Programme de khôlle de maths n° 9

Semaine du 28 Novembre

Cours

Chapitre 6 : Analyse réelle

- Nombres réels, inégalités, intervalles, valeur absolue, partie entière, voisinage d'un nombre, voisinage de $\pm\infty$
- Identités remarquables, identité $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$, identité $x^n - y^n = (x-y)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1}$
- Inégalités triangulaires $|x+y| \leq |x| + |y|$ et $||x| - |y|| \leq |x-y|$.
- Majorant/minorant, maximum/minimum, borne supérieure/borne inférieure.
- Propriété de la borne supérieure, application aux suites croissantes majorées
- Fonctions réelles de la variables réelle
- Signe, variations, allure de la courbe de : fonctions affines, fonctions polynômes de degré 2, fonction racine carrée, fonction inverse, fonctions trigonométriques cos, sin et tan (pas encore arctan), fonctions exponentielles et logarithme.
- Puissance généralisée $\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R},\ a^b := \mathrm{e}^{b \ln a}$
- Limites de fonctions
- Négligeabilité, équivalence de fonctions au voisinage d'un réel ou de $\pm\infty$.
- Comparaisons usuelles entre $\mathrm{e}^{\alpha x}$, x^β, $(\ln x)^\gamma$
- DL à l'ordre 1 au voisinage de 0 de $\sin x$, $\cos x$, tan, e^x, $\ln(1+x)$, $\sqrt{1+x}$, $(1+x)^\alpha$, $\dfrac{1}{1-x}$
- Continuité, prolongement par continuité
- Si (u_n) converge vers ℓ et que f est continue en ℓ, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$
- Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire pour les fonctions strictement monotones.
- Théorème de la bijection
- Fonction arctangente, allure de la courbe, $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Questions de cours et exercice

- **Questions de cours**
  - Démontrer que si (u_n) converge vers ℓ et que f est continue en ℓ, alors $f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$.
  - Démontrer l'identité $x^n - y^n = (x-y) \times \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1}$
  - En rappelant que $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n+1}{k+1}$, démontrer l'égalité $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.
- **Exercices vus en classe**

  1) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a

  a) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{3x} - x^5}{(\mathrm{e}^x + 2)^3}$, $\quad a = +\infty$

  b) $f(x) = \sqrt{x}^{\ln x}$, $\quad a = 0$

  c) $f(x) = \dfrac{1}{x} \times \mathrm{e}^{-1/x^2}$, $\quad a = 0^+$

  d) $f(x) = x(\mathrm{e}^{2/x} - 1)$, $\quad a = +\infty$

  e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\ln(x)}{x^{1/4}}$, $\quad a = 0$

  f) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$, $\quad a = +\infty$

  g) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{x+3}$, $a = +\infty$

  h) $f(x) = \ln(\sin(\sqrt{\pi x})) - \ln(\ln(1+2x))$, $\quad a = 0$

  2) Montrer que $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-1/x^2}$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

3) $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle à préciser, et déterminer f^{-1}.

3) Montrer que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle

4) Montrer que la fonction $f : x \mapsto x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$

5) Suite implicite : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = 1 - \dfrac{x}{2} - x^n$

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique x_n tel que $f_n(x_n) = 0$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n) > 0$.

c) En déduire que (x_n) est croissante et qu'elle converge vers une limite ℓ.