CHAPITRE 2

LOGIQUE

I. Introduction

1. Vocabulaire

a. Propositions

Définition 2.1

Une **proposition** est une affirmation qui ne comporte pas d'ambiguité et qui peut être soit **vraie** soit **fausse**. Une proposition peut dépendre d'un ou plusieurs paramètres.

Exemple 2.1

Les énoncés suivants sont des propositions mathématiques :

- $A : 2+2=4$.
  La proposition A est vraie.
- $B : 2+2=5$
  La proposition B est fausse.
- $C(x) : x \in \mathbb{R}, x \geq 3$
  C a un paramètre x. La valeur de vérité de C dépend de la valeur de x : $C(4)$ est vraie mais $C(1)$ est fausse.
- $D(y) : y \in \mathbb{R}, y^2 = -1$
  D a un paramètre y. La valeur de vérité de D ne dépend pas du réel y : $D(y)$ est fausse quel que soit $y \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.2

Les énoncés suivants ne sont pas des propositions au sens mathématique :

- « Cette phrase est fausse » (paradoxe : problème de l'auto-référencement)
- « L'actuel roi de France est chauve » (Enoncé fictif indéfini puisqu'il n'y a pas de roi de France, problème avec le principe du tiers exclu)
- Si $F = \{E \mid E \notin E\}$, la proposition $F \in F$ est paradoxale (paradoxe de Russel : F est l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas eux-même, si $F \in F$ alors $F \notin F$ et si $F \notin F$ alors $F \in F$, équivalent en langage courant au paradoxe du barbier)

b. Raisonnements mathématiques

Un raisonnement mathématique s'appuie sur :

- Des prémisses qui sont des résultats considérés comme déjà vrais. Ces résultats sont considérés comme vrais soit parce qu'ils sont des axiomes (des résultats admis formant un **système axiomatique**), soit parce qu'ils ont eux-même été démontrés par un raisonnement mathématique (ce sont alors des théorèmes).
- Des **inférence déductive** qui permettent de passer des prémisses à une conclusion. Ces inférences sont contraintes par les règles de logiques que nous allons explorer dans ce chapitre.

Exemple 2.3

Si j'ai établi les prémisses suivant : « Tous les hommes sont mortels » et « Socrate est un homme », alors je peux en déduire par déduction que Socrate est mortel.
Cette déduction repose sur le syllogisme suivant : « Si tous les B ont la propriété C, et que A est un B, alors A a la propriété C ». Ce inférence déductive est valable quel que soit les noms mis à la place de A, B et C.

Exemple 2.4

Si j'ai établi les prémisses suivant à propos de trois points du plan A, B et C :

- ABC est un triangle
- L'angle $\widehat{BAC}$ est droit

Alors je peux en déduire que $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Cette déduction repose sur le **théorème de Pythagore** qui établit un lien entre ces deux prémisses et cette conclusion.

Remarque

Il existe de nombreux systèmes axiomatiques différents, débouchant parfois sur des résultats différents voir contradictoires. On peut citer les axiomes d'Euclide, les axiomes de Peano, la théorie des ensembles...
Ainsi, les géométries dites « non-euclidiennes » sont construites sans le 5e axiome d'Euclide qui dit que *"étant donné un point et une droite ne passant pas par ce point, il existe une seule droite passant par ce point et parallèle à la première."*
La théorie des ensembles, communément appelée théorie ZF (Zermelo - Fraenkel) est l'axiomatique la plus admise dans les mathématiques modernes. En pratique, dans le chapitre 3, le vocabulaire ensembliste sera expliqué de manière intuitive et sans détailler tous les axiomes.

2. Connecteurs

On peut assembler différentes propositions entre elles pour en former de nouvelles à l'aide de **connecteurs logiques**. Les trois connecteurs logiques élémentaires sont ET ($\wedge$), OU ($\vee$) et NON ($\neg$)

Définition 2.2

Soient A et B deux propositions

- La proposition $A \wedge B$ (A et B) est vraie si A et B sont vrais simultanément, et fausse sinon.
- La proposition $A \vee B$ (A ou B) est vraie si A est vraie, B est vraie, ou si les deux sont vraies, et fausse sinon.
- La proposition $\neg A$ (Non A) est vraie si A est fausse, et fausse si A est vraie.

Remarque

Attention : dans le langage courant, le OU est souvent *exclusif* (« fromage ou dessert ») tandis qu'en mathématique le OU est *toujours inclusif.*
La proposition « $x \geq 0$ » se lit « x est supérieur OU égal à 0 ». Elle est vraie lorsque x vaut 0 et vraie aussi lorsque x est strictement positif. Ainsi $(x \geq 0)$ équivaut à $(x > 0) \vee (x = 0)$

Blague du logicien qui attend un enfant :
« C'est un garçon ou une fille ?
— Oui. »

→ **Exercice de cours n° 1.**

→ **Exercice de cours n° 2.**

3. Tables de vérité

Définition 2.3

Une table de vérité est un tableau permettant de décrire la valeur de vérité d'une proposition mathématique composée de plusieurs propositions combinées à l'aide de connecteurs.
Les premières colonnes sont remplies de sorte à faire figurer toutes les combinaisons possibles des propositions de base.

a. Tables de vérité de $\neg A$, $A \wedge B$ et $A \vee B$:

		NON	ET	OU
A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F

Définition 2.4

Deux propositions composées sont dites **logiquement équivalentes** ou simplement **équivalente** si leurs tables de vérité sont les mêmes, c'est à dire si elles ont toujours la même valeur de vérité.
On note $A \iff B$ si les propositions A et B sont logiquement équivalentes.

Définition 2.5

Une proposition composée qui est toujours vraie est appelée une **tautologie**.

Exemple 2.5

Soit A une proposition. Les propositions suivantes sont des tautologies :

- $A \vee (\neg A)$ (principe du tiers exclu)
- $\neg(A \wedge (\neg A))$ (principe de non contradiction)

b. Double négation

Proposition 2.1

Pour toute proposition A on a $\neg(\neg A) \iff A$

c. Lois de De Morgan

Proposition 2.2 (Loi de De Morgan)

Pour toutes propositions A et B on a :

$$\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$$

$$\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B)$$

Table de vérité de $\neg(A \vee B)$:

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

Table de vérité de $(\neg A) \wedge (\neg B)$:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

→ **Exercice de cours n^o 3.**

→ **Exercice de cours n^o 4.**

4. Implication, équivalence

a. Implication

Définition 2.6

Soient A et B deux propositions. On dit que la proposition « A implique B » (notée $A \Rightarrow B$) est vraie si B est vraie dès que A est vraie. La table de vérité de $A \Rightarrow B$ est la suivante :

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Définition 2.7

On appelle **réciproque** de $A \Rightarrow B$ la proposition $B \Rightarrow A$.

Remarque

Une implication peut être vraie sans que sa réciproque le soit.

Exemple 2.6

Admettons que la proposition suivantes soit une vérité mathématiques :

« Si je mange trop de bonbons, alors j'ai mal au ventre »

Sa réciproque serait :

« Si j'ai mal au ventre, alors j'ai mangé trop de bonbons »

Cette implication n'est pas nécessairement vraie puisque mon mal de ventre peut être causé par autre chose qu'un excès de bonbons.

Exemple 2.7

Soit f une fonction à valeur réelle définie sur un intervalle $[a;b]$. L'implication suivante est vraie :

« Si f est croissante sur $[a;b]$ alors $f(b) \geq f(a)$ »

La réciproque de cette implication est :

« Si $f(b) \geq f(a)$ alors f est croissante sur $[a,b]$ »

Elle est fausse en général, par exemple $3^2 \geq (-1)^2$ mais la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas croissante sur $[-1;3]$.

Proposition 2.3 (modus ponens)

Pour toutes propositions A et B l'implication suivante est tautologiquement vraie :

$$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$$

Remarque

Cette dernière proposition est le fondement de tous les raisonnements mathématiques d'une des formes suivantes :

« On sait que A et que A entraîne B, donc B »
« Si A alors B, or A, donc B »

b. Autres expressions de l'implication

On peut constater que $A \Rightarrow B$ est vraie dès que A est fausse ou que B est vraie.
Table de vérité de $(\neg A) \vee B$ **:**

A	B	$\neg A$	$(\neg A) \vee B$	$A \Rightarrow B$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 2.4

Pour toutes propositions A et B, on a : $(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow ((\neg A) \vee B)$

En utilisant les lois de de Morgan on peut exprimer la négation d'une implication à l'aide des connecteurs de base :

Proposition 2.5

Pour toutes propositions A et B, la négation de $A \Rightarrow B$ est $A \wedge (\neg B)$.

Exemple 2.8

La proposition « Si je mange trop de bonbons, alors j'ai mal au ventre » est fausse si je peux manger trop de bonbons sans avoir mal au ventre, c'est à dire si la proposition (trop de bonbons)∧(¬(mal au ventre)) est vraie.

c. Équivalence

Définition 2.8

Soient A et B deux propositions. La proposition $A \Longleftrightarrow B$ (« A équivaut à B ») est la proposition qui est vraie lorsque A et B sont logiquement équivalentes, et fausse sinon.

Table de vérité de $A \Longleftrightarrow B$:

A	B	$A \Longleftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Propriété 2.6

La proposition $A \Leftrightarrow B$ est vraie si et seulement si $A \Rightarrow B$ est vraie et $B \Rightarrow A$ est vraie.
Autrement dit, $A \Leftrightarrow B$ équivaut à $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Exemple 2.9

Un exemple connu d'équivalence est le théorème de Pythagore. Le théorème affirme la chose suivante :

« Si ABC est un triangle rectangle en B, alors $AB^2 + BC^2 = AC^2$ »

Sa réciproque est :

« Si $AB^2 + BC^2 = AC^2$ alors ABC est un triangle rectangle en B »

Il se trouve que la réciproque du théorème de Pythagore est également vraie. Les propositions « ABC est rectangle en B » et $AB^2 + BC^2 = AC^2$ sont donc **équivalentes** :

ABC est rectangle en B si et seulement si $AB^2 + BC^2 = AC^2$

Remarque

Pour démontrer une équivalence $A \Leftrightarrow B$, il faut parfois procéder en deux temps et démontrer $A \Rightarrow B$ puis $B \Rightarrow A$. On appelle cela un raisonnement par double implication.

→ **Exercice de cours n^o 5.**

Remarque

On a $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$, autrement dit « A si et seulement si B » est équivalente à « B si et seulement si A ».

d. Méthodes

Soient A et B deux propositions.

- Pour prouver que $A \Rightarrow B$ est vrai il faut supposer que A est vrai, et parvenir au résultat « B est vrai » sans hypothèse supplémentaires. La rédaction d'une telle preuve pourrait ressembler à cela :

Rédaction : preuve de $A \Rightarrow B$

« Supposons A vrai, alors [...], donc [...], or [...], ainsi B est vrai. »

- Pour prouver que $A \Rightarrow B$ est faux, il suffit de prouver que A est vrai et que B est faux.

- Pour prouver que $A \Longleftrightarrow B$ est vrai on peut prouver que $A \Rightarrow B$ et que $B \Rightarrow A$. Il faut donc appliquer deux fois le modèle du premier point :

Rédaction : preuve de $A \Leftrightarrow B$

« Supposons A, alors [...], donc B est vrai. On a donc montré que A implique B. Supposons maintenant B, alors [...], donc A est vrai. On a donc montré que B implique A.
On en conclut que A équivaut à B »

- L'équivalence $A \Leftrightarrow B$ peut parfois être démontré avec un **raisonnement par équivalence** (voir la section III.1.)

e. Conditions nécessaires, conditions suffisantes

Définition 2.9

L'implication $A \Rightarrow B$ peut se lire :

- « Si A alors B »
- « A est une condition suffisante de B »
- « B si A »
- « A seulement si B »
- « B est une condition nécessaire de A »

Définition 2.10

L'équivalence $A \Leftrightarrow B$ peut se lire :

- « A si et seulement si B »
- « A est une condition nécessaire et suffisante de B ».
- « B si et seulement si A »
- « B est une condition nécessaire et suffisante de A »

Exemples 2.10

« *Manger trop de bonbons* » est une condition suffisante pour « *avoir mal au ventre* »
« *Avoir mal au ventre* » est une condition nécessaire pour « *manger trop de bonbons* ».
Être un triangle rectangle est une condition nécessaire et suffisante pour avoir le carré de l'hypoténuse égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

II. Quantificateur

1. Quantificateur universel, quantificateur existentiel

Définition 2.11

- le quantificateur universel ($\forall$) se lit « Pour tout » ou « Quel que soit » .

« $\forall x \in E,\ P(x)$ » signifie : « pour tout x appartenant E, $P(x)$ est vrai »

- le quantificateur existentiel ($\exists$) se lit « il existe ».

« $\exists x \in E,\ P(x)$ » signifie : « il existe un x appartenant à E tel que $P(x)$ est vrai »
« $\exists! x \in E,\ P(x)$ » signifie : « il existe un **unique** x appartenant à E tel que $P(x)$ est vrai »

Remarque

La proposition « $\forall x \in E, P(x)$ » forme un tout : la variable x n'a pas de sens hors de cette proposition. On peut d'ailleurs la remplacer par une autre variable : $\forall y \in E, P(y)$ est exactement la même proposition que $\forall x \in E, P(x)$.

→ **Exercice de cours n° 6.**

→ **Exercice de cours n° 7.**

Exemple 2.11

On rappelle qu'on dit qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Avec des quantificateurs on peut écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \iff \big(\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0) \Rightarrow (u_n > A)\big)$$

2. Négation

Proposition 2.7

- La négation de « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est « $\exists x \in E,\ \neg P(x)$ »
- La négation de « $\exists x \in E,\ P(x)$ » est « $\forall x \in E,\ \neg P(x)$ ».

Remarque

Formulé autrement :

« *Il existe un élément x de E qui n'a pas la propriété P* » est le contraire de « *Tout élément x de E a la propriété P* »

« *Il n'existe pas d'élément x de E ayant la propriété P* » équivaut à « *Quel que soit x dans E, x n'a pas la propriété P* », et c'est le contraire de « *Il existe un élément x de E ayant la propriété P* »

Exemple 2.12

La négation de la proposition

$$« \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y »$$

est la proposition

$$« \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y »$$

Ainsi, dans l'exercice 6, la seconde proposition est la négation de la première.

→ **Exercice de cours n° 8.**

→ **Exercice de cours n° 9.**

3. Méthodes

Soit P une proposition qui dépend d'un paramètre x appartenant à un ensemble E.

- Pour prouver la proposition « $\forall x \in E,\ P(x)$ », il faut montrer que $P(x)$ est vrai pour chaque élément x appartenant à E. Il suffit pour cela de prendre un x quelconque fixé dans E et de prouver que P est vraie pour ce x :

Rédaction : preuve de $\forall x \in E, P(x)$

« Soit $x \in E$. Alors [...], donc [...], ainsi $P(x)$ est vraie. On a donc : $\forall x \in E,\ P(x)$ »

- Pour prouver la proposition « $\exists x \in E,\ P(x)$ », il suffit de trouver un seul exemple d'élément x dans E pour lequel $P(x)$ est vrai :

Rédaction : preuve de $\exists x \in E, P(x)$

« On pose $x = [...]$. On a alors [...] donc $P(x)$ est vrai. »

- Pour prouver la proposition « $\exists! x \in E,\ P(x)$ » il faut prouver l'existence et l'unicité de l'élément x de E vérifiant la propriété P. On procède en général en deux temps en montrant d'abord l'existence comme ci-dessus, puis en prouvant l'unicité en montrant que si $P(x)$ et $P(y)$ sont vrais alors $x = y$:

Rédaction : preuve de $\exists! x \in E, P(x)$

« Existence : On pose $x = [...]$. On a alors [...] donc $P(x)$ est vrai.
Unicité : Soient x et y dans E tels que $P(x)$ et $P(y)$ sont vrais. Alors [...], donc $x = y$ ».

→ **Exercice de cours n° 10.**

III. Raisonnements

1. Par équivalence, par implication

Pour montrer que $A \Leftrightarrow B$, un raisonnement **par équivalence** consiste à démontrer une suite finie d'équivalence intermédiaire : $A \Leftrightarrow A_1 \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow A_n \Leftrightarrow B$

Un raisonnement par équivalence nécessite d'être **très vigilant** et de vérifier à chaque étape qu'on a bien une équivalence $\Leftrightarrow$ et pas une simple implication $\Rightarrow$.

Exemple 2.13

Résoudre une (in)équation simple se fait souvent par équivalence :

$$\begin{aligned} 3x+2 \leq x-8 &\Longleftrightarrow 2x \leq -10 \\ &\Longleftrightarrow x \leq -5 \\ &\Longleftrightarrow x \in]-\infty;-5] \end{aligned}$$

De même, un raisonnement par implication consiste à montrer que $A \Rightarrow B$ en montrant une suite finie d'implications : $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \cdots \Rightarrow A_n \Rightarrow B$

Exemple 2.14

Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ qui est à la fois paire et impaire. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f \text{ est paire et impaire donc : } &\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x) \text{ et } f(-x) = -f(x) \\ \text{donc : } &\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -f(-x) = -f(x) \\ \text{donc : } &\forall x \in \mathbb{R},\ 2f(x) = 0 \\ \text{donc : } &\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0 \end{aligned}$$

Remarque

Chaque proposition doit être séparée par une conjonction de coordination. Dans l'exemple précédent, à la place de « donc » on peut écrire « alors », « ainsi », « de sorte que », « il s'ensuit que », « il en résulte que »,etc.

Il vaut mieux un style répétitif avec uniquement des « donc » qu'une suite de propositions sans connecteurs logiques!

Rédaction : pour varier le style

- Rappeler un résultat de cours, une hypothèse de l'énoncé, un résultat déjà démontré : **d'après [...] on a[...]**, **d'après [...] on sait que [...]**, **on a déjà vu que [...]**,etc.
- Ajouter un argument : **or**, **de plus**, **en outre**, etc.
- Déduire : **donc**, **alors**, **ainsi**, **on en déduit que**, **de sorte que**, **il s'ensuit que**, **dès lors**, etc.
- Conclure (synthèse) : **finalement**, **on en conclut que**, **en conclusion**, etc.

2. Par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse synthèse sert à déterminer l'ensemble des solutions d'un problèmes en cherchant une condition nécessaire et suffisante pour être solution.

L'**analyse** est la recherche des conditions nécessaires : on suppose qu'on a déjà une solution du problème et on cherche quelle(s) condition(s) celle-ci doit vérifier.

La **synthèse** consiste à extraire des conditions nécessaires toutes les conditions suffisantes : parmi les conditions trouvées on ne garde que celles qui mènent directement à une solution du problème.

Remarque

Résoudre une équation (E), c'est trouver toutes les solutions possibles. On cherche donc un ensemble de solution S tel que x est solution de (E) si et seulement si $x \in S$. Ainsi, dire que S est l'ensemble des solution de E c'est affirmer l'équivalence logique suivante :

$$\text{« } \forall x,\ x \in S \Longleftrightarrow x \text{ est solution de } (E) \text{ »}$$

Certaines (in)équations ne peuvent pas être résolues par équivalence : il faut alors raisonner par analyse-synthèse, c'est à dire d'abord déterminer un ensemble des solutions **possibles**, puis chercher dans cet ensemble les valeurs qui sont vraiment solutions.

→ **Exercice de cours nº 11.**

→ **Exercice de cours nº 12.**

3. Par contraposée

Définition 2.12

La contraposée d'une implication $A \Rightarrow B$ est l'implication $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$.

Propriété 2.8 (modus pollens)

Une implication est vraie si et seulement si sa contraposée est vraie : pour toutes propositions A et B on a :

$$(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$$

Exemple 2.15

Si je n'ai pas mal au ventre, je peux en déduire que je n'ai pas mangé trop de bonbons.

Un **raisonnement par contraposée** est un raisonnement dans lequel on démontre que $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ pour montrer que $A \Rightarrow B$.

→ **Exercice de cours nº 13.**

→ **Exercice de cours nº 14.**

4. Par l'absurde

Proposition 2.9

Pour toute proposition A, la proposition $(A \Rightarrow F) \Rightarrow \neg A$ est vraie.

Si une proposition A implique quelque chose de faux, par exemple une contradiction, alors A est faux. Pour montrer qu'une proposition A est vraie, on peut donc montrer que l'hypothèse « A est faux » aboutit à une contradiction. On appelle cela un **raisonnement par l'absurde**.

→ **Exercice de cours nº 15.**

→ **Exercice de cours nº 16.**

5. Par disjonction de cas

Le raisonnement par disjonction de cas consiste à étudier séparément plusieurs cas recouvrant l'ensemble des cas possibles.

→ **Exercice de cours nº 17.**

→ **Exercice de cours nº 18.**

6. Par récurrence

Voir chapitre 3

IV. Compléments

Quelques opérations sur les connecteurs

Proposition 2.10 (Associativité)

Quelles que soient les propositions A, B et C, on a :

$$(A \wedge B) \wedge C \Longleftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C \Longleftrightarrow A \vee (B \vee C)$$

Proposition 2.11 (Distributivité)

Quelles que soient les propositions A, B et C, on a :

$$A \wedge (B \vee C) \Longleftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) \Longleftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Proposition 2.12 (Distributivité des quantificateurs)

Soient P une proposition qui dépend d'un paramètre x, et Q une proposition. Alors :

$$(\forall x, P(x)) \vee Q \Longleftrightarrow \forall x, (P(x) \vee Q)$$

$$(\exists x, P(x)) \vee Q \Longleftrightarrow \exists x, (P(x) \vee Q)$$

$$(\forall x, P(x)) \wedge Q \Longleftrightarrow \forall x, (P(x) \wedge Q)$$

$$(\exists x, P(x)) \wedge Q \Longleftrightarrow \exists x, (P(x) \wedge Q)$$

Exercices de cours

Exercice 1

Déterminer dans chaque cas l'ensemble des nombres x vérifiant les propositions suivantes :

1) $(x>0)\wedge(x\leq 10)$
2) $x\in\mathbb{N}$, $(x$ divise $12)\vee(x$ divise $15)$
3) $(x>4)\wedge(x<2)$
4) $(x>4)\vee(x<2)$

Exercice 2

Écrire les énoncés suivants à l'aide de connecteurs logiques

1) $x\in[3;7]$
2) $x\in]-\infty;2[\cup[5;+\infty[$

Exercice 3

Montrer que la proposition $\neg(A\wedge B)$ est logiquement équivalente à $(\neg A)\vee(\neg B)$

Exercice 4

Écrire la négation des propositions suivantes :

1) $x\leq 1$ et $x^2>4$
2) $y\in A$ et $y\in B$
3) $x>3$ ou $x<-4$

Exercice 5

Soient x et y deux réels. Montrer que $|x|+|y|=0 \Longleftrightarrow x=y=0$.

Exercice 6

Traduire par des phrases les propositions suivantes et dire si elles sont vraies ou fausse :

1. $\forall x\in\mathbb{R}, \exists y\in\mathbb{R}, x<y$
2. $\exists m\in\mathbb{R}, \forall q\in\mathbb{R}, m\geqslant q$
3. $\exists x\in]-\infty,0[, \exists y\in]0;+\infty[x^2=y^2$

Exercice 7

Traduire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. Le carré d'un nombre réel est positif.
2. Tout nombre positif est le carré d'un nombre réel.
3. La somme de deux entiers positifs est un entier positif.
4. La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

Exercice 8

Montrer que la proposition suivante est fausse : $\exists x\in\mathbb{R}^+, \forall y\in\mathbb{R}, y^2>x$.

Exercice 9

Exprimer à l'aide de quantificateur la proposition « (u_n) ne tend pas vers $+\infty$ ».

Exercice 10

En faisant bien attention à la rédaction...

1. ...montrer que pour tout réel x, $x^2\geq 0$
2. ...montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, \exists y\in R, y\geq x$.
3. ...montrer qu'il existe un unique entier naturel n tel que $n\leq\pi<n+1$.

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x suivante : $x-4=\sqrt{2x-5}$

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3+2x}{x-2}$
Montrer que pour tout $y\in]2,+\infty[$, il existe $x\in]2,+\infty[$ tel que $f(x)=y$.

Exercice 13

Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.

Exercice 14

Démontrer par contraposée les propositions suivantes :

1. $m\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}$. Si mn est impair alors m est impair ou n est impair.
2. Si $x\neq 0$ et $y\neq 0$, alors $xy\neq 0$
3. $a\in\mathbb{R}$, $(\forall\epsilon>0, |a|<\epsilon)\Rightarrow a=0$
4. Une somme de n réels positifs est nulle si et seulement si tous ces réels sont nuls.

Exercice 15

Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 16

Montrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 17

Résoudre $|x+8|+|x-6|\geq 4$

Exercice 18

Démontrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, le nombre $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3.