TD 3 : Projecteurs et symétries (Indications)

Indications pour l'exercice 1 :

1. Utiliser la caractérisation $p^2 = p$ et les propriétés des projecteurs.
2. Utiliser la caractérisation $s^2 = \mathrm{Id}_E$ et les propriétés des symétries.

Indications pour l'exercice 2 :

1. Raisonner par analyse synthèse pour montrer que toute fonction de E s'écrit comme somme d'une fonction de F et d'une fonction de G.
2. Utiliser la décomposition trouvée à la question précédente pour exprimer directement $p(f)$ en fonction de f.

Indications pour l'exercice 3 :

1. Raisonner par analyse synthèse pour montrer que tout vecteur de E s'écrit comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.
2. Utiliser la décomposition trouvée à la question précédente pour exprimer directement $s(x, y, z)$ en fonction de (x, y, z).

Indications pour l'exercice 4 :

1. Raisonner par double inclusion, revenir aux définitions.
2. Utiliser la caractérisation :

$$f(E_1)+\cdots+f(E_n) = f(E_1)\oplus\cdots\oplus f(E_n) \iff \forall(y_1, ..., y_n) \in f(E_1)\times\cdots\times f(E_n), y_1+\cdots+y_n = 0 \Rightarrow y_1 = \cdots = y_n = 0$$

3. Rappel : $x \in f^{-1}(A) \iff f(x) \in A$.
4. Trouver par exemple deux droites vectorielles F_1 et F_2 de $\mathbb{R}^2$ en somme directe et une application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que $f^{-1}(F_1) = \{0\}$ et $f^{-1}(F_2) = \{0\}$.

Indications pour l'exercice 5 :

1. Comme d'habitude une analyse-synthèse fera l'affaire
2. Reprendre la décomposition de la question précédente.

Indications pour l'exercice 6 :

1. Routine
2. Montrer que la somme est directe et utiliser la formule de Grassmann pour montrer l'égalité des dimensions. Pour déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(u)$ on peut par exemple montrer que u est surjective.

Indications pour l'exercice 7 : Rappel : F est stable par u si pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$.

Remarque : $u(x) \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) \iff s(u(x)) = u(x)$. **Indications pour l'exercice 8 :** Choisir une base de E dans laquelle la matrice représentative de s est diagonale. **Indications pour l'exercice 9 :**

1. Utiliser la caractérisation $r^2 = r$ en remarquant que $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q) \iff q \circ p = 0$
2. Raisonner par double implication en utilisant bien toutes les hypothèses. Comme r est un projecteur, montrer que $x \in \mathrm{Im}(r)$ revient à montrer que $r(x) = x$.

Indications pour l'exercice 10 :

1. Le théorème du rang suffit.
2. L'hypothèse « $g \circ f$ est de rang p » et le résultat de la question précédente suffisent pour obtenir l'égalité des dimensions dans la première égalité. La deuxième vient ensuite immédiatement grâce au théorème du rang.
3. Utiliser le fait que pour un projecteur q, $x \in \mathrm{Im}(q) \iff q(x) = x$.
4. Utiliser le résultat précédent et l'injectivité de g.

Indications pour l'exercice 11 :

1. Développer en utilisant $a^2 = b^2 = \mathrm{Id}_E$. Attention : $a \circ b \neq b \circ a$ a priori.
2. La question précédente donne un lien entre $(a + b) \circ (a - b)$, $(a - b) \circ (a + b)$ et $(a \circ b - b \circ a)$.
3. Attention : si $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $y \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) \iff \exists x_1, x_2 \in E$, $y = f(x_1)$ et $y = g(x_2)$.

Indications pour l'exercice 12 :

1. Pour déterminer $s(s(P(X))$, poser $Q(X) = s(P(X)) = P(1 - X)$ puis écrire $s(Q(X)) = Q(1 - X)$.
2. La courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$ si $f(a - x) = f(a + x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et que $g : x \mapsto f(x+a)$, alors la courbe représentative de g dans un repère $(O, \overrightarrow{\mathrm{i}}, \overrightarrow{\mathrm{j}})$ est le translaté de la courbe représentative de f par la translation de vecteur $-a\overrightarrow{\mathrm{i}}$.