Programme de khôlle de maths n$^{\text{o}}$ 6

Semaine du 7 Novembre

Cours

Chapitre 5 : Suites numériques

- Suites arithmétiques, suites géométriques, suites arithmético-géométrique
- Suite récurrente linéaire d'ordre 2 (cas $\Delta > 0$ et $\Delta = 0$, le cas $\Delta < 0$ sera travaillé au moment où on fera les nombres complexes).
- Limite finie et infinie d'une suite, définitions avec les quantificateurs à connaitre
- Limites de référence n^α, $\dfrac{1}{n^\alpha}$, $\sqrt{n}$, e^n, e^{-n} $\ln(n)$, q^n
- Unicité de la limite, passage à la limite dans une égalité ou une inégalité
- Opérations sur les limites
- Suites extraites (u_{n+1}), (u_{2n}) et (u_{2n+1}) : si (u_n) converge alors ces trois suites convergent (admis).
- Si f est continue en ℓ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$. (la définition de la continuité n'est pas à connaitre mais il faut connaitre les fonctions continues de référence et les opérations qui préservent la continuité).
- Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$: aucune théorie à connaitre mais il faut savoir retrouver les résultats suivants :
  - ▹ Si f est définie sur I et que I est stable par f (c'est à dire $f(I) \subset I$) et que $u_0 \in I$, alors (u_n) est bien définie.
  - ▹ Si de plus f est croissante sur I, alors $u_0 \leq u_1 \Rightarrow (u_n)$ croissante et $u_0 \geq u_1 \Rightarrow (u_n)$ décroissante
  - ▹ Si (u_n) converge vers un réel ℓ et que f est continue en ℓ alors $\ell = f(\ell)$.
- Théorèmes de comparaison
- Suites adjacentes
- Comparaison asymptotiques : notation de Landau pour la négligeabilité, équivalence, croissances comparées de référence.
- Soit P un polynôme. $P(n)$ est équivalent à son terme de plus haut degré lorsque $n \to +\infty$.
- Équivalents usuels à connaître
  Si (u_n) est une suite **qui converge vers 0**, alors
  - $\sin(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$
  - $\cos(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} 1$
  - $\ln(1+u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$
  - $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$

  De façon équivalente, on a
  - $\sin(u_n) \underset{n\to\infty}{=} u_n + o(u_n)$
  - $\cos(u_n) \underset{n\to\infty}{=} 1 + o(u_n)$
  - $\ln(1+u_n) \underset{n\to\infty}{=} u_n + o(u_n)$
  - $\mathrm{e}^{u_n} \underset{n\to\infty}{=} 1 + u_n + o(u_n)$

Questions de cours et exercice

- **Questions de cours**
  - Pas de questions de cours cette semaine
- **Exercices vus en classe**
  - Montrer uniquement à l'aide de la définition de la limite que $u_n = \sqrt{n+3}$ tend vers $+\infty$

- Limite de $\dfrac{n^2+n}{3n+5}$
- On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{2u_n+1}{u_n+1}$.

  a) Montrer que $f : x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x+1}$ est définie et dérivable sur $[1;+\infty[$ et étudier ses variations.

  b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$

  c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
- Étude des suites $\begin{cases} u_0 = 9 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 3}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = -2u_n + 5 \end{cases}$
- (u_n) définie par $u_1 = a \in]0;+\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k u_k}{k}$.

  1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $3^n \geq n+2$
  2. Montrer par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq an$
  3. En déduire la limite de (u_n).
- On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \dfrac{5u_n + 2v_n}{7} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 &= 3 \\ v_{n+1} &= \dfrac{2u_n + 5v_n}{7} \end{cases}$$

  1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$
  2. En déduire que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante.
  3. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.