

Changement de base pour la matrice d'une application linéaire

E et F sont deux \mathbb{R} -e.v. de dimension m et n et $u : E \rightarrow F$ est une application linéaire.

On considère \mathcal{E} et \mathcal{E}' deux bases de E .

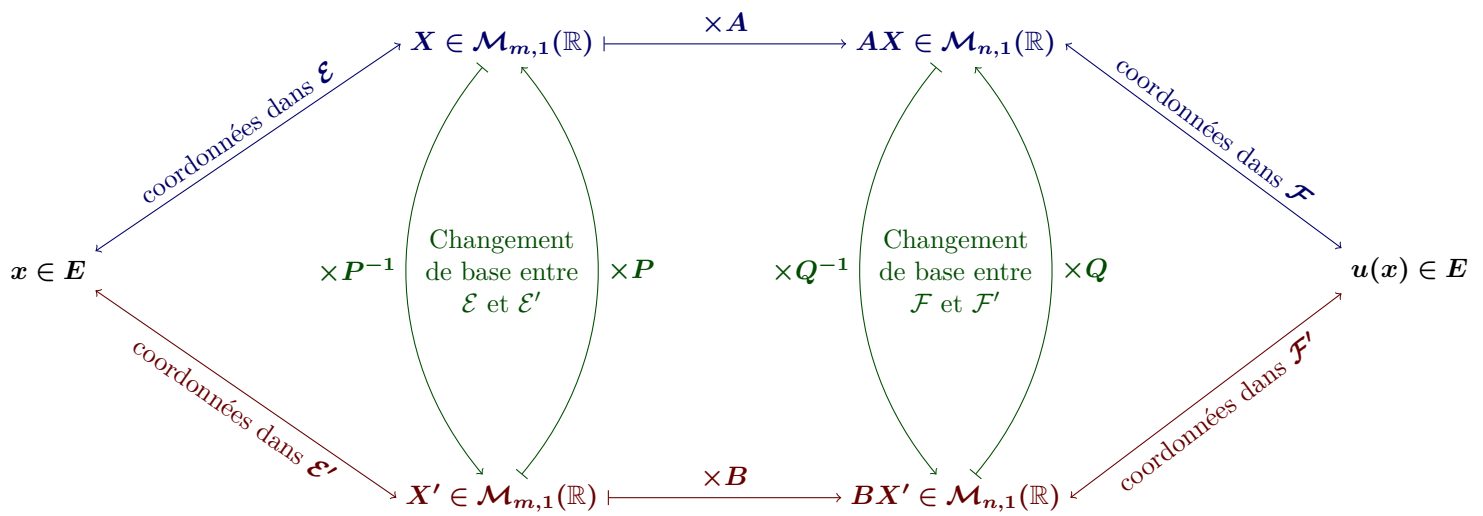
On considère \mathcal{F} et \mathcal{F}' deux bases de F .

On note A la matrice de u dans les base \mathcal{E} et \mathcal{F} . ($A = \text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$)

On note B la matrice de u dans les bases \mathcal{E}' et \mathcal{F}' . ($B = \text{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u)$)

On note P la matrice de passage de \mathcal{E} à \mathcal{E}' . ($P = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \text{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(\text{Id}_E)$)

On note Q la matrice de passage de \mathcal{F} à \mathcal{F}' . ($Q = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'} = \text{Mat}_{\mathcal{F}',\mathcal{F}}(\text{Id}_F)$)



Pour exprimer BX' en fonction de A, P et X' :

- On part d'un vecteur colonne X' représentant un vecteur $x \in E$ dans la base \mathcal{E}'
- On multiplie ce vecteur par P : on obtient le vecteur colonne $X = PX'$ représentant x dans la base \mathcal{E} .
- On multiplie par A : on obtient $AX = APX'$ qui représente $u(x)$ dans la base \mathcal{F}
- On passe dans la base \mathcal{F}' en multipliant le résultat par Q^{-1} : on obtient $Q^{-1}APX' = BX'$ car chaque côté de l'égalité est l'expression de $u(x)$ dans la base \mathcal{F}' .

Puisque pour tout $X' \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ on a $(Q^{-1}AP)X' = BX'$ on en déduit que $B = Q^{-1}AP$.

On retient la formule générale suivante :

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u) = P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} \times \text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) \times P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$$

Changement de base pour la matrice d'un endomorphisme

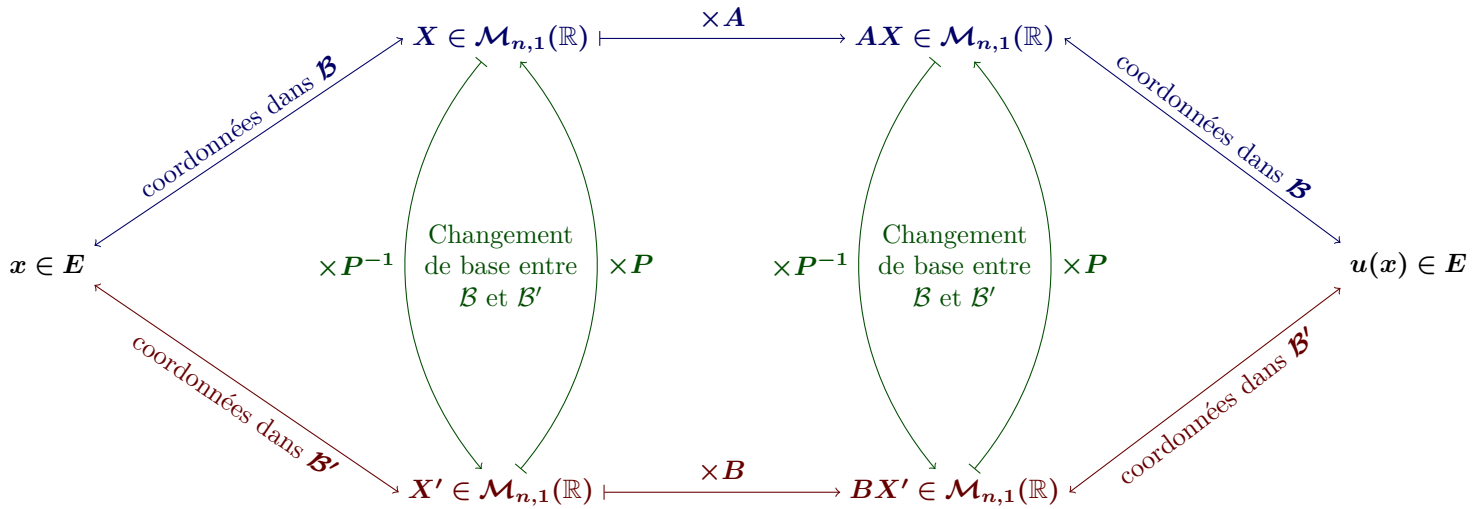
E est un \mathbb{R} -e.v. de dimension n et $u : E \rightarrow E$ est un endomorphisme de E .

On considère \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E .

On note A la matrice de u dans la base \mathcal{B} . ($A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$)

On note B la matrice de u dans le base \mathcal{B}' . ($B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(u)$)

On note P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . ($P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_E)$)



Pour exprimer BX' en fonction de A, P et X' :

- On part d'un vecteur colonne X' représentant un vecteur $x \in E$ dans la base \mathcal{B}'
- On multiplie ce vecteur par P : on obtient le vecteur colonne $X = PX'$ représentant x dans la base \mathcal{B} .
- On multiplie par A : on obtient $AX = APX'$ qui représente $u(x)$ dans la base \mathcal{B}
- On repasse dans la base \mathcal{B}' en multipliant le résultat par P^{-1} : on obtient $P^{-1}APX' = BX'$ car chaque côté de l'égalité est l'expression de $u(x)$ dans la base \mathcal{B}' .

Puisque pour tout $X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a $(P^{-1}AP)X' = BX'$ on en déduit que $B = P^{-1}AP$.

On retient la formule générale suivante :

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \times P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}}$$