

★

Exercice 1

Voir correction

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

- 1) Montrer que $q = \text{id}_E - p$ est un projecteur si et seulement si p est un projecteur.
Exprimer dans ce cas $\text{Ker}(q)$ et $\text{Im}(q)$ en fonction de $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$.
- 2) Montrer que $s = \text{id}_E - 2p$ est une symétrie si et seulement si p est un projecteur.
Exprimer dans ce cas $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$ en fonction de $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$.

★

Exercice 2

Voir correction

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues de $[0; \pi]$ dans \mathbb{R} .

Soient $F = \text{Vect}(\cos_{|[0, \pi]}, \sin_{|[0, \pi]})$ et $G = \{f \in \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R}) \mid f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)\}$.

- 1) Montrer que $E = F \oplus G$
- 2) Soit p la projection sur F parallèlement à G . Déterminer $p(f)$ pour $f \in E$.

★

Exercice 3

Voir correction

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et soient $F = \text{Vect}((1, -1, 1))$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 0\}$.

- 1) Montrer que $E = F \oplus G$
- 2) Soit s la symétrie de E par rapport à F dans la direction de G . Déterminer la matrice représentative de s dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

★ ★

Exercice 4

Voir correction

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soient E_1, E_2, \dots, E_n des sous espaces vectoriels de E et F_1, F_2, \dots, F_p des sous espaces vectoriels de F .

- 1) Montrer que $f(E_1 + E_2 + \dots + E_n) = f(E_1) + f(E_2) + \dots + f(E_n)$
- 2) Montrer que si f est injective et que la somme des E_i est directe, alors la somme des $f(E_i)$ est directe.
- 3) Montrer que $f^{-1}(F_1) + f^{-1}(F_2) + \dots + f^{-1}(F_p) \subset f^{-1}(F_1 + F_2 + \dots + F_p)$
- 4) Donner un exemple dans lequel l'inclusion précédente est stricte.

★

Exercice 5

Voir correction

Soit n un entier non nul. On note tr l'application trace définie par $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \mapsto \sum_{i=1}^n m_{i,i}$.

- 1) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}(I_n) \oplus \text{Ker}(\text{tr})$.
- 2) On considère $p \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ le projecteur sur $\text{Vect}(I_n)$ parallèlement à $\text{Ker}(\text{tr})$. Que vaut $p(M)$ pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

★ ★

Exercice 6

Voir correction

Soit n un entier non nul et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère l'application $u : E \rightarrow \mathbb{R}_1[X], P \mapsto P(0)X + P(1)$

- 1) Montrer que $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}_1[X])$
- 2) Montrer que $E = \mathbb{R}_1[X] \oplus \text{Ker}(u)$

★

Exercice 7

Voir correction

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie de E et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ quelconque. Montrer que u et s commutent si et seulement si $\text{Ker}(s - \text{id})$ et $\text{Ker}(s + \text{id})$ sont stables par u .

★ ★

Exercice 8

Voir correction

E un \mathbb{R} -e.v. de dimension $n \geq 1$ et soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. Montrer que $n - \text{tr}(s)$ est un entier pair.

★ ★

Exercice 9

Voir correction

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs tels que $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(q)$. On pose $r = p + q - p \circ q$.

- Montrer que r est un projecteur.
- Montrer que $\text{Ker}(r) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$ et que $\text{Im}(r) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$.

★ ★

Exercice 10

Voir correction

Soient $p, n \geq 1$ deux entiers, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ tels que $g \circ f$ est un projecteur de rang p .

- Montrer que $\text{rg}(g) \leq p$
- En déduire que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}g$ et que $\text{Ker}g = \{0\}$
- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $g(f(g(x))) = g(x)$
- Montrer que $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}^p}$.

Le coin des Khûbes

★ ★ ★

Exercice 11

Voir correction

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soient a et b deux symétries de E .

- Développer et simplifier $(a + b) \circ (a - b)$ et $(a - b) \circ (a + b)$.
- Montrer que $\text{Im}(a \circ b - b \circ a) \subset \text{Im}(a + b) \cap \text{Im}(a - b)$
- Montrer enfin que $\text{Im}(a \circ b - b \circ a) = \text{Im}(a + b) \cap \text{Im}(a - b)$.

★ ★ ★

Exercice 12

Voir correction

Soit $n \geq 1$ un entier.

- Montrer que $s : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X], P(X) \longmapsto P(1 - X)$ est une symétrie.
- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer l'équivalence suivante :

$$P(1 - X) = P(X) \iff \text{la courbe représentative de } P \text{ est symétrique par rapport à la droite } x = \frac{1}{2}$$

- Montrer que $P \in \text{Ker}(s - \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ si et seulement si le polynôme $Q(X) = P(X + \frac{1}{2})$ définit une fonction paire.
- Montrer qu'une fonction polynôme est paire si et seulement si tous ses termes de degré impair sont nuls.
- Vérifier que $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X], P(X) \mapsto P(X + \frac{1}{2})$ est un automorphisme et en déduire une base de $\text{Ker}(s - \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$
- En raisonnant de façon analogue, déterminer une base de $\text{Ker}(s + \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$

★ ★ ★

Exercice 13

Voir correction

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n . Soit s un endomorphisme de E vérifiant les propriétés suivantes :

- $s \circ s = \text{Id}_E$
- $s \neq \text{Id}_E$
- $s \neq -\text{Id}_E$

On considère l'application φ définie par $\varphi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E), f \mapsto \frac{1}{2}(s \circ f + f \circ s)$.

- Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
- Montrer que s est diagonalisable et que son spectre est égal à $\{-1, 1\}$.

On notera dans la suite E_1 (resp. E_{-1}) le sous-espace propre de s associé à la valeur propre 1 (resp. -1).

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$f \in \text{Ker}(\varphi) \iff f(E_1) \subset E_{-1} \quad \text{et} \quad f(E_{-1}) \subset E_1$$

- Soit λ une valeur propre de φ . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un vecteur propre associé. Soit $x \in E_1$. Déterminer une relation entre $f(x)$ et $s(f(x))$. Même question pour $x \in E_{-1}$.
- Montrer que le spectre de φ est inclus dans $\{-1, 0, 1\}$.
- Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de coefficient dominant égal à 1 et de degré 3 tel que $P(\varphi) = 0$.

Correction des exercices

Correction de l'exercice 1 :

1)

$$\begin{aligned}
 q \text{ est un projecteur} &\iff (\text{id} - p)^2 = \text{id} - p \\
 &\iff \text{id}^2 - \text{id} \circ p - p \circ \text{id} + p^2 = \text{id} - p \\
 &\iff \text{id} - 2p + p^2 = \text{id} - p \\
 &\iff p^2 = p \\
 &\iff p \text{ est un projecteur}
 \end{aligned}$$

De plus, on a alors

$$\begin{aligned}
 x \in \text{Ker}(q) &\iff (\text{id} - p)(x) = 0 \\
 &\iff x - p(x) = 0 \\
 &\iff p(x) = x \\
 &\iff x \in \text{Im}(p) \qquad \text{car } p \text{ est un projecteur}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 x \in \text{Im}(q) &\iff q(x) = x \qquad \text{car } q \text{ est un projecteur} \\
 &\iff x - p(x) = x \\
 &\iff p(x) = 0 \\
 &\iff x \in \text{Ker}(p)
 \end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{Ker}(q) = \text{Im}(p) \text{ et } \text{Im}(p) = \text{Ker}(q).}$

2)

$$\begin{aligned}
 s \text{ est une symétrie} &\iff (\text{id} - 2p)^2 = \text{id} \\
 &\iff \text{id} - 4p + 4p^2 = \text{id} \\
 &\iff p^2 = p \\
 &\iff p \text{ est un projecteur}
 \end{aligned}$$

Dans ce cas on a

$$\begin{aligned}
 x \in \text{Ker}(s - \text{id}) &\iff s(x) = x \\
 &\iff x - 2p(x) = x \\
 &\iff p(x) = 0 \\
 &\iff x \in \text{Ker}(p)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 x \in \text{Ker}(s + \text{id}) &\iff s(x) + x = 0 \\
 &\iff x - 2p(x) + x = 0 \\
 &\iff p(x) = x \\
 &\iff x \in \text{Im}(p) \qquad \text{car } p \text{ est un projecteur}
 \end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{Ker}(s - \text{id}) = \text{Ker}(p) \text{ et } \text{Ker}(s + \text{id}) = \text{Im}(p).}$

Correction de l'exercice 2 :

- 1) Soit $f \in F \cap G$. Il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in [0, \pi]$, $f(x) = a \cos x + b \sin x$. De plus, $f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)$. Or $f(0) = a$, $f(\pi/2) = b$, et $f(\pi) = -a$.

$a = -a$ entraîne $a = 0$ et donc $b = f(\pi/2) = f(0) = a = 0$, ainsi $f = 0$. On en conclut que $F \cap G = \{0_E\}$ donc F et G sont en somme directe.

Remarque : E n'est pas de dimension finie, on ne peut pas raisonner sur les dimensions pour conclure.

Montrons que $E = F + G$ Soit $f \in E$, raisonnons par analyse-synthèse et supposons qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $g \in G$ tels que $\forall x \in [0, \pi]$, $f(x) = a \cos(x) + b \sin(x) + g(x)$.

Alors

$$\begin{cases} f(0) &= a + g(0) \\ f(\pi/2) &= b + g(\pi/2) \\ f(\pi) &= -a + g(\pi) \end{cases}$$

en posant $c = g(0) = g(\pi/2) = g(\pi)$, on a donc

$$\begin{cases} a + c &= f(0) \\ b + c &= f(\pi/2) \\ -a + c &= f(\pi) \end{cases}$$

qui équivaut à

$$\begin{cases} a &= \frac{f(0) - f(\pi)}{2} \\ b &= f(\pi/2) - \frac{f(0) + f(\pi)}{2} = \frac{2f(\pi/2) - f(0) - f(\pi)}{2} \\ c &= \frac{f(0) + f(\pi)}{2} \end{cases}$$

Réciproquement, soit $f \in E$, posons $a = \frac{f(0) - f(\pi)}{2}$ et $b = \frac{2f(\pi/2) - f(0) - f(\pi)}{2}$, et posons pour tout $x \in [0, \pi]$, $g(x) = f(x) - a \cos(x) - b \sin(x)$.

Alors $\forall x \in [0, \pi]$, $f(x) = a \cos(x) + b \sin(x) + g(x)$ par construction, g est continue comme somme de fonctions continues, et

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) - a \\ &= f(0) - \frac{f(0) - f(\pi)}{2} \\ &= \frac{f(0) + f(\pi)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\pi/2) &= f(\pi/2) - b \\ &= f(\pi/2) - \frac{2f(\pi/2) - f(0) - f(\pi)}{2} \\ &= \frac{f(0) + f(\pi)}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g(\pi) &= f(\pi) + a \\ &= f(\pi) + \frac{f(0) - f(\pi)}{2} \\ &= \frac{f(0) + f(\pi)}{2} \end{aligned}$$

donc $g(0) = g(\pi/2) = g(\pi)$. Ainsi, $g \in G$. Finalement $f \in F + G$ donc $E \subset F + G$. L'inclusion $F + G \subset E$ est évidente car toute somme de fonctions continues sur $[0, \pi]$ est continue sur $[0, \pi]$.

- 2) D'après la question précédente, pour toute fonction $f \in E$,

$$p(f) : [0; \pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{f(0) - f(\pi)}{2} \cos(x) + \frac{2f(\pi/2) - f(0) - f(\pi)}{2} \sin(x)$$

Correction de l'exercice 3 :

- 1) Soit $(x, y, z) \in F \cap G$. Alors $\exists a \in \mathbb{R}$, $(x, y, z) = a \cdot (1, -1, 1) = (a, -a, a)$. Comme $(x, y, z) \in G$ on a $2a - (-a) - a = 0$ donc $2a = 0$ donc $a = 0$. Ainsi $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, donc F et G sont en somme directe.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On raisonne par analyse-synthèse en supposant qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $(x', y', z') \in G$ tels que

$$(x, y, z) = (a, -a, a) + (x', y', z')$$

Alors $(x', y', z') = (x - a, y + a, z - a)$ avec $2(x - a) - (y + a) - (z - a) = 0$ donc $2x - y - z = 2a$ donc

$$a = \frac{2x - y - z}{2}$$

On en déduit que

$$(x', y', z') = \left(\frac{y + z}{2}, \frac{2x + y - z}{2}, \frac{-2x + y + 3z}{2} \right)$$

Réciproquement, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, en posant $a = \frac{2x - y - z}{2}$ et $(x', y', z') = \left(\frac{y + z}{2}, \frac{2x + y - z}{2}, \frac{-2x + y + 3z}{2} \right)$ on a bien

$$(x, y, z) = (a, -a, a) + (x', y', z')$$

d'après les calculs précédents, et $(x', y', z') \in G$ car

$$2 \times \frac{y + z}{2} - \frac{2x + y - z}{2} - \frac{-2x + y + 3z}{2} = 0$$

donc $(x, y, z) \in F + G$.

Finalement $E = F \oplus G$.

- 2) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on sait d'après la réponse à la question précédente que

$$(x, y, z) = \underbrace{\left(\frac{2x - y - z}{2}, -\frac{2x - y - z}{2}, \frac{2x - y - z}{2} \right)}_{\in F} + \underbrace{\left(\frac{y + z}{2}, \frac{2x + y - z}{2}, \frac{-2x + y + 3z}{2} \right)}_{\in G}$$

On a donc

$$\begin{aligned} s(x, y, z) &= \left(\frac{2x - y - z}{2}, -\frac{2x - y - z}{2}, \frac{2x - y - z}{2} \right) - \left(\frac{y + z}{2}, \frac{2x + y - z}{2}, \frac{-2x + y + 3z}{2} \right) \\ &= \left(\frac{2x - 2y - 2z}{2}, \frac{-4x + 2z}{2}, \frac{4x - 2y - 4z}{2} \right) \\ &= (x - y - z, -2x + z, 2x - y - 2z) \end{aligned}$$

donc la matrice représentative de s dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 4 :

- 1) Montrons l'inclusion dans le sens direct

Soit $y \in f(E_1 + E_2 + \dots + E_n)$. Alors il existe $x \in E_1 + E_2 + \dots + E_n$, $y = f(x)$ donc il existe $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ tel que $y = f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \in f(E_1) + f(E_2) + \dots + f(E_n)$ donc $f(E_1 + E_2 + \dots + E_n) \subset f(E_1) + f(E_2) + \dots + f(E_n)$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $y \in f(E_1) + f(E_2) + \dots + f(E_n)$. Il existe $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in f(E_1) \times f(E_2) \times \dots \times f(E_n)$ tel que $y = y_1 + y_2 + \dots + y_n$, donc il existe $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ tels que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $y_i = f(x_i)$ et ainsi $y = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) = f(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ car f est linéaire. Ainsi, $y \in f(E_1 + E_2 + \dots + E_n)$ donc $f(E_1) + f(E_2) + \dots + f(E_n) \subset f(E_1 + E_2 + \dots + E_n)$.

- 2) Supposons f injective et E_1, E_2, \dots, E_n en somme directe.

Soit $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in f(E_1) \times f(E_2) \times \dots \times f(E_n)$ tels que $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0$

Alors il existe $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ tels que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $y_i = f(x_i)$, et $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) = 0$. Ainsi, $f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = 0$ donc $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ car f est injective. Or les E_i sont en somme directe donc $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. On en conclut que $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$ donc que les $f(E_i)$ sont en somme directe.

- 3) Soit $x \in f^{-1}(F_1) + f^{-1}(F_2) + \dots + f^{-1}(F_p)$. Il existe $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in f^{-1}(F_1) \times f^{-1}(F_2) \times \dots \times f^{-1}(F_p)$ tels que $x = x_1 + x_2 + \dots + x_p$, et $f(x) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_p)$.

Par hypothèse sur les x_i , on a $f(x_i) \in F_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, donc $f(x) \in F_1 + F_2 + \dots + F_p$. On en conclut que $x \in f^{-1}(F_1 + F_2 + \dots + F_p)$, donc que $f^{-1}(F_1) + f^{-1}(F_2) + \dots + f^{-1}(F_p) \subset f^{-1}(F_1 + F_2 + \dots + F_p)$.

- 4) On considère $E = \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{L}(E, E)$ la projection sur $\text{Vect}((1, 0))$ parallèlement à $\text{Vect}((0, 1))$.
On pose $F_1 = \text{Ker}(f)$ et $F_2 = \text{Vect}((1, 1))$ (faire une figure). Alors $f^{-1}(F_1) = \{0\}$ et $f^{-1}(F_2) = \{0\}$, mais $F_1 \oplus F_2 = E$ donc $f^{-1}(F_1 + F_2) = E$. Ainsi, l'inclusion $f^{-1}(F_1) + f^{-1}(F_2) \subset f^{-1}(F_1 + F_2)$ est stricte.

Correction de l'exercice 5 :

- 1) Montrons que $\text{Vect}(I_n)$ et $\text{Ker}(\text{tr})$ sont en somme directe.

Soit $M \in \text{Vect}(I_n) \cap \text{Ker}(\text{tr})$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda \cdot I_n$, donc $\text{tr}(M) = n\lambda$. Or $\text{tr}(M) = 0$ donc $\lambda n = 0$ et ainsi $\lambda = 0$. On en déduit que $M = 0$, donc finalement que $\text{Vect}(I_n) \cap \text{Ker}(\text{tr}) = \{0\}$.

Montrons que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}(I_n) + \text{Ker}(\text{tr})$. On a déjà l'inclusion $\text{Vect}(I_n) + \text{Ker}(\text{tr}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Raisonnons par analyse synthèse et supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M' \in \text{Ker}(\text{tr})$ tels que $M = \lambda \cdot I_n + M'$.

Alors $\text{tr}(M) = n\lambda + \text{tr}(M') = n\lambda$. On en déduit que $\lambda = \frac{\text{tr}(M)}{n}$ et que $M' = M - \frac{\text{tr}(M)}{n} \cdot I_n$.

Réciproquement, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en posant $\lambda = \frac{\text{tr}(M)}{n}$ et $M' = M - \frac{\text{tr}(M)}{n} \cdot I_n$, on a $\lambda \cdot I_n + M' = M$,

et $\lambda \cdot I_n \in \text{Vect}(I_n)$ et $\text{tr}(M') = \text{tr}(M) - \frac{\text{tr}(M)}{n} \text{tr}(I_n) = \text{tr}(M) - \frac{\text{tr}(M)}{n} \times n = 0$ donc $M' \in \text{Ker}(\text{tr})$. Ainsi, toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\text{Vect}(I_n) + \text{Ker}(\text{tr})$, donc finalement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}(I_n) + \text{Ker}(\text{tr})$.

On en conclut que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}(I_n) \oplus \text{Ker}(\text{tr})$.

Remarque : on peut aussi remarquer que $\dim(\text{Vect}(I_n)) + \dim(\text{Ker}(\text{tr})) = 1 + n - 1 = n$ pour conclure en deux lignes.

- 2) D'après la question précédente, $p(M) = \frac{\text{tr}(M)}{n} I_n$.

Correction de l'exercice 6 :

- 1) Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(0)X + (\lambda P + \mu Q)(1) \\ &= \lambda P(0)X + \mu Q(0)X + \lambda P(1) + \mu Q(1) \\ &= \lambda(P(0)X + P(1)) + \mu(Q(0)X + Q(1)) \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q) \end{aligned}$$

donc $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}_1[X])$.

- 2) Soit $P \in \mathbb{R}_1[X] \cap \text{Ker}(u)$. Il existe $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ tels que $P(X) = a_1 X + a_0$. Puisque $P \in \text{Ker}(u)$, on a $u(P) = 0$ c'est à dire que le polynôme $P(0)X + P(1)$ est le polynôme nul.

Or $P(0)X + P(1) = a_0 X + a_1 + a_0$, ce polynôme est nul si et seulement si (a_0, a_1) vérifie $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 + a_0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases}$ donc finalement $P = 0$.

Ainsi $\mathbb{R}_1[X] \cap \text{Ker}(u) = \{0\}$. On en déduit que $\text{Ker}(u)$ et $\mathbb{R}_1[X]$ sont en somme directe.

Montrons que $\mathbb{R}_1[X] \oplus \text{Ker}(u) = E$. Remarquons d'abord que $\dim(\mathbb{R}_1[X]) = 2$ et $\dim(\text{Ker}(u)) = n + 1 - \text{rg}(u)$.

Montrons que u est surjective : soit $Q = aX + b \in \mathbb{R}_1[X]$ un polynôme fixé. On cherche $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $u(P) = Q$.

Il suffit d'avoir $P(0) = a$ et $P(1) = b$, c'est à dire $a_0 = a$ et $\sum_{k=1}^n a_k = b$. En posant $a_0 = a$, $a_1 = b - a$, et $a_k = 0$ pour tout $k \geq 2$, on a $u(P) = u(a_1 X + a_0) = aX + (b - a + a) = aX + b = Q$, donc P est un antécédent de Q .

Ainsi, $\text{rg}(u) = \dim(\mathbb{R}_1[X]) = 2$, on a donc finalement $\dim(\mathbb{R}_1[X] \oplus \text{Ker}(u)) = \dim(\mathbb{R}_1[X]) + \dim(\text{Ker}(u)) = 2 + n + 1 - 2 = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. L'inclusion $\mathbb{R}_1[X] \oplus \text{Ker}(u) \subset \mathbb{R}_n[X]$ entraîne donc $\mathbb{R}_1[X] \oplus \text{Ker}(u) = \mathbb{R}_n[X]$.

Remarque : Plus simplement, on peut se contenter de minorer la dimension de $\text{Ker}(u)$ en constatant que $\dim(\mathbb{R}_1[X]) = 2$, donc $-\text{rg}(u) \geq -2$ et ainsi $\dim(E) - \text{rg}(u) \geq n + 1 - 2$, d'où $\dim(\text{Ker}(u)) \geq n - 1$ d'après le théorème du rang.

Puisque $\text{Ker}(u)$ et $\mathbb{R}_1[X]$ sont en somme directe,

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ker}(u) \oplus (\mathbb{R}_1[X])) &= \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\mathbb{R}_1[X]) \\ &\geq n - 1 + 2 \\ &\geq n + 1 \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{R}_1[X] \oplus \text{Ker}(u) \subset E$ et que $\dim(E) = n + 1$ on en déduit que $\mathbb{R}_1[X] \oplus \text{Ker}(u) = E$.

Correction de l'exercice 7 : Sens direct : supposons que u et s commutent.

Soit $x \in \text{Ker}(s - \text{id})$. Alors $s(x) = x$, donc $u(x) = u(s(x)) = s(u(x))$ car u et s commutent. On en conclut que $s(u(x)) - u(x) = 0$, donc $u(x) \in \text{Ker}(s - \text{id})$. Ainsi, $\text{Ker}(s - \text{id})$ est stable par u .

Soit $x \in \text{Ker}(s + \text{id})$. Alors $s(x) = -x$, donc $u(x) = u(-s(x)) = -u(s(x)) = -s(u(x))$ car u et s commutent. On en conclut que $s(u(x)) + u(x) = 0$ donc $u(x) \in \text{Ker}(s + \text{id})$. Ainsi $\text{Ker}(s + \text{id})$ est stable par u .

Sens indirect : supposons que $\text{Ker}(s - \text{id})$ et $\text{Ker}(s + \text{id})$ sont stables par u . s est une symétrie donc $E = \text{Ker}(s - \text{id}) \oplus \text{Ker}(s + \text{id})$. Soit $x \in E$, il existe $(x_1, x_2) \in \text{Ker}(s - \text{id}) \times \text{Ker}(s + \text{id})$ tels que $x = x_1 + x_2$ et $s(x) = x_1 - x_2$. Ainsi, $u(s(x)) = u(x_1) - u(x_2)$ d'une part, et d'autre part $s(u(x)) = s(u(x_1)) + s(u(x_2))$. Or par hypothèse, $\text{Ker}(s - \text{id})$ et $\text{Ker}(s + \text{id})$ sont stables par u , donc $u(x_1) \in \text{Ker}(s - \text{id})$ et $u(x_2) \in \text{Ker}(s + \text{id})$. On en déduit que $s(u(x_1)) = x_1$ et $s(u(x_2)) = -u(x_2)$. Finalement, $s(u(x)) = u(x_1) - u(x_2) = u(s(x))$, et ceci étant vrai quel que soit $x \in E$ on en conclut que s et u commutent.

Correction de l'exercice 8 : s est une symétrie donc $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$.

En choisissant une base (e_1, e_2, \dots, e_r) de $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ et une base (e_{r+1}, \dots, e_n) de $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$ on obtient une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ de E .

Dans cette base, la matrice de s est la matrice par bloc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r, n-r} \\ \hline 0_{n-r, r} & -I_{n-r} \end{array} \right)$.

Ainsi $\text{tr}(s) = r - (n - r) = 2r - n$ (la trace d'un endomorphisme ne dépend pas de la base dans laquelle on écrit sa matrice représentative).

Finalement, $n - \text{tr}(s) = 2n - 2r = 2(n - r)$ donc est un entier pair.

Correction de l'exercice 9 :

1) De l'inclusion $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(q)$ on déduit que $q \circ p = 0$.

$$\begin{aligned} r^2 &= (p + q - p \circ q) \circ (p + q - p \circ q) \\ &= p^2 + p \circ q - p^2 \circ q + q \circ p + q^2 - q \circ p \circ q - p \circ q \circ p - p \circ q^2 + p \circ q \circ p \circ q \\ &= p + p \circ q - p \circ q + 0 + q - 0 - 0 - p \circ q + 0 \\ &= p + q - p \circ q \\ &= r \end{aligned}$$

donc r est un projecteur.

2) Si $x \in \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$, alors $r(x) = p(x) + q(x) - p(q(x)) = 0 + 0 - p(0) = 0$ donc $x \in \text{Ker}(r)$.

Réciproquement, si $x \in \text{Ker}(r)$, alors $p(x) + q(x) - p(q(x)) = 0$ (1). En composant par q de chaque côté on obtient $q^2(x) = 0$ car $q \circ p = 0$, donc $q(x) = 0$ et ainsi $x \in \text{Ker}(q)$.

En reprenant l'égalité (1) on en déduit immédiatement $p(x) = 0$ donc $x \in \text{Ker}(p)$, finalement $x \in \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

On a donc bien $\text{Ker}(r) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

Montrons que $\text{Im}(r) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$

Soit $x \in \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$. Alors $x \in \text{Ker}(q)$ car $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(q)$, donc $x \in \text{Ker}(q) \cap \text{Im}(q)$ et comme q est un projecteur $\text{Im}(q)$ et $\text{Ker}(q)$ sont en somme directe donc $x = 0$. On en déduit que $\text{Im}(p) \cap \text{Im}(q) = \{0\}$.

Soit $x \in \text{Im}(r)$. Il existe $y \in E$ tel que $p(y) + q(y) - p(q(y)) = x$. Or, $p(y) + q(y) - p(q(y)) = \underbrace{p(y - q(y))}_{\in \text{Im}(p)} + \underbrace{q(y)}_{\in \text{Im}(q)}$ donc

$x \in \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$. On a montré que $\text{Im}(r) \subset \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$.

Soit maintenant $x \in \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$. Il existe $x_1 \in \text{Im}(p)$ et $x_2 \in \text{Im}(q)$ tels que $x = x_1 + x_2$.

$x \in \text{Im}(r) \iff r(x) = x$ car r est un projecteur. Or on a

$$\begin{aligned} r(x) &= r(x_1) + r(x_2) \\ &= p(x_1) + q(x_1) - p(q(x_1)) + p(x_2) + q(x_2) - p(q(x_2)) \end{aligned}$$

Or, $p(x_1) = x_1$ car $x_1 \in \text{Im}(p)$, $q(x_2) = x_2$ car $x_2 \in \text{Im}(q)$, et $q(x_1) = 0$ car $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(q)$. On a donc

$$\begin{aligned} r(x) &= x_1 + p(x_2) + x_2 - p(x_2) \\ &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

donc $r(x) = x$, on en conclut que $x \in \text{Im}(r)$ donc que $\text{Im}(p) + \text{Im}(q) \subset \text{Im}(r)$, et finalement $\text{Im}(r) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$.

Correction de l'exercice 10 :

- 1) D'après le théorème du rang, $\text{rg}(g) + \dim(\text{Ker}(g)) = \dim(\mathbb{R}^p) = p$. Ainsi, $\text{rg}(g) = p - \dim(\text{Ker}(g)) \leq p$
- 2) L'inclusion $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$ est évidente. De plus, $\text{rg}(g) \leq p$ et $\text{rg}(g \circ f) = p$ par hypothèse, ainsi $p = \dim(\text{Im}(g \circ f)) \leq \dim(\text{Im}(g)) \leq p$ donc toutes ces inégalités sont des égalités, on en conclut donc que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$.
Ainsi, $\text{Im}(g) = p$ donc $\dim(\text{Ker}(g)) = 0$ selon le théorème du rang, on en déduit que $\text{Ker}(g) = \{0\}$.
- 3) Soit $x \in \mathbb{R}^p$. Alors $g(x) \in \text{Im}(g)$ donc $g(x) \in \text{Im}(g \circ f)$ d'après la question précédente. On en déduit que $g \circ f(g(x)) = g(x)$ car $g \circ f$ est un projecteur.
- 4) Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $g(f(g(x))) = g(x)$ donc $g(f(g(x)) - x) = 0$.
on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $f(g(x)) - x \in \text{Ker}(g)$ donc $f(g(x)) - x = 0$, et ainsi $f(g(x)) = x$. On a montré que $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{R}^p}$.

Correction de l'exercice 11 :

- 1) On a :

$$(a + b) \circ (a - b) = a^2 - a \circ b + b \circ a - b^2 = -a \circ b + b \circ a$$

et

$$(a - b) \circ (a + b) = a^2 + a \circ b - b \circ a - b^2 = a \circ b - b \circ a = -(a + b) \circ (a - b)$$

- 2) Soit $x \in E$, $(a(b(x)) - b(a(x))) = (a - b) \circ (a + b)(x) = -(a + b)(a - b)(x)$ d'après la question précédente donc appartient à $\text{Im}(a - b)$ et à $\text{Im}(a + b)$.
- 3) Réciproquement, soit $y \in \text{Im}(a + b) \cap \text{Im}(a - b)$. Alors il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $y = (a + b)(x_1) = (a - b)(x_2)$.
On a donc $(a - b)(y) = (a - b) \circ (a + b)(x_1) = a(b(x_1)) - b(a(x_1))$ d'une part, et $(a + b)(y) = (a + b) \circ (a - b)(x_2) = b(a(x_2)) - a(b(x_2))$ d'autre part.
En sommant ces deux égalités on obtient :

$$2a(y) = (a \circ b - b \circ a)(x_1 - x_2)$$

Or $a^2 = \text{Id}_E$ donc en composant par a on trouve :

$$\begin{aligned} 2y &= (a^2 \circ b - a \circ b \circ a)(x_1 - x_2) \\ &= (b - a \circ b \circ a)(x_1 - x_2) \\ &= ((b \circ a - a \circ b) \circ a)(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

donc $y = -\frac{1}{2}(a \circ b - b \circ a)(a(x_1 - x_2))$ et ainsi $y \in \text{Im}(a \circ b - b \circ a)$, ce qui prouve l'inclusion réciproque.

Correction de l'exercice 12 :

- 1) s est clairement un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$: $s(\lambda P + Q)(X) = (\lambda P + Q)(1 - X) = \lambda P(1 - X) + Q(1 - X) = \lambda s(P)(X) + s(Q)(X)$ et si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ alors $P(1 - X) = \sum_{k=0}^n a_k (1 - X)^k = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i X^i$ donc $\deg(P(1 - X)) \leq n$.
L'égalité $s^2 = \text{id}$ est tout aussi claire : pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on a $s(s(P))(X) = s(P)(1 - X) = P(1 - (1 - X)) = P(X)$ donc $s(s(P)) = P$.
- 2) Supposons que $P(1 - X) = P(X)$. Alors, $P(\frac{1}{2} + X) = P(1 - (\frac{1}{2} + X)) = P(\frac{1}{2} - X)$. On en déduit que la courbe représentative de P est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$.
Réciproquement, tout polynôme qui vérifie $P(\frac{1}{2} + X) = P(\frac{1}{2} - X)$ vérifie $P(1 - X) = P(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - X) = P(\frac{1}{2} - (\frac{1}{2} - X)) = P(X)$.
- 3)

$$P \in \text{Ker}(s - \text{id}) \text{ssi } P(1 - X) = P(X)$$

ssi la courbe représentative de P est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$

ssi la courbe représentative de $P(X + \frac{1}{2})$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

ssi le polynôme $Q(X) = P\left(X + \frac{1}{2}\right)$ définit une fonction paire

4) Si $Q = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, alors

Q définit une fonction paire ssi $Q(X) = Q(-X)$

$$\text{ssi } \sum_{k=0}^n a_k X^k = \sum_{k=0}^n a_k (-X)^k$$

$$\text{ssi } \sum_{k=0}^n a_k (X^k - (-X)^k) = 0$$

$$\text{ssi } \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n 2a_k X^k = 0$$

$$\text{ssi } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, k \text{ impair}, a_k = 0$$

5) φ est clairement une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ et l'application $\mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X], P(X) \mapsto P(X - \frac{1}{2})$ est sa bijection réciproque.

D'après les questions précédentes on a

$P \in \text{Ker}(s - \text{id})$ ssi $Q(X) = P(X + \frac{1}{2})$ définit une fonction paire

ssi $Q(X) = P(X + \frac{1}{2})$ a tous ses termes de degré impair nuls

$$\text{ssi il existe } (q_0, q_2, \dots, q_{2E(n/2)}) \in \mathbb{R}^{E(n/2)+1} \text{ tel que } P\left(X + \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{E(n/2)} q_{2k} X^{2k}$$

où $E(n/2)$ désigne la partie entière de $n/2$.

Ainsi, $\text{Ker}(s - \text{id})$ est l'image de $F = \text{Vect}(1, X^2, X^4, \dots, X^{2E(n/2)})$ par l'automorphisme de $\varphi^{-1} : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X], P(X) \mapsto P(X - \frac{1}{2})$.

Une base de $\text{Ker}(s - \text{id})$ est donc $(\varphi^{-1}(1), \varphi^{-1}(X^2), \dots, \varphi^{-1}(X^{2E(n/2)}))$, avec pour tout $k \in \llbracket 0, E(n/2) \rrbracket$ on a $\varphi^{-1}(X^{2k}) = (X - \frac{1}{2})^{2k} = \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} (-2)^{i-2k} X^i$

De même, $P \in \text{Ker}(s + \text{id}) \iff P(X) = -P(1 - X) \iff P(\frac{1}{2} + X) = -P(\frac{1}{2} - X)$.

Ainsi, en posant $Q(x) = P(x + \frac{1}{2})$ on trouve que $P \in \text{Ker}(s + \text{id})$ si et seulement si Q est impaire, si et seulement si tous ses coefficients de degré pair sont nuls (exercice).

On en déduit que $\text{Ker}(s + \text{id})$ est l'image de $F = \text{Vect}(X, X^3, \dots, X^{2E(n/2)-1})$ par $\varphi^{-1} : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X], P \mapsto P(X - \frac{1}{2})$. En effet, $P \in \text{Ker}(s + \text{id}) \iff P(X + \frac{1}{2}) \in F \iff \varphi(P) \in F \iff P \in \varphi^{-1}(F)$.

Une base de $\text{Ker}(s + \text{id})$ est donc $(\varphi^{-1}(X), \varphi^{-1}(X^3), \dots, \varphi^{-1}(X^{2E((n-1)/2)+1}))$ avec pour tout $k \in \llbracket 0, E((n-1)/2) \rrbracket$, $\varphi^{-1}(X^{2k+1}) = (X - \frac{1}{2})^{2k+1} = \sum_{i=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} (-2)^{i-2k-1} X^i$.

Correction de l'exercice 13 :

1) Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) &= \frac{1}{2}(s \circ (\lambda f + \mu g) + (\lambda f + \mu g) \circ s) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda(s \circ f - f \circ s)) + \frac{1}{2}(\mu(s \circ g - g \circ s)) \\ &= \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g) \end{aligned}$$

φ est linéaire et est bien à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$ donc c'est un endomorphisme de E .

2) Montrons que $E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$:

Si $x \in \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ alors $s(x) = x$ et $s(x) = -x$ donc $x = -x$ d'où $x = 0$, la somme est donc directe.

Si $x \in E$, alors $x = \underbrace{\frac{1}{2}(x + s(x))}_{\in \text{Ker}(s - \text{Id}_E)} + \underbrace{\frac{1}{2}(x - s(x))}_{\in \text{Ker}(s + \text{Id}_E)}$ donc $x \in \text{Ker}(s - \text{Id}_E) + \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.

On a donc bien $E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$. E est somme directe de sous espaces propres associés aux valeurs propres 1 et -1, donc s est diagonalisable et $\text{Spec}(s) \subset \{-1, 1\}$.

Puisque $s \neq \text{Id}_E$, 1 n'est pas la seule valeur propre de s , et puisque $s \neq -\text{Id}_E$, -1 n'est pas la seule valeur propre de s . On a donc bien $\text{Spec}(s) = \{-1, 1\}$.

3) On a

$$\begin{aligned} f \in \text{Ker}(\varphi) &\iff \frac{1}{2}(s \circ f + f \circ s) = 0 \\ &\iff s \circ f = -f \circ s \end{aligned}$$

Supposons que $f(E_1) \subset E_{-1}$ et $f(E_{-1}) \subset E_1$

Pour tout $x = x_1 + x_{-1} \in E = E_1 \oplus E_{-1}$ on a donc d'une part :

$$s(f(x)) = s(f(x_1)) + s(f(x_{-1})) = -f(x_1) + f(x_{-1})$$

car $f(x_1) \in E_{-1}$, et d'autre part :

$$f(s(x)) = f(x_1 - x_{-1}) = f(x_1) - f(x_{-1})$$

et $f(x_{-1}) \in E_1$. On a donc bien $s(f(x)) = -f(s(x))$ pour tout $x \in E$ donc $f \in \text{Ker}(\varphi)$.

Réciproquement, supposons que $s \circ f = -f \circ s$. Soit $x_1 \in E_1$ et $x_{-1} \in E_{-1}$. Alors $x_1 = s(x_1)$ donc $f(x_1) = f(s(x_1)) = -s(f(x_1))$. Ainsi $f(x_1) \in E_{-1}$ donc $f(E_1) \subset E_{-1}$

De même, $x_{-1} = -s(x_{-1})$ donc $f(x_{-1}) = -f(s(x_{-1})) = s(f(x_{-1}))$ d'où $f(x_{-1}) \in E_1$ donc $f(E_{-1}) \subset E_1$.

4) Par hypothèse, $\varphi(f) = \frac{1}{2}(s \circ f + f \circ s) = \lambda f$.

Si $x \in E_1$ on a donc :

$$\frac{1}{2}s(f(x)) + \frac{1}{2}f(s(x)) = \lambda f(x)$$

donc

$$\frac{1}{2}s(f(x)) + \frac{1}{2}f(x) = \lambda f(x)$$

donc

$$s(f(x)) = (2\lambda - 1)f(x)$$

Si $x \in E_{-1}$ on a :

$$\frac{1}{2}s(f(x)) + \frac{1}{2}f(s(x)) = \lambda f(x)$$

donc

$$\frac{1}{2}s(f(x)) - \frac{1}{2}f(x) = \lambda f(x)$$

donc

$$s(f(x)) = (2\lambda + 1)f(x)$$

5) On reprend les hypothèses et notation de la question précédente. Puisque f est un vecteur propre de φ elle est non nulle. Comme $E = E_1 \oplus E_{-1}$, $f(x)$ est non nul pour un vecteur x appartenant à E_1 ou à E_{-1} .

Si $x \in E_1$ et $f(x) \neq 0$, alors $f(x)$ est un vecteur propre de s associé à la valeur propre $2\lambda - 1$, donc $2\lambda - 1 = 1$ ou $2\lambda - 1 = -1$, donc $\lambda = 1$ ou $\lambda = 0$.

Si $x \in E_{-1}$ et $f(x) \neq 0$, alors $f(x)$ est un vecteur propre de s associé à la valeur propre $2\lambda + 1$ donc $2\lambda + 1 = 1$ ou $2\lambda + 1 = -1$, donc $\lambda = 0$ ou $\lambda = -1$.

Dans tous les cas, on a $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$, donc $\text{Spec}(\varphi) \subset \{-1, 0, 1\}$.

- 6) Un candidat possible serait $P(X) = X(X-1)(X+1) = X^3 - X$, le polynôme dont les racines sont les valeurs propres possibles de φ .

On a pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$:

$$s(f) = \frac{1}{2}(s \circ f - f \circ s)$$

$$\begin{aligned} s^2(f) &= \frac{1}{2} \left(s \circ \left(\frac{1}{2}s \circ f - \frac{1}{2}f \circ s \right) - \left(\frac{1}{2}s \circ f - \frac{1}{2}f \circ s \right) \circ s \right) \\ &= \frac{1}{4}f - \frac{1}{4}s \circ f \circ s - \frac{1}{4}s \circ f \circ s + \frac{1}{4}f \\ &= \frac{1}{2}(f - s \circ f \circ s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^3(f) &= \frac{1}{2} \left(s \circ \left(\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}s \circ f \circ s \right) - \left(\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}s \circ f \circ s \right) \circ s \right) \\ &= \frac{1}{4}s \circ f - \frac{1}{4}f \circ s - \frac{1}{4}f \circ s + \frac{1}{4}s \circ f \\ &= \frac{1}{2}(s \circ f - f \circ s) \\ &= s(f) \end{aligned}$$

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $s^3(f) - s(f) = 0$ donc $s^3 - s = 0$ donc $P(s) = 0$.