comme on vient de le voir.
On en conclut que (u_n) ne converge pas, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Correction de l'exercice 25 :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\mathrm{e}^{n+1}}{\mathrm{e}^n} = \mathrm{e}$, et $\dfrac{1}{2}\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(n+1)!}{n!} = \dfrac{n+1}{2}$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{2} = +\infty$, il existe un rang n_0 à partir duquel on a $\dfrac{n+1}{2} \geq \mathrm{e}$, donc pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

2) Posons $C = \dfrac{u_{n_0}}{v_{n_0}}$ et montrons par récurrence que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq C\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-n_0} v_n$.

— **Initialisation :** Pour $n = n_0$, on a $u_{n_0} = \dfrac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_{n_0} = \dfrac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_{n_0} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n_0-n_0} v_0$. La propriété est donc vraie au rang n_0

— **Hérédité :** Supposons que pour un certain $n \geq n_0$ on ait $u_n \leq C\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-n_0} v_n$.

Alors, $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}\dfrac{v_{n+1}}{v_n} u_n$ d'après la question précédente donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leq \frac{1}{2}\frac{v_{n+1}}{v_n} \times C\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} v_n \\ &\leq \frac{1}{2} v_{n+1} \times C\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} \end{aligned}$$

la propriété est donc vraie au rang $n+1$

— **Conclusion :** La propriété est héréditaire et elle est vraie au rang $n = n_0$, donc pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n \leq C\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-n_0} v_n$.

3) On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \dfrac{u_n}{v_n} \leq C\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-n_0} = C\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-n_0}$ et puisque $0 \leq \dfrac{1}{2} < 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} = 0$ donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$, d'où le résultat voulu.

Correction de l'exercice 26 :

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier k avec $0 \leq k \leq n$ on a $a_k \leq a_n$, donc $\sum_{k=0}^{n-1} a_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} a_n = n \times a_n$. Ainsi, $b_n \leq \dfrac{1}{n} \times n \times a_n \leq a_n$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \\ &= \frac{n}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n} a_k - \frac{n+1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \\ &= \frac{n}{n(n+1)} a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(\frac{n}{n(n+1)} - \frac{n+1}{n(n+1)}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} a_n - \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \\ &= \frac{1}{n+1} a_n - \frac{1}{n+1} b_n \\ &= \frac{1}{n+1}(a_n - b_n) \\ &\geq 0 && \text{d'après la question précédente} \end{aligned}$$

donc (b_n) est croissante.

c) a_n est croissante et converge vers ℓ, donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \ell$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \leq a_n \leq \ell$ donc (b_n) est croissante (d'après la question précédente) et majorée par ℓ, ainsi elle converge vers un réel ℓ'.
Par passage à la limite dans l'inégalité $u_n \leq \ell$, on a $\ell' \leq \ell$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$b_{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} a_k$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k + \frac{1}{2n} \sum_{k=n}^{2n-1} a_k$$

$$= \frac{b_n}{2} + \frac{1}{2n} \sum_{k=n}^{2n-1} a_k$$

Or, pour tout $k \in [\![n, 2n-1]\!], a_k \geq a_n$ car (a_n) est croissante, donc par somme d'inégalité $\frac{1}{2n} \sum_{k=n}^{2n-1} a_k \geq \frac{1}{2n} \sum_{k=n}^{2n-1} a_n \geq \frac{1}{2n} \times n \times a_n \geq \frac{a_n}{2}$.

Finalement on a bien $b_{2n} \geq \frac{b_n + a_n}{2}$

e) (b_n) converge donc (b_{2n}) aussi et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \ell'$. Par passage à la limite dans l'inégalité $b_{2n} \geq \frac{b_n + a_n}{2}$ on a donc $\ell' \geq \frac{\ell' + \ell}{2}$ et ainsi $2\ell' \geq \ell' + \ell$ d'où $\ell' \geq \ell$.

Puisque $\ell' \leq \ell$ d'après la question 1.c), on a finalement $\ell' = \ell$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

2) a) On pose $\mathcal{P}(n)$: u_n est bien défini et $u_n \geqslant 1$ et on raisonne par récurrence.

— **Initialisation :** $u_0 = 1$ d'après l'énoncé donc u_0 est bien défini et $u_0 \geq 1$.

— **Hérédité :** Supposons que u_n soit bien défini et que $u_n \geq 1$.
Alors, $u_n^2 \geq 1$ donc $u_n^2 + u_n \geq 2$, ainsi $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$ est bien défini car $2 \geq 0$ et $u_{n+1} \geq \sqrt{2} \geq \sqrt{1} \geq 1$ car la fonction racine carrée est croissante.

— **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$ u_n est bien défini et $u_n \geq 1$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq 1 \geq 0$ donc $\sqrt{u_n^2 + u_n} \geq \sqrt{u_n^2} \geq u_n$ car la fonction racine carrée est croissante.
Ainsi, $u_{n+1} \geq u_n$, et ce quel que soit $n \in \mathbb{N}$ donc (u_n) est croissante.

c) Supposons que (u_n) converge vers un réel ℓ. Remarquons que nécessairement $\ell \geq 1$ car $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$. De plus, la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + x}$ étant continue sur $[1; +\infty[$, on a par passage à la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n^2 + u_n} = \sqrt{\ell^2 + \ell}$.
D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ donc par unicité de la limite $\ell = \sqrt{\ell^2 + \ell}$. Ainsi, comme $\ell \geq 0$ on peut écrire $\ell^2 = \ell^2 + \ell$ d'où $\ell = 0$.
On a montré que si (u_n) converge vers un réel ℓ, alors $\ell = 0$. Or on a montré que $\ell \geq 1$, contradiction. On en conclut que (u_n) diverge, mais puisque (u_n) est croissante on a nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3) a) Pour tout entier n, on a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n \\
&= \frac{(\sqrt{u_n^2 + u_n} - \sqrt{u_n^2})(\sqrt{u_n^2 + u_n} + \sqrt{u_n^2})}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + \sqrt{u_n^2}} \\
&= \frac{u_n^2 + u_n - u_n^2}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + \sqrt{u_n^2}} \\
&= \frac{u_n}{u_n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} + 1\right)}
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ d'après la question 2.c), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} + 1 = 2$ donc $u_{n+1} - u_n \sim \frac{u_n}{2u_n} \sim \frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}$.

b) $x \mapsto x^2 + x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et à valeurs dans $]0; +\infty[$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc $x \mapsto \sqrt{x^2 + x}$ est dérivable. Ainsi f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}} - 1 = \frac{2x + 1 - 2\sqrt{x^2 + x}}{2\sqrt{x^2 + x}} \\
&= \frac{(2x + 1)^2 - 4(x^2 + x)}{2\sqrt{x^2 + x} \times (2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x})}
\end{aligned}$$

$$= \frac{4x^2+4x+1-4x^2-4x}{2\sqrt{x^2+x}\times(2x+1+2\sqrt{x^2+x})}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}\times(2x+1+2\sqrt{x^2+x})}$$

donc $f'(x)>0$ pour tout $x\in]0;+\infty[$, ainsi f est strictement croissante sur cet intervalle.
Comme (u_n) est croissante, on a $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\leq u_{n+1}$ donc $f(u_n)\leq f(u_{n+1})$ donc $u_{n+1}-u_n\leq u_{n+2}-u_{n+1}$ donc $(u_{n+1}-u_n)$ est croissante.

c) Si on pose $b_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}a_k$, avec pour tout $n\in\mathbb{N}, a_n=u_{n+1}-u_n$, alors (a_n) est croissante et converge vers $\frac{1}{2}$ donc (a_n) et (b_n) vérifient les hypothèse de la question 1. Ainsi, d'après cette question, b_n converge vers $\frac{1}{2}$. On a donc
$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)=\frac{1}{2}$. On remarque que $\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)=u_n-u_0$ (par télescopage) et comme $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ on a $u_n-u_0\sim u_n$, ainsi $b_n\sim\frac{u_n}{n}\sim\frac{1}{2}$ donc finalement $u_n\sim\frac{n}{2}$.

Correction de l'exercice 27 :

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)!}>0$ donc (u_n) est croissante.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
v_{n+1}-v_n &= u_{n+1}-u_n+\frac{1}{(n+1)\times(n+1)!}-\frac{1}{n\times n!}\\
&= \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)\times(n+1)!}-\frac{1}{n\times n!}\\
&= \frac{n(n+1)}{n\times(n+1)\times(n+1)!}+\frac{n}{n\times(n+1)\times(n+1)!}-\frac{(n+1)^2}{n\times(n+1)\times(n+1)!}\\
&= \frac{n^2+n+n-n^2-2n-1}{n\times(n+1)\times(n+1)!}\\
&= \frac{-1}{n\times(n+1)\times(n+1)!}\\
&< 0
\end{aligned}$$

donc (v_n) est décroissante.

Enfin, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n-u_n=\frac{1}{n\times n!}$ donc $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

On en conclut que (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles convergent donc vers un même réel ℓ.

Puisqu'elles sont strictement monotones, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n<\ell<v_n$.

2) Supposons que ℓ soit rationnel.

Alors il existe deux entiers p et q tels que $\ell=\frac{p}{q}$. On a donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<\frac{p}{q}<\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n\times n!}$.

En particulier, pour $n=q$, on a

$$\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}<\frac{p}{q}<\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}+\frac{1}{q\times q!}$$

donc en multipliant par $q!>0$ on obtient

$$\sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!}<p\times(q-1)!<\sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!}+\frac{1}{q}$$

Or, pour tout $k\in[\![0,q]\!]$, $\frac{q!}{k!}$ est un entier car $q\geq k$, donc $\sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!}$ est un entier. De plus, $\frac{1}{q}<1$ donc $\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}+\frac{1}{q}<\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}+1$ On en conclut que

$$\sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!}<p\times(q-1)!<\sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!}+1$$

donc $p \times (q-1)!$ est un entier qui est strictement compris entre deux entiers consécutifs, c'est absurde donc ℓ est irrationnel.

3) Pour $n=0$, on a $\int_0^1 \frac{(1-t)^0}{0!} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = [\mathrm{e}^t]_0^1 = \mathrm{e}-1$ donc $\sum_{k=0}^0 \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^0}{0!} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{0!} + \mathrm{e}-1 = 1+\mathrm{e}-1 = \mathrm{e}$.
Supposons qu'on ait $\mathrm{e} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$.
Par intégration par partie, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t &= \left[\frac{-(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^t\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathrm{e} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

donc l'égalité est vraie au rang $n+1$

Finalement, par principe de récurrence, on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$.

4) Pour tout $t \in [0;1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \leq \frac{1-t}{n!} \mathrm{e}^t$.
Ainsi, en intégrant on obtient

$$0 \leq \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t) \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$

Or, $\int_0^1 (1-t) \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = [(1-t)\mathrm{e}^t]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = -1 + \mathrm{e} - 1 = \mathrm{e}-2$. Or $2 < \mathrm{e} < 3$ donc $0 < \mathrm{e}-2 < 1$. Finalement, on a

$$0 \leq \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \leq \frac{1}{n!}$$

d'où le résultat.

5) On déduit de la question précédente par encadrement de limites que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = 0$.
De plus, on sait que la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right)$ converge vers ℓ, donc par somme de limites $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t\right) = \ell$. Puisque cette suite est constante égale à e on en conclut finalement que $\ell = \mathrm{e}$, et puisqu'on a montré que ℓ est irrationnel on a bien e irrationnel.