

★

Exercice 1

Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1) $(3 - 2i)(i + 1)$

4) $\frac{-5}{7 + i}$

2) $(4 - 2i)(4 + 2i)$

5) $(1 + i)^4$

3) $\frac{1 + 2i}{5 - 3i}$

6) $\left(\frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

★

Exercice 2

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ (donner le résultat sous forme algébrique) :

1) $4iz + 2 = 3 - 2i$

4) $\overline{z + 5i} = z(3 - i)$

2) $z(1 + i) = 1 - zi$

5) $z^2 + 2z + 2 = 0$

3) $\frac{1}{2iz} + 5 = 3i$

6) $\frac{13}{z} = 6 - z$

★

Exercice 3

Écrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique

1) $z_1 = 5 + 5i$

4) $z_4 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i}$

2) $z_2 = \sqrt{3} - i$

5) $z_5 = -7$

3) $z_3 = 12i - 4\sqrt{3}$

6) $z_6 = -5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} \right)$

★

Exercice 4

Calculer en utilisant la forme exponentielle :

1) $z_1 = \frac{1 + i}{1 - i}$

3) $z_3 = (\sqrt{3} + 3i)^7 + (\sqrt{3} - 3i)^7$

2) $z_2 = (2 + 2i)^4$

4) $z_4 = \sum_{k=0}^{17} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^k$

★

Exercice 5

On note $Z = \frac{i - z}{z + 2}$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

1) Z est un imaginaire pur

2) Z est un réel

3) Z a un module égal à 1

★ ★

Exercice 6

(D'après Bac S Antilles Guyane Septembre 2017) On considère la suite de nombres complexes z_n définie par

$$\begin{cases} z_0 = 100 \\ z_{n+1} = \frac{i}{3} z_n \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n$$

On note M_n le point d'affixe z_n dans le plan complexe.

- 1) Démontrer que pour tout entier naturel n , les points O , M_n et M_{n+2} sont alignés.
- 2) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = 0$.
- 3) En déduire qu'à partir d'un certain rang, tous les points M_n appartiennent à un disque de centre O et de rayon 0,01.

★

Exercice 7

(D'après Bac S Métropole - La Réunion 2017) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . À tout point M d'affixe z , on associe le point M' d'affixe

$$z' = -z^2 + 2z$$

Le point M' est appelé image du point M .

- 1) Déterminer les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.
- 2) Soit M un point d'affixe z et soit M' son image d'affixe z' .
On note N le point d'affixe $z_N = z^2$
Montrer que M est le milieu du segment $[NM']$.

★

Exercice 8

(D'après Bac S Polynésie 2015) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = z^2 + 4z + 3$$

- 1) Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.
Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique.
- 2) Soit A le point d'affixe $\frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$
Montrer que OAB est un triangle équilatéral.
- 3) Déterminer l'ensemble \mathcal{E} des points M d'affixe $z = x + iy$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.
- 4) Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble \mathcal{E} .

★

Exercice 9

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\frac{1 + \bar{z}}{1 - z}$ est un réel si et seulement si z est un réel ou z est un imaginaire pur.

★ ★

Exercice 10

Soit z un nombre complexe différent de 1. Montrer que $|z| = 1$ si et seulement si $\frac{1 + z}{1 - z}$ est imaginaire pur.

★

Exercice 11

Résoudre l'équation $e^z = 4\sqrt{3} + 6i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
(indication : poser $z = a + ib$ avec a et b réels.)

★

Exercice 12

Soient a et b deux réels.

- 1) Exprimer de deux façons différentes les parties réelles et imaginaires de $e^{ia} \times e^{ib}$.
- 2) En déduire les expressions de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$ et $\sin b$.

★

Exercice 13

Soit θ un nombre réel.

- 1) a) Exprimer de deux façons différentes les parties réelles et imaginaires de $(e^{i\theta})^2$.
b) En déduire que $\cos^2(\theta) = \frac{\cos(2\theta) + 1}{2}$.
- 2) En considérant le nombre $(e^{i\theta})^3$, exprimer $\cos^3(\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ et $\cos(3\theta)$.

★

Exercice 14

Soit $a \in]0, \pi[$. Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $z = \frac{1 - e^{ia}}{1 + e^{-ia}}$.
(indication : factoriser au numérateur et au dénominateur par $e^{i\frac{a}{2}}$ et $e^{-i\frac{a}{2}}$)

★

Exercice 15

Exprimer les sommes suivantes en fonction de θ et de n :

$$1) S_1 = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \qquad 2) S_2 = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) \qquad 3) S_3 = \sum_{k=0}^n \cos^2(k\theta)$$

★

Exercice 16

- 1) Montrer que les solutions de l'équation $z^3 = 1$ sont $1, j, j^2$ où j est un nombre complexe de module 1.
- 2) Montrer que $1 + j + j^2 = 0$
- 3) Montrer que l'équation $z^n = 1$ admet n solutions de module 1, notées z_0, z_1, \dots, z_{n-1} .
- 4) Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$.

★ ★

Exercice 17

(D'après oraux ENS 2017)

- 1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) \quad \text{et} \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

Indication : on pourra considérer le nombre complexe $z = \cos(x) + i \sin(x)$ et calculer z^2

- 2) Montrer que pour tout $x \in]0; \pi[$ on a

$$\frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

- 3) Pour un entier $n \geq 2$, on introduit

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Montrer que $S_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$

Indication : on pourra considérer le nombre complexe $z = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

- 4) Trouver la limite de $\frac{S_n}{n}$ lorsque $n \rightarrow \infty$

★ ★ ★
Exercice 18

(D'après oraux ENS 2021) Soient x_0 et y_0 deux nombres réels. Soit $h > 0$ un réel. On définit par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = x_n - hy_n \quad \text{et} \quad y_{n+1} = y_n + hx_n$$

- 1) On introduit le nombre complexe $z_n = x_n + iy_n$. Exprimer z_n en fonction de n et de z_0 .
- 2) Calculer la limite de $x_n^2 + y_n^2$ lorsque n tend vers $+\infty$
- 3) Soit N un nombre entier. On définit le réel h_N de telle sorte que $\arg(1 + ih_N) = \frac{2\pi}{N}$.
 - a) Montrer que $\sqrt{1 + h_N^2} = \frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)}$
 - b) En prenant $h = h_N$, on définit la suite (z_n) comme dans la première question (cette suite dépend donc de N). On note $w_N = z_N$ le N -ème terme de cette suite. Montrer que $w_N \rightarrow z_0$ lorsque N tend vers $+\infty$.

★ ★ ★
Exercice 19

(D'après oraux ENS 2023)

- 1) On considère les ensembles suivants :

$$H = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } \Im(z) > 0\} \quad \text{et} \quad D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| < 1\}$$

où $\Im(z)$ désigne la partie imaginaire de z . Représenter graphiquement ces deux ensembles.

- 2) Montrer que pour tout $z \in H$, le nombre complexe $\frac{1+iz}{z+i}$ est bien défini et appartient à D
- 3) Montrer que la fonction définie sur H et à valeurs dans D donnée par la formule $\frac{1+iz}{z+i}$ est une bijection. Quelle est sa fonction réciproque ?
- 4) On remplace les inégalités strictes par des inégalités larges dans les définitions de H et de D . La fonction est-elle encore bijective ?