
Programme de khôlle de maths n° 5

Semaine du 16 Octobre

Cours

Chapitre 3 : Ensembles et applications

- Application $f : E \rightarrow F$, ensemble de départ, ensemble d'arrivée, image directe $f(A)$ de $A \in \mathcal{P}(E)$, image réciproque $f^{-1}(B)$ avec $B \in \mathcal{P}(F)$
- Injection, surjection, bijection
- $f : E \rightarrow F$ est une bijection ssi $\exists g : F \rightarrow E$ tq $f \circ g = \text{id}_F$ et $g \circ f = \text{id}_E$
- Dénombrement : arrangements, permutations, combinaisons.

Chapitre 4 : Entiers, sommes et récurrences

- Nombres entiers, familles finies et dénombrables
- Sommes sur une partie finie de \mathbb{Z} , relation de Chasles, changement d'indice, changement de sens de sommation
- Somme double sur un rectangle $(\sum_{i=a}^b \sum_{j=c}^d u_{i,j})$, somme double sur un triangle $(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i u_{i,j})$.
- Récurrence simple.

Questions de cours et exercices vus en classe

- Montrer que dans un ensemble à n éléments, le nombre de k -arrangements est $\frac{n!}{(n-k)!}$ et le nombre de k -combinaisons est $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ en utilisant le fait que pour un ensemble E fini, $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{card}(E)}$.
- Calculer $\sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$
- Calculer $\sum_{k=5}^{20} 2^{20-k}$
- Calculer $\sum_{k=-10}^{20} |k-5|$
- Calculer $\sum_{k=1}^{n-1} \ln \left(\frac{k}{n-k} \right)$
- Déterminer deux réels α, β tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+1}$ et en déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ en fonction de n .
- Calculer $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{i}{j}$