CHAPITRE 7

# ANALYSE

# I. Fonctions réelles de la variable réelle

**Définition 7.1**

Une **fonction réelle de la variable réelle** est une application $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ où $D_f \subset \mathbb{R}$. L'ensemble $D_f$ est appelé **domaine de définition de** $f$.

## 1. Vocabulaire

### a. Graphe

**Définition 7.2**

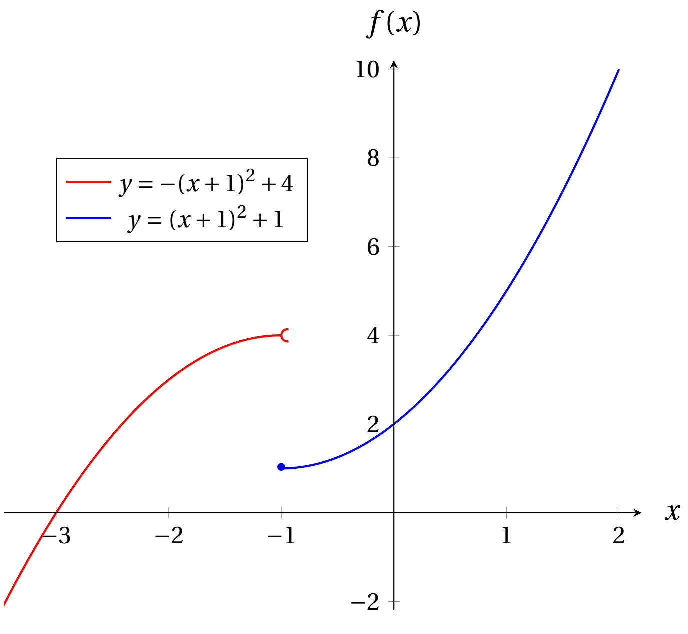
Soit $f$ une fonction réelle définie sur $D_f$. On appelle **graphe de** $f$ l'ensemble $\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$.
Cet ensemble est une partie de $\mathbb{R}^2$, on peut donc le représenter dans un plan muni d'un repère.

**Exemple 7.1**

Considérons la fonction suivante :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} -(x+1)^2+4 & \text{si } x < -1 \\ (x+1)^2+1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

$f$ est définie sur $\mathbb{R}$, une partie de son graphe est représentée ci-contre :




### b. Variations

**Définition 7.3**

Soit $c$ un réel fixé et $D \subset \mathbb{R}$. On appelle **fonction constante égale à $c$ sur $D$** la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & c \end{array}$$

On appelle **fonction nulle** la fonction

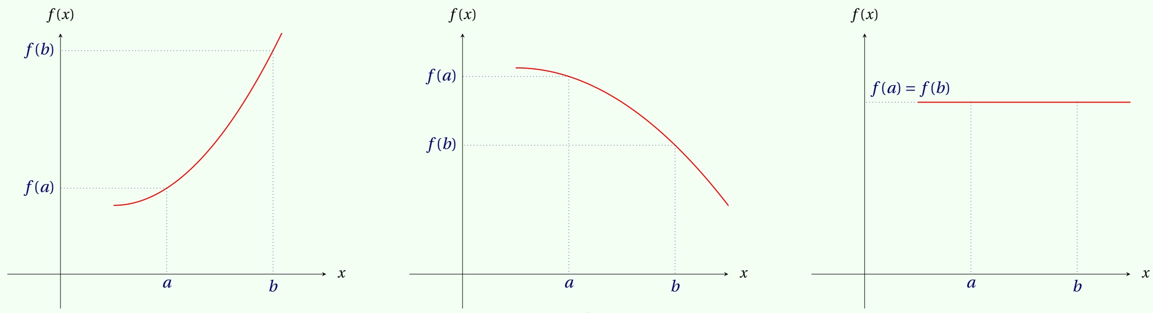
$$f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}$$

c'est à dire la fonction constante égale à 0.

### Définition 7.4

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un **intervalle** $I$. On dit que

- $f$ est **croissante** sur $I$ si $\forall (a,b) \in I^2,\ a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$
- $f$ est **décroissante** sur $I$ si $\forall (a,b) \in I^2,\ a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$
- $f$ est **constante** sur $I$ si $\forall (a,b) \in I^2,\ a < b \Rightarrow f(a) = f(b)$




Fonction croissante    Fonction décroissante    Fonction constante

On dit que $f$ est **monotone** sur $I$ si elle est croissante sur $I$ ou décroissante sur $I$.

## c. Fonction périodique

### Définition 7.5

Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $f$ est périodique s'il existe un réel $T \neq 0$ tel que pour tout réel $x \in D_f$ pour lequel $x + T \in D_f$ on a $f(x+T) = f(x)$. On dit alors que $T$ est une **période** de $f$ (ou que $f$ est $T$-périodique).

### Exemple 7.2

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période $2\pi$.
La fonction tangente est périodique de période $\pi$. En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

### Remarque

Si $f$ est $T$-périodique, alors $f$ est aussi $2T$-périodique, $3T$-périodique, etc. La période d'une fonction périodique n'est donc pas unique.

## d. Parité

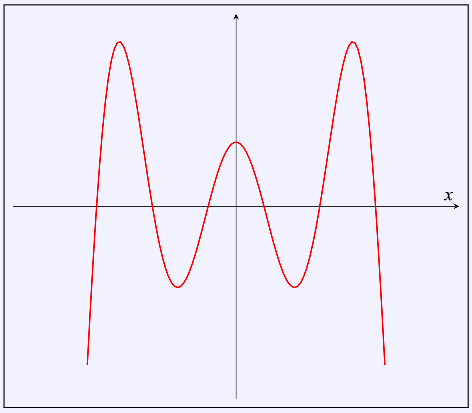
### Définition 7.6

Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ (on dit que $D_f$ est symétrique par rapport à 0).

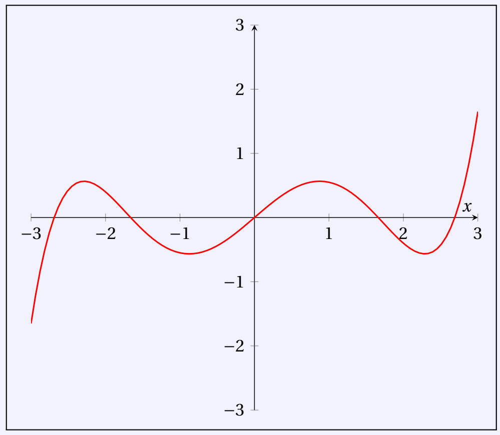
- On dit que $f$ est **paire** si $\forall x \in D_f,\ f(-x) = f(x)$
- On dit que $f$ est **impaire** si $\forall x \in D_f,\ f(-x) = -f(x)$.

### Propriété 7.1

- La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. En effet, si $(x, f(x)) \in \mathcal{C}_f$, alors $(-x, f(-x)) = (-x, f(x))$ est un point de $\mathcal{C}_f$. Ces deux points sont bien symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
- De même, la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.




Fonction paire




Fonction impaire

### Remarque

Si $f$ est paire, alors $f(0)=0$. En effet, il faut avoir $f(-0)=-f(0)$ donc $f(0)=-f(0)$ d'où $2f(0)=0$ et finalement $f(0)=0$.

### Exemple 7.3

Quelques fonctions paires :

- $x \longmapsto x^n$ lorsque $n \in \mathbb{Z}$ est pair (d'où le nom)
- $x \longmapsto \cos x$

Quelques fonctions impaires :

- $x \longmapsto x^n$ lorsque $n \in \mathbb{Z}$ est impair
- $x \longmapsto \sin x$
- $x \longmapsto \tan x$
- $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

### Propriété 7.2

La seule fonction à la fois paire et impaire sur un intervalle centrée en 0 est la fonction nulle $x \longmapsto 0$.

## e. Opérations

### Définition 7.7

Si $f$ et $g$ sont deux fonctions définies sur un même domaine $D$, on définit sur $D$ les fonctions **somme** et **produit** de $f$ et $g$, notées $f+g$ et $f\times g$, par

$$\forall x \in D,\ (f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in D,\ (f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$$

si de plus $g$ ne s'annule pas sur $D$ on peut définir la fonction quotient $\dfrac{f}{g}$ par

$$\forall x \in D,\ \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

## f. Majorant, minorant, extrema

### Définition 7.8

Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que

- $f$ est **majorée** s'il existe un réel $M$ tel que $\forall x \in D_f,\ f(x) \leq M$. On dit alors que $M$ est un **majorant** de $f$
- $f$ est **minorée** s'il existe un réel $m$ tel que $\forall x \in D_f,\ f(x) \geq m$. On dit alors que $m$ est un **minorant** de $f$.
- $f$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.
- $f$ admet un minimum sur $D_f$ s'il existe un réel $a \in D_f$ tel que $\forall x \in D_f,\ f(x) \geq f(a)$. Le réel $m=f(a)$ s'appelle alors **minimum** de $f$ sur $D_f$ et on dit qu'il est **atteint en** $a$.
- $f$ admet un maximum sur $D_f$ s'il existe un réel $a \in D_f$ tel que $\forall x \in D_f,\ f(x) \leq f(a)$. Le réel $M=f(a)$ s'appelle alors **maximum** de $f$ sur $D_f$ et on dit qu'il est **atteint en** $a$.
- On appelle **extremum** un minimum ou un maximum. .

## 2. Fonctions de référence

L'allure des graphes des fonctions suivantes doit être connu. Connaitre le graphe peut souvent aider à comprendre comment résoudre un problème, ou à se souvenir des limites usuelles.

### a. Fonctions affines et affines par morceaux

**Définition 7.9**

Une fonction affine est une fonction polynôme de degré au plus 1, c'est à dire une fonction de la forme $f : x \longmapsto ax + b$ où $a$ et $b$ sont des réels fixés.

Sa courbe représentative est une droite d'équation réduite $y = ax+b$. $a$ est le **coefficient directeur** de cette droite et $b$ est son **ordonnée à l'origine**.

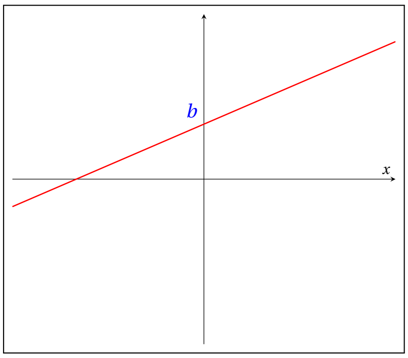
**Définition 7.10**

On dit qu'une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ est **affine par morceaux** s'il existe une suite d'intervalles deux à deux disjoints $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} I_n = D_f$ et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{|I_n}$ est une fonction affine.

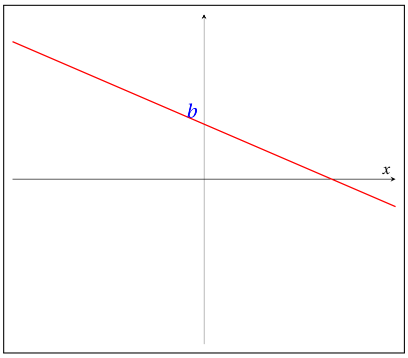
**Exemple 7.4**

- La fonction valeur absolue est affine par morceau. Sa restriction à $]-\infty;0[$ est la fonction $x \mapsto -x$ et sa restriction à $[0;+\infty[$ est $x \mapsto x$.
- La fonction **partie entière**, qui à un réel $x$ associe l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$, est affine par morceaux. Sa restriction à chaque intervalle de la forme $[n, n+1[$ est constante (donc affine).

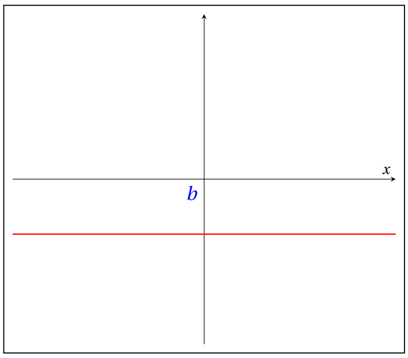
### b. Courbe représentative d'une fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$




$a > 0$

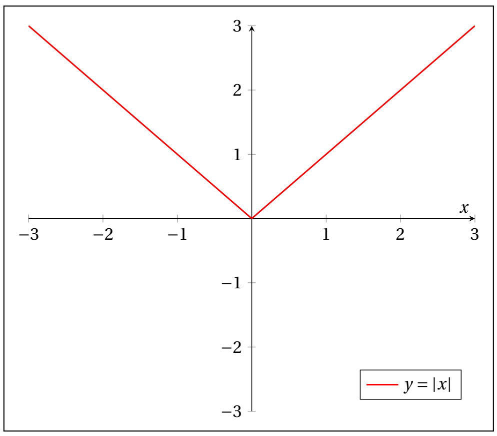



$a < 0$

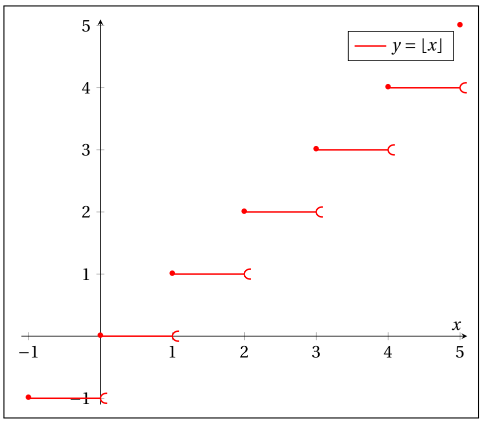



$a = 0$

### c. Courbe représentative de la fonction valeur absolue et de la fonction partie entière




Fonction $x \mapsto |x|$




Fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$

### d. Fonction polynôme de degré 2

Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction de la forme $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

### Définition 7.11

Soit $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$ une fonction polynôme de degré 2. On appelle **discriminant de** $f$ le nombre $\Delta = b^2-4ac$

On rappelle les deux propriété suivante :

### Propriété 7.3

Soit $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$ une fonction polynôme de degré 2. Alors

- Si $a > 0$, $f$ est décroissante sur $\left]-\infty ; \frac{-b}{2a}\right[$ et croissante sur $\left]\frac{-b}{2a} ; +\infty\right[$.
- Si $a < 0$, $f$ est croissante sur $\left]-\infty ; \frac{-b}{2a}\right[$ et décroissante sur $\left]\frac{-b}{2a} ; +\infty\right[$.

### Propriété 7.4

- Si $\Delta > 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions réelles, notées $x_1$ et $x_2$ et données par

$$\boxed{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

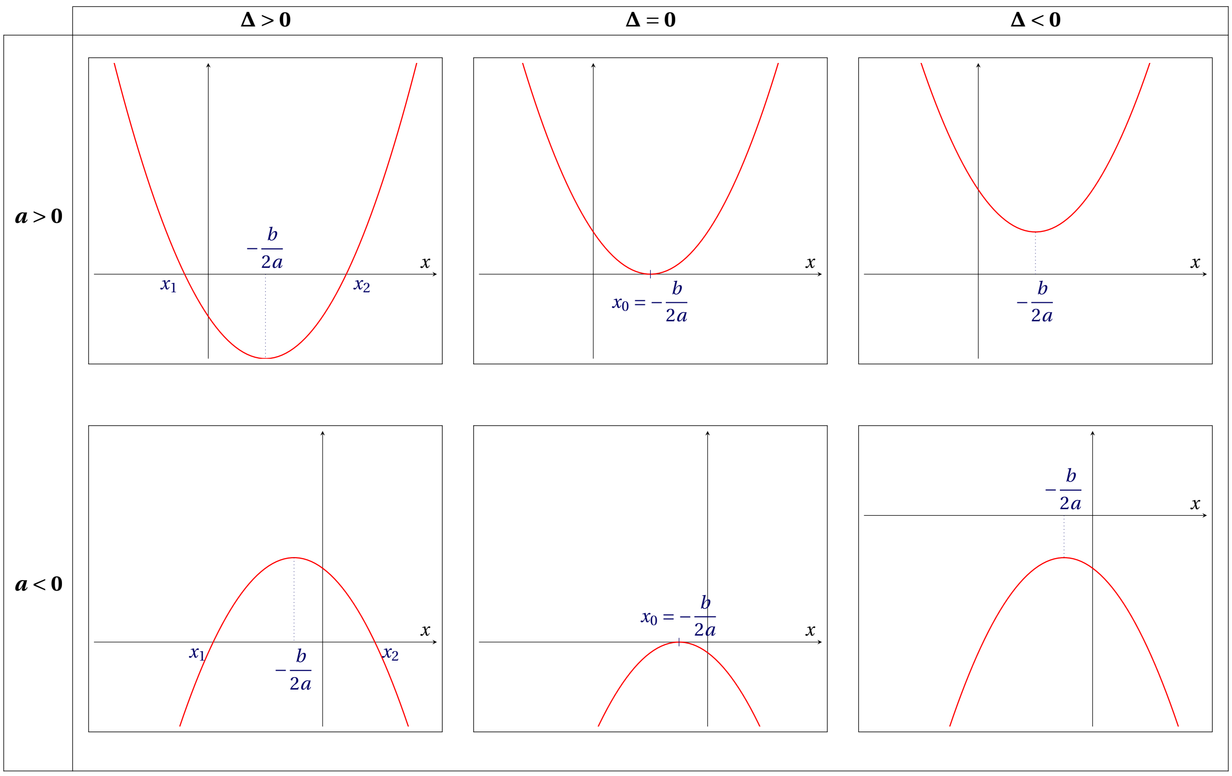
- Si $\Delta = 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle, notée $x_0$ et donnée par

$$\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a}}$$

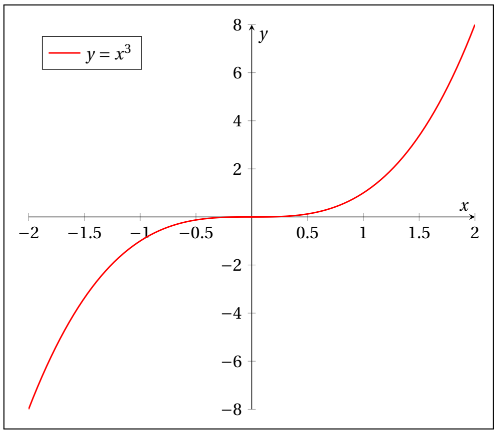
- Si $\Delta < 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution réelle.

## e. Courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2

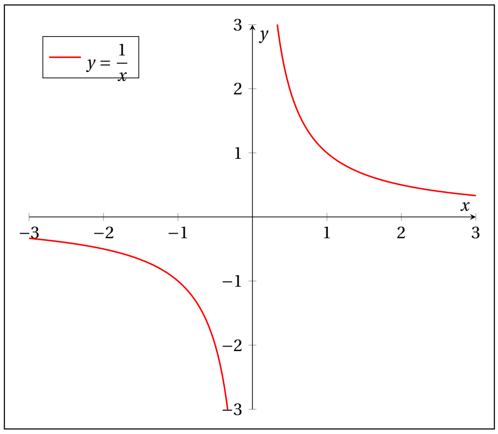
.



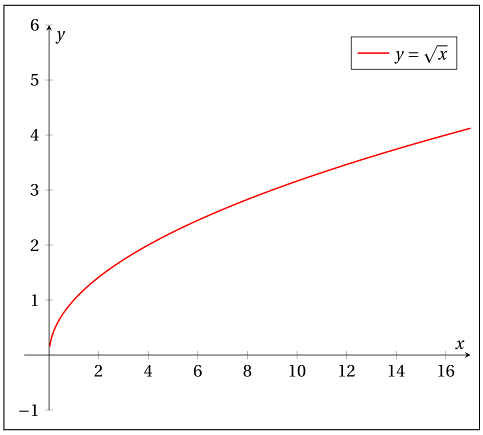
### f. Fonctions cube, inverse, racine carrée, racine cubique



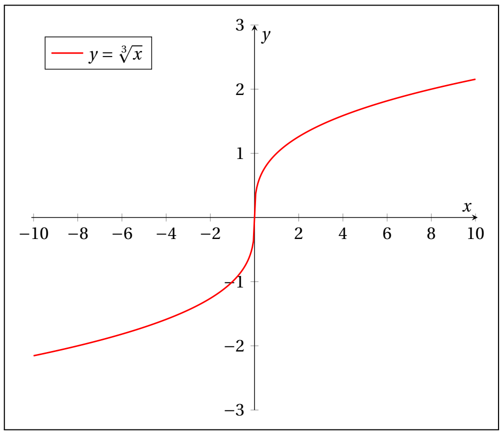

Fonction $x \longmapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$




Fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$




Fonction $x \longmapsto \sqrt{x} = x^{1/2}$ définie sur $[0; +\infty[$



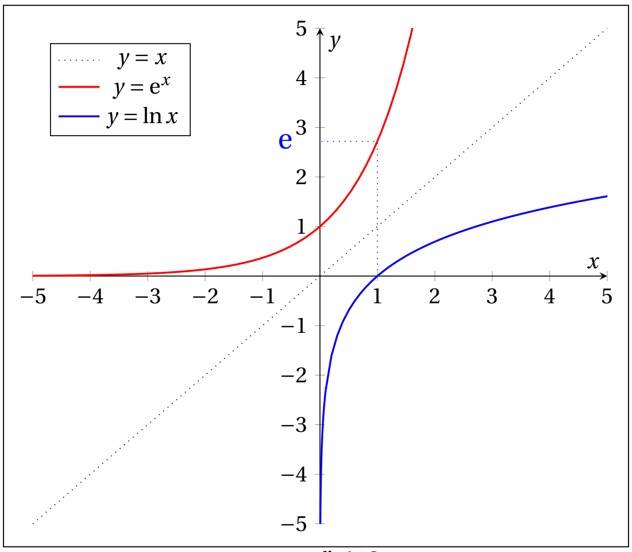

Fonction $x \longmapsto \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ définie sur $\mathbb{R}$

### g. Fonctions exponentielle et logarithme

**Définition 7.12**

La fonction logarithme naturel, notée ln, est l'unique primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ s'annulant en 1.
La fonction logarithme naturel réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$. La fonction exponentielle, notée exp, est définie comme étant l'application réciproque de ln.
Ainsi, on a

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x$
- $\forall x \in ]0, +\infty[,\ \exp(\ln(x)) = x$




Fonction $x \mapsto e^x$ définie sur $\mathbb{R}$
Fonction $x \mapsto \ln x$ définie sur $]0; +\infty[$

**Propriété 7.5 (Propriétés analytiques de la fonction exponentielle)**

- $x \mapsto e^x$ est dérivable et $(e^x)' = e^x$
- $e^0 = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$
- $x \mapsto e^x$ est strictement croissante
- $e^x = 1 \iff x = 0$
- $e^x > 1 \iff x > 0$
- $e^x < 1 \iff x < 0$

**Propriété 7.6 (Propriétés algébriques de la fonction exponentielle)**

- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ e^{a+b} = e^a e^b$
- $\forall a \in \mathbb{R},\ e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},\ (e^a)^n = e^{na}$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{e^a} = e^{a/2}$

**Définition 7.13**

Si $(a,b) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$, on définit $a^b$ par :

$$a^b = e^{b \ln(a)}$$

Ainsi, la dernière propriété peut se généraliser en $\forall (a,b) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R},\ (e^a)^b = e^{ab}$.

**Propriétés 7.7 (Propriétés analytiques de la fonction logarithme)**

- $x \mapsto \ln x$ est dérivable et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
- $\ln(1) = 0$
- $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln x = 0 \iff x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln x > 0 \iff x > 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln x < 0 \iff x < 1$

**Propriétés 7.8 (Propriétés algébriques de la fonction logarithme)**

- $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ \ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{Z},\ \ln(a^n) = n \ln a$
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2} \ln a$

→ **Exercice de cours n° 1.**

→ **Exercice de cours n°2.**

→ **Exercice de cours n°3.**

**Définition 7.14**

Soit $b>0$ un réel tel que $b\neq 1$. Le logarithme en base $b$ est l'application qui à un réel $x$ strictement positif associe l'unique réel $y$ tel que $b^y=x$. On la note $\log_b$.

**Remarque**

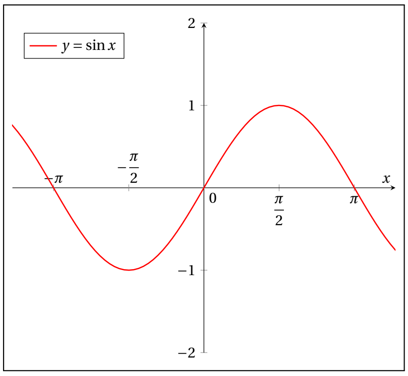
On a $b^y=x \iff e^{y\ln(b)}=x \iff y\ln(b)=\ln(x) \iff y=\dfrac{\ln(x)}{\ln(b)}$ car $b\neq 1$ donc $\ln(b)\neq 0$.

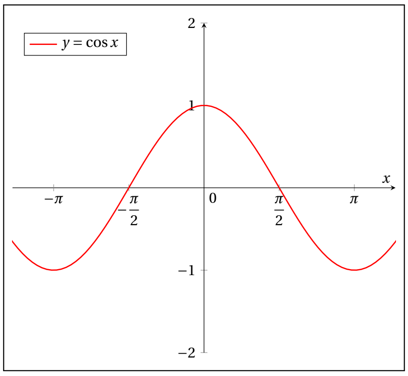
Ainsi, pour tout $b\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$, on a $\log_b(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(b)}$

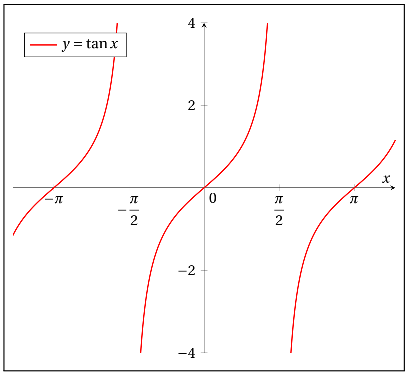
**Propriété 7.9**

Quelle que soit la base $b$, le logarithme en base $b$ vérifie les mêmes propriétés algébriques que le logarithme naturel.

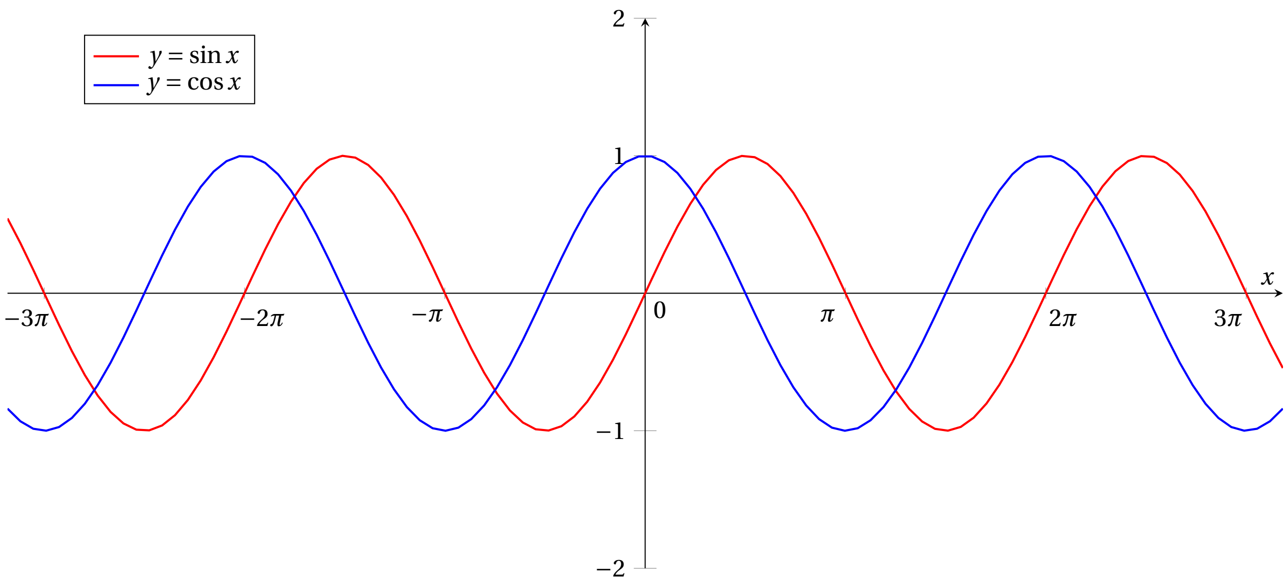
## h. Fonctions trigonométriques




**Sinus et cosinus ensemble :**




# 3. Fonctions polynômes de degré $n$

**Définition 7.15**

Soit $n\in\mathbb{N}$. On appelle **polynôme à coefficients réels de degré** $n$ une expression $P(X)$ de la forme

$$P(X)=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_1X+a_0$$

où $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $a_n \neq 0$ et où $X$ désigne une **indéterminée**. Si l'indéterminée est une variable réelle $x$, alors $P$ définit une fonction réelle de la variable réelle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Une telle fonction est une **fonction polynôme de degré $n$**.

- Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, le réel $a_k$ s'appelle **coefficient de degré** $k$
- le coefficient $a_n$ s'appelle **coefficient dominant de $P$**.
- Si $a_n = 1$, on dit que $P$ est un polynôme **unitaire**.
- On appelle **polynôme nul** le polynôme dont tous les coefficients sont nuls.
- On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$, et $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $n$.

### Remarque

On distingue un **polynôme** et une **fonction polynôme** car l'indéterminée $X$ peut être remplacée par différents objets mathématiques.

Par abus de langage on appelle parfois polynôme une fonction polynôme.

### Définition 7.16

On note $\deg(P) = n$ si $P$ est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Par convention, on pose $\deg(P) = -\infty$ si $P$ est le polynôme nul.

### Remarque

- La fonction associée au polynôme nul est la fonction nulle.
- Les fonctions polynômes de degré 0 sont les fonctions constantes.
- Les fonctions polynômes de degré 1 sont les fonctions affines.

### Propriété 7.10

Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ une fonction polynôme de degré $n$ (avec $a_n \neq 0$). Alors $P$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$$

### Remarque

Si $P$ est une fonction polynôme de degré $n$, alors $P'$ est une fonction polynôme de degré $n-1$.
Si on note $P^{(k)}$ la dérivée $k$-ième de $P$, alors $P^{(k)}$ est un polynôme de degré $n-k$. En particulier, $P^{(n)}$ est constant et $P^{(k)} = 0$ dès que $k > n$.

**→ Exercice de cours n$^{\text{o}}$ 4.**

### Propriété 7.11

- Une fonction polynôme est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
- Deux fonctions polynômiales sont égales si et seulement si elles ont même degré et tous leurs coefficients sont égaux.

### Propriété 7.12

Soient $P$ et $Q$ deux polynômes à coefficients réels. Alors

- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$

- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$
- $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ si $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
- $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$

**Définition 7.17**

On appelle **racine** d'un polynôme $P$ tout nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) = 0$.

**Propriété 7.13**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Pour tout réel $\lambda$,

$$\lambda \text{ est une racine de } P \iff \text{il existe } Q \in \mathbb{R}_{n-1}[x] \text{ tel que } P(x) = (x-\lambda)Q(x).$$

→ **Exercice de cours n° 5.**

**Propriété 7.14**

Une fonction polynôme de degré $n$ non nulle admet au plus $n$ racines distinctes. Autrement dit, le seul polynôme de degré inférieur ou égal à $n$ qui admet $n+1$ racines distinctes est le polynôme nul.

→ **Exercice de cours n° 6.**

# II. Limites

Dans toute cette section et sauf exception, $D_f$ est une partie de $\mathbb{R}$ et $f$ est une fonction définie sur $D_f$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Intuitivement, on dira que « $f$ a pour limite $\ell \in \overline{R}$ lorsque $x$ tend vers $a \in \overline{R}$ » si les valeurs de $f(x)$ « s'approchent » de $\ell$ lorsque la valeur de $x$ « s'approche » de $a$. Les définitions suivantes visent à donner un sens rigoureux au verbe « s'approcher ».

## 1. Limite en $+\infty$, limite en $-\infty$

### a. Limite infinie

**Définition 7.18**

On dit que $f$ admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x > x_0 \Rightarrow f(x) > A$$

On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

**Remarque**

Sans changer le sens de cette définition, on peut lui ajouter quelques mots qui ne sont pas nécessaires du point de vue logique mais aident à la compréhension :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si quel que soit le réel $A$, **aussi grand soit-il**, il existe un réel $x_0$ **qui peut dépendre de** $A$ tel que pour tout réel $x > x_0$ on a $f(x) > A$.

On définit de même les limites infinies en $\pm\infty$ :

**Définition 7.19**

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x > x_0 \Rightarrow f(x) < A$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x < x_0 \Rightarrow f(x) > A$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x < x_0 \Rightarrow f(x) < A$

→ **Exercice de cours n° 7.**

### b. Limite finie

**Définition 7.20**

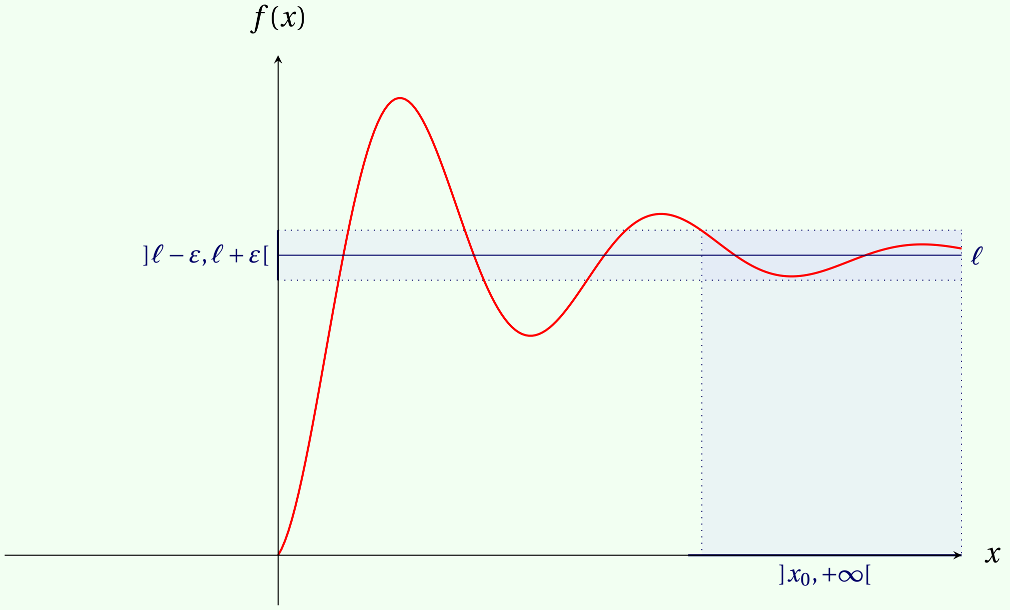
Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que $f$ admet pour limite le réel $\ell$ en $+\infty$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x > x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

- $f$ admet pour limite le réel $\ell$ en $-\infty$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$




$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

**Remarque**

On rappelle que $|f(x) - \ell| < \varepsilon \iff f(x) \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$

**Remarque**

Sans changer le sens de cette définition, on peut la reformuler de la façon suivante :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ si pour tout réel $\varepsilon$ strictement positif, **aussi petit soit-il**, il existe un réel $x_0$ **qui peut dépendre de** $\varepsilon$ tel que pour tout $x > x_0$, la distance entre $f(x)$ et $\ell$ est inférieure à $\varepsilon$.

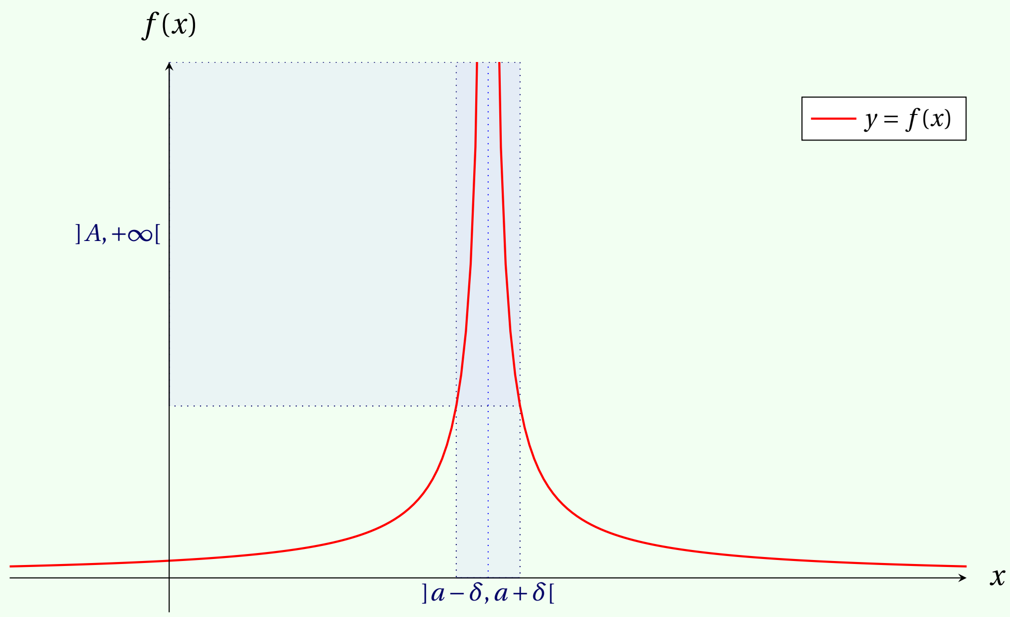
→ **Exercice de cours n$^{\text{o}}$ 8.**

## 2. Limite en un réel $a$

**Définition 7.21**

$f$ admet pour limite $+\infty$ en $a$, si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f \setminus \{a\}, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > A$$




$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

On peut définir de même les autres types de limite en un réel $a$ :

**Définition 7.22**

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f \setminus \{a\},\ |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < A$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f \setminus \{a\},\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

**Proposition 7.15 (Unicité de la limite)**

Si $f$ tend vers une limite $\ell \in \overline{R}$ lorsque $x$ tend vers un réel $a$, ou $x$ tend vers $\pm\infty$, alors $\ell$ est unique.

## 3. Définition unifiée

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ la **droite réelle achevée**. On utilise cette notation **uniquement dans le cours** pour généraliser plus facilement des définitions et des propriétés sur les limites.

Les différentes définitions de limites vues dans les sections précédentes peuvent être synthétisé en une seule grâce à la notion de **voisinage**.

**Définition 7.23**

Un **voisinage** d'un réel $a$ est un intervalle de la forme $]a-\delta, a+\delta[$ avec $\delta > 0$.
Un **voisinage** de $+\infty$ (respectivement de $-\infty$) est un intervalle de la forme $]A;+\infty[$ (respectivement de la forme $]-\infty, A[$ avec $A \in \mathbb{R}$.

**Définition 7.24**

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. $f$ admet pour limite $\ell$ lorsque $x$ tend vers $a$ si pour tout voisinage $V_\ell$ de $\ell$, il existe un voisinage $V_a$ de $a$ tel que $f(V_a) \subset f(V_\ell)$ (autrement dit tel que $\forall x \in V_a, f(x) \in V_\ell$).

En adaptant la définition de voisinage selon la valeur réelle ou infinie de $a$ et de $\ell$, on retrouve dans cette définition toutes les définitions de limites précédentes.

## 4. Limites et monotonie

**Proposition 7.16 (théorème de la limite monotone)**

Soient $a, b \in \overline{R}$ et $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ une fonction monotone.

- Si $f$ est croissante et majorée sur $]a, b[$, alors $f$ admet une limite finie en $b$.
- Si $f$ est croissante et non majorée sur $]a, b[$, alors $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$
- Si $f$ est décroissante et minorée sur $]a, b[$, alors $f$ admet une limite finie en $a$
- Si $f$ est décroissante et non minorée sur $]a, b[$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

**Proposition 7.17**

- Si $f$ est croissante sur $]a, b[$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \ell$, alors $\forall x \in ]a, b[$, $f(x) \leq \ell$.
- Si $f$ est croissante sur $]a, b[$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, alors $\forall x \in ]a, b[$, $\ell \leq f(x)$.
- Si $f$ est décroissante sur $]a, b[$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \ell$, alors $\forall x \in ]a, b[$, $f(x) \geq \ell$
- Si $f$ est décroissante sur $]a, b[$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, alors $\forall x \in ]a, b[$, $a \geq f(x)$.

## 5. Théorèmes de comparaison

Dans toute cette section, $f$, $g$ et $h$ sont trois fonctions définies dans un voisinage de $a$, avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

**Proposition 7.18 (passage à la limite dans une inégalité)**

Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x$ dans un voisinage de $a$ et que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$.

**Remarque**

Le passage à la limite dans une inégalité stricte donne une inégalité **large** :

$$\text{Si } V \text{ est un voisinage de } a, \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell' \\ \forall x \in V, f(x) < g(x) \end{cases} \implies \ell \leq \ell'$$

**Proposition 7.19**

Supposons que $f(x) \leq g(x)$ dans un voisinage de $a$.

- si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$
- si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

**Théorème 7.20 des gendarmes**

Supposons que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ dans un voisinage de $a$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$.

## 6. Limite à gauche, limite à droite

**Définition 7.25**

**Limite à gauche**

- On dit que $f$ tend vers $+\infty$ à gauche en $a \in I$, et on note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, x \in ]a-\delta, a[ \Rightarrow f(x) > A$$

- On dit que $f$ tend vers un réel $\ell$ à gauche en $a \in I$, et on note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, x \in ]a-\delta, a[ \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

**Limite à droite**

- On dit que $f$ tend vers $+\infty$ à droite en $a \in I$, et on note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, x \in ]a, a+\delta[ \Rightarrow f(x) > A$$

- On dit que $f$ tend vers un réel $\ell$ à droite en $a \in I$, et on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, x \in ]a, a+\delta[ \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

**Remarque**

On définit de même $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

**Exemple 7.5**

- $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 3^+} \lfloor x \rfloor = 3$ et $\lim\limits_{x \to 3^-} \lfloor x \rfloor = 2$. En effet, pour tout $x \in ]3-\delta, 3[$ avec $\delta$ suffisamment petit, on a $\lfloor x \rfloor = 2$.

**Proposition 7.21**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On a

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

## 7. Asymptotes

**Définition 7.26**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.
On dit que

- $f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = a$ en $a$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ (ou si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$)
- $f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

**Remarque**

Graphiquement, une asymptote est une droite indiscernable de la courbe de $f$ à l'infini.

Une fonction peut admettre au plus 2 asymptotes horizontales, mais une infinité d'asymptotes verticales

**Exemple 7.6**

- La fonction inverse admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 0$
- La fonction exponentielle admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$
- La fonction tangente admet une infinité d'asymptote verticales, d'équation $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

# III. Calcul de limites

## 1. Opérations sur les limites

Dans cette section, $a$ désigne un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$, et $\ell$ désigne un réel fini.

### a. Somme

**Proposition 7.22**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \cdots$ | $\ell$ | $\ell$ | $\ell$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \cdots$ | $\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| alors $\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x)) = \cdots$ | $\ell+\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | FI | $-\infty$ |

## b. Produit

**Proposition 7.23**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \cdots$ | $\ell$ | $\ell>0$ | $\ell>0$ | $\ell<0$ | $\ell<0$ | $0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \cdots$ | $\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x) = \cdots$ | $\ell+\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | FI | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

## c. Quotient

**Proposition 7.24**

**Si** $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ **:**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \cdots$ | $\ell$ | $\ell$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \cdots$ | $\ell'\neq 0$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | $\ell'>0$ | $\ell'<0$ | $\ell'>0$ | $\ell'<0$ |
| alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \cdots$ | $\dfrac{\ell}{\ell'}$ | $0$ | FI | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

**Si** $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ **:**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \cdots$ | $\ell>0$ | $\ell>0$ | $\ell<0$ | $\ell<0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $0$ |
| et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \cdots$ | $0^+$ | $0^-$ | $0^+$ | $0^-$ | $0^+$ | $0^-$ | $0^+$ | $0^-$ | $0$ |
| alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \cdots$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | FI |

### Remarque

On note $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell^+$ (respectivement $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell^-$) si $g(x)$ tend vers 0 en gardant des valeurs supérieure ou égal à $\ell$ (respectivement inférieure ou égale à $\ell$).
Autrement dit :

$$\lim_{x\to a} g(x) = \ell^+ \iff \forall\varepsilon, \exists\delta>0, |x-a|<\delta \Rightarrow g(x)\in[\ell,\ell+\varepsilon[$$

$$\lim_{x\to a} g(x) = \ell^- \iff \forall \varepsilon, \exists \delta > 0, |x-a| < \delta \Rightarrow g(x) \in ]\ell - \varepsilon, \ell]$$

Ainsi, la notation $\lim_{x\to a} g(x) = 0^+$ si $g(x)$ tend vers 0 en gardant des valeurs positive

$$\forall \varepsilon, \exists \delta > 0, |x-a| < \delta \Rightarrow 0 \leq g(x) < \varepsilon$$

(de même pour $\lim_{x\to a} g(x) = 0^-$)

## 2. Composition de limites

**Proposition 7.25**

Soient $a$,$b$, $c$ trois réels, ou $\pm\infty$, et soient $f$ et $g$ deux fonctions telles que $g \circ f$ soit définie dans un voisinage de $a$. Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et que $\lim_{x\to b} g(x) = c$. Alors $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = c$

**Exemple 7.7**

Calculer la limite de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-1/x}$ en $0^+$ et en $0^-$.

## 3. Croissances comparée

### a. Négligeabilité

**Définition 7.27**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un intervalle $I$ et $a \in I$.
On dit que $f$ est négligeable devant $g$ au voisinage de $a$, et on note $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$, s'il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et $f(x) = \varepsilon(x) g(x)$

Si $g$ ne s'annule pas au voisinage de $a$, cette définition est équivalente à $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

**→ Exercice de cours n° 9.**

Les règles sont les mêmes que pour les suites :

**Propriété 7.26**

Soit $a \in \mathbb{R}$, ou $a = \pm\infty$, et $f$, $g$ et $h$ trois fonctions définies au voisinage de $a$.

- Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$
- Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$, alors $f(x)h(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x)h(x))$
- $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ si et seulement si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(1)$

### b. Comparaisons usuelles

**Proposition 7.27 (croissances comparées)**

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ deux réels. On a les limites suivantes :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Limite | $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^\beta}{\mathrm{e}^{\alpha x}} = 0$ | $\lim_{x\to-\infty} x^\beta \mathrm{e}^{\alpha x} = 0$ si $\beta \in \mathbb{N}^*$ | $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$ | $\lim_{x\to 0^+} x^\beta \lvert\ln x\rvert^\alpha = 0$ |
| Notation de Landau | $x^\beta \underset{+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{\alpha x})$ | $\mathrm{e}^{\alpha x} \underset{-\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\beta}\right)$ | $(\ln x)^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$ | $\lvert\ln x\rvert^\alpha \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\beta}\right)$ |

**Remarque**

En particulier, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty}$ , $\boxed{\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0}$ , $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0}$ , $\boxed{\lim_{x\to 0} x \ln x = 0}$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty}$ , $\boxed{\lim_{x\to-\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0}$ , $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0}$ , $\boxed{\lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0}$

→ **Exercice de cours n° 10.**

### c. Équivalence

**Définition 7.28**

Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$. Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies au voisinage de $a$. On dit que $f$ est **équivalente à** $g$ au voisinage de $a$ s'il existe une fonction $\alpha$ vérifiant $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 1$ telle que $\forall x \in D_f \cap D_g$, $f(x) = \alpha(x) g(x)$.
On note $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$.

Si $g(x)$ ne s'annule pas au voisinage de $a$, cette définition est équivalente à $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

**Les propriétés de l'équivalence sont les mêmes que pour les suites :**

**Propriété 7.28**

$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ si et seulement si $f(x) - g(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$.

**Propriété 7.29 (Opérations sur les équivalents)**

Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$ et soient $f$, $g$, $h$ et $k$ quatre fonctions définies au voisinage de $a$.

- Si $f(x) \sim g(x)$, alors $g(x) \sim f(x)$
- Si $f(x) \sim g(x)$ et que $g(x) \sim h(x)$, alors $f(x) \sim h(x)$
- Si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $f(x) \sim \ell \iff \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$
- Si $f(x) \sim g(x)$ et $h(x) \sim k(x)$
  - ▷ $f(x)h(x) \sim g(x)k(x)$
  - ▷ $\dfrac{f(x)}{h(x)} \sim \dfrac{g(x)}{k(x)}$ si $h(x)$ et $k(x)$ ne s'annulent pas
- Si $f$ et $g$ sont strictement positives et telles que $f(x) \sim g(x)$ et si $a \in \mathbb{R}$, alors $f(x)^a \sim g(x)^a$. En particulier $\sqrt{f(x)} \sim \sqrt{g(x)}$.

**Remarque**

**Attention :** On n'ajoute pas des équivalence.
En général $f(x) \sim g(x) \not\Rightarrow f(x) + k(x) \sim g(x) + k(x)$
Par exemple : $x^2 + 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$ et $1 - x^2 \underset{x \to +\infty}{\sim} -x^2$ mais $x^2 + 1 + 1 - x^2 \sim 2 \nsim 0$.

Par composition de limites, on a immédiatement le résultat suivant :

**Proposition 7.30**

Soient $(a, b) \in (\overline{\mathbb{R}})^2$. Si $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$ et que $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$, alors $f(h(x)) \underset{x \to a}{\sim} g(h(x))$.

**Exemple 7.8**

On sait que $x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\ln(x)^2 + \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)^2$.

**Remarque**

**Attention :** On ne compose pas des équivalences à gauche
En général, $f(x) \sim g(x) \not\Rightarrow h \circ f(x) \sim h \circ g(x)$
Par exemple $x + 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} x$ mais $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x+1}}{e^x} = e^1 \neq 1$ donc $e^{x+1} \nsim e^x$.

→ **Exercice de cours n° 11.**

### d. Équivalents usuels

**Proposition 7.31**

Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polynôme.

- En $+\infty$ et en $-\infty$, $P$ est équivalent à son terme de plus haut degré.
- En 0, $P$ est équivalent à son terme de plus petit degré.

**Proposition 7.32**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in I$. Alors

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \mathrm{o}(x-a)$$

On en déduit les égalités suivantes

**Propriété 7.33 (développements limités à l'ordre 1)**

Lorsque $x \to 0$ on a :

- $\sin x = x + o(x)$
- $\cos x = 1 + o(x)$
- $\exp(x) = 1 + x + o(x)$
- $\ln(1+x) = x + o(x)$
- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$

→ **Exercice de cours n$^{\text{o}}$ 12.**

On peut exprimer ces développements limités sous forme d'équivalents :

**Propriété 7.34 (équivalents usuels)**

Lorsque $x \to 0$ on a :

- $\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x$
- $\cos x \underset{x \to 0}{\sim} 1$
- $\exp(x) - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$
- $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$
- $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{2}x$
- $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x$
- $\frac{1}{1-x} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$

→ **Exercice de cours n$^{\text{o}}$ 13.**

# IV. Continuité

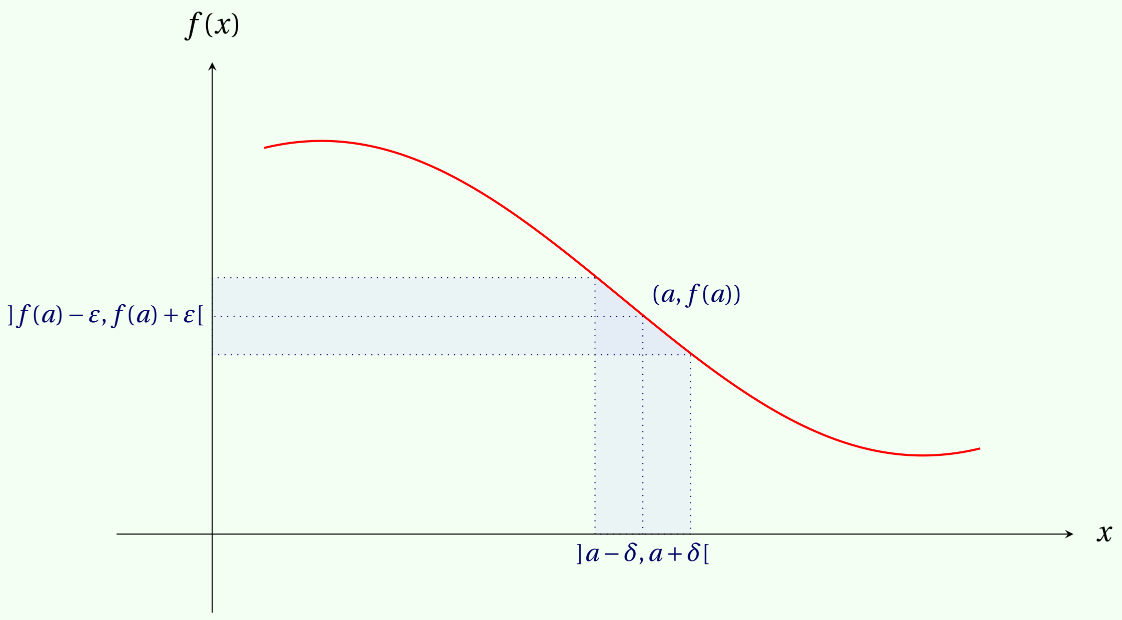
Dans toute cette section $I$ désigne un intervalle réel.

## 1. Définition

**Définition 7.29**

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $I$ et soit $a \in I$.
On dit que $f$ est **continue en** $a$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, c'est à dire si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon}$$




$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

### Définition 7.30

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $I$. On dit que $f$ est **continue sur** $I$ si $f$ est continue en $a$ quel que soit $a \in I$.

### Propriété 7.35 (admise)

La plupart des fonctions de référence sont continues sur tout intervalle où elles sont définies :

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$
- $x \longmapsto \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $x \longmapsto \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $x \longmapsto \tan x$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
- $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $x \longmapsto \ln x$ est continue sur $]0, +\infty[$
- $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}^*$ car $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle, mais elle est continue sur $]-\infty, 0[$ et continue sur $]0, +\infty[$.

### Remarque

La fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$

→ **Exercice de cours n$^{\text{o}}$ 14.**

### Propriété 7.36 (Opérations)

Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $I$. Alors

- $f+g$ est continue sur $I$
- $f \times g$ est continue sur $I$
- Si $\forall x \in I, g(x) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue

### Propriété 7.37 (Composée de fonctions continues)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur $I$.

## 2. Prolongement par continuité

**Définition 7.31**

Soit $I$ un intervalle et $a \in I$ et soit $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $f$ est **prolongeable par continuité en** $a$ s'il existe un prolongement de $f$ à $I$ continu sur $I$, c'est à dire une fonction $\hat{f} : I \to \mathbb{R}$ continue sur $I$ et telle que $\hat{f}|_{I\setminus\{a\}} = f$.

**Proposition 7.38**

Soit $I$ un intervalle, soit $a \in I$ et soit $f$ une fonction continue définie sur $I \setminus \{a\}$. $f$ est prolongeable par continuité en $a$ si et seulement si $f$ admet une limite finie en $a$.

→ **Exercice de cours n° 15.**

**Proposition 7.39**

Si $a$ n'est pas une borne de $I$, alors $f$ est prolongeable par continuité en $a$ si et seulement si $f$ admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite en $a$ et que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

→ **Exercice de cours n° 16.**

## 3. Applications

### a. Continuité et suites

**Proposition 7.40**

Si $(u_n)$ converge vers une limite finie $\ell$, et que $f$ est une fonction continue en $\ell$, alors $f(u_n)$ converge aussi et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

→ **Exercice de cours n° 17.**

**Exemple 7.9**

Un contre exemple avec une fonction non continue : $f : x \longmapsto \lfloor x \rfloor$.

Le fait que $(u_n)$ converge n'entraine pas nécessairement que $(\lfloor u_n \rfloor)$ converge. Exemple avec la suite $1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ qui converge vers 1, mais pour $n \geq 2$ on a :

- ▷ Si $n$ est pair $\left\lfloor 1 + \dfrac{(-1)^n}{n} \right\rfloor = \left\lfloor 1 + \dfrac{1}{n} \right\rfloor = 1$
- ▷ Si $n$ est impair $\left\lfloor 1 + \dfrac{(-1)^n}{n} \right\rfloor = \left\lfloor 1 - \dfrac{1}{n} \right\rfloor = 0$

donc la suite $\left(\lfloor 1 + \dfrac{(-1)^n}{n} \rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

### b. Continuité et monotonie

**Propriété 7.41**

Soient $a < b$ deux réels. Alors

- Si $f$ est continue sur $[a,b]$ et monotone sur $]a,b[$ alors $f$ est monotone sur $[a,b]$.
- Si $f$ est continue sur $[a,b]$ et strictement monotone sur $]a,b[$ alors $f$ est strictement monotone sur $[a,b]$

### c. Théorème des valeurs intermédiaire

**Théorème 7.42 (des valeurs intermédiaires)**

Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue**. Soit $\alpha \in [f(a), f(b)]$ (ou $\alpha \in [f(b), f(a)]$ le cas échéant). Alors il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \alpha$.

**Remarque**

Le théorème est encore vrai si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ (ou les deux). On remplace alors $f(a)$ par $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $f(b)$ par $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

→ **Exercice de cours n° 18.**

## Remarque

Les équations à une inconnue $x$ peuvent souvent se ramener à une équation de la forme $g(x) = 0$. Lorsqu'on cherche à démontrer l'existence d'un antécédent de 0 par la fonction $g$, le théorème des valeurs intermédiaires peut se formuler de la façon suivante :

Si $g$ est continue et que $g(a)g(b) \leq 0$, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$

En effet, $g(a)g(b) \leq 0$ signifie que $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes contraires donc que 0 est compris entre $g(a)$ et $g(b)$, le TVI s'applique donc.

→ **Exercice de cours n° 19.**

### Théorème 7.43 (Corollaire du TVI)

Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur $[a,b]$. Soit $\alpha \in [f(a), f(b)]$ (ou $\alpha \in [f(b), f(a)]$ le cas échéant). Alors il existe un **unique** réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \alpha$.

## Remarque

Le corollaire est encore vrai si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ (ou les deux). On remplace alors $f(a)$ par $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $f(b)$ par $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

→ **Exercice de cours n° 20.**

### Proposition 7.44 (conséquence du TVI)

Si $I$ est un intervalle et que $f$ est continue sur $I$, alors $f(I)$ est un intervalle.

## d. Théorème des valeurs atteintes

### Définition 7.32

On appelle **intervalle fermé borné** tout intervalle de la forme $[a;b]$.

### Théorème 7.45 (des valeurs atteintes, admis)

Si $I$ est un intervalle fermé borné, alors $f(I)$ est un intervalle fermé borné.
En particulier, si $f$ est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, alors $f$ est bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes, c'est à dire qu'elle admet un minimum et un maximum sur $[a,b]$.

## e. Théorème de la bijection

Une autre formulation du corollaire du TVI est le **théorème de la bijection**

### Théorème 7.46 de la bijection

Soient $a < b$ deux réels et soit $I = [a;b]$. Soit $f$ une fonction continue et strictement monotone sur $I$. Alors $J = f(I)$ est un intervalle dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$ et $f$ réalise une bijection de $I$ vers $J$. De plus, sa fonction réciproque $f^{-1}$ est continue et strictement monotone sur $J$, de même sens de variation que $f$.

## Remarque

Le théorème de la bijection est encore vrai si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, on remplace alors $f(a)$ et $f(b)$ par $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ le cas échéant.

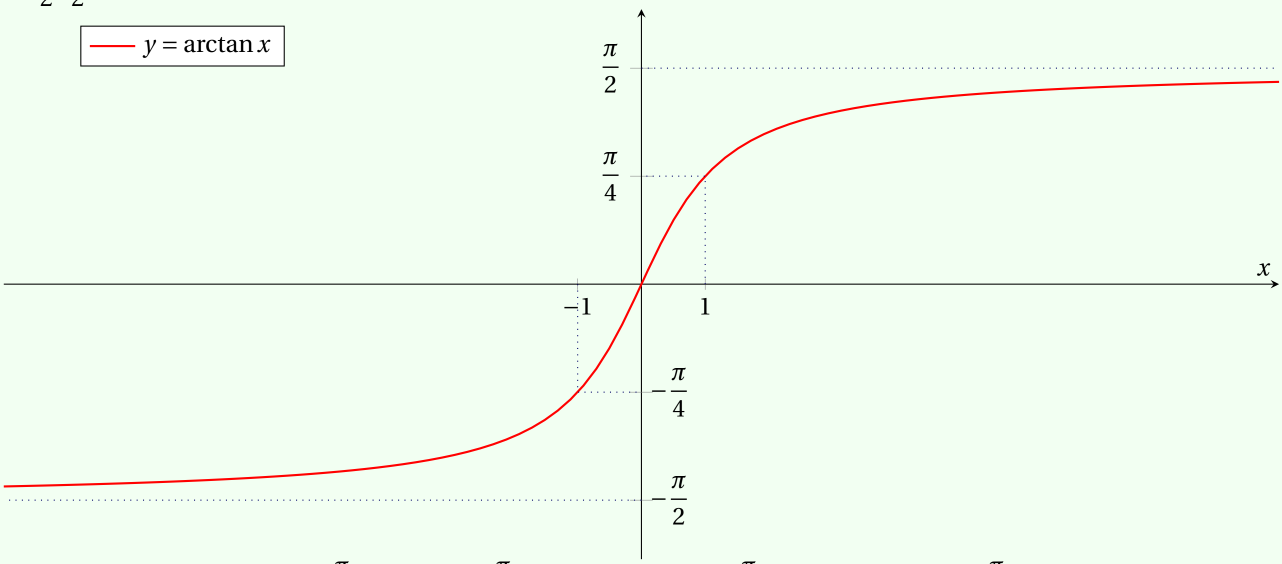
Le théorème est aussi vrai si l'une des bornes est ouverte, l'image d'une borne ouverte est alors ouverte et l'image d'une borne fermée est fermée.

→ **Exercice de cours n° 21.**

## f. Fonction arctangente

**Définition 7.33**

La fonction $x \longmapsto \tan x$ est continue et strictement croissante sur $I = ]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. De plus, $\tan(I) = \mathbb{R}$. En vertu du théorème de la bijection, il existe donc une fonction notée arctan définie et continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$.




On retient que $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.

→ **Exercice de cours n°22.**

**Propriété 7.47**

Soient $I$ et $J$ deux intervalles et $f$ une bijection de $I$ vers $J$ dérivable sur $I$. Si $f'$ ne s'annule pas sur $I$, alors $f^{-1}$ est dérivable sur $J$ et on a :

$$\boxed{\forall x \in J, \quad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}}$$

**Propriété 7.48**

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

## Exercices de cours

### Exercice 1

Montrer les deux inégalités suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq x+1 \quad ; \quad \forall x > 0, \quad \ln(1+x) \leq x$$

### Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\dfrac{e^x + e^{2x}}{1 + e^{-x}}$
2. $\dfrac{2\ln(2) + \ln(9)}{\ln(6)}$
3. $\ln(x^2-4) - \ln(x+2)$
4. $\ln\left(e^{x^2} \times (e^{2-2x})^2\right) e^{-\ln(x-2)}$
5. $\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \ln(k^2+k) - \ln(k+1)\right)$
6. $x + \ln(1+e^{-x}) + \ln(1-e^x)$

### Exercice 3

Résoudre les équations et inéquations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivantes :

a) $e^{2x} + 2e^x = e^x + 6$

b) $\ln(2) + \ln(x-1) + \ln(x-3) = \ln(4-4x)$

c) $2\ln(x)^2 - \ln(x) - 1 = 0$

### Exercice 4

Montrer qu'il n'existe aucun polynôme $P$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = P(x)$.

### Exercice 5

Factoriser les polynômes suivants :

a) $f(X) = X^3 + X^2 - 2$

b) $g(X) = X^3 + X^2 + X + 1$

c) $h(X) = X^3 - 2X^2 + X - 2$

### Exercice 6

Déterminer l'ensemble des polynômes à coefficients réels $P$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) = P(x)$.

### Exercice 7

Montrer en utilisant uniquement la définition que $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

### Exercice 8

Montrer en utilisant uniquement la définition que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

### Exercice 9

Montrer que $x^2 \underset{x \to +\infty}{=} o(x^3)$ et $x^3 \underset{x \to 0}{=} o(x^2)$.

### Exercice 10

Déterminer les limites des fonctions suivantes lorsque $x$ tend vers $+\infty$

1. $f(x) = (\ln x)^3 e^{-x}$
2. $g(x) = e^{4x} - x^2 e^{3x} \ln(x)$
3. $h(x) = \ln(x) \times \dfrac{x+1}{e^x}$
4. $k(x) = \dfrac{\ln(\ln(x))}{\sqrt{\ln(x)}}$

## Exercice 11

Démontrer les équivalents suivants :

1. $\sqrt{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$
2. $\ln(x+x^2) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\ln(x)$
3. $e^x + x^3 \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$
4. $e^x + x^3 \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3$
5. $\ln x + 2 \underset{x\to 0}{\sim} \ln x$
6. $\ln x + \frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}$

## Exercice 12

Utiliser des développement limités à l'ordre 1 pour calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{3+x}-1}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x^2)}{\sin(x)\sqrt{1-x}}$

## Exercice 13

Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes au voisinage de $a$ :

1. $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, $a = +\infty$
2. $g(x) = \ln(x^2+x) - \ln(x^2)$, $a = +\infty$
3. $h(x) = \dfrac{\ln(e^{1/x}+1)}{e^{\ln(x)+x} - x}$, $a = 0$
4. $k(x) = 1 - \cos^2(\sqrt{x})$, $a = 0$

## Exercice 14

Étudier la continuité des deux fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 0 \\ \cos(x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \quad ; \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 3 - x^2 & \text{si } x < -2 \\ x+1 & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \end{array}$$

## Exercice 15

On considère la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Montrer que $f$ peut se prolonger par continuité en une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

## Exercice 16

On considère la fonction $f$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{1+\ln(x)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Montrer que $f$ se prolonge par continuité en une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

## Exercice 17

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$ et $u_0 = 3$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

## Exercice 18

Soit $f : [0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\,e^{1-x}$.
Montrer qu'il existe au moins deux réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \dfrac{1}{2}$.

**Exercice 19**

Soit $f$ une fonction continue sur $[0,1]$. Montrer qu'il existe un réel $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = f(1-c)$.

**Exercice 20**

Montrer qu'il existe un unique réel $x_0 \in ]0,1[$ tel que $\sin\left(\dfrac{\pi x_0}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

**Exercice 21**

Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2-6\,\mathrm{e}^x}{1+2\,\mathrm{e}^x}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle que l'on déterminera.

**Exercice 22**

Déterminer la valeur de $\arctan(-\sqrt{3})$ et $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$