Sous-espaces vectoriels

★
Exercice 1

Déterminer dans chaque cas si F est un sous-espace vectoriel de E ou non.

1) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - 2y + z = 0\}$
2) $E = \mathbb{R}^4$, $F = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - t = y + 2z \quad \text{et} \quad x + y = 0\big\}$
3) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$
4) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
5) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$
6) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 3y = 0\}$
7) $E = \mathbb{R}^n$, $F = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n x_k = 0\}$
8) $E = \mathbb{R}^n$, $F = \big\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n (-1)^k x_k^2 = 0\big\}$

★
Exercice 2

On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et on admet que $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Les ensembles suivant sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

1) L'ensemble F des fonctions continues sur $\mathbb{R}$
2) L'ensemble F des fonctions paires sur $\mathbb{R}$
3) L'ensemble F des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$
4) L'ensemble F des fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$
5) L'ensemble F des fonctions f telles que $\lim\limits_{x \to +\infty} = 0$.
6) L'ensemble F des polynômes de degré 2
7) L'ensemble F des fonctions de la forme $x \mapsto e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

★
Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer dans chacun des cas suivant si F est un sous-espace vectoriel de E ou non :

1) $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = P(1)\}$
2) $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \exists a \in \mathbb{R}, P(a) = 0\}$
3) $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid 1 < \deg(P) < n\}$
4) $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \exists Q \in \mathbb{R}_n[X], P = XQ'(X)\}$

★
Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer dans chacun des cas suivant si F est un sous-espace vectoriel de E ou non :

1) $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM + \mathrm{tr}(M)I = 0\}$
2) $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^2 = I\}$
3) $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^2 = 0\}$
4) $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = 0\}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée.
5) $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \exists N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AN = M\}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée.

Familles libres, familles génératrices, bases

★
Exercice 5

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. Déterminer dans chaque cas si la famille (u, v, w) est libre ou liée.

1) $u = (3, -2, 1)$, $v = (1, 2, 3)$ et $w = (-4, 1, 5)$
2) $u = (1, 1, 3)$, $v = (4, 2, 5)$ et $w = (-1, 1, 4)$
3) $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 0)$ et $w = (0, 0, 1)$
4) $u = (1, 1, 1)$, $v = (3, 0, 3)$ et $w = (0, 3, 0)$

⋆

Exercice 6

Soit $F = \text{Vect}\left((-4,1,3)\right) \subset \mathbb{R}^3$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0 \quad \text{et} \quad 4x-2y+6z=0\}$

1) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2) Montrer que $F \subset G$.
3) Montrer que $F = G$

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 7

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectorielles des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1) Montrer que la famille $(\cos, \sin)$ est libre dans E
2) Soient $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ une famille de n réels. Montrer que $(x \mapsto \sin(a_i x))_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre.

⋆

Exercice 8

Dans chaque cas déterminer une base de E

1) $E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 0 \\ x+y+2z+3t & = & 0 \end{array}\right.\right\}$

2) $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 0 \\ -x+3y & = & 0 \end{array}\right.\right\}$

3) $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{\begin{array}{rcl} x-y+2z & = & 0 \\ 4x+y-z & = & 0 \end{array}\right.\right\}$

4) $E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 0 \\ x-y+z+t & = & 0 \\ x+y+z-t & = & 0 \end{array}\right.\right\}$

5) $E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{\begin{array}{rcl} x-y-3z-t & = & 0 \\ 2x-y-5z+t & = & 0 \end{array}\right.\right\}$

⋆

Exercice 9

On considère $F = \text{Vect}\left((3,-2,4),(5,0,6),(3,8,2)\right) \subset \mathbb{R}^3$. Déterminer la dimension de F.

⋆

Exercice 10

Soient $u = (1,0,1)$, $v = (1,1,0)$ et $w = (0,1,1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1) Montrer que (u,v,w) constitue une base de $\mathbb{R}^3$
2) Exprimer les coordonnées des vecteurs $x = (3,1,2)$ et $y = (0,0,4)$ dans la base (u,v,w).

⋆

Exercice 11

Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y+z=0\}$. Déterminer une base de E.

⋆

Exercice 12

Soit $F = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

⋆

Exercice 13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ et l'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E
2) Montrer que $\dim(F) = n$.

★
Exercice 14

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et soit $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$. L'ensemble $\mathcal{C}(A)$ s'appelle le **commutant** de A.

1) Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in \mathcal{C}(A)$ si et seulement si $a = d$ et $b = -c$.
3) En déduire $\dim(\mathcal{C}(A))$.

Applications linéaires

★
Exercice 15

Dans chaque cas, déterminer si l'application φ est linéaire ou non.
Si φ est linéaire, déterminer son noyau et son image.

1) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y, z) = (x + z, y - z)$
2) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y, z) = xy + 2z$
3) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y) = 3y - x$
4) $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $\varphi(x, y, z, t) = (x + 2t, z + x + y, 3 - 2t, 5x)$

★
Exercice 16

Soit $E = \mathrm{Vect}\left((4, 1, -1), (2, 0, 2)\right)$ un sous espace vectoriel de R^3.
On considère l'application $f : E \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in E, \quad f(x, y, z) = (x - y \ , \ y + z)$$

1) Montrer que f est une application linéaire de E vers $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que $(1, 0) \in \mathrm{Im}(f)$ et $(0, 1) \in \mathrm{Im}(f)$
3) En déduire que f est surjective
4) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$
5) En déduire que f est injective.

★ ★
Exercice 17

Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{3}x + y = 0\}$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$
On considère l'application φ définie sur E par

$$\forall (x, y) \in E, \quad \varphi(x, y) = \left((\sqrt{6} - \sqrt{2})x - (\sqrt{6} + \sqrt{2})y \ , \ (\sqrt{6} + \sqrt{2})x + (\sqrt{6} - \sqrt{2})y\right)$$

1) Montrer que φ est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}^2$
2) Montrer que φ est une application linéaire de E dans F

★ ★
Exercice 18

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On note $f^2 = f \circ f$.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.
2) Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$
3) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \iff \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$

★ ★
Exercice 19

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 = f \circ f = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(f) \leq \dfrac{\dim(E)}{2}$.

⋆

Exercice 20

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1) Si f est injective et que $(u_1, u_2, \cdots u_p)$ est une famille libre de E, montrer que $(f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_p))$ est une famille libre de F.
2) Si f est surjective et que $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est une famille génératrice de E, montrer que $(f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_n))$ est une famille génératrice de F.
3) Que peut-on en déduire si f est bijective ?

⋆ ⋆

Exercice 21

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère l'application $\varphi_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi_\theta(x, y) = (x \cos\theta - y \sin\theta \ , \ x \sin\theta + y \cos\theta)$$

1) Montrer que $\varphi_\theta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.
2) Pour quelle(s) valeur(s) de θ a-t-on $\varphi_\theta = id_{\mathbb{R}^2}$?
3) Pour quelle(s) valeur(s) de θ a-t-on $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi_\theta(x, y) = -(x, y)$
4) Existe-t-il une valeur de θ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi_\theta(x, y) = (-x, y)$?
5) Soit $M(x, y)$ un point du plan muni d'un repère, et soit M' le point dont les coordonnées sont données par $\varphi_\theta(x, y)$.
   a) Montrer que si M appartient au cercle de centre 0 et de rayon 1, alors M' aussi.
   b) On pose $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Représenter l'image de $(0, 1)$, de $(1, 0)$ et de $(-1, 0)$ par φ_θ.
   c) Quelle est la transformation du plan correspondant à φ_θ pour θ quelconque.

⋆ ⋆

Exercice 22

Soit E un espace vectoriel de dimension n et H un sous-espace vectoriel de E. On dit que H est **un hyperplan de** E si $\dim(H) = n - 1$.

1) Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ une forme linéaire non nulle. Montrer que $\operatorname{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E.
2) Soit H un hyperplan de E. Montrer qu'il existe une application $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ telle que $H = \operatorname{Ker}(\varphi)$.

⋆

Exercice 23

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application f qui à tout polynôme P associe le polynôme $P(1 - X)$.

1) Montrer que f définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Montrer que $f^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. En déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

⋆ ⋆

Exercice 24

Soit f l'application qui à tout polynôme P associe $P(X + 1) - P(X)$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que f définit une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2) Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$, puis en déduire $\operatorname{Im}(f)$ par un argument sur les dimensions.

⋆ ⋆

Exercice 25

Existence et unicité des polynômes interpolateurs de Lagrange : soient $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une famille de n réels deux à deux distincts et $(y_1, y_2, ..., y_n)$ une famille de n réels. On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ P & \longmapsto & (P(x_1), P(x_2), ..., P(x_n)) \end{array}$$

1) Montrer que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$.
2) Montrer que $\operatorname{Ker}(\varphi) = \left\{0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}\right\}$. En déduire que φ est un isomorphisme.
3) Justifier qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(x_i) = y_i$.

⋆ ⋆
Exercice 26

On considère l'application suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M - {}^tM \end{array}$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2) À quel sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ correspond $\mathrm{Ker}(f)$?
3) En déduire $\mathrm{Im}(f)$.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 27

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle fixée. On considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A \end{array}$$

1) Montrer que f est une application linéaire.
2) Montrer que si $\mathrm{tr}(A) = 0$ alors $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n^2 - 1$
3) Montrer que si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, alors $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$
4) Montrer que $f^2 = \mathrm{tr}(A)f$.

⋆ ⋆
Exercice 28

Soit $n \geq 2$ un entier.

1) Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], P(0) = 0\}$, montrer que $\dim(E) = n - 1$
2) Déterminer le noyau de l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], P \mapsto XP''(X)$
3) En déduire que $\mathrm{Im}(f) = E$.
4) Montrer que si P est un polynôme de degré $n - 1$ qui s'annule en 0 alors il existe un polynôme Q de degré n tel que $P(X) = XQ''(X)$.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 29

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit g un endomorphisme de E. On note $0_{\mathcal{L}(E)}$ l'endomorphisme nul de E qui à tout vecteur x associe le vecteur nul 0_E. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $g^n = \underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{n \text{ fois}}$. Par exemple, $g^2 = g \circ g$ et $g^3 = g \circ g \circ g$.
Si A et B sont deux ensembles, on note $A \subsetneq B$ si $A \subset B$ avec $A \neq B$.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(g^2) \subset \mathrm{Ker}(g^3)$
2) On suppose désormais que $g^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et que $\{0_E\} \subsetneq \mathrm{Ker}(g) \subsetneq \mathrm{Ker}(g^2) \subsetneq \mathrm{Ker}(g^3)$.
   a) Déterminer $\mathrm{Ker}(g^3)$
   b) Déterminer $\dim(\mathrm{Ker}(g))$, $\dim(\mathrm{Ker}(g^2))$ et $\dim(\mathrm{Ker}(g^3))$.
   c) Montrer que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(g^2)$ puis que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(g^2)$.
3) Soit $a \in \mathrm{Ker}(g)$ un vecteur non nul. Montrer qu'il existe $b \in E$ tel que $g(b) = a$. Montrer que $b \in \mathrm{Ker}(g^2)$ et en déduire que (a, b) est une famille libre.
4) Montrer qu'il existe $c \in E$ tel que $g(c) = b$.
5) Montrer que (a, b, c) est alors une base de E. Préciser les décompositions de $g(a)$, $g(b)$ et $g(c)$ dans cette base.