CHAPITRE 7

ANALYSE

I. Fonctions réelles de la variable réelle

Définition 7.1

Une **fonctions réelles de la variable réelle** est une application $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ où $D_f \subset \mathbb{R}$. L'ensemble D_f est appelé **domaine de définition de** f.

1. Vocabulaire

a. Graphe

Définition 7.2

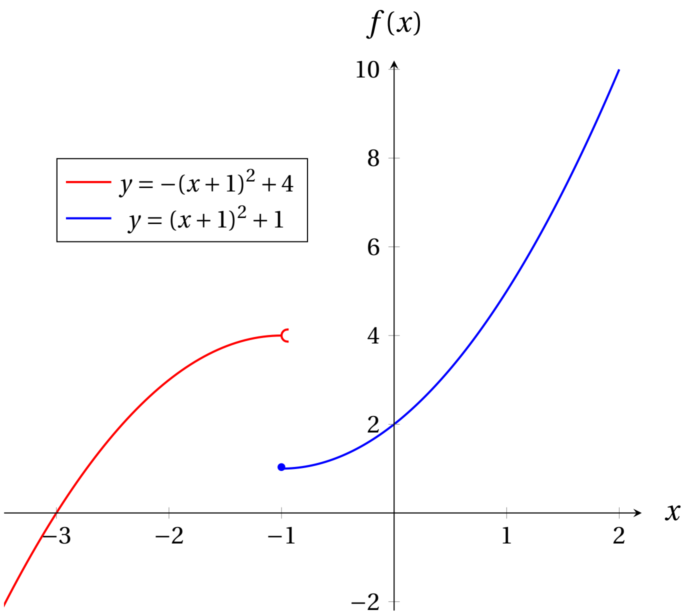
Soit f une fonction réelle définie sur D_f. On appelle **graphe de** f l'ensemble $\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$.
Cet ensemble est une partie de $\mathbb{R}^2$, on peut donc le représenter dans un plan muni d'un repère.

Exemple 7.1

Considérons la fonction suivante :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} -(x+1)^2+4 & \text{si } x < -1 \\ (x+1)^2+1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

f est définie sur $\mathbb{R}$, une partie de son graphe est représentée ci-contre :



b. Variations

Définition 7.3

Soit c un réel fixé et $D \subset \mathbb{R}$. On appelle **fonction constante égale à** c **sur** D la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & c \end{array}$$

On appelle **fonction nulle** la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}$$

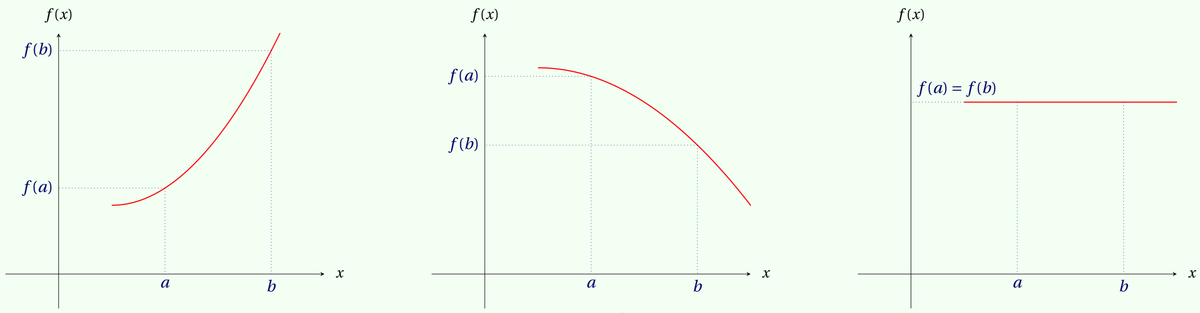
c'est à dire la fonction constante égale à 0.

BY NC

Définition 7.4

Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $I \subset D_f$ un intervalle. On dit que

- f est **croissante** sur I si $\forall (a,b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$
- f est **décroissante** sur I si $\forall (a,b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$
- f est **constante** sur I si $\forall (a,b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) = f(b)$



Fonction croissante   Fonction décroissante   Fonction constante

On dit que f est **monotone** sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.

c. Fonction périodique

Définition 7.5

Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est périodique s'il existe un réel $T \neq 0$ tel que pour tout réel $x \in D_f$ pour lequel $x + T \in D_f$ on a $f(x+T) = f(x)$. On dit alors que T est une **période** de f (ou que f est T-périodique).

Exemple 7.2

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π.
La fonction tangente est périodique de période π. En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

Remarque

Si f est T-périodique, alors f est aussi $2T$-périodique, $3T$-périodique, etc. La période d'une fonction périodique n'est donc pas unique.

d. Parité

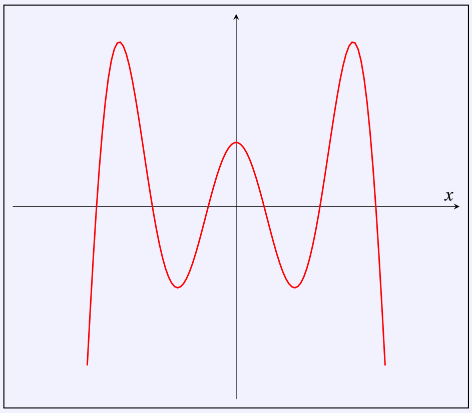
Définition 7.6

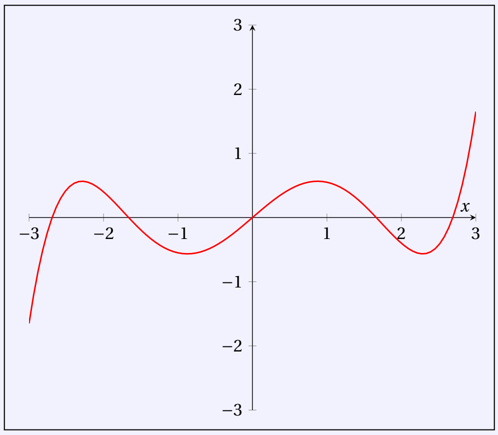
Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ (on dit que D_f est symétrique par rapport à 0).

- On dit que f est **paire** si $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$
- On dit que f est **impaire** si $\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x)$.

Propriété 7.1

- La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. En effet, si $(x, f(x)) \in \mathcal{C}_f$, alors $(-x, f(-x)) = (-x, f(x))$ est un point de $\mathcal{C}_f$. Ces deux points sont bien symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
- De même, la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.





Fonction paire

Fonction impaire

Remarque

Si f est paire, alors $f(0)=0$. En effet, il faut avoir $f(-0)=-f(0)$ donc $f(0)=-f(0)$ d'où $2f(0)=0$ et finalement $f(0)=0$.

Exemple 7.3

Quelques fonctions paires :

- $x \longmapsto x^n$ lorsque $n \in \mathbb{Z}$ est pair (d'où le nom)
- $x \longmapsto \cos x$

Quelques fonctions impaires :

- $x \longmapsto x^n$ lorsque $n \in \mathbb{Z}$ est impair
- $x \longmapsto \sin x$
- $x \longmapsto \tan x$
- $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

Propriété 7.2

La seule fonction à la fois paire et impaire est la fonction nulle $x \longmapsto 0$.

e. Opérations

Définition 7.7

Si f et g sont deux fonctions définies sur un même ensemble D, on définit les fonctions **somme** et **produit** de f et g, notées $f+g$ et $f\times g$, par

$$f+g: \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \quad \text{et} \quad f\times g: \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)\times g(x) \end{array}$$

si de plus g ne s'annule pas sur D on peut définir la fonction quotient $\dfrac{f}{g}$ par

$$\frac{f}{g}: \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

f. Majorant, minorant, extrema

Définition 7.8

Soit $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que

- f est **majorée** s'il existe un réel M tel que $\forall x \in D_f,\ f(x) \leq M$. On dit alors que M est un **majorant** de f
- f est **minorée** s'il existe un réel m tel que $\forall x \in D_f,\ f(x) \geq m$. On dit alors que m est un **minorant** de f.

- f est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.
- f admet un minimum sur D_f s'il existe un réel $a \in D_f$ tel que $\forall x \in D_f$, $f(x) \geq f(a)$. Le réel $m = f(a)$ s'appelle alors **minimum** de f sur D_f et on dit qu'il est **atteint en a.**
- f admet un maximum sur D_f s'il existe un réel $a \in D_f$ tel que $\forall x \in D_f$, $f(x) \leq f(a)$. Le réel $M = f(a)$ s'appelle alors **maximum** de f sur D_f et on dit qu'il est **atteint en a.**
- On appelle **extremum** un minimum ou un maximum. f admet un extremum sur D_f si elle admet un minimum ou un maximum sur cet ensemble.

2. Fonctions de référence

L'allure des graphes des fonctions suivantes doit être connu. Connaitre le graphe peut souvent aider à comprendre comment résoudre un problème, ou à se souvenir des limites usuelles.

a. Fonctions affines et affines par morceaux

Définition 7.9

Une fonction affine est une fonction polynôme de degré au plus 1, c'est à dire une fonction de la forme $f : x \longmapsto ax + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Sa courbe représentative est une droite d'équation réduite $y = ax + b$
a est le **coefficient directeur** de cette droite et b est son **ordonnée à l'origine**.

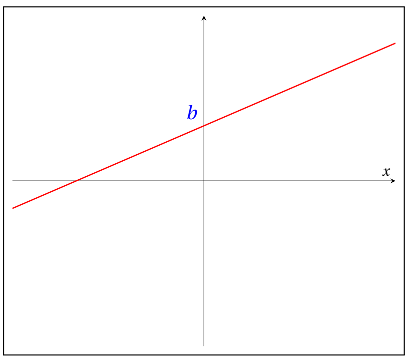
Définition 7.10

On dit qu'une fonction est **affine par morceaux** sur D_f s'il existe une partition de D_f par des intervalles telle que f est affine sur chacun de ces intervalles.
f est affine par morceaux s'il existe une suite d'intervalles deux à deux disjoints $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} I_n = D_f$ et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{|I_n}$ est une fonction affine.

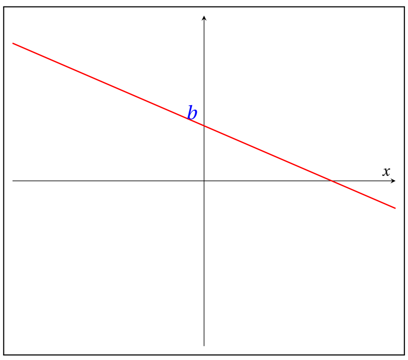
Exemple 7.4

- La fonction valeur absolue est affine par morceau. Sa restriction à $]-\infty; 0[$ est la fonction $x \mapsto -x$ et sa restriction à $[0; +\infty[$ est $x \mapsto x$.
- La fonction **partie entière**, qui à un réel x associe l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$, est affine par morceaux.
  Sa restriction à chaque intervalle de la forme $[n, n+1[$ est constante (donc affine).

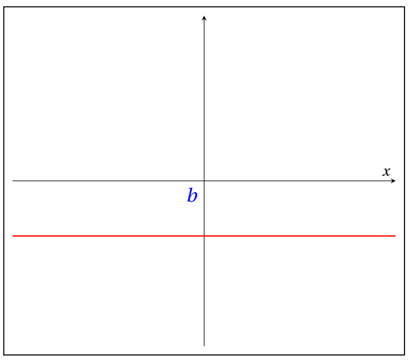
b. Courbe représentative d'une fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$



$a > 0$



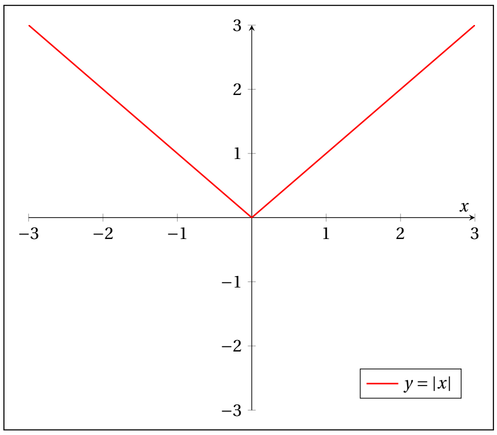
$a < 0$



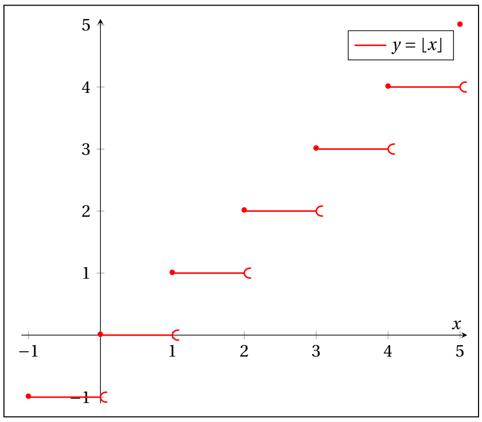
$a = 0$

BY NC

c. Courbe représentative de la fonction valeur absolue et de la fonction partie entière



Fonction $x \longmapsto |x|$



Fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$

d. Fonction polynôme de degré 2

Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction de la forme $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Définition 7.11

Soit $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme de degré 2. On appelle **discriminant de** f le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$

On rappelle les deux propriété suivante :

Propriété 7.3

Soit $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme de degré 2. Alors

- Si $a > 0$, f est décroissante sur $]-\infty; \frac{-b}{2a}[$ et croissante sur $]\frac{-b}{2a}; +\infty[$.
- Si $a < 0$, f est croissante sur $]-\infty; \frac{-b}{2a}[$ et décroissante sur $]\frac{-b}{2a}; +\infty[$.

Propriété 7.4

- Si $\Delta > 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions réelles, notées x_1 et x_2 et données par

$$\boxed{x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

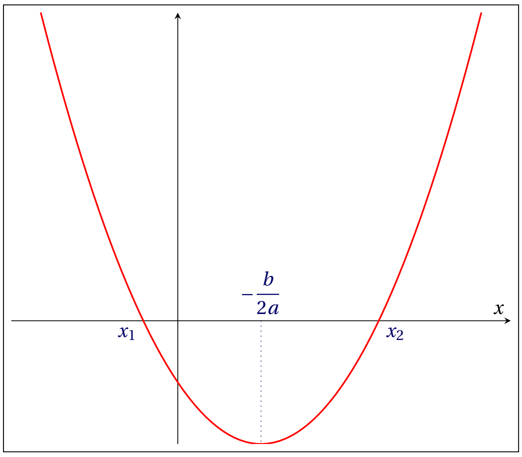
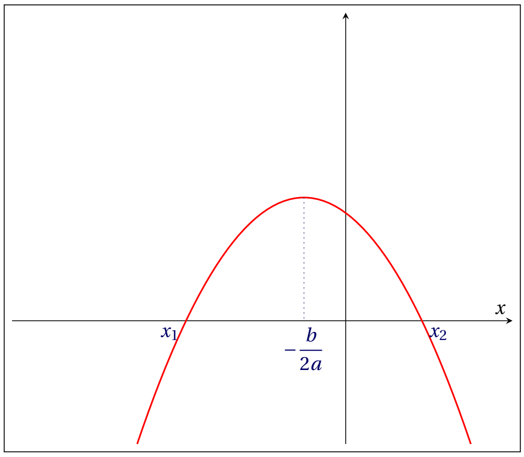
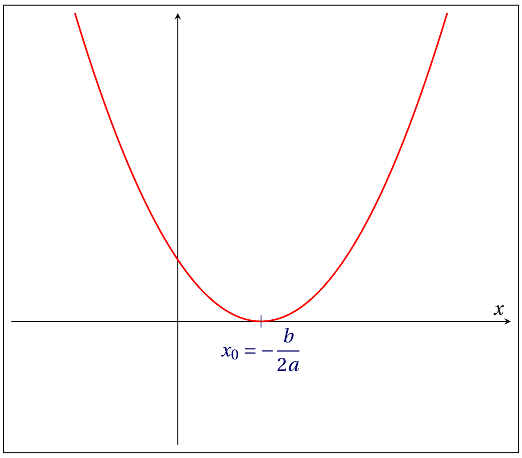
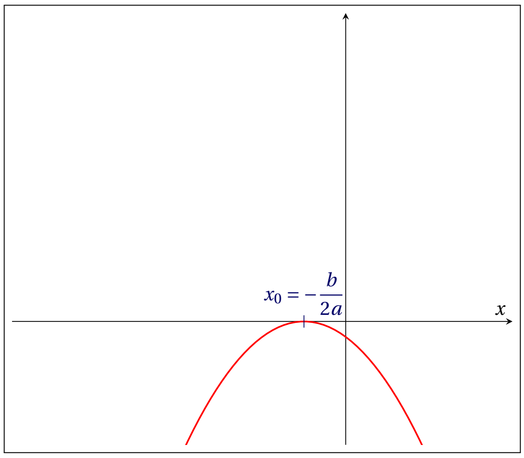
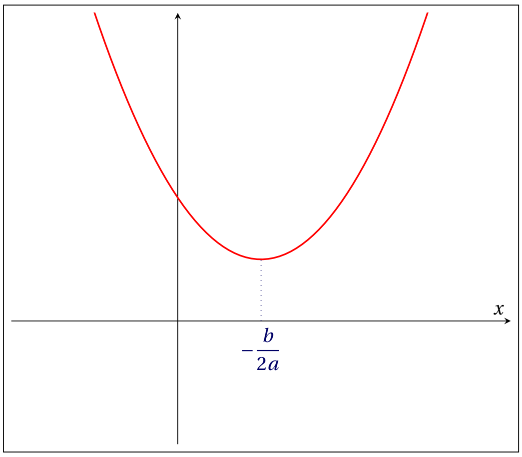
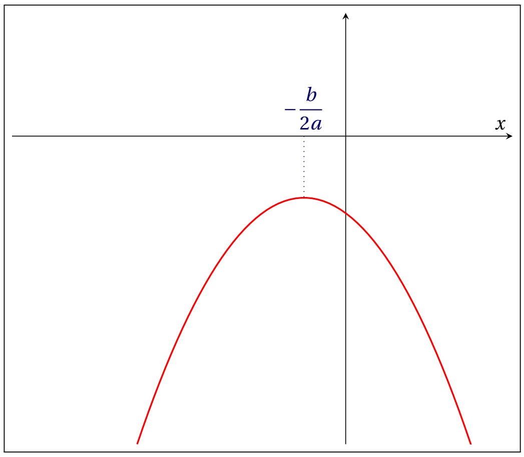
- Si $\Delta = 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle, notée x_0 et donnée par

$$\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a}}$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution réelle.

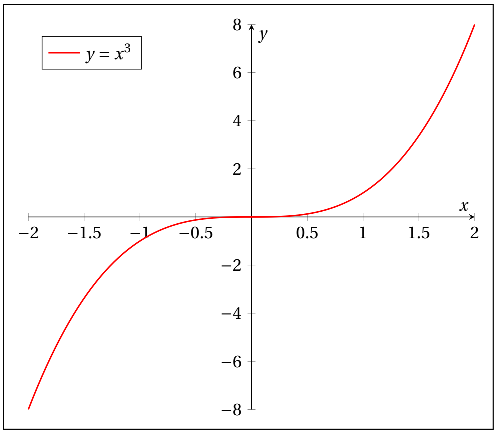
e. Courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2

.

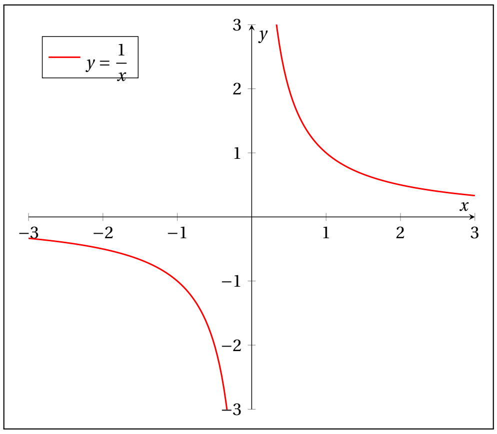
<table>
<tr><th></th><th>$a > 0$</th><th>$a < 0$</th></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

cc BY NC

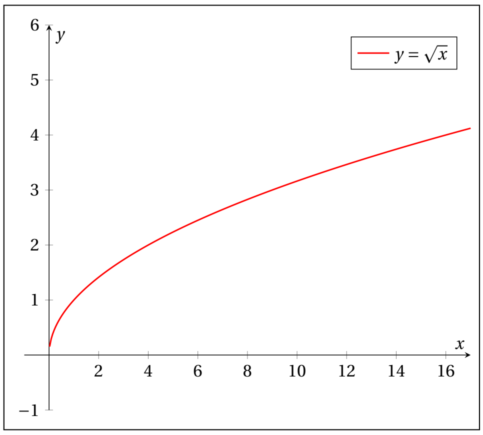
f. Fonctions cube, inverse, racine carrée, racine cubique



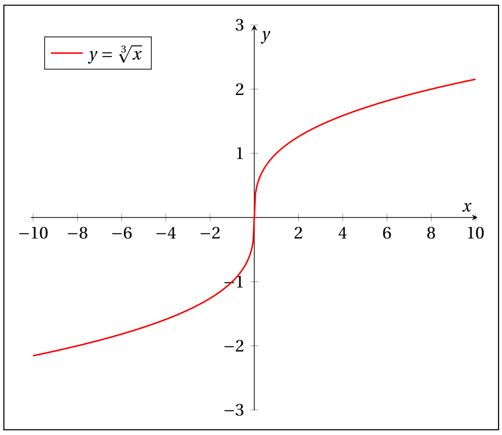
Fonction $x \mapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$



Fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

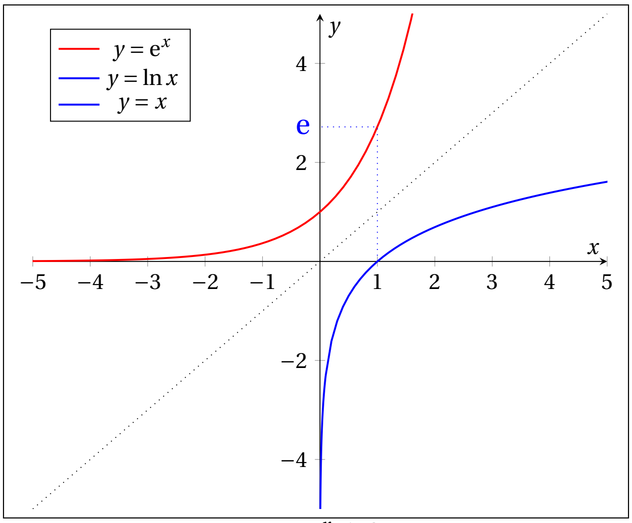


Fonction $x \mapsto \sqrt{x} = x^{1/2}$ définie sur $[0; +\infty[$



Fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ définie sur $\mathbb{R}$

g. Fonctions exponentielle et logarithme



Fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$
Fonction $x \mapsto \ln x$ définie sur $]0; +\infty[$

Définition 7.12

La fonction exponentielle est l'unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Propriété 7.5

Propriétés analytiques de la fonction exponentielle

- $x \mapsto e^x$ est dérivable et $(e^x)' = e^x$
- $e^0 = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$
- $x \mapsto e^x$ est strictement croissante
- $e^x = 1 \iff x = 0$
- $e^x > 1 \iff x > 0$
- $e^x < 1 \iff x < 0$

Propriété 7.6

Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ e^{a+b} = e^a e^b$
- $\forall a \in \mathbb{R},\ e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},\ (e^a)^n = e^{na}$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{e^a} = e^{a/2}$

Définition 7.13

Si $(a,b) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}$, on définit a^b par

$$a^b = e^{b\ln(a)}$$

Ainsi, la dernière propriété peut se généraliser en $\forall (a,b) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R},\ (e^a)^b = e^{ab}$.

Propriété 7.7

(admise pour le moment) La fonction exponentielle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0,+\infty[$. Son application réciproque est appelée fonction **logarithme naturel** ou **logarithme népérien** et est noté ln.
Ainsi, on a

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x$
- $\forall x \in]0,+\infty[,\ \exp(\ln(x)) = x$

Propriétés 7.8 analytiques de la fonction logarithme

- $x \mapsto \ln x$ est dérivable et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
- $\ln(1) = 0$
- $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln x = 0 \iff x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln x > 0 \iff x > 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln x < 0 \iff x < 1$

Propriétés 7.9

algébriques de la fonction logarithme]

- $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ \ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{Z},\ \ln(a^n) = n\ln a$
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln a$

→ **Exercice de cours n° 1.**

→ **Exercice de cours n° 2.**

→ **Exercice de cours n° 3.**

Définition 7.14

Soit $b > 0$ un réel tel que $b \neq 1$. Le logarithme en base b est l'application qui à un réel x strictement positif associe l'unique réel y tel que $b^y = x$. On la note $\log_b$.

CC BY NC

Remarque

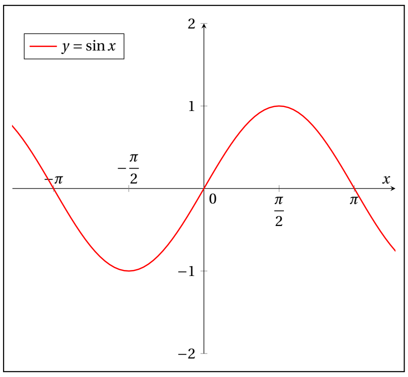
On a $b^y = x \iff e^{y\ln(b)} = x \iff y\ln(b) = \ln(x) \iff y = \dfrac{\ln(x)}{\ln(b)}$ car $b \neq 1$ donc $\ln(b) \neq 0$.

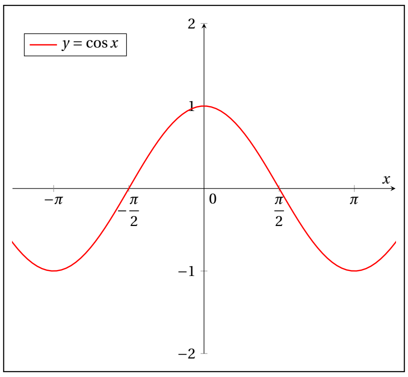
Ainsi, pour tout $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, on a $\log_b(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(b)}$

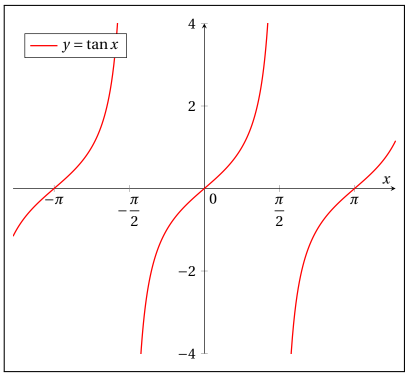
Propriété 7.10

Quelle que soit la base b, le logarithme en base b vérifie les mêmes propriétés algébriques que le logarithme naturel.

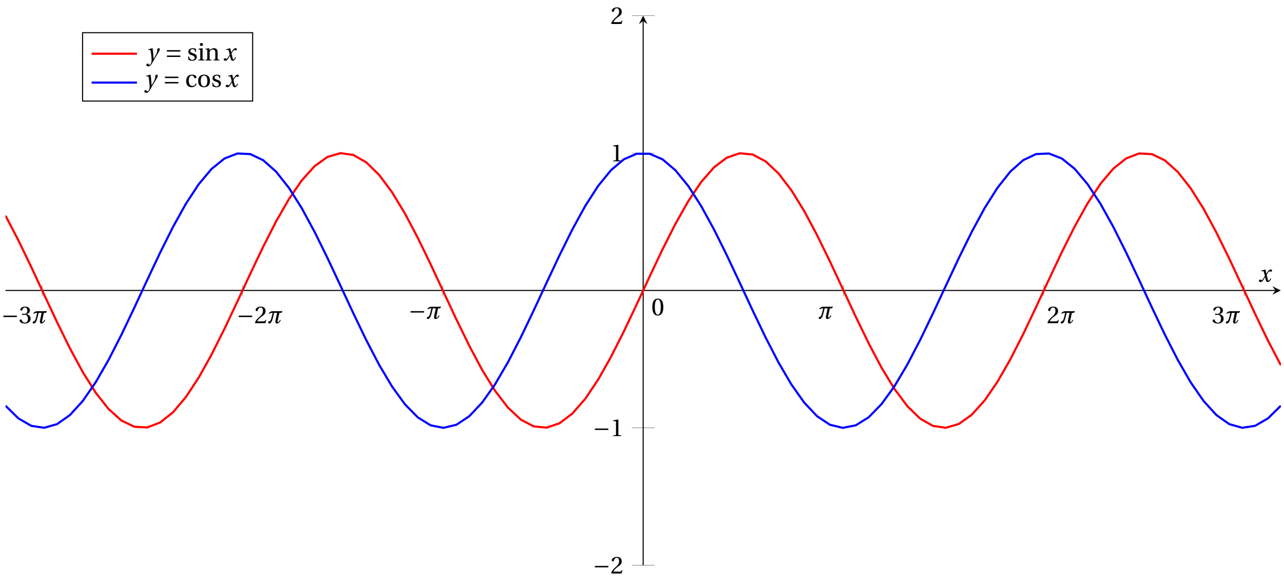
h. Fonctions trigonométriques







Sinus et cosinus ensemble :



3. Fonctions polynômes de degré n

Définition 7.15

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle **fonction polynôme à coefficients réels de degré** n toute fonction P telle qu'il existe un entier n et des réels $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $a_n \neq 0$, et telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, le réel a_k s'appelle **coefficient de degré** k, le coefficient a_n s'appelle **coefficient dominant**, et n est le degré du polynôme. Si $a_n = 1$, on dit que P est un polynôme unitaire.

Définition 7.16

On note $\deg(P) = n$ si P est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Par convention, on pose $\deg(P) = -\infty$ si P est le polynôme nul.

Remarque

On distingue un **polynôme** et une **fonction polynôme**. Dans un polynôme, on note X l'indéterminée (qui ne représente pas forcément un nombre réel). Par exemple $P = X^2 - 3X$ est un polynôme d'indéterminée X. La **fonction polynôme** associée à P est la fonction $x \mapsto x^2 - 3x$. On admet que deux polynômes sont égaux si et seulement si les fonctions polynômiales associées sont égales.

Par abus de langage on appelle souvent polynôme une fonction polynômiale.

On appelle **polynôme nul** le polynôme dont tous les coefficients sont nuls.

Remarque

La fonction associée au polynôme nul est la fonction nulle.
Les fonctions polynômes de degré 0 sont les fonctions constantes.
Les fonctions polynômes de degré 1 sont les fonctions affines.

Propriété 7.11

Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ une fonction polynôme de degré n (avec $a_n \neq 0$). Alors P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$$

Remarque

Si P est une fonction polynôme de degré n, alors P' est une fonction polynôme de degré $n-1$.
Si on note $P^{(k)}$ la dérivée k-ième de P, alors $P^{(k)}$ est un polynôme de degré $n-k$. En particulier, $P^{(n)}$ est constant et $P^{(k)} = 0$ dès que $k > n$.

→ **Exercice de cours n° 4.**

Propriété 7.12

- Une fonction polynôme est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
- Deux fonctions polynômiales sont égales si et seulement si elles ont même degré et tous leurs coefficients sont égaux.

Propriété 7.13

Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels. Alors

- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$
- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$
- $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ si $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
- $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$

Définition 7.17

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n, et $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

Définition 7.18

On appelle **racine** d'un polynôme P tout nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) = 0$.

Propriété 7.14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Pour tout réel λ,

$$\lambda \text{ est une racine de } P \iff \text{il existe } Q \in \mathbb{R}_{n-1}[x] \text{ tel que } P(x) = (x-\lambda)Q(x).$$

→ **Exercice de cours n° 5.**

cc BY NC

Propriété 7.15

Une fonction polynôme de degré n non nulle admet au plus n racines distinctes. Autrement dit, le seul polynôme de degré inférieur ou égal à n qui admet $n+1$ racines distinctes est le polynôme nul.

→ Exercice de cours nº 6.

II. Limites

Dans toute cette section et sauf exception, f est une fonction définie sur D_f à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec $D_f \subset \mathbb{R}$.

Intuitivement, f a pour limite $\ell \in \overline{R}$ lorsque x tend vers $a \in \overline{R}$ si les valeurs de $f(x)$ « s'approchent » de ℓ lorsque la valeur de x « s'approche » de a. Les définitions suivantes visent à donner un sens rigoureux au verbe « s'approcher ».

1. Limite en $+\infty$, limite en $-\infty$

a. Limite infinie

Définition 7.19

f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x > x_0 \Rightarrow f(x) > A$
On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Remarque

Sans changer le sens de cette définition, on peut lui ajouter quelques mots qui ne sont pas nécessaires du point de vue logique mais aident à la compréhension :

> $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si quel que soit le réel A, **aussi grand soit-il**, il existe un réel x_0 **qui dépend donc de** A tel que pour tout réel $x > x_0$ on a $f(x) > A$.

On définit de même les limites infinies en $\pm\infty$:

Définition 7.20

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x > x_0 \Rightarrow f(x) < A$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x < x_0 \Rightarrow f(x) > A$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x < x_0 \Rightarrow f(x) < A$

→ Exercice de cours nº 7.

b. Limite finie

Définition 7.21

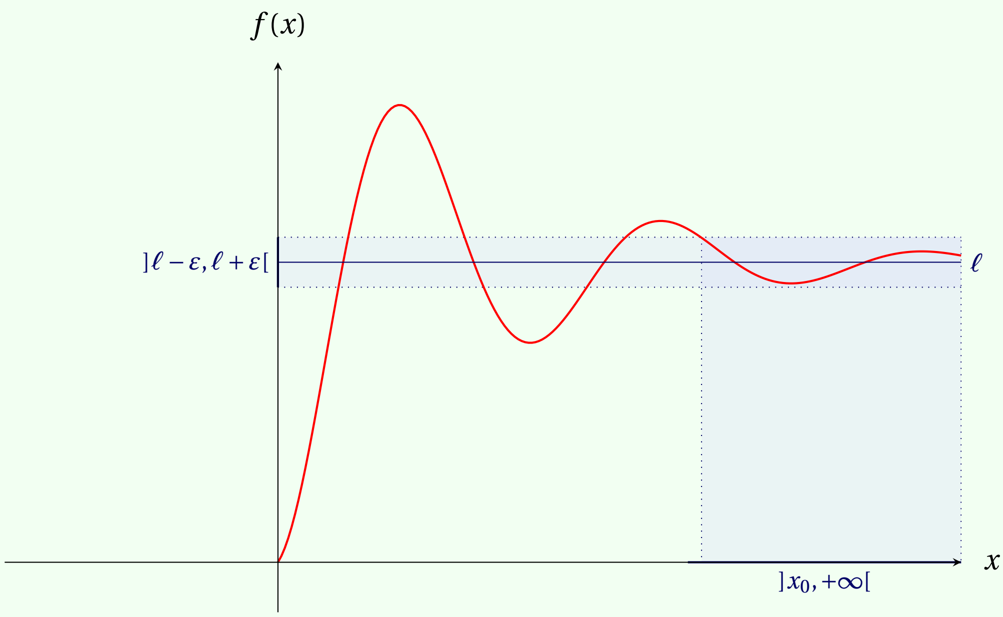
- f admet pour limite un réel $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x > x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

- f admet pour limite un réel $\ell \in \mathbb{R}$ en $-\infty$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

CC BY NC



$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$$

Remarque

$|f(x)-\ell|<\varepsilon \iff f(x)\in]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$

Remarque

Sans changer le sens de cette définition, on peut la reformuler de la façon suivante :

> $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ si pour tout réel ε strictement positif, **aussi petit soit-il**, il existe un réel x_0 **qui dépend donc de** ε tel que pour tout $x>x_0$, la distance entre $f(x)$ et ℓ est inférieure à ε.

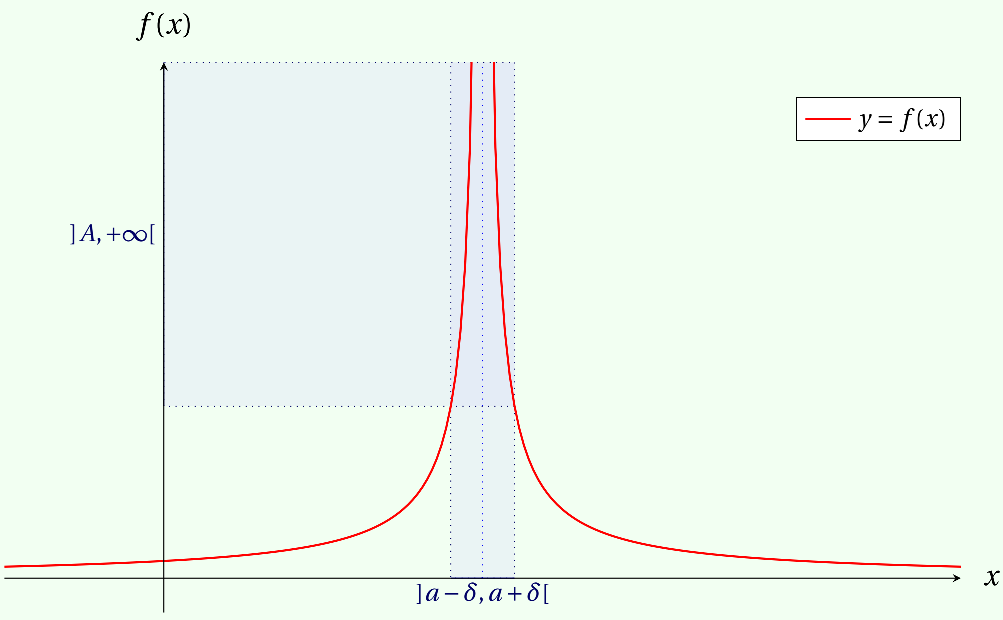
→ **Exercice de cours n°8.**

2. Limite en un réel a

Définition 7.22

f admet pour limite $+\infty$ en a, si

$$\forall A\in\mathbb{R},\exists\delta>0,\forall x\in D_f\setminus\{a\},\ |x-a|<\delta\Rightarrow f(x)>A$$



$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

On peut définir de même les autres types de limite en un réel a :

Définition 7.23

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f \setminus \{a\},\ |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < A$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f \setminus \{a\},\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon$

Proposition 7.16

Si f tend vers une limite $\ell \in \overline{R}$ lorsque x tend vers un réel a, ou x tend vers $\pm\infty$, alors ℓ est unique.

3. Définition unifiée

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ la **droite réelle achevée**. On utilise cette notation **uniquement dans le cours** pour généraliser plus facilement des définitions et des propriétés sur les limites.

Les différentes définitions de limites vues dans les sections précédentes peuvent être synthétisé en une seule grâce à la notion de **voisinage**.

Définition 7.24

Un **voisinage** d'un réel a est un intervalle de la forme $]a-\delta, a+\delta[$ avec $\delta > 0$.
Un **voisinage** de $+\infty$ (respectivement de $-\infty$) est un intervalle de la forme $]A; +\infty[$ (respectivement de la forme $]-\infty, A[$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Définition 7.25

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. f admet pour limite ℓ lorsque x tend vers a si pour tout voisinage V_ℓ de ℓ, il existe un voisinage V_a de a tel que $f(V_a) \subset f(V_\ell)$ (autrement dit tel que $\forall x \in V_a, f(x) \in V_\ell$).

En adaptant la définition de voisinage selon la valeur réelle ou infinie de a et de ℓ, on retrouve dans cette définition toutes les définitions de limites précédentes.

4. Limites et monotonie

Proposition 7.17 (théorème de la limite monotone)

Soient $a, b \in \overline{R}$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction monotone.

- Si f est croissante et majorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie en b.
- Si f est croissante et non majorée sur $]a, b[$, alors $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$
- Si f est décroissante et minorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie en a
- Si f est décroissante et non minorée sur $]a, b[$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Proposition 7.18

- Si f est croissante sur $]a, b[$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \ell$, alors $\forall x \in]a, b[$, $f(x) \leq \ell$.
- Si f est croissante sur $]a, b[$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, alors $\forall x \in]a, b[$, $\ell \leq f(x)$.
- Si f est décroissante sur $]a, b[$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \ell$, alors $\forall x \in]a, b[$, $f(x) \geq \ell$
- Si f est décroissante sur $]a, b[$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, alors $\forall x \in]a, b[$, $a \geq f(x)$.

5. Théorèmes de comparaison

Dans toute cette section, f, g et h sont trois fonctions définies dans un voisinage de a, avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 7.19 (passage à la limite dans une inégalité)

Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x dans un voisinage de a et que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$.

Remarque

Le passage à la limite dans une inégalité stricte donne une inégalité **large** :

$$\text{Si } V \text{ est un voisinage de } a, \begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell' \\ \forall x \in V, f(x) < g(x) \end{cases} \Longrightarrow \quad \ell \leq \ell'$$

Proposition 7.20

Supposons que $f(x) \leq g(x)$ dans un voisinage de a.

- si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$
- si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Théorème 7.21 des gendarmes

Supposons que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ dans un voisinage de a. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$.

6. Limite à gauche, limite à droite

Définition 7.26

Limite à gauche

- On dit que f tend vers $+\infty$ à gauche en $a \in I$, et on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, x \in]a - \delta, a[\Rightarrow f(x) > A$$

- On dit que f tend vers un réel ℓ à gauche en $a \in I$, et on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, x \in]a - \delta, a[\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Limite à droite

- On dit que f tend vers $+\infty$ à droite en $a \in I$, et on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$, si

CC BY NC

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, x \in]a, a+\delta[\Rightarrow f(x) > A$$

- On dit que f tend vers un réel ℓ à droite en $a \in I$, et on note $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell}$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, x \in]a, a+\delta[\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Remarque

On définit de même $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

Exemple 7.5

- $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 3^+} \lfloor x \rfloor = 3$ et $\lim\limits_{x \to 3^-} \lfloor x \rfloor = 2$. En effet, pour tout $x \in]3-\delta, 3[$ avec δ suffisamment petit, on a $\lfloor x \rfloor = 2$.

Proposition 7.22

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On a

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

7. Asymptotes

Définition 7.27

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.
On dit que

- f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$ en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ (ou si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$)
- f admet une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

Remarque

Graphiquement, une asymptote est une droite indiscernable de la courbe de f à l'infini.

Une fonction peut admettre au plus 2 asymptotes horizontales, mais une infinité d'asymptotes verticales

Exemple 7.6

- La fonction inverse admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 0$
- La fonction exponentielle admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$
- La fonction tangente admet une infinité d'asymptote verticales, d'équation $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

III. Calcul de limites

1. Opérations sur les limites

Dans cette section, a désigne un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$, et ℓ désigne un réel fini.

a. Somme

CC BY NC

Proposition 7.23

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \cdots$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \cdots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x)) = \cdots$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

b. Produit

Proposition 7.24

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \cdots$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \cdots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x) = \cdots$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

c. Quotient

Proposition 7.25

Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ **:**

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \cdots$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \cdots$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$
alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \cdots$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	FI	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ **:**

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \cdots$	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \cdots$	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0
alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \cdots$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Remarque

On note $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell^+$ (respectivement $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell^-$) si $g(x)$ tend vers 0 en gardant des valeurs supérieure ou égal à ℓ (respectivement inférieure ou égale à ℓ).
Autrement dit :

$$\lim_{x\to a} g(x) = \ell^+ \iff \forall\varepsilon, \exists\delta>0, |x-a|<\delta \Rightarrow g(x)\in[\ell,\ell+\varepsilon[$$

CC BY NC

$$\lim_{x\to a} g(x) = \ell^- \iff \forall \varepsilon, \exists \delta > 0, |x-a| < \delta \Rightarrow g(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell]$$

Ainsi, la notation $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0^+$ si $g(x)$ tend vers 0 en gardant des valeurs positive

$$\forall \varepsilon, \exists \delta > 0, |x-a| < \delta \Rightarrow 0 \leq g(x) < \varepsilon$$

(de même pour $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0^-$)

2. Composition de limites

Proposition 7.26

Soient a,b, c trois réels, ou $\pm\infty$, et soient f et g deux fonctions telles que $g \circ f$ soit définie dans un voisinage de a. Supposons que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et que $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$. Alors $\lim\limits_{x\to a} g \circ f(x) = c$

Exemple 7.7

Calculer la limite de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-1/x}$ en 0^+ et en 0^-.

3. Croissances comparée

a. Négligeabilité

Définition 7.28

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et $a \in I$.
On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a, et on note $f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x))$, s'il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et $f(x) = \varepsilon(x) g(x)$

Si g ne s'annule pas au voisinage de a, cette définition est équivalente à $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

→ Exercice de cours n°9.

Les règles sont les mêmes que pour les suites :

Propriété 7.27

Soit $a \in \mathbb{R}$, ou $a = \pm\infty$, et f, g et h trois fonctions définies au voisinage de a.

- Si $f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x))$ et $g(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(h(x))$, alors $f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(h(x))$
- Si $f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x))$, alors $f(x)h(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x)h(x))$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(1)$

b. Comparaisons usuelles

Proposition 7.28 (croissances comparées)

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ deux réels. On a

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$
- si $\beta \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\beta \mathrm{e}^{\alpha x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$

Remarque

En particulier, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0}$

et en particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x = 0}$

CC BY NC

→ **Exercice de cours n° 10.**

c. Équivalence

Définition 7.29

Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a. On dit que f est **équivalente à** g au voisinage de a s'il existe une fonction α vérifiant $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 1$ telle que $\forall x \in D_f \cap D_g$, $f(x) = \alpha(x)g(x)$.
On note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Si $g(x)$ ne s'annule pas au voisinage de a, cette définition est équivalente à $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Les propriétés de l'équivalence sont les mêmes que pour les suites :

Propriété 7.29 (Opérations sur les équivalents)

$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si et seulement si $f(x) - g(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g(x))$.

Propriété 7.30

Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$ et soient f, g, h et k quatre fonctions définies au voisinage de a.

- Si $f(x) \sim g(x)$, alors $g(x) \sim f(x)$
- Si $f(x) \sim g(x)$ et que $g(x) \sim h(x)$, alors $f(x) \sim h(x)$
- Si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $f(x) \sim \ell \iff \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$
- Si $f(x) \sim g(x)$ et $h(x) \sim k(x)$, et que $h(x)$ et $k(x)$ ne s'annulent pas, alors
  - $f(x)h(x) \sim g(x)k(x)$
  - $\dfrac{f(x)}{h(x)} \sim \dfrac{g(x)}{k(x)}$

Remarque

Attention : On n'ajoute pas des équivalence.
En général $f(x) \sim g(x) \not\Rightarrow f(x) + k(x) \sim g(x) + k(x)$
Par exemple : $x^2 + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ et $1 - x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^2$ mais $x^2 + 1 + 1 - x^2 \sim 2 \nsim 0$.

Remarque

Attention : On ne compose pas des équivalences
En général, $f(x) \sim g(x) \not\Rightarrow h \circ f(x) \sim h \circ g(x)$
Par exemple $x + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ mais $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^1 \neq 1$ donc $\mathrm{e}^{x+1} \nsim e^x$.

→ **Exercice de cours n° 11.**

d. Équivalents usuels

Proposition 7.31

Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polynôme.

- En $+\infty$ et en $-\infty$, P est équivalent à son terme de plus haut degré.
- En 0, P est équivalent à son terme de plus petit degré.

Proposition 7.32

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in I$. Alors

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(x-a)$$

et donc

$$f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)$$

On en déduit les égalités suivantes

CC BY NC

Propriété 7.33 (développements limités à l'ordre 1)

Lorsque $x \to 0$ on a :

- $\sin x = x + o(x)$
- $\cos x = 1 + o(x)$
- $\exp(x) = 1 + x + o(x)$
- $\ln(1+x) = x + o(x)$
- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$

On peut exprimer ces développements limités sous forme d'équivalents :

Propriété 7.34 (équivalents usuels)

Lorsque $x \to 0$ on a :

- $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1$
- $\exp(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x$
- $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$
- $\frac{1}{1-x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$

→ **Exercice de cours nº 12.**

IV. Continuité

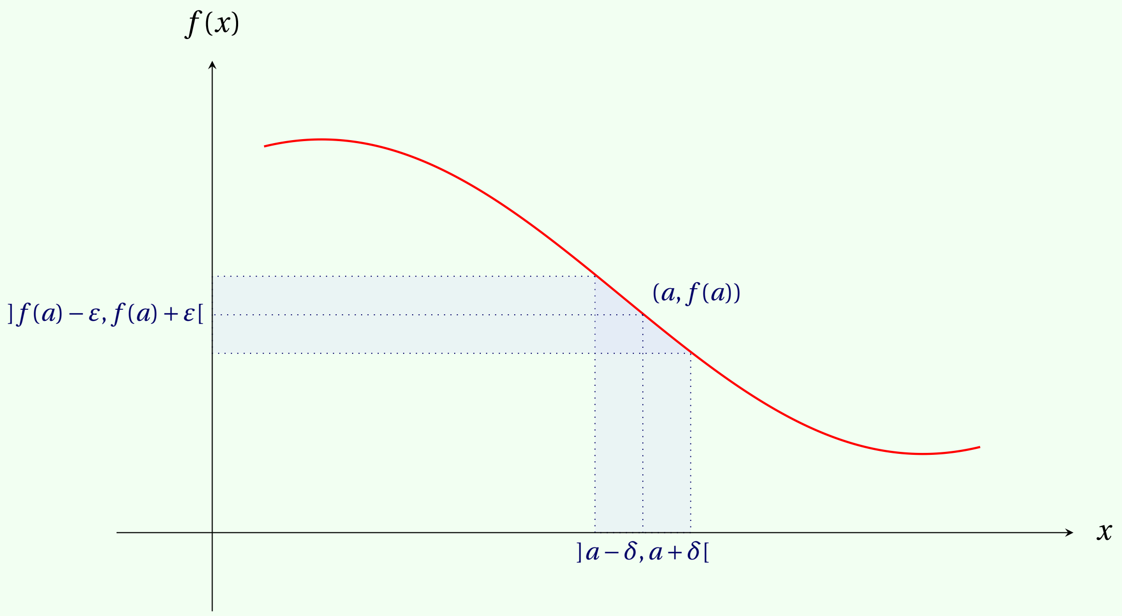
Dans toute cette section I désigne un intervalle réel.

1. Définition

Définition 7.30

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et soit $a \in I$.
On dit que f est **continue en** a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, c'est à dire si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon}$$



$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Définition 7.31

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I. On dit que f est **continue sur** I si f est continue en a quel que soit $a \in I$.

CC BY NC

Propriété 7.35 (admise)

La plupart des fonctions de référence sont continues sur tout intervalle où elles sont définies :

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$
- $x \longmapsto \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $x \longmapsto \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $x \longmapsto \tan x$ est continue sur $]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
- $x \longmapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $x \longmapsto \ln x$ est continue sur $]0,+\infty[$
- $x \longmapsto \frac{1}{x}$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}^*$ car $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle, mais elle est continue sur $]-\infty, 0[$ et continue sur $]0,+\infty[$.

Remarque

La fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$

→ Exercice de cours nº 13.

Propriété 7.36

Opérations
Soit f et g deux fonctions continues sur I. Alors

- $f+g$ est continue sur I
- $f \times g$ est continue sur I
- Si $\forall x \in I, g(x) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue

Propriété 7.37

Composée de fonctions continues
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$.
Alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I.

2. Prolongement par continuité

Définition 7.32

Soit I un intervalle et $a \in I$ Soit $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est **prolongeable par continuité en** a s'il existe une fonction $\hat{f} : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et telle que $\hat{f}|_{I\setminus\{a\}} = f$.

Proposition 7.38

Soit I un intervalle, soit $a \in I$ et soit f une fonction continue définie sur $I \setminus \{a\}$. f est prolongeable par continuité en a si et seulement si f admet une limite finie en a.
Si a n'est pas une borne de I, alors f est prolongeable par continuité en a si et seulement si f admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite en a et que $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$.

→ Exercice de cours nº 14.

3. Applications

a. Continuité et suites

Proposition 7.39

Si (u_n) converge vers une limite finie ℓ, et que f est une fonction continue en ℓ, alors $f(u_n)$ converge aussi et $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

→ Exercice de cours nº 15.

CC BY NC

Exemple 7.8

Un contre exemple avec une fonction non continue : $f : x \longmapsto \lfloor x \rfloor$.

Le fait que (u_n) converge n'entraine pas nécessairement que $(\lfloor u_n \rfloor)$ converge. Exemple avec la suite $1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ qui converge vers 1, mais pour $n \geq 2$ on a :

- ▷ Si n est pair $\left\lfloor 1 + \dfrac{(-1)^n}{n} \right\rfloor = \left\lfloor 1 + \dfrac{1}{n} \right\rfloor = 1$
- ▷ Si n est impair $\left\lfloor 1 + \dfrac{(-1)^n}{n} \right\rfloor = \left\lfloor 1 - \dfrac{1}{n} \right\rfloor = 0$

donc la suite $\left(\lfloor 1 + \dfrac{(-1)^n}{n} \rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

b. Continuité et monotonie

Propriété 7.40

Soient $a < b$ deux réels.
Si f est continue sur $[a,b]$ et monotone sur $]a,b[$ alors f est monotone sur $[a,b]$.
Si f est continue sur $[a,b]$ et strictement monotone sur $]a,b[$ alors f est strictement monotone sur $[a,b]$

c. Théorème des valeurs intermédiaire

Proposition 7.41 (admise)

Si $[a,b]$ est un intervalle et que f est continue sur $[a,b]$, alors $f([a,b])$ est un intervalle.

Une conséquence immédiate est la proposition suivante :

Théorème 7.42 des valeurs atteintes

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, alors f est bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes, c'est à dire qu'elle admet un minimum et un maximum sur $[a,b]$.

Une seconde conséquence de cette proposition est le théorème des valeurs intermédiaires :

Théorème 7.43 des valeurs intermédiaires

Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue**.
Soit $\alpha \in]f(a), f(b)[$ (ou $\alpha \in]f(b), f(a)[$ le cas échéant). Alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = \alpha$.

Le théorème est encore vrai si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ (ou les deux). On remplace alors $f(a)$ par $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $f(b)$ par $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

→ **Exercice de cours n° 16.**

Théorème 7.44 (Corollaire du TVI)

Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur $[a,b]$.
Soit $\alpha \in [f(a), f(b)]$ (ou $\alpha \in [f(b), f(a)]$ le cas échéant). Alors il existe un **unique** réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \alpha$.
Le corollaire est encore vrai si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ (ou les deux). On remplace alors $f(a)$ par $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $f(b)$ par $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

→ **Exercice de cours n° 17.**

d. Théorème de la bijection

Une autre formulation du corollaire du TVI est le **théorème de la bijection**

Théorème 7.45 de la bijection

Soient $a < b$ deux réels ou $\pm\infty$ et soit $I = [a;b]$ (ou $I =]a;b]$ ou $I = [a;b[$ ou $I =]a;b[$).
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I. Alors f est une bijection de I sur l'intervalle dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$ (ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ le cas échéant), et (admis) sa fonction réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur I, de même sens de variation que f.

CC BY NC

Remarque

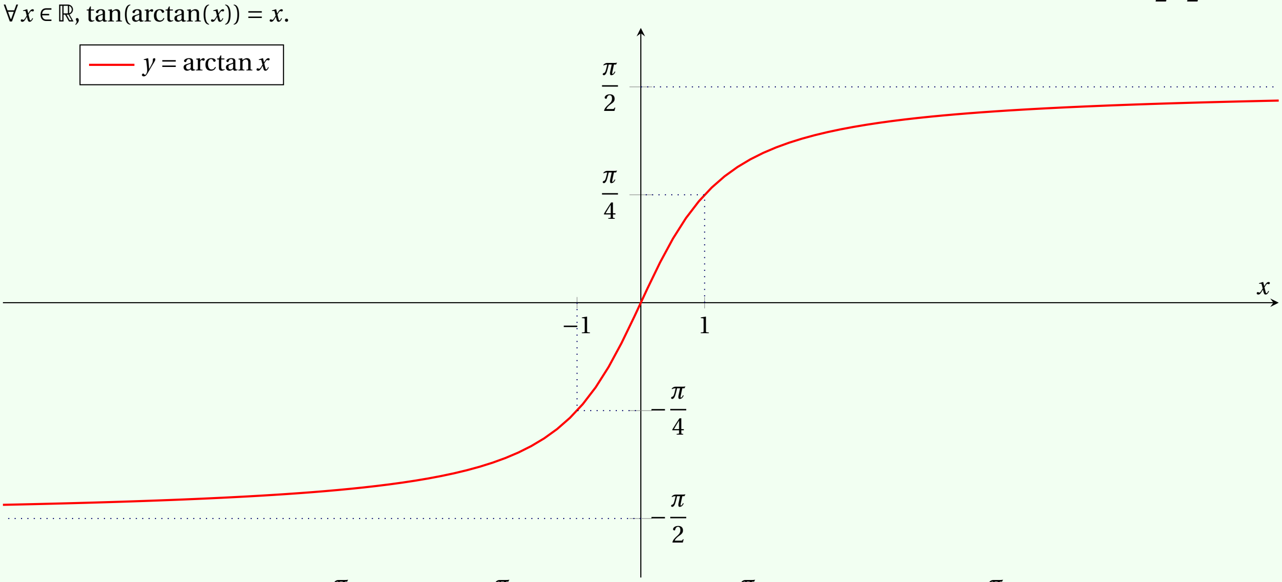
De façon plus synthétique, le théorème de la bijection dis que si I est un intervalle et que $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et strictement monotone, alors $f(I)$ est un intervalle et f réalise une bijection de I vers $f(I)$.

→ **Exercice de cours nº 18.**

e. Fonction arctangente

Définition 7.33

La fonction $x \longmapsto \tan x$ est continue et strictement croissante sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. De plus, $\tan(I) = \mathbb{R}$. En vertu du théorème de la bijection, il existe donc une fonction notée arctan définie et continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$.



On retient que $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.

→ **Exercice de cours nº 19.**

Propriété 7.46

Soient I et J deux intervalles et f une bijection de I vers J dérivable sur I. Si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J e

$$\boxed{\forall x \in J, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

Propriété 7.47

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

CC BY NC

Exercices de cours

Exercice 1

Montrer les deux inégalités suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq x+1 \quad ; \quad \forall x > 0, \quad \ln(1+x) \leq x$$

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\dfrac{e^x + e^{2x}}{1+e^{-x}}$
2. $\dfrac{2\ln(2)+\ln(9)}{\ln(6)}$
3. $\ln(x^2-4)-\ln(x+2)$
4. $\ln\left(e^{x^2} \times (e^{2-2x})^2\right) e^{-\ln(x-2)}$
5. $\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \ln(k^2+k) - \ln(k+1)\right)$
6. $x+\ln(1+e^{-x})+\ln(1-e^x)$

Exercice 3

Résoudre les équations et inéquations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivantes :

1. $e^{2x}+2e^x = e^x+6$
2. $\ln(2)+\ln(x-1)+\ln(x-3) = \ln(4-4x)$
3. $2\ln(x)^2-\ln(x)-1=0$

Exercice 4

Montrer qu'il n'existe aucun polynôme P tel que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = P(x)$.

Exercice 5

Factoriser les polynômes suivants :

a) $f(X) = X^3+X^2-2$

b) $g(X) = X^3+X^2+X+1$

c) $h(X) = X^3-2X^2+X-2$

Exercice 6

Déterminer l'ensemble des polynômes à coefficients réels P tels que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x+1) = P(x)$.

Exercice 7

Montrer en utilisant uniquement la définition que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Exercice 8

Montrer en utilisant uniquement la définition que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

Exercice 9

Montrer que $x^2 = \underset{x\to+\infty}{o}(x^3)$ et $x^3 = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.

Exercice 10

Déterminer les limites des fonctions suivantes lorsque x tend vers $+\infty$

1. $f(x) = (\ln x)^3 e^{-x}$
2. $g(x) = e^{4x} - x^2 e^{3x} \ln(x)$
3. $h(x) = \ln(x) \times \dfrac{x+1}{e^x}$
4. $k(x) = \dfrac{\ln(\ln(x))}{\sqrt{\ln(x)}}$

cc BY NC

Exercice 11

Démontrer les équivalents suivants :

1. $\sqrt{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$
2. $\ln(x+x^2) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\ln(x)$
3. $e^x + x^3 \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$
4. $e^x + x^3 \underset{x\to-\infty}{\sim} x^3$
5. $\ln x + 2 \underset{x\to 0}{\sim} \ln x$
6. $\ln x + \dfrac{1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$

Exercice 12

Utiliser les développement limités à l'ordre 1 usuels pour calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{3+x}-1}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{\sin(x)\sqrt{1-x}}$

Exercice 13

Étudier la continuité des deux fonctions suivantes :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 0 \\ \cos(x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \quad ; \quad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 3-x^2 & \text{si } x < -2 \\ x+1 & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 14

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \dfrac{\sin x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
Montrer que f peut se prolonger par continuité en une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15

Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$ et $u_0 = 3$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 16

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x e^{1-x}$.
Montrer qu'il existe au moins deux réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 17

Montrer qu'il existe un unique réel $x_0 \in]0,1[$ tel que $\sin\left(\dfrac{\pi x_0}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Exercice 18

Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2-6e^x}{1+2e^x}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle que l'on déterminera.

Exercice 19

Déterminer la valeur de $\arctan(-\sqrt{3})$ et $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

CC BY NC