

★

Exercice 1

Donner l'ensemble Ω dans les épreuves aléatoires suivantes :

- 1) On lance deux dés à 6 faces et on note la somme des numéros obtenus.
- 2) On lance deux dé indiscernables à 6 faces et on note les deux numéros obtenus.
- 3) On lance un dé à 6 faces rouge et un dé à 6 faces bleu et on note le numéro obtenu sur chacun des deux dés.

★ ★

Exercice 2

- 1) Montrer qu'il n'existe que deux tribus possibles sur $\Omega = \{0, 1\}$
- 2) On considère la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\{0, 1\})$. Déterminer toutes les probabilités possibles sur l'espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) .

★

Exercice 3

On lance un dé à 6 faces 5 fois de suite. Calculer la probabilité d'obtenir des numéros dans l'ordre croissant.

★

Exercice 4

On lance une pièce une infinité de fois. On note

- P_n : "le n -ième lancer est pile"
- F_n : "le n -ième lancer est face"

- 1) Décrire par des unions et des intersection les événements suivants :
 - a) E : "Tous les lancers pairs entre 100 et 200 sont piles"
 - b) F : "On obtient un face avant le 10-ème lancer"
 - c) G : "À partir d'un certain lancer, on obtient que des faces"
- 2) Sachant que la pièce est équilibrée et que les lancers sont indépendants, calculer la probabilité des 3 événements ci-dessus.

★

Exercice 5

On lance un dé équilibré à 6 faces plusieurs fois de suite, et on note à chaque lancer le résultat obtenu. On note E_k l'événement « Le résultat du k -ième lancer est un 6 ».

- 1) En utilisant les symboles \bigcup et \bigcap , exprimer en fonction de la famille (E_k) les événements suivants :
 - a) Le 6 n'apparaît jamais au delà du 10-ème lancer
 - b) Le premier 6 apparaît après le 10-ème lancer
 - c) Le premier 6 apparaît avant le 10-ème lancer
- 2) Traduire par une phrase les événements suivant :
 - a) $A = \left(\bigcup_{k=1}^{10} E_k \right) \cap \left(\bigcup_{k=11}^{20} \overline{E_k} \right)$
 - b) $B = \left(\bigcap_{k=1}^{10} E_{2k} \right) \cap \left(\bigcap_{k=0}^9 \overline{E_{2k+1}} \right)$
- 3) Montrer que l'événement « Le 6 apparaît au bout d'un certain nombre de lancer » a pour probabilité 1

★

Exercice 6

On répartit au hasard 3 boules dans 5 boîtes numérotées de 1 à 5 (1 seule boule par boîte).

- 1) Quel est la probabilité que la première boîte soit vide ?
- 2) Quel est la probabilité que les deux dernières boîtes soient vides ?

★

Exercice 7

On considère l'univers $\Omega = \mathbb{N}$, la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et une probabilité $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$. Le but de cet exercices est de montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = 0$

- 1) On considère la suite d'événements $A_n = \llbracket n, +\infty \rrbracket$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$

- 2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{n\}) \leq \mathbb{P}(A_n)$

- 3) Conclure.

★

Exercice 8

Soit $n \geq 3$ un entier. Une urne contient n pièces équilibrées. Il se trouve que $n - 1$ d'entre elles sont normales et la dernière est truquée : elle possède deux côtés « face ».

On prend une pièce au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendantes n lancers de cette pièce.

- 1) Quelle est la probabilité qu'on obtienne « face » pendant les n premiers lancers ?
 2) Sachant que l'on a obtenu « face » pour les n premiers lancers, quelle est la probabilité d'avoir pris la pièce truquée ?
 Interpréter la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$.

★ ★ ★

Exercice 9

Soient $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, et soit $n \in \llbracket 0, \min(a, b) \rrbracket$.

On considère une urne contenant a boules blanches numérotées de 1 à a , et b boules noires numérotées de $a + 1$ à $a + b$.

On y effectue n tirages sans remise, et on appelle « résultat » l'ensemble des numéros obtenus.

- 1) Combien y a-t-il de résultats possibles ?
 2) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Combien y a-t-il de résultats contenant exactement k boules blanches ?
 3) En déduire la formule de Vandermonde : $\sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$

★ ★

Exercice 10

Soit $n \geq 1$. On lance n fois un dé parfaitement équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir :

- 1) Au moins une fois le chiffre 6
 2) Au moins deux fois le chiffre 6
 3) Au moins k fois le chiffre 6 (avec $1 \leq k \leq n$).

★ ★

Exercice 11

On lance 3 fois un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on note a , b et c les résultats successifs obtenus. On note $Q(x) = ax^2 + bx + c$.

Déterminer la probabilité pour que

- 1) Q ait deux racines réelles distinctes,
 2) Q ait une racine réelle double,
 3) Q n'ait pas de racines réelles.

★

Exercice 12

On considère deux pièces de monnaies : l'une est équilibrée et tombe sur pile avec probabilité $p = 1/2$ et l'autre est truquée et tombe sur pile avec probabilité $p = 2/3$.

On choisit une pièce au hasard parmi ces deux pièces, et on obtient pile. Quelle est la probabilité que la pièce lancée soit la pièce truquée ?

★

Exercice 13

Une boîte contient 5 dés à 4 faces (numérotées 1 à 4), 3 dés à 6 faces (numérotées 1 à 6), et 10 dés à 12 faces (numérotées 1 à 12).

On pioche un dé au hasard dans la boîte et on le lance.

- 1) Calculer la probabilité d'obtenir un 4.
- 2) Le résultat du lancer de dé est 4. Quelle est la probabilité que le dé tiré soit un dé à 12 faces ?

★

Exercice 14

Un joueur de football s'entraîne au tir au but. Il a peu de confiance en lui, ainsi il a plus de chance de réussir un tir s'il a réussi aussi le tir précédent.

On admet que

- La probabilité qu'il réussisse le premier tir est 0,1.
- S'il réussit un tir, la probabilité qu'il réussisse le suivant est 0,8
- S'il rate un tir, la probabilité qu'il réussisse le suivant est 0,6.

Pour tout entier naturel n non nul, on note T_n l'événement « le joueur réussit le n -ième tir » et $p_n = \mathbb{P}(T_n)$. Ainsi, $p_1 = 0,1$.

- 1) Calculer p_2 .
- 2) Sachant que le joueur a réussi le deuxième tir, calculer la probabilité qu'il ait raté le premier.
- 3) Calculer la probabilité que le joueur réussisse au moins l'un des trois premiers tirs.
- 4) Déterminer une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1} , et en déduire une expression du terme général de (p_n) .
- 5) Déterminer la limite de la suite p_n quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.

★

Exercice 15

Une maladie circule dans la population avec un taux d'incidence de 300 personnes sur 100 000 habitants.

Un test pour détecter cette maladie donne les résultats suivants :

- Si la personne est malade le test est positif dans 97% des cas
 - Si la personne n'est pas malade, le test est négatif dans 99% des cas.
- 1) On teste une personne au hasard dans la population. Calculer la probabilité que le test soit positif.
 - 2) On teste une personne au hasard et le résultat du test est positif. Calculer une valeur approchée de la probabilité que la personne soit réellement malade.
 - 3) On teste une personne au hasard et le résultat du test est négatif. Calculer une valeur approchée de la probabilité que la personne soit saine.

★ ★ ★

Exercice 16

Un tournoi de tennis se déroule selon les modalités suivantes :

- Au temps 1, les joueurs J_0 et J_1 s'affrontent.
- à chaque temps $n > 1$, un nouveau joueur J_n affronte le vainqueur du match au temps $n - 1$

Soit G_n l'événement : « au temps n , le joueur J_n gagne. Supposons que les événements $(G_n)_{n \geq 1}$ sont tous indépendants entre eux et que $\mathbb{P}(G_n) = p \in]0; 1[$ pour tout $n \geq 1$.

Un joueur est déclaré vainqueur du tournoi dès qu'il parvient à remporter 5 matchs consécutifs. Pour chaque $n \geq 1$, considérons l'événement E_n : « aucun joueur n'a emporté le tournoi à l'issue du match au temps n .

- 1) Calculer $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- 2) Justifier que la suite $(\mathbb{P}(E_n))_{n \geq 1}$ converge.
- 3) Montrer que $\mathbb{P}(E_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

★ ★

Exercice 17

Un voleur en fuite cherche à échapper à la police. Il a 3 cachettes, appelées A , B et C , et il décide de lancer un dé chaque jour pour décider de sa cachette suivante :

- S'il est dans la cachette A et qu'il obtient un nombre pair, il va dans la cachette B . S'il obtient un 5 il va dans la cachette C , sinon il reste dans la cachette A
- S'il est dans la cachette B et qu'il obtient un nombre inférieur ou égal à 4, il va dans la cachette A , sinon il va dans la cachette C .
- S'il est dans la cachette C et qu'il obtient un 5 ou un 6, il va dans la cachette A . S'il obtient un 2, un 3 ou un 4 il

va dans la cachette B , sinon il reste dans la cachette C

On note

- A_n : "Le voleur se trouve dans la cachette A au bout de n jours.
- B_n : "Le voleur se trouve dans la cachette B au bout de n jours.
- C_n : "Le voleur se trouve dans la cachette C au bout de n jours.

On définit les suites (a_n) , (b_n) et (c_n) par $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$, $c_n = \mathbb{P}(C_n)$. Le voleur commence sa cavale dans la cachette A , ainsi $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$.

- 1) Déterminer une relation de récurrence entre les termes a_{n+1} , b_{n+1} , c_{n+1} et a_n , b_n , c_n .
- 2) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $a_n = 2c_n$.
- 3) En déduire une relation de récurrence entre c_{n+2} , c_{n+1} et c_n valable pour tout $n \geq 1$.
- 4) En déduire le terme général de la suite c_n , pour $n \geq 1$ puis les limites respectives de (a_n) , (b_n) et (c_n) et interpréter ce résultat

★ ★ ★
Exercice 18

(D'après Oraux ESCP) On effectue une suite de tirage au hasard dans une urne qui contient initialement une boule blanche et une boule noire de la manière suivante :

- à chaque tirage d'une boule blanche, on replace cette boule dans l'urne, puis l'on rajoute des boules blanches jusqu'à avoir multiplié par deux le nombre de boules blanches dans l'urne
- si l'on tire la boule noire, on arrête les tirages.

Ainsi, le nombre de boules blanches dans l'urne est multiplié par deux à chaque étape (sauf la dernière). On admet que l'expérience aléatoire est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « les n premiers lancers ne donnent que des boules blanches », et l'on pose $u_n = \mathbb{P}(B_n)$.

- 1) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
- 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{P}(B_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}$
- 3) On note B l'événement « les tirages ne s'arrêtent jamais ».
 - a) Exprimer B en fonction des B_n
 - b) Justifier que $\mathbb{P}(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
 - c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $-\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+2^{-k})$
 - d) Montrer que $\forall x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$.
 - e) En déduire que la suite $(-\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, puis que $\mathbb{P}(B) \neq 0$