⋆

Exercice 1 — Voir correction

Donner l'ensemble Ω dans les épreuves aléatoires suivantes :

1) On lance deux dés à 6 faces et on note la somme des numéros obtenus.
2) On lance deux dé indiscernables à 6 faces et on note les deux numéros obtenus.
3) On lance un dé à 6 faces rouge et un dé à 6 faces bleu et on note le numéro obtenu sur chacun des deux dés.

⋆ ⋆

Exercice 2 — Voir correction

1) Montrer qu'il n'existe que deux tribus possibles sur $\Omega = \{0, 1\}$
2) On considère la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\{0, 1\})$. Déterminer toutes les probabilités possibles sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

⋆

Exercice 3 — Voir correction

On lance un dé à 6 faces 5 fois de suite. Calculer la probabilité d'obtenir des numéros dans l'ordre croissant.

⋆

Exercice 4 — Voir correction

On lance une pièce une infinité de fois. On note

- P_n : "le n-ième lancer est pile"
- F_n : "le n-ième lancer est face"

1) Décrire par des unions et des intersection les événements suivants :
   a) E : "Tous les lancers pairs entre 100 et 200 sont piles"
   b) F : "On obtient un face avant le 10-ème lancer"
   c) G : "À partir d'un certain lancer, on obtient que des faces"
2) Sachant que la pièce est équilibrée et que les lancers sont indépendants, calculer la probabilité des 3 événements ci-dessus.

⋆

Exercice 5 — Voir correction

On lance un dé équilibré à 6 faces plusieurs fois de suite, et on note à chaque lancer le résultat obtenu. On note E_k l'événement « Le résultat du k-ième lancer est un 6.

1) En utilisant les symboles $\bigcup$ et $\bigcap$, exprimer en fonction de la famille (E_k) les événements suivants :
   a) Le 6 n'apparait jamais au delà du 10-ième lancer
   b) Le premier 6 apparaît après le 10-ième lancer
   c) Le premier 6 apparait avant le 10-ième lancer
2) Traduire par une phrase les événements suivant :
   a) $A = \left(\bigcup_{k=1}^{10} E_k\right) \bigcap \left(\bigcup_{k=11}^{20} \overline{E_k}\right)$
   b) $B = \left(\bigcap_{k=1}^{10} E_{2k}\right) \bigcap \left(\bigcap_{k=0}^{9} \overline{E_{2k+1}}\right)$
3) Montrer que l'événement « Le 6 apparaît au bout d'un certain nombre de lancer »a pour probabilité 1

⋆

Exercice 6 — Voir correction

On répartit au hasard 3 boules dans 5 boites numérotées de 1 à 5 (1 seule boule par boite).

1) Quel est la probabilité que la première boîte soit vide ?
2) Quel est la probabilité que les deux dernières boîtes soient vides ?

⋆

Exercice 7 — Voir correction

On considère l'univers $\Omega = \mathbb{N}$, la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et une probabilité $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$. Le but de cet exercices est de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = 0$

1) On considère la suite d'événements $A_n = [\![n, +\infty]\!]$.
   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{n\}) \leq \mathbb{P}(A_n)$
3) Conclure.

⋆

Exercice 8 — Voir correction

Soit $n \geq 3$ un entier. Une urne contient n pièces équilibrées. Il se trouve que $n-1$ d'entre elles sont normales et la dernière est truquée : elle possède deux côtés « face ».
On prend une pièce au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendantes n lancers de cette pièce.

1) Quelle est la probabilité qu'on obtienne « face » pendant les n premiers lancers ?
2) Sachant que l'on a obtenu « face »pour les n premiers lancers, quelle est la probabilité d'avoir pris la pièce truquée ?
   Interpréter la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 9 — Voir correction

Soient $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, et soit $n \in [\![0, min(a,b)]\!]$.
On considère une urne contenant a boules blanches numérotées de 1 à a, et b boules noires numérotées de $a+1$ à $a+b$.
On y effectue n tirages sans remise, et on appelle « résultat » l'ensemble des numéros obtenus.

1) Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Combien y a-t-il de résultats contenant exactement k boules blanches ?
3) En déduire la formule de Vandermonde : $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$

⋆ ⋆

Exercice 10 — Voir correction

Soit $n \geq 1$. On lance n fois un dé parfaitement équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir :

1) Au moins une fois le chiffre 6
2) Au moins deux fois le chiffre 6
3) Au moins k fois le chiffre 6 (avec $1 \leq k \leq n$).

⋆ ⋆

Exercice 11 — Voir correction

On lance 3 fois un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on note a, b et c les résultats successifs obtenus. On note $Q(x) = ax^2 + bx + c$.
Déterminer la probabilité pour que

1) Q ait deux racines réelles distinctes,
2) Q ait une racine réelle double,
3) Q n'ait pas de racines réelles.

⋆

Exercice 12 — Voir correction

On considère deux pièces de monnaies : l'une est équilibrée et tombe sur pile avec probabilité $p = 1/2$ et l'autre est truquée et tombe sur pile avec probabilité $p = 2/3$.
On choisit une pièce au hasard parmi ces deux pièces, et on obtient pile. Quelle est la probabilité que la pièce lancée soit la pièce truquée ?

⋆

Exercice 13 — Voir correction

Une boite contient 5 dés à 4 faces (numérotées 1 à 4), 3 dés à 6 faces (numérotées 1 à 6), et 10 dés à 12 faces (numérotées 1 à 12).
On pioche un dé au hasard dans la boite et on le lance.

1) Calculer la probabilité d'obtenir un 4.
2) Le résultat du lancer de dé est 4. Quelle est la probabilité que le dé tiré soit un dé à 12 faces ?

⋆

Exercice 14 — Voir correction

Un joueur de football s'entraine au tir au but. Il a peu de confiance en lui, ainsi il a plus de chance de réussir un tir s'il a réussi aussi le tir précédent.
On admet que

- La probabilité qu'il réussisse le premier tir est $0,1$.
- S'il réussit un tir, la probabilité qu'il réussisse le suivant est $0,8$
- S'il rate un tir, la probabilité qu'il réussisse le suivant est $0,6$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note T_n l'événement « le joueur réussit le n-ième tir »et $p_n = \mathbb{P}(T_n)$. Ainsi, $p_1 = 0,1$.

1) Calculer p_2.
2) Sachant que le joueur a réussit le deuxième tir, calculer la probabilité qu'il ait raté le premier.
3) Calculer la probabilité que le joueur réussisse au moins l'un des des trois premiers tirs.
4) Déterminer une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}, et en déduire une expression du terme général de (p_n).
5) Déterminer la limite de la suite p_n quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.

⋆

Exercice 15 — Voir correction

Une maladie circule dans la population avec un taux d'incidence de 300 personnes sur 100 000 habitants.
Un test pour détecter cette maladie donne les résultats suivants :

- Si la personne est malade le test est positif dans 97% des cas
- Si la personne n'est pas malade, le test est négatif dans 99% des cas.

1) On teste une personne au hasard dans la population. Calculer la probabilité que le test soit positif.
2) On teste une personne au hasard et le résulta du test est positif. Calculer une valeur approchée de la probabilité que la personne soit réellement malade.
3) On teste une personne au hasard et le résultat du test est négatif. Calculer une valeur approchée de la probabilité que la personne soit saine.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 16 — Voir correction

Un tournois de tennis se déroule selon les modalités suivantes :

- Au temps 1, les joueurs J_0 et J_1 s'affrontent.
- à chaque temps $n > 1$, un nouveau joueur J_n affronte le vainqueur du match au temps $n - 1$

Soit G_n l'événement : « au temps n, le joueur J_n gagne. Supposons que les événements $(G_n)_{n\geq 1}$ sont tous indépendants entre eux et que $\mathbb{P}(G_n) = p \in]0; 1[$ pour tout $n \geq 1$.
Un joueur est déclaré vainqueur du tournois dès qu'il parvient à remporter 5 matchs consécutifs. Pour chaque $n \geq 1$, considérons l'événement E_n : « aucun joueur n'a emporté le tournoi à l'issue du match au temps n.

1) Calculer $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
2) Justifier que la suite $(\mathbb{P}(E_n))_{n\geq 1}$ converge.
3) Montrer que $\mathbb{P}(E_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

⋆ ⋆

Exercice 17 — Voir correction

Un voleur en fuite cherche à échapper à la police. Il a 3 cachettes, appelées A, B et C, et il décide de lancer un dé chaque jour pour décider de sa cachette suivante :

- S'il est dans la cachette A et qu'il obtient un nombre pair, il va dans la cachette B. S'il obtient un 5 il va dans la cachette C, sinon il reste dans la cachette A
- S'il est dans la cachette B et qu'il obtient un nombre inférieur ou égal à 4, il va dans la cachette A, sinon il va dans la cachette C.
- S'il est dans la cachette C et qu'il obtient un 5 ou un 6, il va dans la cachette A. S'il obtient un 2, un 3 ou un 4 il

va dans la cachette B, sinon il reste dans la cachette C

On note

- A_n : "Le voleur se trouve dans la cachette A au bout de n jours.
- B_n : "Le voleur se trouve dans la cachette B au bout de n jours.
- C_n : "Le voleur se trouve dans la cachette C au bout de n jours.

On définie les suites (a_n), (b_n) et (c_n) par $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \mathbb{P}(A_n),\ b_n = \mathbb{P}(B_n),\ c_n = \mathbb{P}(C_n)$. Le voleur commence sa cavale dans la cachette A, ainsi $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$.

1) Déterminer une relation de récurrence entre les termes $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et a_n, b_n, c_n.
2) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $a_n = 2c_n$.
3) En déduire une relation de réurrence entre c_{n+2}, c_{n+1} et c_n valable pour tout $n \geq 1$.
4) En déduire le terme général de la suite c_n,pour $n \geq 1$ puis les limites respectives de (a_n), (b_n) et (c_n) et interpréter ce résultat

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 18 — **Voir correction**

(D'après Oraux ESCP) On effectue une suite de tirage au hasard dans une urne qui contient initialement une boule blanche et une boule noire de la manière suivante :

- à chaque tirage d'une boule blanche, on replace cette boule dans l'urne, puis l'on rajoute des boules blanches jusqu'à avoir multiplié par deux le nombre de boules blanches dans l'urne
- si l'on tire la boule noire, on arrête les tirages.

Ainsi, le nombre de boules blanches dans l'urne est multiplié par deux à chaque étape (sauf la dernière). On admet que l'expérience aléatoire est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « les n premiers lancers ne donnent que des boules blanches », et l'on pose $u_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{P}(B_n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}$
3) On note B l'événement « les tirages ne s'arrêtent jamais ».
   a) Exprimer B en fonction des B_n
   b) Justifier que $\mathbb{P}(B) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$
   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $-\ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+2^{-k})$
   d) Montrer que $\forall x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$.
   e) En déduire que la suite $(-\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puis que $\mathbb{P}(B) \neq 0$

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
2) Les deux dés sont indiscernables, ainsi l'ordre des numéros n'importe pas. On a

$$\begin{aligned}\Omega = \{&\{1,1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\\ &\{2,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,6\},\\ &\{3,3\},\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\},\\ &\{4,4\},\{4,5\},\{4,6\},\\ &\{5,5\},\{5,6\},\\ &\{6,6\}\}\end{aligned}$$

3) Les dés sont discernables, l'ordre des numéros relevé importe donc Ω est l'ensemble des 2-uplets de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ &(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 :

1) Une tribu est une partie non vide de $\mathcal{P}(\Omega)$, autrement dit c'est un ensemble de parties de Ω.
Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ une tribu sur Ω.
Alors, d'après la définition d'une tribu :
   - $\Omega \in \mathcal{A}$
   - Si $A \in \mathcal{A}$, alors $\overline{A} \in \mathcal{A}$
   - Si (A_n) est une famille d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

   Ainsi, $\overline{\Omega} = \varnothing \in \mathcal{A}$.
   $\text{card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^2 = 4$. On a $\mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. On cherche à savoir pour chaque $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ si $A \in \mathcal{A}$.
   Supposons qu'il existe $A \in \mathcal{A}$ une partie de Ω qui ne soit pas $\varnothing$ ou Ω. Alors $A = \{0\}$ ou $A = \{1\}$
   - Si $A = \{0\}$, alors $\overline{A} = \{1\}$, et on a nécessairement $\{0\} \in \mathcal{A}$ et $\{1\} \in \mathcal{A}$.
   - Si $A = \{1\}$, alors $\overline{A} = \{0\}$, et on a aussi $\{0\} \in \mathcal{A}$ et $\{1\} \in \mathcal{A}$.

   Dans tous les cas, $\{0\} \in \mathcal{A}$ et $\{1\} \in \mathcal{A}$, donc $A = \mathcal{P}(\Omega)$.
   Sinon, il n'existe aucun $A \in \mathcal{A}$ qui ne soit ni $\varnothing$ ni Ω. Dans ce cas, $\mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu sur Ω.
   Conclusion : les deux seules tribus sur Ω sont :
   - $\mathcal{A} = \{\varnothing, \Omega\}$
   - $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

2) Soit $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ une probabilité.
Alors, d'après la définition d'une probabilité, on a $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Par propriété, on a $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
Une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega))$ est déterminée par $\mathbb{P}(\{1\})$. En effet, si $p = \mathbb{P}(\{1\})$, alors $\mathbb{P}(\{0\}) = 1-\mathbb{P}(\{1\}) = 1-p$ car $\{0\} = \overline{\{1\}}$.
Réciproquement, si $p \in [0, 1]$ est un réel, alors on peut définir une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω par

$$\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A = \Omega \\ p & \text{si } A = \{1\} \\ 1-p & \text{si } A = \{0\} \\ 0 & \text{si } A = \varnothing \end{cases}$$

Correction de l'exercice 3 : L'ordre des numéros obtenu importe, ainsi $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^5$. Ω est l'ensemble des 5-uplets de $\{1,2,3,4,5,6\}$.
L'expérience est équiprobable, et le nombre d'éléments de Ω est donc 6^5.
L'énoncé ne précise pas si l'ordre des numéros doit être croissant ou strictement croissant, étudions les deux cas :

— Comptons d'abord le nombre de 5-uplets de Ω qui sont rangés par ordre strictement croissant. Dans un 5-uplet rangé par ordre strictement croissant, tous les numéros apparaissent sauf 1. Réciproquement, un 5-uplet rangé par ordre strictement croissant est entièrement déterminé par l'unique numéro qui n'apparait pas dans ce 5-uplet.
Le nombre de 5-uplets rangés par ordre strictement croissant est donc 6.
Ainsi, la probabilité d'obtenir des numéros dans l'ordre strictement croissant est $\frac{6}{6^5} = 6^{-4}$

— Comptons maintenant le nombre de 5-uplets de Ω qui sont rangé par ordre croissant (pas strictement). Soit N le nombre de numéros distincts dans un 5-uplet rangé par odre croissant, alors $N \in \{1,2,3,4,5\}$.

  — Si $N = 5$, on est dans le cas d'un 5-uplet rangé par ordre strictement croissant, il y a 6 possibilité.
  — Si $N = 4$, il y a $\binom{6}{4}$ choix des 4 numéros qui apparaissent dans le 5-uplet, et un seul numéro peut se répéter 2 fois parmi les 4. Il y a donc $4 \times \binom{6}{4}$ choix possibles.
  — Si $N = 3$, il y a $\binom{6}{3}$ choix des 3 numéros qui apparaissent dans le 3-uplet. Il peut y avoir 2 numéros qui se répètent 2 fois, ou 1 numéro qui se répète 3 fois. Il y a donc $\binom{6}{3} \times \left(\binom{3}{2} + \binom{3}{1}\right)$ choix possibles.
  — Si $N = 2$, il y a $\binom{6}{2}$ choix des 2 numéros qui apparaissent dans le 2-uplet. Le plus petit se répète k fois et l'autre se répète $5-k$ fois, avec $k \in [\![1,4]\!]$, il y a donc $\binom{6}{2} \times 4$ choix possibles.
  — Si $N = 1$, alors les 5 numéros sont identiques, il y a 6 choix possibles pour ce numéro.

Finalement, le nombre de 5-uplets de $\{1,2,3,4,5,6\}$ rangés par ordre croissant est

$$\begin{aligned} 6 + 4 \times \binom{6}{4} + \binom{6}{3} \times (3+3) + \binom{6}{2} \times 4 + 6 &= 6 + 4 \times 15 + 120 + 15 \times 4 + 6 \\ &= 252 \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité d'obtenir des numéros dans l'ordre croissant est $\frac{252}{6^5}$

Correction de l'exercice 4 :

1) a) $E = \bigcap_{k=50}^{100} P_{2k}$

b) $F = \bigcup_{k=1}^{9} F_k$

c) G est l'événement "il existe un entier k tel que tous les lancers après k sont des faces".

$$G = \bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{i \geq k} F_i$$

2) a) Tous les lancers sont indépendants donc $\mathbb{P}(E) = \prod_{k=50}^{100} \mathbb{P}(P_{2k}) = \prod_{k=50}^{100} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{51}}$

b) Le contraire de F est "on obtient que des piles avant le 10e lancer.
Ainsi, $\mathbb{P}(\overline{F}) = \mathbb{P}\left(\cap_{k=1}^{9} P_k\right) = \frac{1}{2^9}$.
donc $\mathbb{P}(F) = 1 - \frac{1}{2^9}$.

c) Soit $A_k = \bigcap_{i \geq k} F_i$. Alors (A_k) est une suite croissante d'événements.
Ainsi, d'après le théorème de la limite monotone, $\mathbb{P}(G) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_k)$.
Montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_k) = 0$.
$A_k = \bigcap_{i \geq k} F_i = \bigcap_{n=k}^{+\infty} \bigcap_{i=k}^{n} F_i$.
En effet, si $x \in \bigcap_{i \geq k} F_i$, alors pour tout $i \geq k$ on a $x \in F_i$, donc pour tout $n \geq k$ et pour tout $i \in [\![k,n]\!]$, $x \in F_i$.
Ainsi $\bigcap_{i \geq k} F_i \subset \bigcap_{n=k}^{+\infty} \bigcap_{i=k}^{n} F_i$.
Réciproquement, si $x \in \bigcap_{n=k}^{+\infty} \bigcap_{i=k}^{n} F_i$, alors pour tout $n \geq k$, $x \in \bigcap_{i=k}^{n} F_i$ donc en particulier $x \in F_n$. Ainsi, $x \in \bigcap_n \geq k F_n = A_k$. Ainsi, $\bigcap_{n=k}^{+\infty} \bigcap_{i=k}^{n} F_i \subset \bigcap_{i \geq k} F_i$.

Finalement, $A_k = \bigcap_{n=k}^{+\infty} \bigcap_{i=k}^{n} F_i$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Notons $B_{n,k} = \bigcap_{i=k}^{n} F_i$. Alors $(B_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements. D'après le théorème de la limite monotone, on a donc $\mathbb{P}(A_k) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_{n,k})$.

Or les lancers sont indépendants, donc $\mathbb{P}(B_{n,k}) = \prod_{i=k}^{n} \mathbb{P}(F_i) = \dfrac{1}{2^{n-k}}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_{n,k}) = 0$, donc $\mathbb{P}(A_k) = 0$
On en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_k) = 0$ donc que $\mathbb{P}(G) = 0$.

Correction de l'exercice 5 :

1) a) $\bigcap_{k\geq 10} \overline{E_k}$
   b) $\bigcap_{k=1}^{10} \overline{E_k}$
   c) $\bigcup_{k=1}^{10} E_k$
2) a) A est l'événement "Lors des 20 premiers lancers, le 6 apparait au cours des 10 premiers lancers, et il n'apparait pas au moins une fois lors des 10 lancers suivants."
   b) B est l'événement "Lors des 20 premiers lancers, le 6 apparait uniquement lors des lancers de rang pairs".
3) "Le 6 apparait au bout d'un moment" est l'événement $\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k$.
   Le contraire de cet événement est $\overline{\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{E_k}$
   Considérons la suite d'événements (A_n) définis par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{E_k}$. Alors (A_n) est une suite décroissante d'événements donc d'après le théorème de la limite monotone :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_n\right) &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\overline{A_n}) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{5}{6}\right)^n && \text{car } \mathbb{P}(\overline{E_1}\cap\overline{E_2}\cap\cdots\cap\overline{E_n}) = (\mathbb{P}(\overline{E_1}))^n \text{ par indépendance des } (E_k) \\
&= 0 && \text{car } 0 \leq 1-\frac{5}{6} < 1
\end{aligned}$$

   Or $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{E_k}$ donc finalement $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{E_k}\right) = 0$ d'où $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right)$

Correction de l'exercice 6 :

1) Il y a $\binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!\times 2!} = 10$ façons de répartir 3 boules dans 5 boites, et il y a $\binom{4}{3} = 4$ façons de répartir 3 boules dans les boites numérotés 2,3,4,5.
   La probabilité que la boite 1 soit vide est donc $\dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$.
2) Si les deux dernières boites sont vides c'est que les trois premières contiennent chacune une boule. Il n'y a qu'une seule façon de ranger 3 boules dans 3 boites, donc la probabilité que les deux dernières boites soient vides est $\dfrac{1}{10}$.

Correction de l'exercice 7 :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A_{n+1} \subset A_n$, donc (A_n) est une suite décroissante d'événements.
   Ainsi, $(\mathbb{P}(A_n))$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 0} A_n\right)$
   Or $\bigcap_{n\geq 0} A_n = \varnothing$. En effet, si $n_0 \in \mathbb{N}$ est un entier tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n_0 \in A_n$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq n_0$ ce qui est impossible donc $\bigcap_{n\geq 0} A_n$ est vide.
   Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{n\} \subset A_n$ donc $\mathbb{P}(\{n\}) \leq \mathbb{P}(A_n)$.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq \mathbb{P}(\{n\}) \leq \mathbb{P}(A_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $(\mathbb{P}(\{n\}))$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = 0$.

Correction de l'exercice 8 :

1) Notons T l'événement « la pièce choisie est la pièce truquée », et F_n l'événement « le résultat des n premiers lancers est face ».
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}_T(F_n) = 1$ et $\mathbb{P}_{\overline{T}}(F_n) = \dfrac{1}{2^n}$ par indépendance des lancers.
   Ainsi,

$$\mathbb{P}(F_n) = \mathbb{P}(F_n \cap T) + \mathbb{P}(F_n \cap \overline{T}) \qquad \text{d'après la loi des probabilités totales}$$

$$= \mathbb{P}(T) \times \mathbb{P}_T(F_n) + \mathbb{P}(\overline{T}) \times \mathbb{P}_{\overline{T}}(F_n)$$
$$= \frac{1}{n} \times 1 + \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{2^n}$$
$$= \frac{2^n + n - 1}{2^n n}$$

2) On cherche maintenant $\mathbb{P}_{F_n}(T)$.

$$\mathbb{P}_{F_n}(T) = \frac{\mathbb{P}_T(F_n) \times \mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(F_n)} = \frac{1 \times \frac{1}{n}}{\frac{2^n+n-1}{2^n n}} = \frac{2^n}{2^n + n - 1}$$

On a $2^n + n - 1 \sim 2^n$ car $n - 1 = o(2^n)$ donc $\mathbb{P}_{F_n}(T) \sim \frac{2^n}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, plus le nombre de face obtenu est grand et plus il est certain que la pièce choisie est la pièce truquée.

Correction de l'exercice 9 :

1) Un résultat est un choix de n numéros parmi $a + b$ numéros, donc il y a $\binom{a+b}{n}$ résultats possibles.
2) Il y a $\binom{a}{k}$ façons de choisir k boules blanches. Un résultat contenant k boules blanches contient nécessairement $n - k$ boules noires et il y a $\binom{b}{n-k}$ choix possibles de $n-k$ boules noires. Ainsi il y a $\binom{a}{k} \times \binom{b}{n-k}$ résultats contenant exactement k boules blanches.
3) Soit Ω l'ensemble des résultats possibles. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, notons A_k l'ensemble des résultats contenant exactement k boules blanches. Alors $(A_k)_{0\leq k\leq n}$ est une partition de Ω, et d'après la question précédente $\text{card}(A_k) = \binom{a}{k} \times \binom{b}{n-k}$. Ainsi on a

$$\binom{a+b}{n} = \text{card}(\Omega) = \sum_{k=0}^{n} \text{card}(A_k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$$

Correction de l'exercice 10 :

1) Le contraire est "n'obtenir aucune fois le chiffre 6". Les lancers sont indépendants, donc la probabilité de ne jamais obtenir le chiffre 6 est $\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

   La probabilité d'obtenir au moins une fois le chiffre 6 est $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
2) L'événement contraire est "n'obtenir aucune fois le chiffre6 OU obtenir exactement une fois le chiffre 6".
   Calculons le nombre de choix possibles pour obtenir exactement une fois le chiffre 6 : il y a n choix possibles pour le rang du lancer où on obtient 6. Une fois ce rang fixé, la probabilité d'obtenir $n - 1$ fois un nombre autre que 6 et 1 fois le nombre 6 est $\frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$.

   Ainsi, la probabilité d'obtenir au moins deux fois le chiffre 6 est $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n - n \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$.
3) L'événement contraire est "obtenir au plus $k - 1$ fois le chiffre 6".
   Notons A_i la probabilité d'obtenir exactement i fois le nombre 6.
   Il y a $\binom{n}{i}$ choix pour les rangs des lancers auxquels on obtient 6, et pour chacun de ces choix la probabilité de tirer i fois 6 et $n - i$ fois un nombre autre que 6 est $\left(\frac{1}{6}\right)^i \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-i}$. Ainsi, $\mathbb{P}(A_i) = \binom{n}{i} \times \left(\frac{1}{6}\right)^i \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-i}$. Cette formule fonctionne aussi pour $i = 0$ et $i = 1$, les résultats des questions 1 et 2 peuvent se retrouver ainsi.
   La probabilité recherchée est $1 - \mathbb{P}(A_0) - \mathbb{P}(A_1) - \cdots - \mathbb{P}(A_{k-1})$, c'est à dire

$$1 - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{6}\right)^i \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-i}$$

Correction de l'exercice 11 : L'ensemble des résultats possibles Ω est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$. Il y a $6^3 = 216$ valeurs possibles du triplet (a, b, c).
Le nombre de racines de Q dépend uniquement du signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
Étudions les cas en fonction des valeurs de b

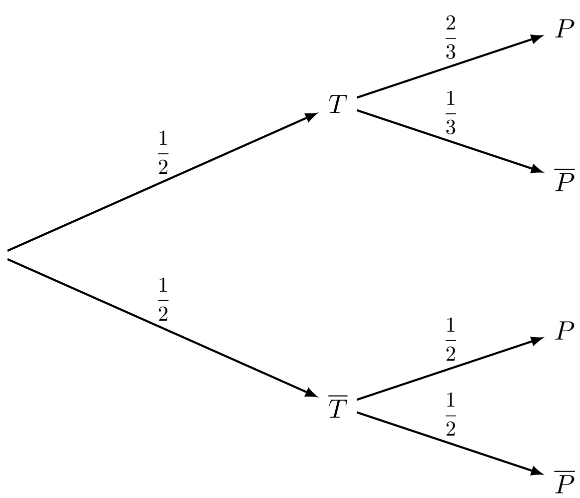
- Si $b=1$, alors $b^2=1$ donc comme $ac \geq 1$ on a $b^2-4ac \leq -3$. Ainsi, Q n'a pas de racines réelles. Il y a 36 choix possibles de (a,b,c) pour lesquels $b=1$ (nombre de choix de (a,c) dans $\{1,2,3,4,5,6\}^2$).
- Si $b=2$, alors $b^2=4$.
  - ▷ $b^2-4ac=0$ si et seulement si $ac=1$, si et seulement si $a=c=1$ (1 choix)
  - ▷ $b^2-4ac<0$ dans tous les autres cas. Il y a donc 1 choix possible pour lequel $b=2$ et $\Delta=0$ ($(a,b,c)=(2,1,1)$) et 35 choix possibles pour lesquels $b=2$ et $\Delta<0$ (choix de (a,c) dans $\{1,2,3,4,5,6\}^2 \setminus \{(1,1)\}$).
- Si $b=3$, alors $b^2=9$. a et c sont entiers donc on ne peut pas avoir $ac=\frac{9}{4}$, ainsi on a soit $\Delta>0$ soit $\Delta>0$.
  - ▷ Si $ac<\frac{9}{4}$, alors $\Delta>0$. C'est le cas si et seulement si $(a,c)\in\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$.
  - ▷ Dans tous les autres cas (33 choix possibles), $ac>\frac{9}{4}$ donc $\Delta<0$
- Si $b=4$, alors $b^2=16$. Le signe de Δ dépend du signe de $4-ac$.
  - ▷ Si $(a,c)\in\{(1,4),(2,2),(4,1)\}$ alors $ac=4$ donc $\Delta=0$ (3 choix)
  - ▷ Si $(a,c)\in\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1)\}$, alors $ac<4$ donc $\Delta>0$
  - ▷ Dans tous les autres cas (29 cas), on a $ac>4$ donc $\Delta<0$
- Si $b=5$, alors $b^2=25$. On ne peut pas avoir $\Delta=0$.
  - ▷ On a $\Delta>0$ si et seulement si $ac<\frac{25}{4}$ si et seulement si $ac\leq 6$.
    Ainsi, $\Delta>0$ si et seulement si $(a,c)\in\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1),(5,1),(6$
    (14 choix)
  - ▷ $\Delta<0$ dans tous les autres cas (36-14=22 choix).
- Si $b=6$, alors $b^2=36$.
  - ▷ $\Delta=0$ si et seulement si $4ac=36$ si et seulement si $ac=9$ si et seulement si $a=c=3$ (1 choix)
  - ▷ $\Delta>0$ si et seulement si $ac<\frac{36}{4}=9$ si et seulement si $ac\leq 8$.
    Ainsi, $\Delta>0$ si et seulement si

$$\begin{aligned} ac \in \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),\\ &(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(5,1),(6,1)\}\end{aligned}$$

    (16 choix)
  - ▷ $\Delta<0$ dans tous les autres cas : 36-16-1=19 choix

On a donc $\mathbb{P}(\Delta<0)=\frac{36+35+33+29+22+19}{216}=\frac{174}{216}$, $\mathbb{P}(\Delta=0)=\frac{1+3+1}{216}=\frac{5}{216}$ et $\mathbb{P}(\Delta>0)=\frac{3+4+14+16}{216}=\frac{37}{216}$

Correction de l'exercice 12 : Notons T l'événement "la pièce choisie est truquée" et P l'événement "la pièce lancée tombe sur pile". Représentons la situation par un arbre :

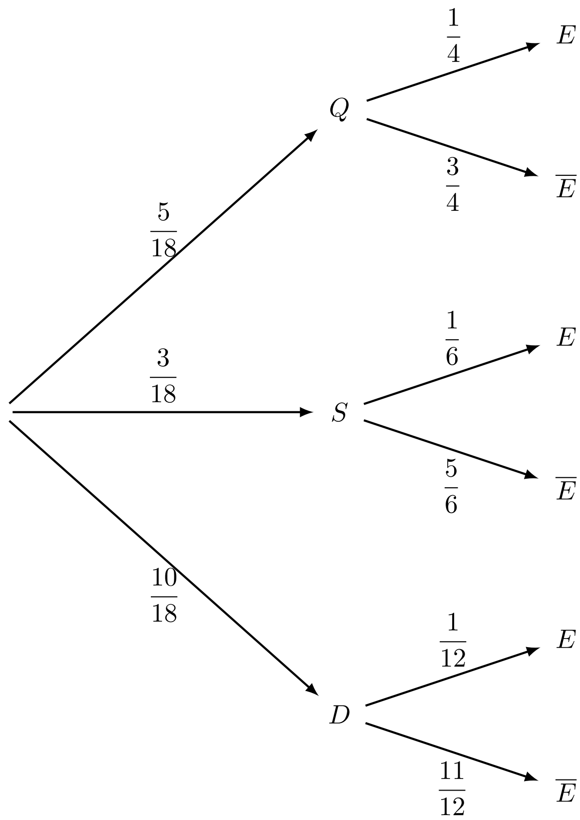


Il faut calculer $\mathbb{P}(T|P)$. D'après la formule de Bayes, $\mathbb{P}(T|P) = \mathbb{P}(P|T) \times \dfrac{\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(P)}$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T|P) &= \frac{2}{3} \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{12}} \\ &= \frac{4}{7}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 13 :

1) On note Q l'événement "le dé pioché a 4 faces", S l'événement "le dé pioché a 6 faces" et D l'événement "le dé pioché a 12 faces". On note E l'événement "le nombre obtenu est 4. On représente la situation par un arbre :

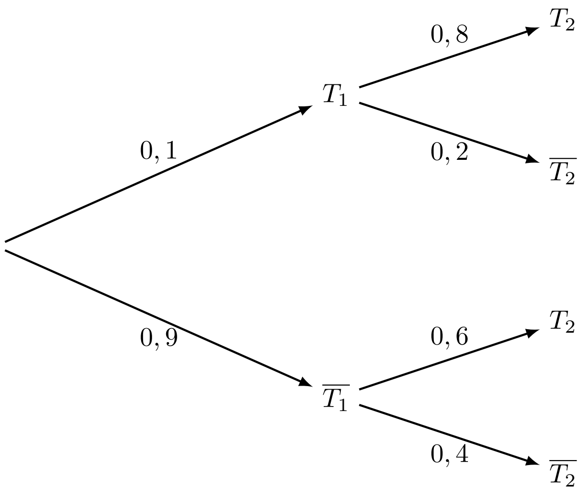


ainsi, $\mathbb{P}(E) = \frac{5}{18}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{18}\times\frac{1}{6}+\frac{10}{18}\times\frac{1}{12} = \frac{1}{18}\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{6}+\frac{10}{2}\right) = \frac{1}{18}\times\frac{81}{12} = \frac{3}{8}$

2) $\mathbb{P}(D|E) = \mathbb{P}(E|D)\times\dfrac{\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(E)} = \dfrac{1}{12}\times\dfrac{10/18}{3/8} = \dfrac{1}{12}\times\dfrac{5}{9}\times\dfrac{8}{3} = \dfrac{10}{81}$

Correction de l'exercice 14 :

1) On peut modéliser les deux premiers tirs par l'arbre de probabilité suivant :



Ainsi, $\mathbb{P}(T_2) = 0,1 \times 0,8 + 0,9 \times 0,6 = 0,62$.

2) $\mathbb{P}(\overline{T_1}|T_2) = \mathbb{P}(T_2|\overline{T_1}) \times \dfrac{\mathbb{P}(\overline{T_1})}{\mathbb{P}(T_2)} = 0,6 \times \dfrac{0,9}{0,62} = \dfrac{54}{62} = \dfrac{27}{31}$

3) L'événement contraire est "le joueur rate les trois premiers tirs". La probabilité de cet événement est $0,9 \times 0,4 \times 0,4 = 0,144$.
Ainsi, la probabilité que le joueur réussisse au moins l'un des trois premiers tirs est $1 - 0,144 = 0,856$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \mathbb{P}(T_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(T_n) \times \mathbb{P}(T_{n+1}|T_n) + \mathbb{P}(\overline{T_n}) \times \mathbb{P}(T_{n+1}|\overline{T_n}) \\ &= p_n \times 0,8 + (1 - p_n) \times 0,6 \\ &= p_n \times \left(\frac{8}{10} - \frac{6}{10}\right) + \frac{6}{10} \\ &= \frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5} \end{aligned}$$

(p_n) est donc une suite arithmético-géométrique. En posant $r = \dfrac{3}{4}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = p_n - r = p_n - \dfrac{3}{4}$, on a

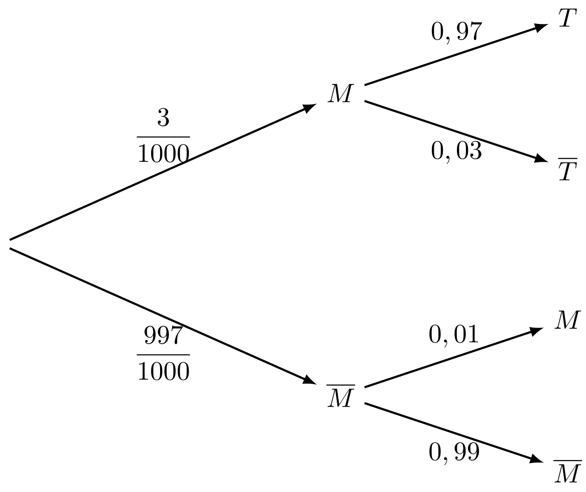
$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5} - \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{5} p_n - \frac{3}{20} \\ &= \frac{1}{5}\left(p_n - \frac{3}{4}\right) & = \frac{1}{5} v_n \end{aligned}$$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_1 \times \dfrac{1}{5^{n-1}} = \dfrac{-13}{20 \times 5^{n-1}} = \dfrac{-13}{4 \times 5^n}$
On en conclut que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = v_n + \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4 \times 5^n}$.

5) Comme $0 \leq \dfrac{1}{5} < 1$, on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ donc par opérations $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{3}{4}$. On en conclut que la probabilité pour que le joueur réussisse son n-ième tir est proche de $0,75$ pour n suffisamment grand.

Correction de l'exercice 15 :

1) On note M l'événement "la personne choisie est malade" et T l'événement "le résultat du test est positif". On représente la situation par l'arbre de probabilité ci-dessous



donc $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(T) + \mathbb{P}(\overline{M}) \times \mathbb{P}_{\overline{M}}(T) = 0,003 \times 0,97 + 0,997 \times 0,01 = 0,00291 + 0,00997 = 0,01288$.

2) On a $\mathbb{P}_T(M) = \mathbb{P}_M(T) \times \dfrac{\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T)} = 0,97 \times \dfrac{0,003}{0,01288} = 0,2259$ à 10^{-4} près. La probabilité que la personne soit réellement malade est seulement d'environ $0,2259$.

3) Comme $\mathbb{P}(T) = 0,01288$ on a $\mathbb{P}(\overline{T}) = 1 - \mathbb{P}(T) = 0,98712$. On a alors $\mathbb{P}_{\overline{T}}(\overline{M}) = \mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{T}) \times \dfrac{\mathbb{P}(\overline{M}}{\mathbb{P}(\overline{T})} = 0,99 \times \dfrac{0,997}{\mathbb{P}(0,98712)} = 0,9999$ à 10^{-4} près.

4)

Correction de l'exercice 16 :

1) Il faut jouer minimum 5 matchs (et les gagner) pour gagner le tournoi. Si $n \in \{1,2,3,4\}$, aucun joueur n'a remporté le tournoi au temps n donc $\mathbb{P}(E_n) = 1$.
Si $n = 5$, $\overline{E_5}$ est l'événement « un joueur a remporté le tournoi à l'issue du match au temps 5 », cet événement est réalisé seulement si J_0 gagne les 5 premiers matchs ou si J_1 gagne les 5 premiers matchs.
Peut importe qui gagne le premier match entre J_0 et J_1, la probabilité qu'il remporte les 4 matchs suivants est égale à $\mathbb{P}(\overline{G_2} \cap \overline{G_3} \cap \overline{G_4} \cap \overline{G_5})$ (en effet il faut que pour tout $k \in \{2,3,4,5\}$ le joueur J_k perde son match.
Puisque G_2, G_3, G_4, G_5 sont indépendants alors $\overline{G_2}, \overline{G_3}, \overline{G_4}, \overline{G_5}$ aussi donc
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{G_2} \cap \overline{G_3} \cap \overline{G_4} \cap \overline{G_5}) &= \mathbb{P}(\overline{G_2}) \times \mathbb{P}(\overline{G_3}) \times \mathbb{P}(\overline{G_4}) \times \mathbb{P}(\overline{G_5}) \\ &= (1-p)^4\end{aligned}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si aucun joueur n'a remporté le tournoi à l'issue du match au temps $n+1$, c'est qu'aucun joueur ne l'a remporté à l'issu du temps n. Ainsi, $\mathbb{E}_{n+1} \subset E_n$ donc $\mathbb{P}(E_{n+1}) \leq \mathbb{P}(E_n)$. La suite $\mathbb{P}(E_n)$ est décroissante et minorée par 0 (car $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(E_n) \in [0;1]$), elle converge donc vers un réel $\ell \geq 0$.

3) Considérons l'événement F_n : « aucun joueur dont le numéro est un multiple de 5 strictement positif n'a remporté le tournoi à l'issu du match au temps n ». Comme pour $(\mathbb{P}(E_n))$ on remarque que la suite $(\mathbb{P}(F_n))$ est décroissante.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $E_n \subset F_n$ donc $\mathbb{P}(E_n) \leq \mathbb{P}(F_n)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculons $\mathbb{P}(F_{5n})$. La probabilité que J_{5n} ne remporte pas le tournoi pour un entier $n \geq 1$ quelconque est $\mathbb{P}\left(\overline{G_{5n} \cap \overline{G_{5n+1}} \cap \overline{G_{5n+2}} \cap \overline{G_{5n+3}} \cap \overline{G_{5n+4}}}\right) = 1 - p(1-p)^4$
Si $n \neq n'$, les événements $G_n, G_{n+1}, G_{n+2}, G_{n+3}, G_{n+4}$ sont tous distincts des événements $G_{n'}, G_{n'+1}, G_{n'+2}, G_{n'+3}, G_{n'+4}$ donc ils sont tous indépendants entre eux. On a donc $\mathbb{P}(F_{5n}) = \left(1 - p(1-p)^4\right)^n$
Or, $p \in]0;1[$ donc $p(1-p)^4 \in]0;1[$ et donc $0 \leq 1 - p(1-p)^4 < 1$. On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(F_{5n}) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(F_n) = 0$ car (F_n) est décroissante et positive.
On en conclut par comparaison de limites que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(E_n) = 0$.

Correction de l'exercice 17 :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le voleur est dans l'une des trois cachette au bout de n jours, donc (A_n, B_n, C_n) forme un système complet d'événément. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
   — $\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n) + \mathbb{P}(B_n) \times \mathbb{P}(A_{n+1}|B_n) + \mathbb{P}(C_n) \times \mathbb{P}(A_{n+1}|C_n)$.
   — $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}(B_{n+1}|A_n) + \mathbb{P}(B_n) \times \mathbb{P}(B_{n+1}|B_n) + \mathbb{P}(C_n) \times \mathbb{P}(B_{n+1}|C_n)$.
   — $\mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}(C_{n+1}|A_n) + \mathbb{P}(B_n) \times \mathbb{P}(C_{n+1}|B_n) + \mathbb{P}(C_n) \times \mathbb{P}(C_{n+1}|C_n)$.
   Or, d'après l'énoncé on a

— $\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(A_{n+1}|B_n) = \frac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(A_{n+1}|C_n) = \frac{1}{3}$

— $P(B_{n+1}|A_n) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B_{n+1}|B_n) = 0$ et $\mathbb{P}(B_{n+1}|C_n) = \frac{1}{2}$

— $\mathbb{P}(C_{n+1}|A_n) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(C_{n+1}|B_n) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(C_{n+1}|C_n) = \frac{1}{6}$

donc finalement

$$\begin{cases} a_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = & \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n \\ b_{n+1} = \mathbb{P}(B_{n+1}) = & \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = \mathbb{P}(C_{n+1}) = & \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{6}c_n \end{cases}$$

2) D'après la question précédente, pour tout $n \geq 0$, on a $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n = 2\left(\frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{6}c_n\right) = 2c_{n+1}$.

Ainsi, pour tout $n \geq 1$ on a $a_n = 2c_n$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= \frac{1}{6}a_{n+1} + \frac{1}{3}b_{n+1} + \frac{1}{6}c_{n+1} \\ &= \frac{2}{6}c_{n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n\right) + \frac{1}{6}c_{n+1} && \text{d'après les 2 questions précédentes} \\ &= \frac{1}{2}c_{n+1} + \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{6}c_n \\ &= \frac{1}{2}c_{n+1} + \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{6}c_n \\ &= \frac{1}{2}c_{n+1} + \frac{1}{2}c_n \end{aligned}$$

Attention, cette relation n'est valable que pour $n \geq 1$.

Calculons (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) :

— $a_1 = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{1}{3}$

— $b_1 = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}$

— $c_1 = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{6} \times 0 = \frac{1}{6}$

puis

— $a_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

— $b_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$

— $c_2 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$

Ainsi, (c_n) vérifie pour tout $n \geq 1$ la relation de récurrence $c_{n+2} = \frac{1}{2}c_{n+1} + \frac{1}{2}c_n$, c'est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (à partir du rang 1) dont l'équation caractéristique est $r^2 = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2} \Longleftrightarrow r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$.

$\Delta = \frac{1}{2^2} - 4 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

Ainsi, l'équation caractéristique admet deux solutions : $r_1 = \frac{\frac{1}{2} - \sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{1}{2}$ et $r_2 = \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{\Delta}}{2} = 1$.

D'après le cours, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \geq 1$, $u_n = \lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \mu \times 1^n = \lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \mu$.

Pour trouver les valeurs de λ et μ, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\lambda + \mu = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4}\lambda + \mu = \frac{1}{4} \end{cases}$$

On trouve $\lambda = \frac{1}{9}$ et $\mu = \frac{2}{9}$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $c_n = \frac{1}{9} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{9}$.

On a donc pour tout $n \geq 1$, $a_n = 2c_n = \frac{2}{9} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{4}{9}$ pour tout $n \geq 1$, $b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n$ donc pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{9} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{9}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{9} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{3}{18} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Comme $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{4}{9}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \frac{2}{9}$.
Au bout d'un grand nombres de jours, la probabilité que le voleur se trouve respectivement dans les cachettes A, B et C sera de $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{9}$.

Correction de l'exercice 18 :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $B_{n+1} \subset B_n$, donc $\mathbb{P}(B_{n+1}) \leq \mathbb{P}(B_n)$ donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente.
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, notons A_k l'événement « la k-ème boule tirée est blanche, de sorte que $B_n = \bigcap_{k=1}^n A_k$.
Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_n) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2|A_1) \times \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \quad \text{d'après la formule des probabilités composées} \end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, si l'événement $A_1 \cap \cdots \cap A_k$ est réalisé alors on a tiré successivement k boules blanches dans l'urne, donc on a doublé k fois le nombre de boule blanche dans l'urne de sorte qu'au $k+1$-ème tirage il y a 2^k boules blanches sur $2^k + 1$ boules en tout. On a donc $\mathbb{P}(A_{k+1}|A_1 \cap \cdots \cap A_k) = \frac{2^k}{2^k+1}$.
D'après la formule obtenu ci-dessus, on a finalement :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_n) &= \prod_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(A_{k+1}|A_1 \cap \cdots \cap A_k) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k} \end{aligned}$$

3) a) L'événement B est l'événement « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on tire une boule blanche au n-ième tirage donc $B = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k$.
   b) (B_n) est une suite décroissante d'événement d'après la question 1 donc d'après le théorème de la limite monotone $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k\right) = \mathbb{P}(B)$ donc $\mathbb{P}(B) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
   c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$-\ln(u_n) = -\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{2^k}{1+2^k}\right)\\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{1}{1+2^{-k}}\right)\\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1+2^{-k})\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+2^{-k})
\end{aligned}
$$

d) On étudie la fonction $g(x) = x - \ln(1+x)$. g est dérivable sur $[0;+\infty[$ par somme et composition de fonctions dérivables et $\forall x \geq 0,\ g'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1+x-1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$ donc $\forall x \geq 0,\ g'(x) \geq 0$ et ainsi g est croissante sur $[0;+\infty[$. Puisque $g(0) = 0$ on a finalement $\forall x \geq 0,\ g(x) \geq 0$ d'où $x - \ln(1+x) \geq 0$ et finalement $\ln(1+x) \leq x$.

e) On a d'après la question 3.d. : $\forall k \in \mathbb{N},\ \ln(1+2^{-k}) \leq 2^{-k}$. D'après la question 3.c. on a donc par somme d'inégalités et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$
\begin{aligned}
-\ln(u_n) &\leq \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k}\\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k\\
&\leq \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\\
&\leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}\\
&\leq 2
\end{aligned}
$$

La suite (u_n) est décroissante donc la suite $(\ln(u_n))$ aussi, et donc la suite $(-\ln(u_n))$ est croissante. Elle est majorée par 2 d'après le résultat précédent, donc elle converge. On en déduit que (u_n) converge.
Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\ln(u_n) \leq 2$ on a $\ln(u_n) \geq -2$ donc $u_n \geq \mathrm{e}^{-2}$. Par passage à la limite, on en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq \mathrm{e}^{-2} > 0$ donc $\mathbb{P}(B) > 0$ (et donc $\mathbb{P}(B) \neq 0$).