

---

# Programme de khôlle de maths n° 14

---

Semaine du 22 Janvier

## Cours

### Chapitre 9 : Matrices

- Matrices  $n \times m$ . Opérations, transposée.
- Matrices carrées : matrice identité, matrices diagonales, matrices triangulaires supérieures/inférieures
- Produit de matrices diagonales, formule du binôme pour des matrices qui commutent.
- Trace d'une matrice carrée
- Matrices inversibles. Si  $A$  et  $B$  inversibles alors  $AB$  inversible et  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ . Si  $A$  est inversible alors  ${}^tA$  aussi et  $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ .
- Une matrice triangulaire supérieure/inférieure ou une matrice diagonale est inversible ssi ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
- Déterminant d'une matrice  $2 \times 2$ .
- Systèmes linéaires de  $n$  équations à  $p$  inconnues, matrice  $n \times p$  associée à ce système.
- Système homogène, solution triviale.
- Méthode du pivot de Gauss pour la résolution d'un système linéaire. Opérations élémentaires sur les lignes. Forme échelonnée d'un système
- Rang d'un système, lien entre le rang et le nombre de solutions
- Si  $S$  est un système de  $n$  équations et  $n$  inconnues tel que  $S \iff AX = Y$ , alors  $S$  admet une unique solution ssi  $A$  est inversible et la solution est donnée par  $X = A^{-1}Y$ .  $A$  est inversible d'inverse  $B$  ssi pour tout  $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $AX = Y \iff X = BY$ .
- $AX = 0$  admet des solutions non triviales si  $n < m$  ou si  $A$  est carrée et non inversible
- Rang d'une matrice = rang d'un système associé à cette matrice
- Matrice échelonnée en ligne, algorithme de Gauss pour déterminer le rang d'une matrice.  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est inversible ssi  $\text{rg}(A) = n$ .

## Questions de cours

- Montrer que pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $IA = A$  et  $AI = A$ .
- Montrer que la matrice identité de taille  $n$  est l'unique matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX = X$ .
- Montrer que pour tout  $A, B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

## Exercices

1. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures/inférieures est une matrice triangulaire supérieure/inférieure.
2. Si  $\text{tr}({}^tAA) = 0$ , que peut-on dire de  $A$ ?
3. Déterminer toutes les matrices  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que  $A = A^{-1}$ .
4. Soient  $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  telles que pour tout  $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ ,  $AX = BX$ . Montrer que  $A = B$ .