
Programme de khôlle n° 16

Semaine du 5 Février

Cours

- **Chapitre 10 : Séries numériques**

- Série convergente, série divergente.
- Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \rightarrow 0$, série grossièrement divergente
- Exemple de série divergente : la série harmonique
- Somme de séries convergentes, produit par un réel
- Série absolument convergente
- Pour une série à termes positifs, $\sum u_n$ converge ssi la suite des sommes partielles est majorée.
- Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs : si $u_n \leq v_n$ ou $u_n = o(v_n)$, si la s.t.g. v_n converge alors la s.t.g. u_n converge, si la s.t.g. u_n diverge alors la s.t.g. v_n diverge.
- Si (u_n) et (v_n) sont des suites de réels positifs, et si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de mêmes natures (toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes).
- Série double (à termes positifs) : $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$ (éventuellement $= +\infty$).
- Séries de référence : série géométrique, série géométrique dérivée, série géométrique dérivée seconde, série de Riemann, série exponentielle
- Critère de d'Alembert

Questions de cours et exercice

- **Questions de cours**

- Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs et supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$. Montrer que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge et que si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.
- Montrer qu'une série absolument convergente est convergente : $\sum |u_n|$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.
- Si (u_n) et (v_n) sont deux suites à termes positifs, si $u_n \sim v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature
- Démontrer le critère de d'Alembert : (u_n) est une suite à termes positifs et supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell \in [0, +\infty[$. Si $\ell < 1$ alors la série $\sum u_n$ converge, et si $\ell > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge

- **Exercices**

- Étudier la convergence d'une série : comparaison/équivalence avec une série de référence convergente/divergente
- Calcul de la somme d'une série convergente lorsque c'est possible

Remarques

- On note $\sum u_n$ pour désigner la série de terme général u_n .
- À part pour les séries géométriques, pour la série exponentielle, et pour la notion de convergence absolue, aucune théorie n'est faite sur les séries à termes de signe quelconques (théorèmes des séries alternées hors programme).