⋆

Exercice 1

Étudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$

4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{1/x}-1\right)\mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^{-\pi/3}}{\sqrt{1+\ln(1+\sqrt{x})}}\,\mathrm{d}x$

6) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{t}\right)\right)\mathrm{d}t$

⋆ ⋆

Exercice 2

(D'après oraux ESCP voie ECS)

1) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{x+1}}$ converge. On pose $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{x+1}}$.
2) Montrer que $f(1) = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$
3) Montrer que f est décroissante sur son domaine de définition.
4) a) Montrer que pour tout $x>0$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^{x+1}}$ est convergente. On note $g(x)$ sa valeur.
   b) Montrer à l'aide d'un changement de variable que $g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}\,\mathrm{d}t}{t^x(1+t^x)} = \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)}$
   c) Vérifier que pour tout $u>0$, $\dfrac{1}{u(1+u)} = \dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{1+u}$ et en déduire la valeur de $g(x)$.
5) a) Montrer que pour tout $x>0$, on a : $0 \leq f(x) \leq \dfrac{\ln 2}{x}$
   b) Montrer que pour tout $x>0$, on a : $0 \leq \dfrac{\ln 2}{x} - f(x) \leq \dfrac{1}{2x+1}$
   c) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de 0.

⋆

Exercice 3

Soit $p \in]0;1[$ un réel fixé. Un magasin de vêtement étudie les habitudes de ses clients et établit que pour chaque client entrant dans la boutique, la probabilité qu'il achète un article est p et la probabilité qu'il reparte sans rien acheter est $1-p$.

1) 10 clients entrent successivement dans la boutique. On note X le nombre de client qui achètent un article. Quelle est la loi suivie par X ? Rappeler la formule pour $E(X)$ et $V(X)$ dans le cas général.
2) Une infinité de clients entrent successivement dans la boutique. On note Y le rang du premier client qui achète un article. Quelle est la loi suivie par Y ? Rappeler $E(Y)$ et $V(Y)$
3) Dans une journée, N clients visitent la boutique où N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note S le nombre de clients qui achète un article dans une journée.
   a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si on suppose que $N = n$, quelle est la loi suivie par S ?
   b) En déduire que pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, si $k \leq n$ alors $\mathbb{P}(N=n, S=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!} \times \dbinom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$.
   c) Déterminer la loi suivie par S.

⋆

Exercice 4

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$. Déterminer la loi de $X+Y$.

CC BY NC

⋆ ⋆
Exercice 5

(D'après oraux ESCP) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)$.
2) Montrer que X admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(X > k)$ converge.
3) Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on effectue p tirages successifs et avec remise dans une urne contenant n boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à n et on note X le plus grand numéro obtenu.
   a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ déterminer $\mathbb{P}(X \leq k)$ puis en déduire la loi de X
   b) Déterminer $E(X)$ en fonction de n et p.

⋆
Exercice 6

Un institut de sondage souhaite déterminer la proportion p des habitants d'une population ayant l'intention de voter "oui" à un référendum. On assimile le choix de n personne au hasard dans la population à la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p. On note X_n le nombre de personnes ayant l'intention de voter "oui" parmi l'échantillon de n personnes.

1) Quelle est la loi suivie par X_n ? Rappeler son espérance et sa variance en fonction des paramètres de l'énoncé.
2) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\dfrac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$
3) En déduire une condition sur n pour que $\dfrac{X_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure à 95%.

⋆ ⋆
Exercice 7

(ENS 2024) On s'intéresse à des événements $B_1, \ldots, B_{100}$. On fait l'hypothèse suivante :

$$\forall k \in \{1, \ldots, 100\}, \quad \mathbb{P}(B_k) = \frac{1}{100}.$$

Pour tout $k \in \{1, \ldots, 100\}$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque B_k a lieu et 0 sinon. Autrement dit, la variable aléatoire X_k est l'indicatrice de B_k. Enfin, on introduit la variable aléatoire $S = \sum_{k=1}^{100} X_k$.

1) Pour cette question et cette question seulement, on suppose les variables aléatoires X_k indépendantes.
   Quelle est alors la loi de S ?
2) Pour cette question et cette question seulement, on suppose les événements B_k deux à deux disjoints.
   Quelle est alors la loi de S ?
3) Calculer l'espérance de S.
4) Démontrer que pour tous i et j dans $\{1, \ldots, 100\}$, la covariance de X_i et X_j vérifie : $0 \leq \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \leq \dfrac{99}{10\,000}$.
5) Montrer que l'espérance de S^2 est inférieure ou égale à 100. Est-il possible de trouver des variables aléatoires X_k de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{100}$ telles que l'espérance de S^2 soit égale à 100 ?

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 8

(D'après oraux ENS) Le but de cet exercice est de prouver qu'il n'est pas possible de truquer deux dés de sorte à ce que la somme des dés suive une loi uniforme sur $\{2, 3, \ldots, 12\}$.
Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, 6\}$ et telles que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ $\mathbb{P}(U = k) > 0$ et $P(V = k) > 0$. On note $S = U + V$

1) Si U et V suivent une loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 6\}$, est-ce que S suit la loi uniforme sur $\{2, 3, \ldots, 12\}$?
2) Montrer que $P(x) = \mathbb{E}[x^S]$ est un polynôme que l'on explicitera.
3) Démontrer que $\mathbb{E}[x^S] = \mathbb{E}[x^U] \times \mathbb{E}[x^V]$
4) Montrer qu'un polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle.
5) Aboutir à une contradiction, conclure.

cc BY NC

Le coin des Khûbes

⋆

Exercice 9

(ENS 2024) Pour $p \in [0,1]$, on se donne $(X_1, X_2, X_3, \dots)$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que chaque X_i soit de loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout entier $n \geq 1$, on s'intéresse à la quantité

$$f_n(p) = \mathbb{P}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leq n/2\right).$$

1) Calculer les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4. *On demande seulement des formules, pas de simplifier ces formules.*
2) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est polynomiale de degré au plus n.
3) On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la variables aléatoires $\overline{X_n} = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n) = E(X_1)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|\overline{X_n} - E(X_1)| \geq \varepsilon) = 0$$

Ce résultat est connu sous le nom de **loi faible des grands nombres**.

(3) Soit $p \in [0,1]$ tel que $p \neq 1/2$. Démontrer que la suite $(f_n(p))$ admet une limite quand n tend vers $+\infty$ et calculer cette limite, dont la valeur peut dépendre de p. *On pourra utiliser la loi faible des grands nombres.*

⋆

Exercice 10

(ENS 2024) Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. On suppose que X et Y sont indépendantes. Pour tout entier $n \geq 0$, on note $p_X(n) = \mathbb{P}(X = n)$ et $p_Y(n) = \mathbb{P}(Y = n)$.

1) Combien vaut $\sum_{n=0}^{\infty} p_X(n)$? Pourquoi ?
2) Soit (a_n) une suite croissante majorée de nombres réels. On suppose que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}(X = Y \text{ et } X \leq n) \leq a_n.$$

Montrer que la suite (a_n) converge et qu'on a l'inégalité $\mathbb{P}(X = Y) \leq \lim_{n\to\infty} a_n$.

3) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, on a l'inégalité

$$\mathbb{P}(X = Y \text{ et } X \leq n) \leq \sqrt{\left(\sum_{i=0}^{n} p_X(i)^2\right)\left(\sum_{j=0}^{n} p_Y(j)^2\right)}.$$

4) En déduire l'inégalité suivante :

$$\mathbb{P}(X = Y) \leq \sqrt{\left(\sum_{i=0}^{\infty} p_X(i)^2\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} p_Y(j)^2\right)}.$$

CC BY NC