⋆ ⋆

Exercice 1 — Voir correction

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x+y &= 3 \\ \ln(x)+\ln(y) &= 0 \end{cases}$$

⋆

Exercice 2 — Voir correction

On considère la fonction $f : x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{-x}$ définie sur $[0,+\infty[$.

1) Étudier les variations de f sur $[0,+\infty[$
2) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$
3) Calculer l'équation de la tangente à la courbe de f en $x=0$ et en $x=1$
   On rappelle que lorsque f est une fonction dérivable, l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est
   $$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$
4) Représenter la courbe représentative de f dans un repère, en faisant apparaître les tangentes aux points d'abscisse 0 et 1.

⋆

Exercice 3 — Voir correction

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto \dfrac{3x+1}{2x+5}$
2) $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x+7}\right)$
3) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
4) $f : x \mapsto \tan(\exp(x^2))$

⋆

Exercice 4 — Voir correction

Pour chacune des fonctions suivantes

- Déterminer l'ensemble de définition
- Étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition et préciser les équations des asymptotes éventuelles.
- Étudier les variations

1) $f_1(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}$
2) $f_2(x) = \ln(x+1)-x^2$
3) $f_3(x) = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1 - x}$
4) $f_4(x) = \ln(2+\sin x)$
5) $f_5(x) = \ln(\cos^2 x)$
6) $f_6(x) = \sqrt{\tan x}$

⋆

Exercice 5 — Voir correction

Étudier l'existence d'asymptotes horizontales pour les fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + 2x}{\mathrm{e}^x - x}$
2) $f_2(x) = \dfrac{\ln x + x^2}{1-\ln x}$
3) $f_3(x) = \dfrac{x^2+x+1}{1-3x}$
4) $f_4(x) = \dfrac{x^2+x+\mathrm{e}^{2x}}{x^2-\mathrm{e}^x}$
5) $f_5 = \dfrac{(\ln x)^{100}}{\sqrt{x}}$
6) $f_6 = \dfrac{1+\sqrt{\mathrm{e}^x}}{1+\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}$

⋆

Exercice 6 — Voir correction

Soit $0<a<b$ deux réels fixés. On considère la fonction f définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sqrt{x+b}-\sqrt{x+a}$$

1) Montrer que $f(x) = \dfrac{b-a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}$
2) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

⋆ ⋆

Exercice 7 — Voir correction

Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ deux entiers et soit f la fonction définie par

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$$

1) Montrer que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1} = n$ et $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^m-1}{x-1} = m$
2) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1.

⋆

Exercice 8 — Voir correction

Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par

$$\forall x \in [0, 1[, \quad f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-8x}}{1-x}$$

Dresser le tableau de variations complet (avec limites) de la fonction f.
Représenter la courbe représentative de f dans un repère.

⋆ ⋆

Exercice 9 — Voir correction

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
2) Étudier les asymptotes de f et représenter sa courbe représentative dans un repère.

⋆ ⋆

Exercice 10 — Voir correction

On considère la fonction $f : x \longmapsto x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Montrer que f peut se prolonger par continuité en une fonction $\widehat{f}$ continue sur $\mathbb{R}$.

⋆ ⋆

Exercice 11 — Voir correction

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (x-1)\ln(|x-1|) \end{aligned}$$

Montrer que f peut se prolonger par continuité en une fonction $\widehat{f}$ continue sur $\mathbb{R}$.

⋆

Exercice 12 — Voir correction

On considère la fonction $f : x \longmapsto x + \ln x$

1) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
2) Donner un encadrement d'amplitude 1 de α

★
Exercice 13 — Voir correction

1) f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^x - 1$$

   a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et étudier ses variations.
   b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0;+\infty[$
   c) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant la valeur de x

2) g est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x) = (x-1)(\mathrm{e}^x - 1)$$

   a) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$ et étudier le sens de variation de g
   b) Montrer que $g(\alpha) = -\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$

★
Exercice 14 — Voir correction

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe un réel $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

★
Exercice 15 — Voir correction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+x^2}$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$. On note x_1 et x_2 ces solutions.
2) Montrer que $x_1 = -x_2$ et que $|x_1| < 1$.

★
Exercice 16 — Voir correction

Soit $k \in \mathbb{R}$. Déterminer en fonction de la valeur de k le nombre de solutions de l'équation $x^4 - x^3 = k$.

★ ★
Exercice 17 — Voir correction

Montrer que l'équation $\cos(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ admet une infinité de solutions.

★ ★
Exercice 18 — Voir correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n + x - 1$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $x_n \in]0,1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2) Montrer que la suite (x_n) est strictement croissante.
3) En déduire que (x_n) converge vers une limite $\ell \leq 1$.
4) On suppose que $\ell < 1$. Étudier la la limite de $(f_n(x_n))$ et conclure.

★ ★
Exercice 19 — Voir correction

On admet dans cet exercice que $0,69 < \ln 2 < 0,7$.

Partie 1

On considère l'application $g :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2 + \ln x$

1) Montrer que g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$
2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0;+\infty[$. On note α l'unique solution de cette équation.
3) Montrer que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

Partie 2

On note $I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et on considère l'application $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{4}\ln x$

4) a) Montrer que f est strictement croissante sur I
   b) Montrer que $\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) < 1$
   c) En déduire que $\forall x \in I,\ f(x) \in I$
5) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$
   a) Calculer u_1
   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$
   c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   d) Montrer que la suite (u_n) converge et que sa limite est α.

⋆ ⋆

Exercice 20 — **Voir correction**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui admet une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

⋆

Exercice 21 — **Voir correction**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{3x}}{1 + \mathrm{e}^{3x}}$.

1) Déterminer $f(\mathbb{R})$
2) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R})$.
3) Déterminer une expression de $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

⋆

Exercice 22 — **Voir correction**

On considère les fonctions ch et sh (cosinus et sinus hyperboliques) définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ ch^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$
2) Étudier la parité de ch et sh
3) Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)$ et $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(b) = \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b)$.
4) Justifier que ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$.
5) Montrer que $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
6) Étudier les limites de $\mathrm{sh}(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et en déduire que sh admet une bijection réciproque.
7) Déterminer une formule explicite de $\mathrm{sh}^{-1}(x)$.
8) Justifier que sh^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

⋆

Exercice 23 — **Voir correction**

Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ une fonction polynôme de degré $n \geq 1$.
Montrer que P est une fonction paire si et seulement si tous ses coefficients de degrés impairs sont nuls.
Montrer que P est une fonction impaire si et seulement si tous ses coefficients de degrés pairs sont nuls.

⋆ ⋆

Exercice 24 — **Voir correction**

Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$.

1) Montrer que si n est impair, alors P admet au moins une racine réelle.
2) Montrer que si n pair, alors P admet un extremum global.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 25 — **Voir correction**

Dans cet exercice, on s'intéresse au problème suivant : étant donné $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ une famille de n réels distincts, et $b_1, b_2, \dots, b_n$ une famille de n réels quelconques, on souhaite déterminer un polynôme P de degré $n-1$ tel que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(a_k) = b_k$ (c'est un problème **d'interpolation)**).

1) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $L_k = \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \dfrac{X - a_j}{a_k - a_j}$ appelé k-ième **polynôme interpolateur de Lagrange**. Montrer que $\forall (k, i) \in [\![1, n]\!]^2$ on a
$$L_k(a_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
2) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que $P = \sum_{k=1}^{n} P(a_k) L_k$.
3) En déduire un polynôme qui répond au problème posé.

⋆ ⋆
Exercice 26 — **Voir correction**

Montrer que pour tout $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

Pour que l'équation soit bien définie on cherche des solutions dans $]0;+\infty[$. Pour tout $x, y \in]0,+\infty[$, on a

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 3 \\ \ln(x)+\ln(y) &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y &=& 3-x \\ \ln(x)+\ln(3-x) &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} y &=& 3-x \\ \ln(x(3-x)) &=& \ln(1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} y &=& 3-x \\ 3x-x^2=1 \end{array}\right.$$

Les solutions de l'équation $-x^2+3x-1=0$ sont $x_1=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{-2}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Ces deux solutions appartiennent à $]0;+\infty[$. Finalement,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 3 \\ \ln(x)+\ln(y) &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y &=& 3-x \\ & & x \in \left\{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\ ;\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\} \end{array}\right.$$

Remarquons que $3-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{6-3+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et que $3-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{6-3-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Ainsi, les solutions de l'équation sont $(x,y)=\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\ ,\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ et $(x,y)=\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\ ,\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

Correction de l'exercice 2 :

1) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f'(x)=\mathrm{e}^{-x}(1-x)$$

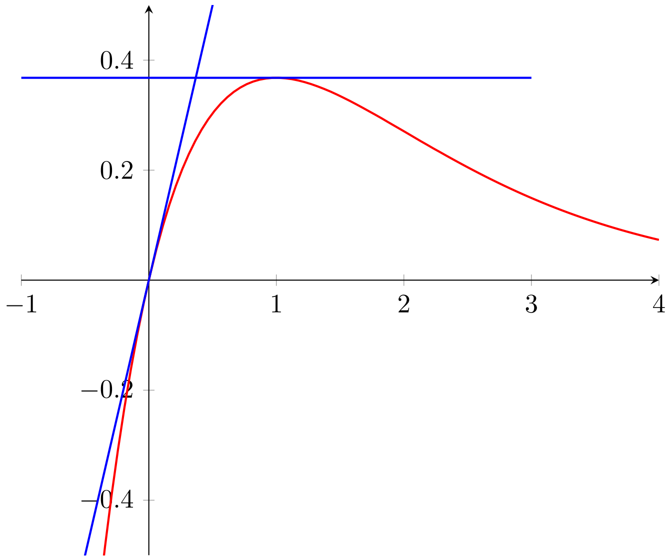
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x}>0$, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

2) En $+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ par croissances comparées.

3) L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est $T_a : y=f'(a)(x-a)+f(a)$.
On a $f'(0)=1$, $f'(1)=0$, $f(0)=0$ et $f(1)=\mathrm{e}^{-1}$.
On en déduit que l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est $y=x$ et l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est $y=\mathrm{e}^{-1}$.

4) On a



Correction de l'exercice 3 :

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est défini si et seulement si $2x+5 \neq 0$, si et seulement si $x \neq -\frac{5}{2}$.

$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}\} =]-\infty, -\frac{5}{2}[\cup]-\frac{5}{2}, +\infty[.}$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) \text{ est défini} &\iff \frac{x^2-3x+2}{x+7} > 0 \\ &\iff \frac{(x-1)(x-2)}{x+7} > 0 \end{aligned}$$

On résout $\frac{x^2-3x+2}{x+7} > 0$ sur $\mathbb{R}$ et on obtient

x	$-\infty$		-7		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+7$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{x^2-3x+2}{x+7}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-7, 1[\cup]2, +\infty[$.

$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{D}_f =]-7, 1[\cup]2, +\infty[}$

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 \geq 0$ donc $x^2+1 \geq 1 > 0$. Ainsi, $\sqrt{x^2+1}$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ et de plus $\sqrt{x^2+1} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}, \mathcal{D}_f = \mathbb{R}.}$

4) La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) \text{ est défini} &\iff \exp(x^2) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x^2 \neq \ln\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad k \in \mathbb{N} && \text{car } \ln(x) \text{ n'est défini que pour } x > 0 \\ &\iff x \neq -\ln\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \quad \text{et} \quad x \neq \ln\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Finalement, } \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-\ln\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), \ln\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \mid k \in \mathbb{N}\}}$

Correction de l'exercice 4 :

1) f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ car $x+2$ et e^{-x} sont définies pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On a $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+2)\,\mathrm{e}^{-x} = -\infty$ par produit.
$\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$ par croissance comparée donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$.
De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{-x} - (x+2)\,\mathrm{e}^{-x} \\ &= \mathrm{e}^{-x}(-x-3) \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $^{-x} > 0$ donc $f(x)$ est du même signe que $-x-1$. On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$\mathrm{e}^{-x}(-x-1)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

La courbe représentative de f_1 admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

2) — $\ln(x+1)$ est défini si et seulement si $x > -1$, donc f_2 est définie sur $]-1,+\infty[$.
— En -1, on a $\lim\limits_{x\to-1} \ln(x+1) = \lim\limits_{X\to 0} \ln(X) = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to-1} x^2 = 1$, donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\infty$.
En $+\infty$, on a $f_2(x) = -x^2\left(1 - \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}\right)$
Or, pour $x \geq 0$, on a $0 \leq \dfrac{\ln(x+1)}{x^2} \leq \dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ car $\forall x \in [0,+\infty[$, $x^2 \leq (x+1)^2$.
Par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} = 0$. Par comparaison, on en conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x^2} = 0$
Ainsi, par opérations, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
— f_2 est dérivable comme somme de fonctions dérivables, et pour tout $x \in]-1,+\infty$ on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x+1} - 2x \\ &= \frac{1-2x(x+1)}{x+1} \\ &= \frac{-2x^2-2x+1}{x+1} \end{aligned}$$

<u>Etude du signe de $-2x^2-2x+1$:</u> $\Delta = 4+8 = 12$
$x_1 = \dfrac{2-\sqrt{12}}{-4} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{12}}{-4} = \dfrac{-\sqrt{3}-1}{2}$
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	1		$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$		$+\infty$
$-2x^2-2x+1$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$+$		$+$	
f_2	$-\infty$	$\nearrow$	$f_2(x_1)$	$\searrow$	$-\infty$

3) — $\sqrt{e^x - 1 - x}$ est défini si $e^x - 1 - x > 0$.
Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$ (on le prouve en étudiant les variations de la fonction $g : x \mapsto e^x - x - 1$). Ainsi, f_3 est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

— En $+\infty$, on a $f_3(x) = \sqrt{e^x (1 - e^{-x} - x e^{-x})}$
Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$. Par opérations sur les limites, on a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x (1 - e^{-x} - x e^{-x}) = +\infty$
Par composition, comme $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = +\infty$
En $-\infty$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - 1 - x) = +\infty$ par opérations, donc par composition $\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = +\infty$.

— f est dérivable pour tout x tel que $e^x - 1 - x \neq 0$, c'est à dire $x \neq 0$ (voir étude de la fonction $g : x \mapsto e^x - x - 1$) et on a

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{2\sqrt{e^x - 1 - x}}$$

On en déduit le tableau suivant

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	
$2\sqrt{e^x - 1 - x}$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	$\parallel$	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4) — $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \sin x \leq 1$ donc $1 \leq 2 + \sin x \iff 3$. f_4 est donc définie sur $\mathbb{R}$.

— $f_4(x)$ n'a pas de limite aux bornes de l'ensemble de définition. En effet, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f_4(\frac{\pi}{2} + n\pi) = \begin{cases} \ln(3) & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

— f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme compoée de fonction dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$$

Or $2 + \sin x \geq 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $f'(x)$ est du même signe que $\cos x$.
Ainsi, $f'(x) \geq 0$ si $x \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et $f'(x) < 0$ sinon.
On en déduit que f est croissante sur tout intervalle de la forme $x \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ et décroissante sur tout intervalle de la forme $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

5) — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \cos^2(x) \leq 1$. Ainsi $f_5(x)$ est définie si et seulement si $\cos(x) \neq 0$.
Sur $\mathbb{R}$, on a $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Aini, f_5 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

— Tout réel de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ est une borne de l'ensemble de définition de f_5.
Soit $k \in \mathbb{Z}$, on a $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} + k\pi} \cos^2(x) = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \ln(X) = -\infty$, donc par composition $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} + k\pi} f_5(x) = -\infty$.

— f_5 est 2π-périodique. On étudie ses variations sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
De plus, f_5 est paire donc on étudie ses variations sur $[0, \pi] \setminus \{\pi/2\}$.
f_5 est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et sur $]\frac{\pi}{2}, \pi]$ et on a

$$f'(x) = \frac{-2 \sin x \cos x}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{-\sin(2x)}{\cos^2(x)}$$

Sur $[0,2\pi]$, $\sin X \geq 0 \iff X \in [0,\pi]$, donc sur $[0,\pi]$, $\sin(2x) \geq 0 \iff 2x \in [0,\pi] \iff x \in [0,\frac{\pi}{2}]$
On en déduit le tableau de variation suivant

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$-\sin(2x)$		$-$	0	$+$	
$\cos^2(x)$		$+$	0	$+$	
$f_5'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	
$f_5(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0

On en déduit par parité de f_5 le tableau de variation sur $[-\pi,\pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f_5(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0

Et les variations de f_5 sur son ensemble de définition peuvent être déduite par 2π-périodicité de f.

6) — $f_6(x)$ est défini si et seulement si $\tan x \geq 0$
Dans $[0,\pi]$ on a $\tan x \geq 0 \iff x \in [0,\frac{\pi}{2}]$. Comme tan est π-périodique, on a dans $\mathbb{R}$:

$$\tan x \geq 0 \iff x \in [0+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi]\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [k\pi\ ;\ \frac{\pi}{2}+k\pi[$$

Ainsi f_6 est définie sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[k\pi\ ;\ \frac{\pi}{2}+k\pi[$.

— Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k\pi$ et $\frac{\pi}{2}+k\pi$ sont des bornes de l'ensemble de définition de f_6.
Soit $k \in \mathbb{Z}$, $\lim_{x\to k\pi} \tan x = 0$ et comme $\lim_{X\to 0} \sqrt{X} = 0$ on a $\lim_{x\to k\pi} f_6(x) = 0$.
De plus, $\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x<\frac{\pi}{2}+k\pi}} \tan x = +\infty$, et $\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc par composition de limites $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi} f_6(x) = +\infty$.

— Pour que f_6 soit dérivable, il faut en plus que $\tan x \neq 0$. Ainsi, f_6 est dérivable sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi\ ;\ \frac{\pi}{2}+k\pi[$ et pour tout x dans cet ensemble on a

$$f'(x) = \frac{\tan'(x)}{2\sqrt{\tan x}}$$
$$= \frac{1+\tan^2(x)}{2\sqrt{\tan x}}$$

Pour tout x dans l'ensemble de dérivabilité, $\tan^2(x) > 0$ donc $1+\tan^2(x) \geq 1 > 0$ et $2\sqrt{\tan x} > 0$.
Ainsi, f_6 est strictement croissante sur tout intervalle où elle est définie.
Sur $[0,\pi]$, on a donc le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	$\Vert$	$+$			$\Vert$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$		

Et comme f_6 est π-périodique ce tableau donne également les variations de f sur tout son ensemble de définition.

Correction de l'exercice 5 :

1) — Limite en $+\infty$: $f_1(x) = \dfrac{e^x(1+2x\,e^{-x}}{e^x(1-x\,e^{-x})} = \dfrac{1+2x\,e^{-x}}{1-x\,e^{-x}}$

par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{-x}$ donc par opérations $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 1$

— Limite en $-\infty$: $f_1(x) = \dfrac{x(\frac{e^x}{2}+2)}{x(\frac{e^x}{x}-1)} = \dfrac{\frac{e^x}{x}+2}{\frac{e^x}{x}-1}$ donc par opérations, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -2$.

La courbe représentative de f_1 admet donc deux asymptotes horizontales d'équation $y=1$ et $y=-2$.

2) — Limite en $+\infty$: $f_2(x) = \dfrac{x^2(1+\frac{\ln x}{x})}{\ln x(\frac{1}{\ln x}-1)} = \dfrac{x^2}{\ln x} \times \dfrac{1+\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{\ln x}-1}$.

Par opérations on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} = -\infty$.

— f n'est pas définie sur $]-\infty, 0]$.

Ainsi la courbe représentative de f_3 n'admet aucune asymptote horizontale.

3) — En $+\infty$ et en $-\infty$:

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(\frac{1}{x}-3\right)} \\ &= x \times \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-3} \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} = +\infty$. f_3 n'a pa d'asymptote horizontale.

— Le dénominateur de $f_3(x)$ s'annule en $x = \dfrac{1}{3}$. De plus, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} (x^2+x+1) = \dfrac{13}{9}$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{3}\\ x>\frac{1}{3}}} f_3(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{3}\\ x<\frac{1}{3}}} f_3(x) = +\infty$

La courbe représentative de f_3 admet donc une asymptote vertiale d'équation $x = \dfrac{1}{3}$.

4) — En $+\infty$:

$$\begin{aligned} f_4(x) &= \frac{e^{2x}\left(x^2\,e^{-2x}+x\,e^{-2x}+1\right)}{e^x\left(x^2\,e^{-x}-1\right)} \\ &= e^x \times \frac{x^2\,e^{-2x}+x\,e^{-2x}+1}{x^2\,e^{-x}-1} \end{aligned}$$

Or pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n\,e^{-x} = 0$ donc par opération $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x) = -\infty$.

— En $-\infty$:

$$\begin{aligned} f_4(x) &= \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{e^{2x}}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{e^x}{x^2}\right)} \\ &= \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{e^{2x}}{x^2}}{1-\frac{e^x}{x^2}} \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$, donc par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

La courbe représentative de f_4 admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} f_5(x) = 0$ par croissance comparée, donc la courbe représentative de f_5 admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
   f_5 n'est pas définie sur $]-\infty, 0]$.
6) f_6 est définie sur $[0, +\infty[$.
   $\forall x \in [0, +\infty[$, $\sqrt{e^x} = e^{x/2}$. Ainsi

$$\begin{aligned} f_6(x) &= \frac{e^{x/2}\left(e^{-x/2}+1\right)}{e^{\sqrt{x}}\left(e^{-\sqrt{x}}+1\right)} \\ &= e^{x/2-\sqrt{x}} \times \frac{e^{-x/2}+1}{e^{-\sqrt{x}}+1} \end{aligned}$$

   Or par opérations $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x/2}+1}{e^{-\sqrt{x}}+1} = 1$.
   De plus, $\dfrac{x}{2} - \sqrt{x} = x\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{x}}{x}\right) = x\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} - \sqrt{x} = +\infty$ par produit.
   On en conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_6(x) = +\infty$.
   La courbe représentative de f_6 n'admet aucune asymptote horizontale.

Correction de l'exercice 6 :

1) Soit $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+b} - \sqrt{x+a})(\sqrt{x+b} + \sqrt{x+a}) &= (\sqrt{x+b})^2 - (\sqrt{x+a})^2 \\ &= x + b - (x + a) \\ &= b - a \end{aligned}$$

   d'où l'égalité $\sqrt{x+b} - \sqrt{x+a} = \dfrac{b-a}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}$
2) Lorsque x tend vers $+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+a} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+b} = +\infty$, donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Correction de l'exercice 7 :

1) $\dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ est le taux d'accroissement de la fonction $x \mapsto x^n$ entre 1 et x. Lorsque x tend vers 1, ce taux d'accroissement tend vers le nombre dérivé de $x \mapsto x^n$ en 1.
   Or $(x^n)' = nx^{n-1}$, donc $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1} = n \times 1^{n-1} = n$.

   Sans utiliser le taux d'accroissement, on peut aussi écrire $x^n - 1 = (x-1)\sum_{k=0}^{n-1} x^k$ donc $\forall x \neq 1$, $\dfrac{x^n - 1}{x - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \xrightarrow[x\to 1]{} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$.
2) On a pour tout $x > 1$, $\dfrac{x^n - 1}{x^m - 1} = \dfrac{x^n - 1}{x - 1} \times \dfrac{x - 1}{x^m - 1}$ donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{n}{m}$ par quotient de limites.

Correction de l'exercice 8 : f est dérivable sur $[0, 1[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
Pour tout $x \in [0, 1[$,

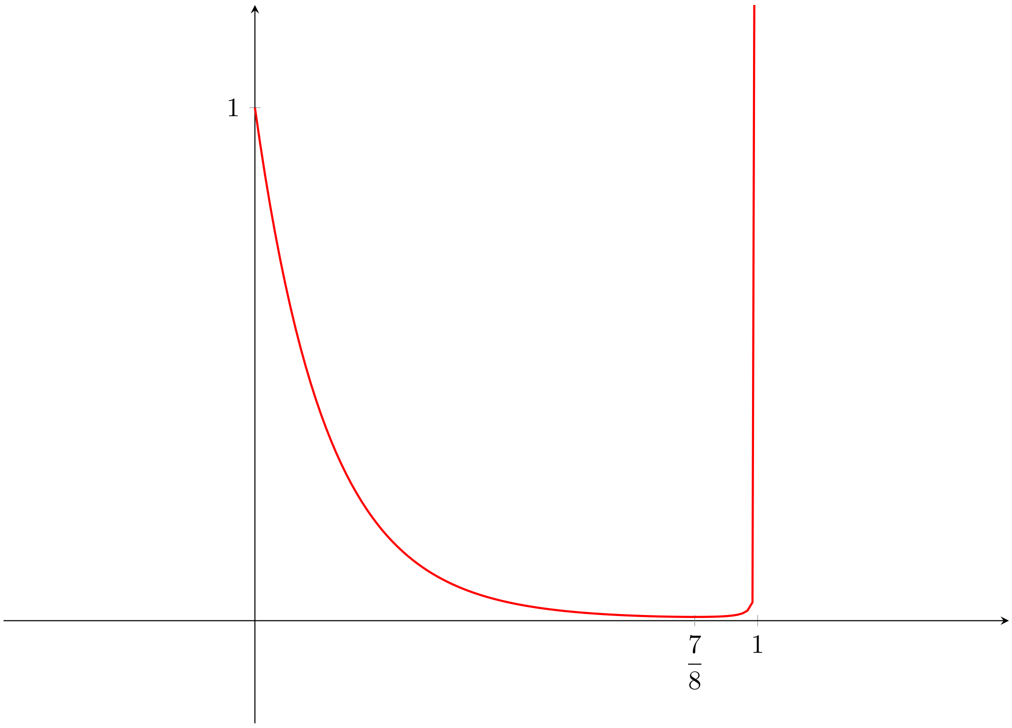
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-8\,e^{-8x}(1-x) + e^{-8x}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{e^{-8x}(8x - 7)}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in [0, 1[$, on a $e^{-8x} > 0$ et $(1-x)^2 > 0$.
$f'(x)$ est donc du même signe que $8x - 7$:

x	0		$\frac{7}{8}$		1
$8x-7$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$8\,\mathrm{e}^{-7}$	$\nearrow$	$+\infty$

De plus, $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x) = 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$

Courbe représentative de f :



Correction de l'exercice 9 :

1) f est continue sur $]0, +\infty[$ comme composée de fonctions continues, et continue sur $]-\infty, 0]$ comme fonction constante.
Montrons que f est continue en 0 :
À gauche on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} = 0$ car $f(x)$ est constante pour $x < 0$.
À droite on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty$ et comme $\lim\limits_{X\to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$ on a par composition $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{-1/x^2} = 0$.
Ainsin f est bien continue en 0.

2) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$ donc la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
$\lim\limits_{x\to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$ donc par composition $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$.
Ainsi la courbe représentative de f admet également une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.
f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle n'admet aucune asymptote verticale.

Correction de l'exercice 10 :

1) sin est définie sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

2) Pour tout $x \neq 0$, $-1 \leq \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1$ donc $-|x| \leq x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq |x|$
Or $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$ donc par encadrement $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Ainsi on peut prolonger f en une fonction $\hat{f}$ définie par

$$\hat{f} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Correction de l'exercice 11 :

$x \mapsto |x-1|$ est continue sur $[0;1[$ et sur $]1;+\infty[$ et strictement positive sur ces intervalles. Ainsi, $x \mapsto \ln(|x-1|)$ est continue sur $[0;1[$ et sur $]1;+\infty[$, donc f a aussi par produit et somme de fonctions continues.
Pour $x>1$, on pose $u = x-1$ et on obtient par composition de limites $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(x-1)\ln(|x-1|) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(x-1)\ln(x-1) = \lim\limits_{\substack{u\to0\\u>0}} u\ln(u) = 0$ par croissance comparée. De même, si $x<1$ on pose $u = 1-x$ et on obtient par composition de limites $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}(x-1)\ln(|x-1|) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}(x-1)\ln(1-x) = \lim\limits_{\substack{u\to0\\u>0}}(-u)\ln(u) = 0$ par croissance comparée.
On trouve donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = 0$, donc on peut prolonger f par continuité en une fonction $\widehat{f}$ définie par

$$\begin{aligned}\widehat{f} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \begin{cases}(x-1)\ln(|x-1|) \text{ si } x\neq 1\\ 0 \text{ si } x=1\end{cases}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 12 :

1) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, et pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x) = 1+\dfrac{1}{x} > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
Lorsque x tend vers 0, on a $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$ par somme. Lorsque x tend vers $+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
On a $0 \in]-\infty,+\infty[$ et f est continue comme somme de fonctions continues, et strictement croissante sur $]0,+\infty[$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in]0,+\infty[$ tel que $f(\alpha)=0$.
2) On a $f(1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$, donc $0<\alpha<1$.

Correction de l'exercice 13 :

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^x = +\infty$ par produit, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par somme.
f est dérivable comme produit et somme de fonctions dérivables, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on $f'(x) = \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(1+x)$.
Pour tout $x>0$, $1+x \geq 1 \geq 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'(x)>0$, f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.
b) $f(0) = 0\times\mathrm{e}^0 - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On a $0 \in]-1,+\infty[$, f est continue car dérivable sur $[0,+\infty[$ et strictement croissante sur cet intervalle. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un unique $\alpha\in]0,+\infty[$ tel que $f(\alpha)=0$.
c) f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et $f(\alpha)=0$, ainsi $f(x)<0$ si $x<\alpha$ et $f(x)>0$ si $x>\alpha$.

2) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x - 1 = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
g est dérivable sur $[0,+\infty[$ comme produit de fonction dérivables, et pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a

$$\begin{aligned}g'(x) &= \mathrm{e}^x - 1 + (x-1)\,\mathrm{e}^x\\ &= x\,\mathrm{e}^x - 1\\ &= f(x)\end{aligned}$$

ainsi, d'après la question 1.c, on a le tableau de variations suivant :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	0		$(\alpha-1)(\mathrm{e}^\alpha - 1)$		$+\infty$

b) On a $g(\alpha) = (\alpha-1)(\mathrm{e}^\alpha - 1)$.
Or $f(\alpha) = 0$ donc $\alpha\,\mathrm{e}^\alpha = 1$ donc $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}g(\alpha) &= (\alpha-1)\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\\ &= (\alpha-1)\times\frac{1-\alpha}{\alpha}\end{aligned}$$

$$= -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$$

Correction de l'exercice 14 : On pose $g(x) = f(x) - x$. Puisque $f(x)$ est à valeur dans $[0,1]$, on a $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in [0,1]$ donc $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$.
Ainsi, $0 \in [g(1), g(0)]$ et g est continue sur $[0,1]$ comme somme de fonctions continues donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe réel $\alpha \in [0,1]$ tel que $g(\alpha) = 0$, donc tel que $f(\alpha) = \alpha$.
Correction de l'exercice 15 :

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \geq 1 > 0$ donc $1 + x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Ainsi f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}(1+x^2) - 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}(2+x^2)}{(1+x^2)^2}$$

or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$, $2 + x^2 \geq 2 > 0$ et $(1+x^2)^2 \geq 0$, donc $f'(x)$ est du même signe que $-2x$.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} = 0$ par composition et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x^2} = 0$ par composition. Par quotient, on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue, ainsi d'après le tableau de variation précédent et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-\infty, 0[$ et une unique solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$. On note x_1 et x_2 ces deux solutions

2) x_1 est telle que $f(x_1) = \dfrac{1}{2}$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-(-x)^2}}{1+(-x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1+x^2} = f(x)$ (f est paire), donc $f(-x_1) = f(x_1) = \dfrac{1}{2}$. Puisque l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ n'a que deux solutions, alors $-x_1$ est l'autre solution donc $-x_1 = x_2$.
On a $f(1) = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{2} < \dfrac{1}{2}$ car $-1 < 0$ donc $\mathrm{e}^{-1} < 1$.
Ainsi, d'après le tableau de variation de f, les solutions de $f(x) = \dfrac{1}{2}$ sont dans l'intervalle $[-1, 1]$

x	$-\infty$	$\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}$	0	$\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$	-1 $\nearrow$	1	$\searrow$ 1	$\searrow$ 0

Correction de l'exercice 16 : On pose $f_k(x) = x^4 - x^3 - k$, et on s'intéresse aux solutions de l'équation $f_k(x) = 0$.
f_k est dérivable en tant que fonction polynôme de degré 4 et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x-3)$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $4x - 3$.
On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De plus, $f(0) = -k$ et

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3^4}{4^4} - \frac{3^3}{4^3} - k = \frac{3^4 - 4 \times 3^3}{4^4} - k = \frac{3^3(3-4)}{4^4} - k = -\frac{3^3}{4^4} - k$$

On en déduit le tableau suivant

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$-k$	↘	$-\frac{3^3}{4^4}-k$	↗	$+\infty$

f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynômiale, d'après le théorème des valeurs intermédiaires et le tableau de variations ci-dessus, on en déduit qu'il y a plusieurs cas selon la valeur de k :

- Si $k < -\frac{3^3}{4^4}$, alors $-\frac{3^3}{4^4} - k > 0$ donc le minimum de f est strictement positif, $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
- Si $k = -\frac{3^3}{4^4}$, alors $f(x)$ s'annule lorsque $x = \frac{3}{4}$
- Si $-\frac{3^3}{4^4} < k < 0$, alors $f(x) = 0$ admet une solution dans $]0, \frac{3}{4}[$ et une solution dans $]\frac{3}{4}; +\infty[$.
- Si $k = 0$, alors 0 est l'unique solution de $f(x) = 0$ dans $]-\infty, \frac{3}{4}[$, et $f(x) = 0$ admet une autre solution dans $]\frac{3}{4}, +\infty[$.
- Si $k > 0$, alors $f(x) = 0$ admet une solution dans $]-\infty, 0[$ et une solution dans $]\frac{3}{4}, +\infty[$.

Correction de l'exercice 17 : Posons $f(x) = \cos x - \mathrm{e}^{-x^2}$, et montrons que $f(x)$ s'annule une infinité de fois.
Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(k\pi) = (-1)^k$, donc $f(k\pi) = (-1)^k - \mathrm{e}^{-k^2\pi^2}$.
Or, $-k^2\pi^2 < 0$ donc $0 < \mathrm{e}^{-k^2\pi^2} < 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
Ainsi, si k est pair, $f(k\pi) = 1 - \mathrm{e}^{-k^2\pi^2} > 0$ et si k est impair, $f(k\pi) = -1 - \mathrm{e}^{-k^2\pi^2} < 0$.
Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ (en tant que différence de fonctions continues), on peut appliquer le théorème des valeur intermédiaires à tout intervalle de la forme $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ et on obtient que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f(x)$ s'annule dans l'intervalle $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, autrement dit l'équation $f(x) = 0$ admet une infinité de solutions.

Correction de l'exercice 18 :

1) f_n est dérivable sur $[0,1]$ en tant que fonction polynômiale, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = nx^{n-1} + 1$.
Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, $f_n'(x) \geq 1 > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0,1]$. De plus, $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel $x_n \in]0,1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} > x_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on sait que $f_n(x_n) = 0$ donc que $x_n^n + x_n - 1 = 0$. On a $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + x_n - 1$.
Or, $0 < x_n < 1$ donc $x_n^{n+1} < x_n^n$. On en déduit que $f_{n+1}(x_n) < x_n^n + x_n - 1 = 0$. Ainsi, on en déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires que l'unique solution à l'équation $f_{n+1}(x) = 0$ se situe dans l'intervalle $]x_n, 1[$, autrement dit $x_{n+1} \in]x_n, 1[$ donc $x_n < x_{n+1}$.
Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que (x_n) est strictement croissante.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in]0,1[$, donc (x_n) est majorée par 1. Elle est croissante d'après la question précédente, donc elle converge vers un réel ℓ tel que $\ell \leq 1$.
4) Supposons que $\ell < 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x_n) = 0$ par définition. D'autre part, $f_n(x_n) = x_n^n + x_n - 1$.
Comme (x_n) est strictement croissante et x_n converge vers ℓ, on a $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \leq \ell < 1$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x_n) \leq \ell^n + \ell - 1$.
Comme $\ell < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell^n = 0$, donc par passage à la limite on obtient $\ell - 1 = 0$, contradiction. on en conclut que $\ell = 1$.

Correction de l'exercice 19 : Partie 1

1) $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \ln x$ sont des fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ donc g est dérivable (donc continue) sur cet intervalle et $\forall x \in]0; +\infty[,\ g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x}$. Or, $\forall x > 0$, $x^2 > 0$ donc $2x^2 + 1 > 0$ et $x > 0$ donc $g'(x) > 0$, on en conclut que g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
2) On a $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
On a montré à la question précédente que g est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $0 \in]\lim\limits_{x\to-\infty} g(x); \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel $\alpha \in]0; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
3) On a $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^2} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \ln(2)$. Or $\ln(2) > 0,69$ d'après l'énoncé donc $g\left(\frac{1}{2}\right) < 0,25 - 0,69 \leqslant -0,44 < 0$.
De plus, $g(1) = 1^2 + \ln(1) = 1$.
Comme $0 \in]g(1/2); g(1)[$ on en déduit que $\alpha \in]\frac{1}{2}; 1[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Partie 2

4) a) $x \mapsto x - \frac{1}{4}x^2$ est un polynôme de degré 2 donc dérivable sur I

$x \mapsto -\frac{1}{4}\ln x$ est dérivable sur I car $I \subset]0; +\infty[$

Ainsi, f est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables. De plus, pour tout $x \in I$ on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4x} \\ &= \frac{4x - 2x^2 - 1}{4x} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in I$, $x \geqslant \frac{1}{2} > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $-2x^2 + 4x - 1$. Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 4^2 - 4 \times (-2) \times (-1) = 8 > 0$ donc il a deux racines : $x_1 = \frac{-4-\sqrt{8}}{-4} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \frac{-4+\sqrt{8}}{-4} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Or, $\sqrt{2} > 1$ donc $2 - \sqrt{2} < 1$ et ainsi $\frac{2-\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{2}$.

De même, $2 + \sqrt{2} > 3$ donc $\frac{2+\sqrt{2}}{2} > \frac{3}{2} > 1$. Ainsi l'intervalle I est inclus entre les racines de $-2x^2 + 4x - 1$, ce polynôme est donc de signe constant sur cet intervalle et ne s'annule pas dans I car $x_1 \notin I$ et $x_2 \notin I$, et donc $\forall x \in I, f'(x) > 0$. On en conclut que f est strictement croissante sur I.

b) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{4}\ln(2) = \frac{7}{16} + \frac{1}{4}\ln(2)$

Or, $0,69 < \ln(2)$ donc $\frac{1}{4} \times 0,69 < \frac{1}{4}\ln(2)$ et ainsi $\frac{7}{16} + \frac{1}{4} \times 0,69 < f\left(\frac{1}{2}\right)$. On a $\frac{7}{16} + \frac{1}{4} \times 0,69 = \frac{7 + 4 \times 0,69}{16} = \frac{9,76}{16} > \frac{1}{2}$ donc $f\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$.

$f(1)$ est plus simple à calculer : $f(1) = 1 - \frac{1}{4} \times 1^2 - \frac{1}{4}\ln(1) = \frac{3}{4}$, donc $f(1) < 1$.

On a de plus $f(1) > f\left(\frac{1}{2}\right)$ car f est strictement croissante sur $[\frac{1}{2}; 1]$.

Finalement, on a bien $\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) < 1$.

c) Pour tout $x \in I$, on a $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ donc $f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(x) \leqslant 1$ car f est croissante sur I, et donc

$$\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(x) \leqslant f(1) < 1$$

Ainsi, $f(x) \in [\frac{1}{2}; 1]$. On a bien $\forall x \in I, f(x) \in I$.

5) a) $u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{3}{4}$.

b) $u_0 = 1$ donc $u_0 \in I$ et d'après la question 4.c) si $u_n \in I$ pour un certain entier n, alors $f(u_n) \in I$ donc $u_{n+1} \in I$. Ainsi la propriété « $u_n \in I$ » est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, donc par principe de récurrence elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$:« $u_{n+1} \leqslant u_n$ »

— **Initialisation :** $u_1 = \frac{3}{4}$ et $u_0 = 1$ donc $u_1 \leqslant u_0$.

— **Hérédité :** Supposons que $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour un certain entier n.
Puisque $u_{n+1} \in I$, $u_n \in I$ et que f est strictement croissante sur I, on a $f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$ d'où $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

— **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} \leqslant u_n$, donc que la suite (u_n) est décroissante.

d) La suite (u_n) est décroissante d'après la question précédente, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ donc $u_n \geq \frac{1}{2}$. (u_n) est décroissante et minorée donc elle converge vers un réel ℓ.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ par unicité de la limite, et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$ car f est continue sur I.

Ainsi, par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on a $\ell = f(\ell)$ donc $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell^2 - \frac{1}{4}\ln(\ell)$. On en déduit que $\ell^2 + \ln(\ell) = 0$ donc que ℓ est solution de l'équation $g(x) = 0$. Cette équation admet pour unique solution α d'après la première partie, donc $\ell = \alpha$.

Correction de l'exercice 20 : Soit $\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\ell' = \lim_{x\to-\infty} f(x)$.
Posons $\varepsilon = 1$. Il existe $A < B$ deux réels tels que $\forall x > B,\ f(x) \in]\ell+1\ ,\ \ell-1[$ et $\forall x < A,\ f(x) \in]\ell'-1\ ,\ \ell'+1[$. De plus, f est continue sur $[A, B]$ donc d'après le théorème des bornes atteintes f est bornée sur $[A, B]$. Soit $(m_0, M_0) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in [A, B],\ m_0 \leq f(x) \leq M_0$.
Posons maintenant $m = \min(\ell-1, \ell'-1, m_0)$ et $M = \max(\ell+1, \ell'+1, M_0)$. Alors, pour tout réel x, soit $x \in]-\infty, A[$ auquel cas $m \leq \ell'-1 < f(x) < \ell'+1 \leq M$, soit $x \in]B, +\infty[$ auquel cas $m \leq \ell-1 < f(x) < \ell+1 \leq M$, soit $x \in [A, B]$ auquel cas $m \leq m_0 \leq f(x) \leq M_0 \leq M$. Dans tous les cas on a $m \leq f(x) \leq M$, ainsi f est bornée par m et M sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 21 :

1) $f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
Commençons par étudier les variations et les limites de f :
Par opérations $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ et $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{3x}(\mathrm{e}^{-3x}-1)}{\mathrm{e}^{3x}(\mathrm{e}^{-3x}+1)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-3x}-1}{\mathrm{e}^{-3x}+1}$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$
De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables, et
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) &= \frac{-3\,\mathrm{e}^{3x}(1+\mathrm{e}^{3x}) - 3(1-\mathrm{e}^{3x})\,\mathrm{e}^{3x}}{(1+\mathrm{e}^{3x})^2}\\ &= \frac{-6\,\mathrm{e}^{3x}}{(1+\mathrm{e}^{3x})^2}\end{aligned}$$
donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$. On en déduit que f est strictement décroissante.
Finalement, f est continue comme quotient de fonctions continues et strictement décroissante, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires tout réel $y \in]-1, 1[$ admet un unique antécédent par f. On en conclut que $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$.
2) $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection réciproque, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R})$.
3) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1, 1[$, on a
$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{1-\mathrm{e}^{3x}}{1+\mathrm{e}^{3x}}\\ &\iff (1+\mathrm{e}^{3x})y = 1-\mathrm{e}^{3x}\\ &\iff \mathrm{e}^{3x}(y+1) = 1-y\\ &\iff \mathrm{e}^{3x} = \frac{1-y}{1+y} && \text{car } y \neq -1\\ &\iff 3x = \ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right) && \text{car } 1-y > 0 \text{ et } 1+y > 0\\ &\iff x = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right)\end{aligned}$$
donc la bijection réciproque de f est définie pour tout $x \in]-1, 1[$ par $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.

Correction de l'exercice 22 :

1) f est dérivable comme somme de fonctions dérivables.
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}$$
Or $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x) > 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2) Par somme de limites, $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$.
Comme sh est continue et strictement croissante, on en déduit d'après le théorème de la bijection réciproque que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

3) Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} y = \operatorname{sh}(x) &\iff y = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \\ &\iff 2y = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \\ &\iff 2y\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x} - 1 && \text{car } \mathrm{e}^x \neq 0 \\ &\iff (\mathrm{e}^x)^2 - 2y\,\mathrm{e}^x - 1 = 0 \end{aligned}$$

On pose $X = \mathrm{e}^x$ et on résout $X^2 - 2yX - 1 = 0$. On trouve $\Delta = 4y^2 + 4 > 0$ donc il y a deux valeurs de X qui annulent $X^2 - 2yX - 1$:

$$X_1 = \frac{2y - \sqrt{4y^2+4}}{2} = y - \sqrt{y^2+1} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{2y + \sqrt{4y^2+4}}{2} = y + \sqrt{y^2+1}$$

L'équation $\mathrm{e}^x = y - \sqrt{y^2+1}$ d'inconnue x n'a pas de solution car$y - \sqrt{y^2+1} < 0$.
L'équation $\mathrm{e}^x = y + \sqrt{y^2+1}$ d'inconnue x admet pour solution $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$ (on a $\forall y \in \mathbb{R}, y^2+1 > y^2$ donc $\sqrt{y^2+1} > |y|$ donc $y + \sqrt{y^2+1} > 0$).
Finalement, l'équation $\operatorname{sh} x = y$ admet pour unique solution $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$, donc la bijection réciproque de sh est $\operatorname{sh}^{-1} : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

4) Notons $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. $x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable et à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$ donc $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. $x \mapsto x + \sqrt{x^2+1}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positive comme vu à la question précédente. Ainsi, f est dérivable comme composée de fonctions dérivables, et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}(x + \sqrt{x^2+1})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 23 : Les sens réciproques sont les plus faciles. Supposons que k impair $\Rightarrow a_k = 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2k} x^{2k}$ donc $P(-x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2k}(-x)^{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2k} x^{2k} = P(x)$.
De même, si k pair $\Rightarrow a_k = 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2k+1} x^{2k+1}$ donc $P(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2k+1}(-x)^{2k+1} = -\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2k+1} - x^{2k+1} = -P(x)$.

Passons aux sens réciproques :
Supposons que P est une fonction paire, c'est à dire que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(-x) = P(x)$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} a_k(-x)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ donc $\sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - (-x)^k) = 0$.
Or pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $x^k - (-x)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 2x^k & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$.
On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2k+1} x^{2k+1} = 0$. Or un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, donc $\forall k \in [\![0, \lfloor n/2 \rfloor]\!]$, $a_{2k+1} = 0$, tous les coefficients de degré impairs de P sont donc nuls.
On procède de façon totalement analogue dans le cas où P est une fonction impaire.

Correction de l'exercice 24 :

1) Notons a_n le coefficient dominant de P. En $+\infty$ et en $-\infty$ on a $P(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} a_n x^n$. Si $a_n > 0$ on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} P(x) = \lim\limits_{n \to -\infty} a_n x^n = -\infty$.
Or, P est une fonction polynômiale donc est continue sur $\mathbb{R}$, et $0 \in]\lim\limits_{x \to -\infty} P(x); \lim\limits_{x \to +\infty} P(x)[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(x_0) = 0$.
De même, si $a_n < 0$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = -\infty$ et on conclut de la même manière.
Dans tous les cas, P admet au moins une racine réelle.

2) Supposons que $a_n > 0$, on a alors $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$.
Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque. Puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$, il existe un réel x_0 et un réel x_1 tel que $\forall x \leq x_0$, $P(x) > P(a)$ et $\forall x \geq x_1$, $P(x) > P(a)$.

À cause des inégalités strictes, on a nécessairement $x_0 < a < x_1$. Puisque P est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[x_0, x_1]$, P atteint son minimum sur $[x_0, x_1]$. Il existe $c \in [x_0, x_1]$ tel que $\forall x \in [x_0, x_1]$, $P(c) \leq P(x)$ et en particulier $P(c) \leq P(a)$. Ainsi pour tout réel x, trois cas sont possibles :

— Si $x \leq x_0$, alors $P(x) > P(a) \geq P(c)$.
— Si $x \in [x_0, x_1]$ alors $P(x) \geq P(c)$
— Si $x \geq x_1$, alors $P(x) > P(a) \geq P(c)$.

dans tous les cas on a $P(x) \geq P(c)$ donc $P(c)$ est le minimum de P sur $\mathbb{R}$ et il est atteint en c.

Correction de l'exercice 26 : On pose $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

On a $f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

Montrons que f est constante : f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables, et pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

donc f est constante sur $]0, +\infty[$. Finalement, pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$.