$\star$

Exercice 1 — Voir correction

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2\ln x}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x+1}\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^x+1}{x\,\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^5+1}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\,\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$

$\star$

Exercice 2 — Voir correction

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin^3 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(2x+3\sin x)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

$\star\ \star$

Exercice 3 — Voir correction

Le but de cet exercice est de démontrer la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\dfrac{n^n}{\mathrm{e}^n}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln u_n$.

1) a) À l'aide d'un développement limité, montrer que $v_n - v_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{12n^2} + \left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

   b) En déduire que la suite (v_n) converge.

   c) En déduire l'existence d'un réel $C>0$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\dfrac{n^n}{\mathrm{e}^n}$.

2) Montrons dans cette question que $C=\sqrt{2\pi}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$ (intégrale de Wallis)

   a) Calculer W_0 et W_1.

   b) Montrer que (W_n) converge.

   c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$

   d) En déduire W_2.

   e) À l'aide d'une intégration par partie, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.

   f) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(n+1)W_nW_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

   g) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} W_n = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_n}{W_{n+1}} = 1$, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

   h) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

   i) En déduire que $C=\sqrt{2\pi}$.

$\star\ \star$

Exercice 4 — Voir correction

1) Montrer à l'aide du changement de variable $x=\mathrm{e}^u$ que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(\mathrm{e}^u)\,\mathrm{d}u$ converge.

2) Montrer à l'aide du changement de variable $t=u^{1/3}$ que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^{2/3}+u^{4/3}}$ converge et la calculer.

$\star\star$

Exercice 5 — **Voir correction**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sin(n\theta) \neq 0$. On considère le polynôme $P(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^k$

1) Montrer que $P(X) = \dfrac{1}{2i}(1 + \mathrm{e}^{i\theta} X)^n - \dfrac{1}{2i}(1 + \mathrm{e}^{-i\theta} X)^n$
2) En déduire que λ est racine du polynôme P si et seulement si $\exists k \in [\![0, n-1]\!]$, $\lambda = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \mathrm{e}^{-i\theta}}$.
3) Montrer que toutes les racines de P sont réelles.

$\star\star$

Exercice 6 — **Voir correction**

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \left(\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\right)^2$.
Le but de cet exercice est de déterminer un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$. On admet le théorème de Cesàro :

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \text{ avec } \ell \in \mathbb{R} \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \ell$$

1) Montrer que la suite (u_n) est bien définie.
2) Étudier le sens de variation de (u_n) puis montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3) Soit β un réel non nul. Montrer que $u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta} = \beta u_n^{\beta-3} + o(u_n^{\beta-3})$.
4) Déterminer une valeur de β telle que $u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta}$ converge vers une limite finie.
5) En déduire à l'aide du théorème admis que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}$.

$\star\star$

Exercice 7 — **Voir correction**

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on appelle **fonction Gamma d'Euler** la fonction définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$.

1) Montrer que Γ est bien définie sur $]0; +\infty[$.
2) Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
3) Calculer $\Gamma(1)$ puis en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$
4) Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ puis $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$. On pourra admettre la valeur de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Le coin des Khûbes

$\star\star$

Exercice 8 — **Voir correction**

(ENSAE 2013) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. On suppose qu'il existe une constante $0 < c < 1$ telle que, pour tous x, y dans $[0,1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$$

Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0,1]$.

$\star\star\star$

Exercice 9 — **Voir correction**

(ENS 2016) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(x)f(y) \leq f(xy)$ pour tout $x, y \geq 0$ et $f(1) = 1$.

1) Montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$
2) Montrer que $f(x) \geq f(x^{1/n})^n$ pour tout $x > 0$ et $n \geq 1$
3) En déduire qu'il existe un réel p tel que $f(x) \geq x^p$ pour tout $x \geq 0$
4) Montrer que $p \geq 0$
5) Montrer que $f(x) = x^p$ pour tout $x \geq 0$.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

a) La fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x+2}}$ est continue sur $[1;+\infty[$.

Il faut donc étudier la convergence de l'intégrale en $+\infty$.

$f(x) \equiv x \to +\infty \dfrac{1}{x^{3/2}}$. Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann qui converge car $\dfrac{3}{2} > 1$, donc d'après le théorème d'équivalence sur les intégrales de fonctions positives, $\boxed{\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x \text{ converge}}$.

Remarque : On peut aussi utiliser le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives en remarquant que $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{x}$ donc $\dfrac{1}{x\sqrt{x+2}} \leq \dfrac{1}{x\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x^{3/2}}$

b) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$ est continue sur $[0;+\infty[$. Il faut donc étudier la convergence de l'intégrale en $+\infty$.

$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x^2}} = \dfrac{1}{x}$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge, donc d'après le théorème d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

Comme f est continue sur $[0;1]$, $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

On en conclut que $\boxed{\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}\,\mathrm{d}x \text{ diverge.}}$

c) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+1}{x^5+1}$ est continue sur $[0;+\infty[$.

Il faut donc étudier la convergence de l'intégrale en $+\infty$.

$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^3}$

L'intégrale $\int_1 +\infty \dfrac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann qui converge car $3 > 1$.

D'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Or f est continue sur $[0;1]$ donc $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

On en conclut que $\boxed{\int_0^{+\infty} \dfrac{x^2+1}{x^5+1}\,\mathrm{d}x \text{ converge.}}$

d) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 \ln x}$ est continue sur $]1;+\infty[$.

On étudie donc la convergence de l'intégrale en $+\infty$ et en 1.

Pour tout $x \geq 2$, $\ln x \geq \ln(2)$ donc $\dfrac{1}{x^2\ln(x)} \leq \dfrac{1}{x^2\ln(2)}$

L'intégrale $\int_2^{+\infty} \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann convergente car $2 > 1$, donc d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, $\boxed{\int_2^{+\infty} \dfrac{1}{x^2\ln x}\,\mathrm{d}x \text{ converge.}}$

Étudions la convergence de $\int_1^2 \dfrac{1}{x^2\ln x}\,\mathrm{d}x$. Au voisinage de 1 on a $\dfrac{1}{x^2\ln(x)} \sim \dfrac{1}{\ln(x)}$ et on a $\ln(x) = x - 1 + o(x-1)$, donc $\dfrac{1}{x^2\ln(x)} \underset{x\to1}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$

Or $\int_1 2\dfrac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x$ a la même nature que $\dfrac{0}{1}\dfrac{1}{u}\,\mathrm{d}u$ par changement de variable $u = x-1$, donc diverge.

Finalement, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^2\ln(x)}\,\mathrm{d}x$ diverge.

e) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x+1}$ est continue sur $[1;+\infty[$.

Pour $x \geq e$, on a $\ln(x) \geq \ln(e) = 1$, et donc $\dfrac{\ln x}{x+1} \geq \dfrac{1}{x+1}$.

Or $\dfrac{1}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$, et l'intégrale $\int_e^{+\infty} \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann divergente.

D'après le théorème d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$ est donc divergente.

Ainsi d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\ln x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ est divergente.

Comme f est continue sur $[1;\mathrm{e}]$, l'intégrale $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ converge, donc finalement $\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x+1} \text{ diverge.}}$

f) La fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x\,\mathrm{e}^x+1}$ est continue sur $[0;+\infty[$.
Il faut étudier la convergence de l'intégrale en $+\infty$.
Pour $x \geq 1$, $x\,\mathrm{e}^x+1 \geq \mathrm{e}^x$ donc $\frac{1}{x\,\mathrm{e}^x+1} \leq \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-x}$
Pour tout $X > 0$, $\int_1^X \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_1^X = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-X}$
donc $\int_1^X \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[X\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$ donc $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge.

D'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\,\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$ converge.

Or, f est continue sur $[0;1]$ donc $\int_0^1 \frac{1}{x\,\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$ converge.

On en conclut que $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\,\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x \text{ converge}}$

g) La fonction $f : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}$ est continue sur $[0;+\infty[$.
Il faut donc étudier la convergence de l'intégrale en $+\infty$.
Pour tout $x \geq 0$, $\frac{\mathrm{e}^x}{x+1} \geq \frac{1}{x+1}$.
Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$ diverge (voir question e)) donc d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ diverge.

Or f est continue sur $[0;1]$ donc $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. On en déduit que $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}\,\mathrm{d}x \text{ diverge.}}$

h) La fonction $f : x \longmapsto \frac{x\,\mathrm{e}^x+1}{x\,\mathrm{e}^{2x}+1}$ est continue sur $[0;+\infty[$.
On étudie la convergence de l'intégrale en $+\infty$.
$\frac{x\,\mathrm{e}^x+1}{x\,\mathrm{e}^{2x}+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x\,\mathrm{e}^x}{x\,\mathrm{e}^{2x}} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}$
Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge car pour tout $X > 0$, $\int_0^X \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^X = 1 - \mathrm{e}^{-X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 1$.

D'après le théorème d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^x+1}{x\,\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x \text{ converge.}}$

Correction de l'exercice 2 :

a) La fonction $f : x \longmapsto \frac{\sin x}{x^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$.
On étudie la convergence de l'intégrale en $+\infty$.
Pour tout $x \geq 1$, $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$
Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann convergente, donc d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x \text{ est absolument convergente, donc convergente.}}$

b) La fonction $f : x \longmapsto \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x^3+1}}$ est continue sur $[0;+\infty[$.
On étudie donc la convergence de l'intégrale en $+\infty$.
Pour tout $x \in [0;+\infty[$, $|\sin x + \cos x| \leqslant |\sin x| + |\cos x| \leqslant 2$
Ainsi, $\left|\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x^3+1}}\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{x^3+1}}$.
Or, $\frac{2}{\sqrt{x^3+1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x^{3/2}}$, et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann convergente car $\frac{3}{2} > 1$, donc d'après le théorème d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}x$ converge.

Ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{x^3+1}}\right|\mathrm{d}x$ converge.

Finalement, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente, donc convergente. Comme $\int_0^1\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}x$ converge par continuité de f sur $[0;1]$, on en déduit que $\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}x \text{ converge.}}$

c) En faisant le changement de variable $t=-x$, l'intégrale $\int_{-\infty}^0\frac{\sin^3 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est de même nature que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
Or, $\left|\frac{\sin^3 t}{t^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente, donc d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument.
De plus, $\sin(t)\sim t$ donc $\sin^3(t)\sim t^3$ et ainsi $\dfrac{\sin^3 t}{t^2}\sim t$ donc $\int_0^1\frac{\sin^3(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
Ainsi, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge donc $\boxed{\int_{-\infty}^0\frac{\sin^3 x}{x^2}\,\mathrm{d}x \text{ converge.}}$

d) En faisant le changement de variable $t=-x$, l'intégrale $\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$ est de même nature que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t$.
Or $|\mathrm{e}^{-t}\cos t|\leq\mathrm{e}^{-t}$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge car

$$\int_0^X\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\Big[-\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^X=1-\mathrm{e}^{-X}\xrightarrow[X\to+\infty]{}1$$

Ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, $\int_0^{+\infty}|\mathrm{e}^{-t}\cos t|\,\mathrm{d}t$ converge, donc $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t$ converge absolument.
On en conclut que $\boxed{\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x \text{ converge.}}$

e) La fonction $f:x\longmapsto\ln(2x+3\sin x)\,\mathrm{d}x$ est continue sur $]0;\pi]$.
On étudie la convergence de l'intégrale en 0.
Par développement limité en 0,

$$\begin{array}{rcl}\ln(2x+3\sin x)&=&\ln(2x+3(x+o(x)))\\&=&\ln(5x+o(x))\\&=&\ln(5x(1+o(1)))\\&=&\ln(5x)+\ln(1+o(1))\\&\underset{x\to0}{\sim}&\ln(5x)\\&\underset{x\to0}{\sim}&\ln(5)+\ln(x)\\&\underset{x\to0}{\sim}&\ln(x)\end{array}$$

Or, $-\ln x\geq0$ pour tout $x\in[0;1]$ et $-x^{1/2}\ln x\xrightarrow[x\to0]{}0$ donc $-\ln(x)=o\left(\dfrac{1}{x^{1/2}}\right)$ et $\int_0^1\dfrac{1}{x^{1/2}}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann convergente donc par théorème de comparaison pour les fonctions positives, $\int_0^1(-\ln x)\,\mathrm{d}x$ converge.
D'après le théorème d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, on en conclut que $\int_0^1(-\ln(2x+3\sin x))\,\mathrm{d}x$ converge, donc que $\int_0^1\ln(2x+3\sin x)\,\mathrm{d}x$ converge.
Enfin, comme f est continue sur $[1;\pi]$, $\int_1^\pi\ln(2x+3\sin x)\,\mathrm{d}x$ converge, donc finalement $\boxed{\int_0^\pi\ln(2x+3\sin x)\,\mathrm{d}x \text{ converge.}}$

f) La fonction $f:x\longmapsto x^4\,\mathrm{e}^{-x^2}$ est continue sur $[0;+\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
On étudie la convergence de l'intégrale en $+\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty}x^6\,\mathrm{e}^{-x^2}=\lim\limits_{X\to+\infty}X^3\,\mathrm{e}^{-X}$ par croissance comparée et par composition de $x\mapsto x^2$ par $x\mapsto x^3\,\mathrm{e}^{-x}$, donc en $+\infty$ on a $x^4\,\mathrm{e}^{-x^2}=o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
Or, $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann convergente, donc d'après le théorème de négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives l'intégrale $\int_1^{+\infty}x^4\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge.
Enfin, comme f est continue sur $[0;1]$, $\int_0^1 x^4\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge, $\boxed{\text{donc finalement } \int_0^{+\infty}x^4\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \text{ converge.}}$

Correction de l'exercice 3 :

1) a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$v_n-v_{n+1}=\ln\left(\frac{n!\times\left(\dfrac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}\sqrt{n+1}}{(n+1)!\times\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{n}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1}\,\mathrm{e}^n\sqrt{n+1}}{(n+1)\times n^n\,\mathrm{e}^{n+1}\times\sqrt{n}}\right)\\
&= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)-\ln(\mathrm{e})\\
&= n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\\
& n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1\\
&= 1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}-1+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= \frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}
$$

b) $v_n-v_{n+1}\sim\dfrac{1}{12n^2}$ d'après la question précédente, donc la suite(v_n-v_{n+1}) est à termes positifs à partir d'un certain rang, et la série $\sum\frac{1}{12n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc par comparaison de séries à termes positifs on en conclut que la série $\sum(v_n-v_{n+1})$ converge.
Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}(v_k-v_{k+1})=v_1-v_{n+1}$ par télescopage, donc puisque le membre de gauche admet une limite réelle lorsque $n\to+\infty$, le membre de droite aussi. On en conclut que (v_{n+1}) converge donc que (v_n) converge.

c) Soit ℓ la limite de (v_n), alors puisque $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\mathrm{e}^{v_n}$ on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\mathrm{e}^{\ell}$ par continuité de l'exponentielle. Finalement, en posant $C=\mathrm{e}^{\ell}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!}{C\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{n}}=1$ donc $n!\sim C\sqrt{n}\dfrac{n^n}{\mathrm{e}^n}$.

2) a)

$$
\begin{aligned}
W_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^0(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,\mathrm{d}x\\
&\boxed{= \frac{\pi}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\
&= [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= -\cos(\frac{\pi}{2})+\cos 0\\
&= 1
\end{aligned}
$$

b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $W_n\geq 0$ car c'est l'intégrale d'une fonction positive sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.
De plus, (W_n) est une suite décroissante. En effet, pour tout $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $0\leq\sin(x)\leq 1$ donc $\sin^{n+1}(x)\leq\sin^n(x)$. Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$
\begin{aligned}
W_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x\\
&\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n}(x)\,\mathrm{d}x\\
&\leq W_n
\end{aligned}
$$

(W_n) est donc une suite décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel $\ell\geq 0$.

c) On pose le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$, donc $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x$.
On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{\pi}{2}-0}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}} \sin^n(\frac{\pi}{2}-t)(-\,\mathrm{d}t)\\ &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t\\ &\boxed{= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

d) On en déduit que $W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$.
donc

$$\begin{aligned}2W_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(x)+\cos^2(x))\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{W_2 = \frac{\pi}{4}}$.

e) Pour tout entier naturel n, on a par intégration par partie

$$\begin{aligned}W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x)\,\mathrm{d}x &= \left[-\cos(x)\sin^{n+1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x)\times(n+1)\cos(x)\sin^n(x)\,\mathrm{d}x\\ &= 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin^n(x)\,\mathrm{d}x\\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(x))\sin^n(x)\,\mathrm{d}x\\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}\end{aligned}$$

On en déduit donc

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$$
$$\boxed{W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n}$$

f) Montrons que la suite $\left((n+1)W_nW_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
On note pour tout $n\in\mathbb{N}$, $V_n = (n+1)W_nW_{n+1}$. Alors

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}, V_{n+1} &= (n+2)W_{n+1}W_{n+2}\\ &= (n+2)W_{n+1}\frac{n+1}{n+2}W_n && \text{d'après la question 5}\end{aligned}$$

$$= (n+1)W_nW_{n+1}$$
$$= V_n$$

donc (V_n) est bien une suite constante, et de plus $V_0 = (0+1)W_0W_1 = 1 \times \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2}$ d'après la question 1.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N},\ V_n = \frac{\pi}{2}$ donc $(n+1)W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

g) On a montré à la question 2 que (W_n) convergeait vers un réel ℓ.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$ d'après la question précédente. Or $\lim_{n\to+\infty} W_n = \lim_{n\to+\infty} W_{n+1} = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2(n+1)} = 0$ donc par passage à la limite on obtient $\ell^2 = 0$ donc $\boxed{\ell = 0}$.
Intéressons nous maintenant à la suite $\frac{W_n}{W_{n+1}}$.
On a montré à la question 2 que (W_n) était décroissante, ainsi pour tout entier n on a $W_{n+1} \leq W_n$ et $W_{n+2} \leq W_{n+1}$.
Ainsi, $\frac{W_n}{W_{n+1}} \geq 1$ et de plus, $\frac{n+2}{n+1} = \frac{W_n}{W_{n+2}} \geq \frac{W_n}{W_{n+1}} \geq 1$ car $W_n > 0$.
Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, on en déduit par théorème d'encadrement que $\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.
On a ainsi $W_n \underset{n\to\infty}{\sim} W_{n+1}$, donc d'après la question précédente $\frac{\pi}{2} = (n+1)W_nW_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} nW_n^2$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

h) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la question 5, on a

$$\begin{aligned}
W_{2n} &= \frac{2n-1}{2n}W_{2n-2} \\
&= \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)}W_{2n-4} \\
&= \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\cdots\times 1}{2n\times(2n-2)\times\cdots\times 2} \times W_0 \\
&= \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\cdots\times 1}{2n\times(2n-2)\times\cdots\times 2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{((2n-1)\times(2n-3)\times\cdots\times 1)\times(2n\times(2n-2)\times\cdots\times 2}{(2n\times(2n-2)\times\cdots\times 2)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}\times(n\times(n-1)\times\cdots\times 1)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Pour le rédiger plus rigoureusement, on raisonne par récurrence :

— **Initialisation :** Pour $n = 0$, $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{0!}{2^0 \times 0!^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, donc l'égalité est vraie au rang 0.

— **Hérédité :** Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$, et montrons que $W_{2n+2} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!^2}\frac{\pi}{2}$.
Alors,

$$\begin{aligned}
W_{2(n+1)} &= W_{2n+2} \\
&= \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n} && \text{d'après la question 5} \\
&= \frac{(2n+1)(2n)!}{(2n+2)2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} && \text{par hypothèse de récurrence}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(2n+2)!}{(2n+2)^2 2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \qquad \text{en multipliant par } \frac{2n+2}{2n+2}$$

$$= \frac{(2n+2)!}{2^2(n+1)^2 2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}\frac{\pi}{2}$$

donc l'égalité est vraie au rang $n+1$

— **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$.

i) D'après la question g) on a $W_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ et d'après la question h) $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$, donc en utilisant l'équivalent trouvé à la question 1 : $\frac{C\sqrt{2n}\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}}{2^{2n}C^2 n\frac{n^{2n}}{e^{2n}}}\frac{\pi}{2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ d'où

$$C \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}\sqrt{n}(2n)^{2n}\sqrt{\pi}\sqrt{n}}{2^{2n}n^{2n+1}} \sim \sqrt{2\pi}$$

donc $C = \sqrt{2\pi}$ par limites de constantes.

Correction de l'exercice 4 :

1) La fonction $u \mapsto \sin(e^u)$ est continue sur $[0;+\infty[$ comme composition de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à l'aide du changement de variable $x = e^u$, $dx = e^u\,du$ ($du = \frac{dx}{x}$) on peut écrire pour tout $A > 0$:

$$\int_0^A \sin(e^u)\,du = \int_1^{e^A} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$= \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_1^{e^A} + \int_1^{e^A}\frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

$$= \cos(1) - \cos(e^A)\,e^{-A} + \int_1^{e^A}\frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

Or $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ et puisque l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ converge alors l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx$ est absolument convergente donc convergente. On en conclut en faisant tendre A vers $+\infty$ que $\int_0^{+\infty}\sin(e)\,du$ converge.

2) On pose $t = u^{1/3}$ avec $dt = \frac{1}{3}u^{-2/3}\,du$ donc $du = 3t^2\,dt$.
Soit $\varepsilon > 0$, on a :

$$\int_\varepsilon^1 \frac{du}{u^{2/3}+u^{4/3}} = \int_{\varepsilon^{1/3}}^1 \frac{3t^2\,dt}{t^2+t^4}$$

$$= 3\int_{\varepsilon^{1/3}}^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$= 3\left[\arctan t\right]_{\varepsilon^{1/3}}^1$$

$$= 3\arctan(1) - 3\arctan(\varepsilon^{1/3})$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 3\arctan(1) = \frac{3\pi}{4}$$

donc $\int_0^1 \frac{du}{u^{2/3}+u^{4/2}}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.
De même, pour $A > 0$:

$$\int_1^A \frac{du}{u^{2/3}+u^{4/3}} = \int_1^{A^{1/3}} \frac{3t^2\,dt}{t^2+t^4}$$

$$= \int_1^{A^{1/3}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= 3\left[\arctan(t)\right]_1^{A^{1/3}}$$
$$= 3\arctan(A^{1/3}) - 3\arctan(1)$$
$$\xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}$$

donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^{2/3}+u^{4/2}}$ converge et vaut $\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{3\pi}{4}$. Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^{2/3}+u^{4/3}}$ converge et vaut $\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 5 :

1) On remarque qu'on peut ajouter le terme $k=0$ dans la somme :
$$P(X) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{e}^{ik\theta}-\mathrm{e}^{-ik\theta}}{2i}X^k = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\mathrm{e}^{i\theta}X)^k1^{n-k} - \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n}(\mathrm{e}^{i\theta}X)^k1^{n-k} = \frac{1}{2i}(1+\mathrm{e}^{i\theta}X)^n - \frac{1}{2i}(1+\mathrm{e}^{-i\theta}X)^n$$

2) Soit $\lambda\in\mathbb{C}$. $P(\lambda)=0 \iff \dfrac{1}{2i}(1+\mathrm{e}^{i\theta}\lambda)^n = \dfrac{1}{2i}(1+\mathrm{e}^{-i\theta}\lambda)^n \iff \left(\dfrac{1+\mathrm{e}^{i\theta}\lambda}{1+\mathrm{e}^{-i\theta}\lambda}\right)^n = 1$ et $1+\mathrm{e}^{-i\theta}\lambda\neq 0$

Or, on peut vérifier que si $1+\mathrm{e}^{-i\theta}\lambda=0$, alors $P(\lambda)\neq 0$. En effet, si $1+\mathrm{e}^{-i\theta}\lambda=0$ alors $\lambda=-\mathrm{e}^{i\theta}$ donc $P(\lambda) = \dfrac{1}{2i}(1-2\,\mathrm{e}^{2i\theta})^n = \dfrac{\mathrm{e}^{ni\theta}}{2i}(\mathrm{e}^{-i\theta}-\mathrm{e}^{i\theta})^n = -\mathrm{e}^{ni\theta}\sin^n\theta$. Or $\sin\theta=0 \Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ \theta=k\pi$ donc $\sin(n\theta)=0$. Puisque $\sin(n\theta)\neq 0$ on en déduit que $\sin\theta\neq 0$ donc que $P(\lambda)\neq 0$.

De plus, dans $\mathbb{C}$, $z^n=1 \iff \exists k\in[\![0,n-1]\!],\ z=\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Ainsi, $P(\lambda)=0 \iff \exists k\in[\![0,n-1]\!],\ \dfrac{1+\mathrm{e}^{i\theta}\lambda}{1+\mathrm{e}^{-i\theta}\lambda} = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \iff \lambda\left(\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\mathrm{e}^{-i\theta}\right)) = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}-1 \iff \exists k\in[\![0,n-1]\!],\ \lambda = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\mathrm{e}^{-i\theta}}$.

On vérifie que $\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\mathrm{e}^{-i\theta}\neq 0$:
$$\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\mathrm{e}^{-i\theta}=0 \Rightarrow \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} = \mathrm{e}^{2i\theta} \Rightarrow \mathrm{e}^{2ik\pi} = \mathrm{e}^{2in\theta} \Rightarrow \exists k'\in\mathbb{Z},\ 2in\theta = 2ik\pi+2k'\pi \iff n\theta = (k-k')\pi$$

Or puisque $\sin(n\theta)\neq 0$ on a $n\theta\neq(k-k')\pi$ pour tout $k,k'\in\mathbb{Z}$ donc $\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\mathrm{e}^{-i\theta}\neq 0$

3) Montrons que $\overline{\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\mathrm{e}^{-i\theta}}\right)} = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\mathrm{e}^{-i\theta}}$:

$$\overline{\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\mathrm{e}^{-i\theta}}\right)} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{-2ik\pi}{n}}-1}{\mathrm{e}^{-i\theta}-\mathrm{e}^{-\frac{2ik\pi}{n}}\mathrm{e}^{-i\theta}}$$
$$= \frac{1-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}}{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\mathrm{e}^{-i\theta}-\mathrm{e}^{i\theta}} \qquad \text{en multipliant par } \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\mathrm{e}^{-i\theta}}$$

donc $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\mathrm{e}^{-i\theta}}\in\mathbb{R}$. Toutes les racines de P sont donc réelles. On peut même aller plus loin :

$$\frac{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\mathrm{e}^{-i\theta}} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}-\mathrm{e}^{\frac{-ik\pi}{n}}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{-\frac{ik\pi}{n}}-\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}\mathrm{e}^{-i\theta}\right)}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}-\mathrm{e}^{-\frac{ik\pi}{n}}}{2i}\times\frac{2i}{\mathrm{e}^{i(\theta-\frac{k\pi}{n})}-\mathrm{e}^{-i(\theta-\frac{k\pi}{n})}}$$
$$= \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\theta-\frac{k\pi}{n}\right)}$$

Correction de l'exercice 6 :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}(n)$: « u_n est bien défini et $u_n > 0$ » et raisonnons par récurrence sur n.
   - **Initialisation :** $\mathcal{P}(1)$ est vrai par hypothèse.
   - **Hérédité :** Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vrai pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\left(\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)\right)^2$ est bien défini et positif donc $u_n + \left(\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)\right)^2$ est bien défini et supérieur à u_n. Ainsi, u_{n+1} est bien défini et $u_{n+1} \geq u_n > 0$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.
   - **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$ u_n est bien défini et $u_n > 0$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \left(\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)\right)^2 \geq 0$ donc (u_n) est croissante. Il n'y a que deux possibilités, soit (u_n) converge soit elle tend vers $+\infty$.
   Raisonnons par l'absurde et supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell \geq 1$ car $u_1 \geq 1$ et (u_n) croissante. Alors, par continuité de $x \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$ sur $]0;+\infty[$., $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)\right)^2 = \ln\left(1+\frac{1}{\ell}\right)$.
   Par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = u_n + \left(\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)\right)^2$ on obtient $\ell = \ell + \left(\ln\left(1+\frac{1}{\ell}\right)\right)^2$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{\ell}\right) = 0$ donc $1+\frac{1}{\ell} = 1$ donc $\frac{1}{\ell} = 0$ ce qui n'est pas possible.
   On en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$. Ainsi, $\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{u_n} + o\left(\frac{1}{u_n}\right)$. On a donc :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^\beta - u_n^\beta &= \left(u_n + \left(\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)\right)^2\right)^\beta - u_n^\beta \\
&= u_n^\beta\left(1 + \frac{1}{u_n}\left(\frac{1}{u_n} + o\left(\frac{1}{u_n}\right)\right)^2\right)^\beta - u_n^\beta \qquad = u_n^\beta\left(1+\frac{\beta}{u_n^3} + o\left(\frac{1}{u_n^3}\right)\right)^\beta - u_n^\beta \\
&= u_n^\beta + \beta u_n^{\beta-3} - u_n^\beta + o\left(u_n^{\beta-3}\right) \\
&= \beta u_n^{\beta-3} + o\left(u_n^{\beta-3}\right)
\end{aligned}$$

4) Pour $\beta = 3$ on a $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta = \beta + o(1)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}^3 - u_n^3 = 3$.
   D'après le théorème de Cesàro :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1}^3 - u_k^3) = 3$$

   Or, $\sum_{k=1}^n u_{n+1}^3 - u_n^3 = u_{n+1}^3 - u_1^3$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}^3 - u_1^3}{n} = 3$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}^3}{n} = 3$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_1^3}{n} = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\frac{u_{n+1}^3}{n} = 3$ et finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}^3}{n+1} = 3$. On en conclut que $u_{n+1} \sim \sqrt[3]{3(n+1)}$ donc $u_n \sim \sqrt[3]{3n}$

Correction de l'exercice 7 :

1) Montrons que pour tout $x > 0$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$ converge.
   La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}$ est continue sur $[0;+\infty[$ si $x \geq 1$, et sur $]0;+\infty[$ si $x < 1$. Dans les deux cas il y a une impropriété en $+\infty$. Or $t^2\, \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} = t^{x+1}\, \mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc d'après le critère de Riemann l'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$ converge, et ce quel que soit la valeur du réel x.
   Si $x \geq 1$ alors il n'y a pas d'impropriété en 1
   Si $0 < x < 1$, alors $\mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$. Or $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\, \mathrm{d}t$ converge selon le critère de Riemann car $1-x < 1$, donc l'intégrale $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$ converge.
   Finalement, on a bien montré que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\Gamma(x)$ converge donc Γ est bien définie sur $]0;+\infty[$.

2) On fait une intégration par partie sur l'intervalle $\left[\frac{1}{A}; A\right]$ avec $A > 0$:

$$\begin{aligned}\int_{1/A}^{A} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t &= \left[\mathrm{e}^{-t}\,\frac{t^x}{x}\right]_{1/A}^{A} + \int_{1/A}^{A} \mathrm{e}^{-t}\,\frac{t^x}{x}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{A^x\,\mathrm{e}^{-A}}{x} - \frac{e^{-1/A}\varepsilon^x}{x} + \frac{1}{x}\int_{1/A}^{A} \mathrm{e}^{-t}\,t^x\,\mathrm{d}x \\ &\xrightarrow[A\to+\infty]{} 0 + \frac{1}{x}\Gamma(x+1)\end{aligned}$$

Or le membre de gauche de cette égalité tend vers $\Gamma(x)$ lorsque $A \to +\infty$ d'où l'égalité $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

3) $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \left(1 - \mathrm{e}^{-A}\right) = 1$

On a donc $\Gamma(0+1) = 1$, or $0! = 1$ donc on a bien $\Gamma(0+1) = 0!$, l'égalité est vraie pour $n = 0$.

Supposons que l'égalité soit vraie pour un entier n quelconque, alors d'après la question précédente $\Gamma(n+2) = \Gamma(n+1+1) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$. L'égalité est vraie pour $n = 0$ et la propriété est héréditaire, donc elle est vraie pour tout enter n par principe de récurrence.

4) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$

Posons $x = \sqrt{t}$, avec $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$. Pour tout $A > 0$ on a

$$\int_0^{A} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{A}} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x} 2x\,\mathrm{d}x = \int_0^{A} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

d'après la valeur admise de l'intégrale de Gauss. Ainsi, $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On en déduit que $\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\dfrac{1}{2}+1\right) = \dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$ d'après la question 2.

Correction de l'exercice 8 : Existence : Considérons la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$. Cette fonction est continue sur $[0,1]$ comme somme de fonctions continues, avec $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car $f(0), f(1) \in [0,1]$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un réel $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = 0$ donc tel que $f(c) = c$.

Unicité : Supposons qu'il existe $(x,y) \in [0,1]^2$ tels que $f(x) = x$ et $f(y) = y$. Alors par hypothèse sur f :

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|$$

donc $|x-y| \leq c|x-y$. Si $x \neq y$ on peut diviser de chaque côté par $|x-y|$ et obtenir $1 \leq c$, contradiction.

Correction de l'exercice 9 :

1) Pour tout $x \geq 0$, $x = \sqrt{x}\cdot\sqrt{x}$ donc $f(x) = f(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}) \geq f(\sqrt{x})^2 \geq 0$ par hypothèse sur f.

2) On a :

$$\begin{aligned} f(x^{1/n})^n &= \underbrace{f(x^{1/n}) \times \cdots \times f(x^{1/n})}_{n \text{ fois}} \\ &\leq f(\underbrace{x^{1/n} \times \cdots \times x^{1/n}}_{n \text{ fois}}) && \text{par hypothèse sur } f \\ &\leq f(x)\end{aligned}$$

3) Pour tout $x \geq 0$ et tout $n \geq 1$ on a :

$$f(x^{1/n})^n = \exp\left(n\ln(f(x^{1/n})\right)$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x^{1/n} = 1$ et f est dérivable en 1 donc admet un développement limité en 1 :

$$f(x) \underset{x\to1}{=} f(1) + f'(1)(x-1) + o(x-1)$$

d'où
$$f(x^{1/n}) \underset{n\to+\infty}{=} f(1)+f'(1)(x^{1/n}-1)+o(x^{1/n}-1) = 1+f'(1)(x^{1/n}-1)+o(x^{1/n}-1)$$
par composition avec ln, et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(1)(x^{1/n}-1)=0$ on a :
$$\ln(f(x^{1/n}) \underset{n\to+\infty}{=} f'(1)(x^{1/n}-1)+o\left(x^{1/n}-1\right)$$
De plus, $n(x^{1/n}-1)=n(\mathrm{e}^{\ln(x)/n}-1)\sim\ln(x)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(f(x^{1/n}))=f'(1)\ln(x)$ et finalement
$$\lim_{n\to+\infty} f(x^{1/n})^n = \exp(f'(1)\ln(x)) = x^{f'(1)}$$
Par passage à la limité dans l'inégalité précédente on en déduit odnc :
$$\forall x\geq 0, \forall n\geq 1, \quad f(x)\geq x^{f'(1)}$$

4) Si $p<0$, alors $\lim\limits_{x\to 0^+} x^p=+\infty$ donc par comparaison $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$. Or f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ donc continue en 0 et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\in\mathbb{R}$, contradiction. On en conclut que $p\geq 0$

5) Montrons que le résultat est vrai si $x>0$ en raisonnant par l'absurde : supposons qu'il existe un réel $x_0>0$ tel que $f(x_0)>x_0^p$.
D'après la question 3) $f\left(\frac{1}{x_0}\right)\geq\frac{1}{x_0^p}$ donc par produit d'inégalités :
$$1=f(1)\geq f(x_0)f\left(\frac{1}{x_0}\right)>x_0^p\times\frac{1}{x_0^p}>1$$
contradiction. On en déduit donc que pour tout $x>0$, $f(x)=x^p$, et par continuité de f on a donc $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} x^p=0$ si $p\neq 0$, et $\lim\limits_{x\to 0} x^p=1$ si $p=0$. Dans tous les cas, $f(x)=x^p$ pour tout $x\geq 0$.