⋆ ⋆
Exercice 1 — Voir correction

1) Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ en fonction de la valeur de α.
2) Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta}$ en fonction des valeurs de α et β.
3) Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin(1/t^2)}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$
4) Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$

⋆ ⋆
Exercice 2 — Voir correction

Soit $\alpha \geq 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\, t^n\,\mathrm{d}t$

1) Calculer I_0
2) Soit $n \geq 1$. On suppose que I_{n-1} est convergente. Montrer que I_n est convergente à l'aide d'une intégration par partie et établir une relation entre I_{n-1} et I_n.
3) En déduire la convergence de l'intégrale I_n et la valeur de I_n en fonction de n et α pour tout $n \in \mathbb{N}$.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 3 — Voir correction

1) Montrer que pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente. Dans la suite, on notera $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
2) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et montrer que sa dérivée f' vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -1 + 2xf(x)$
3) Établir pour tout réel $x \geq 0$ l'inégalité $2xf(x) \leq 1$
4) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

⋆ ⋆
Exercice 4 — Voir correction

(ENSAE 2021) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)} \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)}$$

1) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la convergence des intégrales I_n et J_n.
2) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $I_n + J_n$
3) Au moyen du changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$, calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales I_n et J_n
4) La suite $\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? La série $\displaystyle\sum \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)}$ est-elle convergente ?

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 5 — Voir correction

Soit f une fonction continue, positive et décroissante sur $[0;+\infty[$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Le résultat est-il encore vrai si f n'est pas décroissante ?

⋆ ⋆
Exercice 6 — Voir correction

Le but de cet exercice est de déterminer la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

On pose pour tout réel x, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Pour tout réel $t \in [0;1]$, on note g_t la fonction définie pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ par $g_t(x) = \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}$.
   a) Montrer que pour tout $x \in [-\ln 2; \ln 2]$, $|\,\mathrm{e}^x - 1| \leqslant 2|x|$
   b) En déduire que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$
   Indice : étudier la limite de $f(x+h) - f(x)$ lorsque h tend vers 0.
   c) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\mathrm{e}^{-2x} \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$

   On admet dans la suite que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = -\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$

2) Pour tout réel x, on pose $u(x) = f(x^2)$ et $\varphi(x) = u(x) + \left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$
   Montrer que φ est constante sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa valeur.

3) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

⋆⋆⋆
Exercice 7 — **Voir correction**

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge mais que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\,\mathrm{d}t$ diverge.

Le coin de Khûbes

⋆⋆
Exercice 8 — **Voir correction**

(ENS 2024) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la formule $f(x) = \exp\left(x - \frac{x^2}{2}\right)$.

1) Dresser le tableau de variations de f. On y indiquera notamment les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Montrer qu'on a l'égalité $\int_0^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = 1 + \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. *On pourra effectuer un changement de variable $y = x + a$ pour un a bien choisi et admettre la valeur de l'intégrale de Gauss : $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$*
4) Calculer le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 3 pour x proche de 0. En déduire l'allure locale du graphe de f au voisinage de 0.

⋆⋆⋆
Exercice 9 — **Voir correction**

(ENS 2013) Pour tout réel $r \geq 1$, soit f_r la fonction définie sur $[0,1[$ par :

$$f_r(x) = \frac{\exp(-rx)}{\sqrt{1-x}}$$

et l'on pose :

$$I(r) = \int_0^1 f_r(x)\,\mathrm{d}x$$

1) Dresser le tableau de variation complet de la fonction f_r.
2) Montrer que $I(r)$ est une intégrale convergente pour tout réel $r \geq 1$.
3) On écrit dans la suite $I(r) = I_1(r) + I_2(r) + I_3(r)$, avec :

$$I_1(r) = \int_0^{r^{-2/3}} \exp(-rx)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad I_2(r) = \int_0^{r^{-2/3}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right)\exp(-rx)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad I_3(r) = \int_{r^{-2/3}}^1 \frac{\exp(-rx)}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

4) Montrer que quand r tend vers $+\infty$ on a :

$$I_1(r) = \frac{1}{r}\big(1 + o(1)\big)$$

5) Montrer que pour tout réel y strictement compris entre 0 et 1, on peut écrire :

$$1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-y}} \leq 1 + \frac{y}{2(1-y)^{3/2}}$$

6) Montrer que pour tout $r \geq 1$, on a :

$$0 \leq I_2(r) \leq c_2 \left(1 - r^{-2/3}\right)^{-3/2} \frac{1}{r^{4/3}}$$

où c_2 est une constante dont on précisera la valeur.

7) Montrer que pour tout $r \geq 1$ on a :

$$0 \leq I_3(r) \leq c_3 \exp(-r^{1/3})$$

où c_3 est une constante dont on précisera la valeur.

8) En déduire que $I(r)$ est équivalent à $1/r$ quand r tend vers $+\infty$.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) Si $\alpha > 0$ il y a deux impropriétés en 0 et en $+\infty$.
En 0, on a $\dfrac{\sin t}{t^\alpha} \sim \dfrac{t}{t^\alpha} \sim \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$, l'intégrale converge si et seulement si $\alpha - 1 < 1$, si et seulement si $\alpha < 2$.
Soit $X > 0$, par intégration par partie on a

$$\begin{aligned}\int_0^X \frac{\sin t}{t^\alpha} &= \left[-\frac{\cos t}{t^\alpha}\right]_0^X + \int_0^X \frac{\alpha \cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= 1 - \frac{\cos X}{X^\alpha} + \alpha \int_0^X \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\cos X}{X^\alpha} = 0$ car $\cos X$ est borné, et pour tout $t \in [0; +\infty[$, $\left|\dfrac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\right| \leq \dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$ donc converge si $\alpha + 1 > 1$ donc si $\alpha > 0$ ce qui est déjà supposé.
On a donc prouvé que pour $\alpha > 0$, l'intégrale converge si et seulement si $\alpha < 2$.
Il reste à étudier le cas $\alpha \leq 0$: On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \geq (n\pi)^{-\alpha} \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin t\,\mathrm{d}t \geq 2(n\pi)^{-\alpha}$
Ainsi, si on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - u_n| \geq 2(n\pi)^{-\alpha}$. La suite (u_n) ne peut donc pas converger sinon on aurait $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$, or $2(n\pi)^{-\alpha}$ ne tend pas vers 0.
Si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ convergeait, alors la suite (u_n) convergerait. Ce n'est pas le cas donc l'intégrale diverge.
Finalement, l'intégrale converge si et seulement si $0 < \alpha < 2$.

2) Il y a une impropriété en 0 et une impropriété en $+\infty$. On étudie la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$

   - <u>En 0, on étudie la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$:</u>

     ▷ Si $\alpha > 0$ on a $\dfrac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta} \sim t^{\alpha-\beta}$, l'intégrale converge si et seulement si $\beta - \alpha < 1$, si et seulement si $\beta < 1 + \alpha$.

     ▷ Si $\alpha = 0$, on a $\dfrac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta} \sim \dfrac{\ln(2)}{t^\beta}$, l'intégrale converge si et seulement si $\beta < 1$.

     ▷ Si $\alpha < 0$, on a $\ln(1+t^\alpha) = \ln(t^\alpha) + \ln(1+t^{-\alpha}) = \alpha\ln(t) + \ln(1+t^{-\alpha})$.
     Ainsi, $\dfrac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta} = \alpha\dfrac{\ln t}{t^\beta} + \dfrac{\ln(1+t^{-\alpha})}{t^\beta} \sim \dfrac{\alpha \ln t}{t^\beta}$.
     Si $\beta < 0$, on a une fausse impropriété en 0 car $\dfrac{\ln(t)}{t^\beta} \xrightarrow{t\to 0} = 0$ donc la fonction se prolonge par continuité en 0.
     Si $0 \leq \beta < 1$, soit $\gamma \in]\beta; 1[$ (par exemple $\gamma = \dfrac{1+\beta}{2}$), alors $t^\gamma \times \dfrac{\ln t}{t^\beta} = t^{\gamma-\beta}\ln(t) \xrightarrow{t\to 0} 0$ donc $\dfrac{\ln t}{t^\beta} = o\left(\dfrac{1}{t^\gamma}\right)$, et comme $\gamma < 1$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\gamma}\,\mathrm{d}t$ converge, donc par comparaison l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge.
     Si $\beta \geq 1$, alors $t \times \dfrac{\ln t}{t^\beta} = t^{1-\beta}\ln(t) \xrightarrow{t\to 0} +\infty$ donc $\dfrac{t^\beta}{t\ln(t)} \xrightarrow{t\to 0} 0$, ainsi $\dfrac{1}{t} = o\left(\dfrac{\ln t}{t^\beta}\right)$ donc par comparaison l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$ diverge.
     Finalement, lorsque $\alpha < 0$, l'intégrale converge si et seulement si $\beta < 1$

     Finalement, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha \geq 0$ et $\beta < 1+\alpha$, ou si $\alpha < 0$ et $\beta < 1$, donc elle converge si et seulement si $\beta < \max(1, 1+\alpha)$.

   - <u>En $+\infty$, on étudie la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$:</u>

- ▷ Si $\alpha > 0$, on a $\dfrac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta} \sim \dfrac{\ln(t^\alpha)}{t^\beta} \sim \alpha \dfrac{\ln t}{t^\beta}$.

  Si $\beta > 1$, soit $\gamma \in]1;\beta[$, alors $t^\gamma \times \dfrac{\ln t}{t^\beta} = \dfrac{\ln t}{t^{\beta-\gamma}} \xrightarrow{t\to+\infty} 0$ donc $\dfrac{\ln t}{t^\beta} = o\left(\dfrac{1}{t^\gamma}\right)$ avec $\gamma > 1$ donc par comparaison $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge.

  De même, si $\beta \leq 1$, alors $t \times \dfrac{\ln t}{t^\beta} = \dfrac{\ln t}{t^{\beta-1}} \xrightarrow{t\to+\infty} = +\infty$ donc $\dfrac{1}{t} = o\left(\dfrac{\ln t}{t^\beta}\right)$ et ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$ diverge par comparaison.

  Finalement, l'intégrale converge si et seulement si $\beta > 1$
- ▷ Si $\alpha = 0$, on a $\dfrac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta} \sim \dfrac{\ln 2}{t^\beta}$, l'intégrale converge si et seulement si $\beta > 1$
- ▷ Si $\alpha < 0$, on a $\dfrac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta} \sim t^{\alpha-\beta}$, donc l'intégrale converge si et seulement si $\beta - \alpha > 1$, si et seulement si $\beta > 1 + \alpha$.

Conclusion : Lorsque $\alpha = 0$, les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$ ne peuvent pas converger simultanément car on ne peut pas avoir à la fois $\beta > 1$ et $\beta < 1$.
Lorsque $\alpha > 0$, ces deux intégrales convergent simultanément si et seulement si $\beta > 1$ et $\beta < 1 + \alpha$.
Lorsque $\alpha < 0$, ces deux intégrales convergent simultanément si et seulement si $\beta < 1$ et $\beta > 1 + \alpha$.
Finalement, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$ et $1 < \beta < 1 + \alpha$ ou $\alpha < 0$ et $1 + \alpha < \beta < 1$.

3) Il y a deux impropriétés : en 0 et en $+\infty$.

- <u>Étudions la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}\sin(1/t^2)}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$.</u>

  Au voisinage de 0 on a $\left|\dfrac{\sqrt{t}\sin(1/t^2)}{\ln(1+t)}\right| \leq \dfrac{\sqrt{t}}{\ln(1+t)} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{t}}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente donc par comparaison $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}\sin(1/t^2)}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$ converge.

- <u>Étudions la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin(1/t^2)}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$</u>

  En $+\infty$, on a $\dfrac{\sqrt{t}\sin(1/t^2)}{\ln(1+t)} \sim \dfrac{\sqrt{t} \times \frac{1}{t^2}}{\ln(1+t)} \sim \dfrac{1}{t^{3/2}\ln(1+t)} \leq \dfrac{1}{\ln(2)t^{3/2}}$

  Par comparaison avec l'intégrale de Riemann convergente $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$, on en conclut que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin(1/t^2)}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$ converge.

Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin(1/t^2)}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$ converge.

4) Lorsque $t \in [\frac{2}{\pi}; +\infty[$, $\frac{1}{t} \in [0; \frac{\pi}{2}]$, donc $\cos\left(\dfrac{1}{t}\right) = 0 \iff t = \dfrac{2}{\pi}$ et $\cos\dfrac{1}{t} > 0$ sinon.

   Il y a donc deux impropriétés, en $\dfrac{2}{\pi}$ et en $+\infty$.

- Au voisinage de 0, on étudie la convergence de $\displaystyle\int_{2/\pi}^{4/\pi} \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ (le choix de 4π est arbitraire, c'est juste pour fixer un nombre entre $2/\pi$ et $+\infty$.

  On a $\cos\left(\dfrac{1}{t}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{t}\right)\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{t}\right)$

  Or, lorsque $t \to \dfrac{2}{\pi}$ on a $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{t} \to 0$ donc $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{t}\right) \underset{t\to\frac{2}{\pi}}{\sim} \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{t}$

  Ainsi, $\ln\left(\cos\dfrac{1}{t}\right) \sim \ln\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{t}\right)$

  On a donc $\displaystyle\int_{2/\pi}^{4/\pi} \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ qui converge si et seulement si $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi/4} \ln\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ converge, si et seulement si $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\ln u}{(\pi/2-u)^2}\,\mathrm{d}u$ converge grâce au changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{t}$, $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Or, $\dfrac{\ln u}{(\pi/2-u)^2} \sim \dfrac{4\ln u}{\pi^2}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(u)\,\mathrm{d}u$ converge.

Finalement, l'intégrale $\displaystyle\int_{2/\pi}^{4/\pi} \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)$ converge.

- Au voisinage de $+\infty$, on étudie la convergence de $\displaystyle\int_{4/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$. On a $\cos\dfrac{1}{t} = 1 - \dfrac{1}{2t^2} + o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ car $\dfrac{1}{t} \xrightarrow{t\to+\infty} 0$, donc $\ln\left(\cos\dfrac{1}{t}\right) = \ln\left(1-\dfrac{1}{2t^2}+o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)\right) \sim -\dfrac{1}{2t^2}$, ainsi l'intégrale converge par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente.

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ converge.

Correction de l'exercice 2 :

1) $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$.

   Montrons que cette intégrale converge et calculons-la.

   Soit $X > 0$, $\displaystyle\int_0^X \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\mathrm{e}^{-\alpha t}}{\alpha}\right]_0^X = \frac{1}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha X})$.

   Or $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha X}) = \frac{1}{\alpha}$ car $\alpha > 0$, donc $\boxed{\text{l'intégrale } I_0 \text{ est convergente et } I_0 = \frac{1}{\alpha}.}$

2) Soit $n \geq 1$ et $X > 0$. En intégrant par partie sur $[0;X]$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^X \mathrm{e}^{-\alpha t}\,t^n\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{-\mathrm{e}^{-\alpha t}\,t^n}{\alpha}\right]_0^X - \int_0^X -\frac{n\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,t^{n-1}}{\alpha}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{-\mathrm{e}^{-\alpha X}\,X^n}{\alpha} + \frac{n}{\alpha}\int_0^X \mathrm{e}^{-\alpha t}\,t^{n-1}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

   Or par hypothèse, I_{n-1} converge donc $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_0^X \mathrm{e}^{-\alpha t}\,t^{n-1}\,\mathrm{d}t = I_{n-1}$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\frac{-\mathrm{e}^{-\alpha X}\,X^n}{\alpha} = 0$ par croissance comparée.

   Ainsi, $\boxed{I_n \text{ converge et } I_n = \frac{n}{\alpha}I_{n-1}}$

3) On raisonne par récurrence.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$: " I_n converge et $I_n = \dfrac{n!}{\alpha^{n+1}}$.

   - **<u>Initialisation :</u>** D'après la question 1, I_0 converge et $I_0 = \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{0!}{\alpha^{0+1}}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - **<u>Hérédité :</u>** Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire que I_n converge et que $I_n = \dfrac{n!}{\alpha^{n+1}}$.

     D'après la question 2, on sait que cela implique que I_{n+1} converge et que $I_{n+1} = \dfrac{n+1}{\alpha}I_n = \dfrac{(n+1)!}{\alpha^{n+2}}$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - **<u>Conclusion :</u>** $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et on a montré pour tout $n \in \mathbb{N}$ que si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie aussi. Par principe de récurrence, $\boxed{\text{on en conclut que } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie pour tout entier } n \in \mathbb{N}.}$

Correction de l'exercice 3 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} X\,\mathrm{e}^{-X} = 0$. En faisant le changement de variable $X = t^2$ dans l'expression $t^2\,\mathrm{e}^{-t^2}$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-t^2} = 0$. Ainsi, $\mathrm{e}^{-t^2} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

   Comme $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente, on conclut grâce au théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives que $\displaystyle\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2) **Remarque :** on ne peut pas appliquer directement le théorème fondamental de l'analyse car ce n'est pas une intégrale sur un intervalle fermé borné. Cependant, on peut se ramener facilement à ce cas.

   Soit $A \in \mathbb{R}$, montrons que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;A[$.

Pour tout $x \in]-\infty; A[$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_x^A \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2\,\mathrm{d}t}$.

La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue, donc la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_x^A \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty; A[$ et sa dérivée est $x \longmapsto -\mathrm{e}^{-x^2}$ (en effet, si F est une primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ on a $\displaystyle\int_x^A \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = F(A) - F(x)$, en dérivant par rapport à x on obtient $-F'(x)$ c'est à dire $-\mathrm{e}^{-x^2}$)

Le terme $\displaystyle\int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$ est constant. Donc finalement la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty; A[$ est $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est $x \longmapsto -\mathrm{e}^{-x^2}$.

f est le produit de deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty; A[$, donc f est $\mathcal{C}^1$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\,\mathrm{e}^{2x^2}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{x^2}(-\mathrm{e}^{-x^2}) \\ &= -1 + 2xf(x) \end{aligned}$$

Ceci est valable quel que soit $A \in \mathbb{R}$, donc finalement $\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(x) = -1 + 2xf(x).}$

3) Soit $x \geq 0$.

$$2xf(x) = \mathrm{e}^{x^2}\int_x^{+\infty} 2x\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Pour tout $t \in [x; +\infty[$, $2x \leqslant 2t$ donc

$$2xf(x) \leqslant \mathrm{e}^{x^2}\int_x^{+\infty} 2t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Pour $X > 0$, $\displaystyle\int_x^X 2t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t^2}\right]_x^X = \mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-X^2} \xrightarrow[X\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-x^2}$ donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} 2t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_x^{+\infty} 2t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x^2}$.

Ainsi, $\boxed{2xf(x) \leqslant \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{e}^{-x^2} = 1.}$

4) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-t^2} \geqslant 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

On en déduit que pour tout $x \geq 0$, $0 \leqslant 2xf(x) \leqslant 1$ et donc que $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2x}$.

D'après le théorème des gendarmes, on en conclut que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Correction de l'exercice 4 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)(1+x^n)}$ et $x \mapsto \dfrac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}$ sont continues sur $[0; +\infty[$ comme quotients de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

On étudie l'impropriété en $+\infty$: $\dfrac{1}{(1+x^2)(1+x^n)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{2+n}}$ et $\dfrac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$. Les intégrales de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{2+n}}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ sont convergentes car $2+n > 1$ et $2 > 1$, donc d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)}$ sont convergentes, donc finalement I_n et J_n sont convergentes.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n + J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+x^n)\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty}(\arctan(A) - \arctan(0)) = \frac{\pi}{2}$.

3) On pose $u = \dfrac{1}{x}$, $\mathrm{d}u = -\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -u^2\,\mathrm{d}x$.

Remarque : on ne fait pas de changement de variable ni d'intégration par partie sur une intégrale impropre, on doit donc d'abord se ramener à une intégrale sur un segment.

Pour tout réel $A > 0$ on a

$$\int_{1/A}^A \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)} = \int_A^{1/A} \frac{-1/u^2}{(1+1/u^2)(1+1/u^n)}\,\mathrm{d}u = \int_{1/A}^A \frac{u^n\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)(1+u^n)}$$

En faisant tendre A vers $+\infty$ on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)} = \int_0^{+\infty} \frac{u^n \,\mathrm{d}u}{(1+u^2)(1+u^n)} = J_n$ car ces deux intégrales convergent.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = J_n$. Puisque $I_n + J_n = \dfrac{\pi}{2}$ on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = J_n = \dfrac{\pi}{4}$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0;1]$, on a $1 \leq 1+x^2 \leq 2$ et $1 \leq 1+x^n \leq 2$ donc $1 \leq (1+x^2)(1+x^n) \leq 4$.
On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1], \quad \frac{x^n}{4} \leq \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} \leq x^n$$

donc en intégrant sur $[0;1]$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{4(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x^n \,\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)} \leq \frac{1}{n+1}$$

car $\displaystyle\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

On déduit de cet encadrement que la suite $\displaystyle\left(\int_0^1 \frac{x^n \,\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. De plus, la série $\displaystyle\sum \frac{1}{4(n+1)}$ diverge car $\dfrac{1}{4(n+1)} \sim \dfrac{1}{4n}$ et la série harmonique $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc par comparaison la série $\displaystyle\sum \int_0^1 \frac{x^n \,\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)}$ diverge.

Correction de l'exercice 5 : Commençons par montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
f est positive donc minorée, et décroissante sur $]0;+\infty[$ donc f admet une limite en $+\infty$. Supposons que cette limite soit un réel ℓ strictement positif, alors $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \geq \ell$ donc $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \geq x\ell$ et $x\ell \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$ car $\ell > 0$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne converge pas.
On a donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Montrons maintenant que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, posons $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$, il existe un réel $x_0 > 0$ tel que , $\displaystyle\left|\int_0^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon'$, donc :

$$\left|\int_{x_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon'$$

Ainsi, pour tout $x \geq x_0$, comme f est positive on a $\displaystyle\left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_{x_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon'$. Or f est décroissante donc $\forall t \leq x$, $f(t) \geq f(x)$. On a donc

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}t\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon'$$

donc

$$(x - x_0)f(x) < \varepsilon'$$

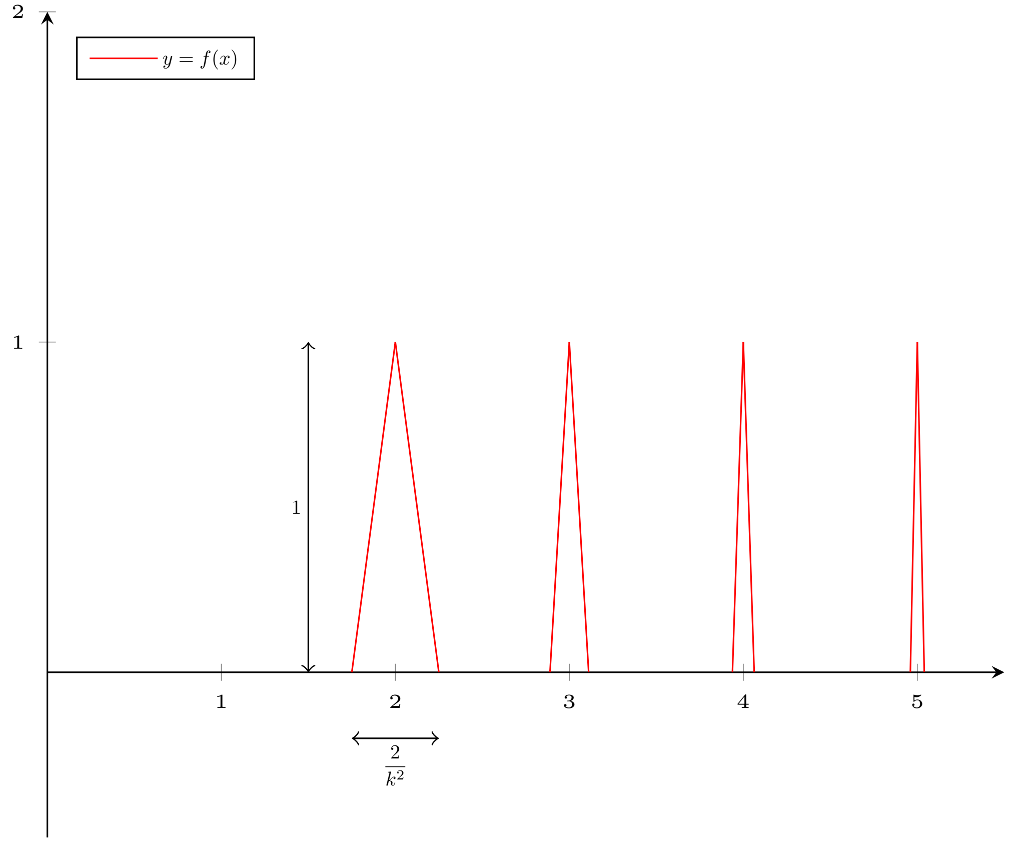
et ainsi

$$xf(x) < \varepsilon' + x_0 f(x)$$

Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, il existe $x_1 > 0$ tel que $\forall x \geq x_1, f(x) < \dfrac{\varepsilon'}{x_0}$.
Ainsi, en posant $x_2 = \max(x_0, x_1)$, pour tout $x \geq x_2$ on a $x \geq x_1$ et $x \geq x_0$ donc on a $xf(x) < 2\varepsilon'$ donc $xf(x) < \varepsilon$.
On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, il existe $x_2 > 0$ tel que $\forall x \geq x_2$, $0 \leq xf(x) < \varepsilon$, ainsi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ et donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Ce résultat n'est plus vrai si f n'est pas décroissante, par exemple avec une fonction qui vaut 1 pour chaque valeur entière de x et affine par morceau avec une courbe triangulaire autour de chaque entier k de sorte que l'aire de chaque triangle soit $\dfrac{1}{k^2}$.

$$f : x \longmapsto \begin{cases} k^2\left(x - k + \frac{1}{k^2}\right) & \text{si } x \in [k - \frac{1}{k^2}\ ;\ k] \\ k^2\left(-x + k + \frac{1}{k^2}\right) & \text{si } x \in [k\ ;\ k + \frac{1}{k^2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



La somme $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, pourtant on n'a pas $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ (on n'a même pas $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$!).

Correction de l'exercice 6 :

1) a) La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[-\ln 2; \ln 2]$ et sa dérivée est $x \mapsto \mathrm{e}^x$. On a $\sup\limits_{y\in[-\ln 2;\ln 2]} \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{\ln 2} = 2$, donc d'après l'inégalité de Taylor à l'ordre 1 (c'est à dire l'inégalité des accroissements finis), on a

$$\forall x \in [-\ln 2; \ln 2], \quad |\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0\,| \leq 2|x-0|$$

autrement dit

$$\forall x \in [-2\ln 2; \ln 2], \quad |\,\mathrm{e}^x - 1| \leq 2|x|$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Suivant l'indication de l'énoncé, étudions la limite de $f(x+h) - f(x)$ lorsque h tend vers 0.

$$\begin{aligned}
\forall h \in \mathbb{R}, \quad |f(x+h) - f(x)| &= \left| \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(x+h)(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \times \left(\mathrm{e}^{-h(1+t^2)} - 1\right) \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \left|\mathrm{e}^{-h(1+t^2)} - 1\right| \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or $\forall t \in [0,1], \forall h \in \left[-\frac{\ln 2}{2}; \frac{\ln 2}{2}\right], -\ln 2 \leq -h(1+t^2) \leq \ln 2$ donc $|\,\mathrm{e}^{-h(1+t^2)} - 1| \leq |h| \times (1+t^2)$ d'après la question précédente

$$\begin{aligned}
. &\leq \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \times |h| \times (1+t^2)\,\mathrm{d}t \\
&\leq |h| \times \int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Pour x fixé, $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ est une constante, donc $\displaystyle\lim_{h\to 0}|h|\times\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = 0$, on en déduit donc que $\displaystyle\lim_{h\to 0}|f(x+h)-f(x)| = 0$, ainsi f est continue en x. Ceci est valable quel que soit $x\in\mathbb{R}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Pour tout $x>0$, pour tout $t\in[0;1]$, on a $1\leq 1+t^2\leq 2$ donc $-2x\leq -x(1+t^2)\leq -x$, et ainsi $\mathrm{e}^{-2x}\leq \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\leq \mathrm{e}^{-x}$ et donc $\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{1+t^2}\leq\dfrac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\leq\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+t^2}$.

Ces inégalités sont valables pour tout $t\in[0;1]$, on peut donc intégrer par rapport à la variable t sur l'intervalle $[0;1]$ et on obtient
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\leq\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\leq\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
d'où
$$\mathrm{e}^{-2x}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\leq\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\leq\mathrm{e}^{-x}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
Puisque $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est une constante, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0$ donc par encadrement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

2) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après l'énoncé, et $x\mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composition de fonctions dérivables.

De plus, $x\mapsto\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème fondamental, et sa dérivée est $x\mapsto\mathrm{e}^{-x^2}$.

Ainsi, $x\mapsto\left(\displaystyle\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x\mapsto 2\,\mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Finalement, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables, et
$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad \varphi'(x) &= u'(x)+2\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= 2xf'(x^2)+2\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= -2x\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t+2\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t+2\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$
Pour un $x\in\mathbb{R}$ quelconque fixé, on pose le changement de variable $u=\dfrac{t}{x}$, $\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}t}{x}$, et on obtient
$$\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-u^2x^2}\,\mathrm{d}u = x\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t$$
d'où finalement
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad\varphi'(x)=0$$
Ainsi, φ est constante sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)=\varphi(0)=u(0)+0=f(0)=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=[\arctan(t)]_0^1=\frac{\pi}{4}$.

On en conclut que $\forall x\in\mathbb{R},\varphi(x)=\dfrac{\pi}{4}$.

3) Lorsque x tend vers $+\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x^2)=\lim_{X\to+\infty}f(X)=0$. Puisque φ est constante, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\frac{\pi}{4}$.

D'après l'égalité $\varphi(x)=f(x^2)+\left(\displaystyle\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$ et par somme de limites , on en déduit que $\left(\displaystyle\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et que cette limite est $\dfrac{\pi}{4}$

Si on admet la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, on a donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Correction de l'exercice 7 : Voir l'exercice 1 pour prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t$ converge.

Alors la suite (I_n) définie pour tout entier n par $I_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$ converge.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| &\geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(n+1)\pi}\,\mathrm{d}t \qquad\qquad \text{car } \forall t \in [n\pi,(n+1)\pi],\ \frac{1}{t} \in [\frac{1}{(n+1)\pi}, \frac{1}{n\pi}] \\
&\geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t \\
&\geq \frac{2}{(n+1)\pi}
\end{aligned}$$

par 2π périodicité de sin et car $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = \cos(0) - \cos(\pi) = 2$ et $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \sin t = \cos(\pi) - \cos(2\pi) = -2$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = 2$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n - I_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(I_{k+1} - I_k) \geq \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{2}{(k+1)\pi}$. Or cette somme diverge par équivalence avec la série harmonique, donc par comparaison (I_n) diverge, contradiction.

On en conclut que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$ diverge.

Correction de l'exercice 8 :

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (1-x)\exp\left(x - \frac{x^2}{2}\right)$$

donc f' est du signe de $1-x$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x - \frac{x^2}{2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - \frac{x^2}{2}\right) = -\infty$, donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Finalement :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\mathrm{e}^{1/2}$	$\searrow$	0

2) Comme $\lim\limits_{X\to-\infty} X\,\mathrm{e}^X = 0$, on peut écrire : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - \frac{x^2}{2}\right) f(x) = 0$. Or $\left(\frac{x^2}{2} - x\right) f(x) \sim \frac{x^2}{2} f(x)$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann convergente, donc d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. De plus f est continue sur $[0,1]$ donc $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est bien définie (donc converge), finalement $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Pour tout réel $A > 0$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^A x f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^A (x-1) f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^A f'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= f(0) - f(A) + \int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \xrightarrow[A\to+\infty]{} f(0) + \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

or $f(0) = 1$ d'où le résultat.

3) Posons $y = x - 1$, alors $y^2 = x^2 - 2x + 1$, donc $\exp\left(x - \frac{x^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{1-y^2}{2}\right)$.
Comme $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$, on a $\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{A-1}^{B-1} \exp\left(\frac{1-y^2}{2}\right)\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{1/2}\int_{A-1}^{B-1} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y$.
En faisant tendre A vers $-\infty$ puis en faisant tendre B vers $+\infty$ on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{1/2}\sqrt{2\pi} = \sqrt{2\,\mathrm{e}\,\pi}$$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x - \frac{x^2}{2}\right) = 0$ donc on peut utiliser le DL de exp :

$$\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^4)$$

en posant $u = x - \dfrac{x^2}{2}$ et en tronquant les termes de degré ≥ 3 on obtient :

$$\exp\left(x - \frac{x^2}{2}\right) = 1 + \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^3\right) \quad = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^3 + o\,($$

$$= 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)$$

On en déduit que la droite d'équation $y = x + 1$ est tangente à la courbe représentative de f au voisinage de 0 et que cette dernière est au dessus de la tangente pour $x < 0$ et en dessous de la tangente pour $x > 0$ dans un voisinage de 0.

Correction de l'exercice 9 :

1) $x \mapsto 1 - x$ est dérivable et ne s'annule pas sur $[0,1[$ donc $x \mapsto \sqrt{1-x}$ aussi. Par opérations usuelles, f_r est ensuite dérivables sur $[0,1[$.

$$\forall x \in [0,1[,\quad f_r'(x) = \frac{-r\,\mathrm{e}^{-rx}\sqrt{1-x} + \dfrac{\mathrm{e}^{-rx}}{2\sqrt{1-x}}}{1-x} = \frac{\mathrm{e}^{-rx}\big[-2r(1-x)+1\big]}{2(1-x)\sqrt{1-x}} = \frac{\mathrm{e}^{-rx}(2rx+1-2r)}{2(1-x)\sqrt{1-x}}$$

donc pour tout $x \in [0,1[$, $f_r'(x)$ est du signe de $2rx + 1 - 2r$, d'où le tableau suivant :

x	0		$\frac{2r-1}{2r}$		1
$f_r'(x)$		$-$	0	$+$	
f_r	1	$\searrow$	$\sqrt{2r}\,\mathrm{e}^{(1-2r)/2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2) f_r est continue sur $[0,1[$ et $f_r(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to 1$, donc I_r a une seule impropriété en $x = 1$.

$$f_r(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-r}}{\sqrt{1-x}}$$

avec e^{-r} constante, donc avec le changement de variable $u = 1 - x$, I_r a la même nature que l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.
Cette intégrale est une intégrale de Riemann convergente (car $\sqrt{u} = u^{1/2}$), donc I_r converge pour tout $r \geq 1$.

3) On peut calculer explicitement $I_1(r)$:

$$\forall r \geq 1,\quad I_1(r) = \left[\frac{-\,\mathrm{e}^{-rx}}{r}\right]_0^{r^{-2/3}} = \frac{1}{r}\left(1 - \mathrm{e}^{-r^{1/3}}\right)$$

et $\lim\limits_{r\to+\infty} \mathrm{e}^{-r^{1/3}} = 0$ d'où le résultat.

4) Posons $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2}$. g est dérivable sur $]0,1[$ et $g'(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{-3/2} = \dfrac{1}{2(1-x)^{3/2}}$. g est strictement croissante sur $]0,1[$ comme inverse d'une fonction décroissante.
Soit $y \in]0,1[$ fixé. Par croissance de g' on a :

$$\forall x \in [0,y[, \quad g'(0) \leq g'(x) \leq g'(y)$$

donc

$$\forall x \in [0,y], \quad \frac{1}{2} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2(1-y)^{3/2}}$$

On peut appliquer l'inégalité des accroissements finis à g sur $[0,y]$ et on obtient :

$$\frac{1}{2} \times y \leq g(y) - g(0) \leq \frac{y}{2(1-y)^{3/2}}$$

d'où

$$\frac{1}{2} \times y \leq \frac{1}{\sqrt{1-y}} - 1 \leq \frac{y}{2(1-y)^{3/2}}$$

et finalement :

$$\boxed{1 \leq 1 + \frac{1}{2} \times y \leq \frac{1}{\sqrt{1-y}} \leq 1 + \frac{y}{2(1-y)^{3/2}}}$$

5) L'inégalité précédente est équivalente à :

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{1-y}} - 1 \leq \frac{y}{2(1-y)^{3/2}}$$

donc en multipliant par $\mathrm{e}^{-ry} \geq 0$:

$$0 \leq \left(\frac{1}{\sqrt{1-y}} - 1\right) \mathrm{e}^{-ry} \leq \frac{y\,\mathrm{e}^{-ry}}{2(1-y)^{3/2}}$$

puis en intégrant ces inégalités sur $[0, r^{-2/3}]$ par rapport à y on obtient :

$$0 \leq I_2(r) \leq \int_0^{r^{-2/3}} \frac{y\,\mathrm{e}^{-ry}}{2(1-y)^{3/2}}\,\mathrm{d}y$$

Or pour tout $y \in [0, r^{-2/3}[$, $0 \leq y\,\mathrm{e}^{-ry} \leq y \leq r^{-2/3}$ et $0 \leq \dfrac{1}{2(1-y)^{3/2}}$ $leq\dfrac{1}{2}(1-r^{-2/3})^{-3/2}$ donc par produit :

$$\forall y \in [0, r^{-2/3}], \quad \frac{y\,\mathrm{e}^{-ry}}{2(1-y)^{3/2}} \leq \frac{1}{2} r^{-2/3}(1-r^{-2/3})^{-3/2}$$

Ce majorant est une constante donc en intégrant sur $[0, r^{-2/3}]$ on obtient :

$$\boxed{\int_0^{r^{-2/3}} \frac{y\,\mathrm{e}^{-ry}}{2(1-y)^{3/2}} \leq r^{-2/3} \times \frac{1}{2} r^{-2/3}(1-r^{-2/3})^{-3/2} \leq \frac{1}{2}(1-r^{-2/3})^{-3/2} \frac{1}{r^{4/3}}}$$

(donc $c_2 = \frac{1}{2}$)

6) Pour tout $x \in [r^{-2/3}, 1]$, $0 \leq \mathrm{e}^{-rx} \leq e^{-r \times r^{-2/3}} \leq \mathrm{e}^{-r^{1/3}}$. On a donc :

$$I_3(r) \leq \mathrm{e}^{-r^{1/3}} \int_{r^{-2/3}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$$

Or $0 \leq \int_{r^{-2/3}}^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} \leq 2(\sqrt{1} - \sqrt{0})$ donc :

$$\boxed{I_3 \leq 2\,\mathrm{e}^{-r^{1/3}}}$$

(donc $c_3 = 2$).

7) On a $I_1(r) \underset{r \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{r}$ et $0 \leq rI_2(r) \leq c_2\left(1 - r^{-2/3}\right)^{-3/2} \dfrac{1}{r^{1/3}}$ donc $\lim\limits_{r \to +\infty} rI_2(r) = 0$ par encadrement d'où $I_2(r) = o\left(\dfrac{1}{r}\right)$.
Enfin, $r\,\mathrm{e}^{-r^{1/3}} = (r^{1/3})^3\,\mathrm{e}^{-r^{1/3}}$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} X\,\mathrm{e}^{-X} = 0$ par croissance comparée donc $\lim\limits_{r \to +\infty} r\,\mathrm{e}^{-r^{1/3}} = 0$ donc par encadrement $I_3(r) = o\left(\dfrac{1}{r}\right)$.
On a donc $I(r) = \dfrac{1}{r}\left(1 + o(1)\right) + o\left(\dfrac{1}{r}\right) + o\left(\dfrac{1}{r}\right)$ donc $I(r) \underset{r \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{r}$.