TD 9 : Intégrales impropres (Indications)

Indications pour l'exercice 1 :

1. L'intégrale est faussement impropre en 0. Majorer par $\dfrac{1}{t^2}$ sur $[2;+\infty[$
2. Utiliser une primitive de tan
3. Utiliser un DL pour étudier l'impropriété en 0
4. Utiliser le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - u$
5. L'intégrale est faussement impropre en 0. Comparer avec $\dfrac{1}{t}$ en $+\infty$.
6. Majorer par $\mathrm{e}-t$.
7. Trouver un équivalent simple en 0 et en $+\infty$, seul l'équivalent en $+\infty$ nécessite un DL.
8. Étudier d'abord les solutions de l'équation $t - \sin^2(t)\sqrt{t} = 0$ pour trouver les impropriétés.
   Trouver un équivalent simple en chaque impropriété.
9. L'intégrale est faussement impropre en 0. Faire le changement de variable $u = 1 - x$ pour étudier l'impropriété en 1.

Indications pour l'exercice 2 :

1. Utiliser le fait que $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante lorsque $\alpha > 0$.
2. Sommer les inégalités précédentes une par une.
3. Commencer par montrer que les suites $\left(\displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)_{n\geq 1}$ et $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ sont de même nature (convergente ou divergente).
4. Il suffit d'appliquer le résultat de la question 2) pour $\alpha = 1$, puis de montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \textstyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1$.
5. Reprendre à nouveau l'encadrement de la question 2) puis montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\lambda}{n^{1-\lambda}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\lambda} = 1$
6. Supposer l'inégalité vraie pour tout n, alors on doit avoir $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\lambda} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\sum_{k=1}^n k\right)^n$. Raisonner ensuite avec les équivalent des questions précédentes en distinguant les différents cas.
7. Suivre le même raisonnement que dans la partie A.
8. Suivre le même raisonnement que dans la question 3)
9. On peut par exemple chercher une fonction positive qui vaut 0 en chaque entier pour laquelle $\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ vaut la même valeur strictement positive pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   On peut par exemple chercher une fonction positive qui vaut 1 en chaque entier mais dont le calcul d'intégrale se ramène à un calcul de série convergente.
10. Utiliser les résultat précédent avec la famille de fonctions $f_a(x) = \dfrac{a}{x^2 + a^2}$, avant de passer à la limite lorsque $a \to +\infty$ dans un encadrement.
11. L'intégrale est faussement impropre en 0, fait une IPP sur $[1, A]$ puis faire tendre A vers $+\infty$
12. Utiliser les formules de somme et à la formule $\sin(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}-ix}{2i}$.
13. Se ramener à l'égalité précédente pour $x = 1$ en utilisant $\sin k = \dfrac{\mathrm{e}^{ik} - \mathrm{e}^{-ik}}{2i}$.
14. Utiliser l'indication pour séparer en deux sommes puis faire un changement d'indice dans l'une des sommes.
15. Montrer que la série $\sum S_k \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$ converge absolument.

Indications pour l'exercice 3 :

1. Montrer que l'intégrale qui définit $f \star g$ est absolument convergente et la majorer à l'aide d'un majorant de $|g|$ et de $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

2. Développer $(a-b)^2$e t $(a+b)^2$ pour montrer que $|ab| \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$.
3. Il suffit de poser le changement de variable indiqué et de faire le calcul.
4. Vrai par définition de λ_n : il suffit de poser le calcul.
5. Poser $\varepsilon > 0$ puis majorer $h_n(t)$ par $\dfrac{(1-\varepsilon^2)^n}{\lambda_n}$ sur $[\varepsilon, 1]$.
6. Fixer $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Écrire que $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ lorsque $t \in]x-\delta, x+\delta[$ avec $\delta > 0$.
   Plusieurs astuces à utiliser : remplacer $(f \star h_n)(x)$ par $(h_n \star f)(x)$ (vrai grâce au changement de variable $u = x - t$), et remplacer $f(x)$ par $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) h_n(t)\,\mathrm{d}t$ (vrai car $\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$ et $f(x)$ est constant.
   Majorer ensuite $|(f \star h_n)(x) - f(x)|$ en séparant l'intégrale en 3 intégrales : sur $]-\infty, -\delta[$, sur $]-\delta, \delta[$ et sur $]\delta, +\infty[$.