Programme de khôlle de maths n° 9

Semaine du 25 Novembre

Cours

Chapitre 6 : Suites numériques

- Vocabulaire sur les suites : majorée, minorée, bornée, croissante, décroissante
- Suites arithmétiques, suites géométriques, suites arithmético-géométriques, suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (cas où l'équation caractéristique admet des solutions réelles uniquement)
- Limites infinie, limite finie : définitions quantifiées
- Unicité de la limite
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$
- (u_n) converge ssi (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite (admis)
- (u_n) bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = 0$, $\quad (u_n)$ bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \pm\infty \Rightarrow \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.
- Limites de référence
- Calcul de limites : opérations, composition par une fonction continue, passage à la limite dans une inégalité ou dans une égalité.
- Théorèmes de convergence : limite monotone, théorèmes de comparaison, suites adjacentes.
- Croissances comparées : si $a > 1$ et $b, c > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^b}{a^n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^c}{n^b} = 0$.
- Comparaison asymptotique : relation de négligeabilité, notation de Landau.
- Equivalence de suites, notation $u_n \sim v_n$, compatibilité avec le produit, le quotient, et les puissances réelles.
- Si P est un polynôme, $P(n)$ est équivalent à son terme de plus haut degré et $P(1/n)$ est équivalent à son terme de plus petit degré non nul.
- Équivalents usuels : si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\sin(u_n) \sim u_n$, $\ln(1+u_n) \sim u_n$, $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$, $\dfrac{1}{1-u_n} \sim u_n$, $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.

Questions de cours et exercices vus en classe

- Démontrer l'unicité de la limite (limite finie uniquement)
- Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \ell + \ell'$ (ℓ et ℓ' réels).
- Démontrer qu'une suite convergente est bornée