⋆

Exercice 1 — Voir correction

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1) Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F et $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E
2) Montrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
3) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.
   a) Montrer que $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.
   b) Montrer que f est injective si et seulement si $\big(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\big)$ est une famille libre.
   c) Montrer que f est un isomorphisme si et seulement si $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ est une base de F
4) Rappeler le théorème de la base incomplète, puis démontrer le théorème du rang : $\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E)$.

⋆

Exercice 2 — Voir correction

Dans chaque cas, déterminer si F est un sous-espace vectoriel de E et le cas échéant déterminer une base de F.

1) $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x = 0 \quad \text{et} \quad y = 0\big\}$, $E = \mathbb{R}^3$
2) $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0\big\}$, $E = \mathbb{R}^3$
3) $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z & = & 0 \\ y-z+2t & = & 0 \\ x-3y+z-t & = & 0 \end{array}\right.\right\}$, $E = \mathbb{R}^4$
4) $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \quad \left\{\begin{array}{rcl} 3x-y+2z+t & = & 0 \\ -x+y-z & = & 0 \\ 2x+z+t & = & 0 \end{array}\right.\right\}$, $E = \mathbb{R}^4$

⋆

Exercice 3 — Voir correction

Soit n un entier naturel non nul et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère l'ensemble $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E
2) Montrer que F est le noyau d'une application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ que l'on précisera.
3) En déduire la dimension de F.

⋆

Exercice 4 — Voir correction

Pour chacune des matrices suivantes, déterminer le rang, la dimension du noyau, une base de l'image et une base du noyau.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

⋆ ⋆

Exercice 5 — Voir correction

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note A^T la transposée d'une matrice A.

1) Montrer qu'il existe 6 réels a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3 tels que $M_{i,j} = a_i b_j$ pour tout $(i,j) \in \{1,2,3\}^2$
2) Justifier qu'il existe deux matrices colonnes A et B tels que $M = AB^T$.
3) Montrer que $M^2 = \mathrm{tr}(M)M$

⋆ ⋆

Exercice 6 — Voir correction

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

⋆ ⋆
Exercice 7 — **Voir correction**

On pose $T = D + N$ où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer une expression de T^n en fonction de D, N et n, puis en fonction seulement de n.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 8 — **Voir correction**

On appelle **homothétie** de E tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = \lambda \mathrm{id}_E$ pour un certain réel λ.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E qui laisse stable toute droite vectorielle de E (on dit que $F \subset E$ est stable par u si $u(F) \subset F$). Montrer que u est une homothétie.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 9 — **Voir correction**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et soient f et g deux endomorphismes de E.

1) Montrer que $\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
2) Montrer que $\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$ si et seulement si $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Im} g = \{0\}$ et $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} g = E$

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 10 — **Voir correction**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice fixée. Résoudre l'équation $X +^t X = \mathrm{tr}(X)A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 11 — **Voir correction**

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note f_A l'application qui à tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $\mathrm{tr}(AX)$.

1) Montrer que quel que soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.
2) Montrer que l'application suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ A &\longmapsto f_A \end{aligned}$$

Le coin des Khûbes

⋆ ⋆
Exercice 12 — **Voir correction**

Soit n un entier naturel non nul et soit u l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $u(P) = P(1-X)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

1) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Montrer que $u^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$.
3) En déduire qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul tel que $P(1-X) = P(X)$ ou $P(1-X) = -P(X)$.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 13 — **Voir correction**

(ENS 2024) On considère une application φ <u>non-constante</u> de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a :

$$\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$$

Attention ! L'application φ n'est pas supposée linéaire.

1) a) Soit O la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\varphi(O)$.
   b) Soit I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\varphi(I)$.
2) Montrer que si une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors $\varphi(A)$ est non-nul.
3) a) Soient A et B deux matrice de même rang. Montrer que $\varphi(A)$ est non-nul si et seulement si $\varphi(B)$ est non-nul.
   b) Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que A^m est nulle. Déterminer $\varphi(A)$.
   c) En déduire que si une matrice A vérifie $\varphi(A) \neq 0$, alors elle est inversible.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) $\mathrm{Im}(f)$ est non vide car $0_F = f(0_E) \in \mathrm{Im}(f)$.
Soient u et v deux éléments de $\mathrm{Im}(f)$ et λ, μ deux réels.
Alors, il existe u' et v' tels que $u = f(u')$ et $v = f(v')$. Ainsi, $\lambda \cdot u + \mu \cdot v = \lambda \cdot f(u') + \mu \cdot f(v') = f(\lambda \cdot u' + \mu \cdot v')$ car f est une application linéaire.
On en déduit que $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in \mathrm{Im}(f)$ donc que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Ker(f) est non vide car $f(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$.
Soient u et v deux éléments de $\mathrm{Ker}(f)$ et λ, μ deux réels.
$f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v)$ car f est linéaire, donc $f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot 0_E + \mu \cdot 0_E = 0_E$, ainsi $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in \mathrm{Ker}(f)$.
On en déduit que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

2) Supposons que f est injective. On sait que $f(0_E) = 0_F$, donc pour tout $x \in E$, $f(x) = 0_F \Rightarrow f(x) = f(0_E) \Rightarrow x = 0_E$ car f est injective. On en déduit que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
Réciproquement, supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ et soient $u \in E$ et $v \in E$ deux vecteurs tels que $f(u) = f(v)$. Alors $f(u) - f(v) = 0_E$ donc $f(u - v) = 0_E$. On en déduit que $u - v \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $u - v = 0_E$ et finalement $u = v$, f est donc injective.

3) a) Commençons par remarquer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, on a $f(e_k) \in \mathrm{Im}(f)$.
Soit $u \in \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $v \in E$ tel que $u = f(v)$. Or, $e_1, e_2, \dots, e_n$ est une base de E donc il existe $x_1, x_2, \dots x_n$ tels que $v = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \cdots + x_n \cdot en$ et ainsi $u = f(v) = x_1 \cdot f(e_1) + x_2 \cdot f(e_2) + \cdots + x_n \cdots f(e_n)$. Pour tout $u \in \mathrm{Im}(f)$, u peut s'écrire comme combinaison linéaire de $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ donc $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

b) <u>Supposons que $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une famille libre,</u> et soit $u \in \mathrm{Ker}(f)$. $\mathcal{B}$ est une base de E donc il existe $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $u = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \cdots + x_n \cdot e_n$. Ainsi, $0_F = f(u) = x_1 \cdot f(e_1) + x_2 \cdot f(e_2) + \cdots + x_n \cdot f(e_n)$. Or $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une famille libre donc $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ et donc finalement $u = 0_F$. On en conclut que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ donc que f est injective.
<u>Supposons que f est injective</u>, alors $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\lambda_1 \cdot f(e_1) + \lambda_2 \cdot f(e_2) + \cdots + \lambda_n \cdot f(e_n) = 0_F$. Alors, $f(\lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n) = 0_F$ par linéarité de F, donc $\lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n \in \mathrm{Ker}(f)$. On en déduit que $\lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n = 0_E$ donc que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ car $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E donc une famille libre. On en conclut que $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une famille libre.

c) f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$. D'après la question 3)a), f est donc surjective si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F.
D'après les questions 3)a) et 3)b), f est donc bijective si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une famille libre et génératrice de F, c'est à dire si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une base de F.

4) Si V est un espace vectoriel de dimensions finie n, si $\mathcal{F}_1 = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ est une famille libre de V, et $\mathcal{F}_2 = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ est une famille génératrice de V, alors on peut compléter la famille $\mathcal{F}_1$ à l'aide de vecteurs de $\mathcal{F}_2$ de sorte à en faire une base de V.
Démonstration du théorème du rang : Soit $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Alors $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est une famille libre de E, que l'on peut compléter par $n-p$ vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_{n-p}$ en une base $\mathcal{B}'$ de E : $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \dots, v_p, u_1, u_2, \dots, u_{n-p})$.
Alors $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_{n-p})$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$. En effet, c'est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ car $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_p)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ et que $f(v_1) = f(v_2) = \cdots = f(v_p) = 0_F$. Montrons que c'est une famille libre : soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-p}) \in \mathbb{R}^{n-p}$ tels que $\lambda_1 \cdot f(u_1) + \lambda_2 \cdot f(u_2) + \cdots + \lambda_{n-p} \cdot f(u_{n-p}) = 0_F$.
Alors, $f(\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_{n-p} \cdot u_{n-p}) = 0_F$ par linéarité de f, donc $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_{n-p} \cdot u_{n-p} \in \mathrm{Ker}(f)$.
Or $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est une base de f donc il existe $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ tels que

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_{n-p} \cdot u_{n-p} = \mu_1 \cdot v_1 + \mu_2 \cdot v_2 + \cdots + \mu_p \cdot v_p$$

donc

$$-\mu_1 \cdot v_1 - \mu_2 \cdot v_2 - \cdots - \mu_p \cdot v_p + \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_{n-p} \cdot u_{n-p} = 0_E$$

Or, $(v_1, v_2, \dots, v_p, u_1, u_2, \dots u_{n-p})$ est une base de E donc une famille libre, donc $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_p = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-p} = 0$. On en conclut que $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_{n-p}))$ est une famille libre, donc finalement c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
Ainsi, $\dim(E) = n = p + (n - p) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$

Correction de l'exercice 2 :

1) $0 = 0$ et $0 = 0$ donc $(0, 0, 0, 0) \in F$, ainsi F est non vide.
Soient $u = (x, y, z, t) \in F$ et $v = (x', y', z', t') \in F$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\lambda \cdot u + \mu \cdot v = (\lambda x + \mu x' \ , \ \lambda y + \mu y' \ , \ \lambda z + \mu z' \ , \ \lambda t + \mu t')$$

On a $\lambda x + \mu x' = 0$ car $x = x' = 0$ et $\lambda y + \mu y' = 0$ car $y = y' = 0$, donc $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$. Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
$\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad (x, y, z, t) \in F \iff (x, y, z, t) = (0, 0, z, t) \iff (x, y, z, t) = z(0, 0, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1), \ (z, t) \in \mathbb{R}^2.$
Ainsi, $\big((0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\big)$ est une famille génératrice de F donc une base de F puisque c'est une famille de deux vecteurs non nuls non colinéaires donc libre.

2) « $0 = 0$ ou $0 = 0$ » est vrai, donc $(0, 0, 0, 0) \in F$
F n'est cependant pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En effet, $(1, 0, 0, 0) \in F$ et $(0, 1, 0, 0) \in F$ mais $(1, 0, 0, 0) + (0, 1, 0, 0) = (1, 1, 0, 0) \notin F$.

3) $2 \times 0 + 0 + 0 = 0$, $0 - 0 + 2 \times 0 = 0$ et $0 - 3 \times 0 + 0 - 0 = 0$ donc $(0, 0, 0, 0) \in F$, ainsi F n'est pas vide.
Soient $u = (x, y, z, t) \in F$ et $v = (x', y', z', t') \in F$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\lambda \cdot u + \mu \cdot v = (\lambda x + \mu x' \ , \ \lambda y + \mu y' \ , \ \lambda z + \mu z' \ , \ \lambda t + \mu t')$$

On a

$$2(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') + (\lambda t + \mu t') = \lambda(2x + y + z + t) + \mu(2x' + y' + z' + t') = 0$$

et

$$(\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z') + 2(\lambda t + \mu t') = \lambda(y - z + 2t) + \mu(y' - z' + 2t') = 0$$

et

$$(\lambda x + \mu x') - 3(\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') - (\lambda t + \mu t') = \lambda(x - 3y + z - t) + \mu(x' - 3y' + z' + t') = 0$$

donc $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$, ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

$$\forall u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad u \in F \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y + z & = & 0 \\ y - z + 2t & = & 0 \\ x - 3y + z - t & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} x - 3y + z - t & = & 0 \\ y - z + 2t & = & 0 \\ 2x + y + z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} x - 3y + z - t & = & 0 \\ y - z + 2t & = & 0 \\ 7y - z + 2t & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} x - 3y + z - t & = & 0 \\ y - z + 2t & = & 0 \\ 6z - 12t & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3y - z + t \\ y & = & z - 2t \\ z & = & 2t \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2t + t \\ y & = & 0 \\ z & = & 2t \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -t \\ y & = & 0 \\ z & = & 2t \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow u = t(-1, 0, 2, 1), \quad t \in \mathbb{R}$$

donc F est la droite vectorielle engendrée par $(-1, 0, 2, 1)$.

4) $3\times 0 - 0 + 2\times 0 + 0 = 0$, $-0+0-0=0$ et $2\times 0+0+0=0$ donc $(0,0,0,0)\in F$, ainsi F est non vide.
Soient $u=(x,y,z,t)\in F$ et $v=(x',y',z',t')\in F$ et soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Alors

$$\lambda\cdot u+\mu\cdot v=(\lambda x+\mu x'\ ,\ \lambda y+\mu y'\ ,\ \lambda z+\mu z'\ ,\ \lambda t+\mu t')$$

On a

$$3(\lambda x+\mu x')-(\lambda y+\mu y')+2(\lambda z+\mu z')+(\lambda t+\mu t')=\lambda(3x-y+2z+t)+\mu(3x'-y'+2z'+t')=0$$

et

$$-(\lambda x+\mu x')+(\lambda y+\mu y')-(\lambda z+\mu z')=\lambda(-x+y-z)+\mu(-x'+y'-z')=0$$

et

$$2(\lambda x+\mu x')+(\lambda z+\mu z')+(\lambda t+\mu t')=\lambda(2x+z+t)+\mu(2x'+z'+t')=0$$

donc $\lambda\cdot u+\mu\cdot v\in F$, ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

$$\forall u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\quad u\in F\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}3x-y+2z+t&=&0\\-x+y-z&=&0\\2x+z+t&=&0\end{array}\right.$$

$$\xLeftrightarrow{L_1\leftrightarrow L_2}\left\{\begin{array}{rcl}-x+y-z&=&0\\3x-y+2z+t&=&0\\2x+z+t&=&0\end{array}\right.$$

$$\xLeftrightarrow[L_3\leftarrow L_3+2L_1]{L_2\leftarrow L_2+3L_1}\left\{\begin{array}{rcl}-x+y-z&=&0\\2y-z+t&=&0\\2y-z+t&=&0\end{array}\right.$$

$$\xLeftrightarrow{L_3\leftarrow L_3-L_2}\left\{\begin{array}{rcl}x&=&y-z\\t&=&z-2y\\0&=&0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow u=(y-z,y,z,z-2y),\quad (y,z)\in\mathbb{R}^2\quad\Leftrightarrow u=y(1,1,0,-2)+z(-1,0,1,1),\quad (y,z)\in\mathbb{R}^2$$

donc $\big((1,1,0,-2),(-1,0,1,1)\big)$ est une famille génératrice de F. C'est aussi une famille libre car elle est constituée de 2 vecteurs non nuls non colinéaires. C'est donc finalement une base de F.

Correction de l'exercice 3 :

1) Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
Alors $\lambda\cdot P+\mu\cdot Q\in\mathbb{R}_n[X]$ et $(\lambda\cdot P+\mu\cdot Q)(1)=\lambda\cdot P(1)+\mu\cdot Q(1)=0$, donc $\lambda\cdot P+\mu\cdot Q\in F$. Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Soit $\varphi: E\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(P)=P(1)$. Alors φ est une application linéaire, en effet pour tout $P,Q\in\mathbb{R}_n[X]$, pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$\varphi(\lambda\cdot P+\mu\cdot Q)=(\lambda P+\mu Q)(1)=\lambda P(1)+\mu Q(1)=\lambda\varphi(P)+\mu\varphi(Q)$$

Ainsi définie, F est le noyau de l'application linéaire φ.
3) φ est non nulle, il existe $P\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(P)\neq 0$ (par exemple avec $P=X$, $\varphi(P)=1$).
Ainsi, $\mathrm{rg}(\varphi)\geq 1$. Or $\mathrm{Im}(\varphi)\subset\mathbb{R}$ donc $\mathrm{rg}(\varphi)\leq 1$, on en déduit que $\mathrm{rg}(\varphi)=1$.
Finalement, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))+\mathrm{rg}(\varphi)=\dim(\mathbb{R}_n[X])$. Puisque $\dim(\mathbb{R}_n[X])=n+1$ d'après le cours, on en déduit que $\dim(F)=\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))=n+1-1=n$.

Correction de l'exercice 4 : Matrice A

On effectue un pivot de Gauss pour déterminer le rang :

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&1\\-1&4\end{pmatrix}\xleftrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_1}\begin{pmatrix}1&2\\3&1\\0&6\end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{L_2\leftarrow L_2-3L_1}\begin{pmatrix}1&2\\0&-5\\0&6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+\frac{6}{5}L_2}\begin{pmatrix}1&2\\0&-5\\0&0\end{pmatrix}$$

On obtient une matrice échelonnée de rang 2 donc A est de rang 2. Les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$ engendrent l'image de A, c'est donc une base de $\mathrm{Im}A$.
Pour trouver le noyau, on peut utiliser le théorème du rang pour remarquer que $\dim \mathrm{Ker}A + \mathrm{rg}A = 2$ donc $\dim \mathrm{Ker}A = 0$ donc $\mathrm{Ker}A = \{(0,0)\}$
Autre méthode : on calcule directement le noyau en résolvant le système $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ en utilisant la matrice échelonnée pour laquelle le système est équivalent :

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+2y &=& 0\\ -5y &=& 0\\ 0 &=& 0\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ y &=& 0\end{array}\right.$$

$\mathrm{Ker}A$ est de dimension 0 donc sa base est vide.

Matrice B
On effectue un pivot de Gauss pour déterminer le rang :

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix} \xleftrightarrow[]{\substack{L_3\leftarrow L_3-L_1\\ L_2\leftarrow L_2-2L_1}} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$$
$$\xleftrightarrow{L_3\leftarrow 3L_3-2L_2} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Donc B est équivalente à une matrice échelonnée de rang 2 donc elle est de rang 2.
Les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}1$ sont dans $\mathrm{Im}B$, et ils forment une famille libre car ils ne sont pas colinéaires. Ces deux vecteurs forment donc une base de $\mathrm{Im}B$.
Pour déterminer $\mathrm{Ker}B$ on résout $B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0$ à partir de la matrice échelonnée

$$B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-y+z &=& 0\\ 3y+3z &=& 0\\ 0 &=& 0\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2z\\ y &=& -z\\ 0 &=& 0\end{array}\right.$$

On peut écrire toutes les coordonnées en fonction de z, on voit donc que $\mathrm{Ker}B$ est de dimension 1 et que $\mathrm{Ker}B = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$

Matrice C
On effectue un pivot de Gauss pour déterminer le rang

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \xleftrightarrow[]{\substack{L_3\leftarrow L_3-L_1\\ L_2\leftarrow L_2+L_1}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$
$$\xleftrightarrow{L_2\leftarrow L_3-L_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

C est équivalente à une matrice échelonnée de rang 3 donc elle est de rang 3.
Les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ forment une famille génératrice de $\mathrm{Im}C$, donc forment une base de $\mathrm{Im}C$.
C est inversible, son noyau est donc réduit à $\{0\}$

Matrice D
On effectue un pivot de Gauss pour déterminer le rang

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&5&6\\5&6&7&8\end{pmatrix} \xleftrightarrow[L_2\leftarrow L_2-3L_1]{L_3\leftarrow L_3-5L_1} \begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-2&-4&-6\\0&-4&-8&-12\end{pmatrix}$$
$$\xleftrightarrow{L_3\leftarrow L_3-2L_2} \begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-2&-4&-6\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

D est équivalente à une matrice échelonnée de rang 2 donc elle est de rang 2.
Les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$ forment une famille libre de $\mathrm{Im}D$ car ils ne sont pas colinéaires, donc ils forment une base de $\mathrm{Im}D$.
Pour déterminer $\mathrm{Ker}D$, on résout le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} x & +2y & +3z & +4t & = & 0\\ & -2y & -4z & -6t & = & 0\\ & & & 0 & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2y-3z-4t\\ y & = & -2z-3t\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & z+2t\\ y & = & -2z-3t\end{array}\right.$$

donc

$$S=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z+2t\\-2z-3t\\z\\t\end{pmatrix},\quad z,t\in\mathbb{R}\right\}$$

autrement dit

$$S=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix},\quad z,t\in\mathbb{R}\right\}$$

Donc $\mathrm{Ker}D=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

Correction de l'exercice 5 :

1) M est de rang 1 donc $\mathrm{Im}(M)$ est de dimension 1, c'est une droite vectorielle. Soit $U=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ un vecteur colonne tel que $\mathrm{Im}(M)=\mathrm{Vect}\,(U)$.
Comme les colonnes de M, $C_1=\begin{pmatrix}M_{1,1}\\M_{2,1}\\M_{3,1}\end{pmatrix}$, $C_2=\begin{pmatrix}M_{1,2}\\M_{2,2}\\M_{3,2}\end{pmatrix}$ et $C_3=\begin{pmatrix}M_{1,3}\\M_{2,3}\\M_{3,3}\end{pmatrix}$ sont toutes trois dans $\mathrm{Im}M=\mathrm{Vect}\,(U)$, il existe trois réels b_1,b_2,b_3 tels que $C_1=b_1\cdot U$, $C_2=b_2\cdot U$ et $c_3=b_3\cdot U$
On a alors bien $M_{i,j}=a_ib_j$ pour tous $i,j\in\{1,2,3\}$
2) Il suffit de poser $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ pour avoir $M=AB^T$
3) $M^2=(AB^T)(AB^T)=A(B^TA)B^T$
Or, $B^TA=(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\mathrm{tr}(M)$
Ainsi, $M^2=A\times\mathrm{tr}(M)\times B^T=\mathrm{tr}(M)AB^T=\mathrm{tr}(M)M$

Correction de l'exercice 6 :
Comme $f^2\neq 0$, il existe $e_1\neq 0$ tel que $f^2(e_1)\neq 0$. Posons $e_2=f(e_1)$ et $e_3=f(e_2)=f^2(e_1)$. Montrons que (e_1,e_2,e_3) est une base de E.
Montrons d'abord que ces trois vecteurs sont non nuls : c'est déjà établi pour e_1 et e_3. Si e_2 était nul, on aurait $e_3=f(e_2)=0$ ce qui contredirait l'hypothèse sur e_1.

Soient $\lambda_1, \lambda_2\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$.
Alors $0 = f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3) = \lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_3 + 0$ car $f(e_3) = f^3(e_1) = 0$ puisque f^3 est l'application nulle.
Ainsi $\lambda_1 e_2 = -\lambda_2 e_3$. En appliquant f on obtient $\lambda_1 e_3 = 0$ donc $\lambda_1 = 0$. On en déduit des égalités ci-dessus que $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Ainsi, e_1, e_2 et e_3 sont libres, donc c'est une base de E.

Dans cette base, la matrice représentative de f est bien $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 7 : Le calcul donne $N^2 = 0$ donc N est nilpotente et pour tout $k \geq 2$ on a $N^k = 0$. D est diagonale donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $D^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$.

Pour appliquer la formule du binôme de Newton <u>il faut d'abord vérifier que D et N commutent.</u> Le calcule donne $DN = ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc elles commutent bien, et on peut alors écrire pour tout entier $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} T^n &= (D+N)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k N^{n-k} \end{aligned}$$

Or $N^{n-k} = 0$ dès que $n - k \geq 2$ donc dès que $k \leq n-2$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=n-1}^{n} \binom{n}{k} D^k N^{n-k} \\ &= \binom{n}{n-1} D^{n-1} N + \binom{n}{n} D^n I_3 \end{aligned}$$

On calcule $D^{n-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour obtenir finalement :

$$\begin{aligned} &= n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 8 : Pour tout $x \in E$, $\mathrm{Vect}\,(x)$ est stable par u donc $u(x)$ est colinéaire avec x. Pour tout $x \in E$ il existe donc un réel λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$, et nous devons donc montrer que ce λ_x (qui dépend a priori de x) ne dépend en fait pas de x.

Soient x et y deux vecteurs non nuls quelconques de E.
Si $y \in \mathrm{Vect}\,(x)$ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $y = kx$ donc $u(y) = ku(x) = k\lambda_x x = \lambda_x y$ donc $\lambda_y = \lambda_x$
Si x et y sont non colinéaires, on a $u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y$ d'une part par hypothèse de l'énoncé, et $u(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$ d'autre part. On obtient l'égalité

$$\lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y = \lambda_x x + \lambda_y y$$

et puisque (x, y) forme une famille libre on peut identifier les coefficients et on obtient $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.
Dans tous les cas on a donc $\lambda_x = \lambda_y$, ainsi le réel λ tel que $u(x) = \lambda x$ ne dépend pas du vecteur x considéré, on en conclut que $u = \lambda \cdot \mathrm{id}$.

Correction de l'exercice 9 :

1) Pour tout $x \in E$ on a $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$ donc $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. On en déduit que $\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
2) Supposons que l'inégalité précédente soit une égalité. Alors par égalité des dimensions, on a $\mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. D'après la formule de Grassmann $\dim(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) - \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g))$, on en déduit que $\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)) = 0$ donc $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$.

Pour montrer que $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) = E$, on commence par montrer que $\mathrm{Ker}(f+g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$.
En effet, si $x \in \mathrm{Ker}(f+g)$, alors $f(x) = -g(x) = g(-x)$ Ainsi, $f(x)$ et $g(x)$ sont tous deux dans $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$ donc $f(x) = g(x) = 0$, d'où $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(f+g) \subset \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$. L'inclusion réciproque est immédiate.

On a maintenant :

$$\begin{aligned}
\dim(\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g)) &= \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g)) - \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) \\
&= n - \mathrm{rg}(f) + n - \mathrm{rg}(g) - \dim(\mathrm{Ker}(f+g)) \\
&= 2n - \mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g) - (n - \mathrm{rg}(f+g)) \\
&= n \qquad \text{car } \mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \text{ par hypothèse}
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) = E$ par inclusion et égalité des dimensions.

Correction de l'exercice 10 : Raisonnons par analyse synthèse et supposons que $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est solution de l'équation $X +^t X = \mathrm{tr}(X)A$. On peut remarquer que $X +^t X$ est une matrice symétrique donc soit A est symétrique, soit A n'est pas symétrique auquel cas $\mathrm{tr}(X) = 0$.

— Supposons que $\mathrm{tr}(X) = 0$. Alors l'équation devient $X +^t X = 0$ donc X est une matrice antisymétrique. Réciproquement, on vérifie immédiatement que si X est antisymétrique alors $X +^t X = \mathrm{tr}(X)A$ car dans ce cas $\mathrm{tr}(X) = 0$ (les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique étant tous nuls).
— Supposons que $\mathrm{tr}(X) \neq 0$ et que A est symétrique. L'équation peut se réécrire $X +^t X - \mathrm{tr}(X)A = 0$ ou encore :

$$\left(X - \frac{\mathrm{tr}(X}{2}A\right) +^t \left(X - \frac{\mathrm{tr}(X)}{2}A\right) = 0$$

car ${}^tA = A$. Ainsi la matrice $X - \frac{\mathrm{tr}(X)}{2}A$ est antisymétrique donc il existe $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $X = \frac{\mathrm{tr}(X)}{2}A + B$. En composant par la trace on obtient $\mathrm{tr}(X) = \frac{\mathrm{tr}(X)}{2}\mathrm{tr}(A)$ donc $\mathrm{tr}(A) = 2$ (car $\mathrm{tr}(X) \neq 0$). Dans le cas où $\mathrm{tr}(A) \neq 2$ l'équation n'a donc pas de solution. Si $\mathrm{tr}(A) = 2$, en posant $X = \lambda A + B$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et B une matrice carrée de taille n antisymétrique, on a $X +^t X = \lambda A + B + \lambda A - B = 2\lambda A$ d'une part, et $\mathrm{tr}(X)A = \lambda \mathrm{tr}(A)A = 2\lambda A$ d'autre part, donc X est solution du problème posé.

En conclusion, les matrices antisymétriques sont toutes solutions quel que soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A n'est pas symétrique ou $\mathrm{tr}(A) \neq 2$, il n'y a pas d'autres solutions. Si A est symétrique et $\mathrm{tr}(A) = 2$, toutes les matrices de la forme $X = \lambda A + B$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et B antisymétrique sont solutions.
En conclusion,

Correction de l'exercice 11 :

1) Il faut vérifier que l'application f_A est bien linéaire, quel que soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f_A(\lambda X + \mu Y) = \mathrm{tr}(A(\lambda X + \mu Y)) = \mathrm{tr}(\lambda AX + \mu AY) = \lambda \mathrm{tr}(AX) + \mu \mathrm{tr}(AY)$ par linéarité de la trace, donc finalement $f_A(\lambda X + \mu Y) = \lambda f_A(X) + \mu f_A(Y)$.
$\boxed{\text{Pour tout } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f_A \text{ est une application linéaire.}}$
2) Montrons d'abord que φ est linéaire :
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
L'application $f_{\lambda A + \mu B}$ est celle qui à tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $\mathrm{tr}(\lambda A + \mu B)X) = \lambda \mathrm{tr}(AX) + \mu \mathrm{tr}(BX) = \lambda f_A(X) + \mu f_B(X)$. Cette égalité étant vraie pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a bien $f_{\lambda A + \mu B} = \lambda f_A + \mu f_B$ donc $\varphi(\lambda A + \mu B) = \lambda \varphi(A) + \mu \varphi(B)$.
φ est donc une application linéaire entre espaces vectoriels.

Puisque $\dim(\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \times \dim(\mathbb{R}) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, il suffit de montrer que φ est injective.
Soit $A \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a $f_A = 0$ donc pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AX) = 0$.
En particulier, pour $X = E_{i,j}$ avec $E_{i,j}$ la matrice qui ne contient que des 0 sauf un 1 sur la i-ème ligne et j-ème colonne, AX est la matrice qui ne contient que des 0 sauf la i-ème colonne qui est la j-ème ligne de A. $\mathrm{tr}(AX) = 0$ implique alors que $a_{j,i} = 0$, et en généralisant ce raisonnement à tous les coefficients $1 \leq i, j \leq n$ on obtient que $A = 0$.
Ainsi, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$ donc φ est injective.
$\boxed{\text{On en conclut que } \varphi \text{ est bijective donc que c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels.}}$

Correction de l'exercice 12 :

1) Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.
On a donc pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $u(P) = P(1-X) = \sum_{k=0}^n a_k (1-X)^k$. Or, en développant, on obtient que pour tout entier k, $0 \leq k \leq n$, $(1-X)^k$ est un polynôme de degré k. Ainsi $P(1-X)$ est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à n comme somme de polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Ainsi u est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Montrons que u est linéaire : soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(1-X) \\ &= \lambda P(1-X) + \mu Q(1-X) \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q) \end{aligned}$$

donc u est bien linéaire. Finalement c'est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\begin{aligned} u(u(P)) &= u(Q) && \text{avec } Q(X) = P(1-X) \\ &= Q(1-X) \\ &= P(1-(1-X)) \\ &= P(X) \end{aligned}$$

donc $u^2(P) = P$, et ce quel que soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $u^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$.

3) On cherche à prouver l'existence d'un polynôme P vérifiant $u(P) = P$ ou $u(P) = -P$, c'est à dire $(u - \mathrm{id})(P) = 0$ ou $(u + \mathrm{id})(P) = 0$. Puisque $u - \mathrm{id}$ et $u + \mathrm{id}$ sont des applications linéaires, un tel polynôme P existe si l'un d'eux est non injectif.

Puisque $u^2 = \mathrm{id}$, on a $u^2 - \mathrm{id} = 0$ donc $(u - \mathrm{id}) \circ (u + \mathrm{id}) = 0$. Si $u - \mathrm{id}$ et $u + \mathrm{id}$ était tous deux injectifs, alors ils seraient tous deux bijectifs (car ce sont des endomorphismes), donc leur composée serait encore bijective ce qui est faux car c'est l'endomorphisme nul. Par l'absurde, on en conclut donc qu'au moins l'un deux est non injectif, donc que le noyau de l'un deux n'est pas réduit à $\{0\}$, donc qu'il existe P tel que $(u - \mathrm{id})(P) = 0$ ou $(u + \mathrm{id})(P) = 0$.

Correction de l'exercice 13 :

1) a) Par hypothèse on a $\varphi(O \times O) = \varphi(O)\varphi(O)$ donc $\varphi(O) = \varphi(O)^2$. L'équation $x = x^2$ n'a que deux solutions dans $\mathbb{R}$: 0 et 1. Ainsi $\varphi(O) = 0$ ou $\varphi(O) = 1$.
Supposons que $\varphi(O) = 1$, alors pour toute matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$1 = \varphi(O) = \varphi(OA) = \varphi(O)\varphi(A) = \varphi(A)$$

donc l'application φ est constante égale à 1 ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. On en conclut que $\varphi(O) = 0$.

b) De la même façon on obtient $\varphi(I) = \varphi(I^2) = \varphi(I)^2$ donc $\varphi(I) = 1$ ou $\varphi(I) = 0$.
Supposons que $\varphi(I) = 0$, alors pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\varphi(A) = \varphi(AI) = \varphi(A)\varphi(I) = 0$$

donc φ est constante égale à 0 ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. On en conclut que $\varphi(I) = 1$.

2) Supposons A inversible, alors $AA^{-1} = I$ donc :

$$1 = \varphi(I) = \varphi(AA^{-1}) = \varphi(A)\varphi(A^{-1})$$

Ainsi $\varphi(A)$ est non nul et de plus $\varphi(A)^{-1} = \dfrac{1}{\varphi(A)}$.

3) a) Si A et B sont de même rang, alors elles sont **équivalentes**, c'est à dire qu'il existe deux matrices inversibles P et Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $B = Q^{-1}AP$.
On a donc $\varphi(B) = \varphi(Q^{-1})\varphi(A)\varphi(P)$, et puisque $\varphi(Q^{-1})$ et $\varphi(P)$ sont tous deux non nuls on obtient que $\varphi(A)$ est non nul si et seulement si $\varphi(B)$ l'est.

b) On a par récurrence immédiate que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout entier naturel n : $\varphi(A^m) = \varphi(A)^m$.
Ainsi, s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^m = O$ on a $\varphi(A)^m = \varphi(A^m) = \varphi(O) = 0$. Si $m = 0$ alors $A^m = I \neq O$.
Pour tout $m \geq 1$, la seule solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^m = 0$ est $x = 0$ donc $\varphi(A) = 0$.

c) Raisonnons par contraposée et supposons que A ne soit pas inversible. Alors A est de rang inférieur ou égal à $n-1$. Notons r le rang de A et posons B la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$B = \left(\begin{array}{c|c} 0_{r,n-r} & I_r \\ \hline 0_{n-r,n-r} & 0_{n-r,r} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

B est clairement une matrice de rang r et elle est nilpotente d'ordre r (elle vérifie $B^r = 0$), donc $\varphi(B) = 0$ et $\varphi(A) = 0$ car elles ont le même rang. On en conclut par contraposée que si $\varphi(A) \neq 0$ alors A est inversible.