⋆

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que X suit la loi normale centrée réduite et U suit la loi uniforme sur $\{-1;1\}$. On pose $Y = UX$. Déterminer la loi de Y

⋆

Exercice 2

(Loi de Laplace) Soit $c > 0$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{c}{2}\,\mathrm{e}^{-c|x|}$

1) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle X.
2) Déterminer la fonction de répartition F de X
3) Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X admet un moment d'ordre n
5) En déduire que X admet une variance et la calculer.

⋆

Exercice 3

Soit c un réel strictement positif et f la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} x^{-4} & \text{si } x \notin [-1;1] \\ c & \text{si } x \in [-1;1] \end{cases}$.

1) Déterminer l'unique valeur de c telle que f est la fonction de densité d'une variable aléatoire X.
2) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
3) Déterminer l'ensemble des valeurs de $r \in \mathbb{N}^*$ telles que X admet un moment d'ordre r.

⋆

Exercice 4

Soient λ et μ deux réels strictement positifs. On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes telles que X suit une loi exponentielle de paramètre λ et Y suit une loi exponentielle de paramètre μ.
On pose $Z = \min(X, Y)$.

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, que vaut $\mathbb{P}(X > x)$?
2) Pour $x \geq 0$, que vaut $\mathbb{P}(Z > x)$?
3) Déterminer la loi de Z

⋆

Exercice 5

Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et soit $L \in \mathbb{R}_+^*$. On s'intéresse à la variable aléatoire discrète X définie par $X = \left\lceil \dfrac{Y}{L} \right\rceil$ où $\lceil x \rceil$ désigne le plus petit entier k tel que $x \leq k$ (partie entière supérieure).

1) Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
2) Montrer que X suit une loi géométrique dont on précisera les paramètres.
3) Peut on choisir L pour que X et Y ait la même espérance ?

⋆

Exercice 6

(Loi de Cauchy) Soit $\alpha > 0$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \alpha \cdot \arctan(x) + \dfrac{1}{2}$.

1) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X. Préciser sa densité f.
2) Montrer que X n'admet ni espérance, ni variance.
3) Déterminer la loi de $Z = \dfrac{1}{X}$.

⋆ ⋆

Exercice 7

(Oral ENS 2023) Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 2.

1) Calculer $\mathbb{P}(4X \leq X^2 + 3)$

2) Calculer $\mathbb{E}[\sin(X)]$ après avoir démontré son existence.

$\star\star$

Exercice 8

Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui suivent toutes la même loi telle que $\mathbb{E}[X_n] = V(X_n) = 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

1) Pour tout entier $n > t$, comparer les événements $(T_n < t)$ et $(|T_n - n| \geq n - t)$
2) Calculer $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} (T_n < t)\right)$.

$\star\star\star$

Exercice 9

(Oral ENS 2023) On construit aléatoirement un intervalle de la manière suivante. On tire tout d'abord son milieu M selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On tire ensuite la longueur totale L de l'intervalle, qui est indépendante de M et suit une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$. On note $[X, Y]$ l'intervalle aléatoire ainsi produit.

1) Expliquer rapidement pourquoi $X = M - \dfrac{L}{2}$ et $Y = M + \dfrac{L}{2}$
2) a) Calculer les espérances $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$
   b) Calculer les variance $V(X)$ et $V(Y)$

On introduit Z la variable aléatoire qui vaut 1 quand $X > 0$ et qui vaut 0 quand $X \leq 0$

3) Calculer $\mathbb{P}(Z = 0)$. En déduire la loi de Z et son espérance.
4) Montrer que pour tous réels y et z, il y a au plus un choix de (λ, μ) qui vérifie $\mathbb{E}[Y] = y$ et $\mathbb{E}[Z] = z$.

Le coin des Khûbes

$\star\star\star$

Exercice 10

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Calculer

$$I = \int_0^1 \mathbb{E}(\max(x, U)\, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \mathbb{E}\left(\int_0^1 \max(x, U)\, \mathrm{d}x\right)$$

$\star\star\star$

Exercice 11

(Oral ENS 2024) Soit $n \geq 1$ un entier et soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes, toutes de loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$P(X_i \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - e^{-t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

On note $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1) Déterminer la fonction de répartition de M_n, notée F_n, ainsi que sa densité, notée f_n.
2) Montrer, sans trop de calculs, que $\mathbb{E}[M_n] \leq n$.
3) Vérifier que $t(1 - F_n(t))$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.
4) En déduire, après une intégration par parties, que

$$\mathbb{E}[M_n] = \int_0^{+\infty} (1 - F_n(t))\, dt.$$

5) Montrer que

$$\mathbb{E}[M_n] = \int_0^1 \frac{1 - y^n}{1 - y}\, dy$$

et établir finalement que

$$\mathbb{E}[M_n] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 12

(Oral ENS 2024) Dans tout cet exercice, α désigne un réel strictement positif fixé. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f_α donnée par

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1], \\ \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \in]1, +\infty[. \end{cases}$$

1) Calculer, pour tout réel t, la quantité $P(X > t)$.
2) À quelle condition sur α la variable aléatoire X admet-elle une espérance finie ? Lorsque cette condition est vérifiée, donner la valeur de $\mathbb{E}[X]$.
3) Pour tout réel x, on note $\lceil x \rceil$ l'unique entier k tel que $k-1 < x \leq k$. Le nombre $\lceil x \rceil$ s'appelle la partie entière supérieure de x. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \lceil \ln(X) \rceil$.
4) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et toutes de densité f_α. On pose

$$Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n).$$

Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la quantité $P\big(n(Y_n - 1) > t\big)$ converge, quand n tend vers $+\infty$, vers une limite que l'on déterminera.