⋆

Exercice 1 — Voir correction

Étudier les variations de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I, ainsi que leurs limites aux bornes de leurs ensembles de définition.

1) $f(x) = \cos x - x$ définie sur $I = \mathbb{R}$
2) $g(x) = -3\sin(x/2)$ définie sur $I = [0, 2\pi]$
3) $h(x) = \cos^2(2x)$ définie sur $I = [0, \pi]$
4) $k(x) = \ln(\sin x)$ définie sur $I =]0, \pi[$.
5) $m(x) = x - \dfrac{x^3}{6} - \sin x$ définie sur $I = \mathbb{R}_+$

⋆

Exercice 2 — Voir correction

Dans chaque cas, résoudre dans I l'équation ou l'inéquation :

1) $\cos x = -\dfrac{1}{2}, \quad I = [0, 2\pi]$
2) $\tan x = -1, \quad I =]-\pi/2, \pi/2[$
3) $\tan x = 0, \quad I =]5\pi/2, 7\pi/2[$
4) $\sin(3x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad I = [-\pi, \pi]$
5) $\sin(2x) > \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad I = [-\pi, 3\pi]$
6) $\cos x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad I = [-3\pi, \frac{\pi}{6}]$

⋆

Exercice 3 — Voir correction

1) Montrer que pour tout réel x on a : $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(x - \dfrac{\pi}{4})$
2) En déduire les solutions de $\cos 2x + \sin 2x \geq -1$ sur $\mathbb{R}$

⋆ ⋆

Exercice 4 — Voir correction

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\cos(2x) = \cos x$
2) $\cos(2x) = \sin x$
3) $\sin(2x) = \cos x$
4) $\cos(3x) = \cos x$

⋆ ⋆

Exercice 5 — Voir correction

Résoudre l'équation $\cos x + \sin x = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ dans $\mathbb{R}$.

⋆ ⋆

Exercice 6 — Voir correction

Montrer que pour tout réel x, $2\cos(2x) - 8\cos x + 1 \geq 0$ et déterminer les cas d'égalité.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 7 — Voir correction

1) Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel x on a :

$$\sin\left(2^{n+2}x\right) = 2\sin\left(2^{n+1}x\right) - 4\sin\left(2^{n+1}x\right)\sin\left(2^n x\right)^2$$

2) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_{n+1} \times (u_n)^2 \quad ; \quad u_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad u_1 = 1$$

Montrer que (u_n) est une suite stationnaire (i.e. à partir d'un certain rang N, on a $u_{n+1} = u_n$). Quelle est alors la valeur limite de la suite (u_n) ?

⋆⋆⋆
Exercice 8 **Voir correction**

On note D l'ensemble des réels qui ne sont pas des entiers relatifs, soit $D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
Pour tout $x \in D$, on note $\cot(x) = \pi \dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$.

1) Vérifier que cot est définie et continue sur D, qu'elle est impaire et périodique de période 1.
2) Étudier les variations de cot sur $]-1, 0[\cup]0, 1[$. On précisera les limites en -1, en 0 et en 1.
3) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} x(\cot(x)) = 1$.
4) Démontrer que pour tout $x \in D$ on a $\dfrac{x}{2} \in D$ et $\dfrac{x+1}{2} \in D$, puis montrer que

$$\cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2 \cot x$$

5) À l'aide de l'égalité précédente, montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\forall x \in D, \ \cot x = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n - 1} \cot\left(\frac{x+k}{2^n}\right)$$

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\sin x - 1$$

Or, on sait que $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, donc $-2 \leqslant -\sin x - 1 \leqslant 0$.

$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}.}$

De plus, $f(x) = -x\left(1 - \dfrac{\cos x}{x}\right)$, et $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $-\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\cos x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$, on en déduit d'après le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{x} = 0$. De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cos x}{x} = 0$.

Par somme et par produit de limites, on en conclut que

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

2) On a $\forall x \in [0, 2\pi]$, $g'(x) = -\dfrac{3}{2}\cos(x/2)$.

$x \in [0, 2\pi] \iff \dfrac{x}{2} \in [0, \pi]$.

Pour $X \in [0, \pi]$, on a $\cos X \geq 0 \iff X \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$. Ainsi, $\cos(x/2) \geq 0 \iff \dfrac{x}{2} \in [0, \pi/2] \iff x \in [0, \pi]$.

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		π		2π
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	↘	-3	↗	0

3) On a $\forall x \in [0, \pi]$, $h'(x) = -4\sin(2x)\cos(2x) = -2\sin(4x)$ d'après la formule de duplication du sinus.

Or, $0 \leq x \leq \pi \iff 0 \leq 4x \leq 4\pi$.

Sur l'intervalle $[0, 4\pi]$, $\sin X \geq 0 \iff X \in [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi]$ d'après la courbe représentative de la fonction sinus.

On en déduit que $\sin(4x) \geq 0 \iff 4x \in [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \iff x \in [0, \dfrac{\pi}{4}] \cup [\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}]$.

Finalement, on a le tableau de variations suivant

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	↘	0	↗	1	↘	0	↗	1

4) $k = \ln u$ avec $u(x) = \sin x$ donc $k' = \dfrac{u'}{u}$.

$$k'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Or, $\forall x \in]0, \pi[,\ \sin x > 0$, et $\cos x \geq 0 \iff x \in [0, \pi/2]$

De plus, $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \ln X = -\infty$, donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(\sin x) = -\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to\pi} \ln(\sin x) = -\infty$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$k'(x)$		$+$	0	$-$	
$k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

5) On a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ m'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ m''(x) = -x + \sin x$$

et enfin

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ m'''(x) = -1 + \cos x$$

Comme, $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \cos x \leq 1$, on a $-2 \leq -1 + \cos x \leq 0$, donc m'' est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $m''(0) = 0$, on en conclut que $m''(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
Ainsi, m' est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, et on a aussi $m'(0) = 0$, ce qui permet d'en déduire que $m'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
Finalement, m est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, on peut majorer $m(x)$ par $m(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + 1$ qui tend vers $-\infty$, donc par théorème de comparaison, $\lim_{x \to +\infty} m(x) = -\infty$. On en déduit le tableau suivant :

x	0		$+\infty$
$m'(x)$		$-$	
$m(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

Correction de l'exercice 2 :

1) Dans $[0; 2\pi]$, $\cos x = -\frac{1}{2} \iff x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = -\frac{2\pi}{3}$. $\boxed{S = \left\{ -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\}}$

2) $\tan x = -1 \iff \frac{\sin x}{\cos x} = -1 \iff \cos x \neq 0$ et $\sin x = -\cos x$. Il n'y a que sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$ que sin et cos ont un signe opposé. De plus, sin est strictement croissante sur cet intervalle et cos est strictement décroissante. On pose $f(x) = \sin x + \cos x$, dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ avec $f'(x) = \cos x - \sin x$ pour tout x dans cet intervalle. Or $\cos x \geq 0$ et $-\sin x \geq 0$ sur cet intervalle et elles ne s'annulent jamais simultanément, donc $f'(x) > 0$ sur cet intervalle. f est donc strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$ et $f(0) = 1$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires f s'annule une et une seule fois sur cet intervalle. De plus on sait que $\sin \frac{\pi}{4} = -\cos \frac{-\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ est l'unique solution.}}$

3) $\tan x = 0 \iff \sin x = 0 \iff x = \frac{6\pi}{2} = 3\pi$. Donc $\boxed{S = \{3\pi\}}$

4) Commençons par résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2} &\iff 3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

On ne retient que les solutions qui sont dans $[-\pi; \pi]$, on trouve :

$$x \in [-\pi, \pi] \quad \text{et} \quad \sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longleftrightarrow x \in \left\{ -\frac{5\pi}{9}; \frac{-4\pi}{9}; \frac{\pi}{9}; \frac{2\pi}{9}; \frac{7\pi}{9}; \frac{8\pi}{9} \right\}$$

$$\boxed{S = \left\{ -\frac{5\pi}{9}; \frac{-4\pi}{9}; \frac{\pi}{9}; \frac{2\pi}{9}; \frac{7\pi}{9}; \frac{8\pi}{9} \right\}}$$

5) Dans $\mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} \sin(2x) > \frac{\sqrt{2}}{2} &\Longleftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2k\pi < 2x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\Longleftrightarrow \frac{\pi}{8} + k\pi < x < \frac{3\pi}{8} + k\pi \end{aligned}$$

On ne retient que les solutions qui sont dans $[-\pi; 3\pi]$ et on trouve

$$\boxed{S = \left] \frac{-7\pi}{8}; \frac{-5\pi}{8} \right[\cup \left] \frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8} \right[\cup \left] \frac{9\pi}{8}; \frac{11\pi}{8} \right[\cup \left] \frac{17\pi}{8}; \frac{19\pi}{8} \right[}$$

6) Dans $[-\pi; \pi]$, $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow x \in [-\pi; -\frac{\pi}{4}] \cup [\frac{\pi}{4}; \pi]$.

Par périodicité, on en déduit que sur $[-3\pi; \frac{\pi}{6}]$, $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow x \in [-3\pi; -\frac{9\pi}{4}] \cup [-\frac{7\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}] \cup [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}]$

Correction de l'exercice 3 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \cos x \cos(\pi/4) + \sin x \sin(\pi/4) \\ &= \cos x \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$.

2) D'après la question 1 on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos 2x + \sin 2x \geq -1 &\Longleftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq -1 \\ &\Longleftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Longleftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

D'après les variations et les valeurs remarquables de la fonction cosinus, on sait que :

$$\cos X \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq X \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

donc

$$\begin{aligned} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} &\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ &\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x \leq \pi + 2k\pi \\ &\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{aligned}$$

$$\iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4}+k\pi ; \frac{\pi}{2}+k\pi\right]$$

Finalement l'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4}+k\pi ; \frac{\pi}{2}+k\pi\right]}$$

Correction de l'exercice 4 :

1) On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 - 1$
On a donc

$$\cos(2x) = \cos x \iff 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

En posant $X = \cos x$, l'équation devient $2X^2 - X - 1 = 0$.
L'équation $2X^2 - X - 1 = 0$ a deux solutions dans $\mathbb{R}$: $X = 1$ et $X = -\frac{1}{2}$
Ainsi, $\cos x = 1$ ou $\cos x = -\frac{1}{2}$, donc $x \in \{0 + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$\boxed{S = \left\{0 + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

2) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$ donc

$$\begin{aligned} \cos 2x = \sin x &\iff 1 - 2\sin^2 x = \sin x \\ &\iff 0 = 2\sin^2 x + \sin x - 1 \end{aligned}$$

On pose $X = \sin x$ et on résout $2X^2 + X - 1 = 0$. On trouve $X = -1$ ou $X = \frac{1}{2}$, donc $\sin x = -1$ ou $\sin x = \frac{1}{2}$. Ainsi

$$\boxed{S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

3) $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, donc

$$\begin{aligned} \sin(2x) = \cos x &\iff 2\sin x \cos x = \cos x \\ &\iff \cos x(2\sin x - 1) = 0 \\ &\iff \cos x = 0 \quad \text{ou} \quad \sin x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On en conclut que les solutions sont

$$\boxed{S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

4) Commençons par exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$:

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos(2x + x) \\ &= \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin^2 x \cos x \\ &= \cos^3 x - (1 - \cos^2 x)\cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x \\ &= \cos^3 x - \cos x + \cos^3 x - 2\cos x + 2\cos^3 x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\cos(3x) = \cos x &\iff 4\cos^3 x - 3\cos x = \cos x\\ &\iff 4\cos^3 x - 4\cos x = 0\\ &\iff 4\cos x(\cos^2 x - 1) = 0\\ &\iff 4\cos x(\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0\\ &\iff \cos x = 0 \quad \text{ou} \quad \cos x = 1 \quad \text{ou} \quad \cos x = -1\end{aligned}$$

On trouve donc

$$\boxed{S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, 0 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

Correction de l'exercice 5 : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(x-\theta) = \cos x \cos\theta + \sin x \sin\theta$. En posant $\theta = \frac{\pi}{4}$, comme on a $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}/2$ on obtient

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$$

On a donc $\cos x + \sin x = 1 \iff \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Or, dans $[-\pi, \pi]$ on a $\cos X = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff X \in \{\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\}$ donc dans $\mathbb{R}$ on a

$$\cos X = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff X \in \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Finalement, dans $\mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}\cos x + \sin x = 1 &\iff x - \frac{\pi}{4} \in \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\\ &\iff x \in \{0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 7 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\sin(2^{n+2}x) &= \sin(2 \times 2^{n+1}x)\\ &= 2\sin(2^{n+1}x)\cos(2^{n+1}x)\\ &= 2\sin(2^{n+1}x)\cos(2 \times 2^n x)\\ &= 2\sin(2^{n+1}x)(\cos^2(2^n x) - \sin^2(2^n x))\\ &= 2\sin(2^{n+1}x)(1 - 2\sin^2(2^n x))\\ &\boxed{= 2\sin(2^{n+1}x) - 4\sin(2^{n+1}x)\sin^2(2^n x)}\end{aligned}$$

2) La suite (u_n) vérifie la même relation de récurrence double que la suite (v_n) définie par $v_n(x) = \sin(2^n x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si $u_0 = \sin(2^0 x)$ et $u_1 = \sin(2^1 x)$, alors on aura $u_n = \sin(2^n x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Il suffit de prendre $x = \frac{\pi}{4}$ pour avoir $\sin(2^0 x) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = u_0$, et $\sin(2^1 x) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 = u_1$.
On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin\left(2^n \frac{\pi}{4}\right)$.
Or, pour $n \geq 2$, 2^n est un multiple de 4 donc $2^n\frac{\pi}{4}$ est un multiple de π. On a $\sin(k\pi) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ donc $u_n = \sin(2^n\frac{\pi}{4}) = 0$ pour tout $n \geq 2$.
Ainsi, (u_n) est stationnaire égale à 0 à partir du rang $n = 2$, sa limite est donc 0.

Correction de l'exercice 8 :

1) — On sait que $\sin(\pi x) = 0 \iff \pi x = 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff x = 0 + k, k \in \mathbb{Z} \iff x \in \mathbb{Z}$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \text{ on a } \sin\pi x \neq 0 \text{ donc } f(x) \text{ est bien définie.}}$

— De plus, $\boxed{f \text{ est continue sur } D \text{ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.}}$

— Pour tout $x \in D$, on a $-x \in D$ et :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \pi \frac{\cos(-\pi x)}{\sin(-\pi x)} \\ &= \pi \frac{\cos(\pi x)}{-\sin(\pi x)} && \text{car sinus est impaire} \\ &= -\pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{donc } f \text{ est impaire}}$.

— Pour tout $x \in D$, on a $x+1 \in D$ et :

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \pi \frac{\cos(\pi x + \pi)}{\sin(\pi x + \pi)} \\ &= \pi \frac{-\cos(\pi x)}{-\sin(\pi x)} \\ &= \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{donc } f \text{ est périodique de période 1.}}$

2) f est dérivable sur D comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et pour tout $x \in D$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \pi \frac{-\pi \sin(\pi x)\sin(\pi x) - \pi \cos(\pi x)\cos(\pi x)}{\sin^2(\pi x)} \\ &= \pi \frac{-\pi(\cos^2(\pi x) + \sin^2(\pi x))}{\sin^2(\pi x)} \\ &= \frac{-\pi^2}{\sin^2(\pi x)} \end{aligned}$$

donc $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in D$, ainsi f est décroissante sur tout intervalle où elle est définie.

$\boxed{f \text{ est décroissante sur }]-1,0[\text{ et décroissante sur }]0,1[.}$

— En -1, on a $\lim\limits_{x \to -1} \cos(\pi x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to -1} \sin(\pi x) = 0$. De plus, si $x \in]-1,0[$ on a $\sin(\pi x) < 0$. On a donc, par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{x \to -1} \cot(x) = +\infty.}$

— En 0, on a $\lim\limits_{x \to 0} \cos(\pi x) = 1$

En 0^- on a $\lim\limits_{x \to 0^-} \sin(\pi x) = 0^-$ et en 0^+ on a $\lim\limits_{x \to 0^+} \sin(\pi x) = 0^+$. Ainsi, par quotient de limites,

$\boxed{\lim\limits_{x \to 0^-} \cot(x) = -\infty \text{ et } \lim\limits_{x \to 0^+} \cot(x) = +\infty.}$

— En 1 on a $\lim\limits_{x \to 1} \cos(\pi x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} \sin(\pi x) = 0^+$. Ainsi, par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{x \to 1^-} \cot(x) = -\infty}$

3) Soit $x \in D$, on a $x\cot(x) = \pi x \dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \cos(\pi x) \times \dfrac{\pi x}{\sin(\pi x)}$.

Or on sait d'après le cours que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \pi x}{\pi x} = 1$.

Par inverse de limite, on a aussi $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\pi x}{\sin \pi x} = 1$.

Finalement, comme $\lim\limits_{x \to 0} \cos(\pi x) = 1$, on a $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} x\cot(x) = 1.}$

4) Soit $x \in D$. Montrons d'abord que $\dfrac{x}{2} \in D$ et $\dfrac{x+1}{2} \in D$.

On raisonne par l'absurde : supposons que $\dfrac{x}{2} \in \mathbb{Z}$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{x}{2} = k$. On a alors $x = 2k$ donc $x \in \mathbb{Z}$, ce qui contredit l'hypothèse de départ.
De même, si $\dfrac{x+1}{2} = k \in \mathbb{Z}$, on a $x+1 = 2k$ donc $x = 2k-1 \in \mathbb{Z}$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. On en déduit que $\dfrac{x}{2} \notin \mathbb{Z}$ et $\dfrac{x+1}{2} \notin \mathbb{Z}$, autrement dit $\dfrac{x}{2} \in D$ et $\dfrac{x+1}{2} \in D$.
Soit $x \in D$. Écrivons $\cot(x) = \cot\left(2 \times \dfrac{x}{2}\right)$.
Alors

$$\begin{aligned}
\cot(x) &= \pi \frac{\cos\left(2 \times \frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(2 \times \frac{\pi x}{2}\right)} \\
&= \pi \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \pi \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} + \pi \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)} \\
&= \pi \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} + \pi \frac{-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \\
&= \pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \\
&\boxed{= 2\cot(x)}
\end{aligned}$$

d'après l'égalité précédente.

5) On note $\mathcal{P}(n) : \forall x \in D, \cot(x) = \dfrac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \cot\left(\dfrac{x+k}{2^n}\right)$ et on raisonne par récurrence.

— **Initialisation :** Le cas $n = 1$ est celui que nous avons montré dans la question 4, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
— **Hérédité :** Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $k \in [\![0, 2^n - 1]\!]$, on peut appliquer l'égalité de la question 4. pour obtenir :

$$2\cot\left(\frac{x+k}{2^n}\right) = \cot\left(\frac{x+k}{2^{n+1}}\right) + \cot\left(\frac{\frac{x+k}{2^n} + 1}{2}\right)$$

$$2\cot\left(\frac{x+k}{2^n}\right) = \cot\left(\frac{x+k}{2^{n+1}}\right) + \cot\left(\frac{x+k+2^n}{2^{n+1}}\right)$$

$$\cot\left(\frac{x+k}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\left[\cot\left(\frac{x+k}{2^{n+1}}\right) + \cot\left(\frac{x+k+2^n}{2^{n+1}}\right)\right]$$

Par hypothèse de récurrence, on a

$$\cot(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \cot\left(\frac{x+k}{2^n}\right)$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2} \left[\cot\left(\frac{x+k}{2^{n+1}}\right) + \cot\left(\frac{x+k+2^n}{2^{n+1}}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \cot\left(\frac{x+k}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \cot\left(\frac{x+2^n+k}{2^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \cot\left(\frac{x+k}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k'=2^n}^{2^n+2^n-1} \cot\left(\frac{x+k'}{2^{n+1}}\right) \qquad \text{par changement de variable } k' = 2^n + k$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} \cot\left(\frac{x+k}{2^{n+1}}\right)$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— **Conclusion :** par principe de récurrence, on en conclut :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \cot(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \cot\left(\frac{x+k}{2^n}\right)}$$