★

Exercice 1

Déterminer dans chaque cas la nature de la série de terme général u_n

1) $u_n = 5^{-2n}$
2) $u_n = 2^{-n}\sin n$
3) $u_n = \dfrac{n^3}{(n+2)!}$
4) $u_n = \dfrac{n}{2^n}$
5) $u_n = \dfrac{n^{2022}}{n!}$
6) $u_n = \dfrac{1}{n\cos^2(n)}$

★

Exercice 2

Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

1) Montrer que $\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k))$
2) En déduire que la série de terme général u_n diverge.

★

Exercice 3

Dans chaque cas, étudier la nature de la série de terme général $v_n = \ln(u_n)$ et calculer sa somme le cas échéant.

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$
2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$

★

Exercice 4

Pour chacune des séries ci-dessous, déterminer pour quelle(s) valeurs de x elles convergent et calculer leur somme pour n allant de 0 à $+\infty$.

1) $\sum (4x)^n$
2) $\sum \mathrm{e}^{nx}$
3) $\sum (1-5x)^n$
4) $\sum \dfrac{x^{2n}}{e^{nx^2}}$
5) $\sum \dfrac{x^{n/2}}{n!}$, $x > 0$
6) $\sum \dfrac{(3x)^n}{2x^{2n}}$, $x \neq 0$

★ ★

Exercice 5

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

1) $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^\pi}$
2) $u_n = \dfrac{n^{\frac{5}{2}} + n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{1}{3}}}$
3) $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$
4) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-1/n^2}}$
5) $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
6) $u_n = 1 - \mathrm{e}^{-1/n}$

★

Exercice 6

Justifier que les séries numériques suivantes convergent et calculer leur somme

1) $\sum_{n\geq 1} n \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
2) $\sum_{n\geq 2} n(n-1) \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$
3) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n^2}{5^n}$
4) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n^2}{n!}$

⋆
Exercice 7

Montrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

1) $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^2-1}$ (*indication : écrire* $\dfrac{1}{n^2-1}$ *sous la forme* $\dfrac{a}{n-1}+\dfrac{b}{n+1}$)
2) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (*indication : écrire* $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ *sous la forme* $\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}+\dfrac{c}{n+2}$)

⋆
Exercice 8

Montrer la convergence et calculer les sommes des séries suivantes :

1) $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n!}$
2) $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{2^{3n}}$
3) $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$
4) $\sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} \dfrac{1}{3^{i+2j}}$
5) $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n!}$
6) $\sum_{n\geq 0} \dfrac{\mathrm{e}^{2nx}}{n!}$
7) $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-x)^n}{4^n(n+2)!}$
8) $\sum_{n\geq 0} \dfrac{n^2+2n}{(n+2)!}$
9) $\sum_{n\geq 0} n^2 x^n$
10) $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

⋆ ⋆
Exercice 9

Soit (u_n) une suite de réels positifs et (v_n) la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $v_n=\dfrac{u_n}{1+u_n}$.
Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

⋆
Exercice 10

Une **série de Bertrand** est une série dont le terme général est de la forme $\dfrac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ avec α et β des réels.

1) Montrer que si $\alpha\leq 0$, la série diverge.
2) Montrer que si $0\leq\alpha<1$, la série diverge.
3) Montrer que si $\alpha>1$, la série converge.

On traitera le cas $\alpha=1$ dans le chapitre 15

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique positive. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on note $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$. Si la série $\sum u_n$ converge on note S sa somme et on définit par $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k=S-S_n$ la suite des restes de la série $\sum u_n$.
Enfin, soit (v_n) une suite positive telle que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$.

1) Montrer que si la série $\sum u_n$ diverge, alors $S_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$
2) Montrer que si la série $\sum v_n$ converge, alors $R_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.
3) Application : après avoir montré que $\dfrac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n+1)-\ln(n)$, déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ lorsque $n\to+\infty$.