⋆ ⋆

Exercice 1 — **Voir correction**

1) Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels positifs. Montrer que si $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ alors $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $a_k = 0$
2) Soient $x_1, x_2, \dots x_n$ des réels tels que $\sum_{k=1}^{n} x_k = n$ et $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n$. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k = 1$.

⋆ ⋆

Exercice 2 — **Voir correction**

Déterminer si chacun des ensembles suivants admet une borne supérieure/inférieure ou un maximum/un minimum

1) $A = \left\{ \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$
2) $B = \left\{ \dfrac{n-1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$
3) $C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2 \right\}$
4) $D = \{x + y \mid x \in]3, 5[, y \in] - 1, 1]\}$

⋆ ⋆

Exercice 3 — **Voir correction**

Montrer que $1 + |xy - 1| \leq \big(1 + |x - 1|\big)\big(1 + |y - 1|\big)$.

⋆ ⋆

Exercice 4 — **Voir correction**

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1) $|x - 6| \leq \dfrac{1}{2}$
2) $|x + 1| + |x - 3| = 5$
3) $|x - 4| + |x| = 1$
4) $\dfrac{1}{x+3} > x - 1$
5) $\dfrac{1}{x^2 - 4} \leq 3$
6) $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$
7) $4\exp(2x) - 4\exp(x) + 1 = 0$
8) $\sqrt{x - 1} = \sqrt{1 - x}$
9) $\sqrt{3x - 2} = x$

⋆

Exercice 5 — **Voir correction**

Soient a et b deux nombres réels. Montrer que

$$\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2} \quad \text{et} \quad \min(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}$$

⋆

Exercice 6 — **Voir correction**

Soient a et b deux réels positifs. On appelle **moyenne géométrique** de a et de b le nombre $g(a, b) = \sqrt{ab} = (ab)^{1/2}$, on appelle **moyenne harmonique** de a et de b le nombre $h(a, b) = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ et on appelle **moyenne quadratique** de a et de b le nombre $q(a, b) = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$.

La **moyenne arithmétique** de a et de b est le nombre noté $m(a, b) = \dfrac{a + b}{2}$.

Le but de cet exercice est de montrer que quels que soient les réels positifs a et b on a

$$h(a, b) \underset{(1)}{\leq} g(a, b) \underset{(2)}{\leq} m(a, b) \underset{(3)}{\leq} q(a, b)$$

1) Montrer que pour tous réels $a, b \in \mathbb{R}$, on a $|ab| \leq \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$.
2) En déduire l'inégalité (2)
3) Déduire de cette inégalité l'inégalité (1)
4) Démontrer l'inégalité (3)

⋆

Exercice 7 — **Voir correction**

Déterminer l'ensemble des réels x tels que $E(-x) = -E(x)$.

CC BY NC

$\star$

Exercice 8 — **Voir correction**

Soit x un réel fixé. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{E(nx)}{n}$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

$\star\ \star$

Exercice 9 — **Voir correction**

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $E(x+1) = E(x)$

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$

c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) = E(2x)$

$\star$

Exercice 10 — **Voir correction**

Écrire $\dfrac{3}{4-2\sqrt{7}}$ et $\dfrac{8+3\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$ sans racine au dénominateur.

$\star$

Exercice 11 — **Voir correction**

Déterminer la limite de la suite $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

$\star$

Exercice 12 — **Voir correction**

Calculer $\sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}$

$\star$

Exercice 13 — **Voir correction**

Simplifier $\sqrt{1 + 2^{2/3} + 2^{-2/3}}$.

$\star$

Exercice 14 — **Voir correction**

Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{2^{n^3}}{3^{n^2}}$

$\star$

Exercice 15 — **Voir correction**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^{x/2} = \left(\dfrac{x}{2}\right)^x$ après avoir déterminé l'ensemble de définition de cette équation.

CC BY NC

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels positifs. Supposons qu'il existe $k_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_{k_0} > 0$. Alors $\sum_{k=1}^n a_k \geq a_{k_0} > 0$ car tous les termes sont positifs, donc $\sum_{k=1}^n a_k \neq 0$. Par contraposée, si $\sum_{k=1}^n a_k = 0$, alors $\forall k \in [\![1, n]\!],\ a_k = 0$.
2) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(x_k - 1)^2 \geq 0$.
De plus,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (x_k - 1)^2 &= \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2\sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= n - 2n + n \\ &= 0\end{aligned}$$

donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(x_k - 1)^2 = 0$ d'après la question précédente. Ainsi, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k - 1 = 0$ donc $x_k = 1$.

Correction de l'exercice 2 :

1) A est minoré par 0 et majoré par 1, donc il admet une borne supérieure et une borne inférieure.
$1 \in A$ car $1 = \dfrac{1}{1}$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} \leq 1$ donc 1 est le maximum de A. Par contre $0 \notin A$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$, donc 0 est le plus grand minorant de A, c'est donc la borne inférieure de A mais A n'admet pas de minimum.
2) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1}$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables et pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$, donc $f'(x) \geq 0$.
Ainsi, f est croissante, donc la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ est croissante. De plus, $u_0 = -1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq u_n \leq 1$.
B est donc minoré et majoré, donc admet une borne supérieure et une borne inférieure.
$-1 = \dfrac{0-1}{0+1}$ donc $-1 \in B$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq -1$ car (u_n) est croissante, donc B admet -1 comme minimum.
Montrons que 1 est la borne supérieure de B mais que ce n'est pas le maximum. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{n-1}{n+1} > 1 - \varepsilon$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. Ainsi, 1 est la borne supérieure de B.
En revanche B n'admet pas 1 comme maximum. En effet, supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{n-1}{n+1} = 1$, alors $n - 1 = n + 1$ donc $-1 = 1$ ce qui est faux.
3) $C =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ donc C admet $\sqrt{2}$ comme borne supérieure et $-\sqrt{2}$ comme borne inférieure, mais ces bornes n'appartiennent pas à C donc C n'admet pas de minimum ni de maximum.
4) Montrons que $D =]2, 6[$:
Soit $z \in]2, 6[$, alors si $\in]3, 5[$, on pose $x = z$ et $y = 0$ et on a $z = x + y$ avec $x \in]3, 5[$ et $y \in]-1, 1[$.
Si $z \in]2, 3]$, alors $0 < \dfrac{z-2}{2} \leq \dfrac{1}{2}$ donc $3 + \dfrac{z-2}{2} \in]3; 3,5]$. On pose $x = 3 + \dfrac{z-2}{2}$ et $y = z - x = \dfrac{z+2}{2} - 3$. Alors, comme $2 < z \leq 3$ on a $2 < \dfrac{z+2}{2} \leq \dfrac{5}{2}$ donc $-1 < y \leq -\dfrac{1}{2}$.
On a donc bien $x + y = z$ avec $x = \in]2, 3[$ et $z \in]-1, 1[$.
De même, si $z \in [5, 6[$, on pose $x = 5 - \dfrac{6-z}{2}$ et $y = z - x$, on vérifie qu'on a bien $x \in]3, 5[$ et $y \in]-1, 1[$.
Ainsi, $]2, 6[\subset D$.
Réciproquement, si $z \in D$, alors $z = x + y$ avec $3 < x < 5$ et $-1 < y < 1$ donc $2 < x + y < 6$ et finalement $z \in]2, 6[$ donc $D \subset]2, 6[$.
Ainsi, D admet 2 comme borne inférieure et 6 comme borne supérieure, mais D n'admet pas de minimum ni de maximum.

Correction de l'exercice 3 :

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a d'une part

$$(1 + |x-1|)(1 + |y-1|) = 1 + |x-1| + |y-1| + |(x-1)(y-1)|$$

et d'autre part

$$1 + |xy - 1| = 1 + |(x-1)(y-1) + x + y - 2|$$

CC BY NC

$$
\begin{aligned}
&= 1 + |(x-1)(y-1) + x - 1 + y - 1| \\
&\leq 1 + |(x-1)(y-1)| + |x-1| + |y-1| \qquad \text{par inégalité triangulaire} \\
&\leq (1 + |x-1|)(1 + |y-1|)
\end{aligned}
$$

Correction de l'exercice 4 :

1) $|x-6| \leq \frac{1}{2} \iff 6 - \frac{1}{2} \leq x \leq 6 + \frac{1}{2}$ donc $\boxed{S = [\frac{11}{2}, \frac{13}{2}]}$.

2) On raisonne par disjonction de cas selon les valeurs possibles de x.

— Si $x < -1$, alors $x < 3$ donc $|x+1| = -x-1$ et $|x-3| = -x+3$.
Ainsi, $|x+1| + |x-3| = -x-1-x+3 = 2-2x$.
$2 - 2x = 5 \iff x = -\frac{3}{2}$ ce qui est compatible avec l'hypothèse $x < -1$.

— Si $-1 \leq x \leq 3$, alors $|x+1| = x+1$ et $|x-3| = -x+3$.
Ainsi, $|x+1| + |x-3| = x+1-x+3 = 4$, donc l'équation $|x+1| + |x-3| = 5$ n'a aucune solution dans $[-1, 3]$.

— Si $x > 3$, alors $x > -1$ et on a $|x+1| = x+1$ et $|x-3| = x-3$.
Ainsi $|x+1| + |x-3| = 2x-2$
$2x - 2 = 5 \iff x = \frac{7}{2}$ ce qui est compatible avec l'hypothèse $x > 3$.

Finalement, $\boxed{S = \{-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\}}$.

3) Si $x < 0$, alors $|x-4| = -x+4$ et $|x| = -x$, donc $|x-4| + |x| = -2x+4$.
$-2x + 4 = 1 \iff x = \frac{3}{2}$, donc l'équation n'a pas de solution dans $]-\infty, 0[$.

4) Si $0 \leq x < 4$, alors $|x-4| + |x| = -x+4+x = 4$, donc l'équation n'admet aucune solution dans $[0, 4[$

5) Si $x \geq 4$, alors $|x-4| + |x| = x-4+x = 2x-4$.
$2x - 4 = 1 \iff x = \frac{5}{2}$. Ainsi l'équation n'admet aucune solution dans $[4, +\infty[$.
$\boxed{\text{Finalement, } S = \varnothing.}$

6) $\frac{1}{x+3} > x - 1 \iff \frac{1}{x+3} + 1 - x > 0 \iff \frac{1 + (1-x)(x+3)}{x+3} > 0 \iff \frac{4 - 2x - x^2}{x+1} > 0$

On étudie le signe de l'expression $\frac{4-2x-x^2}{x+3}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$:
Le discriminant de $4 - 2x - x^2$ est $\Delta = 4 + 4 \times 4 = 20$.
Les racines de ce polynôme sont donc $x_1 = \frac{2 - \sqrt{20}}{-2} = -1 + \sqrt{5}$ et $x_2 = \frac{2 + \sqrt{20}}{-2} = -1 - \sqrt{5}$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{5}$		-3		$-1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$4-2x-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{4-2x-x^2}{x+3}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Finalement $\boxed{S =]-\infty, -1-\sqrt{5}[\cup]-3, -1+\sqrt{5}[}$

7) $\frac{1}{x^2-4} \leq 3 \iff \frac{1 - 3(x^2-4)}{x^2-4} \leq 0 \iff \frac{13 - 3x^2}{x^2-4} \leq 0$

On a $13 - 3x^2 = 0 \iff x = -\sqrt{\frac{13}{3}}$ ou $x = \sqrt{\frac{13}{3}}$ et $x^2 - 4 = 0 \iff x = -2$ ou $x = 2$.
Ainsi, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\dfrac{13}{3}}$		-2		2		$\sqrt{\dfrac{13}{3}}$		$+\infty$
$13-3x^2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x^2-4		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{13-3x^2}{x^2-4}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$\boxed{\text{Finalement } S =]-\infty, -\sqrt{\frac{13}{3}}] \cup]-2, 2[\cup [-\sqrt{\frac{13}{3}}, +\infty[.}$

8) x^3+x^2-x-1 s'annule pour $x=1$ donc il existe une factorisation de la forme $x^3+x^2-x-1=(x-1)(ax^2+bx+c)$. On trouve $a=1$, $b=2$, $c=1$, donc $x^3+x^2-x-1=(x-1)(x^2+2x+1)=(x-1)(x+1)^2$.
Ainsi, $x^3+x^2-x-1=0 \iff x=1$ ou $x=-1$.

9) $4\,\mathrm{e}^{2x}-4\,\mathrm{e}^{x}+1=0 \iff (2\,\mathrm{e}^{x}-1)^2=0 \iff 2\,\mathrm{e}^{x}=1 \iff \mathrm{e}^{x}=\dfrac{1}{2} \iff x=-\ln(2)$.
Donc $S=\{-\ln(2)\}$.

10) L'ensemble de définition de cette équation est $\{x \mid x-1\geq 0\}\cap\{x \mid 1-x \geq 0\}$. Cette équation est donc définie seulement pour $x=1$. De plus, $x=1$ est solution, $\boxed{\text{donc } S=\{1\}}$.

11) $\sqrt{3x-2}=x$ est définie si $3x-2\geq 0$ donc si $x\geq \dfrac{2}{3}$. On résout cette équation sur $[\dfrac{2}{3};+\infty[$.
Si $x\geq\dfrac{3}{2}$, alors $x\geq 0$ donc $\sqrt{3x-2}=x \iff 3x-2=x^2$. On a $x^2-3x+2=0 \iff x=1$ ou $x=2$.
Comme $1<\dfrac{3}{2}$, la seule solution est $x=2$, ainsi $S=\{2\}$.

Correction de l'exercice 6 :

1) Pour tous réels $a,b\in\mathbb{R}$, on a $(a-b)^2\geq 0$ et $(a+b)^2\geq 0$ donc $a^2+b^2-2ab\geq 0$ et $a^2+b^2+2ab\geq 0$.
On en déduit que

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} \quad \text{et} \quad -ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

autrement dit que

$$|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$$

2) Soient $a,b\in\mathbb{R}^+$ deux réels. On pose $a'=\sqrt{a}$ et $b'=\sqrt{b}$. D'après la première question, on a

$$|a'b'| \leq \frac{1}{2}(a'^2+b'^2)$$

Or, $|a'b'|=\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ et $a'^2=a$ et $b'^2=b$ donc

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$$

3) Soient a et b deux réels strictement positifs. On pose $a'=\dfrac{1}{a}$ et $b'=\dfrac{1}{b}$. Alors $\sqrt{a'b'}=\sqrt{\dfrac{1}{a}\times\dfrac{1}{b}}=\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$, et d'après la question précédente on a

$$\sqrt{a'b'} \leq \frac{a'+b'}{2}$$

autrement dit $\dfrac{1}{\sqrt{ab}} \leq \dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$, et donc

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$$

BY NC

4) Soient a et b deux réels positifs. On a

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} &\iff \left(\frac{a^2+b^2+2ab}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2}\right) \quad \text{car les fonctions carré et racine carrée son stictement croissante sur} \\ &\iff \frac{2a^2+2b^2}{4} - \frac{a^2+b^2+2ab}{4} \geq 0 \\ &\iff \frac{a^2+b^2-2ab}{4} \geq 0\end{aligned}$$

Or, $a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 \geq 0$ donc par équivalence on en déduit la première inégalité, d'où le résultat.

Correction de l'exercice 8 : D'après la définition de la partie entière, on a $E(nx) \leq nx < E(nx)+1$ donc

$$\frac{E(nx)}{n} \leq x < \frac{E(nx)}{n} + \frac{1}{n}$$

en observant séparément chaque inégalité, on obtient donc l'encadrement suivant

$$x - \frac{1}{n} < \frac{E(nx)}{n} \leq x$$

et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(x - \frac{1}{n}\right) = x$ on en déduit d'après le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{E(nx)}{n} = x$, et ce quel que soit le réel x.

Correction de l'exercice 9 :

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $E(x) \leq x < E(x)+1$ donc $E(x)+1 \leq x+1 < E(x)+2$ donc $E(x)+1 = E(x+1)$ par unicité de la partie entière.

b) On a $E(nx) \leq nx$ donc $\frac{E(nx)}{n} \leq x$.

Comme la fonction partie entière est une fonction croissante, on en déduit que $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) \leq E(x)$.

De plus, en partant de $E(x) \leq x$ on obtient $nE(x) \leq nx$. Le membre de gauche et de droite sont des entiers donc en appliquant la fonction partie entière à cette inégalité on obtient

$$nE(x) \leq E(nx)$$

donc finalement $E(x) \leq \frac{E(nx)}{n}$. En appliquant une dernière fois la fonction partie entière à cette inégalité on obtient $E(x) \leq E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)$ donc finalement $E(x) = E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)$ par double inégalité.

c) Soit x un réel et soit $k = E(x)$, alors $k \leq x < k+1$. On distingue deux cas : ou bien $k \leq x < k + \frac{1}{2}$ ou bien $k + \frac{1}{2} \leq x < k+1$.

Dans le premier cas, on a $x < k + \frac{1}{2}$ donc $k \leq x + \frac{1}{2} < k+1$ et ainsi $E(x+\frac{1}{2}) = E(x)$, d'où $E(x)+E(x+1) = 2E(x)$. De plus, on a $2k \leq 2x < 2k+1$ donc $E(2x) = 2k$ ce qui prouve l'égalité voulue.

Dans le second cas, on a $k+1 \leq x+\frac{1}{2} < k+\frac{3}{2} \leq k+2$ donc $E(x+\frac{1}{2}) = k+1$ et ainsi $E(x)+E(x+\frac{1}{2}) = 2k+1$. De plus, $2k+2 \leq 2x+1 < 2k+3$ donc $2k+1 \leq 2x < 2k+2$ et ainsi $E(2x) = 2k+1$ ce qui prouve l'égalité voulue. Dans tous les cas on a donc bien $E(x)+E(x+\frac{1}{2}) = E(2x)$.

Correction de l'exercice 13 : On peut écrire

$$\begin{aligned}\sqrt{1+2^{2/3}+2^{-2/3}} &= \sqrt{(2^{1/3}+2^{-1/3})^2} \\ &= 2^{1/3}+2^{-1/3} \\ &= \sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ &= \frac{2^{2/3}+1}{2^{1/3}}\end{aligned}$$

CC BY NC

$$= \frac{2^{4/3} + 2^{2/3}}{2}$$

Correction de l'exercice 14 :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \exp(n^3 \ln(2) - n^2 \ln(3))$. Or $n^3 \ln(2) - n^2 \ln(3) = n^2 (n \ln(2) - \ln(3)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ par opérations. Donc par composition, $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Correction de l'exercice 15 :
Cette équation est définie seulement pour $x > 0$. On résout donc sur $]0; +\infty[$.

$$\begin{aligned} x^{x/2} = \left(\frac{x}{2}\right)^x \iff \exp\left(\frac{x}{2}\ln(x)\right) = \exp\left(x \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\ &\iff \exp\left(\frac{x}{2}\ln x\right) = \exp(x \ln x - x \ln 2) \\ &\iff \frac{x}{2}\ln x = x \ln x - x \ln 2 \\ &\iff x\left(\frac{\ln x}{2} - \ln 2\right) = 0 \end{aligned}$$

Or $x > 0$ donc

$$\begin{aligned} &\iff \ln x = 2\ln(2) \\ &\iff x = \mathrm{e}^{2\ln 2} \\ &\iff x = 2^2 \\ &\iff x = 4 \end{aligned}$$