

★

## Exercice 1

Dans chaque cas, montrer que  $f$  est continue sur son ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  et déterminer si la fonction  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  ou non sur  $\mathcal{D}_f$ .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad \mathcal{D}_f = [0, +\infty[$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{1/x} & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

$$\text{d) } f(x) = |x| \ln(1+x), \quad \mathcal{D}_f = ]-1; +\infty[.$$

★

## Exercice 2

Dans chaque cas déterminer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  à l'aide d'une dérivée connue :

$$\text{a) } f(x) = \frac{3 - \sqrt{9 - 4x}}{x}, \quad a = 0$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{2^x - 4}{x - 2}, \quad a = 2$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}, \quad a = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{x - 1}{8 \arctan(x) - 2\pi}, \quad a = 1$$

★

## Exercice 3

Dans chaque cas déterminer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  à l'aide d'un développement limité :

$$\text{a) } f(x) = \frac{1 - e^{3x}}{2x}, \quad a = 0$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{\ln(x)}{3x - 3}, \quad a = 1$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{3 - \sqrt{9 - 4x}}{x}, \quad a = 0$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{e^{2x} - \cos(x)}{\sin(3x)}, \quad a = 0$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}, \quad a = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{f) } f(x) = \left( \frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^x, \quad a = +\infty$$

★

## Exercice 4

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1} - 2x$ . À l'aide d'un développement limité, montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

★

## Exercice 5

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par

$$f(x) = 2\sqrt{x^2 + 3x} - 3\sqrt[3]{x^3 - 4x^2} + \sqrt[4]{x^4 + 5x^3}$$

Déterminer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

★

## Exercice 6

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0; +\infty[$  et que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x > 0$  on a  $f^{(n)}(x) = e^{-1/x} P_n(1/x)$  où  $P_n$  est un polynôme de degré  $2n$ .
- 2) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

★ ★

## Exercice 7

Le but de cet exercice est de généraliser le théorème de Rolle : soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe  $\ell \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ . Montrer qu'il existe un réel  $c$  tel que  $f'(c) = 0$ .

★ ★

## Exercice 8

En utilisant le théorème de Rolle, montrer par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  qu'un polynôme non nul de degré  $n$  admet au plus  $n$  racines distinctes.

★

## Exercice 9

Déterminer dans chaque cas un équivalent simple de  $u_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

- 1)  $u_n = \sqrt{n^4 + 5n + 2} - n^2$
- 2)  $u_n = \ln(n^2 + 1) - 2 \ln(n + 5)$
- 3)  $u_n = e^{1/n} - \sqrt{1 + 1/3n}$

★ ★ ★

## Exercice 10

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

- 1) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$  (**Formule de Leibniz**)
- 2) **Application** : soient  $a$  et  $b$  deux réels. On considère la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\varphi(x) = (x - a)^n (x - b)^n$ .
  - a) Calculer  $\varphi^{(n)}(x)$
  - b) En considérant le cas  $a = b$ , en déduire  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ .

*Rappel : on note  $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$*

★

## Exercice 11

À l'aide du théorème des accroissements finis, démontrer les inégalités suivantes :

- a)  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x$
- b)  $\forall x \in ]-1; +\infty[, \quad \ln(1 + x) \leq x$
- c)  $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\sin y - \sin x| \leq |y - x|$

★ ★

## Exercice 12

Le but de cet exercice est d'étudier la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$ .

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[1; 2]$  par  $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ .

- 1) Étudier les variations de  $f$  et montrer que pour tout  $x \in [1; 2]$  on a  $f(x) \in [1; 2]$ .
- 2) Montrer que la suite  $(u_n)$  est bien définie et à valeurs dans  $[1; 2]$ .
- 3) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et déterminer le maximum de  $|f'(x)|$  sur  $[1; 2]$ .
- 4) En déduire qu'il existe un réel  $r \in [0; 1[$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - u_n| \leq r^n |u_1 - u_0|$ .
- 5) Montrer que la série de terme général  $u_{n+1} - u_n$  converge puis en déduire que la suite  $(u_n)$  converge.
- 6) Déterminer la limite de  $(u_n)$ .

★ ★

---

Exercice 13

---

Le but de cet exercice est de généraliser le résultat de l'exercice précédent.

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $[a; b]$  telle que

- $\forall x \in [a; b]$  on a  $f(x) \in [a; b]$ .
- Il existe un réel  $r \in [0; 1[$  tel que  $\forall x \in [a; b]$ ,  $|f'(x)| \leq r$

Soit  $(u_n)$  une suite définie par  $u_0 \in [a; b]$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

- 1) Montrer que  $f$  admet un unique point fixe, c'est à dire un unique réel  $\ell \in [a; b]$  tel que  $f(\ell) = \ell$ .
- 2) Montrer par récurrence que  $(u_n)$  est bien définie et à valeurs dans  $[a; b]$ .
- 3) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - \ell| \leq r|u_n - \ell|$
- 4) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n - \ell| \leq r^n|u_0 - \ell|$ .
- 5) En déduire que  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

★ ★

---

Exercice 14

---

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x e^{-x}$ .

- 1) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0; +\infty[$ .
- 2) Montrer que l'intervalle  $I = [1; +\infty[$  est stable par  $f$ .
- 3) Montrer que pour tout  $x \in [0; +\infty[$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
- 4) Prouver qu'il existe un unique réel  $\alpha \in [1; +\infty[$  tel que  $f(\alpha) = \alpha$ .
- 5) On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .  
Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$ .
- 6) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .