$\star$

Exercice 1 — Voir correction

Étudier les variations de chacune des fonctions suivantes, ainsi que leurs limites aux bornes de leurs ensembles de définition.

1) $f(x) = \cos x - x$ définie sur $\mathbb{R}$
2) $g(x) = -3\sin(x/2)$ définie sur $[0, 2\pi]$
3) $h(x) = \cos^2(2x)$ définie sur $[0, \pi]$
4) $k(x) = \ln(\sin x)$ définie sur $]0, \pi[$.
5) $m(x) = x - \dfrac{x^3}{6} - \sin x$ définie sur $\mathbb{R}_+$

$\star$

Exercice 2 — Voir correction

Dans chaque cas, résoudre dans I l'équation ou l'inéquation :

1) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$, $I = [0, 2\pi]$
2) $\tan x = -1$, $I =]-\pi/2, \pi/2[$
3) $\tan x = 0$, $I =]5\pi/2, 7\pi/2[$
4) $\sin(3x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $I = [-\pi, \pi]$
5) $\sin(2x) > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $I = [-\pi, 3\pi]$
6) $\cos x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $I = [-3\pi, \frac{\pi}{6}]$

$\star$

Exercice 3 — Voir correction

1) Montrer que $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(x - \dfrac{\pi}{4})$
2) En déduire les solutions de $\cos 2x + \sin 2x \geq -1$ sur $\mathbb{R}$

$\star\ \star$

Exercice 4 — Voir correction

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\cos(2x) = \cos x$
2) $\cos(2x) = \sin x$
3) $\sin(2x) = \cos x$
4) $\cos(3x) = \cos x$

$\star\ \star$

Exercice 5 — Voir correction

Résoudre l'équation $\cos x + \sin x = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ dans $\mathbb{R}$.

$\star\ \star\ \star$

Exercice 6 — Voir correction

1) Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel x on a :

$$\sin\left(2^{n+2}x\right) = 2\sin\left(2^{n+1}x\right) - 4\sin\left(2^{n+1}x\right)\sin\left(2^{n}x\right)^2$$

2) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_{n+1} \times (u_n)^2 \quad ; \quad u_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad u_1 = 1$$

Montrer que (u_n) est une suite stationnaire (i.e. à partir d'un certain rang N, on a $u_{n+1} = u_n$). Quelle est alors la valeur limite de la suite (u_n) ?

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\sin x - 1$$

Or, on sait que $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, donc $-2 \leqslant -\sin x - 1 \leqslant 0$.

$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}.}$

De plus, $f(x) = -x\left(1 - \dfrac{\cos x}{x}\right)$, et $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $-\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\cos x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$, on en déduit d'après le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{x} = 0$. De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cos x}{x} = 0$.

Par somme et par produit de limites, on en conclut que

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

2) On a $\forall x \in [0, 2\pi]$, $g'(x) = -\dfrac{3}{2}\cos(x/2)$.

$x \in [0, 2\pi] \iff \dfrac{x}{2} \in [0, \pi]$.

Pour $X \in [0, \pi]$, on a $\cos X \geq 0 \iff X \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$. Ainsi, $\cos(x/2) \geq 0 \iff \dfrac{x}{2} \in [0, \pi/2] \iff x \in [0, \pi]$.

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		π		2π
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

3) On a $\forall x \in [0, \pi]$, $h'(x) = -4\sin(2x)\cos(2x) = -2\sin(4x)$ d'après la formule de duplication du sinus.

Or, $0 \leq x \leq \pi \iff 0 \leq 4x \leq 4\pi$.

Sur l'intervalle $[0, 4\pi]$, $\sin X \geq 0 \iff X \in [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi]$ d'après la courbe représentative de la fonction sinus.

On en déduit que $\sin(4x) \geq 0 \iff 4x \in [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \iff x \in [0, \dfrac{\pi}{4}] \cup [\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}]$.

Finalement, on a le tableau de variations suivant

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

4) $k = \ln u$ avec $u(x) = \sin x$ donc $k' = \dfrac{u'}{u}$.

$$k'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Or, $\forall x \in]0, \pi[,\ \sin x > 0$, et $\cos x \geq 0 \iff x \in [0, \pi/2]$

De plus, $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \ln X = -\infty$, donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(\sin x) = -\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to\pi} \ln(\sin x) = -\infty$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$k'(x)$	$+$	0	$-$
$k(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\searrow$ $-\infty$

5) On a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ m'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ m''(x) = -x + \sin x$$

et enfin

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ m'''(x) = -1 + \cos x$$

Comme, $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \cos x \leq 1$, on a $-2 \leq -1 + \cos x \leq 0$, donc m'' est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $m''(0) = 0$, on en conclut que $m''(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
Ainsi, m' est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, et on a aussi $m'(0) = 0$, ce qui permet d'en déduire que $m'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
Finalement, m est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, on peut majorer $m(x)$ par $m(x) \leq x - \dfrac{x^3}{6} + 1$ qui tend vers $-\infty$, donc par théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} m(x) = -\infty$. On en déduit le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$m'(x)$	$-$	
$m(x)$	0 $\searrow$	$-\infty$

Correction de l'exercice 2 :

1) Dans $[0; 2\pi]$, $\cos x = -\frac{1}{2} \iff x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = -\frac{2\pi}{3}$. $\boxed{S = \left\{ -\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3} \right\}}$

2) $\tan x = -1 \iff \dfrac{\sin x}{\cos x} = -1 \iff \cos x \neq 0$ et $\sin x = -\cos x$. Il n'y a que sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$ que sin et cos ont un signe opposé. De plus, sin est strictement croissante sur cet intervalle et cos est strictement décroissante. On pose $f(x) = \sin x + \cos x$, dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ avec $f'(x) = \cos x - \sin x$ pour tout x dans cet intervalle. Or $\cos x \geq 0$ et $-\sin x \geq 0$ sur cet intervalle et elles ne s'annulent jamais simultanément, donc $f'(x) > 0$ sur cet intervalle. f est donc strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$ et $f(0) = 1$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires f s'annule une et une seule fois sur cet intervalle. De plus on sait que $\sin \frac{\pi}{4} = -\cos \frac{-\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ est l'unique solution.}}$

3) $\tan x = 0 \iff \sin x = 0 \iff x = \dfrac{6\pi}{2} = 3\pi$. Donc $\boxed{S = \{3\pi\}}$

4) Commençons par résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$\sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff 3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$
$$\iff x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

On ne retient que les solutions qui sont dans $[-\pi; \pi]$, on trouve :

$$x \in [-\pi, \pi] \quad \text{et} \quad \sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x \in \left\{-\frac{5\pi}{9}; \frac{-4\pi}{9}; \frac{\pi}{9}; \frac{2\pi}{9}; \frac{7\pi}{9}; \frac{8\pi}{9}\right\}$$

$$\boxed{S = \left\{-\frac{5\pi}{9}; \frac{-4\pi}{9}; \frac{\pi}{9}; \frac{2\pi}{9}; \frac{7\pi}{9}; \frac{8\pi}{9}\right\}}$$

5) Dans $\mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}\sin(2x) > \frac{\sqrt{2}}{2} &\iff \frac{\pi}{4} + 2k\pi < 2x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}\\ &\iff \frac{\pi}{8} + k\pi < x < \frac{3\pi}{8} + k\pi\end{aligned}$$

On ne retient que les solutions qui sont dans $[-\pi; 3\pi]$ et on trouve

$$\boxed{S = \left]\frac{-7\pi}{8}; \frac{-5\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{9\pi}{8}; \frac{11\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{17\pi}{8}; \frac{19\pi}{8}\right[}$$

6) Dans $[-\pi; \pi]$, $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x \in [-\pi; -\frac{\pi}{4}] \cup [\frac{\pi}{4}; \pi]$.

Par périodicité, on en déduit que sur $[-3\pi; \frac{\pi}{6}]$, $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x \in [-3\pi; -\frac{9\pi}{4}] \cup [-\frac{7\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}] \cup [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}]$

Correction de l'exercice 3 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \cos x \cos(\pi/4) + \sin x \sin(\pi/4)\\ &= \cos x \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$.

2) D'après la question 1 on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cos 2x + \sin 2x \geq -1 &\iff \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq -1\\ &\iff \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ &\iff \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

D'après les variations et les valeurs remarquables de la fonction cosinus, on sait que :

$$\cos X \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq X \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

donc

$$\begin{aligned}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x \leq \pi + 2k\pi\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi\end{aligned}$$

$$\iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4}+k\pi ; \frac{\pi}{2}+k\pi\right]$$

Finalement l'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4}+k\pi ; \frac{\pi}{2}+k\pi\right]}$$

Correction de l'exercice 4 :

1) On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 -1$
On a donc

$$\cos(2x) = \cos x \iff 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

En posant $X = \cos x$, l'équation devient $2X^2 - X - 1 = 0$.
L'équation $2X^2 - X - 1 = 0$ a deux solutions dans $\mathbb{R}$: $X = 1$ et $X = -\dfrac{1}{2}$
Ainsi, $\cos x = 1$ ou $\cos x = -\dfrac{1}{2}$, donc $x \in \{0+2k\pi, \dfrac{2\pi}{3}+2k\pi, -\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$$\boxed{S = \left\{0+2k\pi, \frac{2\pi}{3}+2k\pi, -\frac{2\pi}{3}+2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

2) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$ donc

$$\begin{aligned}\cos 2x = \sin x &\iff 1 - 2\sin^2 x = \sin x\\ &\iff 0 = 2\sin^2 x + \sin x - 1\end{aligned}$$

On pose $X = \sin x$ et on résout $2X^2 + X - 1 = 0$. On trouve $X = -1$ ou $X = \dfrac{1}{2}$, donc $\sin x = -1$ ou $\sin x = \dfrac{1}{2}$. Ainsi

$$\boxed{S = \left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{5\pi}{6}+2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

3) $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, donc

$$\begin{aligned}\sin(2x) = \cos x &\iff 2\sin x\cos x = \cos x\\ &\iff \cos x(2\sin x - 1) = 0\\ &\iff \cos x = 0 \quad \text{ou} \quad \sin x = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

On en conclut que les solutions sont

$$\boxed{S = \left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

4) Commençons par exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$:

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(2x+x)\\ &= \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x\\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin^2 x\cos x\\ &= \cos^3 x - (1-\cos^2 x)\cos x - 2(1-\cos^2 x)\cos x\\ &= \cos^3 x - \cos x + \cos^3 x - 2\cos x + 2\cos^3 x\\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\cos(3x) = \cos x &\iff 4\cos^3 x - 3\cos x = \cos x \\
&\iff 4\cos^3 x - 4\cos x = 0 \\
&\iff 4\cos x(\cos^2 x - 1) = 0 \\
&\iff 4\cos x(\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0 \\
&\iff \cos x = 0 \quad \text{ou} \quad \cos x = 1 \quad \text{ou} \quad \cos x = -1
\end{aligned}$$

On trouve donc

$$\boxed{S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, 0 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

Correction de l'exercice 5 : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(x-\theta) = \cos x \cos\theta + \sin x \sin\theta$. En posant $\theta = \frac{\pi}{4}$, comme on a $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}/2$ on obtient

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$$

On a donc $\cos x + \sin x = 1 \iff \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Or, dans $[-\pi, \pi]$ on a $\cos X = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff X \in \{\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\}$ donc dans $\mathbb{R}$ on a

$$\cos X = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff X \in \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Finalement, dans $\mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
\cos x + \sin x = 1 &\iff x - \frac{\pi}{4} \in \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\
&\iff x \in \{0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\sin(2^{n+2}x) &= \sin(2 \times 2^{n+1}x) \\
&= 2\sin(2^{n+1}x)\cos(2^{n+1}x) \\
&= 2\sin(2^{n+1}x)\cos(2 \times 2^n x) \\
&= 2\sin(2^{n+1}x)(\cos^2(2^n x) - \sin^2(2^n x)) \\
&= 2\sin(2^{n+1}x)(1 - 2\sin^2(2^n x)) \\
&\boxed{= 2\sin(2^{n+1}x) - 4\sin(2^{n+1}x)\sin^2(2^n x)}
\end{aligned}$$

2) La suite (u_n) vérifie la même relation de récurrence double que la suite (v_n) définie par $v_n(x) = \sin(2^n x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si $u_0 = \sin(2^0 x)$ et $u_1 = \sin(2^1 x)$, alors on aura $u_n = \sin(2^n x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Il suffit de prendre $x = \frac{\pi}{4}$ pour avoir $\sin(2^0 x) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = u_0$, et $\sin(2^1 x) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 = u_1$.
On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin\left(2^n \frac{\pi}{4}\right)$.
Or, pour $n \geq 2$, 2^n est un multiple de 4 donc $2^n\frac{\pi}{4}$ est un multiple de π. On a $\sin(k\pi) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ donc $u_n = \sin(2^n\frac{\pi}{4}) = 0$ pour tout $n \geq 2$.
Ainsi, (u_n) est stationnaire égale à 0 à partir du rang $n = 2$, sa limite est donc 0.