TD 6 : Analyse réelle (Indications)

Indications pour l'exercice 1 :

1. Composition de DL : si $f(x) = P(x) + o(x^3)$ et $g(x) = \sum_{k=0}^{3} a_k x^k + o(x^3)$ avec Pun polynôme de degré 3, alors $g(f(x)) = \sum_{k=0}^{3} a_k (P^k(x))_3 + o(x^3)$ où $(P^k(x))_3$ est le polynôme $P(X)^k$ dans lequel les termes de degré strictement plus grand que 3 sont tronqués.
2. Rappel : si $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $a^b := \mathrm{e}^{b \ln(a)}$
3. Se ramener à une expression de la forme $\dfrac{1}{1+f(x)}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
4. Remarquer que $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ peut s'écrire $\dfrac{1}{1+f(x)}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Indications pour l'exercice 2 :

1. Rappel : si $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $a^b := \mathrm{e}^{b \ln(a)}$
2. Idem.
3. Poser le changement de variable $u = x - 1$ pour se ramener à des DL en 0
4. Ramener le premier terme à une expression de la forme $\dfrac{1}{1+f(x)}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Indications pour l'exercice 3 :

1. Faire l'étude du dénominateur de f
2. **Attention :** il faut partir d'un DL à l'ordre 4 des différentes fonctions qui composent f
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ à l'aide du DL précédent
4. Montrer que $\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0}$ admet une limite en 0 à l'aide du DL précédent.
5. Étudier le terme d'ordre 2 (s'il est nul le terme d'ordre 3, et ainsi de suite) du DL pour connaître la position relative au voisinage d'un point.

Indications pour l'exercice 4 :

1. Justifier la continuité sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.
2. Justifier la dérivabilité sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et montrer que $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ a une limite finie quand x tend vers 0.
3. Montrer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x) \neq f'(0)$.

Indications pour l'exercice 5 :

1. Factoriser par x^2 et utiliser un DL de $\sqrt{1 - \frac{9}{x} + \frac{8}{x^2}}$.
2. Trouver d'abord un développement limité de $\exp\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)$ en fonction de $\dfrac{1}{x}$ lorsque $x \to +\infty$.

Indications pour l'exercice 6 :

Déterminer une expression simplifiée de P' et montrer que P' n'a qu'une seule racine : -1.

Montrer que la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k}$ est à valeurs strictement négative (on peut par exemple étudier les suites définies par $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$ et montrer qu'elles sont adjacentes).

Indications pour l'exercice 7 :

1. Montrer que $\overline{P(\lambda)} = P(\overline{\lambda})$ en posant les coefficients de P.

2. Utiliser le fait que P est scindé dans $\mathbb{C}$.

Indications pour l'exercice 8 :

1. Justifier l'existence de l'intégrale pour tout entier n, comparer les fonctions définies par $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}$ et $f_{n+1}(x) = \dfrac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n+1}}$ et utiliser la croissance de l'intégrale.
2. Minorer e^{-x} pour l'une, majorer (bêtement) $\dfrac{1}{x+\frac{1}{n}}$ pour l'autre.
3. Remarquer que $u_n = v_n + w_n \geq v_n$
4. (a) Une seule impropriété en 0 résolue par un DL
   (b) S'obtient par une simple comparaison de fonctions à intégrer.
   (c) Montrer grâce à l'encadrement précédent que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\ln(n+1)} = 1$, et redémontrer que $\ln(n+1) \sim \ln(n)$.

Indications pour l'exercice 9 :

1. Pour que l'intégrale ait un sens, il faut que la fonction à intégrer soit bien définie sur le domaine d'intégration, et que l'intégrale converge si l'une des bornes n'est pas dans le domaine de définition.
2. $f(x) = G(x^2) - G(x)$ pour toute primitive G de la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$.
3. Montrer que $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t} - \dfrac{1}{t-1}$ se prolonge par continuité en 1, puis déterminer une expression explicite de $g(x)$.
4. Utiliser à nouveau la fonction g en montrant que $\dfrac{f(x)-g(x)}{x-1}$ et $\dfrac{g(x)-f(1)}{x-1}$ admettent des limites. Quantifier au voisinage de 1 à l'aide de la limite précédente.

Indications pour l'exercice 10 :

1. Penser au théorème des bornes atteintes.
2. À cause de l'hypothèse sur f, si $y = f(x)$, alors $f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$.
3. Montrer que si $a \in]0;1[$ alors $f'(a) = 0$ et aboutir à une contradiction, raisonner de façon analogue pour b.
4. Si f est seulement continue, la condition de la question 2 est une condition suffisante.

Indications pour l'exercice 11 :

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.
2. Opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^\infty$
3. Raisonner par récurrence, sans détailler l'expression du polynôme.
4. Montrer par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$:« $f^{(n)}$ est dérivable et $f^{(n)}(0) = 0$ »

Indications pour l'exercice 12 :

1. u_0 est un calcul direct et u_1 nécessite une intégration par partie.
2. (a) Pour $x \in [0;1]$ on a $1 \leq e^{1-x} \leq e$
   (b) Théorème d'encadrement.
3. (a) Faire une intégration par partie.
   (b) Par récurrence.
4. Étudier la suite $(u_n - v_n)_{n\geq 0}$.
5. (a) Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n puis inverser la relation.
   (b) **Attention :** aussi tentant que cela puisse être on **n'additionne pas** des équivalents. Factoriser dans les fractions pour se ramener à des DL de la forme $\dfrac{1}{1+x_n}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.