
CB n°1

Mathématiques - 17 Décembre 2024 - 4 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Le résultat d'une question ou d'un problème peut être admis dans les questions suivantes à condition de le mentionner explicitement.

Aucun document n'est autorisé, l'usage de la calculatrice et de tout matériel électronique est interdit.

*
* *

Ce sujet comporte 4 exercices tous indépendants.

Exercice 1 - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x \ln(1 - e^{-x^2})$$

1. Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de la fonction f
2. Montrer que f est impaire.
3. Étude des variations de f sur \mathcal{D}_f
 - (a) Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'(x) = \frac{2e^{-x^2}x^2 + (1 - e^{-x^2})\ln(1 - e^{-x^2})}{1 - e^{-x^2}}$$

- (b) On définit la fonction g par

$$\forall u \in]0; 1[, \quad g(u) = -2(1 - u) \ln(1 - u) + u \ln u$$

Montrer que g est dérivable sur $]0; 1[$ et que $g'(u) = \ln(u(1 - u)^2) + 3$.

- (c) On pose le changement de variable $u = 1 - e^{-x^2}$. Justifier que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ on a $u \in]0, 1[$, puis exprimer $f'(x)$ en fonction de u .
 - (d) On donne l'encadrement $0,04 < e^{-3} < 0,05$. Montrer que l'équation $u(1 - u)^2 = e^{-3}$ admet exactement deux solutions α et β dans $]0, 1[$.
 - (e) En déduire le tableau de variations complet de g sur $]0, 1[$, en fonction de α et β .
 - (f) En déduire qu'il existe un réel $\gamma \in]0, 1[$ tel que $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]0, \gamma]$ et $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [\gamma, 1[$.
 - (g) En déduire les variations de f sur \mathcal{D}_f en fonction de γ . On ne demande pas les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Étude de la continuité de f
 - (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $1 - x^2 \leq e^{-x^2}$.
Indication : on pourra étudier la fonction $h : x \mapsto e^{-x^2} + x^2 - 1$
 - (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^{-x^2} \leq 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}$
 - (c) En déduire que f peut se prolonger par continuité en une fonction \hat{f} continue sur \mathbb{R} .

Exercice 2 - Étude d'une suite définie par récurrence

Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$g(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln x\right)$$

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n)$$

Partie I : étude de la fonction g

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2. Soit h la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x > 0, \quad h(x) = \ln(x) + 2x - 1$$

(a) Montrer que la fonction h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

(b) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $h(\alpha) = 0$. Justifier que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

(c) Montrer que $g(\alpha) = \exp\left(\frac{-(2\alpha - 1)^2}{\alpha}\right)$

(d) Montrer que : $\forall x > 0, \quad g'(x) = \frac{1}{x^2}h(x)g(x)$

(e) En déduire les variations de la fonction g sur \mathbb{R}_+^* , en fonction de α .

3. On rappelle que si u est une fonction vérifiant $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$, alors $(\exp(u(x)) - 1) \underset{x \rightarrow a}{\sim} u(x)$.
Démontrer que :

$$g(x) - x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x \ln(x)$$

Partie II : étude de la suite (u_n)

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n existe et $u_n > 0$.

5. (a) Étudier le signe de $(x - 1) \ln(x)$ pour $x > 0$.

(b) Montrer que : $\forall x > 0, \quad \frac{g(x)}{x} \geq 1$, avec égalité si et seulement si $x = 1$

(c) En déduire que pour tout réel $x > 0$, on a $g(x) \geq x$, et que l'équation $g(x) = x$ admet 1 comme unique solution.

6. Étudier les variations de la suite (u_n) .

7. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$.

(a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$.

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.

8. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 > 1$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

9. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $0 < u_0 < \frac{1}{2}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 3 - Un problème de polynômes

1. Soient p un entier naturel, P un polynôme à coefficients réels de degré p , et Q la fonction polynôme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = (x^2 + 1)P''(x) + 4P'(x) - 2P(x)$$

où P' et P'' désignent la dérivée et la dérivée seconde de P .

(a) Montrer que, si $p \neq 2$, le degré de Q est égal à p et que, si $p = 2$, le degré de Q est strictement inférieur à p .

(b) En déduire que Q n'est jamais de degré deux.

2. (a) Montrer que, si P est une fonction polynôme non nulle telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x^2 + 1)P''(x) + 4P'(x) - 2P(x) = 0 \quad (1)$$

alors P est de degré 2.

- (b) Montrer que l'ensemble des fonctions polynômes solutions de l'équation (1) est l'ensemble des fonctions de la forme $P(x) = ax^2 + 4ax + 9a$ avec $a \in \mathbb{R}$.

3. On cherche toutes les fonctions polynômes P solutions de l'équation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x^2 + 1)P''(x) + 4P'(x) - 2P(x) = x \quad (2)$$

- (a) Trouver une solution P_1 de degré un solution de l'équation (2).
- (b) Montrer qu'une fonction polynôme est solution de l'équation (2) si et seulement si $P - P_1$ est solution de l'équation (1).
- (c) En déduire les fonctions polynômes solutions de l'équation (2).

Exercice 4 - Tirages aléatoires

Une urne contient 2 boules rouges et 2 boules bleus indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule dans l'urne, et on procède de la façon suivante :

- Si la boule est rouge, on la remet dans l'urne avec **une boule rouge supplémentaire**.
- Si la boule est noire, on la remet dans l'urne avec **deux boules noires supplémentaires**.

On répète le tirage suivant les mêmes règles une infinité de fois.

On note R_n l'événement : la boule tirée au n -ième tirage est rouge.

1. Calculer $\mathbb{P}(R_1)$
2. Calculer $\mathbb{P}(R_2)$
3. On suppose que la deuxième boule tirée est rouge, quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge ?
4. Calculer $\mathbb{P}(R_3)$
5. On note B_n l'événement "la première boule noire apparaît au n -ième tirage". Exprimer B_n en fonction des événements $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = \frac{6}{(n+2)(n+3)}$
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathbb{P}(B_n) = \frac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)}$
8. Probabilité de tirer au moins une boule noire : par le calcul .
 - (a) Déterminer trois réels a , b et c tels que $\frac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n+3}$.
 - (b) En déduire que $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B_k)$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$ et préciser la valeur de la limite.
 - (c) On admet que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right)$.
Déduire des questions précédentes que l'événement « tirer au moins une boule noire » a pour probabilité 1.