★

Exercice 1

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^t + t^{1/t}}\,\mathrm{d}t$

2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_0^{9} \frac{1}{3-\sqrt{9-t}}\,\mathrm{d}t$

4) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(u)}\,\mathrm{d}u$

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$

6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\tan^2(t)}\,\mathrm{d}t$

7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+x)^{1/3}-x^{1/3}}{x^{2/5}}\,\mathrm{d}x$

8) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t-\sin^2(t)\sqrt{t}}$

9) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$

★ ★ ★

Exercice 2

Partie A : séries de Riemann convergentes

1) Soit $\alpha > 0$ un réel. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [k; k+1]$ on a :
$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$$
et en déduire que
$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

2) En déduire que pour tout entier naturel n non nul :
$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

3) Montrer que $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Partie B : deux équivalents

4) En reprenant l'encadrement de la question 2), montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$$

5) Soit $\lambda < 1$. Montrer que de même que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\lambda} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{1-\lambda}}{1-\lambda}$$

6) Trouver tous les nombres réels α, $\beta \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k^\alpha = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^\beta$$

Partie C : cas général

7) Montrer que si f est une fonction positive, continue et décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$, alors pour tout entier naturel n
$$0 \leq \int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq f(0) + \int_0^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

8) En déduire que la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature (toutes deux convergentes ou bien toutes deux divergentes).

9) Donner un contre exemple d'une fonction positive non monotone f telle que $\sum f(n)$ converge mais $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, et un contre exemple d'une fonction positive non monotone g telle que $\sum g(n)$ diverge mais $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

10) En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$

Partie D : transformation d'Abel

11) Montrer à l'aide d'une intégration par partie que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

12) Soit x un réel qui n'est pas un multiple de 2π. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikx} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

13) En déduire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\right| \leq M$.

14) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k$, et $S_0 = 0$. En utilisant le fait que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sin n = S_n - S_{n-1}$ Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k} = \frac{S_n}{n} + \sum_{k=1}^{n} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

15) En déduire la nature de la série de terme général $\frac{\sin n}{n}$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 3

(D'après ESCP voie ECS 2013) Pour toutes fonctions f et g continues sur $\mathbb{R}$ et telles que pour tout réel x, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)|\,\mathrm{d}t$ converge, on note $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$. La fonction $f \star g$ ainsi définie s'appelle le **produit de convolution de f et g.**

1) On suppose dans cette question que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge et que g est bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f \star g$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$.

2) On suppose dans cette question que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2\,\mathrm{d}t$ convergent. Montrer que $f \star g$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\lambda_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h_n(t) = \begin{cases} \dfrac{(1-t^2)^n}{\lambda_n} & \text{si } t \in [-1;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   a) Montrer à l'aide du changement de variable $t = \cos\theta$ que $\lambda_n = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2n+1} d\theta$.

   On admet que $\lambda_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$

   b) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

   c) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} h_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

   d) Déterminer pour tout réel x, $\lim_{n\to+\infty} (f \star h_n)(x)$ pour f continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

Le coin de Khûbes

⋆

Exercice 4

(D'après ESCP 2024)
Soient $0 < a < b$ des réels et $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \neq 0$ par :

$$f(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

1) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calcule sa dérivée f'
2) Montrer que pour tout $t > 0$, on a :
$$\frac{1}{t} - \frac{t}{6} \leq \frac{\sin t}{t^2} \leq \frac{1}{t}$$
3) En déduire que f admet un prolongement par continuité en 0. Dans la question suivante, on note encore f la fonction ainsi prolongée.
4) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?