CHAPITRE 9

MATRICES

I. Matrices de taille $n \times m$

Dans cette section, n et m sont deux entiers strictement positifs.

1. Définitions

Définition 9.1

Une **matrice de taille n × m à coefficients réels** est une famille de nm réels indexées par deux entiers i et j vérifiant $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$.
Une matrice de taille $n \times m$ est représentée sous forme d'un tableau à n lignes et m colonnes.
Si A est une matrice de taille $n \times m$, on peut noter $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ où $a_{i,j}$ sont **les coefficients de** A.

$$A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ l'ensemble de **toutes les matrices réelles de taille** $n \times m$.

Exemple 9.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

matrice 2×3

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

matrice 4×1

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

matrice 3×3

Définition 9.2

Une **matrice colonne** (ou **vecteur colonne**) est une matrice de taille $n \times 1$, c'est à dire une matrice dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Une **matrice ligne** (ou **vecteur ligne**) est une matrice de taille $1 \times m$, c'est à dire une matrice dans $\mathcal{M}_{1,m}(\mathbb{R})$.

Exemple 9.2

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

matrice colonne de taille 3×1

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice ligne de taille 1×4

Exemple 9.3

Déterminer les matrices A et B définies par $A = (i + j)_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq j \leq 4}}$ et $B = (j - i)_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 4}}$.

2. Opérations

a. Somme

Définition 9.3

Soient $A=(a_{i,j})$ et $B=(b_{i,j})$ deux matrices de taille $n\times m$. La somme de A et B, est la matrice $A+B=\left(a_{i,j}+b_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}$.
Si $C=A+B=\left(c_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}$, alors $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]$, $c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}$.

Exemple 9.4

Soit $A=\begin{pmatrix}1&-5&3\\2&0&-1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-2&5&0\\1&1&4\end{pmatrix}$. Alors $A+B=$

Remarque

La somme de deux matrices n'est définie que si ces deux matrices ont le même nombre de ligne et le même nombre de colonnes.

b. Produit par un réel

Définition 9.4

Le produit d'une matrice $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}$ par un réel λ est la matrice $\lambda\cdot A=(\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}$.

Exemple 9.5

Soit $A=\begin{pmatrix}-1&3\\2&6\\3&-2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}8&1\\-7&5\\1&3\end{pmatrix}$. Calculer $C=-2A+3B$

c. Produit de matrices

Définition 9.5

Le produit d'une matrice ligne de taille n avec une matrice colonne de taille n est le réel obtenu en additionnant les produit deux à deux des coefficients de chaque matrice :

$$\text{Si } A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix} \text{ alors } AB=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

Exemple 9.6

Calculer le produit de $\begin{pmatrix}1&2&3&4\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\1\\-2\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\1\\-2\\0\end{pmatrix}=1\times3+2\times1+3\times(-2)+4\times0=-1$$

Définition 9.6

Soient n, m, p trois entiers strictement positifs.
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$. Le produit de A et B est la matrice $C = AB = (c_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ de taille $n \times p$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}b_{k,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + a_{i,3}b_{3,j} + \cdots + a_{i,m}b_{m,j}$$

Autrement dit, le coefficient (i,j) du produit $A \times B$ est le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A avec la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \boxed{a_{i,1}} & \boxed{a_{i,2}} & \boxed{\cdots} & \boxed{a_{i,m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & \boxed{b_{1,j}} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & \boxed{b_{2,j}} & \cdots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \boxed{\vdots} & \vdots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & \boxed{b_{m,j}} & \cdots & b_{m,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,j} & \cdots & c_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i,1} & \cdots & \boxed{c_{i,j}} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,j} & \cdots & c_{n,p} \end{pmatrix}$$

Exemple 9.7

Multiplier $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
On identifie les lignes et les colonnes que l'on va multiplier :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \times 2 + (-1) \times 1 + 2 \times 1 \ \boxed{= 7}$
- $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \times 0 + (-1) \times (-2) + 2 \times 3 \ \boxed{= 8}$
- $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 1 \ \boxed{= 1}$
- $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1) \times 0 + 1 \times (-2) + 2 \times 3 \ \boxed{= 4}$

Ainsi, $AB = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Remarque

On ne peut multiplier une matrice $n \times m$ par une matrice $p \times q$ que si $m = q$, autrement dit si la première matrice a autant de colonnes que la deuxième matrice a de lignes.

Remarque

La multiplication de matrices **n'est pas commutatives**. En général, on n'a pas $AB = BA$.

En effet, prenons par exemple $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.
Alors

$$AB=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+2\times0&1\times1+2\times1\\3\times1+4\times0&3\times1+4\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\3&7\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+3\times1&1\times2+1\times4\\0\times1+1\times3&0\times2+1\times4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6\\3&4\end{pmatrix}$$

donc $AB\neq BA$

Remarque

Un produit de deux matrices non nulles peut être nul.
En effet, prenons par exemple $A=\begin{pmatrix}0&2\\0&3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. Alors $A\neq\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B\neq\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, mais pourtant $AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$. (Par contre $BA=\begin{pmatrix}0&3\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$!!)

→ **Exercice de cours n° 1.**

Propriété 9.1

La multiplication de matrice est **associative** et **distributive par rapport à l'addition**, autrement dit pour toutes matrices $A\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $B\in\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ et $C\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, et pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on a

$$A(BC)=(AB)C\quad\text{(associativité)}$$

et pour toutes matrices $A\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, et $B,C\in\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ on a

$$A(B+C)=AB+AC\quad\text{(distributivité)}$$

Propriété 9.2

La multiplication de deux matrices n'est pas commutative, mais si $A\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $B\in\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors on a

$$A(\lambda B)=\lambda(AB)$$

Propriété 9.3

Si A est la matrice nulle (tous les coefficients égaux à 0), alors $AB=0$ et $CA=0$ pour toutes matrice B et C de taille appropriée.

d. Transposée

Définition 9.7

Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. La **matrice transposée de** A est la matrice de taille $m\times n$ notée ${}^tA$ (ou A^T) et définie par ${}^tA=(b_{i,j})$ avec pour tout $(i,j)\in[\![1,m]\!]\times[\![1,n]\!]$, $b_{i,j}=a_{j,i}$.

Exemple 9.8

Soit $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\6&7&8&9&10\\11&12&13&14&15\end{pmatrix}$, alors la transposée de A est ${}^tA=\begin{pmatrix}1&6&11\\2&7&12\\3&8&13\\4&9&14\\5&10&15\end{pmatrix}$

Propriété 9.4

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ deux matrices. Alors ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

Propriété 9.5

Pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et tous réels λ, μ, on a

$${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda\,{}^tA + \mu\,{}^tB$$

La transposition est une application linéaire de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

II. Matrices carrées

Définition 9.8

Une **matrice carré de taille** n est une matrice de taille $n \times n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille n.

1. Matrice diagonale, matrice triangulaire, matrice identité

Définition 9.9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle

- Matrice identité I_n la matrice carrée de taille n :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  On note $I_n = I$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la dimension. On appelle **symbole de Kronecker** la famille δ_{ij} définie par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

  On a alors $I_n = (\delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.
- Matrice **diagonale** toute matrice de la forme

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

  C'est à dire une matrice carrée $D = (d_{i,j})$ de taille n telle que $d_{i,j} = 0$ si $i \neq j$.
- Matrice triangulaire supérieure toute matrice carrée $T = (t_{i,j})$ telle que $t_{i,j} = 0$ si $i > j$. Ce sont les matrices de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

- Matrice triangulaire inférieure toute matrice carrée $T = (t_{i,j})$ telle que $t_{i,j} = 0$ si $i < j$. Ce sont les matrice de la forme :

$$T=\begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & * \end{pmatrix}$$

Remarque

S'il n'y a aucune ambiguïté sur la taille de la matrice, la matrice identité se note simplement I.

Propriété 9.6

La matrice identité est l'élément neutre pour la multiplication de matrices :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}),\ I_n A = A$$

$$\forall A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}),\ A I_n = A$$

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n}(\mathbb{R}),\ A I_n = I_n A = A$$

Remarque

La matrice identité commute avec toutes les matrices carrées de même taille.
Si $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice λI commute avec toutes les matrices carrés de même taille.

Propriété 9.7

La matrice identité de taille n est l'unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui laisse chaque vecteur colonne invariant par produit :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX = X \iff A = I_n$$

Définition 9.10

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par convention, on note $A^0 = I_n$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on définit par récurrence A^p par $A^p = A \times A^{p-1}$.

Remarque

Comme la multiplication est associative, on a $A \times A^{p-1} = A^{p-1} \times A$, et plus généralement : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $A^i \times A^j = A^j \times A^i$

Propriété 9.8 (produit de deux matrices diagonales)

Si $A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & b_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$ sont deux matrices diagonales, alors :

$$AB = BA = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & a_{n-1}b_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_nb_n \end{pmatrix}$$

En particulier, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ A^p = \begin{pmatrix} a_1^p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^p & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & a_{n-1}^p & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n^p \end{pmatrix}$$

Propriété 9.9 (formule du binôme de Newton)

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **commutent**, alors

$$\forall p \in \mathbb{N},\ (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$$

→ **Exercice de cours n° 2.**

2. Trace

Définition 9.11

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée de taille $n \in \mathbb{N}^*$. La **trace** de A, notée $\text{tr}(A)$, est le réel donné par

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

c'est à dire la somme de tous les coefficients diagonaux de A

Une propriété immédiate de la trace :

Propriété 9.10

Si A et B sont deux matrices carrées de taille n et si λ est un réel, alors

$$\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

$$\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A)$$

Propriété 9.11

Soient A et B deux matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

3. Matrice inversible

a. Généralités

Définition 9.12

Soit A une matrice carrée de taille n. On dit que A est inversible s'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I_n$.
On note $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles. (Groupe Linéaire de degré n).

Remarque

Toute matrice n'est pas inversible, par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. En effet, supposons qu'il existe $B = (b_{i,j})$ telle que $BA = I_n$, alors

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \begin{pmatrix} 0 & b_{1,1} \\ 0 & b_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui est impossible.

Propriété 9.12

Si A admet un inverse, alors cet inverse est unique. On note A^{-1} l'unique matrice B telle que $AB = BA = I$.

Propriété 9.13 (admise)

Soit A une matrice carrée de taille n. Si $AB = I$ ou si $BA = I$, alors $AB = BA = I$ et A est donc inversible.

Remarque

Autrement dit, inverse à gauche $\Rightarrow$ inverse tout court, et inverse à droite $\Rightarrow$ inverse tout court.

$\rightarrow$ **Exercice de cours n°3.**

Propriété 9.14

Soit A une matrice inversible. Alors $(A^{-1})^{-1} = A$.

Propriété 9.15

Soit A une matrice inversible de taille n. Pour tout entier m et toutes matrices $M, N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $AM = AN \iff M = N$.

Propriété 9.16

Soient A et B deux matrices inversibles de taille n. Alors AB est inversible et

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

Propriété 9.17

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si ${}^tA$ est inversible, et dans ce cas $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Pour les matrices triangulaires et pour les matrices diagonales il existe un critère d'inversibilité simple :

Propriété 9.18

Soit T une matrice triangulaire supérieure. Alors T est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

Remarque

Cette propriété vaut aussi pour les matrices diagonales (qui sont des cas particuliers de matrices triangulaires supérieures), et pour les matrices triangulaires inférieures (car T est inversible si et seulement si ${}^tT$ est inversible).

b. Déterminant

Définition 9.13

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée de taille 2.
On appelle **déterminant de** A et on note $\det(A)$ le nombre $\det(A) = ad - bc$.

Propriété 9.19

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$, et dans ce cas on a

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

III. Systèmes linéaires

1. Systèmes de n équations linéaires à p inconnues

Définition 9.14

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Un **système** (S) **de n équations linéaires à p inconnues** $x_1, x_2, \ldots, x_p$ est un système d'équations de la forme

$$(S)\left\{\begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

où $(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ et $(b_i)_{1\le i\le n}$ sont deux familles de réels. Les réels $(a_{i,j})$ s'appellent **coefficients du système**.

- Une **solution** du système est **un** p**-uplet** $(x_1, x_2, ..., xp)$ tel que **les** n **équations soient vérifiées simultanément.**
- Deux systèmes d'équations sont **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.
- Si le système n'admet aucune solution, on dit qu'il est **incompatible**.
- Un système est dit **échelonné** si le nombre de coefficient nuls en début de chaque ligne est strictement plus grand qu'à la ligne précédente.

Remarque

Si on note $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$, $X = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$, alors le système S ci-dessus est équivalent à l'équation matricielle $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. On dit que A est la **matrice associée** au système (S).

Définition 9.15

Un système de n équations linéaires à p inconnues est dit **homogène** s'il est de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = & 0 \end{array}\right.$$

c'est à dire si $(b_1, b_2, \dots, b_n) = (0, 0, \dots, 0)$

Remarque

Matriciellement, un système linéaire homogène est une équation de la forme $AX = 0$ d'inconnue X.

Remarque

$X = 0$ est toujours solution de $AX = 0$, un système homogène a donc nécessairement au moins une solution, le p-uplet $(0, 0, ..., 0)$. Cette solution est appelée **solution triviale** (dans ce contexte trivial = évident).

2. Méthode de résolution : le pivot de Gauss

a. Opérations élémentaires

Proposition 9.20 (admise)

On considère un système linéaire **S** de n équations à p inconnues, et on note L_1, L_2,..., L_n les n lignes du système.
Les opérations suivantes changent **S** en un système **équivalent**.

- Remplacer L_i par $\lambda \times L_i$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $i \in [\![1, n]\!]$ On note cette opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- Remplacer L_j par $L_j + \lambda \times L_i$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$. On note cette opération $L_j \leftarrow L_j + \lambda L_i$
- Intervertir L_i et L_j pour $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$. On note cette opération $L_i \leftrightarrow L_j$.

On appelle ces transformations **opérations élémentaires**.

→ **Exercice de cours n° 4.**

Dans l'exercice précédent, nous nous sommes appuyé sur la méthode dite du « Pivot de Gauss »qui consiste à appliquer l'algorithme suivant :

- On note j le numéro de colonne et i le numéro de ligne dans le système. À chaque étape, on renomme tous les coefficients du système en $(a_{i,j})$ pour plus de clarté. On commence à $j = 1$.
  - On cherche un coefficient non nul dans la colonne 1 que l'on appelle **pivot**. Notons i la ligne de ce coefficient.
  - Si $i \neq 1$, on échange la 1ère ligne avec la i-ème ligne en faisant l'opération $L_1 \leftrightarrow L_i$.
  - On rend le pivot égal à 1 en faisant $L_1 \leftarrow \dfrac{1}{a_{1,1}} L_1$ (possible car $a_{1,1} \neq 0$).
  - Pour les lignes $i = 2$ à $i = n$, on annule le coefficient de la première colonne en se servant du pivot : $L_i \leftarrow L_i - a_{i,1} L_1$
  - On passe à la colonne suivante
- À la colonne j on procède comme suit :
  - On choisit un pivot non nul dans la colonne j dans une ligne $i \geq j$
  - On échange les lignes i et j pour placer le pivot sur la ligne j : $L_i \leftrightarrow L_j$
  - On rend le pivot égal à 1 : $L_i \leftarrow \dfrac{1}{a_{i,i}} L_i$
  - On annule tous les coefficients sous le pivot en faisant, pour tout $i \geq j$ on fait $L_i \leftarrow L_i - a_{i,j} L_j$.

Propriété 9.21 (admise)

Tout système est équivalent à un système sous forme échelonné que l'on peut déterminer à l'aide du pivot de Gauss.

Définition 9.16

On appelle **rang** d'un système linéaire homogène le nombre de lignes non nulles dans la forme échelonnée de ce système. On admet que ce nombre est défini de façon unique et que deux systèmes équivalents ont le même rang.

Soit S un système de n équations à p inconnues $(x_1, x_2, ..., x_p)$. Il est équivalent à un système de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
b_{1,1}y_1 + b_{2,2}y_2 + \cdots + b_{1,r}y_r + \cdots + b_{1,p}y_p & = & c_1 \\
b_{2,2}y_2 + \cdots + b_{2,r}y_r + \cdots + b_{2,p}y_p & = & c_2 \\
\ddots \qquad\qquad & & \vdots \\
b_{r,r}y_r + \cdots + b_{r,p}y_p & = & c_r \\
0 & = & c_{r+1} \\
 & \vdots & \\
0 & = & c_n
\end{array}\right.$$

où les inconnues $y_1, y_2, ..., y_p$ sont les mêmes que $x_1, x_2, ..., x_p$ mais éventuellement dans un ordre différent, où r est le rang du système, et où $b_{1,1}, b_{2,2}, ..., b_{r,r}$ sont tous non nuls. On a nécessairement $r \leq n$ et $r \leq p$, donc $r \leq \min(n, p)$.
Si $r < n$, les équations sans inconnues $0 = c_r$,...,$0 = c_n$ sont des **équations de compatibilité**. S'il existe $k \geq r+1$ tel que $c_k \neq 0$, alors le système n'a pas de solution.
Dans le système de départ est homogène, on a toujours $c_r = c_{r+1} = \cdots = c_n = 0$.
On déduit de ces observations la propriété suivante :

Propriété 9.22 (admise)

Soit S un système de n équations à p inconnues de rang r. Alors :

- $r \leq \min(n, p)$
- Si $r < n$ et que le système est incompatible, alors **S** n'admet aucune solution.
- Si $r = p$ et $r \leq n$ et que le système est compatible, alors **S** admet une unique solution.
- Si $r < p$ et que le système est compatible, alors **S** admet une infinité de solutions

→ **Exercice de cours n° 5.**

Propriété 9.23 (admise)

Un système **homogène** de n équations linéaires à p inconnues n'est jamais incompatible puisqu'il admet $(0, 0, ..., 0)$ comme solution. Un système homogène a soit une unique solution qui est la solution triviale, soit une infinité de solutions (dont des solutions non triviales).

- Si $r = p$, le système admet pour unique solution la solution triviale.

- Si $r < p$, le système admet une infinité de solutions.

Remarque

En particulier un système homogène admet des solutions non triviales s'il a moins d'équations que d'inconnues. En effet, on a alors $r \leq \min(n, p) < p$.

b. Matrices et système

Propriété 9.24

Soit (S) un système de n équations à n inconnues et A la matrice carrée associée à ce système. Alors (S) admet une unique solution si et seulement si A est inversible.
Si (S) est équivalent à l'équation $AX = Y$ d'inconnue X avec A inversible, alors l'unique solution du système est donnée par $X = A^{-1}Y$.

Exemple 9.9

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer A^{-1}.

Méthode 1 : par résolution d'un système. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et on résout le système $AX = Y$ d'inconnue X :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z & = & x' \\ -x+y & = & y' \\ 2y+z & = & z' \end{array}\right. \underset{}{\overset{L_2 \leftarrow L_2+L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z & = & x' \\ 3y+z & = & x'+y' \\ 2y+z & = & z' \end{array}\right.$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2-L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z & = & x' \\ y & = & x'+y'-z' \\ 2y+z & = & z' \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & x'-2(x'+y'-z')-(-2x'-2y'+3z') \\ y & = & x'+y'-z' \\ z & = & z'-2(x'+y'-z') \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & x'-z' \\ y & = & x'+y'-z' \\ z & = & -2x'-2y'+3z' \end{array}\right.$$

Ce système est équivalent à $X = BY$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Méthode 2 : en écrivant les transformations linéaires sur A et I. On écrit A et I côte à côte et on écrit les transformations élémentaires transformant A en I :

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2\leftarrow L_2+L_1}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2\leftarrow \frac{1}{3}L_2}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&\frac{1}{3}\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-2L_2}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&\frac{1}{3}\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\\frac{-2}{3}&\frac{-2}{3}&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3\leftarrow 3L_3}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&\frac{1}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\-2&-2&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-\frac{1}{3}L_3}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&-1\\-2&-2&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1\leftarrow L_1-2L_2-L_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\\-2&-2&3\end{pmatrix}$$

La matrice obtenue à droite est A^{-1}.

→ **Exercice de cours n°6.**

Propriété 9.25

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. Le système homogène $AX = 0$ de n équations à m inconnues admet des solutions non triviales si $n < m$ ou si A n'est pas inversible.

Définition 9.17

On appelle **rang** d'une matrice et on note $\text{rg}(A)$ le rang du système homogène associé à cette matrice.

Définition 9.18

Soit A une matrice. On dit que A est échelonnée en ligne si chaque ligne non nulle de A commence par strictement plus de 0 que la ligne précédente.

Remarque

Le rang d'une matrice échelonnée est égal au nombre de lignes non nulles de cette matrice.

Exemple 9.10

- $A = \begin{pmatrix}3&0&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ est une matrice échelonnée de rang 2
- $A = \begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ est une matrice échelonnée de rang 3
- $A = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&0&3\end{pmatrix}$ est une matrice échelonnée de rang 3.

Propriété 9.26

Si A' est obtenu à partir de A par des opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes, alors $\text{rg}(A') = \text{rg}(A)$.

Remarque

On peut donc appliquer l'algorithme de Gauss pour déterminer le rang d'une matrice : on cherche une matrice échelonnée équivalente à A, le rang de A est alors le nombre de ligne non nulle dans cette matrice.

→ **Exercice de cours n° 7.**

Propriété 9.27

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.

→ **Exercice de cours n° 8.**

Exercices de cours

Exercice 1

Calculer le produit $A \times B$ dans chaque cas

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -6 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -9 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 8 & 5 & -4 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & -8 \\ -5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Exprimer A en fonction de la matrice identité I et de J
2. Calculer J^2 et J^3, puis déterminer une expression de J^n en fonction de n pour tout entier naturel n.
3. En déduire une expression de A^n en fonction de n pour tout entier naturel n.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^3 - A^2 - 2A + 3I = 0$
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
3. Montrer que $B^2 = 3B$ et en déduire que B n'est pas inversible.

Exercice 4

Résoudre le système $\left\{ \begin{array}{rcr} 3x+3y+3z & = & -3 \\ 2x+4y+z & = & 0 \\ 3x+2y-z & = & 5 \end{array} \right.$

Exercice 5

On considère les systèmes $\mathbf{S_1} : \left\{ \begin{array}{rcr} x-3y+2z & = & 1 \\ 3x+y-z & = & 2 \\ 2x+4y-3z & = & 1 \end{array} \right.$ et $\mathbf{S_2} : \left\{ \begin{array}{rcr} 3x+6y-3z & = & 0 \\ 4x-y+2z & = & 1 \\ -2x+5y-4z & = & 2 \end{array} \right.$. Résoudre $\mathbf{S_1}$ et $\mathbf{S_2}$.

Exercice 6

Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et déterminer leurs inverses :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7

Déterminer le rang des matrices suivantes grâce à l'algorithme de Gauss :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Exercice 8

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible.