Correction de Maths 2E - ESSEC - 2007

I. Modélisation poissonienne

A. Résultats généraux :

I.A.1. S'il y a Y décès survenus en 5 ans, la société doit verser sY euros à ses clients.

I.A.2. Si X_i représente le nombre de mort l'année i, alors $Y = \sum_{i=1}^{5} X_i$. Comme $X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(k)$ on peut considérer que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(5k)$ si les (X_i) sont mutuellement indépendantes (c'est à dire si le nombre de décès est indépendant d'une année à l'autre).

I.A.3. $E(Y) = 5k$ et $V(Y) = 5k$

I.A.4. Posons $\phi : t \mapsto \int_{-\infty}^{t} \dfrac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}$. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}$ est la densité d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, donc ϕ est continue, strictement croissante (car f est strictement positive) et $\lim\limits_{t\to+\infty} \phi(t) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \phi(t) = 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel t_0 tel que $\phi(t_0) = 0,99$. De plus, $\phi(0) = \frac{1}{2} < 0,99$ donc $t_0 > 0$.

I.A.5. Si Y suit la loi $\mathcal{P}(5k)$ on peut considérer que $Y = \sum_{i=1}^{5k} X_i$ où $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suie de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Poisson de paramètre 1. On a donc d'après le théorème central limite admis, pour tout réel x :

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{Y-5k}{\sqrt{5k}} \leq x\right) = \mathbb{P}(Z \leq x)$$

où Z suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Par passage au contraire :

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{Y-5k}{\sqrt{5k}} \geq t_0\right) = \mathbb{P}(Z \geq t_0) = 0,01$$

par définition de t_0, d'où :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(Y - 5k \geq t_0\sqrt{5k}) = 0,01}$$

B. Exemples d'applications

I.B.1. Pour faire face aux indemnisations la société doit détenir plus de fonds qu'elle n'en doit à ses clients. Son revenu annuel est $ks(1+\lambda)$ donc au bout de 5 ans elle détiendra $5ks(1+\lambda)+R$ euros en comptant le fond de réserve R, et elle devra sY euros à ses clients. Pour faire face aux indemnisations il faut donc :

$$5sk(1+\lambda) + R \geq sY$$

I.B.2. On peut exprimer la probabilité que la société de **puisse pas** faire face à toutes les indemnisation par :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(5sk(1+\lambda)+R \leq sY) &= \mathbb{P}[s(Y-5k) \geq R + 5sk\lambda] \\ &= \mathbb{P}\left[Y - 5k \geq \frac{R}{s} + 5k\lambda\right]\end{aligned}$$

Pour que cet probabilité soit voisine de $0,01$ il faut que $\dfrac{R}{s} + 5k\lambda$ soit voisin de $t_0\sqrt{5k}$ d'après la question I.A.5

$$\frac{R}{s} + 5k\lambda = t_0\sqrt{5k} \Longleftrightarrow R = s(t_0\sqrt{5k} - 5k\lambda)$$

Il faut donc une réserve $\boxed{R = s(t_0\sqrt{5k} - 5k\lambda)}$

I.B.3. Pour se dispenser de fond de réserve il faut que l'égalité précédente soit vraie pour $R = 0$. En remplaçant λ par $N\mu$, et en supposant bien sûr $N \neq 0$ on obtient :

$$\begin{aligned} 0 = s(t_0\sqrt{5N\mu} - 5N\mu\lambda) &\iff t_0\sqrt{5\mu}\sqrt{N} = 5N\mu\lambda \\ &\iff \frac{t_0\sqrt{5\mu}}{5\mu\lambda} = \sqrt{N} \\ &\iff N = \frac{t_0^2}{5\mu\lambda^2} \end{aligned}$$

donc il faut avoir $N \geq \left\lfloor \dfrac{t_0^2}{5\mu\lambda^2} \right\rfloor + 1$

II. Médianes

II.1. $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x)$.

II.2.
- Si $m < 0$, $\mathbb{P}(X \leq m) = 0$
- Si $m = 0$, $\mathbb{P}(X \leq m) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$
- Si $m \in]0, 1[$, $\mathbb{P}(X \leq m) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$
- Si $m = 1$, $\mathbb{P}(X \leq m) = \mathbb{P}(X \in \{0, 1\}) = 1$
- Si $m > 1$, $\mathbb{P}(X \leq m) = \mathbb{P}(X \in \{0, 1\}) = 1$

On a donc $\mathcal{M}(X) = [0, 1]$

II.3. Comme X est une variable à densité on a $\mathbb{P}(X < m) = \mathbb{P}(X \leq m)$ pour tout réel m, donc $m \in \mathcal{M}(X) \iff F_X(m) \leq \frac{1}{2} \leq F_X(m) \iff F_X(m) = \frac{1}{2}$.
De plus, pour une loi exponentielle, F_X est nulle sur $] - \infty; 0]$ donc $m \in \mathcal{M}(X) \iff m = 0$ et $F_X(m) = \frac{1}{2}$
Comme $F_X(m) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha x}$ on a : $m \in \mathcal{M}(X) \iff 1 - \mathrm{e}^{-\alpha m} = \frac{1}{2} \iff m = \frac{\ln(2)}{\alpha}$ donc $\boxed{\mathcal{M}(X) = \left\{ \dfrac{\ln(2)}{\alpha} \right\}}$.

II.4. Si $a, b \in \mathcal{M}(X)$ avec $a \leq b$ et si $c \in [a, b]$, alors par croissance de la fonction de répartition :

$$\frac{1}{2} \leq \mathbb{P}(X \leq a) \leq \mathbb{P}(X \leq c)$$

et

$$\mathbb{P}(X < c) \leq \mathbb{P}(X < b) \leq \frac{1}{2}$$

donc $\mathbb{P}(X < c) \leq \frac{1}{2} \leq \mathbb{P}(X \leq c)$ donc $c \in \mathcal{M}(X)$.

II.5. Soit F la fonction de répartition de X, on a $F' = f > 0$ donc F est strictement croissante et continue, elle établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0, 1[$. Il existe donc un unique réel $m \in]0, 1[$ tel que $F(m) = \frac{1}{2}$ et on a vu à la question II.3 que pour une variable à densité la médiane était nécessairement unique.
Si X suit une loi normale centrée réduite on a par parité de la fonction de densité : $\mathbb{P}(X \leq 0) = \frac{1}{2}$ donc $\mathcal{M}(X) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

II.6. Il est faut de dire que $E(X) \in \mathcal{M}(X)$, par exemple avec une loi exponentielle de paramètre α on a $E(X) = \frac{1}{\alpha}$ et $\mathcal{M}(X) = \{\frac{\ln(2)}{\alpha}\}$. Comme $\ln(2) \neq 1$ on a $E(X) \neq \dfrac{\ln(2)}{\alpha}$ donc $E(X) \notin \mathcal{M}(X)$.

III. Médiane d'une variable poissonienne

A. Préliminaires d'analyse

III.A.1. On pose $f(x) = \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{4}$. f est dérivable sur $[0, 1]$ comme composée et somme de fonctions dérivables et $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + \frac{x}{2} = \dfrac{2 - 2 - 2x + x(1 + x)}{2(1 + x)} = \dfrac{x(x - 1)}{2(1 + x)}$.
Or pour tout $x \in [0, 1]$, $x(x-1) \leq 0$ et $2(1+x) > 0$ donc f' est négative sur $[0, 1]$ et f est décroissante sur cet intervalle. Comme $f(0) = 0$ on en conclut que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \leq 0$ d'où le résultat.

III.A.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$
\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\exp(-(n+1))\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\exp(-n)\frac{n^n}{n!}} \\
&= \frac{\exp(-1)}{n+1} \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \times (n+1) \\
&= \exp(-1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \exp(-1)\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\boxed{= \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right)}
\end{aligned}
$$

III.A.3. On a donc $\ln(u_n)-\ln(u_{n+1}) = \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = -\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = -n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+1$ d'après la question précédente.
De plus, d'après la question III.A.1 on a :

$$
-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq -n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{4n^2}\right) \geq -1+\frac{1}{4n}
$$

d'où

$$
\ln(u_n)-\ln(u_{n+1} \geq \frac{1}{4n}
$$

Or la série de terme général $\frac{1}{4n}$ diverge (série harmonique à un facteur près) donc $\sum(\ln(u_n)-\ln(u_{n+1}))$ diverge par théorème de comparaison pour les séries positives.

III.A.4. Comme $\sum_{k=1}^{n-1}(\ln(u_k)-\ln(u_{k+1})) = \ln(u_1)-\ln(u_n)$ par téléscopage on a :

$$
\ln(u_n) = \ln(u_1) - \sum_{k=1}^{n-1}(\ln(u_k)-\ln(u_{k+1}))
$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1}(\ln(u_k)-\ln(u_{k+1})) = +\infty$ d'après la question précédente. On en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = -\infty$ donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ en passant l'exponentielle.

B. Probabilités

III.B.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est une fonction poslynôme de degré n donc est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$
\begin{aligned}
\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad P_n'(\lambda) &= -\exp(-\lambda)\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!} + \exp(-\lambda)\sum_{k=1}^{n}\frac{k\lambda^{k-1}}{k!} \\
&= \exp(-\lambda)\left[-\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right] \\
&= \exp(-\lambda)\left[-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!} - \frac{\lambda^n}{n!} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}\right] \\
&= -\exp(-\lambda)\frac{\lambda^n}{n!}
\end{aligned}
$$

puis,

$$
\begin{aligned}
\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad P_n''(\lambda) &= \exp(-\lambda)\frac{\lambda^n}{n!} - \exp(-\lambda)\frac{n\lambda^{n-1}}{n!} \\
&= \exp(-\lambda)\frac{\lambda^{n-1}}{n!}(\lambda-n)
\end{aligned}
$$

III.B.2. On a :

$$P_n(n-1)+P_n'(n-1)=\exp(-(n-1))\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-1)^k}{k!}-\exp(-(n-1))\frac{(n-1)^n}{n!}$$

$$\exp(-(n-1))\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-1)^k}{k!}-\frac{(n-1)^n}{n!}\right]$$

$$=\exp(-(n-1))\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)^k}{k!}$$

$$=P_{n-1}(n-1)$$

(i) En appliquant la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 2 à la fonction Q entre $n-1$ et n on obtient :

$$Q(n)=Q(n-1)+Q'(n-1)\times(n-(n-1))+\int_{n-1}^{n}\frac{(n-t)^1}{1!}Q''(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$\boxed{Q(n)=Q(n-1)+Q'(n-1)+\int_{n-1}^{n}(n-t)Q''(t)\,\mathrm{d}t}$$

(ii) Pour tout $n\geq 2$, en appliquant à P_n le résultat précédent on obtient

$$P_n(n)=P_n(n-1)+P_n'(n-1)+\int_{n-1}^{n}(n-t)P_n''(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=P_{n-1}(n-1)+\int_{n-1}^{n}(n-t)P_n''(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{d'après la question III.B.2}$$

d'où :

$$P_n(n)-P_{n-1}(n-1)=\int_{n-1}^{n}(n-t)P_n''(t)\,\mathrm{d}t$$

Or pour tout $t\in[n-1,n]$ on a $n-t\geq 0$ et $P_n''(t)=\underbrace{\exp(-t)\frac{t^{n-1}}{(n!}}_{\geq 0}\underbrace{(t-n)}_{\leq 0}$ donc $P_n''(t)\leq 0$. L'intégrale est donc négative donc $P_n(n)-P_{n-1}(n-1)\leq 0$. On en conclut que la suite $(P_n(n))_{n\geq 1}$ est décroissante.

(iii) De façon analogue :

$$P_{n-1}(n)=P_{n-1}(n-1)+P_{n-1}'(n-1)+\int_{n-1}^{n}(n-t)P_{n-1}''(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=P_{n-2}(n-1)+\int_{n-1}^{n}(n-t)P_{n-1}''(t)\,\mathrm{d}t$$

avec cette fois-ci pour tout $t\in[n-1,n]$, $P_{n-1}''(t)=\underbrace{\exp(-t)\frac{t^{n-2}}{(n-1)!}}_{\geq 0}\underbrace{(t-(n-1))}_{\geq 0}$ d'où

$$P_{n-1}(n)-P_{n-2}(n-1)\geq 0$$

donc la suite $(P_{n-1}(n))_{n\geq 1}$ est croissante.

III.B.3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} P_n(n) - P_{n-1}(n) &= \exp(-n)\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} - \exp(-n)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^k}{k!} \\ &= \exp(-n)\frac{n^n}{n!} \\ &= u_n \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(P_n(n) - P_{n-1}(n)) = 0$, et comme $(P_n(n))$ est décroissante et $(P_{n-1}(n))$ est croissante on en conclut finalement qu'elles sont adjacentes.

III.B.4. On a :

$$\mathbb{P}\left(\frac{Z-n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = \mathbb{P}(Z - n \leq 0) = \mathbb{P}(Z \leq n) = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(Z = k) = P_n(n)$$

D'après le théorème central limite on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\frac{Z-n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = P(T \leq 0)$ où T suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\frac{Z-n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2}$.

On en conclut grâce à l'égalité précédente que $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(n) = \frac{1}{2}$.

III.B.5. Comme les suites $(P_n(n))$ et $(P_{n-1}(n))$ sont adjacentes elles sont toutes deux convergentes et ont la même limite donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_{n-1}(n) = \frac{1}{2}$.

III.B.6. $(P_n(n))$ est décroissante et converge vers $\frac{1}{2}$, $(P_{n-1}(n))$ est croissante et converge vers $\frac{1}{2}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n-1}(n) \leq \frac{1}{2} \leq P_n(n)$

III.B.7. On a $\mathbb{P}_{n-1}(n) = \exp(-n)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \leq n-1) = \mathbb{P}(Z < n)$ donc

$$\mathbb{P}(Z < n) = \mathbb{P}(Z \leq n-1) \leq \frac{1}{2} \leq \mathbb{P}(Z \leq n)$$

donc $n \in \mathcal{M}(Z)$.

III.B.8. Ce qu'on a montré dans cette partie est que pour une loi de Poisson à paramètre entier n on a une médiane unique et elle est égale à l'espérance n.

En choisissant $\lambda = 0$ (c'est à dire aucun taux de sécurité prélevé sur le dos des clients !), la probabilité d'avoir un nombre de prime à payer qui excède les recettes de la société serait $\frac{1}{2}$.

IV. Inégalité maximale de Levy

IV.1. $S_J - Si = \sum_{j=i+1}^{J} Y_j = \sum_{j=i+1}^{J}(X_j - k) = \sum_{j=i+1}^{J} X_j - (J-i)k$.

Pour tout réel m on a $\mathbb{P}(S_J - S_i \leq m) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=i+1}^{J} X_j \leq m + (J-i)k\right)$. Or $\sum_{j=i+1}^{J} X_j$ suit une loi de Poisson de paramètre $(J-i)k$ donc $(J-i)k$ est l'unique médiane de $\sum_{j=i+1}^{J} X_j$ d'après la question III.B.8. Pour $m = 0$ on a donc :

$$\mathbb{P}(S_J - S_i \leq 0) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=i+1}^{J} X_j \leq (J-i)k\right) \geq \frac{1}{2}$$

et

$$\mathbb{P}(S_J - S_i < 0) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=i+1}^{J} X_j < (J-i)k\right) \leq \frac{1}{2}$$

donc 0 est bien une médiane de $S_J - S_i$.

IV.2.
- Montrons que $\bigcup_{1\leq i\leq J}\Omega_i = \Omega$.

- S'il existe $j \in [\![1, J]\!]$ tel que $S_j \leq x$, posons i_0 l'entier défini par $i_0 = \max\{i \in [\![1, J]\!], \max_{1 \leq j \leq i} S_j \leq x\}$. Si $i_0 = J$ alors Ω_0 est réalisé, sinon $i_0 < J$ donc $S_{i_0+1} > x$ (sous peine de contredire la maximalité de i_0) donc Ω_{i_0+1} est réalisé.
- Si $S_j > x$ pour tout $j \in [\![1, J]\!]$ alors Ω_1 est réalisé.

donc on a bien $\bigcup_{1 \leq i \leq J} \Omega_i = \Omega$.

- Montrons que si $i_1 \neq i_2$ alors $\Omega_{i_1} \cap \Omega_{i_2} = \varnothing$.

  Supposons, quitte à changer l'ordre, que $i_1 < i_2$ (donc nécessairement $i_2 \geq 2$)
  - Si $i_1 = 0$ et si Ω_{i_1} est réalisé alors $\forall j \in [\![1, J]\!]$, $S_j \leq x$ donc Ω_{i_2} n'est pas réalisé.
  - Si $i_1 > 0$ et si Ω_{i_1} est réalisé alors on a $S_{i_1} > x$ donc on a $\max_{1 \leq j < i_2} S_j \geq S_{i_1} > x$ donc Ω_{i_2} n'est pas réalisé.

  Ainsi $\omega_{i_1} \cap \Omega_{i_2} = \varnothing$.

$\boxed{\text{On a montré que } \Omega_0, ..., \Omega_J \text{ constitue un système complet d'événement}}$

IV.3. Si $\{S_J - S_i \geq 0\}$ est réalisé et que Ω_i est réalisé avec $i \geq 1$, alors $S_i > x$ donc $S_J \geq S_i > x$ donc $\{S_j > x\} \cap \Omega_i$ est réalisé.

IV.4. On en déduit que :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_J > x) &= \sum_{i=0}^{J} \mathbb{P}(S_J > x) \cap \Omega_i && \text{d'après la formule des probabilités totales} \\
&= \sum_{i=1}^{J} \mathbb{P}(S_J > x) \cap \Omega_i && \text{car } \{S_J > x\} \cap \Omega_0 = \varnothing \\
&\geq \sum_{i=1}^{J} \mathbb{P}(\{S_J - S_i \geq 0\} \cap \Omega_i) && \text{d'après la question précédente}
\end{aligned}
$$

IV.5. $(S_J - S_i \geq 0)$ ne dépend que de $X_{i+1}, X_{i+2}, .., X_J$ et Ω_i ne dépend que de $X_1, X_2, ..., X_i$ donc $(S_J - S_i \geq 0)$ et Ω_i sont indépendants.

IV.6. On en déduit que :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_J > x) &\geq \sum_{i=1}^{J} \mathbb{P}(\{S_J - S_i \geq 0\} \cap \Omega_i) && \text{d'après IV.4} \\
&\geq \sum_{i=1}^{J} \mathbb{P}(S_J - S_i \geq 0)\mathbb{P}(\Omega_i) && \text{d'après IV.5}
\end{aligned}
$$

Or $\mathbb{P}(S_J - S_i \geq 0) \geq \dfrac{1}{2}$ d'après la question IV.1 donc

$$
\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{J} \mathbb{P}(\Omega_i) \\
&\geq \frac{1}{2} \mathbb{P}(\overline{\Omega_0}) && \text{car } (\Omega_0, \Omega_1, ..., \Omega_J) \text{ est un système complet d'événements} \\
&\geq \frac{1}{2} \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq j \leq J} S_j > x\right)
\end{aligned}
$$

d'où le résultat.

IV.7. Si on suppose que k est constant sur les 4 années d'exercice, on a d'après la question IV.6 :

$$\mathbb{P}(\max_{1 \leq j \leq 14} S_j > 14) \leq 2\mathbb{P}(S_J > 14)$$

Or on a $2\mathbb{P}(S_J > 14) = 2\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{4}(X_i - 10) > 14\right) = 2\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{4} X_i - 40}{\sqrt{40}} > \frac{14}{\sqrt{40}}\right) > 2\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{4} X_i - 40}{\sqrt{40}} > 2\right)$

Car $6 < \sqrt{40} < 7$ donc $\dfrac{14}{\sqrt{40}} > \dfrac{14}{7} = 2$.

En assimilant $\dfrac{\sum_{i=1}^{4} X_i - 40}{\sqrt{40}}$ à une variable suivant une loi normale centrée réduite, on devrait donc avoir d'après l'énoncé :

$$\mathbb{P}(\max_{1\leq j\leq 14} S_j > 14) \leq 2\mathbb{P}(S_J > 14) \leq 2 \times 0,025 = 0,05$$

La probabilité d'avoir $\max_{1\leq j\leq 14} S_j > 14 = 15$ est donc inférieure à 5% sous l'hypothèse que k est constant d'année en année. Puisque cet valeur est observée, il y a donc une assez forte chance pour que k ne soit ait augmenté au cours des 4 années d'exercice.