Programme de khôlle de maths n° 5

Semaine du 14 Octobre

Cours

Chapitre 3 : Ensembles et applications

- Egalité, inclusion d'ensembles
- Ensemble vide, ensemble $\mathcal{P}(E)$ des sous-ensembles d'un ensemble E, ensemble $F \setminus E = \{x \in F, x \notin E\}$.
- Union et intersection de deux ensembles, complémentaire dans un ensemble.
- Union et intersection d'une famille quelconque d'ensembles.
- Produit cartésien, n-uplet (définitions)
- Application $f : E \to F$, ensemble de départ, ensemble d'arrivée, image directe $f(A)$ de $A \in \mathcal{P}(E)$, image réciproque $f^{-1}(A)$ de $A \in \mathcal{P}(F)$.
- Restriction d'une application, prolongement d'une application
- Injection, surjection, bijection. Application réciproque d'une bijection. Application identité. $f : E \to F$ est une bijection si et seulement si il existe $g : F \to E$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et alors $f^{-1} = g$.
- Dénombrement : arrangements, permutations, combinaisons.

Chapitre 4 : Entiers, sommes et récurrences

- Nombres entiers, familles finies et dénombrables
- Sommes sur une partie finie de $\mathbb{Z}$, relation de Chasles, changement d'indice, changement de sens de sommation
- Somme double sur un rectangle ($\sum_{i=a}^{b} \sum_{j=c}^{d} u_{i,j}$), somme double sur un triangle ($\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} u_{i,j}$).
- Récurrence simple.

Questions de cours et exercices vus en classe

- Montrer que :
  1. $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow g$ surjective
  2. $g \circ f$ injective $\Longrightarrow f$ injective
- Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ en utilisant le fait que pour un ensemble E fini, $\mathrm{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{card}(E)}$.
- Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$
- Calculer $\displaystyle\sum_{k=5}^{20} 2^{20-k}$
- Calculer $\displaystyle\sum_{k=-10}^{20} |k-5|$
- Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n-k}\right)$
- Déterminer deux réels α, β tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{n+1}$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ en fonction de n.
- Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \frac{i}{j}$

Exercices

1. Montrer que f injective et g injective $\Longrightarrow g \circ f$ injective et que f surjective et g surjective $\Longrightarrow g \circ f$ surjective.
2. Montrer que si $f : E \to F$ est injective on a pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
3. Montrer que toute restriction d'une injection est une injection et que tout prolongement d'une surjection est une surjection.
   Plus précisément : soit $A \subset E$, soit $f : E \to F$ une injection et $g : A \to F$ une surjection. Montrer que $f_{|A}$ est une injection et montrer que si $\widetilde{g} : E \to F$ vérifie $\forall x \in A, \widetilde{g}(x) = g(x)$, alors $\widetilde{g}$ est une surjection.
4. Soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}, (x;y) \mapsto (x+2y; -x-3y)$. Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.
5. Soit $f : E \to E$ une application d'un ensemble E vers lui-même telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.
6. Les applications suivantes sont-elles injectives/surjectives/les deux ?

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$

(b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n^2$

(c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n+1$

(d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n^2$

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$

(f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - x^2$

(g) $f : [1; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - x^2$

(h) $f : [1; +\infty[\to [0; +\infty[$, $x \mapsto x^3 - x^2$

7. Calculer à l'aide d'un ou plusieurs changement d'indice :

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} x^{k-2}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} (n-k)^2$

(c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{k-1}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=10}^{55} (k-10)$

(e) $\displaystyle\sum_{k=2}^{11} \ln\left(\frac{2^k}{4}\right)$

(f) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2k-n}$

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \sum_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

(h) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$