CHAPITRE 1

TRIGONOMÉTRIE

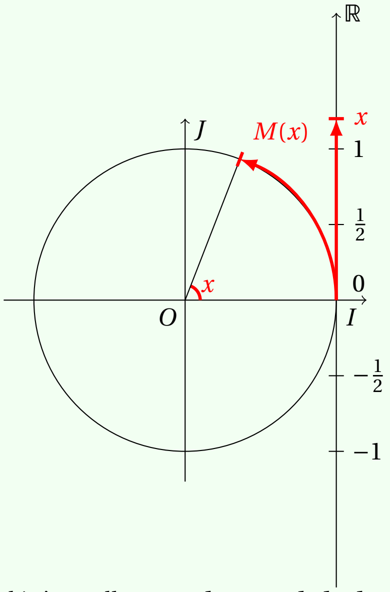
I. Fonctions sinus, cosinus, et tangente

1. Définitions

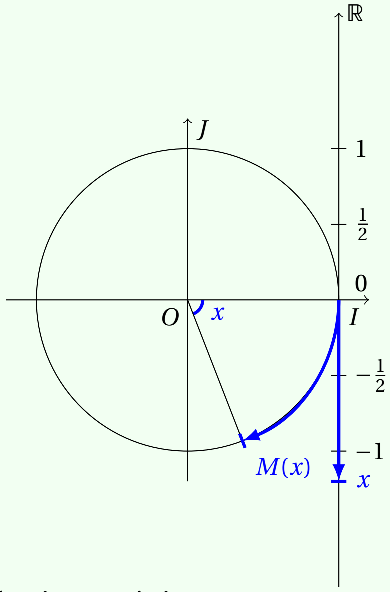
Définition

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O et de rayon 1. À chaque réel x, on associe le point $M(x)$ du cercle trigonométrique tel que $M(x)$ est l'extrémité de l'arc du cercle trigonométrique partant de I et de longueur $|x|$, en tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre lorsque $x \geq 0$, et dans le sens des aiguilles d'une montre lorsque $x < 0$. $M(0)$ est le point I.

Cas $x > 0$:



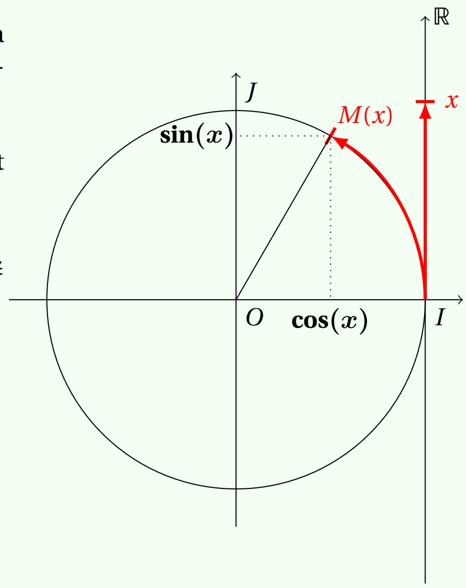
Cas $x < 0$:



Ce procédé s'appelle **enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique**.

Si $M(x)$ est le point associé au réel x par enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique, alors x est une mesure de l'angle orienté $\widehat{IOM}$ qui **n'est pas le degré**. Cette unité d'angle s'appelle le **radian**. On a par exemple $360^o = 2\pi$ rad puisque le périmètre d'un cercle de rayon 1 est 2π.

Pour tout réel x, on considère le point $M(x)$ associé à x par enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique (l'enroulement peut éventuellement faire plusieurs tours de cercle dans un sens ou dans l'autre).



On appelle **cosinus de** x l'abscisse de $M(x)$, et **sinus de** x l'ordonnée du point $M(x)$. On note ces deux nombres $\mathbf{cos}(x)$ et $\mathbf{sin}(x)$.

On appelle tangente de x le nombre défini par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ lorsque $\cos(x) \neq 0$.
$\tan(x)$ est le **coefficient directeur** de la droite $OM(x)$.

Les fonctions $x \longmapsto$ **$\cos x$ et $x \longmapsto \sin x$ sont définies sur** $\mathbb{R}$.

La fonction $x \longmapsto$ **$\tan x$ est définie sur** $\mathbb{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Remarque

On peut enrouler la droite numérique une infinité de fois autour du cercle dans chaque sens, ainsi à partir de $x = 2\pi$ on a fait un tour complet et on recommence un nouveau tour. À chaque valeur réelle de x correspond un unique point sur le cercle, mais à chaque point du cercle correspond une infinité de valeurs réelles (qui diffèrent toutes d'un multiple de 2π).

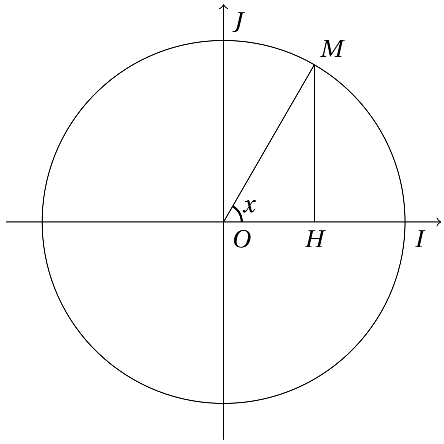
Remarque

Si on note H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, alors ces définitions du sinus et du cosinus coïncide avec la définition du sinus et du cosinus de l'angle x dans le triangle OHM :

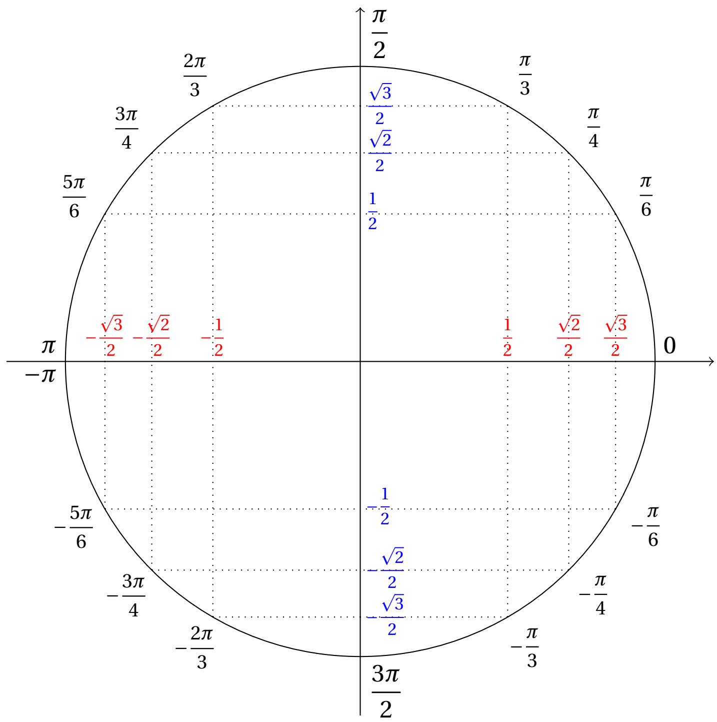
$$\cos(x) = \frac{OH}{OM} = OH$$

$$\sin(x) = \frac{HM}{OM} = HM$$

car ici $OM = 1$.



2. Valeurs remarquables (à connaître par coeur)



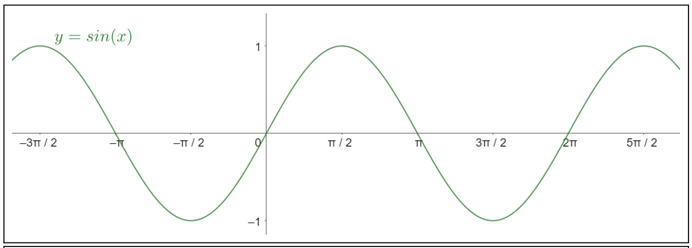
En noir x, en rouge $\cos(x)$, en bleu $\sin(x)$.

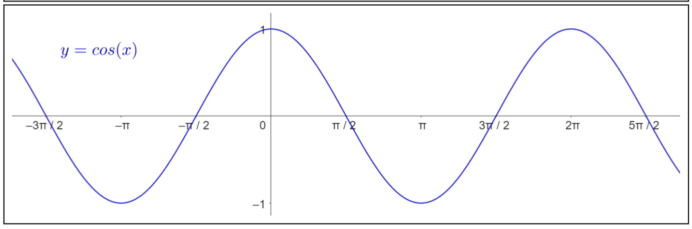
Angle θ en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Angle θ en degrés	0	30	45	60	90	120	135	150	180
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

II. Propriétés

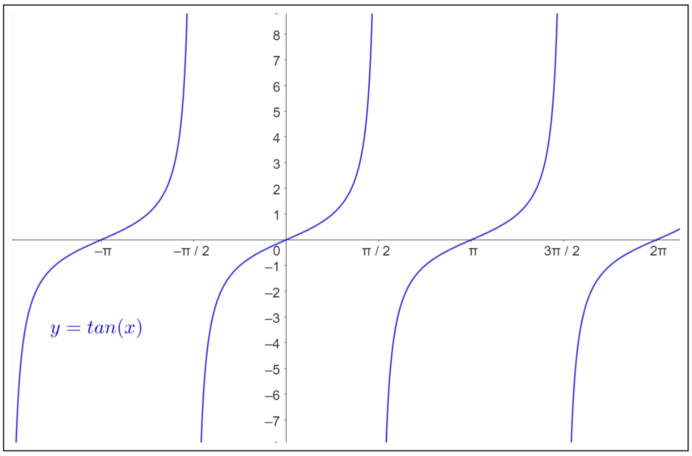
1. Courbes représentatives

a. Fonctions sinus et cosinus





b. Fonction tangente



2. Périodicité

Le motif de la courbe représentative des fonctions sinus et cosinus sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$ se répète sur $\mathbb{R}$. On dit que les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques**. La définition formelle d'une fonction périodique est la suivante :

Définition

Une fonction f définie sur un domaine $\mathcal{D}$ est dite **périodique** s'il existe un réel T, appelé **période de** f, tel que pour tout $x \in \mathcal{D}$

$$x + T \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x)$$

Propriété (admise)

Les fonctions cos et sin sont périodique de période 2π. La fonction tangente est périodique de période π.
Autrement dit on a :

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $\tan(x+\pi) = \tan(x)$

On a aussi, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$,

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $\tan(x+k\pi) = \tan(x)$

Remarque

Il suffit donc de connaître les fonctions sinus et cosinus sur un intervalle de longueur 2π pour les connaître sur $\mathbb{R}$ (par exemple sur $]-\pi;\pi[$ ou sur $]0;2\pi[$).

→ **Exercice de cours n° 1.**

→ **Exercice de cours n° 2.**

3. Parité

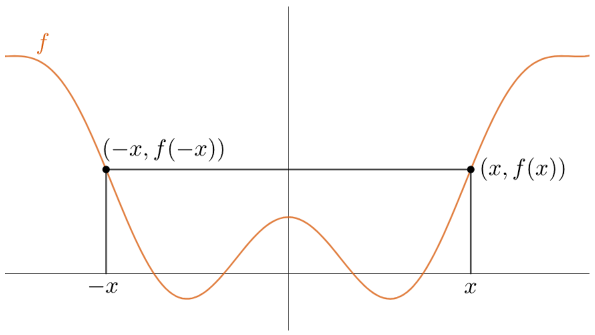
Définition

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}$ tel que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $-x \in \mathcal{D}$ (un tel domaine est dit **symétrique par rapport à 0**). On dit que f est...

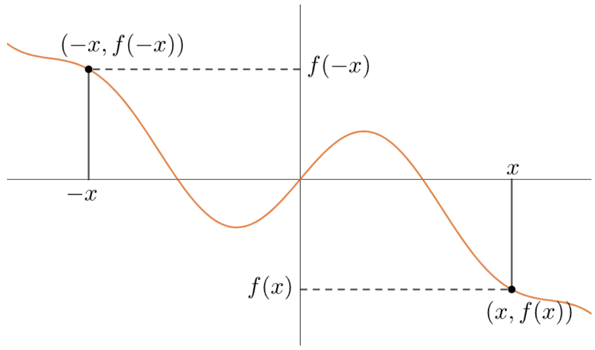
- ...**paire** si pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = f(x)$
- ...**impaire** si pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = -f(x)$

Remarque

Une fonction paire est une fonction dont la courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Une fonction impaire est une fonction dont la courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Une fonction paire



Une fonction impaire

Propriété (admise)

La fonction cosinus est paire sur $\mathbb{R}$, c'est à dire que $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(-x) = \cos(x)$
La fonction sinus est impaire sur $\mathbb{R}$, c'est à dire que $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(-x) = -\sin(x)$

4. Continuité et dérivabilité

Propriété (admise)

Les fonctions $x \longmapsto \sin(x)$ et $x \longmapsto \cos(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
La fonction tangente est continue sur $]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi; \dfrac{\pi}{2}+k\pi[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

→ **Exercice de cours n°3.**

Propriété (admise)

Les fonctions $x \longmapsto \sin(x)$ et $x \longmapsto \cos(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

- $\sin'(x) = \cos x$
- $\cos'(x) = -\sin x$

La fonction $x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi; \dfrac{\pi}{2}+k\pi[$, et

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

→ **Exercice de cours n°4.**

→ **Exercice de cours n°5.**

→ **Exercice de cours n°6.**

III. Formules

Propriété

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

- $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Démonstration : $\cos x$ *et* $\sin x$ *sont l'abscisse et l'ordonnée d'un point du cercle trigonométrique. Tout ces points ont une abscisse et une ordonnée comprise entre* -1 *et* 1 *d'où les deux premiers résultat.*
Si on note H *le projeté orthogonal de* $M(x)$ *sur l'axe des abscisses, où* $M(x)$ *est l'image du réel* x *par enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique, alors le triangle* OMH *est rectangle en* H*. Dans ce triangle, on a* $OM = 1$, $OH = \cos x$ *et* $HM = \sin x$ *donc en appliquant le théorème de Pythagore on obtient* $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. □

Remarque

La notation $\cos^2 x$ signifie $(\cos(x))^2$

→ **Exercice de cours n°7.**

→ **Exercice de cours n°8.**

Propriété d'addition (admise)

Pour tous réels $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Remarque

Les deux dernières formules se déduisent des deux premières.

→ **Exercice de cours n^o 9.**

Conséquence :

Propriété de duplication (admise)

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$

Démonstration : $\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
De même, $\sin(2a) = \sin(a+a) = \sin(a)\cos(a) + \sin(a)\cos(a) = 2\sin a \cos a$ □

→ **Exercice de cours n^o 10.**

IV. Applications

1. Équations trigonométriques

Proposition

Soit $a \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à l'équation $\cos x = a$ dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$

- Si $a > 1$ ou $a < -1$, l'équation n'a pas de solution, $\mathscr{S} = \varnothing$
- Si $a = 1$, l'équation a pour unique solution $x = 0$
- Si $-1 < a < 1$, l'équation a deux solutions, θ et $-\theta$ avec θ tel que $\cos\theta = a$
- Si $a = -1$, l'équation a deux solutions $x = -\pi$ et $x = \pi$.

→ **Exercice de cours n^o 11.**

→ **Exercice de cours n^o 12.**

Proposition

Soit $a \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à l'équation $\sin x = a$ dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$

- Si $a > 1$ ou $a < -1$, l'équation n'a pas de solution, $\mathscr{S} = \varnothing$
- Si $a = 1$, l'équation a pour unique solution $x = \dfrac{\pi}{2}$
- Si $0 < a < 1$, l'équation a deux solutions, θ et $\pi - \theta$ avec θ tel que $\sin\theta = a$
- Si $-1 < a < 0$, l'équation a deux solutions $x = \theta$ et $x = -\pi - \theta$ avec θ tel que $\sin\theta = a$.
- Si $a = -1$, l'équation a pour unique solution $x = -\dfrac{\pi}{2}$

→ **Exercice de cours n^o 13.**

→ **Exercice de cours n^o 14.**

2. Inéquations trigonométriques.

On résout les inéquations de la forme $\cos x \geq a$, $\cos x \leq a$, $\sin x \geq a$ et $\sin x \leq a$ en s'aidant du cercle trigonométrique et en appliquant les propositions de la section précédente.

→ **Exercice de cours n^o 15.**

3. Limites à connaître

Proposition

On a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}=0$

<u>Démonstration :</u> Par définition, $\sin'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h-\sin 0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}$.

Or d'après le cours, $\sin'(0)=\cos(0)=1$

De même pour la seconde limite avec $\cos'(0)=\sin(0)=0$. □

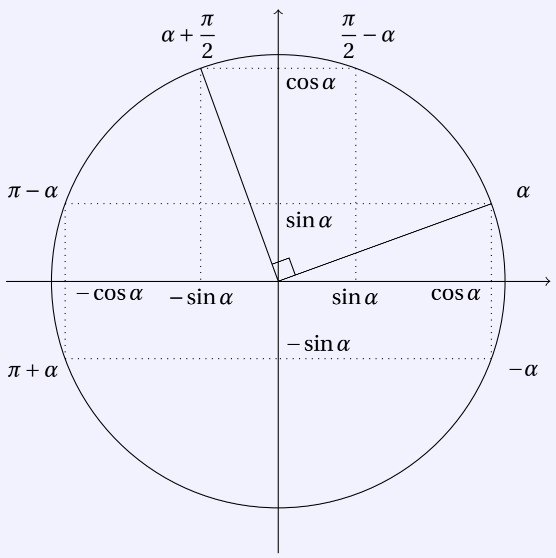
→ Exercice de cours n° 16.

V. Compléments

1. Formules supplémentaires

Propriétés géométriques (admises)

Les proprietes suivantes se démontrent aisément avec les formules d'addition, mais elles se comprennent mieux dans leur sens géométrique illustré ci-contre.



Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ on a :

- $\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$
- $\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$
- $\sin(\alpha+\pi)=-\sin(\alpha)$
- $\cos(\alpha+\pi)=-\cos(\alpha)$
- $\cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha)$
- $\sin(\pi-\alpha)=\sin(\alpha)$
- $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin(\alpha)$
- $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha$
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$

Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ on a

- $\tan(-\alpha)=-\tan(\alpha)$
- $\tan(\alpha+\pi)=\tan(\alpha)$
- $\tan(\pi-\alpha)=-\tan(\alpha)$
- $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan\alpha}$ (pour $\alpha\notin\{0+k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$)
- $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{1}{\tan\alpha}$ (pour $\alpha\notin\{0+k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$)

Conséquences graphiques

Si on trace les courbes des fonctions sinus et cosinus dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$:

- La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées
- La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- La courbe de la fonction sinus est l'image de la courbe de la fonction cosinus par une translation de vecteur $\dfrac{\pi}{2}\vec{i}$

Application : *<u>Démonstration de la périodicité de la fonction tangente :</u> Pour tout* $x\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$ *on a*

$$\tan(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$$

□

2. Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$:

Proposition

Dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$, on a

$$\cos a = \cos b \Longleftrightarrow a = b \quad \text{ou} \quad a = -b$$

Dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$, on a

$$\sin a = \sin b \Longleftrightarrow a = b \quad \text{ou} \quad a = \pi - b$$

Dans $\mathbb{R}$, on a donc

$$\cos a = \cos b \Longleftrightarrow a = b + 2k\pi \quad \text{ou} \quad a = -b + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

et

$$\sin a = \sin b \Longleftrightarrow a = b + 2k\pi \quad \text{ou} \quad a = \pi - b + 2k\pi, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

→ **Exercice de cours n^o 17.**

→ **Exercice de cours n^o 18.**

→ **Exercice de cours n^o 19.**

Exercices de cours

Exercice 1 — **Voir correction**

Calculer $\sin(217\pi)$ et $\cos\left(-\dfrac{35\pi}{4}\right)$

Exercice 2 — **Voir correction**

Déterminer **une** période $T > 0$ de chacune des fonctions suivantes (sans se soucier de leurs ensembles de définition).

1. $f(x) = 4\sin\left(\dfrac{3x}{7}\right)$
2. $g(x) = \cos(2x) - \sin(x)$
3. $h(x) = \cos(3x)\sin(2x)$
4. $k(x) = \dfrac{\cos(12x+1)}{2+\sin^2(8x)}$
5. $m(x) = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
6. $n(x) = \tan(3x)$

Exercice 3 — **Voir correction**

Démontrer qu'il existe un réel $x \in [0;\pi]$ tel que $\cos(x) = \dfrac{\pi^3}{64}$.

Exercice 4 — **Voir correction**

Calculer la dérivée de la fonction $g : x \longmapsto x^5\cos(3x)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

Exercice 5 — **Voir correction**

Calculer la dérivée de la fonction $h : x \longmapsto \sin(\mathrm{e}^x)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 — **Voir correction**

On admet dans chaque cas que la fonction est définie et dérivable sur I. Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I

1. $f(x) = \dfrac{\sin(3x)}{\cos(x)}$, $\quad I = [0;\pi/2[$
2. $g(x) = \ln(3\cos^2(5x))$, $I =]0; \frac{\pi}{10}[$
3. $h(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{x\cos x}}$, $I = \mathbb{R}$
4. $k(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\tan x}}$, $\quad I =]0;\pi/2[$.

Exercice 7 — **Voir correction**

Déterminer la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x\sin x + x^2}{x^2}$ définie sur $]0;+\infty[$.

Exercice 8 — **Voir correction**

Déterminer dans chaque cas la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a.

1. $\dfrac{\cos x}{x}$, $a = -\infty$
2. $\dfrac{\sqrt{x}\sin x - \sqrt{x}\cos x}{x}$, $a = +\infty$.

Exercice 9 — **Voir correction**

En remarquant que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}$, calculer $\cos(\dfrac{\pi}{12})$.

Exercice 10 — **Voir correction**

Calculer $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

Exercice 11 **Voir correction**

Résoudre $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ dans $[-\pi;\pi]$

Exercice 12 **Voir correction**

Résoudre $\cos(4x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}]$.

Exercice 13 **Voir correction**

Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'équation $\sin x = \dfrac{1}{2}$

Exercice 14 **Voir correction**

Résoudre dans $[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}]$ l'équation $\sin(2x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 15 **Voir correction**

1. Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation $\cos x \leq \dfrac{1}{2}$.
2. Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation $\sin x \leq \dfrac{1}{2}$.
3. Résoudre dans $[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}]$ l'inéquation $\cos(3x) \geq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 16 **Voir correction**

Déterminer les limites suivante :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{5x}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(2\pi x)}{x-1}$

Exercice 17 **Voir correction**

Résoudre dans $]-\pi;\pi[$ puis dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$

Exercice 18 **Voir correction**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\cos(3x) \leq -\dfrac{1}{2}$

Exercice 19 **Voir correction**

1. Résoudre dans $]-\pi;\pi[$ puis dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = -\dfrac{1}{2}$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(5x) + \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{2x}{3}\right) \geq -3$

Correction des exercices

Correction de l'exercice 1 : On peut écrire $217 = 216 + 1 = 2 \times 108 + 1$
Ainsi, $\sin(217\pi) = \sin(108 \times 2\pi + \pi) = \sin(\pi) = 0$

De même, on peut écrire $-\dfrac{35\pi}{4} = -\dfrac{32\pi}{4} - \dfrac{3\pi}{4} = -8\pi - \dfrac{3\pi}{4}$
Ainsi, $\cos\left(-\dfrac{35\pi}{4}\right) = \cos\left(-8\pi - \dfrac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Correction de l'exercice 2 :

1. On sait que $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x + 2\pi) = \sin x$
   Ainsi,
   $$\begin{aligned}\sin\left(\frac{3x}{7}\right) &= \sin\left(\frac{3x}{7} + 2\pi\right)\\ &= \sin\left(\frac{3x + 14\pi}{7}\right)\\ &= \sin\left(\frac{3(x + 14\pi/3)}{7}\right)\end{aligned}$$
   On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f\left(x + \dfrac{14\pi}{3}\right) = f(x)$, donc $\boxed{\dfrac{14\pi}{3} \text{ est une période de } f.}$
2. 2π est une période de $\sin(x)$ et π est une période de $\cos(2x)$.
   $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x + 2\pi) = \cos(2x + 4\pi) - \sin(x + 2\pi) = \cos(2x) - \sin(x) = g(x)$
   Ainsi, $\boxed{2\pi \text{ est une période de } g}$
3. $\cos(3x) = \cos(3x + 2\pi) = \cos(3(x + 2\pi/3))$ donc $2\pi/3$ est une période de $\cos(3x)$
   $\sin(2x) = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2(x + \pi))$ donc π est une période de $\sin(2x)$.
   $\boxed{2\pi \text{ est un multiple commun de } \pi \text{ et de } 2\pi/3 \text{ donc c'est une période de } h(x).}$
4. $\cos(12x + 1) = \cos(12x + 1 + 2\pi) = \cos(12(x + \pi/6) + 1)$ donc $\pi/6$ est une période de $\cos(12x + 1)$.
   $\sin(8x) = \sin(8x + 2\pi = \sin(8(x + \pi/4))$ donc $\pi/4$ est une période de $\sin(8x)$.
   $\boxed{\pi \text{ est un multiple commun à } \pi/4 \text{ et } \pi/6 \text{ donc c'est une période de } k.}$
5. $\tan(x + \pi/4) = \tan(x + \pi/4 + \pi)$ car la fonction tangente est périodique de période π
   $\boxed{\pi \text{ est une période de } m}$
6. $\tan(3x) = \tan(3x + \pi) = \tan(3(x + \pi/3))$ donc $\boxed{\pi/3 \text{ est une période de } \tan(3x)}$

Correction de l'exercice 3 : On sait que $3 < \pi < 4$, donc $3^3 < \pi^3 < 4^3$ car la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, $27 < \pi < 64$, donc $0 < \dfrac{27}{64} < \dfrac{\pi^3}{64} < 1$.

Or, $\cos(0) = 1$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, donc $\dfrac{\pi^3}{64} \in \left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right); \cos(0)\right]$.

La fonction cosinus est continue sur $[0; \dfrac{\pi}{2}]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $x \in [0; \dfrac{\pi}{2}]$ tel que $\cos(x) = \dfrac{\pi^3}{64}$.

Correction de l'exercice 4 : $u : x \longmapsto x^5$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 5x^4$
$v : x \longmapsto \cos(3x)$ est de la forme $f(ax+b)$ (avec $f = \cos$, $a = 3$ et $b = 0$), donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $af'(ax+b)$.
Ainsi $v'(x) = 3 \times (-\sin(3x)) = -3\sin(3x)$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\\ &= 5x^4\cos(3x) - 3x^5\sin(3x)\end{aligned}$$

Finalement f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = 5x^4\cos(3x) - 3x^5\sin(3x)}$

Correction de l'exercice 5 : $h = v \circ u$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = \sin x$. On sait que u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = \cos x$. Ainsi, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}h'(x) &= u'(x) \times v' \circ u(x)\\ &\boxed{= e^x \times \cos(e^x)}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6 :

1. On a $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = \sin(3x)$ et $v(x) = \cos(x)$, donc $u'(x) = 3\cos(3x)$ et $v'(x) = -\sin(x)$.
   Ainsi,

$$\begin{aligned}\forall x \in [0, \pi/2[,\ f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}\\ &\boxed{= \frac{3\cos(3x)\cos x + \sin(3x)\sin x}{(\cos(x))^2}}\end{aligned}$$

2. On a $g = u \circ v$ avec $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = 3\cos^2(5x)$.
   On sait que $u'(x) = \dfrac{1}{x}$
   $v(x) = 3w^2$ avec $w(x) = \cos(5x)$ donc

$$v'(x) = 6w'(x)w(x) = -30\sin(5x)\cos(5x)$$

   d'après la formule de duplication du sinus.
   On a donc

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) &= \frac{-30\sin(5x)\cos(5x)}{3\cos^2(5x)}\\ &\boxed{= -10\tan(5x)}\end{aligned}$$

3. $h(x) = u \circ v$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = \exp(x\cos x)$.
   $v(x) = f \circ g$ avec $f(x) = \exp(x)$ et $g(x) = x\cos x$.
   Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ v'(x) = (\cos x - x\sin x)\exp(x\cos x)$$

   On a donc

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) &= \frac{(\cos x - x\sin x)\exp(x\cos x)}{2\sqrt{\exp(x\cos x)}}\\ &\boxed{= \frac{1}{2}(\cos x - x\sin x)\sqrt{\exp(x\cos x)}}\end{aligned}$$

4. $k(x) = \dfrac{1}{v(x)}$ avec $v(x) = \sqrt{\tan x}$.
   $v(x) = u \circ w$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $w(x) = \tan x$.
   $w'(x) = 1 + \tan^2 x$ donc $v'(x) = \dfrac{1 + \tan^2 x}{2\sqrt{\tan x}}$.
   Finalement,

$$\begin{aligned}\forall x \in]0, \pi/2[,\ k'(x) &= \frac{-v'(x)}{(v(x))^2}\\ &= \frac{-\dfrac{1+\tan^2 x}{2\sqrt{\tan x}}}{\left(\sqrt{\tan x}\right)^2}\\ &\boxed{= -\frac{1+\tan^2 x}{2(\tan x)^{3/2}}}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 7 : On a pour tout $x \in]0; +\infty[$, $-1 \leq \sin x \leq 1$. Comme $x > 0$, on a donc

$$-x \leq x\sin x \leq x$$

$$-x+x^2 \leq x\sin x + x^2 \leq x + x^2$$

$$\frac{-x+x^2}{x^2} \leq \frac{x\sin x + x^2}{x^2} \leq \frac{x+x^2}{x^2}$$

car $x^2 > 0$.

$$-\frac{1}{x}+1 \leq \frac{x\sin x + x^2}{x^2} \leq \frac{1}{x}+1$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{1}{x}+1) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}+1) = 1$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sin x + x^2}{x^2} = 1$.

Correction de l'exercice 8 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc pour tout $x \in]-\infty;0[$ on a :

$$-\frac{1}{x} \geq \frac{\cos x}{x} \geq \frac{1}{x}$$

et puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$ on en déduit par le théorème des gendarmes que $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x} = 0}$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc pour tout $x \in]0;+\infty[$ on obtient en multipliant par $\sqrt{x}$:

$$-\sqrt{x} \leq \sqrt{x}\sin x \leq \sqrt{x} \quad \text{et} \quad -\sqrt{x} \leq \sqrt{x}\cos x \leq \sqrt{x}$$

Pour soustraire les deux encadrement on multiplie le 2nd par -1 :

$$\sqrt{x} \geq -\sqrt{x}\cos x \geq -\sqrt{x}$$

puis on additionne les deux :

$$-2\sqrt{x} \leq \sqrt{x}\sin x - \sqrt{x}\cos x \leq 2\sqrt{x}$$

et enfin on divise par x :

$$-\frac{2}{\sqrt{x}} \leq \frac{\sqrt{x}\sin x - \sqrt{x}\cos x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\sin x - \sqrt{x}\cos x}{x} = 0}$

Correction de l'exercice 9 : En appliquant la formule pour $\cos(a-b)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\cos(\frac{\pi}{12}) &= \cos(\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{6}) + \sin(\frac{\pi}{6})\sin(\frac{\pi}{4}) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 10 : On a

$$\begin{aligned}
\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \\
&= 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \\
&= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1
\end{aligned}$$

Comme $\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on en déduit que

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1-\sqrt{2}/2}{2}$$

et

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1+\sqrt{2}/2}{2}$$

donc finalement

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}} \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}}}$$

Correction de l'exercice 11 : On sait que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$. On a donc $\mathscr{S} = \{-\dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{2\pi}{3}\}$ (Faire le dessin)

Correction de l'exercice 12 : On pose $X = 4x$.

$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Longleftrightarrow -\pi \leq 4x \leq \pi \Longleftrightarrow -\pi \leq X \leq \pi$$

On résout donc $\cos(X) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[-\pi;\pi]$.

On sait que $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $X = -\dfrac{\pi}{6}$ ou $X = \dfrac{\pi}{6}$.

Ainsi, $x = \dfrac{X}{4} = -\dfrac{\pi}{24}$ ou $x = \dfrac{\pi}{24}$. $\mathscr{S} = \{-\dfrac{\pi}{24}; \dfrac{\pi}{24}\}$

Correction de l'exercice 13 : On sait que $\sin(\pi/6) = \dfrac{1}{2}$ donc $S = \{\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}\}$

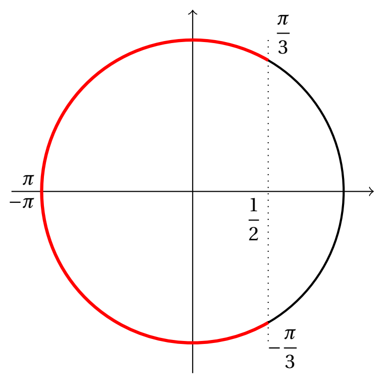
Correction de l'exercice 14 : On pose $X = 2x$.

On a $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \Longleftrightarrow -\pi \leq X \leq \pi$, on résout donc $\sin X = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[-\pi;\pi]$.

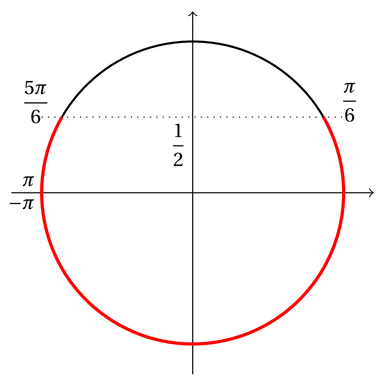
On sait que $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $X = -\dfrac{\pi}{4}$ ou $X = -\dfrac{3\pi}{4}$.

Ainsi $x = -\dfrac{\pi}{8}$ ou $x = -\dfrac{3\pi}{8}$

Correction de l'exercice 15 :

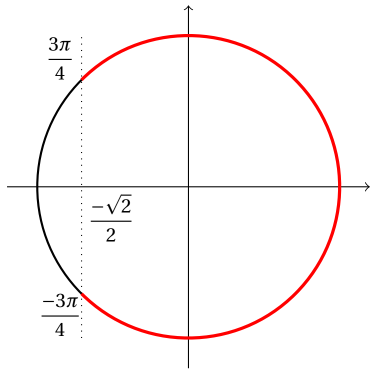
1. 

$\mathscr{S} = [-\pi; -\dfrac{\pi}{3}] \cup [\dfrac{\pi}{3}; \pi]$ (attention au sens d'enroulement de la droite numérique réelle)

2. 

$\mathscr{S} = [-\pi; \dfrac{\pi}{6}] \cup [\dfrac{5\pi}{6}; \pi]$

3. On pose $X = 3x$, $-\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{\pi}{3} \Longleftrightarrow -\pi \leq X \leq \pi$ donc on résout $\cos X \geq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[-\pi;\pi]$.



On trouve $\cos X \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff X \in [-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}] \iff -\frac{3\pi}{4} \leq X \leq \frac{3\pi}{4} \iff -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

Finalement, $S = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

Correction de l'exercice 16 :

1. En posant $X = 3x$, on a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = \lim\limits_{X\to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$ d'après la proposition 3.

   Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3$.
2. De même, on peut écrire $\frac{\sin(2x)}{5x} = \frac{2}{5} \times \frac{\sin(2x)}{2x}$

   En posant $X = 2x$, on a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \lim\limits_{X\to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$, donc par produit on a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{5x} = \frac{2}{5}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \sin(2\pi x) = \sin(2\pi) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$, c'est donc une forme indéterminée.
   En posant $u = x - 1$, on a $\sin(2\pi x) = \sin(2\pi(1+u)) = \sin(2\pi u)$

   Ainsi, $\frac{\sin(2\pi x)}{x-1} = \frac{\sin(2\pi u)}{u}$.

   Or, $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\sin 2\pi u}{u} = \lim\limits_{u\to 0} 2\pi \frac{\sin(2\pi u)}{2\pi u} = \lim\limits_{X\to 0} 2\pi \frac{\sin X}{X}$ en faisant le changement de variable $X = 2\pi u$.

   Ainsi, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin 2\pi x}{x-1} = 2\pi$

Correction de l'exercice 17 : L'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ a deux solutions dans $]-\pi;\pi[$ qui sont $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$.

Ainsi, les solutions de $\cos x = \frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$ sont $S = \{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Correction de l'exercice 18 : On a $\cos(3x) \leq -\frac{1}{2} \iff \cos X \leq -\frac{1}{2}$ avec $X = 3x$.

Dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$,

$$\cos X \leq -\frac{1}{2} \iff X \in \left[-\pi; -\frac{2\pi}{3}[\cup]\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$$

Ainsi, dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos X \leq -\frac{1}{2} \quad &\iff \quad -\pi + 2k\pi \leqslant X \leqslant -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\
&\qquad \text{ou} \quad \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leqslant X \leqslant \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
&\iff \quad -\pi + 2k\pi \leqslant 3x \leqslant -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\
&\qquad \text{ou} \quad \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leqslant 3x \leqslant \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
&\iff \quad -\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \leqslant x \leqslant -\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \\
&\qquad \text{ou} \quad \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\
&\iff \quad \frac{(2k-1)\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{(6k-2)\pi}{9} \\
&\qquad \text{ou} \quad \frac{(6k+2)\pi}{9} \leqslant x \leqslant \frac{(2k+1)\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Finalement, $S = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{(2k-1)\pi}{3}, \frac{(6k-2)\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{(6k+2)\pi}{9}, \frac{(2k+1)\pi}{3}\right]$

Correction de l'exercice 19 :

1. Dans $]-\pi;\pi[$ on a $\sin(x) = -\dfrac{1}{2} \iff x \in \left\{-\dfrac{5\pi}{6}; -\dfrac{\pi}{6}\right\}$ d'où

$$\boxed{S = \left\{-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

2. $\cos(5x) + \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff \cos(5x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   Si $X \in [-\pi;\pi]$ on a $\cos(X) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff X = -\dfrac{3\pi}{4}$ ou $X = \dfrac{3\pi}{4}$. Ainsi dans $\mathbb{R}$ on a $\cos(X) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ X = -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $X = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$.

   Finalement,

$$\begin{aligned}\cos(5x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 5x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 5x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = -\frac{3\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5} \quad \text{ou} \quad x = \frac{3\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\end{aligned}$$

   d'où $\boxed{S = \left\{-\dfrac{3\pi}{20} + \dfrac{2k\pi}{5}\ ;\ x = \dfrac{3\pi}{20} + \dfrac{2k\pi}{5}\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $2\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{2x}{3}\right) \geq -3 \iff \sin\left(\dfrac{2x}{3}\right) \geq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   Dans $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ on a $\sin(X) \geq -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff -\dfrac{\pi}{3} \leq X \leq \dfrac{4\pi}{3}$.

   Dans $\mathbb{R}$ on a donc $\sin(X) \geq -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \leq X \leq \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$

   Ainsi

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{2x}{3}\right) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \frac{2x}{3} \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2} + 3k\pi \leq x \leq 2\pi + 3k\pi\end{aligned}$$

   donc $\boxed{S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\dfrac{\pi}{2} + 3k\pi\ ;\ 2\pi + 3k\pi\right]}$