

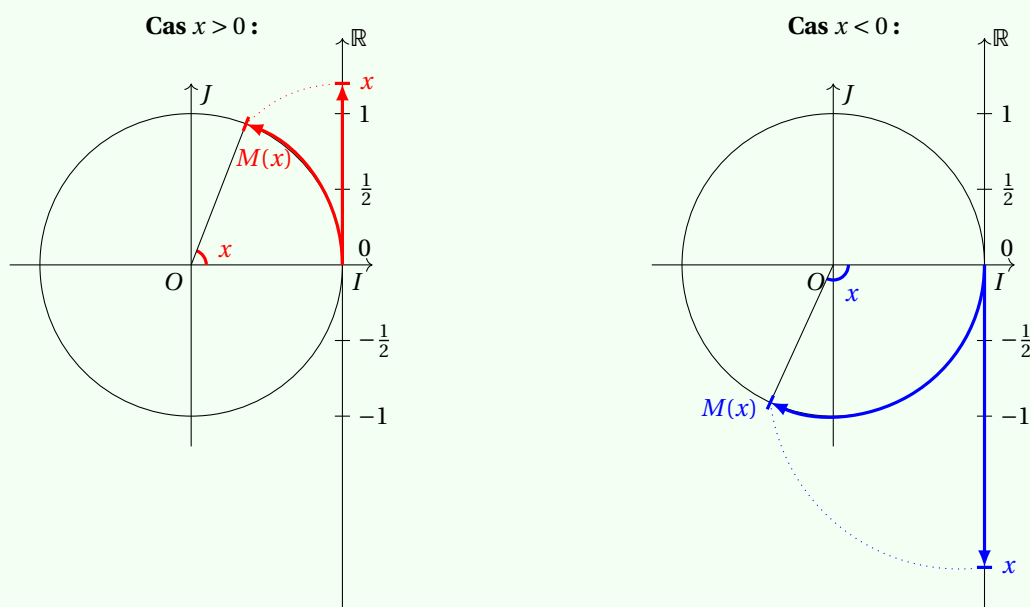
# I. Fonctions sinus, cosinus, et tangente

## 1. Définitions

### Définition 1.1 (Enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique)

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

À chaque nombre réel  $x$  on associe le point  $M(x)$  du cercle trigonométrique obtenu en « enroulant » la droite numérique le long du cercle en partant du point  $I$ , dans le sens anti-horaire lorsque  $x > 0$  et dans le sens horaire lorsque  $x < 0$ .

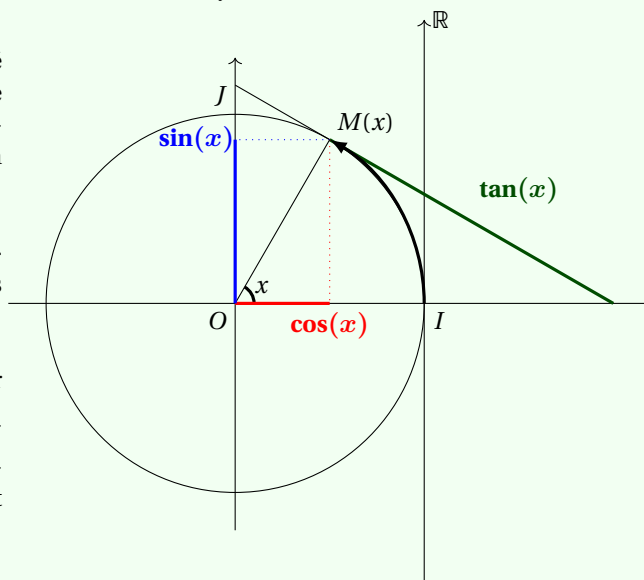


Si  $M(x)$  est le point associé au réel  $x$  par enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique, alors  $x$  est une mesure de l'angle orienté  $\widehat{IOM}$  qui **n'est pas exprimée en degré**. Cette unité d'angle s'appelle le **radian**. On a par exemple  $360^\circ = 2\pi$  rad puisque le périmètre d'un cercle de rayon 1 est  $2\pi$ .

Pour tout réel  $x$ , on considère le point  $M(x)$  associé à  $x$  par enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique (l'enroulement peut éventuellement faire plusieurs tours de cercle dans un sens ou dans l'autre).

On appelle **cosinus de  $x$**  l'abscisse de  $M(x)$ , et **sinus de  $x$**  l'ordonnée du point  $M(x)$ . On note ces deux nombres  **$\cos(x)$**  et  **$\sin(x)$** .

On appelle tangente de  $x$  le nombre défini par  $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$  lorsque  $\cos(x) \neq 0$ . C'est la longueur du segment de la tangente au cercle trigonométrique reliant  $M(x)$  à l'axe des abscisses. C'est aussi le **coefficient directeur** de la droite  $OM(x)$ .



**Remarque**

La circonférence du cercle trigonométrique est  $C = 2\pi R$  avec un rayon  $R = 1$ . Les réel  $x = 2\pi$  et  $x = -2\pi$  correspondent donc à exactement un tour de cercle trigonométrique (dans un sens et dans l'autre), leurs images sur le cercle sont la même que celle de 0, à savoir le point de coordonnée (1,0). Pour des valeurs de  $x$  supérieur à  $2\pi$  on recommence l'enroulement autant de fois que nécessaire. Ainsi  $\sin(x)$  et  $\cos(x)$  sont définis pour toutes valeurs réelles de  $x$ .

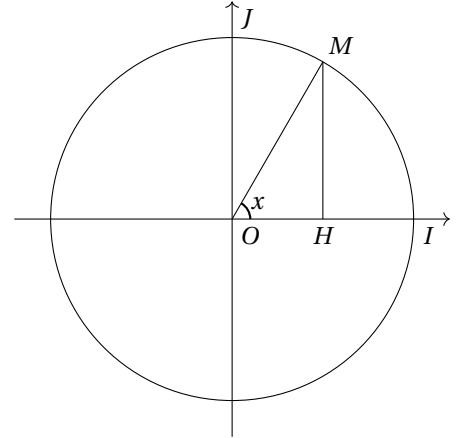
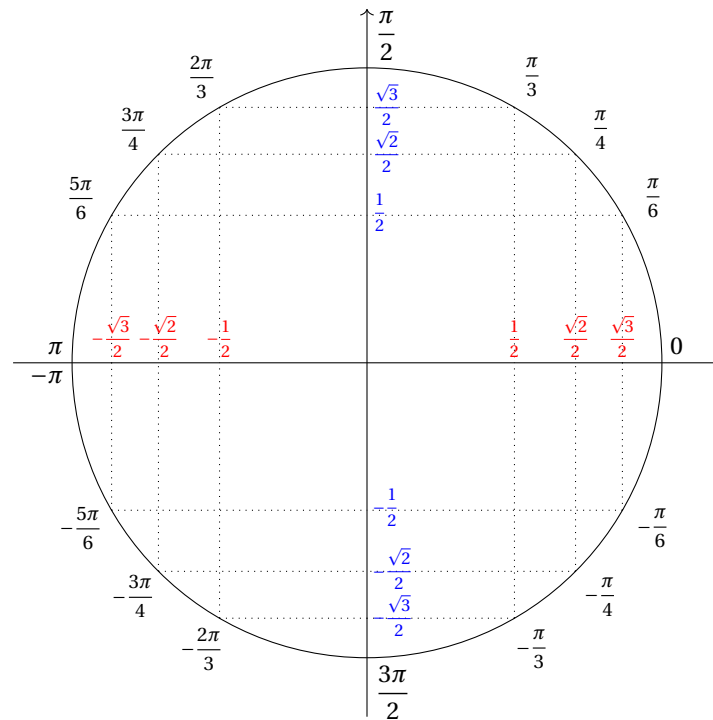
**Remarque**

Si on note  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe des abscisses, alors ces définitions du sinus et du cosinus coïncide avec la définition du sinus et du cosinus de l'angle  $x$  dans le triangle  $OHM$  :

$$\cos(x) = \frac{OH}{OM} = OH$$

$$\sin(x) = \frac{HM}{OM} = HM$$

car ici  $OM = 1$ .

**2. Valeurs remarquables (à connaître par coeur)**

En noir  $x$ , en rouge  $\cos(x)$ , en bleu  $\sin(x)$ .

Angle $\theta$ en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
Angle $\theta$ en degrés	0	30	45	60	90	120	135	150	180
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

## II. Propriétés

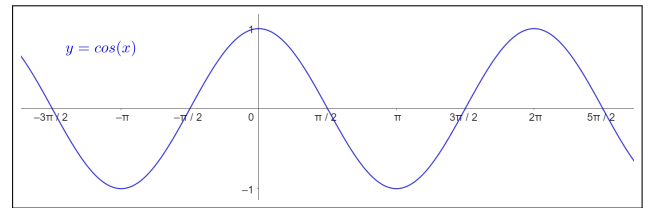
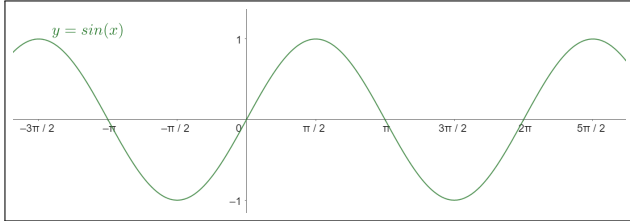
### 1. Ensemble de définition

#### Propriété 1.1

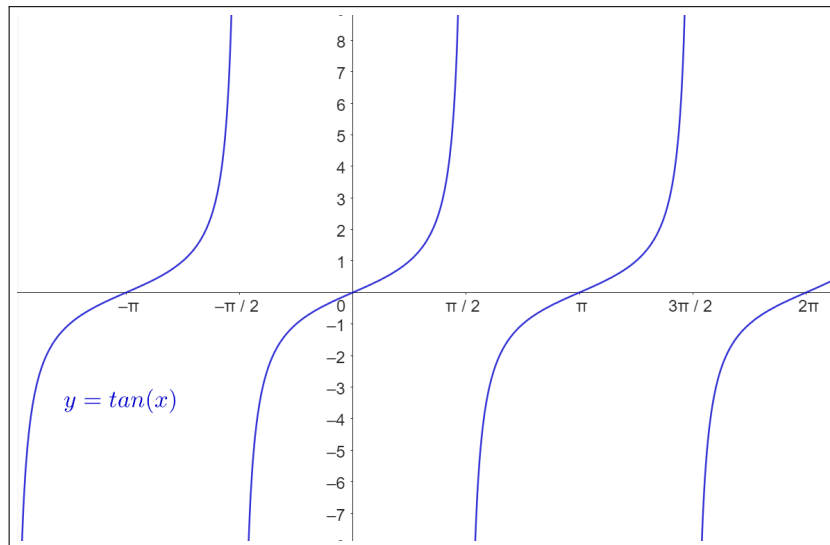
Les fonctions **cos** et **sin** sont définies sur  $\mathbb{R}$ , la fonction **tan** est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

### 2. Courbes représentatives

#### a. Fonctions sinus et cosinus



#### b. Fonction tangente



### 3. Périodicité

Le motif de la courbe représentative des fonctions sinus et cosinus sur l'intervalle  $] -\pi; \pi]$  se répète sur  $\mathbb{R}$ . On dit que les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques**. La définition formelle d'une fonction périodique est la suivante :

#### Définition 1.2

Une fonction  $f$  définie sur un domaine  $\mathcal{D}$  est dite **périodique** de période  $T \in ]0; +\infty[$  si pour tout  $x \in \mathcal{D}$  tel que  $x + T \in \mathcal{D}$  on a

$$f(x + T) = f(x)$$

#### Propriété 1.2 (admise)

Les fonctions cos et sin sont périodique de période  $2\pi$ . La fonction tangente est périodique de période  $\pi$ .

Autrement dit on a :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \tan(x + \pi) = \tan(x)$

On a aussi, pour tout entier  $k \in \mathbb{Z}$ ,

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \tan(x + k\pi) = \tan(x)$

**Remarque**

Il suffit donc de connaître les fonctions sinus et cosinus sur un intervalle de longueur  $2\pi$  pour les connaître sur  $\mathbb{R}$  (par exemple sur  $]-\pi; \pi[$  ou sur  $]0; 2\pi[$ ).

→ Exercice de cours n° 1.

→ Exercice de cours n° 2.

**4. Parité****Définition 1.3**

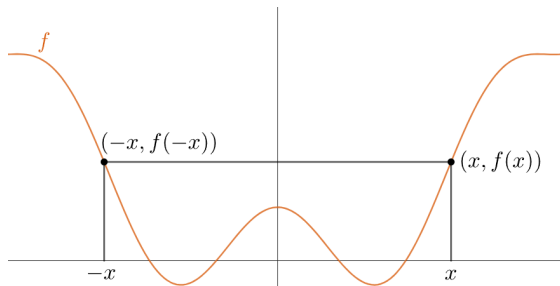
Soit  $f$  une fonction définie sur un domaine  $\mathcal{D}$  tel que pour tout  $x \in \mathcal{D}$ ,  $-x \in \mathcal{D}$  (un tel domaine est dit **symétrique par rapport à 0**). On dit que  $f$  est...

- ...**paire** si pour tout  $x \in \mathcal{D}$ ,  $f(-x) = f(x)$
- ...**impaire** si pour tout  $x \in \mathcal{D}$ ,  $f(-x) = -f(x)$

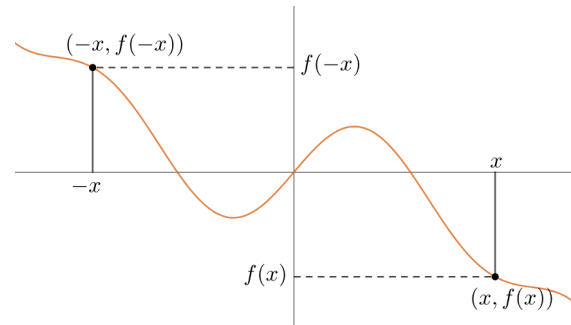
**Remarque**

Une fonction paire est une fonction dont la courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Une fonction impaire est une fonction dont la courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Une fonction paire



Une fonction impaire

**Propriété 1.3 (admise)**

La fonction cosinus est paire sur  $\mathbb{R}$ , c'est à dire que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos(-x) = \cos(x)$

La fonction sinus est impaire sur  $\mathbb{R}$ , c'est à dire que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\sin(-x) = -\sin(x)$

**5. Continuité et dérivabilité****Propriété 1.4 (admise)**

Les fonctions  $x \mapsto \sin(x)$  et  $x \mapsto \cos(x)$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction tangente est continue sur  $]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

→ Exercice de cours n° 3.

**Propriété 1.5 (admise)**

Les fonctions  $x \mapsto \sin(x)$  et  $x \mapsto \cos(x)$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  et :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin'(x) = \cos x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos'(x) = -\sin x$

La fonction  $x \mapsto \tan x$  est dérivable sur tout intervalle de la forme  $]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$  où  $k \in \mathbb{Z}$ , et :

- $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

→ Exercice de cours n° 4.

→ Exercice de cours n° 5.

→ Exercice de cours n° 6.

Application :

### Proposition 1.6

On a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

→ Exercice de cours n° 7.

## III. Formules

### Propriété 1.7

Pour tout réel  $x$ , on a :

- $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

### Remarque

La notation  $\cos^2 x$  signifie  $(\cos(x))^2$

→ Exercice de cours n° 8.

→ Exercice de cours n° 9.

### Propriété 1.8 (d'addition admise)

Pour tous réels  $a, b \in \mathbb{R}$ , on a :

- |   |   |
|---|---|
| • $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ | • $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ |
| • $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ | • $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ |

→ Exercice de cours n° 10.

Conséquence :

### Propriété 1.9 de duplication (admise)

Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on a

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$

→ Exercice de cours n° 11.

### Propriétés 1.10 (admisses)

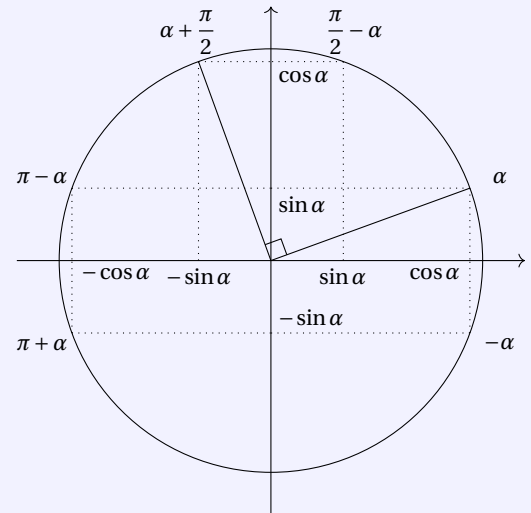
Les propriétés suivantes se démontrent aisément avec les formules d'addition, mais elles se comprennent mieux dans leur sens géométrique illustré ci-contre.

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  on a :

- |  |   |
|--|---|
| • $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$       | • $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha)$ |
| • $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$      | • $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha$   |
| • $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$ | • $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$   |
| • $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$ | • $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$   |
| • $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$ |   |
| • $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$  |   |

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$  on a

- |  |   |
|--|---|
| • $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$      | • $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \alpha}$ (pour $\alpha \notin \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ) |
| • $\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$  | • $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan \alpha}$ (pour $\alpha \notin \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ )  |
| • $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$ |   |



### Conséquences graphiques

Si on trace les courbes des fonctions sinus et cosinus dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  :

- La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées
- La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- La courbe de la fonction sinus est l'image de la courbe de la fonction cosinus par une translation de vecteur  $\frac{\pi}{2} \vec{i}$

## IV. Applications

### 1. Équations trigonométriques

#### Proposition 1.11

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On s'intéresse à l'équation  $\cos x = a$  dans l'intervalle  $[-\pi; \pi]$

- Si  $a > 1$  ou  $a < -1$ , l'équation n'a pas de solution,  $S = \emptyset$
- Si  $a = 1$ , l'équation a pour unique solution  $x = 0$
- Si  $-1 < a < 1$ , l'équation a deux solutions,  $\theta$  et  $-\theta$  avec  $\theta$  tel que  $\cos \theta = a$
- Si  $a = -1$ , l'équation a deux solutions  $x = -\pi$  et  $x = \pi$ .

→ Exercice de cours n° 12.

→ Exercice de cours n° 13.

#### Proposition 1.12

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On s'intéresse à l'équation  $\sin x = a$  dans l'intervalle  $]-\pi; \pi]$

- Si  $a > 1$  ou  $a < -1$ , l'équation n'a pas de solution,  $S = \emptyset$
- Si  $a = 1$ , l'équation a pour unique solution  $x = \frac{\pi}{2}$
- Si  $0 < a < 1$ , l'équation a deux solutions,  $\theta$  et  $\pi - \theta$  avec  $\theta$  tel que  $\sin \theta = a$
- Si  $-1 < a < 0$ , l'équation a deux solutions  $x = \theta$  et  $x = -\pi - \theta$  avec  $\theta$  tel que  $\sin \theta = a$ .
- Si  $a = -1$ , l'équation a pour unique solution  $x = -\frac{\pi}{2}$

→ Exercice de cours n° 14.

## 2. Inéquations trigonométriques.

On résout les inéquations de la forme  $\cos x \geq a$ ,  $\cos x \leq a$ ,  $\sin x \geq a$  et  $\sin x \leq a$  en s'aidant du cercle trigonométrique et en appliquant les propositions de la section précédente.

→ Exercice de cours n° 15.

## V. Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$ :

### Proposition 1.13

Dans l'intervalle  $[-\pi; \pi]$ , on a

$$\cos a = \cos b \iff a = b \quad \text{ou} \quad a = -b$$

Dans l'intervalle  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ , on a

$$\sin a = \sin b \iff a = b \quad \text{ou} \quad a = \pi - b$$

Dans  $\mathbb{R}$ , on a donc

$$\cos a = \cos b \iff a = b + 2k\pi \quad \text{ou} \quad a = -b + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

et

$$\sin a = \sin b \iff a = b + 2k\pi \quad \text{ou} \quad a = \pi - b + 2k\pi, \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

→ Exercice de cours n° 16.

## Exercices de cours

## Exercice 1

Calculer  $\sin(217\pi)$  et  $\cos\left(-\frac{35\pi}{4}\right)$

## Exercice 2

Déterminer **une** période  $T > 0$  de chacune des fonctions suivantes (sans se soucier de leurs ensembles de définition).

1.  $f(x) = 4 \sin\left(\frac{3x}{7}\right)$

3.  $h(x) = \cos(3x) \sin(2x)$

5.  $m(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

2.  $g(x) = \cos(2x) - \sin(x)$

4.  $k(x) = \frac{\cos(12x+1)}{2 + \sin^2(8x)}$

6.  $n(x) = \tan(3x)$

## Exercice 3

Démontrer qu'il existe un réel  $x \in [0; \pi]$  tel que  $\cos(x) = \frac{\pi^3}{64}$ .

## Exercice 4

Calculer la dérivée de la fonction  $g : x \mapsto x^5 \cos(3x)$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$

## Exercice 5

Calculer la dérivée de la fonction  $h : x \mapsto \sin(e^x)$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

## Exercice 6

On admet dans chaque cas que la fonction est définie et dérivable sur  $I$ . Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle  $I$

1.  $f(x) = \frac{\sin(3x)}{\cos(x)}, \quad I = [0; \pi/2[$

3.  $h(x) = \sqrt{e^{x \cos x}}, \quad I = \mathbb{R}$

2.  $g(x) = \ln(3 \cos^2(5x)), \quad I = ]0; \frac{\pi}{10}[$

4.  $k(x) = \frac{1}{\sqrt{\tan x}}, \quad I = ]0; \pi/2[.$

## Exercice 7

Déterminer les limites suivante :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2\pi x)}{x-1}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{5x}$

## Exercice 8

Déterminer la limite lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  de la fonction  $f : x \mapsto \frac{x \sin x + x^2}{x^2}$  définie sur  $]0; +\infty[$ .

## Exercice 9

Déterminer dans chaque cas la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $a$ .

1.  $\frac{\cos x}{x}, \quad a = -\infty$

2.  $\frac{\sqrt{x} \sin x - \sqrt{x} \cos x}{x}, \quad a = +\infty.$



---

Exercice 10

---

En remarquant que  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ , calculer  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

---

Exercice 11

---

Calculer  $\cos\frac{\pi}{8}$  et  $\sin\frac{\pi}{8}$ .

---

Exercice 12

---

Résoudre  $\cos x = -\frac{1}{2}$  dans  $[-\pi; \pi]$

---

Exercice 13

---

Résoudre  $\cos(4x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  dans  $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$ .

---

Exercice 14

---

1. Résoudre dans  $[-\pi; \pi]$  l'équation  $\sin x = \frac{1}{2}$       2. Résoudre dans  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  l'équation  $\sin(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

---

Exercice 15

---

1. Résoudre dans  $[-\pi; \pi]$  l'inéquation  $\cos x \leq \frac{1}{2}$ .  
2. Résoudre dans  $[-\pi; \pi]$  l'inéquation  $\sin x \leq \frac{1}{2}$ .  
3. Résoudre dans  $[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$  l'inéquation  $\cos(3x) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

---

Exercice 16

---

1. Résoudre dans  $]-\pi; \pi[$  puis dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\cos x = \frac{1}{2}$   
2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $\cos(3x) \leq -\frac{1}{2}$   
3. Résoudre dans  $]-\pi; \pi[$  puis dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sin x = -\frac{1}{2}$   
4. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\cos(5x) + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$   
5. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $2\sqrt{3}\sin\left(\frac{2x}{3}\right) \geq -3$