

★

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 (t^3 + 4t) dt$

c) $\int_2^0 \frac{1}{3+2x} dx$

e) $\int_{-1}^0 5u e^{u^2+2} du$

b) $\int_{-3}^4 e^{5u} du$

d) $\int_0^2 \frac{e^{3t}}{6+e^{3t}} dt$

f) $\int_{-2}^3 \cos(\pi x) dx$

★

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{-2}^2 |x| \times (x^2 + 1) dx$

c) $\int_0^2 \frac{1}{(u+1)^3} du$

e) $\int_{-\pi}^{\pi} 2 \cos t (\sin t)^4 dt$

b) $\int_1^2 \frac{8x+4}{(x^2+x)^2} dx$

d) $\int_0^{\ln(3)} \frac{3e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx$

f) $\int_0^1 (6x^2 - 4x - 3) e^{-x^2} dx$

Pour la dernière intégrale, on pourra chercher une primitive de la fonction à intégrer sous la forme $F(x) = (ax+b)e^{-x^2}$.

★

Exercice 3

On considère les intégrales $I = \int_0^1 \frac{e^x+1}{e^x+2} dx$ et $J = \int_0^1 \frac{1}{e^x+2} dx$.

- 1) Calculer $I+J$ et $I-J$
- 2) En déduire les valeurs de I et J

★

Exercice 4

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{e^{2x}}{e^x+2}$.

- 1) Déterminer a et b tels que $f(x) = a e^x + \frac{b e^x}{e^x+2}$ pour tout réel x .
- 2) En déduire $\int_{-1}^0 f(x) dx$

★

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \int_0^n e^{-x^2} dx$. On ne cherchera pas à calculer u_n .

- 1) Montrer que (u_n) est croissante
- 2) Démontrer que pour tout réel $x \geq 0$, on a : $-x^2 \leq -2x+1$, puis $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$
- 3) En déduire que pour tout entier naturel n on a $u_n \leq \frac{e}{2}$
- 4) Démontrer que la suite u_n est convergente. On ne cherchera pas à calculer sa limite.

★

Exercice 6

Soit I_n définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

- 1) Sans chercher à calculer I_n , montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$
- 2) Calculer $I_n + I_{n+1}$
- 3) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

★

Exercice 7

Soient f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$, et la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \int_0^n f(x) dx$. On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n .

- 1) Étudier la fonction $x \mapsto \frac{x}{e^x - x}$ sur $[0; +\infty[$ et en déduire son signe.
- 2) Montrer que la suite (I_n) est croissante
- 3) On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, $e^x - x \geq \frac{e^x}{2}$.
 - a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $I_n \leq \int_0^n 2x e^{-x} dx$.
 - b) Soit H la fonction définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ telle que $H(x) = (-x - 1)e^{-x}$.
Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H
 - c) En déduire que pour tout entier naturel n , $I_n \leq 2$
- 4) Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

★ ★

Exercice 8

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$. Montrer que

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(x))^2 dx \right) \left(\int_a^b (g(x))^2 dx \right)$$

Indication : considérer le signe de $\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2 dx$ en fonction de λ .

★ ★

Exercice 9

Calculer la dérivée de $f : x \mapsto \int_{x^2}^{x^4} e^{-\sqrt{t}} dt$.

Indication : on pourra considérer une primitive F de $x \mapsto e^{-\sqrt{x}}$ sans chercher de formule explicite pour cette fonction.

★ ★

Exercice 10

(Inégalité de Young) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et strictement croissante telle que $f(0) = 0$.

- 1) Pour tout $x > 0$, montrer que $\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = xf(x)$
- 2) En déduire que $\forall a, b > 0$, $\int_0^a f(t) dt + \int_0^b f^{-1}(t) dt \geq ab$.

★ ★ ★

Exercice 11

(D'après Oraux ENS 2019) Pour tout $x \in [0, 1]$, on définit la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante. On définit la fonction $f_0 : x \in [0, 1] \mapsto 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, 1]$,

$$f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t - t^2) dt$$

- 1) Déterminer les fonctions f_1 et f_2
- 2) Soit $x \in [0, 1]$ fixé. Étudier le sens de variation de $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.
- 3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0, 1]$, $1 + x \leq f_n(x) \leq e^x$.
- 4) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on notera $f(x)$.
- 5) Montrer que $\forall (x, y) \in [0, 1]^2$, $|f(x) - f(y)| \leq e|x - y|$
- 6) En déduire que la fonction $x \mapsto f(x)$ est continue sur $[0, 1]$.

Intégration par partie

★

Exercice 12

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par partie :

a) $\int_0^1 (x+1)e^x dx$

c) $\int_1^e x^3 \ln x dx$

e) $\int_1^{e^2} \frac{\ln(t)}{t} dt$

b) $\int_0^\pi x \sin x$

d) $\int_0^{\ln 2} (x^2 + 3x)e^x$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^\theta \sin \theta d\theta$

★ ★

Exercice 13

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par partie :

a) $\int_1^e \ln x dx$

b) $\int_1^e (\ln x)^2$

c) $\int_0^1 \arctan(u) du$

★ ★

Exercice 14

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On pose $I_n = \int_a^b f(t) \sin(nt) dt$.

- 1) À l'aide d'une intégration par partie, montrer que $I_n = u_n + \frac{1}{n} J_n$ où u_n est une suite qui tend vers 0 et $J_n = \int_a^b f'(t) \cos(nt) dt$
- 2) Montrer que la suite (J_n) est bornée.
- 3) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

★

Exercice 15

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 u^n e^u du$.

- 1) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$
- 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .
- 3) Trouver un équivalent simple de I_n lorsque l'entier n tend vers l'infini.

★

Exercice 16

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $M = \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)|$, c'est à dire un réel tel que $\forall t \in [a, b], |f'(t)| \leq M$.

- 1) Montrer que $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{(b-a)^2}{4} M$
- 2) Déterminer dans quel(s) cas l'égalité précédente est une égalité.

Changement de variables

★

Exercice 17

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :

1) $\int_0^1 \frac{2t \ln(t^2 + 1)}{t^2 + 1} dt, \quad u = t^2 + 1$

3) $\int_{1/8}^{1/3} \frac{dt}{t\sqrt{t^2 + t}}, \quad u = \frac{1}{t}$

2) $\int_1^8 \frac{dt}{\sqrt[3]{t} + t}, \quad u = \sqrt[3]{t} = t^{1/3}$

4) $\int_0^1 \frac{dt}{e^t + e^{-t}}, \quad u = e^t$

★ ★

Exercice 18

Soit $T > 0$ un réel et soit f une fonction périodique de période T sur \mathbb{R} . Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_a^{a+T} f(x) \, dx = \int_b^{b+T} f(x) \, dx$$

★

Exercice 19

- 1) À l'aide du changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$, démontrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin(t) + \cos(t)} \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sin(t) + \cos(t)} \, dt$$

- 2) En déduire que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sin(t) + \cos(t)} \, dt = \frac{\pi}{4}$, puis en déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} + x}$

Indication : on pourra utiliser le changement de variable $x = \sin(t)$

★ ★ ★

Exercice 20

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \, dx$, appelée **intégrale de Wallis**.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où

- 1) Calculer W_0 et W_1 .
- 2) Montrer que (W_n) converge.
- 3) En posant $t = \frac{\pi}{2} - x$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) \, dt$
- 4) En déduire W_2 .
- 5) À l'aide d'une intégration par partie, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.
- 6) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.
- 7) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_n}{W_{n+1}} = 1$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
- 8) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$.

Sommes de Riemann

★

Exercice 21

- 1) À l'aide du changement de variable $\sin(t) = x$, montrer que $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2t)}{2} \, dt$

- 2) En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2}$

★

Exercice 22

- 1) Calculer $\int_0^1 \ln(1+x) \, dx$

- 2) En déduire, à l'aide d'une somme de Riemann, la limite de (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}}$