⋆ ⋆
Exercice 1 — Voir correction

Soit $A = \{(t^2, t^3) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 = y^2\}$ deux parties de $\mathbb{R}^2$.
Montrer que $A = B$.

⋆ ⋆
Exercice 2 — Voir correction

Soit E un ensemble non vide. Pour toute partie A de E, on notera $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E,et on appellera **fonction caractéristique de** A et on notera f_A la fonction de E vers $\{0, 1\}$ définie par

$$\forall x \in E, \quad f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

On considère dans toute la suite deux parties quelconques A et B de E, et f_A etf_B les fonctions caractéristiques respectives de A et de B.

1) Montrer que $A = B$ si et seulement si $\forall x \in E,\ f_A(x) = f_B(x)$.

2) Montrer que $A \subset B$ si et seulement si $\forall x \in E, f_A(x) \leq f_B(x)$

3) De quel ensemble la fonction $1 - f_A$ est-elle la fonction caractéristique ? Justifier.

4) Montrer que $f_A \times f_B = f_{A \cap B}$.

5) En remarquant que $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, en déduire que $f_{A \setminus B} = f_A - f_{A \cap B}$.

6) Montrer que $f_A + f_B - f_A \times f_B = f_{A \cup B}$.

7) À l'aide des questions précédentes, exprimer la fonction caractéristique de $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ en fonction de f_A et f_B

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 3 — Voir correction

Soit E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. On note $A \Delta B$ la différence symétrique de A et B définie par :

$$A \Delta B = \big\{x \in A \cup B; x \notin A \cap B\big\}$$

1) Représenter par un diagramme de Venn les éléments de $A \Delta B$.
2) Montrer que $A \Delta B = (A \cap \complement_E B) \cup (\complement_E A \cap B)$.
3) Calculer $A \Delta A$, $A \Delta \varnothing$, $A \Delta E$ et $A \Delta \complement_E A$.
4) Démontrer que pour tous A, B, C sous ensembles de E, on a :

$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$$

⋆ ⋆
Exercice 4 — Voir correction

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application de E vers F.
Soient A et B deux parties de E.

1) Montrer que $f(B) \setminus f(A) \subset f(B \setminus A)$

2) Montrer qu'il n'y a pas égalité dans le cas général.

3) Montrer que l'égalité a lieu si f est injective

4) En déduire que si f est une bijection de E vers F, alors pour toute partie A de E on a $f\left(\complement_E A\right) = \complement_F f(A)$

5) Montrer que si $M \subset F$ et $N \subset F$, $f^{-1}(M \setminus N) = f^{-1}(M) \setminus f^{-1}(N)$

6) Montrer que si $N \subset F$, on a $f^{-1}\left(\complement_F N\right) = \complement_E f^{-1}(N)$

$\star$

Exercice 5 — Voir correction

Soient E, F et G trois ensembles et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective
2) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective
3) Trouver un exemple d'applications f et g telles que $g \circ f$ est bijective avec g non injective et f non surjective.

$\star$

Exercice 6 — Voir correction

Pour un ensemble fini E on considère l'application card suivante :

$$\text{card} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ A & \longmapsto & \text{card}(A) \end{array}$$

Pour quel(s) ensemble(s) E cette application est-elle injective ?

$\star$

Exercice 7 — Voir correction

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x+y, x-y)$.
Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.

$\star\star\star$

Exercice 8 — Voir correction

Pour chacune des applications ci-dessous, déterminer si elle est injective, surjective, bijective.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$
2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x\ ;\ y) \longmapsto x^2 - y^2$
3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x\ ;\ -x)$
4) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x\ ,\ y) \mapsto (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y\ ,\ x+y)$
5) $f : [-\pi; \pi[\to [-1; 1]^2$, $x \mapsto (\cos(x)\ ,\ \sin(x))$
6) $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}^*$, $(x\ ,\ n) \mapsto (x^n\ ,\ n)$

$\star\star$

Exercice 9 — Voir correction

Au poker on appelle une « main » un ensemble de 5 cartes choisies dans un paquet de 52 cartes. Les différentes figures possibles sont la paire (2 cartes de même valeur), la double paire, le brelan (trois cartes de même valeur), la quinte (séquence de 5 cartes consécutive, indifféremment de la couleur), la couleur (5 cartes de la même couleur), le full (3 cartes de même valeur + 2 cartes de même valeur), le carré (4 cartes de même valeur), la quinte flush (5 cartes consécutives et de même couleur),la quinte flush royale (quinte flush se terminant par un As).
Combien existe-t-il de mains contenant ...

1) une quinte flush royale ?
2) une quinte flush (non royale) ?
3) une couleur (sans quinte flush)
4) un full ?
5) un carré ?
6) une double paire ?
7) une paire (et rien d'autre) ?
8) un brelan (et rien d'autre) ?

$\star\star$

Exercice 10 — Voir correction

6 personnes doivent s'asseoir sur 10 sièges dans une salle de cinéma.

1) Combien y a-t-il de choix possibles pour réserver les 6 sièges ?
2) Combien y a-t-il de choix possibles pour asseoir les 6 personnes sans avoir réservé les sièges ? En ayant réservé les sièges ?
3) Combien y a-t-il de choix possibles pour faire en sorte d'alterner garçons et filles dans le placement ? (le groupe comporte 3 garçons et 3 filles)

★★

Exercice 11

Voir correction

Déterminer dans chaque cas un prolongement $\tilde{f}$ de f à $\mathbb{R}$ tel que $\tilde{f}$ est bijective. Déterminer dans chaque cas un intervalle I telle que la restriction $g_{|I}$ de g à I est injective :

1) $f : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$
2) $f :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \ln(x+1)$
3) $f : [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \mathrm{e}^x$
4) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \cos(3x)$
5) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto (x-2)^2$
6) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{-x}$

★★★

Exercice 12

Voir correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$. On souhaite montrer l'égalité suivante de deux façons différentes :

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

1) Démontrer cette égalité par le calcul.
2) On considère l'ensemble $E = \{1, 2, ..., n+1\}$ de cardinal $n+1$. On note E_p le nombre de parties de E à $k+1$ éléments pour lesquelles le plus grand de ces éléments est p.
   Montrer que $\text{card}(E) = \text{card}(E_{k+1}) + \text{card}(E_{k+1}) + \cdots + \text{card}(E_{n+1})$ et conclure.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 : Montrons d'abord que $A \subset B$.
Soit $(x, y) \in A$. Alors il existe $t \in R$ tel que $x = t^2$ et $y = t^3$, donc $x^3 = t^6$ et $y^2 = t^6$. Ainsi, $(x, y) \in B$.
On a montré que $A \subset B$.

Montrons maintenant que $B \subset A$.
Soit $(x, y) \in B$. Alors $x^3 = y^2$ donc $x \geq 0$. Soit $t_0 = \sqrt{x}$, on a alors $x = t_0^2$.
$y^2 = t^3 = (\sqrt{x})^3 = x^{3/2}$, donc $y = -\sqrt{x^{3/2}} = -t_0^3$ ou $y = \sqrt{x^{3/2}} = t_0^3$.
Si $y \geq 0$, on pose $t = t_0$ et si $y < 0$ on pose $t = -t_0$. Ainsi, on a dans tous les cas $t^3 = y$ et $t^2 = x$, et donc $(x, y) \in A$.
Finalement, $B \subset A$ donc on en conclut que $A = B$.

Correction de l'exercice 2 :

1) Supposons que $A = B$, alors pour tout $x \in E$, $f_A(x) = 1 \iff x \in A \iff x \in B \iff f_B(x) = 1$, donc $\forall x \in E, f_A(x) = f_B(x)$.
Réciproquement, supposons que $\forall x \in E, f_A(x) = f_B(x)$. Alors, $x \in A \iff f_A(x) = 1 \iff f_B(x) = 1 \iff x \in B$, donc $A = B$.
2) Supposons que $A \subset B$. Alors pour tout $x \in E$, on a trois cas possibles : soit $x \in A$, soit $x \in B \setminus A$, soit $x \in \overline{B}$.
   - ▷ Si $x \in A$, alors $x \in B$ par inclusion. On a donc $f_A(x) = f_B(x) = 1$, donc $f_A(x) \leq f_B(x)$.
   - ▷ Si $x \in B \setminus A$, alors $f_A(x) = 0$ et $f_B(x) = 1$, on a donc bien $f_A(x) \leq f_B(x)$.
   - ▷ Enfin, si $x \in \overline{B}$, alors $x \notin B$ et $x \notin A$ car $A \subset B$, donc $f_A(x) = f_B(x) = 0$ et on a bien $f_A(x) \leq f_B(x)$.

   Dans tous les cas, on a bien $f_A(x) \leq f_B(x)$.

   Réciproquement, supposons que $\forall x \in E, f_A(x) \leq f_B(x)$.
   Soit $x \in A$. Alors $f_A(x) = 1$, et puisque $f_B(x) \geq f_A(x) \geq 1$, on a nécessairement $f_B(x) = 1$ d'où $x \in B$. Ainsi $A \subset B$.
   $\boxed{\text{On a montré que } A \subset B \text{ si et seulement si } \forall x \in E, f_A(x) \leq f_B(x).}$
3) $x \mapsto 1 - f_A(x)$ est la fonction caractéristique de $\overline{A}$. En effet, $f_A(x) = 1 \iff 1 - f_A(x) = 0$ et $f_A(x) = 0 \iff 1 - f_A(x) = 1$ donc $1 - f_A$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$ et donc $x \in \overline{A} \iff x \notin A \iff f_A(x) = 0 \iff 1 - f_A(x) = 1$. D'après la question 1).
4) f_A et f_B sont à valeurs dans $\{0, 1\}$, donc $f_A \times f_B$ aussi.
Pour tout $x \in E$, on a
$$\begin{aligned} f_A(x) \times f_B(x) = 1 &\iff f_A(x) = 1 \quad \text{et} \quad f_B(x) = 1 \\ &\iff x \in A \quad \text{et} \quad x \in B \\ &\iff x \in A \cap B \end{aligned}$$
et on a
$$\begin{aligned} f_A(x) \times f_B(x) = 0 &\iff f_A(x) = 0 \quad \text{ou} \quad f_B(x) = 0 \\ &\iff x \in \overline{A} \quad \text{ou} \quad x \in \overline{B} \\ &\iff x \in \overline{A} \cup \overline{B} \\ &\iff x \in \overline{A \cap B} && \text{d'après les lois de Morgan.} \end{aligned}$$
Ainsi, $f_A \times f_B$ est bien la fonction caractéristique de $A \cap B$.
5) D'après la remarque, on a $f_{A \setminus B} = f_{A \cap \overline{B}}$ donc $f_{A \setminus B} = f_A \times f_{\overline{B}}$ d'après la question précédente.
Or $f_{\overline{B}} = 1 - f_B$ d'après la question 3, donc $f_{A \setminus B} = f_A(1 - f_B) = f_A - f_A \times f_B = f_A - f_{A \cap B}$.
6) Montrons que $f_A + f_B - f_A \times f_B$ est la fonction caractéristique de $A \cup B$.
Si $x \in A \cup B$, on a trois cas distincts : soit $x \in A \setminus B$, soit $x \in B \setminus A$, soit $x \in A \cap B$
   - ▷ Si $x \in A \setminus B$, alors $f_A(x) = 1$, $f_B(x) = 0$ et $f_A(x) \times f_B(x) = 0$. Ainsi, $(f_A + f_B - f_A \times f_B)(x) = 1 + 0 - 0 = 1$
   - ▷ Si $x \in B \setminus A$, alors $f_A(x) = 0$, $f_B(x) = 1$ et $f_A(x) \times f_B(x) = 0$. Ainsi, $(f_A + f_B - f_A \times f_B)(x) = 0 + 1 - 0 = 1$
   - ▷ Si $\in A \cap B$, alors $f_A(x) = 1$, $f_B(x) = 1$ et $f_A(x) \times f_B(x) = 1$. Ainsi $(f_A + f_B - f_A \times f_B)(x) = 1 + 1 - 1 = 1$

   dans tous les cas on a bien $(f_A + f_B - f_A \times f_B)(x) = 1$
   Si $x \notin A \cup B$, alors $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ d'après les lois de Morgan, donc $f_A(x) = 0$ et $f_B(x) = 0$, ainsi $(f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) f_B(x) = 0$.
   On a donc bien montré que $f_A + f_B - f_A \times f_B$ était la fonction caractéristique de $A \cup B$.

7) $f_{(A\cup B)\setminus(A\cap B)} = f_{A\cup B} - f_{(A\cup B)\cap(A\cap B)}$ d'après la question 5).
Remarquons que $(A\cup B)\cap(A\cap B) = A\cap B$ (car $A\cap B \subset A\cup B$). Finalement,

$$\begin{aligned} f_{(A\cup B)\setminus(A\cap B)} &= f_{A\cup B} - f_{A\cap B} \\ &= f_A + f_B - f_A\times f_B - f_A\times f_B \\ &= f_A + f_B - 2f_A\times f_B \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4 :

1) Soit $y\in f(B)\setminus f(A)$. Alors $y\in f(B)$ et $y\notin f(A)$. Il existe donc $x\in B$ tel que $y=f(x)$. On peut affirmer que $x\notin A$ car sinon on aurait $y=f(x)\in f(A)$. On a donc $x\in B\setminus A$ donc finalement $y=f(x)\in f(B\setminus A)$.
On a montré que $\forall y\in f(B)\setminus f(A)$, $y\in f(B\setminus A)$ donc $f(B)\setminus f(A)\subset f(B\setminus A)$.
2) Considérons la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, x\longmapsto x^2$ et les ensembles $A=[-1;1]$ et $B=[0;1]$.
Alors $f(B)=[0;1]$ et $f(A)=[0;1]$. On a donc $f(B)\setminus f(A)=\varnothing$. En revanche, $B\setminus A=[-1;0]$ et $f([-1;0])=[0;1]\neq\varnothing$.
Il n'y a donc pas égalité dans le cas général.
3) Supposons dans cette question que f est injective.
Soit $y\in f(B\setminus A)$ et montrons que $y\in f(B)\setminus f(A)$.
Par définition, il existe $x\in B\setminus A$ tel que $y=f(x)$. Ainsi, $x\in B$ donc $y\in f(B)$.
Pour montrer que $y\notin f(A)$, raisonnons par l'absurde et supposons que $y\in f(A)$. Alors il existerait $x'\in A$ tel que $f(x')=y$, mais par injectivité de f cela impliquerait que $x=x'$. Or $x\in B\setminus A$ donc $x\notin A$, contradiction.
On en déduit que $y\notin f(A)$ donc on a bien $y\in f(B)\setminus f(A)$.
On a montré $\forall y\in f(B\setminus A), y\in f(B)\setminus f(A)$ donc $f(B\setminus A)\subset f(B)\setminus f(A)$.
4) Supposons dans cette question que f est une bijection de E vers F et soit A une partie de E.
f est surjective donc $f(E)=F$, et $f(\complement_E A)=f(E\setminus A)=f(E)\setminus f(A)$ d'après la question 3 car f est injective.
On a donc $f(\complement_E A)=F\setminus f(A)=\complement_F f(A)$.
5) Montrons par double inclusion que $f^{-1}(M\setminus N)=f^{-1}(M)\setminus f^{-1}(N)$.
Soit $x\in f^{-1}(M\setminus N)$. Alors $f(x)\in M\setminus N$ donc $f(x)\in M$ et $f(x)\notin N$. Ainsi, $x\in f^{-1}(M)$. Si on avait $x\in f^{-1}(N)$ alors on aurait $f(x)\in N$, comme $f(x)\notin N$ on en déduit que $x\notin f^{-1}(N)$. Finalement $x\in f^{-1}(M)\setminus f^{-1}(N)$. On a donc démontré l'inclusion $f^{-1}(M\setminus N)\subset f^{-1}(M)\setminus f^{-1}(N)$.

Réciproquement, soit $x\in f^{-1}(M)\setminus f^{-1}(N)$. Alors $x\in f^{-1}(M)$ et $x\notin f^{-1}(N)$. On a donc $f(x)\in M$ et $f(x)\notin N$. On en conclut que $f(x)\in M\setminus N$, autrement dit que $x\in f^{-1}(M\setminus N)$. On a donc démontré l'inclusion $f^{-1}(M)\setminus f^{-1}(N)\subset f^{-1}(M\setminus N)$.
6) Si $N\subset F$, alors $\complement_F N=F\setminus N$ et $\complement_E f^{-1}N=E\setminus f^{-1}(N)$. Or par définition d'une application, $f^{-1}(F)=E$, et d'après la question précédente $f^{-1}(F\setminus N)=f^{-1}(F)\setminus f^{-1}(N)=E\setminus f^{-1}(N)=\complement_E f^{-1}(N)$.

Correction de l'exercice 5 :

1) Supposons que $g\circ f$ soit injective et soit $(x,y)\in E^2$ tel que $f(x)=f(y)$. Alors $g(f(x))=g(f(y))$ par unicité de l'image, donc $x=y$ car $g\circ f$ est injective. Ainsi, on a $f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$ donc f est injective.
2) Supposons que $g\circ f$ soit surjective et soit $z\in G$. Alors il existe $x\in E$ tel que $g\circ f(x)=z$ par hypothèse. Ainsi, en posant $y=f(x)\in F$, on a $z=g(y)$ donc g est surjective.
3) Considérons les fonctions $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}, x\mapsto\sqrt{x}$ et $g:\mathbb{R}\to[0,+\infty[, x\mapsto x^2$.
Alors $g\circ f:[0,+\infty[\to[0,+\infty[, x\mapsto|x|=x$ donc $g\circ f$ est bijective, mais f n'est pas surjective et g n'est pas injective.

Correction de l'exercice 6 :

- Si $E=\varnothing$, alors $\mathcal{P}(\mathcal{E})=\{\varnothing\}$ donc card est injective car $\mathcal{P}(E)$ contient un seul élément.
- Si E contient un seul élément, $E=\{a\}$, et $\mathcal{P}(E)=\{\varnothing,\{a\}\}$
Ainsi, pour $A\in\mathcal{P}(E)$, on a $\mathrm{card}(A)=0$ ou $\mathrm{card}(A)=1$, et $A=\varnothing\iff\mathrm{card}(A)=0$ et $A=\{a\}\iff\mathrm{card}(A)=1$.
Ainsi, card est injective.
- Si E contient deux éléments, $E=\{a,b\}$, alors $\mathcal{P}(E)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$.
Ainsi, on a $\mathrm{card}(\{a\})=\mathrm{card}(\{b\})=1$ donc l'application card n'est pas injective.
- Si E contient deux éléments ou plus, il existe $a\in E$ et $b\in E$ avec $a\neq b$ donc $\{a\}\in\mathcal{P}(E)$ et $\{b\}\in\mathcal{P}(E)$ et $\{a\}\neq\{b\}$.
Comme $\mathrm{card}(\{a\})=\mathrm{card}(\{b\})=1$ donc card n'est pas injective.
- Conclusion : les seuls ensembles E tels que l'application $\mathrm{card}:\mathcal{P}(E)\to\mathbb{N}, A\mapsto\mathrm{card}(A)$ soit injective sont l'ensemble à 0 éléments (l'ensemble vide) et les ensembles à 1 élément (singletons).

Correction de l'exercice 7 : Soient $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$.
Alors $\begin{cases} x_1 + y_1 &= x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 &= x_2 - y_2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_1 - x_2 &= y_2 - y_1 \\ x_1 - x_2 &= y_1 - y_2 \end{cases}$
On en déduit que $y_2 - y_1 = y_1 - y_2 = -(y_2 - y_1)$ donc $y_1 = y_2$, et ainsi $x_1 = x_2$. f est donc injective.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (a, b)$.

On a $\begin{cases} a &= x + y \\ b &= x - y \end{cases}$ donc $\begin{cases} a + b &= 2x \\ a - b &= 2y \end{cases}$ et finalement $\begin{cases} x &= \dfrac{a+b}{2} \\ y &= \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$.

Ainsi, $\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a-b}{2}\right)$ est un antécédent de (a, b), donc f est surjective.

Finalement, f est bijective et son application réciproque est $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (a, b) \mapsto \left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a-b}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 8 :

1) f n'est pas injective : $f(1) = f(1,5) = 1$ et $1 \neq 1,5$. Elle n'est donc pas bijective.
   f est surjective car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \lfloor n \rfloor = n$.
2) f n'est pas injective : $f(1, 1) = f(2, 2) = 0$ mais $(1, 1) \neq (2, 2)$. Elle n'est donc pas bijective.
   f est surjective : soit $z \in \mathbb{R}$, si $z \geq 0$ on pose $x = \sqrt{z}$ et $y = 0$ et on a alors $f(x, y) = \sqrt{z}^2 - 0^2 = z$.
   si $z < 0$ on pose $x = 0$ et $y = \sqrt{-z}$, et on a alors $f(x, y) = 0^2 - \sqrt{-z}^2 = -(-z) = z$.
   Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = z$.
3) Soient x, y deux réels tels que $f(x) = f(y)$. Alors $(x, -x) = (y, -y)$ donc $x = y$. On en conclut que f est injective.
   $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ n'a pas d'antécédent. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que $x \in \mathbb{R}$ soit tel que $f(x) = (1, 1)$. Alors $(x, -x) = (1, 1)$ donc $x = 1$ et $-x = 1 \iff x = 1$ et $x = -1$ ce qui est absurde. Donc f n'est pas surjective. On en déduit qu'elle n'est pas bijective.
4) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = f(x', y')$.
   Alors

$$\begin{aligned}
\begin{cases} e^x - e^y &= e^{x'} - e^{y'} \\ x + y &= x' + y' \end{cases} &\iff \begin{cases} e^x - e^{x'} &= e^y - e^{y'} \\ x - x' &= y' - y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} e^x(1 - e^{x'-x}) &= e^{y'}(e^{y-y'} - 1) \\ x - x' &= y' - y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} e^x(1 - e^{y-y'}) &= e^{y'}(e^{y-y'} - 1) \\ x - x' &= y' - y \end{cases}
\end{aligned}$$

   La première ligne entraîne que $(1 - e^{y'-y})(e^x + e^y) = 0$ donc soit $1 - e^{y'-y} = 0$ car $e^x + e^y > 0$. On en déduit que $e^{y'-y} = 1$ donc que $y' = y$. On en déduit immédiatement que $x' = x$ d'où finalement $(x, y) = (x', y')$. Ainsi f est injective.

   Soit $(z, t) \in \mathbb{R}^2$. On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = (z, t)$.
   Raisonnons par analyse synthèse et supposons que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est tel que $f(x, y) = (z, t)$. Alors

$$\begin{cases} e^x - e^y &= z \\ x + y &= t \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} e^{t-y} - e^y &= z \\ x &= t - y \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad \begin{cases} e^t - e^{2y} - z\,e^y &= 0 \\ x &= t - y \end{cases}$$

   Si on pose $Y = e^y$ la première ligne du système devient $-Y^2 - zY + e^t$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = (-z)^2 + 4\,e^t$. On a toujours $e^t > 0$ et $(-z)^2 \geq 0$ donc $\Delta > 0$ et cette équation admet deux racines distinctes :

$$Y_1 = \frac{z + \sqrt{z^2 + 4\,e^t}}{-2} \quad \text{et} \quad Y_2 = \frac{z - \sqrt{z^2 + 4\,e^t}}{-2}$$

   Puisque $\sqrt{z^2 + 4\,e^t} > \sqrt{z^2} \geq |z|$, $Y_2 > 0$ et $Y_1 < 0$. Ainsi l'équation $e^y = Y_1$ n'a pas de solution, et donc

$$y = \ln(Y_2) = \ln\left(\frac{\sqrt{z^2 + 4\,e^t} - z}{2}\right)$$

Réciproquement, si on pose $y = \ln\left(\dfrac{\sqrt{z^2+4\,\mathrm{e}^t}-z}{2}\right)$ et $x = t - \ln\left(\dfrac{\sqrt{z^2+4\,\mathrm{e}^t}-z}{2}\right)$, alors on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y &= \frac{2\,\mathrm{e}^t}{\sqrt{z^2+4\,\mathrm{e}^t}-z} - \frac{\sqrt{z^2+4\,\mathrm{e}^t}-z}{2} \\
&= \frac{4\,\mathrm{e}^t - (\sqrt{z^2+4\,\mathrm{e}^t}-z)^2}{2(\sqrt{z^2+4\,\mathrm{e}^t}-z)} \\
&= \frac{4\,\mathrm{e}^t - z^2 - 4\,\mathrm{e}^t + 2z\sqrt{z^2+4\,\mathrm{e}^t} - z^2}{2(\sqrt{z^2+4e^t}-z)} \\
&= \frac{z(\sqrt{z^2+4\,\mathrm{e}^t}-z)}{\sqrt{z^2+4\,\mathrm{e}^t}-z} \\
&= z
\end{aligned} \qquad x+y=t$$

donc $f(x,y) = (z,t)$. Ainsi f est surjective.
Finalement, f est injective et surjective donc f est bijective.

5) Si $f(x) = f(x')$, alors $\cos(x) = \cos(x')$ donc $x = x'$ ou $x = -x'$. Puisque $\sin(x) = \sin(x')$ on en conclut que x et x' sont de même signe, donc que $x = x'$. Ainsi, f est injective.
Le couple $(1,1)$ n'a pas d'antécédent par f car pour tout $x \in [-\pi;\pi[$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ mais $1^2+1^2 = 2$. On en déduit que f n'est pas surjective (donc pas bijective).

6) Soient $(x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}^*$ et $(y,m) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}^*$ tels que $f(x,n) = f(y,m)$. Alors $(x^n,n) = (y^m,m)$ donc $n = m$. On en déduit que $x^n = y^n$. Si $x^n = y^n = 0$, alors $x = y = 0$, et sinon puisque$x, y > 0$ cela suffit pour en conclure que $x = y$ (car $x^n = y^n \Rightarrow n\ln(x) = n\ln(y) \Rightarrow \ln(x) = \ln(y) \Rightarrow x = y$).
Ainsi, f est injective.
Soit $(z,m) \in \mathbb{R}_+\times\mathbb{N}^*$. Raisonnons par analyse-synthèse et supposons que $(x,n) \in \mathbb{R}_+\times\mathbb{N}^*$ est un antécédent de (z,m). Alors $(x^n,n) = (z,m)$ donc $n = m$. De plus, $x^n = z \Rightarrow n\ln(x) = \ln(z) \Rightarrow x = \mathrm{e}^{\ln(z)/n} = z^{1/n}$.
Réciproquement, si on pose $n = m$ et $x = \mathrm{e}^{\ln(z)/n}$ alors $f(x,n) = (x^n,m) = (z,m)$ donc f est surjective.
Finalement, f est bijective.

Correction de l'exercice 9 :

1) Une main contenant une quinte flush royale est entièrement déterminée par la couleur de cette quinte (il y en a une de chaque couleur) donc 4 en tout.

2) Une quinte flush est déterminée par sa couleur et par la valeur de sa première carte, qui peut aller de l'as au 10. Il y a donc $4\times 10 = 40$ quintes flush auxquelles il faut enlever les 4 quinte flush royales, donc 36 quintes flush non royale en tout.

3) Il y a 4 couleurs possibles, et pour chacune il y a $\binom{13}{5}$ façons de choisir 5 valeurs de cartes différentes puisqu'il y a 13 cartes de chaque couleur.
Il faut retirer les 40 quintes flush (royales ou non), et on obtient $4\times\binom{13}{5} - 40$ mains contenant une couleur.

4) Pour choisir une main contenant un full, il faut choisir la valeur du brelan et la valeur de la pair (nécessairement différents). Il y a donc 13 choix pour la valeur du brelan et 12 choix pour la valeur de la paire.
Le brelan contient 3 couleurs sur les 4, il y a donc $\binom{4}{3} = 4$ choix possible par valeur.
La paire contient 2 couleurs sur les 4, il y a donc $\binom{4}{2} = 6$ choix possibles par valeur.
Ainsi, le nombre de mains contenant un full est $13\times 4\times 12\times 6$.

5) Pour choisir un carré il suffit de choisir la valeur des cartes du carré, il y a donc 13 possibilités. Pour compléter la main, il faut également choisir la cinquième carte qui peut être n'importe laquelle parmi les 48 cartes restantes. Il y a donc 13×48 mains possibles contenant un carré.

6) Pour choisir une double paire, il faut choisir la hauteur de chaque paire, donc $\binom{13}{2}$ choix possibles, puis les couleurs de chaque paire donc $\binom{4}{2}$ choix possible pour chacune. Enfin, il faut choisir la dernière carte qui ne doit pas avoir la même valeur qu'une des deux paires : il y a donc $52 - 8 = 44$ choix possibles.
Il y a donc $\binom{13}{2}\times\binom{4}{2}^2\times 44$ mains contenant une double paire.

7) Pour choisir une paire, il faut choisir la hauteur de la paire et les deux couleurs représentées, il y a donc $13\times\binom{4}{2}$ choix.
Pour compléter la main, il faut choisir 3 cartes qui ne sont pas de la même valeur que la paire afin de ne pas avoir de brelan ou de carré. Il faut aussi que ces trois cartes ne soient pas de la même valeur entre elles pour ne pas avoir un full ou une double paire.
Il y a donc $\binom{12}{3}$ choix de 3 valeurs différentes pour les trois cartes restantes. Pour chacune il faut choisir la couleur, soit 4^3 choix possibles.
Finalement, le nombre de mains contenant une paire et rien d'autre est $13\times\binom{4}{2}\times\binom{12}{3}\times 4^3$

8) Pour choisir un brelan, il faut choisir la valeur (13 choix) et les trois couleurs ($\binom{4}{3} = 4$ choix).
Il faut ensuite choisir les 2 cartes restantes en main qui ne doivent pas avoir la même valeur que le brelan, ni la même valeur entre elle, soit $\binom{48}{2} - 12 \times \binom{4}{2}$ choix.
Finalement, le nombre de mains contenant un brelan et rien d'autre est $13 \times 4 \times (\binom{48}{12} - 12 \times \binom{4}{2})$

Correction de l'exercice 10 :

1) Réserver 6 sièges revient à choisir 6 éléments dans un ensemble de 10 éléments. Il y a $\binom{10}{6}$ possibilités.
$$\binom{10}{6} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$
2) Si les sièges ne sont pas réservés, choisir une place pour chaque personne revient à choisir un 6-arrangement des 10 sièges. Il y a $A_{10}^{6} = \dfrac{10!}{4!}$ façons de placer les 6 personnes.
Si les sièges sont déjà réservé, il y a $6! = 720$ façons de placer les 6 personnes.
3) On peut d'abord fixer les 6 sièges qui seront occupés : il y a 720 façons de le faire d'après la question 1).
Une fois les places fixées, il n'y a que deux choix de placement : $GFGFGF$ ou bien $FGFGFG$. Le nombre de choix est donc $2 \times 720 = 1440$.