

★

## Exercice 1

On lance deux dés équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6. On note  $X$  la somme des faces obtenues et  $Y$  le produit des faces obtenus.

- 1) Quels sont les valeurs prises par  $X$  ? Par  $Y$  ?
- 2) Déterminer la loi de probabilité de  $X$  et de  $Y$
- 3) Calculer l'espérance de  $X$  et l'espérance de  $Y$

★

## Exercice 2

Un joueur paie 10€ pour jouer à un jeu qui consiste à tirer une carte au hasard dans un paquet de cartes.

- S'il pioche un As, il gagne  $a$ €, où  $a$  est un réel supérieur ou égal à 15.
- S'il pioche une figure (Roi, Dame, Valet), il gagne 15€
- S'il pioche un 8, un 9 ou un 10, il gagne 5€
- Dans tous les autres cas, il ne gagne rien.

On note  $X$  le gain algébrique du joueur.

- 1) Déterminer la loi de  $X$  en fonction de  $a$ .
- 2) Déterminer la fonction de répartition de  $X$  et la tracer
- 3) Calculer l'espérance de  $X$  en fonction de  $a$
- 4) Quelle valeur faut-il donner à  $a$  pour que le jeu soit équitable, c'est à dire qu'il ait une espérance nulle ?

★

## Exercice 3

On lance une pièce équilibrée à pile ou face trois fois de suite, et on note  $X$  le nombre de Piles obtenus.

- 1) Déterminer les valeurs prises par  $X$
- 2) Déterminer la loi de  $X$  sous forme de tableau
- 3) Déterminer la fonction de répartition de  $X$  et tracer sa courbe représentative dans un repère.

★

## Exercice 4

Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On pioche successivement et avec remise  $k$  boules dans l'urne, et on note  $X$  la valeur maximale inscrite sur les boules tirées.

- 1) Donner  $X(\Omega)$ .
- 2) Calculer  $\mathbb{P}(X \leq 1)$
- 3) Calculer  $\mathbb{P}(X \leq i)$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$
- 4) En déduire la loi de  $X$ .

★

## Exercice 5

Soit  $a$  un réel. Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on pose  $p_i = \frac{3a}{2^{i+2}}$ .

- 1) Déterminer la valeur de  $a$  telle qu'il existe une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  vérifiant :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = i) = p_i$$

- 2) Montrer que  $X$  admet une espérance et calculer  $\mathbb{E}[X]$ .
- 3) Montrer que  $X$  admet une variance et calculer  $V(X)$ .

★

## Exercice 6

On appelle **médiane** d'une variable aléatoire  $X$  n'importe quel réel  $x_{1/2}$  tel que

$$\mathbb{P}(X \leq x_{1/2}) \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X \geq x_{1/2}) \geq \frac{1}{2}$$

Si  $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$  avec  $I$  égal à  $\mathbb{N}$  ou une partie de  $\mathbb{N}$  et que les  $x_i$  sont rangés dans l'ordre croissante, montrer que  $x_{1/2}$  est la plus petite valeur de  $x_i$  telle que  $\mathbb{P}(X \leq x_{1/2}) \geq \frac{1}{2}$ .

★ ★

## Exercice 7

On considère une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2 \times 3^{|k|}}$$

- 1) Vérifier que  $X$  est une variable aléatoire bien définie.
- 2) Montrer que  $X$  admet un moment d'ordre 1 et un moment d'ordre 2, et calculer  $\mathbb{E}(X)$  et  $V(X)$ .
- 3) Montrer que pour tout  $a > 0$ ,  $\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{3}{2a^2}$

★

## Exercice 8

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre  $p$ . Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X > k) = (1 - p)^k$$

★

## Exercice 9

Soit  $q \in ]0, 1[$  et soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$F(x) = \begin{cases} 1 - q^{\lfloor x \rfloor} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

où  $\lfloor x \rfloor$  est la partie entière inférieure de  $x$ , c'est à dire l'unique entier relatif  $n$  tel que  $n \leq x < n + 1$ .

- 1) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$  et que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
- 2) Montrer que  $F$  est croissante
- 3) Montrer qu'il existe une variable aléatoire  $X$  telle que  $F$  est la fonction de répartition de  $X$ .

★

## Exercice 10

Soit  $\lambda > 0$  un réel et soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

- 1) On pose  $Y = X^2$ . Déterminer pour quelles valeurs de  $\lambda$  la variable aléatoire  $Y$  admet une espérance et calculer  $\mathbb{E}[Y]$  le cas échéant.
- 2) On pose  $Z = X!$ . Déterminer pour quelles valeurs de  $\lambda$  la variable aléatoire  $Z$  admet une espérance et calculer  $\mathbb{E}[Z]$  le cas échéant.

★

## Exercice 11

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre  $p$  avec  $p \in ]0, 1[$ . On pose  $Y = e^X$ .

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur l'entier  $r$  pour que  $Y$  admette un moment d'ordre  $r$  et calculer  $E[Y^r]$  lorsque c'est possible.

★ ★

## Exercice 12

(D'après oraux ENS 2019) Un gardien de nuit dispose de 10 clés indiscernables dans l'obscurité, et dont une seule permet d'ouvrir une certaine porte. Selon son état, il a deux méthodes possibles pour ouvrir la porte :

- A.** À jeun, il effectue des essais successifs en retirant les clés déjà essayées.
- B.** Ivre, à chaque nouvel essai, il utilise une clé prise au hasard parmi les 10 clés.

On note  $X_A$  le nombre de clés essayées (y compris la bonne) avant d'ouvrir la porte dans le cas **A** et  $X_B$  le nombre de clés essayées (y compris la bonne) avant d'ouvrir la porte dans le cas **B**.

- 1) Déterminer la loi de la variable aléatoire  $X_A$  et son espérance
- 2) Déterminer la loi de la variable aléatoire  $X_B$  et son espérance
- 3) On sait que le gardien est ivre un jour sur quatre. Un jour, après avoir essayé 8 clés, il n'a toujours pas réussi à ouvrir la porte. Calculer la probabilité pour qu'il soit ivre.

★ ★ ★  
Exercice 13

Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages avec remise et on note  $Y_k$  la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts qui ont été tirés lors des  $k$  premiers tirages. On pose  $Y_0 = 0$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , soit  $Z_k$  la variable aléatoire égale à 1 si le  $k$ -ième tirage amène un numéro qui n'a pas encore été tiré, et égale à 0 sinon. On remarque que  $Z_1 = 1$ .

1) Déterminer la loi de  $Z_2$ .

2) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Calculer, pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la valeur de  $\mathbb{P}_{\{Y_k=j\}}(Z_{k+1} = 1)$ . En déduire :  $\mathbb{P}(Z_{k+1} = 1) = 1 - \frac{1}{n}\mathbb{E}[Y_k]$

3) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . En remarquant que  $Y_k = \sum_{j=1}^k Z_j$ , montrer :

$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = 1) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(Z_j = 1)$$

4) En déduire que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{P}(Z_k = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$ .

5) Déterminer alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , l'espérance de  $Y_k$ .

★  
Exercice 14

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que  $\mathbb{E}[X]$  existe et  $\mathbb{P}(X > 0) > 0$ .

Soit  $Y$  la variable aléatoire définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y = k) = \frac{k\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{E}[X]}$$

1) Montrer que la variable aléatoire  $Y$  est bien définie.

2) On suppose dans cette question que  $X$  suit une loi de Poisson. Montrer que  $X + 1$  et  $Y$  ont la même loi.

3) Réciproquement, on suppose dans cette question que  $Y$  et  $X + 1$  ont la même loi. Montrer que  $X$  suit une loi de Poisson.

★ ★ ★  
Exercice 15

**(D'après oraux ESCP 2016)** On dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$  et de  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  (avec  $n \geq 2$ ). Soit  $m$  un entier fixé tel que  $0 \leq m \leq n$ . On place au hasard  $m$  boules dans l'urne  $U_1$  et les  $n - m$  autres dans l'urne  $U_2$ . On choisit au hasard un entier  $j$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et on déplace la boule numéro  $j$  de l'urne dans laquelle elle se trouve pour la mettre dans l'autre urne.

On répète indéfiniment cette expérience. Pour tout  $k \geq 1$ , on note  $X_k$  la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans l'urne  $U_1$  à l'issue des  $k$  premières expériences.

1) Donner la loi de  $X_1$  et calculer  $\mathbb{E}(X_1)$

2) Déterminer pour tout  $k$  et pour tout  $i$  une relation entre  $\mathbb{P}(X_{k+1} = i)$ ,  $\mathbb{P}(X_k = i - 1)$  et  $\mathbb{P}(X_k = i + 1)$ .

3) Soit  $G_k$  le polynôme défini par  $G_k(t) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(X_k = i)t^i$ .

a) Donner une expression de  $\mathbb{E}(X_k)$  à l'aide de la fonction  $G_k$

b) Déterminer une relation entre  $G_{k+1}(t)$ ,  $G_k(t)$  et  $G'_k(t)$ .

c) En déduire l'expression de  $\mathbb{E}(X_k)$  en fonction de  $n$ . Déterminer  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_k)$

★ ★ ★  
Exercice 16

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans  $\mathbb{N}$  qui admet une espérance.

1) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\mathbb{P}(X > n) = 0$

2) Montrer que  $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$ .

★ ★ ★  
Exercice 17

On lance un dé truqué qui tombe sur 6 avec probabilité  $p$ . On le lance plusieurs fois de suite et on note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués au moment où on obtient 6 pour la  $r$ -ième fois. Déterminer la loi suivie par  $X$ .

★ ★  
Exercice 18

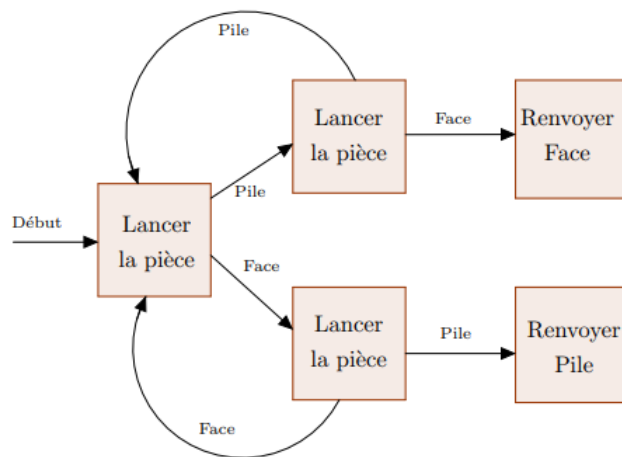
Un sac contient  $n$  pièces numérotées de 1 à  $n$ . On pioche une pièce au hasard et on la lance. On note  $X$  le numéro de la pièce, et on pose  $Y = kX$  avec

$$k = \begin{cases} 1 & \text{si la pièce est tombée sur face} \\ -1 & \text{si la pièce est tombée sur pile} \end{cases}$$

- 1) Déterminer la loi suivie par  $X$
- 2) Calculer l'espérance de  $X$
- 3) Déterminer la loi suivie par  $Y$
- 4) On pose  $Z = Y^2 - X$ . Calculer l'espérance de  $Z$

★ ★  
Exercice 19

(D'après ENS 2017) On dispose d'une pièce truquée qui renvoie « pile » avec une probabilité  $p \in ]0, 1[$  et on souhaite s'en servir pour générer un pile ou face équilibré. John von Neumann a imaginé l'algorithme suivant (où les lancers successifs de la pièce truquée se font indépendamment) :



On note  $T \in \{2, 4, 6, \dots\}$  la variable aléatoire donnée par le nombre de lancers nécessaires pour que l'algorithme se termine, et  $R \in \{P, F\}$  le résultat de l'algorithme (où on note  $P$  pour « pile » et  $F$  pour « face »).

- 1) Que valent  $T$  et  $R$  si on obtient comme premiers tirages  $PPPPFFPPPPFFP$ ?
- 2) Démontrer que pour tout  $k > 1$ ,

$$\mathbb{P}(T = 2k) = (p^2 + (1-p)^2)^{k-1} 2p(1-p)$$

En déduit que l'algorithme se termine presque sûrement, c'est à dire que  $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$ .

- 3) Démontrer que l'algorithme renvoie bien « pile » ou « face » avec même probabilité, c'est à dire que  $\mathbb{P}(R = \text{pile}) = \frac{1}{2}$ .
- 4) Calculer  $\mathbb{E}[T]$ .

★ ★ ★  
Exercice 20

### Entropie d'une variable aléatoire discrète (d'après BCE ESSEC 2019)

#### Partie A : Logarithme de base 2

La fonction logarithme de base 2, notée  $\log_2$ , est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $\log_2(x) = \frac{\ln x}{\ln 2}$ , où  $\ln$  est la fonction logarithme népérien.

- 1) Montrer que pour tout  $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ , on a  $\log_2(xy) = \log_2(x) + \log_2(y)$ .
- 2) Vérifier que pour tout réel  $\alpha$ ,  $\log_2(2^\alpha) = \alpha$ .
- 3) Montrer que la fonction  $\log_2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et calculer  $\log_2'(x)$ .
- 4) On considère la fonction  $f$  définie pour tout  $t \in [0; 1]$  par

$$f(t) = \begin{cases} -t \log_2(t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

- a) Démontrer que  $f$  est continue sur  $[0; 1]$
- b) Étudier les variations de  $f$  sur  $[0; 1]$
- c) Montrer que la limite de  $f'(t)$  lorsque  $t$  tend vers 0 est  $+\infty$ .
- d) Tracer la courbe représentative de  $f$  sur  $[0; 1]$ . On pourra utiliser  $0,36 < e^{-1} < 0,37$

**Partie B - Entropie** Dans cette partie, on considère  $X$  une variable aléatoire de loi à support dans  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$  où  $n$  est un entier naturel telle que  $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $\mathbb{P}(X = k) > 0$ . On appelle **entropie** de  $X$  le réel

$$H(X) = \sum_{k=0}^n -\mathbb{P}(X = k) \log_2(\mathbb{P}(X = k))$$

- 5) On définit la fonction  $g : \{0, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$  en posant  $g(k) = \log_2(\mathbb{P}(X = k))$  pour  $k$  élément de  $\{0, 1, \dots, n\}$ . Montrer que  $H(X) = -\mathbb{E}(g(X))$ .
- 6) Montrer que  $H(X) \geq 0$
- 7) Soit  $p$  un réel tel que  $0 < p < 1$ . On suppose dans cette question que  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .
  - a) Calculer  $H(X)$  en fonction de  $p$ . On note  $\psi$  la fonction qui à  $p$  associe  $H(X)$ .
  - b) Justifier que  $\psi$  est deux fois dérivable sur  $]0; 1[$  et montrer que pour tout  $p \in ]0; 1[$  on a  $\psi''(p) < 0$
  - c) Calculer  $\psi'\left(\frac{1}{2}\right)$  et en déduire la valeur  $p_0$  où  $\psi$  est maximale.
- 8) On suppose dans cette question que la loi de  $X$  est à support  $\{0, 1, 2, 3\}$ . Calculer l'entropie de  $X$ 
  - a) si  $X$  suit la loi uniforme sur  $\{0, 1, 2, 3\}$
  - b) si  $X$  suit la loi :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4} \quad ; \quad \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{8}$$

#### Partie C - Entropie maximum

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé et soit  $X$  une variable aléatoire à support dans  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Le but de cette partie est de montrer que l'entropie de  $X$  est maximale si  $X$  suit la loi uniforme sur  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , on note  $p_k$  le réel  $\mathbb{P}(X = x_k)$ .

Soit  $U$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

- 9) Montrer que  $H(U) = \log_2(n)$ .
- 10) Montrer que  $H(U) - H(X) = -\sum_{k=1}^n p_k \log_2\left(\frac{1}{np_k}\right)$ .
- 11) Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $\log_2(x) \leq \frac{1}{\ln(2)}(x - 1)$ .

*Indication :* On pourra étudier la fonction  $f : x \mapsto \log_2(x) - \frac{1}{\ln(2)}(x - 1)$  définie sur  $]0; +\infty[$ .

- 12) Dédurre des questions précédentes que  $H(U) - H(X) \geq 0$ . Conclure.