★

Exercice 1 — Voir correction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x\,\mathrm{e}^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

1) Montrer qu'il existe une variable aléatoire X telle que f est une densité de X.
2) Déterminer F_X la fonction de répartition de X
3) Tracer l'allure de la courbe représentative de F_X
4) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
5) On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire bien définie. Déterminer la loi suivie par Y.

★

Exercice 2 — Voir correction

(Loi β de première espèce) Pour tous réels a et b, on note, sous réserve d'existence : $I(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t$

1) Montrer que $I(a,b)$ existe si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$.
2) Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que $bI(a+1,b) = aI(a,b+1)$ et $I(a,b+1) + I(a+1,b) = I(a,b)$.
   En déduire $I(a+1,b) = \dfrac{a}{a+b} I(a,b)$.
3) Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R},\quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{I(a,b)} t^{a-1}(1-t)^{b-1} & \text{si } t \in]0;1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
   Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle X.
4) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

★★★

Exercice 3 — Voir correction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$

1) Montrer que f est une fonction de densité d'une variable aléatoire X. Cette loi s'appelle **loi logistique standard.**
2) Montrer que X admet une espérance puis déterminer $\mathbb{E}[X]$ sans calcul d'intégrale.
3) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0;1[)$. Déterminer la loi de $\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$

Si S et T sont deux variables aléatoires indépendantes de densité respective g et h, pour tout réel x, on note $g * h(x)$ l'intégrale suivante lorsqu'elle converge :

$$g * h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)h(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Si $g * h$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, on admet que $S+T$ est une variable à densité dont la fonction de densité est la fonction $g * h$ (et que celle-ci vérifie toutes les propriétés d'une densité).

4) Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi exponentielle de paramètre 1.
   On pose $Z = \ln\left(\dfrac{U}{V}\right)$. Montrer que Z suit la loi logistique standard.

★★★

Exercice 4 — Voir correction

(D'après ESCP 2012) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{2}{\pi}\arctan(\mathrm{e}^x)$

1) a) Montrer qu'il existe une variable à densité X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que F est la fonction de répartition de X
   b) Déterminer la fonction de densité de X
   c) Montrer que X admet des moments à tout ordre et calculer son espérance
2) On pose $Y = \mathrm{e}^X$.
   a) Montrer que Y est une variable à densité et déterminer une densité de Y

b) La variable Y admet-elle une espérance ?

3) Soient $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant la même loi que Y. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \max(Y_1, ..., Y_n)$.

a) Déterminer la fonction de répartition de M_n

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Z_n = \dfrac{n}{M_n}$. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Z telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = F_Z(x)$ (où F_{Z_n} désigne la fonction de répartition de Z_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et F_Z désigne la fonction de répartition de Z).

⋆ ⋆

Exercice 5 — Voir correction

(D'après ESCP 2022) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, de densités respectives f_1 et f_2 strictement positives et dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x^2 + y^2) = f_1(x)f_2(y)$.

1) Dans cette question seulement on suppose que X_1 et X_2 suivent la loi normale centrée réduite. Déterminer $g(x)$.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f_1'(x)}{2xf_1(x)} = \dfrac{g'(x^2+y^2)}{g(x^2+y^2)}$

3) On pose $h(x) = \dfrac{f_1'(x)}{xf_1(x)}$.

a) Montrer que h est constante sur $\mathbb{R}^*$. On note cette constante a

b) Soit $k : x \longmapsto f_1(x)\,\mathrm{e}^{-ax^2/2}$. Montrer que k est constante sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire l'expression de $f_1(x)$

4) a) Montrer que $a < 0$

b) En déduire la loi de X_1 puis la loi de X_2.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 6 — Voir correction

(D'après ENSAE 2013) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi, et telles que X admet une espérance. Le but de cet exercice est de démontrer qu'alors $\mathbb{E}[|X - Y|] \leq \mathbb{E}[|X + Y|]$.
On notera $\mathbf{1}_A$ la variable aléatoire qui vaut 1 si l'événement A est réalisé et 0 sinon.

1) Soit T une variable aléatoire de densité f, telle que $\mathbb{P}(T \geq 0) = 1$, et qui admet une espérance.
Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} t\mathbb{P}(T > t) = 0$, puis que $\mathbb{E}[T] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T > t)\,\mathrm{d}t$.

2) Si X est à densité, la variable $X\mathbf{1}_{\{X\geq 0\}}$ est-elle aussi à densité ?

3) On admet dorénavant que les résultats de la première question sont également valables lorsque T n'admet pas de densité. On note $Z = \min(|X|, |Y|)$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[Z\mathbf{1}_{\{X\geq 0\}\cap\{Y\geq 0\}}\right] = \int_0^{+\infty} \left(\mathbb{P}(X > t)\right)^2 \mathrm{d}t$$

4) Conclure. On pourra notamment utiliser l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}\left[|X + Y| - |X - Y|\right] = 2\mathbb{E}\left[Z\left(\mathbf{1}_{\{XY\geq 0\}} - \mathbf{1}_{\{XY<0\}}\right)\right]$$

Le coin des Khûbes

★★★

Exercice 7 **Voir correction**

D'après ENS Lyon 2024) Si n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et si $x_1, \dots, x_n$ est une liste de réels, pour tout entier k de $\{1, \dots, n\}$, on note $s_k(x_1, \dots, x_n)$ le k-ième élément de la liste lorsqu'on range $x_1, \dots, x_n$ par ordre croissant. Ainsi, $s_1(x_1, \dots, x_n)$ est le plus petit élément de la liste et $s_n(x_1, \dots, x_n)$ est le plus grand élément de la liste. On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ qui suivent toutes la même loi. Pour tout entier k de $\{1, \dots, n\}$, on note Y_k la variable aléatoire égale à $s_k(X_1, \dots, X_n)$.

1) Soit k un entier de $\{1, \dots, n\}$ et x un réel. Montrer que :

$$P(Y_k \leq x) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} (P(X_1 \leq x))^i (P(X_1 > x))^{n-i}$$

2) Montrer que la fonction F définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

On suppose dans la suite de cet exercice que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ ont toutes pour fonction de répartition la fonction F définie précédemment.

3) Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ admettent-elles une espérance ?

4) Soit k un entier de $\{1, \dots, n\}$. On admet que Y_k est une variable à densité. Vérifier qu'une densité de Y_k est la fonction h_k définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_k(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}\binom{n-1}{k-1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{n-k+3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et donner un équivalent de $h_k(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5) On suppose dans cette question que $n \geq 3$ et que $k \in \{1, \dots, n-2\}$. Montrer que Y_k admet une espérance.

★

Exercice 8 **Voir correction**

Soit c un réel et soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{1+x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

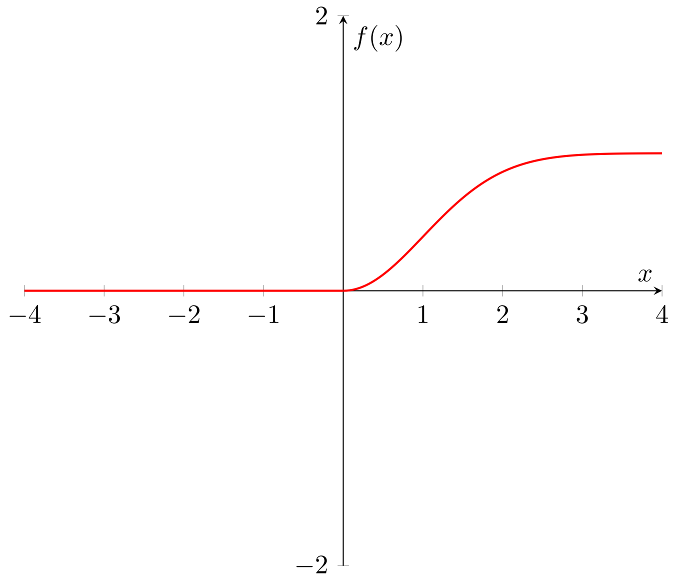
1) Déterminer c tel que f soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire.

2) Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que $Y = \dfrac{1}{X} - \left\lfloor \dfrac{1}{X} \right\rfloor$ est une variable à densité qui suit la même loi que X.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) f est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.
Pour tout $x \in]-\infty;0[$, $f(x) = 0 \geq 0$. Pour tout $x \in [0;+\infty[$, $x \geq 0$ et $\mathrm{e}^{-x^2/2} > 0$ donc $f(x) \geq 0$. Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
Enfin, on a $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t = 0$ et $\forall A \geq 0$, $\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^A t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t^2/2}\right]_0^A = 1 - \mathrm{e}^{-A^2/2} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 1$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.
f est donc une fonction de densité, il existe donc une variable aléatoire X telle que f est une densité de X.
2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$
Si $x < 0$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$.
Si $x \geq 0$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^x t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-x^2/2}$
3) $F_X'(x) = f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ donc F_X est constante sur $]-\infty;0[$ et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$. Enfin, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2} - x^2\,\mathrm{e}^{-x^2/2} = \mathrm{e}^{-x^2/2}(1-x^2)$ donc $F_X''(x)$ admet un point d'inflexion en $x = 1$.



:

4) Il faut montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, c'est à dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} |t f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.
Or, pour $t < 0$, $t f(t) = 0$ et pour $t \geq 0$, $t f(t) = t^2\,\mathrm{e}^{-t^2/2} \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\forall A > 0,\ \int_0^A t f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^A t^2\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^A t \times t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[t \times (-\mathrm{e}^{-t^2/2})\right]_0^A + \int_0^A \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^A \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t - A\,\mathrm{e}^{-A^2/2}
\end{aligned}$$

Le deuxième terme tend vers 0 lorsque $A \to +\infty$ par croissance comparée, et le premier terme converge, on reconnaît l'intégrale de Gauss : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = 1$ donc $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
On a finalement $\mathbb{E}[X] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
Montrons que X admet une variance : il faut montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

$$\begin{aligned}\forall A>0,\quad \int_0^A t^2 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^A t^2\times(t\,\mathrm{e}^{-t^2/2})\,\mathrm{d}t\\ &= \left[t^2\times(-\,\mathrm{e}^{-t^2/2})\right]_0^A+\int_0^A 2t\times\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t\\ &= -A^2\,\mathrm{e}^{-A^2/2}+\left[-2\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\right]_0^A\\ &= -A^2\,\mathrm{e}^{-A^2/2}+2-2\,\mathrm{e}^{-A^2/2}\\ &\xrightarrow[A\to+\infty]{} 2\end{aligned}$$

donc X admet un moment d'ordre 2 et $\mathbb{E}[X^2]=2$.

Finalement, X admet une variance et d'après la formule de Koenig-Huygens on a $V(X)=\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2=2-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{4-\pi}{2}$.

5) Soit F_Y la fonction de répartition de Y.

$$\begin{aligned}\forall y\in\mathbb{R},\quad F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y\le y)\\ &= \mathbb{P}(X^2\le y)\\ &= \begin{cases}\mathbb{P}(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}) & \text{si } y\ge 0\\ 0 & \text{si } y<0\end{cases}\\ &= \begin{cases}\mathbb{P}(X\le\sqrt{y}) & \text{si } y\ge 0\\ 0 & \text{si } y<0\end{cases}\\ &= \begin{cases}\mathbb{P}(X\le\sqrt{y}) & \text{si } y\ge 0\\ 0 & \text{si } y<0\end{cases}\end{aligned}$$

$$=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-y/2} & \text{si } y\ge 0\\ 0 & \text{si } y<0\end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle, donc Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 2 :

1) En 0, $t^{a-1}(1-t)^{b-1}\sim t^{a-1}\sim\dfrac{1}{t^{1-a}}$. L'intégrale converge en 0 si et seulement si $1-a<1$ si et seulement si $a>0$.

En 1, $t^{a-1}(1-t)^{b-1}\sim(1-t)^{b-1}\sim\dfrac{1}{(1-t)^{1-b}}$. Par changement de variable $u=1-t$, l'intégrale converge en 1 si et seulement si $\dfrac{1}{u^{1-b}}$ converge en 0, si et seulement si $b>0$.

Ainsi, $I(a,b)$ converge si et seulement si $a>0$ et $b>0$.

2) Soit $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$. Alors $a+1>0$ donc $I(a+1,b)$ existe et

$$I(a+1,b)=\int_0^1 t^a(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t \qquad =\left[-\frac{t^a(1-t)^b}{b}\right]_0^1+\int_0^1\frac{at^{a-1}(1-t)^b}{b}\,\mathrm{d}t$$

$$=0+\frac{a}{b}I(a,b+1)$$

d'où $bI(a+1,b)=aI(a,b+1)$.

On a aussi

$$I(a,b+1)+I(a+1,b)=\int_0^1\left(t^{a-1}(1-t)^b+t^a(1-t)^{b-1}\right)\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}(1-t+t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t \\
&= I(a,b)
\end{aligned}$$

On en déduit que $I(a+1,b) = \dfrac{a}{b}I(a,b+1) = \dfrac{a}{b}\left(I(a,b) - I(a+1,b)\right)$ d'où $I(a+1,b)\left(1+\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{a}{b}I(a,b)$ donc $I(a+1,b)\times\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{a}{b}I(a,b)$ d'où finalement $I(a+1,b) = \dfrac{a}{a+b}I(a,b)$.

3) f est continue sur $]0;1[$ et constante sur $]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$, donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.
De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \geq 0$
Enfin, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{I(a,b)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} = \dfrac{I(a,b)}{I(a,b)} = 1$.
Finalement, f est bien une densité d'une certaine variable aléatoire X.

4) X admet une espérance si et seulement si $\int_0^1 t\times t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t$ converge, si et seulement si $I(a+1,b)$ existe. Or $a>0$ et $b>0$ donc $a+1>0$ donc $I(a+1,b)$ existe d'après la question 1. Ainsi X admet une espérance.
De même, X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2, si et seulement si $\int_0^1 t^2 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t$ converge, si et seulement si $I(a+2,b)$ existe. Or $a>0$ donc $a+2>0$ donc $I(a+2,b)$ existe. X admet donc un moment d'ordre 2 donc admet une variance.
Enfin, $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{I(a,b)}\int_0^1 t\times t^{a-1}(1-t)^{b-1} = \dfrac{1}{I(a,b)}I(a+1,b) = \dfrac{a}{a+b}$.
De même, $\mathbb{E}[X^2] = \dfrac{I(a+2,b)}{I(a,b)}$. Or, $I(a+2,b) = \dfrac{a+1}{a+b+1}I(a+1,b) = \dfrac{a+1}{a+b+1}\times\dfrac{a}{a+b}I(a,b)$. Ainsi, $\mathbb{E}[X^2] = \dfrac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}$.
Finalement,

$$\begin{aligned}
V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 &= \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} - \frac{a^2}{(a+b)^2} \\
&= \frac{a(a+1)(a+b) - a^2(a+b+1)}{(a+b)^2(a+b+1)} \\
&= \frac{a\big[(a+1)(a+b) - a(a+b+1)\big]}{(a+b)^2(a+b+1)} \\
&= \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3 :

1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x}>0$ et $(1+\mathrm{e}^{-x})>1$ donc $(1+\mathrm{e}^{-x})^2>1$ donc $f(x)>0$.
De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
Il reste à vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1. Il y a deux impropriété, en $-\infty$ et en $+\infty$:

$$\begin{aligned}
\forall A<0,\quad \int_A^0 f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right]_A^0 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-A}} \\
&\xrightarrow[A\to-\infty]{} \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\forall A>0,\quad \int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right]_0^A \\
&= \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-A}} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\xrightarrow[A\to+\infty]{} 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$
Finalement, f est une fonction de densité donc il existe une variable aléatoire X telle que f est une densité de X.

2) X admet une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.
Cette intégrale a deux impropriétés, en $-\infty$ et en $+\infty$. On a $\left|\frac{t^3\,\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}\right| \underset{t\to-\infty}{\sim} \frac{-t^2\,\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{-2t}} \underset{t\to-\infty}{\sim} -t^2\,\mathrm{e}^{t}$.
Or par croissance comparée $\lim\limits_{t\to-\infty} t^2\,\mathrm{e}^t=0$, donc $\frac{t\,\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2} \underset{t\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente on en conclut que $\int_{-\infty}^{0} |tf(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.
De même, en $+\infty$, $\frac{t^3\,\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^3\,\mathrm{e}^{-t}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t^3\,\mathrm{e}^{-t}=0$ d'où $\frac{t\,\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2} = \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} tf(t)$ converge aussi.
Finalement X admet une espérance. Étudions la parité de f :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad f(-x) &= \frac{\mathrm{e}^{x}}{(1+\mathrm{e}^{x})^2}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{-2x}}{(1+\mathrm{e}^{x})^2\times\mathrm{e}^{-2x}}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{[(1+\mathrm{e}^{x})\,\mathrm{e}^{-x})]^2}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^{-x}+1)^2}\\ &= f(x)\end{aligned}$$

f est paire donc $t\mapsto tf(t)$ est impaire, donc $\mathbb{E}[X]=0$.

3) Soit F la fonction de répartition de $\ln\left(\frac{U}{1-U}\right)$.
On a

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad F(x) &= \mathbb{P}\left(\ln\left(\frac{U}{1-U}\right)\le x\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\frac{U}{1-U}\le \mathrm{e}^{x}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(U\le(1-U)\,\mathrm{e}^{x}\right) && \text{car } 1-U\ge 0\\ &= \mathbb{P}(U(1+\mathrm{e}^{x})\le \mathrm{e}^{x}\\ &= \mathbb{P}\left(U\le\frac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}\right) && \text{car } 1+\mathrm{e}^{x}>0\\ &= \mathbb{P}\left(U\le\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)\\ &= \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} && \text{car } \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\in]0;1[\text{ et que } U \text{ suit la loi uniforme sur }]0;1[\end{aligned}$$

On remarque que la fonction de répartition de $\ln\left(\frac{U}{1-U}\right)$ est la même que celle de X, donc $\ln\left(\frac{U}{1-U}\right)$ suit la loi logistique standard.

4) On a $Z=\ln U-\ln V=\ln U+(-\ln V)$
Déterminons d'abord les fonctions de densité de $\ln U$ et $-\ln V$, puis le produit de convolution de ces fonctions.
Soit G et H les fonctions de répartitions respectives de $\ln U$ et $-\ln V$.

$$\forall x\in\mathbb{R}, G(x)=\mathbb{P}(\ln U\le x)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(U \leq \mathrm{e}^x) \\
&= 1 - \exp(-\mathrm{e}^x) && \text{car } U \hookrightarrow \mathcal{E}(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, H(x) &= \mathbb{P}(-\ln V \leq x) \\
&= \mathbb{P}(\frac{1}{V} \leq \mathrm{e}^x) \\
&= \mathbb{P}(V \geq \mathrm{e}^{-x}) \\
&= 1 - \mathbb{P}(V < \mathrm{e}^{-x}) \\
&= 1 - (1 - \exp(-\mathrm{e}^{-x})) \\
&= \exp(-\mathrm{e}^{-x})
\end{aligned}$$

On a donc $G'(x) = \mathrm{e}^x \exp(-\mathrm{e}^x)$ et $H'(x) = \mathrm{e}^{-x}\exp(\mathrm{e}^{-x})$. On en conclut que $g(x) = \mathrm{e}^x \exp(-\mathrm{e}^x)$ est une fonction de densité de $\ln U$ et que $h(x) = \mathrm{e}^{-x}\exp(-\mathrm{e}^{-x})$ est une fonction de densité de $-\ln V$.
Ainsi, d'après l'énoncé, la fonction $g * h$ est une fonction de densité de $Z = \ln U + (-\ln V)$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad g * h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)h(x-t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^t \exp(-\mathrm{e}^t) \times \mathrm{e}^{-(x-t)}\exp(-\mathrm{e}^{-(x-t)})\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{2t-x}\exp(-\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{t-x})\,\mathrm{d}t \qquad = \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{2t}\exp(-\mathrm{e}^t(1+\mathrm{e}^{-x}))\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^t \exp(-\mathrm{e}^t(1+\mathrm{e}^{-x}))\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On pose le changement de variable $u = \mathrm{e}^t$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$. $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$

$$= \mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty} u \times \exp(-u(1+\mathrm{e}^{-x}))\,\mathrm{d}u$$

Soit $A > 0$, intégrons par partie $\int_0^A u\,\mathrm{e}^{-u(1+\mathrm{e}^{-x})}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^A u\,\mathrm{e}^{-u(1-\mathrm{e}^{-x})} &= \left[-\frac{u\,\mathrm{e}^{-u(1+\mathrm{e}^{-x})}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right]_0^A + \int_0^A \frac{\mathrm{e}^{-u(1+\mathrm{e}^{-x})}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}u \\
&= -\frac{A\,\mathrm{e}^{-A(1+\mathrm{e}^{-x})}}{1+\mathrm{e}^{-x}} + \left[-\frac{\mathrm{e}^{-u(1+\mathrm{e}^{-x})}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\right]_0^A \\
&= -\frac{A\,\mathrm{e}^{-A(1+\mathrm{e}^{-x})}}{1+\mathrm{e}^{-x}} + \frac{1}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} - \frac{\mathrm{e}^{-A}(1+\mathrm{e}^{-x})}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} \\
&\xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{1}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}
\end{aligned}$$

d'où finalement $\int_0^{+\infty} u\exp(-u(1+\mathrm{e}^{-x}))\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$ donc $g * h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$.

Z a la même fonction de densité que X donc Z suit bien la loi logistique standard.

Correction de l'exercice 5 :

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $x = \left(\sqrt{\dfrac{x}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\dfrac{x}{2}}\right)^2$ avec $\dfrac{\sqrt{x}}{2} \in \mathbb{R}_+$ donc

$$g(x) = g\left(\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2\right) = f_1\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) f_2\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}^2/4} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}^2/4} = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-x/2}$$

2) Soit y un réel fixé, alors, $x \mapsto g(x^2+y^2)$ est dérivable. Puisque pour tout $x \in_R$, $g(x^2+y^2) = f_1(x)f_2(x)$, on obtient en dérivant de chaque côté :

$$2xg'(x^2+y^2) = f_1'(x)f_2(y)$$

Puisque f_1 et f_2 sont strictement positives, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_2(y) = \dfrac{g(x^2+y^2)}{f_1(x)}$ d'où

$$2xg'(x^2+y^2) = \frac{f_1'(x)g(x^2+y^2)}{f_1(x)}$$

Puisque f_1 et f_2 sont strictement positives alors g aussi et donc finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{g'(x^2+y^2)}{g(x^2+y^2)} = \frac{f_1'(x)}{2xf_1(x)}$$

et cette égalité est vraie quelle que soit $y \in \mathbb{R}$.

3) a) **Attention : on ne peut a priori pas dériver h car f_1 est seulement supposée dérivable une fois**.

Soient x_1 et x_2 deux réels distincts. Alors pour tout $y \in \mathbb{R}$, $h(x_1) = \dfrac{g'(x_1^2+y^2)}{g(x^2+y^2)}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, $h(x_2) = \dfrac{g'(x_2^2+y^2)}{g(x^2+y^2)}$, donc en posant $y = x_2$ la première égalité donne $h(x_1) = \dfrac{g'(x_1^2+x_2^2)}{g(x_1^2+x_2^2)}$ et en posant $y = x_1$ la seconde égalité donne $h(x_2) = \dfrac{g'(x_1^2+x_2^2)}{g(x_1^2+x_2^2)}$. Ainsi, $h(x_1) = h(x_2)$, et ce pour tout réels x_1, x_2 avec $x_1 \neq x_2$. On en conclut que h est constante.

b) k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et $k'(x) = f_1'(x)\mathrm{e}^{-ax^2/2} - 2axf_1(x)\mathrm{e}^{-ax^2/2} = \mathrm{e}^{-ax^2/2}(f_1'(x) - axf_1(x))$.

Or, h étant constante on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f_1'(x)}{xf_1(x)} = a$ donc $f_1'(x) = axf_1(x)$, d'où $k'(x) = 0$.

Ainsi k est constante sur $\mathbb{R}$.

c) Soit $\lambda > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, k(x) = f_1(x)\mathrm{e}^{-ax^2/2} = \lambda$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \lambda\mathrm{e}^{ax^2/2}$.

4) a) Si on avait $a \geq 0$, alors $\forall t \in \mathbb{R}, \lambda\mathrm{e}^{ax^2/2} \geq \mathrm{e}^0 \geq \lambda$ et puisque l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\,\mathrm{d}t$ diverge alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t$ divergerait. Or cette intégrale converge et vaut 1 car f_1 est une fonction de densité, contradiction. On en conclut que $a < 0$.

b) On sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Or en posant le changement de variable $u = \sqrt{-a}t$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\,\mathrm{e}^{at^2/2}\,\mathrm{d}t = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{\sqrt{-a}}\,\mathrm{d}u$$

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{\lambda\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-a}} = 1$

On en déduit que $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi} \times \sqrt{-a}}$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{-1/a}}\mathrm{e}^{-t^2/2\times(-1/a)}$ d'où l'on conclut que f_1 est la densité d'une loi normale centrée de variance $-\dfrac{1}{a}$.

Le rôle de la fonction f_2 est symétrique à celui de f_1, donc f_2 suit aussi une loi normale de variance $-\dfrac{1}{b}$ où $b < 0$ est la valeur de la fonction constante $x \mapsto \dfrac{f_2'(x)}{xf_2(x)}$.

Puisque $f_1(0)f_2(1) = f_1(1)f_2(0)$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{-1/a}} \times \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{-1/b}}\mathrm{e}^{b/2} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{-1/a}}\mathrm{e}^{a/b} \times \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{-1/b}}$ d'où $\mathrm{e}^{b/2} = \mathrm{e}^{a/2}$ d'où finalement $a = b$, donc X_2 suit la même loi que X_1.

Correction de l'exercice 6 :

1) Pour tout $t \geq 0$, $t\mathbb{P}(T > t) = t\int_t^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_t^{+\infty} tf(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_t^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$. Cette dernière intégrale converge bien car T admet une espérance et que $\int_t^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^t xf(x)\,\mathrm{d}x$. De plus, puisque $\lim_{t\to+\infty} \int_0^t xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ on a $\lim_{t\to+\infty} \int_t^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = 0$ donc par comparaison $\lim_{t\to+\infty} t\mathbb{P}(T > t) = 0$.

   En notant f une fonction de densité de T et F sa fonction de répartition, la dérivée de $t \mapsto \mathbb{P}(T > t) = 1 - F(t)$ est $t \mapsto -f(t)$. Par intégration par partie, on a pour tout $A > 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^A \mathbb{P}(T > t)\,\mathrm{d}t &= [tP(T > t)]_0^A + \int_0^A tf(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{A\mathbb{P}(T > A)}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{}0} + \underbrace{\int_0^A tf(t)\,\mathrm{d}t}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{}\mathbb{E}[T]} \\ &\xrightarrow[A\to+\infty]{} \mathbb{E}[T]\end{aligned}$$

   d'où le résultat.

2) Si $\mathbb{P}(X \leq 0) \neq 0$, alors la variable $X\mathbf{1}_{\{X\geq 0\}}$ n'est pas à densité. En effet, $\mathbb{P}(X\mathbf{1}_{\{X\geq 0\}} = 0) = \mathbb{P}(X \leq 0) \neq 0$, ce qui est impossible pour une variable à densité.
   Si $\mathbb{P}(X \leq 0) = 0$, alors $\mathbb{P}(\mathbf{1}_{\{X\geq 0\}} = 1) = 1$ donc $\mathbb{P}(X\mathbf{1}_{\{X\geq 0\}} = X) = 1$, donc $X\mathbf{1}_{\{X\geq 0\}}$ suit la même loi que X donc est à densité.

3) X et Y admettent une espérance par hypothèse, donc $\mathbb{E}[|X|] < +\infty$. Puisque $\min(|X|, |Y|) \leq |X|$ la variable $Z = \min(|X|, |Y|)$ admet aussi une espérance.
   D'après la question 1 et en admettant que le résultat est encore vrai pour la variable $Z\mathbf{1}_{\{X\geq 0\}\cap\{Y\geq 0\}}$ qui vérifie bien $\mathbb{P}(Z\mathbf{1}_{\{X\geq 0\}\cap\{Y\geq 0\}} \geq 0) = 1$, on a :

$$\mathbb{E}[Z\mathbf{1}_{\{X\geq 0\}\cap\{Y\geq 0\}}] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z\mathbf{1}_{\{X\geq 0\}\cap\{Y\geq 0\}} > t)\,\mathrm{d}t$$

   Or pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}(Z\mathbf{1}_{\{X>0\}\cap\{Y\geq 0\}} > t) = \mathbb{P}([|X| > t] \cap [|Y| > t] \cap [X \geq 0] \cap [Y \geq 0]) = \mathbb{P}([X > t] \cap [Y > t]) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(Y > t) = \mathbb{P}(X > t)^2$ car X et Y sont indépendantes et suivent la même loi.
   Finalement on a bien $\mathbb{E}[Z\mathbf{1}_{\{X\geq 0\}\cap\{Y\geq 0\}}] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)^2\,\mathrm{d}t$.

4) En posant $X' = -X$ et $Y' = -Y$, on a $Z = \min(|X|, |Y|) = \min(|X'|, |Y'|)$ et X' et Y' sont indépendantes (d'après le lemme des coalitions) et de même loi. D'après la question précédente,on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Z\mathbf{1}_{\{X<0\}\cap\{Y<0\}}\right] &= \mathbb{E}\left[Z\mathbf{1}_{\{X'>0\}\cap\{Y'>0\}}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[Z\mathbf{1}_{\{X'\geq 0\}\cap\{Y'\geq 0\}}\right] \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X' > t)^2\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X < -t)^2\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

   De même, on calcule :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Z\mathbf{1}_{\{X\geq 0\}\cap\{Y<0\}}\right] &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(Z\mathbf{1}_{\{X\geq 0\}\cap\{Y<0\}} > t\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(\{|X| > t\} \cap \{|Y| > t\} \cap \{X \geq 0\} \cap \{Y < 0\}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(\{X > t\} \cap \{Y < -t\}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X < -t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont i.i.d.}\end{aligned}$$

et par symétrie :

$$\mathbb{E}\left[Z\mathbf{1}_{\{X<0\}\cap\{Y\geq 0\}}\right] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X>t)\mathbb{P}(X<-t)\,\mathrm{d}t$$

En utilisant l'égalité donnée :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X+Y|-|X-Y|] &= 2\mathbb{E}\left[Z(\mathbf{1}_{\{XY\geq 0\}}-\mathbf{1}_{\{XY\leq 0\}})\right] \\
&= 2\mathbb{E}\left[Z\left(\mathbf{1}_{\{X\geq 0\}\cap\{Y\geq 0\}}+\mathbf{1}_{\{X\leq 0\}\cap\{Y\leq 0\}}-\mathbf{1}_{\{X>0\}\cap\{Y<0\}}-\mathbf{1}_{\{X<0\}\cap\{Y>0\}}\right)\right] \\
&= 2\left(\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(X>t)^2\,\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}P(X<-t)^2\,\mathrm{d}t-2\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(X>t)\mathbb{P}(X<-t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= 2\left(\int_0^{+\infty}(\mathbb{P}(X>t)-\mathbb{P}(X<-t))^2\right)\mathrm{d}t \\
&\geq 0 \qquad \text{car l'intégrale d'u}
\end{aligned}$$

donc enfin $\mathbb{E}[|X+Y|]\geq\mathbb{E}[|X-Y|]$ par linéarité de l'espérance.

Correction de l'exercice 7 :

1) Exprimons l'événement $(Y_k\leq x)$ à l'aide des (X_i) :

$$\begin{aligned}
(Y_k\leq x) \text{ est réalisési et seulement si les } k \text{ plus petites valeurs des } (X_i)_{1\leq i\leq n} \text{ sont inférieur ou égal à } x \\
\text{si et seulement si parmi les } (X_i)_{1\leq i\leq n}\text{, au moins } k \text{ valeurs sont inférieur ou égale à } x
\end{aligned}$$

Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, l'événeemnt $(X_i\leq x)$ a pour probabilité $\mathbb{P}(X_1\leq x)$. Le nombre N de variables (X_i) ayant une valeur inférieur ou égal à x suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p=\mathbb{P}(X_1\leq x)$. On a donc :

$$\mathbb{P}(Y_k\leq x)=\sum_{i=k}^{n}\mathbb{P}(N=i)=\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}(\mathbb{P}(X_1\leq x))^i(\mathbb{P}(X_1>x)^{n-i}$$

2) On a :
   - F est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;1[$ et sur $[1;+\infty[$, par opérations sur des fonctions dérivables. Ainsi F est $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en 1.
   - F est continue sur $]-\infty;1[$ et sur $[1;+\infty[$ (car dérivable sur ces intervalles) et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}F(x)=1-\frac{1}{1}=0$ par continuité de $x\mapsto 1-\frac{1}{\sqrt{x}}$, et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}F(x)=0$ car F est constante sur $]-\infty;1[$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 1}F(x)=F(1)$ donc que F est continue en 1.
   - F est croissante car $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $[1;+\infty[$.
   - $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$ par définition de F
   - $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$ par opérations.

   donc F est la fonction de répartiton d'une variable aléatoire à densité.

3) En dérivant F on obtient qu'une densité de X est

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x\sqrt{x}} & \text{si } x\geq 1\\ 0 & \text{si } x<1\end{cases}$$

X_1 admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Or $\int_1^{+\infty}tf(t)\,\mathrm{d}t$ diverge car $tf(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ et que $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ est une intégrale de Riemann divergente.
Les (X_i) n'admettent pas d'espérance.

4) La fonction de répartition de Y_k a été trouvée à la question 1 :

$$F_{Y_k}(x) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} (F(x))^i (1 - F(x))^{n-i}$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et, en notant $f(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ la dérivée de F sur $[1; +\infty[$ on a :

$$\forall x \geq 1, \quad F'_{Y_k}(x) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \left(if(x)(F(x))^{i-1}(1-F(x))^{n-i} - (n-i)f(x)F(x)^i(1-F(x))^{n-i-1} \right)$$

$$= nf(x)(F(x))^{n-1} + \sum_{i=k} n - 1 \binom{n}{i} \left(if(x)(F(x))^{i-1}(1-F(x))^{n-i} - (n-i)f(x)F(x)^i(1-F(x))^{n-i-1} \right)$$

Or pour $i \geq 1$ on a $i\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{i-1}$ et pour $n - i \geq 1$ on a $(n-i)\binom{n}{i} = (n-i)\binom{n}{n-i} = n\binom{n-1}{n-i-1} = n\binom{n-1}{i}$. Ainsi

$$F'_{Y_k}(x) = nf(x)(F(x))^{n-1} + \sum_{i=k}^{n-1} n\binom{n-1}{i-1} f(x)(F(x))^{i-1}(1-F(x))^{n-i} - n\binom{n-1}{i} f(x)F(x)^i(1-F(x))^{n-i-1}$$

$$= nf(x)\left((F(x))^{n-1} + \sum_{i=k-1}^{n-2} \binom{n-1}{i} (F(x))^i (1-F(x))^{n-i-1} - \sum_{i=k}^{n-1} \binom{n-1}{i} F(x)^i (1-F(x))^{n-i-1} \right)$$

$$= nf(x)\left((F(x))^{n-1} + \binom{n-1}{k-1} F(x)^{k-1}(1-F(x))^{n-k} - \binom{n-1}{n-1}(F(x))^{n-1} \right)$$

par téléscopage

$$= nf(x)\binom{n-1}{k-1}(F(x))^{k-1}(1-F(x))^{n-k}$$

Or, $f(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 = \dfrac{1}{2}(1-F(x))^3$, d'où finalement :

$$F'_{Y_k}(x) = \frac{n}{2}\binom{n-1}{k-1} F(x)^{k-1}(1-F(x))^{n-k+3}$$

et pour $x < 0$ on a $F'_{Y_k}(x) = 0$. On en déduit que la fonction h_k définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_k(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}\binom{n-1}{k-1} F(x)^{k-1}(1-F(x))^{n-k+3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est une densité de Y_k. Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{k-1} = 1$ on a :

$$h_k(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{n}{2}\binom{n-1}{k-1} \frac{1}{x^{(n-k+3)/2}}$$

5) Pour tout $x \geq 1$ on a :

$$x \times \frac{1}{x^{(n-k+3)/2}} = \frac{1}{x^{(n-k+1)/2}}$$

Supposons que $n \geq 3$ et que $1 \leq k \leq n-2$. Alors $n - k \geq 2$ donc : $\frac{n-k+1}{2} \geq \dfrac{3}{2}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{(n-k+1)/2}}$ converge. On en déduit que $\int_1^{+\infty} xh_k(x)\,\mathrm{d}x$ converge donc que Y_k admet une espérance.

Correction de l'exercice 8 :

1) f est continue sur $]-\infty; 0[$, sur $[0, 1]$ et sur $]1; +\infty[$, donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.
f est positive sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{c}{1+x}\,\mathrm{d}x = c\ln 2$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \iff c = \frac{1}{\ln(2)}$.
f est donc une densité de probabilité si et seulement si $c = \dfrac{1}{\ln 2}$.

2) Par définition on a pour tout réel x : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Ainsi, $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$. On en déduit que Y est à valeur dans $[0,1[$.
Ainsi :

— Pour tout réel $x < 0$, $\mathbb{P}(Y \leq x) = 0$
— Pour tout réel $x \geq 1$, $\mathbb{P}(Y \leq x) = 1$

Reste à étudier le cas où $x \in [0,1[$. La famille $\left(\left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor = k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq x) &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{X} - \left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor \leq x\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{1}{X} - \left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor \leq +x\right\} \cap \left\{\left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor = k\right\}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{1}{X} \leq k+x\right\} \cap \left\{k \leq \frac{1}{X} < k+1\right\}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(k \leq \frac{1}{X} \leq k+x\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{k+x} \leq X \leq \frac{1}{k}\right) && \text{car } \mathbb{P}(X \geq 0) = 1 \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(c\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - c\ln\left(1+\frac{1}{k+x}\right)\right) \\
&= c\sum_{k=1}^{+\infty}(\ln(k+1) - \ln(k)) - c\sum_{k=1}^{+\infty}\ln(k+x+1) - \ln(k+x) \\
&= c\ln(1+x) && \text{par sommes téléscopiques}
\end{aligned}$$

On reconnaît la fonction de répartition de X donc Y suit la même loi que X.