⋆

Exercice 1

Donner l'ensemble Ω dans les épreuves aléatoires suivantes :

1) On lance deux dés à 6 faces et on note la somme des numéros obtenus.
2) On lance deux dé indiscernables à 6 faces et on note les deux numéros obtenus.
3) On lance un dé à 6 faces rouge et un dé à 6 faces bleu et on note le numéro obtenu sur chacun des deux dés.

⋆ ⋆

Exercice 2

1) Montrer qu'il n'existe que deux tribus possibles sur $\Omega = \{0, 1\}$
2) On considère la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\{0, 1\})$. Déterminer toutes les probabilités possibles sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

⋆

Exercice 3

On lance un dé à 6 faces 5 fois de suite. Calculer la probabilité d'obtenir des numéros dans l'ordre croissant.

⋆

Exercice 4

On lance une pièce une infinité de fois. On note

- P_n : "le n-ième lancer est pile"
- F_n : "le n-ième lancer est face"

1) Décrire par des unions et des intersection les événements suivants :
   a) E : "Tous les lancers pairs entre 100 et 200 sont piles"
   b) F : "On obtient un face avant le 10-ème lancer"
   c) G : "À partir d'un certain lancer, on obtient que des faces"
2) Sachant que la pièce est équilibrée et que les lancers sont indépendants, calculer la probabilité des 3 événements ci-dessus.

⋆

Exercice 5

On lance un dé équilibré à 6 faces plusieurs fois de suite, et on note à chaque lancer le résultat obtenu. On note E_k l'événement « Le résultat du k-ième lancer est un 6.

1) En utilisant les symboles $\bigcup$ et $\bigcap$, exprimer en fonction de la famille (E_k) les événements suivants :
   a) Le 6 n'apparait jamais au delà du 10-ième lancer
   b) Le premier 6 apparaît après le 10-ième lancer
   c) Le premier 6 apparait avant le 10-ième lancer
2) Traduire par une phrase les événements suivant :
   a) $A = \left(\bigcup_{k=1}^{10} E_k\right) \bigcap \left(\bigcup_{k=11}^{20} \overline{E_k}\right)$
   b) $B = \left(\bigcap_{k=1}^{10} E_{2k}\right) \bigcap \left(\bigcap_{k=0}^{9} \overline{E_{2k+1}}\right)$
3) Montrer que l'événement « Le 6 apparaît au bout d'un certain nombre de lancer »a pour probabilité 1

⋆

Exercice 6

On répartit au hasard 3 boules dans 5 boites numérotées de 1 à 5 (1 seule boule par boite).

1) Quel est la probabilité que la première boîte soit vide ?
2) Quel est la probabilité que les deux dernières boîtes soient vides ?

★
Exercice 7

On considère l'univers $\Omega = \mathbb{N}$, la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et une probabilité $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$. Le but de cet exercices est de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = 0$

1) On considère la suite d'événements $A_n = [\![n, +\infty]\!]$.
   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{n\}) \leq \mathbb{P}(A_n)$
3) Conclure.

★
Exercice 8

Soit $n \geq 3$ un entier. Une urne contient n pièces équilibrées. Il se trouve que $n-1$ d'entre elles sont normales et la dernière est truquée : elle possède deux côtés « face ».
On prend une pièce au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendantes n lancers de cette pièce.

1) Quelle est la probabilité qu'on obtienne « face » pendant les n premiers lancers ?
2) Sachant que l'on a obtenu « face »pour les n premiers lancers, quelle est la probabilité d'avoir pris la pièce truquée ?
   Interpréter la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$.

★ ★ ★
Exercice 9

Soient $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, et soit $n \in [\![0, min(a, b)]\!]$.
On considère une urne contenant a boules blanches numérotées de 1 à a, et b boules noires numérotées de $a+1$ à $a+b$.
On y effectue n tirages sans remise, et on appelle « résultat » l'ensemble des numéros obtenus.

1) Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Combien y a-t-il de résultats contenant exactement k boules blanches ?
3) En déduire la formule de Vandermonde : $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$

★ ★
Exercice 10

Soit $n \geq 1$. On lance n fois un dé parfaitement équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir :

1) Au moins une fois le chiffre 6
2) Au moins deux fois le chiffre 6
3) Au moins k fois le chiffre 6 (avec $1 \leq k \leq n$).

★ ★
Exercice 11

On lance 3 fois un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on note a, b et c les résultats successifs obtenus. On note $Q(x) = ax^2 + bx + c$.
Déterminer la probabilité pour que

1) Q ait deux racines réelles distinctes,
2) Q ait une racine réelle double,
3) Q n'ait pas de racines réelles.

★
Exercice 12

On considère deux pièces de monnaies : l'une est équilibrée et tombe sur pile avec probabilité $p = 1/2$ et l'autre est truquée et tombe sur pile avec probabilité $p = 2/3$.
On choisit une pièce au hasard parmi ces deux pièces, et on obtient pile. Quelle est la probabilité que la pièce lancée soit la pièce truquée ?

★
Exercice 13

Une boite contient 5 dés à 4 faces (numérotées 1 à 4), 3 dés à 6 faces (numérotées 1 à 6), et 10 dés à 12 faces (numérotées 1 à 12).
On pioche un dé au hasard dans la boite et on le lance.

1) Calculer la probabilité d'obtenir un 4.
2) Le résultat du lancer de dé est 4. Quelle est la probabilité que le dé tiré soit un dé à 12 faces ?

⋆
Exercice 14

Un joueur de football s'entraine au tir au but. Il a peu de confiance en lui, ainsi il a plus de chance de réussir un tir s'il a réussi aussi le tir précédent.
On admet que

- La probabilité qu'il réussisse le premier tir est $0,1$.
- S'il réussit un tir, la probabilité qu'il réussisse le suivant est $0,8$
- S'il rate un tir, la probabilité qu'il réussisse le suivant est $0,6$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note T_n l'événement « le joueur réussit le n-ième tir »et $p_n = \mathbb{P}(T_n)$. Ainsi, $p_1 = 0,1$.

1) Calculer p_2.
2) Sachant que le joueur a réussit le deuxième tir, calculer la probabilité qu'il ait raté le premier.
3) Calculer la probabilité que le joueur réussisse au moins l'un des des trois premiers tirs.
4) Déterminer une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}, et en déduire une expression du terme général de (p_n).
5) Déterminer la limite de la suite p_n quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.

⋆
Exercice 15

Une maladie circule dans la population avec un taux d'incidence de 300 personnes sur 100 000 habitants.
Un test pour détecter cette maladie donne les résultats suivants :

- Si la personne est malade le test est positif dans 97% des cas
- Si la personne n'est pas malade, le test est négatif dans 99% des cas.

1) On teste une personne au hasard dans la population. Calculer la probabilité que le test soit positif.
2) On teste une personne au hasard et le résulta du test est positif. Calculer une valeur approchée de la probabilité que la personne soit réellement malade.
3) On teste une personne au hasard et le résultat du test est négatif. Calculer une valeur approchée de la probabilité que la personne soit saine.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 16

Un tournois de tennis se déroule selon les modalités suivantes :

- Au temps 1, les joueurs J_0 et J_1 s'affrontent.
- à chaque temps $n > 1$, un nouveau joueur J_n affronte le vainqueur du match au temps $n-1$

Soit G_n l'événement : « au temps n, le joueur J_n gagne. Supposons que les événements $(G_n)_{n\geq 1}$ sont tous indépendants entre eux et que $\mathbb{P}(G_n) = p \in]0\,;1[$ pour tout $n \geq 1$.
Un joueur est déclaré vainqueur du tournois dès qu'il parvient à remporter 5 matchs consécutifs. Pour chaque $n \geq 1$, considérons l'événement E_n : « aucun joueur n'a emporté le tournoi à l'issue du match au temps n.

1) Calculer $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
2) Justifier que la suite $(\mathbb{P}(E_n))_{n\geq 1}$ converge.
3) Montrer que $\mathbb{P}(E_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

⋆ ⋆
Exercice 17

Un voleur en fuite cherche à échapper à la police. Il a 3 cachettes, appelées A, B et C, et il décide de lancer un dé chaque jour pour décider de sa cachette suivante :

- S'il est dans la cachette A et qu'il obtient un nombre pair, il va dans la cachette B. S'il obtient un 5 il va dans la cachette C, sinon il reste dans la cachette A
- S'il est dans la cachette B et qu'il obtient un nombre inférieur ou égal à 4, il va dans la cachette A, sinon il va dans la cachette C.
- S'il est dans la cachette C et qu'il obtient un 5 ou un 6, il va dans la cachette A. S'il obtient un 2, un 3 ou un 4 il

va dans la cachette B, sinon il reste dans la cachette C

On note

- A_n : "Le voleur se trouve dans la cachette A au bout de n jours.
- B_n : "Le voleur se trouve dans la cachette B au bout de n jours.
- C_n : "Le voleur se trouve dans la cachette C au bout de n jours.

On définie les suites (a_n), (b_n) et (c_n) par $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \mathbb{P}(A_n),\ b_n = \mathbb{P}(B_n),\ c_n = \mathbb{P}(C_n)$. Le voleur commence sa cavale dans la cachette A, ainsi $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$.

1) Déterminer une relation de récurrence entre les termes $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et a_n, b_n, c_n.
2) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $a_n = 2c_n$.
3) En déduire une relation de réurrence entre c_{n+2}, c_{n+1} et c_n valable pour tout $n \geq 1$.
4) En déduire le terme général de la suite c_n,pour $n \geq 1$ puis les limites respectives de (a_n), (b_n) et (c_n) et interpréter ce résultat

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 18

(D'après Oraux ESCP) On effectue une suite de tirage au hasard dans une urne qui contient initialement une boule blanche et une boule noire de la manière suivante :

- à chaque tirage d'une boule blanche, on replace cette boule dans l'urne, puis l'on rajoute des boules blanches jusqu'à avoir multiplié par deux le nombre de boules blanches dans l'urne
- si l'on tire la boule noire, on arrête les tirages.

Ainsi, le nombre de boules blanches dans l'urne est multiplié par deux à chaque étape (sauf la dernière). On admet que l'expérience aléatoire est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « les n premiers lancers ne donnent que des boules blanches », et l'on pose $u_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{P}(B_n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}$
3) On note B l'événement « les tirages ne s'arrêtent jamais ».
   a) Exprimer B en fonction des B_n
   b) Justifier que $\mathbb{P}(B) = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$
   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $-\ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + 2^{-k})$
   d) Montrer que $\forall x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$.
   e) En déduire que la suite $(-\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puis que $\mathbb{P}(B) \neq 0$