$\star$

Exercice 1 — Voir correction

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

1) Montrer que $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A, préciser la valeur propre associée à X.
2) Déterminer les autres valeurs propres de A.
3) Justifier que A est diagonalisable et déterminer $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

$\star\ \star$

Exercice 2 — Voir correction

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer le rang de $A(a)$ selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$.
2) Discuter de la diagonalisabilité de $A(a)$ selon la valeur de $a \in \mathbb{R}$.
3) On note dans cette question $A = A(1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\dfrac{1}{4^n}A^n$.

$\star\ \star$

Exercice 3 — Voir correction

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On considère l'endomorphisme $f = \lambda \cdot \mathrm{Id}_E$ (f est une **homothétie de rapport** λ) et un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ avec $p \neq \mathrm{Id}_E$ et $p \neq 0$.

1) Montrer que λ est une valeur propre de $f \circ p$. Quel est le sous-espace propre associé ?
2) Montrer que 0 est une valeur propre de $f \circ p$. Quel est le sous-espace propre associé ?
3) L'application $f \circ p$ est-elle diagonalisable ?
4) Réciproquement, supposons que g soit un automorphisme de E tel que $g \circ p$ soit diagonalisable avec pour seules valeurs propres λ et 0, a-t-on nécessairement $g = \lambda \cdot \mathrm{Id}_E$?

$\star$

Exercice 4 — Voir correction

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$ un entier. Étudier la diagonalisabilité de $A = \begin{pmatrix} a & \cdots & a \\ \vdots & & \vdots \\ a & \cdots & a \end{pmatrix}$ et la diagonalisabilité de $B = A - I_n$.

$\star\ \star\ \star$

Exercice 5 — Voir correction

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1) Dans cette question, u et v sont deux endomorphismes de E avec u diagonalisable. Montrer que u et v commutent si et seulement si tout sous-espace propre de u est stable par v.
2) Dans cette question, u et v sont deux endomorphismes diagonalisables de E. Montrer que u et v commutent si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de diagonalisation commune à u et v.

$\star\ \star$

Exercice 6 — Voir correction

1) a) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

   b) Trouver deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonalisables dont la somme n'est pas diagonalisable.
2) Soit A une matrice carrée diagonalisable. Montrer que A^2 est également diagonalisable.
3) a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^2$.

   b) Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonalisable telle que A^2 est diagonalisable.

⋆ ⋆
Exercice 7 — Voir correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application $\psi_n : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par $\psi_n(P)(X) = P(1-X)$.

1) Montrer que ψ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2) Calculer $\psi_n(1), \psi_n(X), \psi_n(X^2)$ et $\psi_n(X^3)$
3) Montrer que ψ_n est une symétrie.
4) On s'intéresse dans cette question au cas $n = 3$
   a) Déterminer la matrice M de ψ_3 dans la base canonique $\mathcal{B}_0$
   b) Déterminer $\mathrm{Ker}(\psi_3 - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(\psi_3 + \mathrm{Id})$.
   c) Déterminer une matrice P telle que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 8 — Voir correction

Şoit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que α^2 est une valeur propre de f^2 si et seulement si α ou $-\alpha$ est valeur propre de f.

⋆ ⋆
Exercice 9 — Voir correction

On définit pour tout $k \in [\![0;3]\!]$, $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^k\,\mathrm{e}^{-x}$ et on note $\mathcal{B}$ la famille (f_0, f_1, f_2, f_3). Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ engendré par $\mathcal{B}$.

1) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E
2) Montrer que l'application $u : f \longmapsto f' - f''$ est un endomorphisme de E
3) Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$
4) u est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

⋆ ⋆
Exercice 10 — Voir correction

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ,\ MA = AM\}$ le **commutant** de A.
Pour $1 \leq k \leq n$ on note I_k la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(I_k)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ et } i \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) Déterminer $C(I_k)$.
2) Soit P une matrice inversible. Montrer que M appartient à $C(A)$ si et seulement si $P^{-1}MP$ appartient à $C(P^{-1}AP)$.
3) Supposons que A est la matrice d'un projecteur. Déterminer $C(A)$.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 11 — Voir correction

Soit $n \geq 1$ un entier et $A \in \mathbb{R}_n[x]$ un polynôme fixé. Soit $\phi : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$, $P \longmapsto \phi_P$ où la fonction polynomiale ϕ_P est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi_P(x) = A(x) \times \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t - P(x)\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans la suite, on notera $\alpha = \int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$.

1) Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$
2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de ϕ. Montrer que $\lambda \in \{0, -\alpha\}$.
3) Montrer que $\mathrm{Im}(\phi + \alpha\mathrm{Id}) \subseteq \mathrm{Ker}(\phi)$.
4) En déduire que pour $\alpha \neq 0$, on a $\mathrm{Ker}(\phi + \alpha\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(\phi) = \mathbb{R}_n[x]$
5) À quelle condition ϕ est-il diagonalisable ?

Le coin des khûbes

⋆

Exercice 12 — **Voir correction**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit l'application ϕ par :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ v & \mapsto & u \circ v \end{array} \right.$$

On note $\mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)}$ et Id_E les fonctions identités des espaces $\mathcal{L}(E)$ et E.

1) Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
2) Montrer que $\mathrm{Spec}(\phi) \subset \mathrm{Spec}(u)$.
3) En considérant des endomorphismes particuliers de E, montrer que $\mathrm{Spec}(\phi) = \mathrm{Spec}(u)$.
4) Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(u)$
   a) Montrer que
   $$v \in \mathrm{Ker}(\phi - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)}) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$$
   b) En déduire $\dim(\mathrm{Ker}(\phi - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)}))$
   c) Montrer que u est diagonalisable si et seulement si ϕ est diagonalisable.

⋆

Exercice 13 — **Voir correction**

(D'après écrits ENS 2023)
On considère un entier $n \geq 1$ et l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^{2n+1}$ définie par

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n}, x_{2n+1}) = (x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_4, \ldots, x_{2n-1} + x_{2n+1}, x_{2n})$$

1) Quelle est la matrice de φ dans la base canonique ?
2) Déterminer une base du noyau de φ.
3) Déterminer le rang de φ
4) A-t-on $\mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^{2n+1}$?
5) Soient a et b deux réels. En étudiant la partie imaginaire de $\mathrm{e}^{ia}(\mathrm{e}^{ib} + \mathrm{e}^{-ib})$, montrer que
   $$\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2\cos(b)\sin(a)$$
6) Soit $k \in \{1, 2, \ldots, 2n + 1\}$ et $\theta = \dfrac{k\pi}{2n + 2}$. On considère le vecteur
   $$v_\theta = \big(\sin(\theta), \sin(2\theta), \sin(3\theta), \ldots, \sin((2n + 1)\theta)\big)$$
   a) Pour $j \in \{1, \ldots, 2n + 1\}$, montrer que la j-ème coordonnée de $\varphi(v_\theta)$ est
   $$\sin((j - 1)\theta) + \sin((j + 1)\theta)$$
   b) Montrer que v_θ est un vecteur propre de φ, préciser la valeur propre associée.
   c) La matrice de φ est-elle diagonalisable ?

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2X$ avec $X \neq 0$ donc 2 est valeur propre de A et X est un vecteur propre associé à 2.

2) Cherchons s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A - \lambda \cdot I_3$ ne soit pas inversible.

$$A - \lambda \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 5-\lambda & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - (5-\lambda)L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 6-\lambda & 2\lambda - 8 \\ 0 & 6-\lambda & -1-(3-\lambda)(5-\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 6-\lambda & 2\lambda - 8 \\ 0 & 0 & -1-(3-\lambda)(5-\lambda) - 2\lambda + 8 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est non inversible si $\lambda = 6$ ou si $-1-(3-\lambda)(5-\lambda) - 2\lambda + 8 = 0$ c'est à dire si $-\lambda^2 + 6\lambda - 8 = 0$. On trouve deux solutions : $\lambda = 2$ et $\lambda = 4$.

On a donc montré que $A - \lambda_3$ était non inversible si et seulement si $\lambda \in \{2; 4; 6\}$ donc A a trois valeurs propres, $\mathrm{Sp}(A) = \{2; 4; 6\}$.

3) $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ et A a trois valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable ($\dim(E_2) + \dim(E_4) + \dim(E_6) \geq 3$ donc $\dim(E_2) + \dim(E_4) + \dim(E_6) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$).

Puisque chaque sous-espace propre est de dimension au moins 1, on en déduit qu'ils sont tous de dimension 1. Cherchons un vecteur propre associé à chaque valeur propre.

On sait déjà que $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est associé à la valeur propre 2, on a donc $E_2 = \mathrm{Vect}(X_1)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne quelconque.

$$AX = 4X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 5x + y - z & = & 4x \\ 2x + 4y - 2z & = & 4y \\ x - y + 3z & = & 4z \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x + y - z & = & 0 \\ 2x - 2z & = & 0 \\ x - y - z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

donc $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 4, on a donc $E_4 = \mathrm{Vect}(X_2)$.

$$AX = 6X = \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 5x + y - z & = & 6x \\ 2x + 4y - 2z & = & 6y \\ x - y + 3z & = & 6z \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x + y - z & = & 0 \\ 2x - 2y - 2z & = & 0 \\ x - y - 3z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lcl} z & = & 0 \\ x & = & y \end{array} \right.$$

donc $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 6, on a donc $E_6 = \text{Vect}\,(X_3)$.

La famille (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ (cours). Si P est la matrice de passage de la base canonique à (X_1, X_2, X_3) on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. La matrice de passage P est $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 2 :

1)

$$\begin{aligned} \text{rg}(A) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-2a \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si $a = 1$ on a $\text{rg}(A) = 1$, et si $a \neq 1$ on a $\text{rg}(A) = 2$.

2) Pour tout réel a et tout réel λ on a :

$$\begin{aligned} \text{rg}(A(a) - \lambda I_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & a \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2-\lambda \\ 2 & 2-2\lambda & 2 \\ 2-2\lambda & 2 & 2a \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2-\lambda \\ 0 & -2\lambda & \lambda \\ 0 & 2-2(1-\lambda) & 2a-(2-\lambda)(1-\lambda) \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2-\lambda \\ 0 & -2\lambda & \lambda \\ 0 & 2\lambda & 2a-2+3\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2-\lambda \\ 0 & -2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 2a-2+4\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc lorsque $a = 1$, A admet deux valeurs propres : 0 et 4 avec $\dim(\text{Ker}(A)) = 2$ et $\dim(\text{Ker}(A - 4I)) \geq 1$ donc $\dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Ker}(A - 4I)) = 3$ donc A est diagonalisable.

Lorsque $a \neq 1$, 0 est valeur propre de multiplicité 1. Posons $P(\lambda) = 2a - 2 + 4\lambda - \lambda^2$. $\Delta = 16 + 8a - 8 = 8 + 8a$.
Si $a < -1$, alors $\Delta < 0$ donc P n'a pas de racines, donc A n'a pas d'autres valeurs propres donc A n'est pas diagonalisable.
Si $a > -1$, alors P a deux racines distinctes non nulles (car $2a - 2 \neq 0$) donc A admet trois valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable.

Si $a = -1$, alors P admet 2 comme unique racine, et $\text{rg}(A - 2I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\dim(\text{Ker}(A - 2I_3)) = 1$. Les seules valeurs propres de A sont 0 et 2 et elle sont chacune une multiplicité égale à 1, donc A n'est pas diagonalisable.

3) On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ donc $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$ puis $A^3 = \begin{pmatrix} 16 & 16 & 16 \\ 16 & 16 & 16 \\ 32 & 32 & 32 \end{pmatrix}$. On peut conjecturer que $A^n = \begin{pmatrix} 4^{n-1} & 4^{n-1} & 4^{n-1} \\ 4^{n-1} & 4^{n-1} & 4^{n-1} \\ 4^n & 4^n & 4^n \end{pmatrix}$ $4^{n-1}A$ et le prouver par récurrence : si l'égalité est vraie pour un entier n il vient :

$$A^{n+1} = 4^{n-1}A^2 = 4^{n-1}4A = 4^nA$$

donc elle est vraie pour l'entier $n+1$.

On en conclut : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{4^n}A^n = \dfrac{1}{4}A$.

Correction de l'exercice 3 :

1) p est un projecteur non nul donc $\mathrm{Im}(p) \neq \{0\}$ donc il existe $x \in E$ avec $x \neq 0$ tel que $p(x) = x$.
Ainsi, $(f \circ p)(x) = f(x) = \lambda x$ par définition de f, donc λ est une valeur propre de $f \circ p$ et x est un vecteur propre associé à λ.
Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} f(p(x)) = \lambda x &\iff \lambda p(x) = \lambda x \\ &\iff p(x) = x \qquad \text{car } \lambda \neq 0 \\ &\iff x \in \mathrm{Im}(p) \text{car } p \text{ est un projecteur} \end{aligned}$$

Ainsi, le sous espace propre de $f \circ p$ associé à λ est $\mathrm{Im}(p)$.

2) $p \neq \mathrm{Id}$ donc $\mathrm{Ker}(p) \neq \{0\}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(p)$ avec $x \neq 0$, alors $f(p(x)) = f(0) = 0$ donc 0 est valeur propre de $f \circ p$.
Pour tout $x \in E$, on a

$$f(p(x)) = 0 \iff \lambda p(x) = 0 \iff p(x) = 0$$

car $\lambda \neq 0$. Ainsi, $f(p(x)) = 0 \iff x \in \mathrm{Ker}(p)$ donc le sous espace propre de $f \circ p$ associé à 0 est $\mathrm{Ker}(p)$.

3) Puisque p est un projecteur, $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = E$, donc E est la somme directe des sous-espace propre de $f \circ p$. On en déduit que $f \circ p$ est diagonalisable.

4) Pas nécessairement, par exemple dans $\mathbb{R}^2$ si p est le projecteur sur $\mathrm{Vect}\left((1,0)\right)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\left((0,1)\right)$ et que $g : (x,y) \mapsto (\lambda x, \lambda x + y)$, alors g est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et on a $g \circ p(x,y) = g(x,0) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda \cdot (x,x)$.
Ainsi, $g \circ p = \lambda \cdot q$ où q est le projecteur sur $\mathrm{Vect}\left((1,1)\right)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\left((0,1)\right)$ donc $g \circ p$ admet bien deux valeurs propres λ et 0 d'après les 3 premières questions, mais $g \neq \lambda \cdot \mathrm{Id}$.

Correction de l'exercice 4 :

Si $a = 0$, alors A est diagonale et $B = -I_n$ est diagonale. Supposons donc $a \neq 0$.

On remarque que $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} na \\ \vdots \\ na \end{pmatrix} = na \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donc na est une valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à na.

De plus, A est de rang 1 donc $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n-1$ d'après le théorème du rang. Si on note E_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ, on a $\dim(E_0) = n-1$ et $\dim(E_{na}) \geq 1$. Puisqu'ils sont en somme directe on a $\dim(E_0 \oplus E_{na}) \geq n$ et $\dim(E_0 \oplus E_{na}) \leq n$ par inclusion. Donc $E_0 \oplus E_{na} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par égalité des dimensions. Ainsi, A est diagonalisable, elle est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} na & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

On remarque que $X \in \mathrm{Ker}(A) \iff AX = 0 \iff (A - I_n)X = -I_nX \iff BX = -X$. Ainsi, -1 est valeur propre de B et le sous-espace propre associé à cette valeur propre est $\mathrm{Ker}(A)$.

On remarque également que $B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (na-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $na-1$ est valeur propre de B et un vecteur propre associé est $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Puisque ce vecteur n'est pas dans $\mathrm{Ker}(A)$, on en déduit que $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ sont en somme directe donc par égalité des dimensions $\mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi B est diagonalisable, elle est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} na-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 5 :

1) Supposons que u et v commutent, et soit E_λ un sous espace propre de u associé à une valeur propre λ.
Soit $x \in E_\lambda$, alors $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$ donc $v(x) \in E_\lambda$. Ainsi, E_λ est stable par v.
Supposons maintenant que tout sous-espace propre de u est stable par v.
Si E_λ est un sous-espace propre de associé à une valeur propre λ de u, alors pour tout $x \in E_\lambda$, $u(v(x)) = \lambda v(x)$ car $v(x) \in E_\lambda$ par stabilité, et $v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$. Ainsi, les restrictions de $u \circ v$ et de $v \circ u$ à E_λ sont égales.
u et v commutent sur chaque sous espace propre donc commutent sur E. En effet, E est la somme directe de tous les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de u car u est diagonalisable.

2) Supposons que u et v commutent. Alors tout sous espace propre de u est stable par v. Soit E_λ un tel sous-espace propre, alors la restriction $v_{|E_\lambda}$ est un endomorphisme de E_λ, diagonalisable car v est diagonalisable. Il existe une base $(e_1^\lambda, ..., e_{d_{lambda}}^\lambda)$ de E_λ dans laquelle v est diagonale.
La réunion de toutes les bases ainsi crées pour chaque valeur propre de u est une base de E dans laquelle u est diagonale (car elle l'est dans n'importe quelle base de vecteurs propres) et dans laquelle v est diagonale (car elle l'est pour chaque restriction à E_λ).

Supposons réciproquement qu'il existe une base commune $\mathcal{B}$ de diagonalisation à u et v. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ les vecteurs de cette base. Alors pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, e_i est un vecteur propre de u associé à une valeur propre λ_i et e_i est un vecteur propre de v associé à une valeur propre μ_i. On a donc $u(v(e_i)) = u(\mu_i e_i) = \mu_i \lambda_i e_i$ et $v(u(e_i)) = v(\lambda_i e_i) = \mu_i \lambda_i e_i$ donc $u(v(e_i)) = v(u(e_i))$. Ceci étant vrai pour chaque vecteur de la base, on a $u \circ v = v \circ u$.

Correction de l'exercice 6 :

1) a) C'est une matrice triangulaire supérieure donc la seule valeur propre de $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est 1. Ainsi, elle est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. Or, s'il existe P tel que $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = PI_2P^{-1}$ alors $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ (la seule matrice semblable à la matrice identité est la matrice identité). Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ si et seulement si $a = 0$.

b) Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La première est diagonalisable car elle a deux valeurs propres distinctes, 1 et 0, et la seconde est déjà diagonale. De plus, $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable d'après la question 1)a).

2) Il existe D une matrice diagonale et P une matrice inversible telles que $D = P^{-1}AP$. Alors $D^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}AIAP = P^{-1}A^2P$. Or D^2 est diagonale (ses coefficients diagonaux sont ceux de D élevés au carré), donc A^2 est semblable à une matrice diagonale donc diagonalisable.

3) a) $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$

b) En posant $\theta = \frac{\pi}{2}$ dans la question précédente, on trouve que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + 1 \geq 1 > 0$ donc A n'a pas de valeurs propres, elle n'est donc pas diagonalisable. A^2 est diagonale donc diagonalisable.

Correction de l'exercice 7 :

1) Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, et soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned} \psi_n(\lambda P + \mu Q)(X) &= (\lambda P + \mu Q)(1 - X) \\ &= \lambda P(1 - X) + \mu Q(1 - X) \\ &= \lambda \psi_n(P)(X) + \mu \psi_n(Q)(X) \\ &= (\lambda \psi_n(P) + \mu \psi_n(Q))(X) \end{aligned}$$

donc ψ_n est une application linéaire. Pour montrer que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, il faut montrer que $\psi_n(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ donc $\psi_n(P)(X) = P(1 - X) = \sum_{k=0}^n a_k(1 - X)^k = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}(-1)^i X^i$.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et tout $i \in [\![0, k]\!]$, $0 \leq i \leq n$ donc $P(1 - X) \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, $\psi_n(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$ donc finalement ψ_n est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) $\psi_n(1) = 1$
$\psi_n(X) = 1 - X$
$\psi_n(X^2) = (1-X)^2 = X^2 - 2X + 1$
$\psi_n(X^3) = (1-X)^3 = -X^3 + 3X^2 - 3X + 1$

3) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ quelconque, alors

$$\begin{aligned}\psi_n(\psi_n(P))(X) &= \psi_n(P)(1-X)\\ &= P(1-(1-X))\\ &= P(X)\end{aligned}$$

donc $\psi_n \circ \psi_n = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$, ainsi ψ_n est une symétrie de $\mathbb{R}_n[X]$.

4) a) D'après la question 2., la matrice de ψ_3 dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

b) $\mathrm{Ker}(\psi_3 - \mathrm{Id}) = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1-X) = P(X)\}$
Soit $P = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme quelconque

$$\begin{aligned}P \in \mathrm{Ker}(\psi_3 - \mathrm{Id}) &\iff P(X) = P(1-X)\\
&\iff a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = a_3(1-X)^3 + a_2(1-X)^2 + a_1(1-X) + a_0\\
&\iff a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = -a_3X^3 + (3a_3 + a_2)X^2 + (-3a_3 - 2a_2 - a_1)X + a_3 + a_2 + a_1 + a_0\\
&\iff \left\{\begin{array}{lcl} a_3 & = & -a_3\\ a_2 & = & 3a_3 + a_2\\ a_1 & = & -3a_3 - 2a_2 - a_1\\ a_0 & = & a_3 + a_2 + a_1 + a_0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{lcl} a_3 & = & 0\\ a_1 & = & -a_2\end{array}\right.\\
&\iff P = a_2X^2 - a_2X + a_0\end{aligned}$$

car deux polynômes sont égaux si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\psi_3 - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\left(X^2 - X\ ;\ 1\right)$.

$$\begin{aligned}P \in \mathrm{Ker}(\psi_3 + \mathrm{Id}) &\iff P(X) = -P(1-X)\\
&\iff a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = -a_3(1-X)^3 - a_2(1-X)^2 - a_1(1-X) - a_0\\
&\iff a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = a_3X^3 + (-3a_3 - a_2)X^2 + (3a_3 + 2a_2 + a_1)X + (-a_3 - a_2 - a_1 - a_0)\\
&\iff \left\{\begin{array}{lcl} a_3 & = & a_3\\ a_2 & = & -3a_3 - a_2\\ a_1 & = & 3a_3 + 2a_2 + a_1\\ a_0 & = & -a_3 - a_2 - a_1 - a_0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{lcl} a_2 & = & -\frac{3}{2}a_3\\ a_0 & = & -\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)\end{array}\right.\\
&\iff P = a_3X^3 - \frac{3}{2}a_3X^2 + a_1X - \frac{1}{2}(a_1 - \frac{1}{2}a_3)\\
&\iff P \in \mathrm{Vect}\left(X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{4}\ ;\ X - \frac{1}{2}\right)\\
&\iff P \in \mathrm{Vect}\left(4X^3 - 6X^2 + 1\ ;\ 2X - 1\right)\end{aligned}$$

donc $\mathrm{Ker}(\psi + \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\left(4X^3 - 6X^2 + 1\ ;\ 2X - 1\right)$

c) Dans la base $(X^2 - X \ ; \ 1 \ ; \ 4X^3 - 6X^2 + 1 \ ; \ 2X - 1)$, la matrice de ψ_3 est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice de passage de la base canonique vers cette base est la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et on a alors $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 8 : Un sens est facile : si α est valeur propres de f (respectivement $-\alpha$), alors il existe $x \in E$ avec $x \neq 0$ tel que $f(x) = \alpha x$ (respectivement $f(x) = -\alpha x$) et on a alors $f^2(x) = f(f(x)) = \alpha f(x) = \alpha^2 x$ (respectivement $f(f(x)) = f(-\alpha x) = -\alpha f(x) = (-\alpha)^2 x = \alpha^2 x$). Dans tous les cas, α^2 est donc valeur propre de f.
Montrons la réciproque : supposons que α^2 soit valeur propre de f. Alors $f - \alpha^2 \mathrm{Id}$ n'est pas inversible, donc $(f - \alpha \mathrm{Id}) \circ (f + \alpha \mathrm{Id})$ n'est pas inversible. Si g et h sont deux endomorphismes inversibles, alors $g \circ h$ est également inversible. Par contraposée si $(f - \alpha \mathrm{Id}) \circ (f + \alpha \mathrm{Id})$ n'est pas inversible on en déduit que soit $f - \alpha \mathrm{Id}$ n'est pas inversible, soit $f + \alpha \mathrm{Id}$ n'est pas inversible, et donc que α est valeur propre de f ou $-\alpha$ est valeur propre de f.

Correction de l'exercice 9 :

1) Par définition de E, $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E. Montrons qu'elle est libre : soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 + \lambda_3 \cdot f_3 = 0$ (l'application nulle).
Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda_0 \, \mathrm{e}^{-x} + \lambda_1 x \, \mathrm{e}^{-x} + \lambda_2 x^2 \, \mathrm{e}^{-x} + \lambda_3 x^3 \, \mathrm{e}^{-x} = 0$. Or $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$ donc $\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3$. Ceci étant vrai pour tout x, on en déduit que le polynôme $\lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \lambda_3 X^3$ est le polynôme nul donc que tous ses coefficients sont nuls, ainsi (f_0, f_1, f_2, f_3) est libre. C'est donc finalement une base de E.

2) Montrons que u est une application linéaire.
Soient $(f, g) \in E$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors
$u(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)' - (\lambda f + \mu g)'' = \lambda f' + \mu g' - \lambda f'' - \mu g'' = \lambda(f' - f'') + \mu(g' - g'')$ par linéarité de la dérivation.
Ainsi, $u(\lambda f + \mu g) = \lambda u(f) + \mu u(f)$ donc u est une application linéaire.
Montrons que $u(E) \subset E$. Soit $f \in E$, il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \lambda_0 \, \mathrm{e}^{-x} + \lambda_1 x \, \mathrm{e}^{-x} + \lambda_2 x^2 \, \mathrm{e}^{-x} + \lambda_3 x^3 \, \mathrm{e}^{-}$
f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ l'est par composition de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et $x \mapsto x^n$ l'est pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= -\lambda_0 \, \mathrm{e}^{-x} + \lambda_1 \, \mathrm{e}^{-x} - \lambda_1 x \, \mathrm{e}^{-x} + 2\lambda_2 x \, \mathrm{e}^{-x} - \lambda_2 x^2 \, \mathrm{e}^{-x} + 3\lambda_3 x^2 \, \mathrm{e}^{-x} - \lambda_3 x^3 \, \mathrm{e}^{-x} \\ &= (\lambda_1 - \lambda_0) \, \mathrm{e}^{-x} + (2\lambda_2 - \lambda_1) x \, \mathrm{e}^{-x} + (3\lambda_3 - \lambda_2) x^2 \, \mathrm{e}^{-x} - \lambda_3 x^3 \, \mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

donc $f' \in E$, et de même

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = (2\lambda_2 - 2\lambda_1 + \lambda_0) \, \mathrm{e}^{-x} + (6\lambda_3 - 4\lambda_2 + \lambda_1) x \, \mathrm{e}^{-x} + (-6\lambda_3 + \lambda_2) x^2 \, \mathrm{e}^{-x} + \lambda_3 x^3 \, \mathrm{e}^{-x}$$

donc $f'' \in E$, ainsi $f' - f'' \in E$ donc u est bien un endomorphisme de E. De plus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f' - f'')(x) = (-2\lambda_2 + 3\lambda_1 - 2\lambda_0) \, \mathrm{e}^{-x} + (-6\lambda_3 + 6\lambda_2 - 2\lambda_1) x \, \mathrm{e}^{-x} + (9\lambda_3 - 2\lambda_2) x^2 \, \mathrm{e}^{-x} - 2\lambda_3 x^3 \, \mathrm{e}^{-x}$$

donc

3)
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4) u est triangulaire supérieure avec des coefficients non nuls sur la diagonale donc elle est inversible.
Si u était diagonalisable, sa seule valeur propre serait -2, et la matrice de u serait donc semblable à $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot I_4$. Ainsi il existerait $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P \times (-2I) \times P^{-1} = -2PIP^{-1} = -2I$ et u serait une homothétie de rapport -2. Or u n'est pas une homothétie donc u n'est pas diagonalisable.

Remarque : une application linéaire (respectivement une matrice) qui n'a qu'une seule valeur propre λ n'est diagonalisable que si cette application est $\lambda \cdot \mathrm{Id}$ (respectivement cette matrice est λI_n)

Correction de l'exercice 10 :

1) Soit $M \in C(I_k)$. Alors $MI_k = I_kM$. Si on note $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes et $L_1, L_2, \dots, L_n$ les lignes de M on obtient

$$\begin{pmatrix} \text{——} & L_1 & \text{——} \\ & \vdots & \\ \text{——} & L_k & \text{——} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | & 0 & \cdots & 0 \\ C_1 & \cdots & C_k & \vdots & & \vdots \\ | & & | & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

donc $M \in C(I_k)$ si et seulement si $(i > k)$ ou $(j > k) \Rightarrow M_{i,j} = 0$, c'est à dire si et seulement si on peut l'écrire comme une matrice par bloc de la forme $M = \left(\begin{array}{c|c} M_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ avec $M_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.

Ainsi $C(I_k) = \operatorname{Vect}\left((E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}\right)$ où $(E_{i,j})$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) $M \in C(A) \iff MA = AM \iff P^{-1}MAP = P^{-1}AMP \iff P^{-1}MPP^{-1}AP = P^{-1}APP^{-1}MP \iff P^{-1}MP \in C(P^{-1}AP)$

3) Si A est la matrice dans une base $\mathcal{B}$ d'un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension n, alors A est diagonalisable avec pour seules valeurs propres 0 et 1, il existe donc une base de E dans laquelle la matrice de ce projecteur est I_k avec $k = \operatorname{rg}(p)$. A est donc semblable à I_k : il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $I_k = P^{-1}AP$.

   D'après la question précédente, $M \in C(A) \iff P^{-1}MP \in C(P^{-1}AP) \iff P^{-1}MP \in C(I_k) \iff P^{-1}MP \in \operatorname{Vect}\left((E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}\right)$.
   Si on pose $F = \operatorname{Vect}\left((E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}\right)$, on a $C(A) = \{PMP^{-1} \mid M \in F\}$

Correction de l'exercice 11 :

1) Montrons que ϕ est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[x]$: soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Alors $\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$ est un réel, donc $x \mapsto A(x)\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n car A en est une. De même, $x \mapsto P(x)\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t = \alpha P(x)$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n donc par somme on a bien $\phi_P \in \mathbb{R}_n[x]$.

   Montrons que ϕ est linéaire : soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi_{\lambda P + \mu Q}(x) &= A(x)\int_0^1 (\lambda P(t) + \mu Q(t))\,\mathrm{d}t - (\lambda P(x) + \mu Q(x))\alpha \\ &= \lambda A(x)\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t + \mu A(x)\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t - \lambda\alpha P(x) - \mu\alpha P(x) \\ &= \lambda\phi_P(x) + \mu\phi_Q(x) \end{aligned}$$

   donc $\phi_{\lambda P + \mu Q} = \lambda\phi_P + \mu\phi_Q$ et donc $\phi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)$.

2) Soit $\lambda \in Sp(\phi)$ et soit P un vecteur propre associé à cette valeur propre. Alors $P \neq 0$ et $\phi_P = \lambda P$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad A(x)\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t - \alpha P(x) = \lambda P(x)$$

   d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad A(x)\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = (\lambda + \alpha)P(x)$$

   En intégrant sur $[0;1]$ de chaque côté par rapport à la variable x on obtient :

$$\int_0^1 A(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = (\lambda + \alpha)\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x$$

   donc

$$\alpha\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x + \alpha\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\lambda\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

   donc $\lambda = 0$ ou $\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Si $\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R},\ \phi_P(x) = -\alpha P(x)$ et alors $\lambda = -\alpha$. On a donc bien $\lambda = 0$ ou $\lambda = -\alpha$.

3) Soit $Q \in \mathrm{Im}(\phi + \alpha \mathrm{Id})$. Il existe $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \phi_P(x) + \alpha P(x) = A(x) \times \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$
Posons $\beta = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$, puisque $Q = \beta \times A$ il suffit par linéarité de montrer que $A \in \mathrm{Ker}(\phi)$. Or $\forall x \in \mathbb{R}, \phi_A(x) = A(x) \int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t - A(x) \int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t = 0$ par définition de ϕ. Ainsi $Q \in \mathrm{Ker}(\phi)$ donc finalement $\mathrm{Im}(\phi + \alpha\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(\phi)$.
4) Pour $\alpha \neq 0$, $\mathrm{Ker}(\phi + \alpha\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(\phi)$ sont deux sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes (0 et α) donc ils sont en somme directe d'après le cours.
De plus, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(\phi + \alpha\mathrm{Id})) = \dim(\mathbb{R}_n[x]) - \mathrm{rg}(\phi + \alpha\mathrm{Id})$. Or $\mathrm{rg}(\phi + \alpha\mathrm{Id}) \leq \dim(\mathrm{Ker}(\phi))$ d'après la question précédente donc $\dim(\mathrm{Ker}(\phi + \alpha\mathrm{Id}) \geq \dim(\mathbb{R}_n[x] - \dim(\mathrm{Ker}(\phi))$.
D'après la formule de Grassmann, on a $\dim(\mathrm{Ker}(\phi + \alpha\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(\phi)) = \dim(\mathrm{Ker}(\phi + \alpha\mathrm{Id})) + \dim(\mathrm{Ker}(\phi))$ car $\mathrm{Ker}(\phi + \alpha\mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(\phi + \alpha\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(\phi)) \geq \dim(\mathbb{R}_n[x]) - \dim(\mathrm{Ker}(\phi)) + \dim(\mathrm{Ker}(\phi)) \geq \dim(\mathbb{R}_n[x])$.
Puisqu'on a $\mathrm{Ker}(\phi + \alpha\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(\phi) \subset \mathbb{R}_n[x]$ on a $\dim(\mathrm{Ker}(\phi + \alpha\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(\phi)) \leq \dim(\mathbb{R}_n[x]))$ donc on a finalement égalité des dimensions, et enfin par inclusion et égalité des dimensions on obtient $\mathrm{Ker}(\phi + \alpha\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(\phi) = \mathbb{R}_n[x]$.
5) D'après la question précédente, si $\alpha \neq 0$ alors $\mathbb{R}_n[x]$ et la somme directe de deux sous-espaces propres de ϕ donc ϕ est diagonalisable.
Si $\alpha = 0$, alors $\phi_P(x) = A(x) \times \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$. On remarque qu'alors $\phi_P(\phi_P(x)) = A(x) \times \int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t \times \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0$, donc $\phi_P^2 = 0$. La seule valeur propre possible de ϕ est donc 0. La matrice diagonale avec des 0 sur la diagonale est la matrice nulle, et la seule matrice semblable à la matrice nulle est elle-même, donc si ϕ était diagonalisable, la matrice de ϕ serait la matrice nulle dans toutes les bases, autrement dit ϕ serait l'application nulle. C'est le cas seulement si A est le polynôme nul.
On en conclut que ϕ est diagonalisable si et seulement si $\alpha \neq 0$ ou $A = 0$.

Correction de l'exercice 12 :

1) Par règles de compositions d'endomorphismes :
$$\forall (v, w) \in \mathcal{L}(E), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \phi(\lambda v + w) = u \circ (\lambda v + w) = \lambda u \circ v + u \circ w = \lambda \phi(v) + \phi(w)$$
donc ϕ est bien un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
2) Soit λ une valeur propre de ϕ est $v \neq 0$ un vecteur propre associé (élément de $\mathcal{L}(E)$).
Alors $u \circ v = \lambda v$ donc pour tout $x \in E$, $u(v(x)) = \lambda v(x)$. Or $v \neq 0$ donc il existe un vecteur x de E tel que $v(x) \neq 0$, et d'après l'égalité précédente $v(x)$ est donc un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ, donc $\lambda \in \mathrm{Spec}(u)$.
On a montré $\mathrm{Spec}(\phi) \subset \mathrm{Spec}(u)$.
3) Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(u)$. Soit$E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ le sous-espace propre associé et F un supplémentaire quelconque de E_λ dans E. Posons p la projection de E sur E_λ parallèlement à F (comme $E_\lambda \neq \{0\}$ on a $p \neq 0$).
Alors pour tout $x = x_1 + x_2 \in E = E_\lambda \oplus F$, on a $u \circ p(x) = u(x_1) = \lambda x_1$ et $\lambda p(x) = \lambda x_1$.
On a donc : $\forall x \in E$, $u(p(x)) = \lambda p(x)$ donc $u \circ p = \lambda p$, ainsi p est un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ. Ainsi $\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)$. On a montré $\mathrm{Spec}(u) \subset \mathrm{Spec}(\phi)$ donc finalement $\mathrm{Spec}(u) = \mathrm{Spec}(\phi)$.
4) a) On peut raisonner directement par équivalence :
$$\begin{aligned} v \in \mathrm{Ker}(\phi - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)}) &\iff u \circ v = \lambda v \\ &\iff \forall x \in E,\ u(v(x)) = \lambda v(x) \\ &\iff \forall x \in E,\ (u - \lambda \mathrm{Id}_E)(v(x)) = 0 \\ &\iff \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \end{aligned}$$
b) $\mathrm{Ker}(\phi - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)})$ est l'ensemble des endomorphisme v de E dont l'image est dans $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$.
Soit $G = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}(v) \subset E_\lambda\}$. Alors $G = \{v \in \mathcal{L}(E, E_\lambda)\}$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(\phi - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)})) = \dim(G) = \dim(E) \times \dim(E_\lambda)$
c) On a montré dans les questions précédentes que u et ϕ ont les mêmes valeurs propres. Pour chaque valeur propre λ de u, notons E_λ^u le sous-espace propre de E associé à u, et E_λ^ϕ le sous espace propre de $\mathcal{L}(E)$ associé à ϕ. Alors :
$$\begin{aligned} \phi \text{ est diagonalisable} &\iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)} \dim(E_\lambda^\phi) = \dim(\mathcal{L}(E)) \\ &\iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)} \dim(E) \times \dim(E_\lambda^u) = \dim(E) \times \dim(E) \\ &\iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(\phi)} \dim(E_\lambda^u) = \dim(E) \\ &\iff u \text{ est diagonalisable} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 13 :

1) La matrice de φ dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Soit $x = (x_1, \ldots, x_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$.

$$x \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & -x_1 \\ x_4 & = & -x_2 \\ x_5 & = & -x_3 \\ & \vdots & \\ x_{2n+1} & = & -x_{2n-1} \\ x_{2n} & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \forall k \in \{1, \ldots, n\}, x_{2k} = 0 \\ (x_1, x_3, \ldots, x_{2n+1}) = (x_1, -x_1, x_1, \ldots, (-1)^n x_1) \end{array} \right.$$

$$\iff X \in \mathrm{Vect}\left((1, 0, -1, \ldots, (-1)^{n-1}, 0, (-1)^n))\right)$$

donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left((1, 0, -1, \ldots, (-1)^{n-1}, 0, (-1)^n))\right)$

3) On en déduit $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 1$ donc $\mathrm{rg}(\varphi) = 2n + 1 - 1 = 2n$ d'après le théorème du rang.

4) Soit $y = (y_1, \ldots, y_{2n+1}) \in \mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\varphi)$ et $x = (x_1, \ldots, x_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ tel que $y = \varphi(x)$
$y \in \mathrm{Vect}\left((1, 0, -1, \ldots, (-1)^{n-1}, 0, (-1)^n))\right)$ donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1 & = & x_2 \\ y_2 & = & x_1 + x_3 \\ y_3 & = & x_2 + x_4 \\ & \vdots & \\ y_{2n} & = & x_{2n-1} + x_{2n+1} \\ y_{2n+1} & = & x_{2n} \\ y_2 & = & y_4 = \cdots = y_{2n} = 0 \\ y_1 & = & -y_3 = y_5 = \cdots = (-1)^n y_{2n+1} \end{array} \right.$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & 0 \\ x_3 + x_5 & = & 0 \\ & \vdots & \\ x_{2n-1} + x_{2n+1} & = & 0 \\ x_2 & = & -x_2 - x_4 = x_4 + x_6 = \cdots = (-1)^{n-1} x_{2n-2} + (-1)^{n-1} x_{2n} = (-1)^n x_{2n} \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit que $x_2 + x_4 = x_4 + x_6 = \cdots = x_{2n-2} + x_{2n} = 0$, d'où également $x_2 = x_{2n} = 0$ donc $\varphi(x) = 0$. On a donc $\mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) = \{0\}$, donc $\mathrm{Ker}(\varphi) + \mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi)$.
Enfin, on a $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi)) = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = n$ d'après le théorème de Grassmann et le théorème du rang donc :

$$\mathbb{R}^{2n+1} = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi)$$

5) On a d'une :

$$\mathrm{e}^{ia}(\mathrm{e}^{ib} + \mathrm{e}^{-ib}) = \mathrm{e}^{i(a+b)} + \mathrm{e}^{i(a-b)}$$

donc

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(\mathrm{e}^{ia}(\mathrm{e}^{ib}+\mathrm{e}^{-ib}) &= \operatorname{Im}(\mathrm{e}^{i(a+b)})+\operatorname{Im}(\mathrm{e}^{i(a-b)})\\ &= \sin(a+b)+\sin(a-b)\end{aligned}$$

et d'autre part, comme $\mathrm{e}^{ib}+\mathrm{e}^{-ib}=2\cos(b)$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(\mathrm{e}^{ia}(\mathrm{e}^{ib}+\mathrm{e}^{-ib}) &= 2\cos(b)\operatorname{Im}(\mathrm{e}^{ia})\\ &= 2\cos(b)\sin(a)\end{aligned}$$

d'où l'égalité voulue.

6) Comme $(2n+2)\theta=\pi$ et que $\sin(\pi)=0$, la j-ème coordonnée de $\varphi(v_\theta)$ est

$$\begin{cases}\sin(2\theta)=\sin(0\times\theta)+\sin(2\theta) & \text{si } j=1\\ \sin(2n\theta)=\sin(2n\theta)+\sin((2n+2)\theta) & \text{si } j=2n+1\\ \sin((j-1)\theta))+\sin((j+1)\theta) & \text{sinon}\end{cases}$$

dans tous les cas la j-ème coordonnée de $\varphi(v_\theta)$ est bien $\sin((j-1)\theta)+\sin((j+1)\theta)$.

7) On a pour tout $j\in\{1,2,...,2n+1\}$:

$$\sin((j-1)\theta)+\sin((j+1)\theta))=\sin(j\theta-\theta)+\sin(j\theta+\theta)=2\cos(\theta)\sin(j\theta)$$

donc $\varphi(v_\theta)=2\cos\theta v_\theta$. De plus $v_\theta\neq 0$ car $0<\theta<\pi$ donc $\sin(\theta)>0$.
Ainsi v_θ est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $2\cos\theta$.

8) Pour chaque valeur de k dans $\{1,...,2n+1\}$, le réel $2\cos\theta$ est valeur propre de φ. Or la fonction $x\mapsto 2\cos x$ est strictement décroissante sur $]0;\pi[$ donc l'application

$$\begin{array}{ccc}\{1,...,2n+1\} & \to &]-2;2[\\ k & \mapsto & 2\cos\left(\dfrac{k\pi}{2n+2}\right)\end{array}$$

est injective, et les réels $\left\{\dfrac{\pi}{2n+2}\ ;\ \dfrac{2\pi}{2n+2}\ ;\ \cdots\ ;\ \dfrac{(2n+1)\pi}{2n+2}\right\}$ sont donc $2n+1$ valeurs propres distinctes de φ qui est donc diagonalisable.