

★

Exercice 1

À l'aide d'une table de vérité, démontrer que $A \Rightarrow B$ et $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ ont les même valeurs de vérité.

★

Exercice 2

À l'aide d'une table de vérité, démontrer que $\neg(A \vee B)$ et $(\neg A) \wedge (\neg B)$ ont les même valeurs de vérité.

★

Exercice 3

Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes et leur négation :

- | | |
|--|--|
| 1) f est croissante sur $[a, b]$. | 6) m a la même parité que n . |
| 2) f est majorée sur $[a, b]$. | 7) Il existe un entier que l'on peut écrire comme somme de deux carrés. |
| 3) La suite (u_n) est bornée. | 8) 7 est le plus petit entier qu'on ne peut pas écrire comme la somme de trois carrés. |
| 4) La suite (u_n) tend vers $+\infty$. | |
| 5) p est un nombre premier (avec $p \in \mathbb{N}$). | |

★

Exercice 4

Pour chacune des propositions suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse, puis exprimer leur négation.

- | | |
|---|---|
| 1) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq x$ | 5) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x^2 = y) \wedge (y^2 = -x)$ |
| 2) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq x$ | 6) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, 0 < x_0 < \varepsilon$ |
| 3) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq x$ | 7) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, (2k = n) \vee (2k + 1 = n)$ |
| 4) $\exists x \in]0, +\infty[, x > 0, \forall y \in]0, +\infty[, x < y$ | |

★

Exercice 5

Pour chacune des implications suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse, exprimer sa réciproque et dire si elle est vraie ou fausse.

- 1) Si ABC est un triangle rectangle, alors la somme de ses angles (en radians) est égale à π .
- 2) Si ABC est un triangle, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
- 3) Si $x > 0$, alors $-x + 1 < 0$
- 4) Si $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.
- 5) Si f est une fonction croissante sur $[a, b]$, alors $f(a) < f(b)$
- 6) Si f est une fonction monotone sur $[a, b]$, alors

$$\forall c \in]a, b[, (f(c) - f(a)) \times (f(b) - f(c)) \geq 0$$

★

Exercice 6

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Montrer que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \iff a = c$ et $b = d$.

★

Exercice 7

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

- | | |
|---------------------------|-------------------------------|
| 1) $ 4 - x \leq 1$ | 3) $ x - 3 + x + 4 \leq 1$ |
| 2) $\sqrt{(x - 2)^2} > 1$ | |

★

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ alors $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

★

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n(n^2 + 5)$ est divisible par 3.

★

Exercice 10

Résoudre par analyse synthèse l'équation $\sqrt{4x+5} = x$

★

Exercice 11

Montrer par analyse-synthèse que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

★

Exercice 12

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations d'inconnue x suivantes :

a) $|x^2 - 100| \geq 96$

b) $|x - 1| \geq |x + 2|$

c) $|x - 5| + |6 - 2x| \geq 4$

★

Exercice 13

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\forall \varepsilon > 0, x < y + \varepsilon$, alors $x \leq y$.

★ ★

Exercice 14

Soit n un entier non nul et soit (x_1, x_2, \dots, x_n) une famille de n réels appartenant à $[0, \pi]$.

Montrer que si $\sin(x_1) + \sin(x_2) + \dots + \sin(x_n) \geq \frac{n\sqrt{3}}{2}$, alors il existe $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n, x_i \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$

★

Exercice 15

Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses (démonstration requise), et écrire leurs négations :

a) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}], \frac{1}{x^2} \geq n$

d) $(\forall a \in \mathbb{R}, a^n = a^m) \iff (m = n)$ (où m et n sont deux entiers)

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists q \in \mathbb{Q}, q^2 = x$

e) $(\forall x \in \mathbb{R}, (ax)^2 = (bx)^2) \iff (a = b)$ (où a et b sont deux réels)

c) $\forall y \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N}, \exists k \in \{-2; 2\}, y = \frac{kn}{2}$

★

Exercice 16

Si a et b sont deux réels, on note $\max(a, b)$ (respectivement $\min(a, b)$) le plus grand élément entre a et b (respectivement le plus petit), autrement dit $\max(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } b \leq a \\ b & \text{si } a < b \end{cases}$ (respectivement $\min(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } a \leq b \\ b & \text{si } b < a \end{cases}$)

Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$ et $\min(a, b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$.

★

Exercice 17

Résoudre dans \mathbb{R} les équations $\sqrt{x^3 + x^2 - x} = \sqrt{2x - 4x^2 - x^3}$ et $\sqrt{x - 2x^3} = \sqrt{5x^2 - 2x}$

★ ★

Exercice 18

Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) - f(xy) = x + y$.