CHAPITRE 2
LOGIQUE MATHÉMATIQUE

I. Propositions et connecteurs logiques

1. propositions

Définition

Une **proposition** est une affirmation qui ne comporte pas d'ambiguité et qui peut être soit **vraie** soit **fausse**. Une proposition peut dépendre d'un ou plusieurs paramètres.

Exemple 1 : Les énoncés suivants sont des propositions mathématiques :

- $2+2=4$ (0 paramètre, toujours vraie)
- $2+2=5$ (0 paramètres, toujours fausse)
- $x \in \mathbb{R}, x \geq 3$ (1 paramètre x, peut être vraie ou fausse selon la valeur de x)
- $y \in \mathbb{R}, y^2 = -1$ (1 paramètre y, toujours fausse)
- Le carré d'un entier pair est divisible par 4. (0 paramètre, toujours vraie)

Exemple 2 : Les énoncés suivants ne sont pas des propositions au sens mathématique :

- "Cette phrase est fausse" (paradoxe : problème de l'auto-référencement)
- "L'actuel roi de France est chauve" (Enoncé fictif indéfini puisqu'il n'y a pas de roi de France, pb avec le principe du tiers exclu)
- Si $F = \{E \mid E \notin E\}$, la proposition $F \in F$ est paradoxale (paradoxe de Russel : F est l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas eux-même, si $F \in F$ alors $F \notin F$ et si $F \notin F$ alors $F \in F$, équivalent en langage courant au paradoxe du barbier)

Un raisonnement mathématiques se construit à partir de résultats admis, en progressant par inférence déductive, c'est à dire par un mouvement de la pensée qui établit un lien entre des prémisses et une conclusion.
Exemple 3 : Si j'ai établi les prémisses suivant : "Tous les hommes sont mortels" et "Socrate est un homme", alors je peux en déduire par déduction que Socrate est mortel.
Cette déduction repose sur le syllogisme suivant : "Si tous les B ont la propriété C, et que A est un B, alors A a la propriété C". Ce mouvement de la pensée est valable quel que soit les noms mis à la place de A, B et C.
On construit donc des énoncés vrais à partir d'autres énoncés considérés comme **vrais**. Puisqu'il faut bien commencer cette chaîne déductive quelque part, il est nécessaire d'admettre comme vrai certaines propositions élémentaires appelées **axiomes**.

Remarque

Il existe de nombreux systèmes axiomatiques différents, débouchant parfois sur des résultats différents voir contradictoires. On peut citer les axiomes d'Euclide, les axiomes de Peano, la théorie des ensembles...
Ainsi, les géométries dites "non-euclidiennes" sont construites sans le 5e axiome d'Euclide qui dit que *"étant donné un point et une droite ne passant pas par ce point, il existe une seule droite passant par ce point et parallèle à la première."*
La théorie des ensembles, communément appelée théorie ZF (Zermelo - Fraenkel) est l'axiomatique la plus admise dans les mathématiques modernes. En pratique, dans le chapitre 3, le vocabulaire ensembliste sera expliqué de manière intuitive et sans recourir à tous les axiomes.

2. Connecteurs

On peut relier entre elles différentes propositions pour former de nouvelles propositions à l'aide de **connecteurs logiques**. Les trois connecteurs logiques élémentaires sont ET ($\wedge$), OU ($\vee$) et NON ($\neg$)

Définition

Soient A et B deux propositions

- la proposition $A \wedge B$ (A et B) est vraie si A et B sont vrais simultanément, et fausse sinon.
- $A \vee B$ (A ou B) est vraie si A est vraie, B est vraie, ou si les deux sont vraies, et fausse sinon.
- $\neg A$ (Non A) est vraie si A est fausse, et fausse si A est vraie.

Remarque

Le OU mathématique est *inclusif*.
Dans le langage courant, le OU est souvent *exclusif* (« fromage ou dessert »)
Blague du logicien qui attend un enfant : « –C'est un garçon ou une fille ? – Oui ».

→ **Exercice de cours n°1.**

→ **Exercice de cours n°2.**

3. Tables de vérité

Définition

Une table de vérité est un tableau permettant de décrire le statut de vérité d'une proposition mathématique composée de plusieurs propositions combinées à l'aide de connecteurs.
Les premières colonnes sont remplies de sorte à faire figurer toutes les configurations possibles pour les propositions à combiner.

a. Une première table de vérité

Propriété

Table de vérité de $\neg A$**,** $A \wedge B$ **et** $A \vee B$ **:**

		NON	ET	OU
A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F

Définition

Deux propositions sont dites **logiquement équivalentes** ou simplement **équivalente** si elles ont les mêmes valeurs de vérité pour tous les paramètres.
On note $A \leftrightarrow B$ si A et B sont logiquement équivalentes.

b. Double négation

Proposition

Soit A une proposition, alors la proposition $\neg(\neg A)$ est logiquement équivalente à A

Démonstration : *La table de vérité de* $\neg(\neg A)$ *se construit comme suit :*

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$
V	F	V
F	V	F

$\neg(\neg A)$ *a la même table de vérité que* A *donc ces deux propositions sont logiquement équivalentes.* □

c. Lois de De Morgan

Propriété

Table de vérité de $\neg(A \vee B)$:

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

Cette table de vérité est la même que celle de $(\neg A) \wedge (\neg B)$:

Propriété

Table de vérité de $(\neg A) \wedge (\neg B)$:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

On peut en déduire la proposition suivante :

Proposition (Loi de De Morgan)

Les propositions $\neg(A \vee B)$ et $(\neg A) \wedge (\neg B)$ sont logiquement équivalente.
On peut écrire cela $(\neg(A \vee B)) \Longleftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$

De même, on a la proposition suivante :

Proposition

La proposition $\neg(A \wedge B)$ est logiquement équivalente à $(\neg A) \vee (\neg B)$

Démonstration : Voir exercice 1 □

→ **Exercice de cours n° 3.**

→ **Exercice de cours n° 4.**

4. Implication, équivalence

a. Implication

Définition

Soient A et B deux propositions.
On dit que la proposition « A implique B » (notée $A \Rightarrow B$) est vraie si B est vraie dès que A est vraie.
Table de vérité de $A \Rightarrow B$ **:**

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

On appelle **réciproque** de $A \Rightarrow B$ la proposition $B \Rightarrow A$.
Une implication peut être vraie sans que sa réciproque le soit.

Exemple 4 : L'implication « (f est croissante sur $[a;b]$) $\Rightarrow$ $(f(b) \geq f(a))$ »est vraie.
La réciproque de cette implication « $(f(b) \geq f(a)) \Rightarrow$ (f est croissante sur $[a,b]$) »est fausse en général (par exemple $3^2 \geq (-1)^2$ mais la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas croissante sur $[-1;3]$)

Remarque

On peut constater que $A \Rightarrow B$ est vraie dès que A est fausse ou que B est vraie.
Table de vérité de $(\neg A) \vee B$ **:**

A	B	$\neg A$	$(\neg A) \vee B$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Proposition

$(\neg A) \vee B$ a la même table de vérité que $A \Rightarrow B$ donc ces deux propositions sont logiquement équivalentes.

Proposition

La négation de $A \Rightarrow B$ est $A \wedge (\neg B)$.

Démonstration : *D'après la proposition a, $A \Rightarrow B$ est logiquement équivalente à $(\neg A) \vee B$. Ainsi, $\neg(A \Rightarrow B) \longleftrightarrow \neg((\neg A) \vee B$.*
D'après la proposition **??**, *on sait que $\neg((\neg A) \vee B)$ est logiquement équivalente à $(\neg(\neg A)) \wedge (\neg B)$ donc à $A \wedge (\neg B)$* □

Attention, comme on l'a vu dans l'exemple a, la réciproque d'une implication n'est pas toujours vraie.

Exemple 5 : Admettons que la proposition suivantes soit une vérité mathématiques :
« Si j'ai mangé trop de bonbons, alors j'ai mal au ventre »
Sa réciproque serait :
« Si j'ai mal au ventre, alors j'ai mangé trop de bonbons »
Cette implication n'est pas nécessairement vraie puisque mon mal de ventre peut être causé par autre chose qu'un excès de bonbons.

b. Équivalence

Propriété

Soient A et B deux propositions. On note $A \Longleftrightarrow B$ si A a les mêmes valeurs de vérité que B et on lit « A si et seulement si B ».
la proposition $A \Leftrightarrow B$ est vraie si et seulement si $A \Rightarrow B$ est vraie et $B \Rightarrow A$ est vraie.
Autrement dit, $A \Leftrightarrow B$ est vraie si et seulement si $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ est vraie.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Exemple 6 : Un exemple connu d'équivalence est le théorème de Pythagore : la proposition « Si ABC est un triangle rectangle en B, alors $AB^2 + B^2 = AC^2$ » est vraie.
Sa réciproque, « Si $AB^2 + BC^2 = AC^2$ alors ABC est un triangle rectangle en B »est également vraie.
On appelle en général la première proposition « Théorème de Pythagore », et la seconde « Réciproque du théorème de Pythagore ».
Les propositions « ABC est rectangle en B » et $AB^2 + BC^2 = AC^2$ sont **équivalentes** :

$$ABC \text{ est rectangle en } B \text{ si et seulement si } AB^2 + BC^2 = AC^2$$

Remarque

Pour démontrer une équivalence $A \Leftrightarrow B$, il faut parfois procéder en deux temps et démontrer $A \Rightarrow B$ puis $B \Rightarrow A$. On appelle cela un raisonnement par double implication.

→ **Exercice de cours n° 5.**

Remarque

On a $(A \iff B) \iff (B \iff A)$, autrement dit l'équivalence « A si et seulement si B »est équivalente à l'équivalence « B si et seulement si A ».

c. Conditions nécessaires, conditions suffisantes

Définition

L'implication $A \Rightarrow B$ peut se lire :
- Si A alors B (A est une condition suffisante de B)
- B si A
- A seulement si B (B est une condition nécessaire de A)

L'équivalence $A \iff B$ peut se lire :
- A si et seulement si B (A est une condition nécessaire et suffisante de B).
- B si et seulement si A (B est une condition nécessaire et suffisante de A)

Exemple 7 : « *Manger trop de bonbons* » est une condition suffisante pour « *avoir mal au ventre* »
« *Avoir mal au ventre* » est une condition nécessaire pour « *manger trop de bonbons* ».
Être un triangle rectangle est une condition nécessaire et suffisante pour avoir le carré de l'hypoténuse égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

II. Quantificateur

1. Quantificateur universel, quantificateur existentiel

Définition

- le quantificateur universel ($\forall$) se lit « Pour tout » ou « Quel que soit » .

$$\forall x \in E, P(x) \text{ signifie que tout } x \text{ appartenant à l'ensemble } E \text{ a la propriété } P$$

- le quantificateur existentiel ($\exists$) se lit « il existe ».

$$\exists x \in E, P(x) \text{ signifie qu'il existe un } x \text{ appartenant à l'ensemble } E \text{ ayant la propriété } P$$

- On peut ajouter le symbole ! s'il y a unicité en plus de l'existence

$$\exists! x \in E P(x) \text{ signifie qu'il existe un unique } x \text{ appartenant à } E \text{ ayant la propriété } P$$

Remarque

La proposition « $\forall x \in E, P(x)$ »forme un tout lié : la variable x n'a pas de sens hors de cette proposition. On peut d'ailleurs la remplacer par une autre variable : $\forall y \in E, P(y)$ est exactement la même proposition que $\forall x \in E, P(x)$.

Exemples 8 :
- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ est vrai.
- $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ est faux.
- $\exists x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ est vrai.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \geq 0, x + y \geq x$ est vrai.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x$ est faux.

→ Exercice de cours n^{o} 6.

→ Exercice de cours n^{o} 7.

Exemple 9 :
On rappelle qu'on dit qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[A; +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Avec des quantificateurs on dit que (u_n) tend vers $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Rightarrow (u_n \geq A)$$

2. Négation

Proposition

- La négation de $\forall x \in E P(x)$ est $\exists x \in E, \neg P(x)$
  Le contraire de « *Tout élément x de E a la propriété P* » est « *Il existe un élément x de E qui n'a pas la propriété P* ».
- La négation de $\exists x \in E, P(x)$ est $\forall x \in E, \neg P(x)$.
  Le contraire de « *Il existe un élément x de E ayant la propriété P* » est « *Il n'existe pas d'élément x de E ayant la propriété P* » c'est à dire « *Quel que soit x dans E, x n'a pas la propriété P* ».

Exemple 10 : La négation de la proposition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$$

est la proposition

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y$$

Ainsi, dans l'exercice 6, la seconde proposition est la négation de la première.

→ Exercice de cours n° 8.

→ Exercice de cours n° 9.

III. Raisonnements

1. Par équivalence

Pour montrer que $A \Leftrightarrow B$, un raisonnement **par équivalence** consiste à démontrer une suite finie d'équivalence intermédiaire : $A \Leftrightarrow A_1 \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow A_n \Leftrightarrow B$

C'est en général ce type de raisonnement qu'on utilise pour résoudre une (in)équation simple. Il faut être vigilant et vérifier à chaque étape qu'on a bien une équivalence $\Leftrightarrow$ et pas une simple implication $\Rightarrow$.
De même, un raisonnement par implication consiste à montrer que $A \Rightarrow B$ en montrant une suite finie d'implications : $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \cdots \Rightarrow A_n \Rightarrow B$
Lorsque le raisonnement par équivalence n'est pas possible, on peut raisonner **par analyse synthèse**.

2. Par analyse-synthèse

La méthode de raisonnement par analyse-synthèse consiste à d'abord supposer un résultat vrai pour en déduire des conditions nécessaires, puis à déterminer parmi les conditions nécessaires lesquelles sont suffisantes.

→ Exercice de cours n° 10.

Remarque

Résoudre une équation (E), c'est trouver toutes les solutions possibles. On cherche donc un ensemble de solution S tel que x est solution de (E) si et seulement si $x \in S$.
Pour résoudre une équation il est donc obligatoire de prouver une équivalence logique. Lorsque des étapes du calcul sont de simples implications, on doit faire une synthèse (c'est à dire étudier les implications réciproques et retenir seulement celles qui sont vraies).

→ Exercice de cours n° 11.

3. Par contraposée

Définition

La contraposée d'une implication $A \Rightarrow B$ est l'implication $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$.

Propriété

Une implication est vraie si et seulement si sa contraposée est vraie.

Exemple 11 : Si je n'ai pas mal au ventre, je peux en déduire que je n'ai pas mangé trop de bonbons (voir l'exemple a).
Démonstration : *On sait que* $(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow ((\neg A) \vee B)$.
Or $((\neg A) \vee B) \Longleftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg(\neg B)) \Longleftrightarrow (\neg(\neg B) \vee (\neg A)) \Longleftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$ □

Définition

Un raisonnement par contraposée est un raisonnement dans lequel on démontre que $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ pour montrer que $A \Rightarrow B$.

→ **Exercice de cours n° 12.**

→ **Exercice de cours n° 13.**

4. Par l'absurde

Proposition

Si une proposition A implique quelque chose de faux, par exemple une contradiction évidente, alors A est faux.
Autrement dit, pour toute proposition A, la proposition $(A \Rightarrow F) \Rightarrow \neg A$ est vraie.

Démonstration :

A	$A \Rightarrow F$	$\neg A$	$(A \Rightarrow F) \Rightarrow \neg A$
V	F	F	V
F	V	V	V

□

Définition

Pour montrer qu'une proposition A est vraie, on peut montrer que la supposition « A est faux »aboutit à une contradiction. On appelle cela un **raisonnement par l'absurde**.

Remarque

Le raisonnement par l'absurde est donc le raisonnement $((\neg A) \Rightarrow F) \Rightarrow A$.

→ **Exercice de cours n° 14.**

→ **Exercice de cours n° 15.**

5. Par disjonction de cas

Le raisonnement par disjonction de cas consiste à étudier séparément plusieurs cas recouvrant l'ensemble des cas possibles.

→ **Exercice de cours n° 16.**

→ **Exercice de cours n° 17.**

6. Par récurrence

Voir chapitre 3

IV. Compléments

Quelques opérations sur les connecteurs

Proposition (Associativité)

Soient A, B et C trois propositions.
Alors

$$(A \wedge B) \wedge C \Longleftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C \Longleftrightarrow A \vee (B \vee C)$$

Démonstration :

A	B	C	$A\wedge B$	$(A\wedge B)\wedge C$	$B\wedge C$	$A\wedge(B\wedge C)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

Quels que soient les valeurs de vérité de A,B,C, les propositions $(A\wedge B)\wedge C$ et $A\wedge(B\wedge C)$ ont même valeurs de vérité, donc elles sont équivalentes.

A	B	C	$A\vee B$	$(A\vee B)\vee C$	$B\vee C$	$A\vee(B\vee C)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

Quels que soient les valeurs de vérité de A,B,C, les propositions $(A\vee B)\vee C$ et $A\vee(B\vee C)$ ont même valeurs de vérité, donc elles sont équivalentes. □

Proposition (Distributivité)

Soient A, B et C trois propositions. Alors

$$A\wedge(B\vee C)\Longleftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$$

$$A\vee(B\wedge C)\Longleftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$$

Démonstration : exercice □

Proposition (Distributivité des quantificateurs)

Soient P une proposition qui dépend d'un paramètre x, et Q une proposition. Alors

$$(\forall x, P(x))\vee Q\Longleftrightarrow\forall x,(P(x)\vee Q)$$

$$(\exists x, P(x))\vee Q\Longleftrightarrow\exists x,(P(x)\vee Q)$$

$$(\forall x, P(x))\wedge Q\Longleftrightarrow\forall x,(P(x)\wedge Q)$$

$$(\exists x, P(x))\wedge Q\Longleftrightarrow\exists x,(P(x)\wedge Q)$$

Démonstration : Montrons la première équivalence. Sens direct $\Rightarrow$: Supposons que $(\forall x, P(x))\vee Q$. Si Q est vraie, alors $\forall x,(P(x)\vee Q)$ est vraie. Si Q n'est pas vraie, alors $\forall x, P(x)$ est vraie, donc $\forall x,(P(x)\vee Q)$ est vraie. Dans tous les cas on a bien $\forall x,(P(x)\vee Q)$. Sens réciproque : $\Leftarrow$: Supposons que $\forall x,(P(x)\vee Q)$. Soit Q est vraie, soit elle est fausse. Si elle est vraie, alors $(\forall x, P(x))\vee Q$ est vraie. Si elle est fausse, alors $\forall x, P(x)$ est vraie, donc $(\forall x, P(x))\vee Q$ est vraie aussi. Dans tous les cas on a bien $(\forall x, P(x))\vee Q$. Les autres équivalences sont laissées en exercices pour le lecteur. □

Exercices de cours

Exercice 1 Voir correction

Déterminer dans chaque cas l'ensemble des nombres x vérifiant les propositions suivantes :

1. $(x > 0) \wedge (x \leq 10)$
2. $x \in \mathbb{N}$, $(x$ divise $12) \vee (x$ divise $15)$
3. $(x > 4) \wedge (x < 2)$
4. $(x > 4) \vee (x < 2)$

Exercice 2 Voir correction

Écrire les énoncés suivants à l'aide de connecteurs logiques

1. $x \in [3;7]$
2. $x \in]-\infty;2[\cup[5;+\infty[$

Exercice 3 Voir correction

Montrer que la proposition $\neg(A \wedge B)$ est logiquement équivalente à $(\neg A) \vee (\neg B)$

Exercice 4 Voir correction

Écrire la négation des propositions suivantes :

1. $x \leq 1$ et $x^2 > 4$
2. $y \in A$ et $y \in B$
3. $x > 3$ ou $x < -4$

Exercice 5 Voir correction

Soient x et y deux réels. Montrer que $|x| + |y| = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0$.

Exercice 6 Voir correction

Traduire par des phrases les propositions suivantes et dire si elles sont vraies ou fausse :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$
2. $\exists m \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{R}, m \geqslant q$
3. $\exists x \in]-\infty, 0[, \exists y \in]0;+\infty[x^2 = y^2$

Exercice 7 Voir correction

Traduire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. Le carré d'un nombre réel est positif.
2. Tout nombre positif est le carré d'un nombre réel.
3. La somme de deux entiers positifs est un entier positif.
4. La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

Exercice 8 Voir correction

Montrer que la proposition suivante est fausse : $\exists x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$.

Exercice 9 Voir correction

Exprimer à l'aide de quantificateur la proposition « (u_n) ne tend pas vers $+\infty$ ».

Exercice 10 **Voir correction**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x suivante : $x-4=\sqrt{2x-5}$

Exercice 11 **Voir correction**

Soit f la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3+2x}{x-2}$
Montrer que pour tout $y\in]2,+\infty[$, il existe $x\in]2,+\infty[$ tel que $f(x)=y$.

Exercice 12 **Voir correction**

Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.

Exercice 13 **Voir correction**

Démontrer par contraposée les propositions suivantes :

1. $m\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}$. Si mn est impair alors m est impair ou n est impair.
2. Si $x\neq 0$ et $y\neq 0$, alors $xy\neq 0$
3. $a\in\mathbb{R}$, $(\forall\epsilon>0, |a|<\epsilon)\Rightarrow a=0$

Exercice 14 **Voir correction**

Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 15 **Voir correction**

Montrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 16 **Voir correction**

Résoudre $|x+8|+|x-6|\geq 4$

Exercice 17 **Voir correction**

Démontrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, le nombre $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3.

Correction des exercices

Correction de l'exercice 1 :

1. $x \in]0;10]$
2. $x \in \{1,2,3,4,5,6,12,15\}$
3. $\varnothing$
4. $x \in]-\infty;2[\cup]4;+\infty[$

Correction de l'exercice 2 :

1. $(x \geq 3) \wedge (x \leq 7)$
2. $(x < 2) \vee (x \geq 5)$

Correction de l'exercice 3 :

Correction de l'exercice 4 :

1. $x > 1$ et $x^2 \leq 4$
2. $y \notin A$ ou $y \notin B$
3. $x \leq 3$ et $y \geq -4$.

Correction de l'exercice 5 : On raisonne par double implication.

Montrons le sens indirect $\Longleftarrow$

Si $x = y = 0$, alors $|x| = |0| = 0$ et $|y| = |0| = 0$ donc $|x| + |y| = 0$, l'implication $x = y = 0 \Rightarrow |x| + |y| = 0$ est donc vraie.

Montrons le sens direct $\Longrightarrow$

Si $|x| + |y| = 0$, alors $|x| = -|y|$. Or $|x| \geq 0$ et $-|y| \leq 0$, donc on a $|x| = 0$ et $|y| = 0$. Ainsi, $x = 0$ et $y = 0$. L'implication $|x| + |y| = 0 \Rightarrow x = y = 0$ est donc vrai.

Par double implication, on en conclut que $|x| + y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0$.

Correction de l'exercice 6 :

1. Pour tout réel x, il existe un réel strictement supérieur à x.
   Cette proposition est vraie puisque pour tout réel x le réel $x+1$ est strictement plus grand que x.
2. Il existe un réel m plus grand que tous les autres réels.
   Cette proposition est fausse, puisque le réel $m+1$ est strictement plus grand que m.
3. Il existe un réel strictement positif et un réel strictement négatif dont les carrés sont égaux.
   Cette proposition est vraie, par exemple $(-2)^2 = 2^2$.

Correction de l'exercice 7 :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$
2. $\forall x \in [0;+\infty[, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m + n \in \mathbb{N}$
4. $\forall x \in]-\infty;0[, \forall y \in]-\infty;0[, (x < y) \Rightarrow x^2 > y^2$

Correction de l'exercice 8 : Pour montrer que cette proposition est fausse, on va montrer que sa négation est vraie. La négation de cette proposition est

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 \leq x$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on sait qu'il existe un nombre dont le carré est égal à x, noté $\sqrt{x}$. Posons donc $y = \sqrt{x}$, ainsi $y^2 = x$ donc $y^2 \leq x$. Comme cette proposition est vraie, la proposition de départ est donc fausse.

Correction de l'exercice 9 : On a déjà vu que « (u_n) tend vers $+\infty$ s'écrit

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N) \Rightarrow u_n \geq A$$

la négation de cette proposition est

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \wedge (u_n < A)$$

En effet, on rappelle que la négation de $A \Rightarrow B$ est $A \wedge (\neg B)$.

Correction de l'exercice 10 : **Analyse :** Supposons que $x \in \mathbb{R}$ soit solution de l'équation $x - 4 = \sqrt{2x-5}$. Alors en élevant au carré on obtient $(x-4)^2 = 2x - 5$ d'où $x^2 - 8x + 16 = 2x - 5$. On résout cette équation de degré 2 :

$$x^2-8x+16=2x-5 \Longleftrightarrow x^2-10x+21=0$$

$$x=3 \quad \text{ou} \quad x=7$$

Synthèse : Si $x=3$, alors $x-4=-1$ et $\sqrt{2x-5}=\sqrt{1}=1$ donc 3 n'est pas solution.
Si $x=7$, alors $x-4=3$ et $\sqrt{2x-5}=\sqrt{9}=3$ donc 7 est solution.
Finalement, $S=\{7\}$.

Correction de l'exercice 11 :

- **Analyse :** soit $y\in]2,+\infty[$, on suppose qu'il existe un réel x tel que $f(x)=y$, alors

$$\begin{aligned}\frac{3+2x}{x-2}=y &\Longleftrightarrow 3+2x=yx-2y && \text{car } x-2\neq 0\\ &\Longleftrightarrow x(2-y)=-3-2y\\ &\Longleftrightarrow x=\frac{3+2y}{y-2}=f(y)\end{aligned}$$

- **Synthèse :** Soit $y\in]2,+\infty[$, en posant $x=f(y)=\dfrac{3+2y}{y-2}$ on a bien $f(x)=y$ d'après le calcul précédent.

  Vérifions que $x\in]2,+\infty[$: la fonction f est dérivable et $\forall x\in]2,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{2(x-2)-(3+2x)}{(x-2)^2}=\dfrac{-7}{(x-2)^2}<0$ donc f est strictement décroissante. De plus, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty$ et

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}\\ &=\frac{2+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\\ &\xrightarrow[x\to+\infty]{} 2\end{aligned}$$

  On en conclut que pour tout $y\in]2,+\infty[$, $f(y)\in]2,+\infty[$ donc $x\in]2,+\infty[$.

Correction de l'exercice 12 : On raisonne par contraposée, montrons que si n **est impair**, alors n^2 **est impair**.
Supposons que n est impair. Alors il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $n=2k+1$.
Ainsi, $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1$. En regroupant les termes, on obtient $n=2(2k^2+2k)+1=2k'+1$ avec $k'=2k^2+2k\in\mathbb{N}$ donc n^2 est impair.
Par contraposée, on en conclut que si n^2 est pair alors n est pair.

Correction de l'exercice 13 :

Correction de l'exercice 14 : Supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel, et qu'il existe $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{Z}$ tels que $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$. Une fraction admet toujours une forme irréductible, on peut donc supposer de plus que la fraction $\dfrac{p}{q}$ est irréductible, quitte à choisir différentes valeurs de p et q.
On a donc $\sqrt{2}q=p$, et en élevant cette égalité au carré on obtient $2q^2=p^2$ (1).
Ainsi, p^2 est pair. D'après l'exemple 12, cela implique que p est pair. Soit donc $k\in\mathbb{Z}$ tel que $p=2k$.
En remplaçant dans l'égalité (1), on obtient alors $2q^2=(2k)^2=4k^2$.
Ainsi, $q^2=2k^2$ donc q^2 est pair et donc q est aussi pair.
Finalement, p et q sont tous les deux pairs, donc la fraction $\dfrac{p}{q}$ n'est pas irréductible. Cela contredit l'hypothèse de départ et on aboutit à une absurdité.
Il n'existe donc pas d'entiers p et q tels que $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$, donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Correction de l'exercice 15 :

Correction de l'exercice 16 :

Correction de l'exercice 17 :

On raisonne par disjonction de cas en fonction du reste de la division de n par 3, qui vaut soit 0, soit 1, soit 2.

- **Cas où $x=3k$, $k\in\mathbb{N}$:** On a

$$3k(3k+1)(3k+2)=3\times(k(3k+1)(3k+2)$$

  donc c'est un multiple de 3

- **Cas où** $x = 3k+1$**,** $k \in_N$ **:** On a

$$(3k+1)(3k+2)(3k+3) = 3 \times ((3k+1)(3k+2)(k+1)$$

donc c'est un multiple de 3

- **Cas où** $x = 3k+2$**,** $k \in \mathbb{N}$ **:** On a

$$(3k+2)(3k+3)(3k+4) = 3(3k+2)(k+1)(3k+4)$$

donc c'est un multiple de 3

Dans tous les cas, n est bien un multiple de 3.