$\star\star$

## Exercice 1 — Voir correction

Calculer les développements limités suivants

1) DL à l'ordre 3 en 0 de $e^{\sin x}$
2) DL à l'ordre 3 en 0 de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$
3) DL à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{1}{1+e^x}$
4) DL à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{\sin(x)}{e^x}$

$\star\star$

## Exercice 2 — Voir correction

Déterminer les limites suivantes à l'aide de développements limités

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2^{1/x}+3^{1/x}-5^{1/x})^x$
2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 5\pi x}{\sin 4\pi x}$
4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

$\star$

## Exercice 3 — Voir correction

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x\,e^x - \sin(x) - x^2}{\ln(1+x) - x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
2) Donner un développement limité d'ordre 2 en 0 de $f$.
3) Montrer que $f$ est prolongeable par continuité en 0. On appelle $g$ ce prolongement.
4) Montrer que $g$ est dérivable en 0, et déterminer $g'(0)$.
5) Déterminer l'équation de la tangente $T$ en 0 au graphe $\Gamma$ de $g$ et préciser les positions relatives de $\Gamma$ et de $T$ au voisinage de 0

$\star$

## Exercice 4 — Voir correction

On considère la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et préciser $f'(0)$.
3) Montrer que $f$ n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$\star$

## Exercice 5 — Voir correction

1) Soit $f$ la fonction réelle de la variable réelle définie par $f(x)=\sqrt{x^2-9x+8}$.
   Après avoir étudier l'ensemble de définition de $f$, déterminer deux asymptotes oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ à $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de $f$.
2) Mêmes questions avec la fonction $g$ définie par $g(x)=x\exp\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)$.

$\star\star$

## Exercice 6 — Voir correction

Soit $n$ un entier pair et soit $P : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}$. Montrer que $P$ n'a pas de racine multiple.

$\star$

## Exercice 7 — Voir correction

Soit $P$ un polynôme à coefficients réels.

1) Montrer que si $\lambda$ est une racine complexe de $P$, alors $\overline{\lambda}$ est racine de $P$ avec la même multiplicité que $\lambda$.
2) Supposons que toutes les racines réelles de $P$ soient de multiplicité paire. Montrer que $n$ est pair.

⋆ ⋆

**Exercice 8** **Voir correction**

**(ENS 2021)** On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$.

1) Justifier que $(u_n)$ est bien définie et étudier son sens de variations.
2) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$ et $w_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$.

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\ln(n+1)}{\mathrm{e}} \leq v_n$ et $0 \leq w_n \leq \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
3) En déduire la limite de la suite $(u_n)$
4) On cherche maintenant à obtenir un résultat plus précis.
   a) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x \leq I$
   c) En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

⋆ ⋆ ⋆

**Exercice 9** **Voir correction**

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

1) Donner l'ensemble $D$ des réels pour lesquels cette intégrale a un sens.
2) Montrer que $f$ est dérivable sur $D$ et que sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$. En déduire les variations de $f$.
3) Soit $g$ la fonction définie par $g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1}$. Montrer que $f(x) - g(x)$ tend vers 0 quand $x$ tend vers 1, et en déduire la limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers 1.
4) On prolonge alors $f$ par continuité en 1 (on note encore $f$ ce prolongement). Étudier la dérivabilité de $f$ en 1.

⋆ ⋆ ⋆

**Exercice 10** **Voir correction**

Soit $f$ une fonction définie et continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$, et vérifiant $f \circ f = f$.
On note $a = \min\{f(x)\ ,\ x \in [0,1]\}$ et $b = \max\{f(x)\ ,\ x \in [0,1]\}$.

1) Justifier l'existence de $a$ et de $b$.
2) Quelle est la restriction de $f$ à $[a,b]$ ?
3) Quelles sont toutes les fonctions non constantes vérifiant toutes les hypothèses ci-dessus ? On pourra considérer les valeurs de $f'(a)$ et de $f'(b)$.
4) Quelles sont toutes les fonctions $f$ continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ vérifiant $f \circ f = f$ ?

## Le coin des Khûbes

⋆ ⋆ ⋆

**Exercice 11** **Voir correction**

Soit $f$ la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

1) Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$
2) Justifier que la restriction de $f$ à $]0;+\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ il existe un polynôme $P_n$ tel que

$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x}$$

4) En déduire que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

⋆⋆

**Exercice 12** — **Voir correction**

**(D'après ESCP 1994)** Pour tout entier naturel $n$, on pose

$$u_n = \int_0^1 x^n \, \mathrm{e}^{1-x} \, \mathrm{d}x$$

1) Calculer $u_0$ et $u_1$.
2) a) Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $\dfrac{1}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
   b) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
3) a) Exprimer, pour tout $n \geq 1$, $u_n$ en fonction de $u_{n-1}$ et de $n$.
   b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = n!\left(\mathrm{e} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$
4) Soit $a$ un nombre réel et soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par les conditions :

$$v_0 = a \quad \text{et pour tout entier } n \geq 1, \quad v_n = nv_{n-1} - 1$$

   Montrer que si $a \neq u_0$, la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est divergente.
5) a) Montrer que, pour tout entier naturel $n$,

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{u_{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

   b) En déduire qu'il existe deux constantes $c_1$ et $c_2$, que l'on déterminera, telles qu'on ait

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

## Correction des exercice

### Correction de l'exercice 1 :

1) À l'ordre 3 au voisinage de 0 on a $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$ et $\mathrm{e}^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{6} + u^3\varepsilon(u)$.
On compose ces deux DL en tronquant tous les termes d'ordre $\geq 4$ :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3\right) \\
&= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\
&\boxed{= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)}
\end{aligned}$$

**Remarque :** le terme d'ordre 3 est nul dans le DL de $\mathrm{e}^{\sin x}$ (tout comme le terme d'ordre 2 est nul dans le DL de $\sin x$, on peut tout de même écrire $\sin x = x + o(x^2)$).

2) $\forall x \neq 0$, $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)$. Or $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + o(x^4)$ donc $\dfrac{1}{x}\ln(1+x) = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + o(x^3)$ est un DL de $\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$ à l'ordre 3.

Si on retire 1 à cette epression elle tend vers 0 en 0 et en composant par le DL $\exp(u) = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{6} + o(u^3)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x) - 1\right) &= 1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^3 + o(x^3) \\
&= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{1}{8}x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3) \\
&\boxed{= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + o(x^3)}
\end{aligned}$$

d'où finalement en multipliant par e : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}}{2}x + \dfrac{11\,\mathrm{e}\,x}{24}x^2 - \dfrac{7\,\mathrm{e}}{16}x^3$

3) Au voisinage de 0 on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\mathrm{e}^x} &= \frac{1}{2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right)^3 + o(x^3)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{8} + o(x^3)\right) \\
&\boxed{= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + o(x^3)}
\end{aligned}$$

4) Au voisinage de 0, $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.
Ainsi,

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

$$= 1 - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^2 - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3)$$

$$= 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^2 + x^3 - x^3 + o(x^3)$$

$$= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Ainsi

$$\frac{\sin x}{\mathrm{e}^x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \times \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

$$\boxed{= x - x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$$

**Correction de l'exercice 2 :**

1) **Attention :** on ne peut pas utiliser le DL de $(1+x)^\alpha$ car $\alpha$ doit être constant, ici les exposants sont $x$ et $\frac{1}{x}$ donc sont des variables.
Pour tout $x > 0$ on a $(2^{1/x} + 3^{1/x} - 5^{1/x})^x = \exp(x \ln(2^{1/x} + 3^{1/x} - 5^{1/x}))$
Cherchons la limite de $x \ln(2^{1/x} + 3^{1/x} - 5^{1/x})$ lorsque $x \to +\infty$.
$2^{1/x} = \exp(\ln(2)/x)$ avec $\frac{\ln(2)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $2^{1/x} = 1 + \frac{\ln(2)}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. De même, $3^{1/x} = 1 + \frac{\ln(3)}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ et $5^{1/x} = 1 + \frac{\ln(5)}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
On en déduit que $2^{1/x} + 3^{1/x} - 5^{1/x} = 1 + \frac{\ln(2)+\ln(3)-\ln(5)}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \ln\left(\frac{6}{5}\right) \times \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$
En composant par $\ln(1+u) = u + o(u)$ on obtient que $\ln(2^{1/x} + 3^{1/x} - 5^{1/x}) = \ln\left(\frac{6}{5}\right) \times \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ donc $x \ln\left(2^{1/x} + 3^{1/x} - 5^{1/x}\right) = \ln\left(\frac{6}{5}\right) + o(1)$ et ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} x \ln\left(2^{1/x} + 3^{1/x} - 5^{1/x}\right) = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$ et finalement par composition de limites, $(2^{1/x} + 3^{1/x} - 5^{1/x})^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \exp\left(\ln\left(\frac{6}{5}\right)\right) = \frac{6}{5}$.

2) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = \exp\left(\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)$.
Or, $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$.
Il s'ensuit que $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2)$ par composition avec $\ln(1+u) = u + o(u)$ donc $\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{1}{6} + o(1)$ donc $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$.

3) On pose le changement de variable $u = x - 1$ et on étudie $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sin(5\pi(u+1))}{\sin(4\pi(u+1))}$.
On a $\sin(5\pi(u+1)) = \sin(5\pi u + \pi) = -\sin(5\pi u)$ et $\sin(4\pi(u+1)) = \sin(4\pi u + 4\pi) = \sin(4\pi u)$.
Lorsque $u$ tend vers 0 on a $\sin(5\pi u) \sim 5\pi u$ et $\sin(4\pi u) \sim 4\pi u$ donc $\lim\limits_{u\to0} \frac{-\sin(5\pi u)}{\sin(4\pi u)} = \frac{-5\pi}{4\pi} = -\frac{5}{4}$ donc $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sin 5\pi x}{\sin 4\pi x} = -\frac{5}{4}$.

4) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $\frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right)} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + o(1)$ donc $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2} + o(1)$ et finalement $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$.

**Correction de l'exercice 3 :**

1) Pour tout réel $x$, $f(x)$ est définie si et seulement si $1 + x > 0$ et $\ln(1+x) - x \neq 0$.
Or, pour tout $x \geq -1$, $\ln(1+x) \leq x$ avec égalité si et seulement si $x = 0$ (on peut le prouver en étudiant la fonction $h(x) = x - \ln(1+x)$ par exemple).
Ainsi, $f$ est définie sur $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$.

2) En 0 on a $\ln(1+x) - x = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + o(x^4)$ et $x\,\mathrm{e}^x - \sin(x) - x^2 = x + x^2 + \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^4}{6} - x + \dfrac{x^3}{6} - x^2 + o(x^4) = \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^4}{6} + o(x^4)$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)}{-x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right))} \\
&= -2\frac{\frac{2x}{3} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}{1 - \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \\
&= -2\left(\frac{2x}{3} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{2x}{3} - \frac{x^2}{2} + \left(\frac{2x}{3} - \frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^2)\right) \\
&= -\left(\frac{4x}{3} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{2x}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{4x^2}{9} + o(x^2)\right) \\
&= -\left(\frac{4x}{3} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{2x}{3} - \frac{7x^2}{36} + o(x^2)\right) \\
&= -\frac{4x}{3} - \frac{8x^2}{9} - \frac{x^2}{3} + o(x^2) \\
&= -\frac{4x}{3} - \frac{11x^2}{9} + o(x^2)
\end{aligned}$$

3) D'après la question précédente, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ donc on peut prolonger $f$ en une fonction $g$ continue définie sur $]-1;+\infty[$ par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

4) D'après la question 2, pour tout $x \neq 0$ on a $\dfrac{g(x)}{x} = -\dfrac{4}{3} - \dfrac{11x}{9} + o(x)$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = -\dfrac{4}{3}$. Ainsi $g$ est dérivable en 0et $g'(0) = \dfrac{-4}{3}$.

5) Puisque $g(0) = 0$, l'équation de la tangente en 0 à $\Gamma$ est $y = -\dfrac{4}{3}x$. Dans le développement limité de $g$ au voisinage de 0, le terme suivant $-\dfrac{4}{3}x$ est $-\dfrac{11x^2}{9}$ donc au voisinage de 0, la courbe $\Gamma$ est située en dessous de $T$.

**Correction de l'exercice 4 :**

1) $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$, $x \mapsto \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc par composition $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$. Enfin, $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $f$ est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions continues.
Pour tout $x \neq 0$, $-1 \leq \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1$ donc $-x^2 \leq x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq x^2$ et ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ donc puisque $f(0) = 0$ on en déduit que $f$ est continue en 0.
Finalement, $f$ est bien continue sur $\mathbb{R}$.

2) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonctions dérivables, comme dans la question 1.
De plus, pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x)}{x} = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Pour tout $x \neq 0$, $-1 \leq \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1$ donc $-|x| \leq x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq |x|$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. On en déduit que $f$ est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

3) Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + x^2 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Or, $2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite lorsque $x \to 0$. En effet, si $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$ on a $\cos\left(\dfrac{1}{x_n}\right) = \cos(2\pi n) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et si $x_n = \dfrac{1}{(2\pi n + \pi)}$ on a $\cos\left(\dfrac{1}{x_n}\right) = \cos(2\pi n + \pi) = \cos(\pi) = -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$ ce qui contredit l'unicité de la limite.
On en déduit que $f'(x)$ ne tend pas vers $f'(0)$ lorsque $x$ tend vers 0 donc $f'$ n'est pas continue en 0, donc $f$ n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

**Correction de l'exercice 5 :**

1) Pour tout réel $x$, $f(x)$ est défini si et seulement si $x^2-9x+8\geq 0$. Or $x^2-9x+8=(x-8)(x-1)$ donc $f$ est définie sur $]-\infty;1]\cup[8;+\infty[$.
Pour tout $x$ dans l'ensemble de définition de $f$, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-9x+8}&=|x|\sqrt{1-\frac{9}{x}+\frac{8}{x^2}}\\&=|x|\left(1-\frac{9}{2x}+o\left(\frac{9}{2x}\right)\right)&&\text{d'après le DL de }\sqrt{1+u}\text{ lorsque }u\to 0\end{aligned}$$

m

Ainsi, si $x>0$ on a $f(x)=x-\frac{9}{2}+o(1)$ lorsque $x\to+\infty$ donc $f(x)-x+\frac{9}{2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ donc la droite d'équation $y=x-\frac{9}{2}$ est asymptote oblique à la courbe de $f$ en $+\infty$.
De même, si $<0$ on a $f(x)=-x+\frac{9}{2}+o(1)$ donc la droite d'équation $y=-x+\frac{9}{2}$ est asymptote oblique à la courbe de $f$ en $-\infty$.

2) Pour tout réel $x$, $g(x)$ est défini si et seulement si $x^2-1\neq 0\iff x\neq 1$ et $x\neq -1$ donc $g$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.
En $+\infty$ et en $-\infty$ on a $\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2}{x}\times\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{x}\left(1+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.
Ainsi, $\exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)=1+\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$ donc $g(x)=x+2+o(2)$ et ainsi $x+2$ est asymptote oblique à la courbe représentative de $g$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

**Correction de l'exercice 6 :** On a $P'(x)=\sum_{k=0}^{n-1}x^k$ donc pour tout $x\neq 1$, $P'(x)=\frac{1-x^n}{1-x}$.
$P'(1)=\sum_{k=0}^{n-1}1=n$ donc 1 n'est pas racine de $P'$, et pour tout $x\neq 1$ on a $P'(x)=0\iff 1-x^n=0\iff x=1$ ou $x=-1$ car $n$ est pair.
Ainsi, $(-1)$ est la seule racine de $P'$. Montrons que $-1$ n'est pas racine de $P$, c'est à dire que $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}\neq 0$. Pour cela on étudie la suite $(u_n)$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$.
Les suites $a_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}$ et $b_n=\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k}$ sont adjacentes :

— $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_{n+1}-a_n=\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2}+\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+1}<0$ donc $(a_n)$ est strictement décroissante.

— $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $b_{n+1}-b_n=\frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3}+\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2}=\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+3}>0$ donc $(b_n)$ est strictement croissante.

— $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $b_n-a_n=\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}=-\frac{1}{2n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

Ainsi, $\forall n\geq 2$, $b_0<b_n\leq a_n<a_1$ (et $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ mais la limite ne nous sert pas ici).
On en conclut que $\forall n\geq 2$, $b_0<u_n<a_1$ donc $-1<u_n<-\frac{1}{2}$. Ainsi, $P(-1)\neq 0$.
Finalement, $P$ n'a pas de racine multiple.

**Correction de l'exercice 7 :**

1) Soit $(a_0,a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ les coefficients réels de $P$ tels que $P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$.
Supposons que $\lambda\in\mathbb{C}$ est racine de $P$. Alors $P(\lambda)=0$ donc $\sum_{k=0}^{n}a_k\lambda^k=0$. En passant au conjugué dans cette égalité on obtient :

$$\overline{\sum_{k=0}^{n}a_k\lambda^k}=0$$

donc par propriété algébrique du conjugué :

$$\sum_{k=0}^{n}\overline{a_k}\overline{\lambda}^k=0$$

Or les $a_i$ sont réels donc $\forall i,\overline{a_i}=a_i$ et ainsi $\sum_{k=0}^{n}a_k\overline{\lambda}^k=0$, c'est à dire $P\left(\overline{\lambda}\right)=0$, $\overline{\lambda}$ est bien racine de $P$.
Comme $P$ est à coefficient réel, toutes les dérivées de $P$ sont des polynômes à coefficients réels donc pour tout $k\geq 0$, $P^{(k)}(\lambda)=0\iff P^{(k)}\left(\overline{\lambda}\right)=0$ d'où l'on déduit que $\overline{\lambda}$ a la même multiplicité que $\lambda$ si $\lambda$ est racine de $P$.

2) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les racines réelles de $P$ et $\mu_1, \dots, \mu_p, \overline{\mu_1}, \dots, \overline{\mu_p}$ les racines complexes non réelles de $P$. Notons $k_{\lambda_i}$ et $k_{\mu_i}$ la multiplicité de ces racines.
Alors $P$ se factorise sous la forme $P(x) = a_n \prod_{i=1}^r (x-\lambda_i)^{k_{\lambda_i}} \times \prod_{j=1}^p (X-\mu_j)^{k_{\mu_j}} \times \prod_{j=1}^p \left(X - \mu_j)^{k_{\mu_j}}\right)$ car pour tout $j$, $\mu_j$ et $\overline{\mu_j}$ ont la même multiplicité.
Ainsi, $P(x) = a_n \prod_{i=1}^r (x-\lambda_i)^{k_{\lambda_i}} \times \prod_{j=1}^p [(X-\mu_j)(X-\overline{\mu_j})]^{k_{\mu_j}} = a_n \prod_{i=1}^r (x-\lambda_i)^{k_{\lambda_i}} \prod_{j=1}^p (X^2 - 2Re(\mu_j)X + |\mu_j|^2)^{k_{\mu_j}}$.
Si toutes les racines réelles de $P$ ont une multiplicité paire, alors le degré de ce polynôme est pair car pour tout $j$, $\deg(X^2 - 2Re(\mu_j)X + |\mu_j|^2)^{k_{\mu_j}}) = 2k_{\mu_j}$ est pair.

**Correction de l'exercice 8 :**

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}}$ est continue sur $[0;+\infty[$. En $+\infty$ on a $x^2 \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \sim \dfrac{x^2\,\mathrm{e}^{-x}}{x} \sim x\,\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{x}{n}}\,\mathrm{d}x$ converge par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est bien défini.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;+\infty[$, $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{n}$ donc $x + \dfrac{1}{n+1} \leq x + \dfrac{1}{n}$ donc $\dfrac{1}{x+\frac{1}{n+1}} \geq \dfrac{1}{x+\frac{1}{n}}$ donc finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;+\infty[, \quad \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \leq \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n+1}}$$

On en déduit en intégrant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}$$

donc $(u_n)$ est croissante.

2) Pour tout $x \in [0;1]$, $\mathrm{e}^{-1} \leq \mathrm{e}^{-x}$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{x+\frac{1}{n}} \leq \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}}$.
En intégrant sur $[0;1]$, on obtient $\dfrac{1}{\mathrm{e}}\left[\ln\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]_0^1 \leq v_n$. Or $\left[\ln\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{1}{n}\right) = \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \ln(n+1)$ d'où $\dfrac{\ln(n+1)}{\mathrm{e}} \leq v_n$.
De plus, pour tout $x \geq 1$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \leq \mathrm{e}^{-x}$ donc $w_n \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-A}) = \mathrm{e}^{-1}$ d'où $0 \leq w_n \leq \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ ($w_n$ est l'intégrale d'une fonction positive sur $[1;+\infty[$ donc est positif.

3) Puisque $u_n = v_n + w_n$ d'après la relation de Chasles et que $w_n \geq 0$, on a $u_n \geq v_n \geq \dfrac{\ln(n+1)}{\mathrm{e}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}*$. Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\mathrm{e}} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4) a) $x \mapsto \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$ est continue sur $]0;1]$ et au voisinage de 0 on a $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} = \dfrac{1-(1-x+o(x))}{x} = 1 + o(1)$ donc $\displaystyle\lim_{x\to0} \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} = 1$. Cette fonction se prolonge par continuité en 0 donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;1]$ $1-\mathrm{e}^{-x} \geq 0$ donc $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \geq 0$, et $\dfrac{1}{x+\frac{1}{n}} \leq \dfrac{1}{x}$ donc $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \leq \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$, ainsi en intégrant sur $[0;1]$ on obtient $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \leq I$.

c) D'après l'encadrement précédent, on a

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1}{x+\frac{1}{n}} - v_n \leq I$$

donc $0 \leq \ln(n+1) - u_n \leq I$.
En divisant par $\ln(n+1)$ on obtient $0 \leq 1 - \dfrac{u_n}{\ln(n+1)} \leq \dfrac{I}{\ln(n+1)}$ donc par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(1 - \dfrac{u_n}{\ln(n+1)} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\ln(n+1)} = 1$ d'où $u_n \sim \ln(n+1)$.
Or $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n) + o(\ln(n))$ donc $\ln(n+1) \sim \ln(n)$, donc finalement $u_n \sim \ln(n)$.

**Correction de l'exercice 9 :**

1) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est définie pour tout $t$ tel que $\ln(t)$ existe et $\ln(t) \neq 0$. Elle est donc définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$.
Si $x \in ]0;1[$, alors $x^2 \in ]0;1[$ donc l'intégrale $\int_x^{x^2} \dfrac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ a un sens. Si $x \in ]1;+\infty[$, alors $x^2 \in ]1;+\infty[$ donc $\int_x^{x^2} \dfrac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ a aussi un sens. Finalement, cette intégrale a un sens si et seulement si $x \in ]0;1[\cup]1;+\infty[$.

2) Pour une valeur $x_0 \in ]0;1[$ fixée (respectivement $x_0 \in ]1;+\infty[$), $f(x) = \int_{x_0}^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} - \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

   Or la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est continue sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$ comme inverse de fonction continue qui ne s'annule pas sur ces intervalles. Soit $F : x \mapsto \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ définie sur $]0;1[$ (respectivement sur $]1;+\infty[$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, $F$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1[$ (respectivement sur $]1;+\infty[$) et $F'(x) = \dfrac{1}{\ln x}$.

   Or pour tout $x \in ]0;1[$ (respectivement $x \in ]1;+\infty[$) on a $f(x) = F(x^2) - F(x)$. Alors $f$ est dérivable comme différence et composée de fonctions dérivables et $\forall x \in ]0;1[ \cup ]1;+\infty[$, $f'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = \dfrac{2x}{\ln(x^2)} - \dfrac{1}{\ln(x)} = \dfrac{x}{\ln x} - \dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{x-1}{\ln x}$.

   Pour tout $x \in ]0;1[$, $x - 1 < 0$ et $\ln(x) < 0$ donc $f'(x) > 0$ et pour tout $x \in ]1;+\infty[$, $x - 1 > 0$ et $\ln(x) > 0$ donc $f'(x) > 0$, donc $f$ est strictement croissante sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

   **Note :** la notation $F$ est mal choisie ici car $F$ n'est pas la primitive de $f$ mais la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$... Attention à ne pas faire d'amalgame.

3) Pour tout $x \in ]0;1[ \cup ]1;+\infty[$, $f(x) - g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \left( \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} \right) \mathrm{d}t = \int_x^{x^2} \frac{t - 1 - \ln t}{(t-1)\ln t} \,\mathrm{d}t$.

   Or, $t - 1 - \ln(t) = t - 1 - (t-1) + \frac{(t-1)^2}{2} + o((t-1)^2)$ donc $t - 1 - \ln t \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{(t-1)^2}{2}$, et $(1-t)\ln t \underset{t\to 1}{\sim} (1-t)^2$ d'où $\dfrac{1}{\ln t} - \dfrac{1}{t-1} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{1}{2}$. On peut donc prolonger cette fonction par continuité en 1, et pour toute fonction $\varphi$ continue sur $]0;1]$ on a $\lim\limits_{x\to 1} \int_x^{x^2} \phi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^0 \phi(t)\,\mathrm{d}t = 0$ par continuité de $x \mapsto \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

   Finalement on a donc bien $\lim\limits_{x\to 0} (f(x) - g(x)) = 0$. Calculons $g(x)$ explicitement :

$$\begin{aligned}
\forall x \neq 1, \quad \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} &= [\ln(t-1)]_x^{x^2} \\
&= \ln(x^2 - 1) - \ln(x-1) \\
&= \ln\left( \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) \\
&= \ln(x+1)
\end{aligned}$$

   donc $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \ln(2)$ donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \ln(2)$.

4) Étudions la limite de $\dfrac{f(x) - \ln(2)}{x-1}$ lorsque $x$ tend vers 1.

$$\frac{f(x) - \ln(2)}{x-1} = \frac{f(x) - g(x)}{x-1} + \frac{g(x) - \ln(2)}{x-1}$$

   On a : $f(x) - g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{t - 1 - \ln(t)}{(t-1)\ln t} \,\mathrm{d}t$

   Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t - 1 - \ln(t)}{(t-1)\ln t} = \dfrac{1}{2}$ comme on l'a vu à la question précédente, il existe donc un voisinage $]1-a, 1+a[$ de 1 tel que $\forall t \in ]1-a, 1+a[$, $\left| \dfrac{t - 1 - \ln(t)}{(t-1)\ln t} - \dfrac{1}{2} \right| < \varepsilon$.

   Ainsi, pour $x$ suffisamment proche de 1, on a $x \in ]1-a, 1+a[$ et $x^2 \in ]1-a, 1+a[$ donc par inégalité triangulaire

$$\left| \int_x^{x^2} \left( \frac{t - 1 - \ln(t)}{(t-1)\ln t} - \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}t \right| \leq \int_x^{x^2} \left| \frac{t - 1 - \ln(t)}{(t-1)\ln t} - \frac{1}{2} \right| \mathrm{d}t \leq (x^2 - x)\varepsilon$$

   d'où :

$$\left| f(x) - g(x) - \int_x^{x^2} \frac{1}{2} \,\mathrm{d}t \right| \leq x(x-1)\varepsilon$$

donc
$$\left|\frac{f(x)-g(x)}{x(x-1)}-\frac{1}{x(x-1)}\int_x^{x^2}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t\right|\le\varepsilon$$
c'est à dire :
$$\left|\frac{f(x)-g(x)}{x(x-1)}-\frac{1}{2}\right|\le\varepsilon$$
On en déduit que $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x}\times\frac{f(x)-g(x)}{x-1}=\frac{1}{2}$ donc que $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$.

D'autre part on a $\frac{g(x)-\ln 2}{x-1}=\frac{\ln(1+x)-\ln 2}{x-1}=\ln'(2)=\frac{1}{2}$ qu'on obtient comme limite d'un taux d'accroissement.
Finalement, $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-\ln(2)}{x-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ donc $f$ est dérivable en 1 et $f'(1)=1$.

**Correction de l'exercice 10 :**

1) $f$ est continue sur $[a,b]$ qui est un intervalle fermé borné, donc $f$ atteint son maximum et son minimum sur $[a,b]$. Il existe donc $x_a$ tel que $\forall x\in[0,1]$, $f(x_a)\le f(x)$ et alors $a$ existe et $a=f(x_a)$ et il existe $x_b\in[0,1]$ tel que $\forall x\in[0,1]$, $f(x_b)\ge f(x)$ et alors $b$ existe et $b=f(x_b)$.
2) Pour tout $y\in[a,b]$, puisque $f$ est continue sur $[a,b]$ et atteint les valeurs $a$ et $b$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaire un réel $x\in[a,b]$ tel que $f(x)=y$. On a alors $f(y)=f(f(x))=f(x)=y$. Pour tout $y\in[a,b]$, $f(y)=y$ donc $f_{|[a,b]}$ est la fonction identité.
3) Supposons $f$ non constante. Puisque $a$ est le minimum de $f$ et que c'est aussi un réel de $[0,1]$ et que $f(a)=a$, alors ou bien $a=0$ ($a$ est une borne de l'intervalle), ou bien $a\in]0;1[$ et $f'(a)=0$ (on ne peut pas avoir $a=1$ sinon on aurait $f$ constante égale à 1 car $f$ est à valeurs dans $[0,1]$). Or $a<b$ (car $f$ non constante) et $f_{|[a;b]}:x\mapsto x$ donc $f'_{|[a;b]}=1$ donc la dérivée à gauche de $f$ en $a$ vaut 1, donc $f'(a)=1$. On en déduit finalement $a=0$, et de la même façon $b=1$.
4) Dans cette question on suppose seulement $f$ continue.
Le résultat de la question 2 est alors une condition suffisante. En effet, s'il existe un intervalle $[a,b]\subset[0,1]$ tel que $\forall x\in[a,b]$, $f(x)=x$ et tel que pour tout $x\in[0,1]$, $f(x)\in[a,b]$, alors pour tout $x\in[0,1]$ on a $f(f(x))=f(x)$ car $f$ est l'identité sur $[a,b]$.
L'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ vérifiant $f\circ f=f$ est donc l'ensemble des fonctions définies par morceau de la forme
$$f(x)=\begin{cases}f_1(x) & \text{si } x\in[0,a]\\ x & \text{si } x\in[a,b]\\ f_2(x) & \text{si } x\in[b,1]\end{cases}$$
avec $f_1(a)=a$ et $f_2(b)=b$, et $f_1,f_2$ à valeurs dans $[a,b]$ et continues sur $[0,a]$ et sur $[b,1]$ respectivement.

**Correction de l'exercice 11 :**

1) $f$ est continue sur $]-\infty;0]$ et sur $]0;+\infty[$ car sa restriction à chacun de ces intervalles est une fonction continue (par opérations usuelles).
Montrons que $f$ est continue en 0 :
$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}0=0$
et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{-1}{x}=+\infty$ donc par composition $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=0$. Ainsi $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$ donc $f$ est continue en 0.
$\boxed{\text{Finalement } f \text{ est bien continue sur } \mathbb{R}}$.
2) La fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;\infty[$ et exp est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc par composition $x\mapsto \mathrm{e}^{-1/x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3) Pour $n=1$, on a pour tout $x>0$,
$$f'(x)=\frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-1/x}$$
donc en posant $P_1(x)=x^2$ on a bien $f'(x)=P_1\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x}$. La propriété est vraie pour $n=1$.
Supposons que pour un certain entier $n\ge1$ on ait
$$\forall x>0,\quad f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x}$$
avec $P_n$ un polynôme, alors $f^{(n)}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}\forall x > 0, \quad f^{(n+1)}(x) &= -\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x} + \frac{1}{x^2}P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x}\\ &= \frac{1}{x^2}\left(P_n\left(\frac{1}{x}\right) - P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\right)\mathrm{e}^{-1/x}\end{aligned}$$

En posant $P_{n+1}(X) = X^2P_n - X^2P_n'$, alors $P_{n+1}$ est bien un polynôme et on a :

$$\forall x > 0, \quad f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x}$$

La propriété est donc vraie pour $n+1$. Par récurrence on en conclut qu'elle est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

4) Montrons par récurrence que pour tout entier $n$, $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$.
$f$ est dérivable sur $]-\infty; 0]$ et sur $]0; +\infty[$. En 0, on a :
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 0 = 0$
- Si $x > 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x} = \dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{-1/x}$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} X\mathrm{e}^{-X} = 0$ par croissance comparée donc par composition de limites $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$.

On en déduit que $f$ est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.
Supposons que le résultat est vrai pour un entier $n$ quelconque fixé. Alors
- $\forall x < 0$, $f^{(n)}(x) = 0$ par calcul de dérivée et $f^{(n)}(0) = 0$ par hypothèse de récurrence, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x-0} = 0$.
- Si $x > 0$, $\dfrac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x-0} = \dfrac{1}{x}P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x} = XP_n(X)\mathrm{e}^{-X}$ en posant $X = \frac{1}{x}$.
Or par croissance comparée $\lim\limits_{X\to+\infty} XP_n(X)\mathrm{e}^{-X} = 0$ car $P_n$ est un polynôme, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x-0} = 0$

On en conclut que $f^{(n)}$ est dérivable en 0 (donc sur $\mathbb{R}$) et que $f^{(n)}(0) = 0$.
Par récurrence on en déduit finalement que le résultat est vrai pour tout entier $n$. On a donc bien $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

**Correction de l'exercice 12 :**

1) $u_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{1-x}\right]_0^1 \boxed{= \mathrm{e} - 1}$
$u_1 = \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\,\mathrm{e}^{1-x}\right]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \boxed{= \mathrm{e} - 2}$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0; 1]$, $0 \leq x \leq 1$ donc $0 \leq 1 - x \leq 1$ et donc $1 \leq \mathrm{e}^{1-x} \leq \mathrm{e}$. En multipliant par $x^n$ et en intégrant sur $[0; 1]$ on obtient donc :

$$\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}\,\mathrm{d}x$$

d'où :

$$\boxed{\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{\mathrm{e}}{n+1}}$$

b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{n+1} = 0$ on en déduit par encadrement $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

3) a) Une intégration par partie donne pour tout entier $n \geq 1$ :

$$\begin{aligned}u_n &= \left[-x^n\,\mathrm{e}^{1-x}\right]_0^1 + \int_0^1 nx^{n-1}\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x\\ &\boxed{= -1 + nu_{n-1}}\end{aligned}$$

b) Procédons par récurrence :

— **Initialisation :** $u_0 = \mathrm{e} - 1$ d'après la question 1) et $\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{0} \dfrac{1}{k!} = \mathrm{e} - 1$, donc l'égalité est vraie pour $n = 0$.

— **Hérédité :** Supposons l'égalité vraie pour un entier naturel $n$. Alors :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= (n+1)u_n - 1 && \text{d'après la question précédente} \\
&= (n+1)n!\left(\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) - 1 \\
&= (n+1)!\left(\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) - \frac{(n+1)!}{(n+1)!} \\
&= (n+1)!\left(\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) \\
&= (n+1)!\left(\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}\right)
\end{aligned}$$

l'égalité est alors vraie pour l'entier $n+1$. La propriété est donc héréditaire.

— **Conclusion :** $\boxed{\text{Par principe de récurrence on en conclut que pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ on a } u_n = n!\left(\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right).}$

4) Pour tout $n \geq 1$, $u_n - v_n = nu_{n-1} - 1 - (nv_{n-1} - 1) = n(u_{n-1} - v_{n-1})$ donc par une récurrence immédiate :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n - v_n = n!(u_0 - v_0)$$

Le terme de droite diverge si $u_0 \neq v_0$, et comme $(u_n)_{n\geq 0}$ converge $\boxed{\text{on en déduit que } (v_n)_{n\geq 0} \text{ diverge}}$.

5) a) Appliquons deux fois la relation de récurrence à $u_{n+2}$ :

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 0, \quad u_{n+2} &= (n+2)u_{n+1} - 1 \\
&= (n+2)[(n+1)u_n - 1] - 1 \\
&= (n+2)(n+1)u_n - (n+2) - 1
\end{aligned}$$

donc en divisant par $(n+2)(n+1)$ :

$$\boxed{u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{u_{n+2}}{(n+1)(n+2)}}$$

b) On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1} &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} \\
&= \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

De plus on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+2} = 0$ donc $\dfrac{u_{n+2}}{(n+1)(n+2)} = o\left(\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Ainsi, d'après la question précédente et par somme :

$$\boxed{u_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

(c'est à dire $c_1 = 1$ et $c_2 = 0$).