Programme de khôlle n° 23

Semaine du 3 Juin

Cours

- **Chapitre 15 : Familles de variables aléatoires, indépendance.**

  Dans tous le chapitre, les variables aléatoires sont des variables aléatoires réelles discrètes.

  - Couples de v.a., lois marginales
  - Loi d'une somme de variables aléatoires X et Y.
  - Formule de transfert pour 2 v.a. X et Y :

  $$\mathbb{E}(\varphi(X,Y)) = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} \varphi(x,y)\mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

  - Espérance d'un produit :

  $$\mathbb{E}(XY) = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

  - Covariance, inégalité de Cauchy-Schwarz, Formule de Koenig-Huygens
  - Propriétés de la covariance : $\mathrm{Cov}(X,X) = V(X)$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$, bilinéarité.
  - Coefficient de corrélation $\rho = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$. Invariance d'échelle.
  - $|\rho(X,Y)| = 1$ si et seulement si il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\mathbb{P}(Y=aX+b)=1$.
  - Lien avec la variance : $V(X+Y) = V(X)+V(Y)+\mathrm{Cov}(X,Y)$

    $V(X_1+\cdots+X_n) = V(X_1)+\cdots+V(X_n)+2\sum_{i<j}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$
  - Indépendance de variables aléatoires, lemme des coalitions
  - Si X et Y sont indépendances, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ et $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$
  - S suit une loi binomiale de paramètres n et p si et seulement si il existe $X_1,\ldots,X_n$ des variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p telles que $S=\sum_{k=1}^n X_k$
  - Si $X\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p)$ et $Y\hookrightarrow\mathcal{B}(m,p)$ avec X et Y indépendantes, alors $X+Y\hookrightarrow\mathcal{B}(n+m,p)$
  - Si $X\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda)$ et $Y\hookrightarrow\mathcal{P}(\mu)$ avec X et Y indépendantes, alors $X+Y\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda+\mu)$
  - Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi admettant une espérance μ et une variance, alors pour tout $\varepsilon>0$ on a :

  $$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\mu\right|\geq\varepsilon\right)=0$$

Questions de cours et exercice

- **Exercices vus en cours**

  1. On considère n urnes numérotées de 1 à n. Pour tout $k\in\{1,\ldots,n\}$, l'urne numéro k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard et on pioche une boule au hasard dans cette urne. On note X le numéro de l'urne tirée et Y le numéro de la boule choisie.
     (a) Quelle est la loi suivie par X ?
     (b) Déterminer la loi du couple (X,Y).
     (c) En déduire la loi suivie par Y.
  2. On lance n fois une pièce truquée qui tombe sur Pile avec probabilité $p\in]0\,;1[$. On note X le nombre de Piles et Y le nombre de Faces obtenus. Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
  3. Soient $a,b\in\mathbb{Z}$ avec $a<b$ et soit (U_n) une suite de variables aléatoire indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$. On pose $M_n=\max(U_1,\ldots,U_n)$. Déterminer la loi de M_n.
  4. Soient B et H deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p\in]0\,;1[$. On considère un rectangle dont la base est de longueur B et la hauteur est H.

     (a) Quelle est la probabilité d'obtenir un rectangle d'aire égale à 2 ?

(b) Quelle est l'espérance de l'aire du rectangle obtenu ?

(c) Quelle est la probabilité d'obtenir un carré ?

5. Montrer que si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ avec X et Y indépendantes, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$