

★

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel, soient F et G deux sous espaces vectoriels de E et soient $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de F et $\mathcal{G} = (g_1, g_2, \dots, g_r)$ une base de G .

Montrer que F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_r)$ est une base de E .

★

Exercice 2

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E . on pose $q = \text{Id} - p$.

- 1) Montrer que q est un projecteur.
- 2) Montrer que $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Ker}(q)$.
- 3) Montrer que $\text{Ker}(p) = \text{Im}(q)$ et $\text{Ker}(q) = \text{Im}(p)$.

★

Exercice 3

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$

- 1) Montrer que $E_1 = \{(a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1, 1))$ et $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3
- 2) On considère la projection sur E_2 parallèlement à E_1 , c'est à dire le projecteur $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\text{Im}(p) = E_2$ et $\text{Ker}(p) = E_1$. Déterminer la matrice A de p dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

- 3) Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et son inverse P^{-1} telles que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

★

Exercice 4

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & -a \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

- 1) Pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice A est-elle la matrice d'un projecteur?
- 2) Déterminer alors les sous espaces caractéristiques $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$ de ce projecteur.

- 3) Déterminer une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et son inverse P^{-1} telles que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

★ ★

Exercice 5

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- 1) Montrer qu'il y a équivalence entre les trois propositions suivantes :

- (i) $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$
- (ii) $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$
- (iii) $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$

Indication : on pourra montrer (i) \Leftrightarrow (ii), (i) \Rightarrow (iii) et (iii) \Rightarrow (ii)

- 2) Un endomorphisme vérifiant les propositions ci-dessus est-il nécessairement un projecteur?

★ ★ ★

Exercice 6

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec $n \geq 2$.

- 1) $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel strict de E puis déterminer un supplémentaire de F dans E .
- 2) Même question avec $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = P(2) = 0\}$.
- 3) Généraliser à $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_k) = 0\}$ avec $1 \leq k \leq n$ et $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ des réels distincts.

★ ★

Exercice 7

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E , et q un projecteur de E .
Montrer que F est stable par q si et seulement si $F = (F \cap \text{Ker}(q)) \oplus (F \cap \text{Im}(q))$.

★ ★

Exercice 8

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, p un projecteur de E et u un endomorphisme de E . Montrer que p et u commutent si et seulement si $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont stables par u .

★ ★

Exercice 9

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . On admet que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel (de dimension infinie). Soit $F = \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}$ et $G = \{ f \in E \mid f \text{ est constante} \}$.

- 1) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .
- 2) Soit p la projection sur F parallèlement à G . Que vaut $p(f)$ pour $f \in E$?

★ ★

Exercice 10

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs.

- 1) Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$
- 2) Montrer que si $p + q$ est un projecteur, $\text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$ et $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$

★ ★ ★

Exercice 11

Soient E et F deux \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie et soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

- 1) Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(g)$ sont en somme directe.
- 2) Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(g)$ sont supplémentaires dans E .
- 3) On pose $E = \mathbb{R}_n[x]$, $F = \mathbb{R}_{n-1}[x]$. On pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{n-1}[x] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-1}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[x] \\ P & \longmapsto & (x \mapsto \int_0^x P(t) dt) \end{array}$$

Vérifier que f et g satisfont les conditions de l'énoncé.

★ ★ ★

Exercice 12

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.

- 1) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que $\text{rg}(p) = \text{tr}(p)$.
- 2) Montrer par récurrence que si F_1, F_2, \dots, F_n est une famille de sous espaces vectoriels de E on a

$$\dim(F_1 + F_2 + \dots + F_n) \leq \dim(F_1) + \dim(F_2) + \dots + \dim(F_n)$$

avec égalité si et seulement si F_1, F_2, \dots, F_n sont en somme directe.

- 3) Soit p_1, p_2, \dots, p_n une famille de projecteurs. Montrer que $p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ est un projecteur si et seulement si $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j, p_i \circ p_j = 0$.

Indication : commencer par montrer que si p est un projecteur alors $\text{Im}(p) = \text{Im}(p_1) \oplus \text{Im}(p_2) \oplus \dots \oplus \text{Im}(p_n)$.

Le coin des Khûbes

★ ★ ★

Exercice 13

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$
- (ii) $u^2 = 0$ et $\dim(\text{Ker}(u)) = \dim(\text{Im}(u)) = \dim(E)/2$
- (iii) $u^2 = 0$ et il existe un endomorphisme v tel que $u \circ v + v \circ u = \text{Id}_E$.

★ ★ ★
Exercice 14

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. On dit qu'une matrice $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un pseudo-inverse de A lorsque les trois égalités suivantes sont satisfaites :

$$AA' = A'A \quad (i)$$

$$A = AA'A \quad (ii)$$

$$A' = A'AA' \quad (iii)$$

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et a l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé.

- 1) Supposons que A admette un pseudo-inverse. Montrer qu'alors $\text{rg}(a) = \text{rg}(a^2)$.
- 2) Réciproquement, supposons dans cette question que $\text{rg}(a) = \text{rg}(a^2)$. On note r le rang de a .
 - a) Montrer que $\mathbb{R}^n = \text{Im}(a) \oplus \text{Ker}(a)$
 - b) Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ avec B inversible et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telles que $A = P \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$
 - c) Montrer que A admet au moins un pseudo-inverse.
- 3) On suppose que A admet un pseudo inverse A' et on note a' l'endomorphisme canoniquement associé à A' . On garde les matrices B et P de la question précédente.
 - a) Montrer que $\text{Ker}(a)$ et $\text{Im}(a)$ sont stables par a' et montrer qu'il existe $D \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ telle que $A' = P \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.
 - b) Montrer que aa' est un projecteur dont on précisera le noyau et l'image en fonction de ceux de a . Préciser ce que vaut $P^{-1}(AA')P$.
 - c) Montrer que A admet au plus un pseudo-inverse.