⋆

Exercice 1 — Voir correction

On considère trois variables aléatoires mutuellement indépendantes U, V, W suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs α, β, γ. On pose $X = U + V$ et $Y = V + W$

1) Montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre $\alpha + \beta$ (classique).
2) Calculer $\text{Cov}(X, Y)$

⋆ ⋆

Exercice 2 — Voir correction

Soit N un entier naturel non nul. On lance N fois une pièce équilibrée et on note X le nombre de pile et Y le nombre de faces obtenus.

1) Calculer $\text{Cov}(X, Y)$ et $\rho(X, Y)$, où $\rho(X, Y)$ désigne le coefficient de corrélation entre X et Y. X et Y sont-elles indépendantes ?
2) On suppose dans cette question que N suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
   a) Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$
   b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3) On suppose dans cette question que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
   a) Déterminer les lois de X et Y.
   b) Déterminer $\text{Cov}(X, Y)$
   c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 3 — Voir correction

On dit qu'une variable aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ est **sans mémoire** si pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(X > n + p \mid X > n) = \mathbb{P}(X > p)$.
Montrer que X est sans mémoire si et seulement si X suit une loi géométrique.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 4 — Voir correction

On considère une urne contenant des boules jaunes, noires et bleues en proportions p, q et r respectivement. On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule avec remise jusqu'à obtention pour la deuxième fois d'une boule bleue. On note X le nombre de tirage effectués et Y le nombre de boules jaunes obtenus lors de cette série de tirages.

1) Montrer que la probabilité de n'obtenir qu'au plus une boule bleue au cours d'une infinité de tirage est nulle. Qu'en déduit-on ?
   Préciser la loi de X.
2) Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel a vérifiant $|a| < 1$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n}{n} a^k = \frac{1}{(1-a)^{n+1}}$
3) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y), en déduire la loi de Y.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 5 — Voir correction

Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ des nombres réels tels que $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$ et $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires indépendantes telles que $\forall k \in [\![1,]\!]$, $\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = \dfrac{1}{2}$. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k X_k$.

Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $c > 0$, on a $\mathbb{P}(|S| \geq c) \leq 2\,\mathrm{e}^{-\frac{c^2}{2}}$

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \leq \mathrm{e}^{x^2/2}$. *Indication :* on pourra utilise le fait que $\mathrm{e}^u = \sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{u^i}{i!}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.
2) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, e^{tS} admet une espérance et que $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{tS}] \leq \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$
3) Montrer que pour tout $c > 0$, on a $\mathbb{P}(S \geq c) \leq \mathrm{e}^{-\frac{c^2}{2}}$.
4) En déduire que $\mathbb{P}(|S| \geq c) \leq 2\,\mathrm{e}^{-\frac{c^2}{2}}$.

★ ★ ★

Exercice 6 — Voir correction

Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = \dfrac{1}{2}$.

1) Calculer l'espérance $\mathbb{E}[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n)^2]$ en fonction de n
2) Soit $a \in]0\,;1[$ fixé.
   a) Montrer l'inégalité $\mathbb{P}(|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n| \geq an) \leq \dfrac{1}{a^2 n}$
   b) Montrer que
   $$\mathbb{P}(|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n| \geq an) = \frac{1}{2^n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{l}\mathbf{1}_{\{|2\ell-n|\geq an\}}$$
   où $\mathbf{1}_{\{|2\ell-n|\geq an\}} = 1$ si ℓ satisfait $|2\ell - n| \geq an$ et 0 sinon.
   c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\mathbf{1}_{\{|2\ell-n|\geq an\}} = 0$

★ ★ ★

Exercice 7 — Voir correction

Deux problèmes de collectionneurs (d'après Y. Velenik , S. Sardy — « Petite collection d'informations utiles pour collectionneur compulsif »— *Images des Mathématiques, CNRS, 2020*)

1) **Problème 1 :** Dans chaque paquet de cordon bleu, on trouve un magnet représentant un département français (répartis uniformément au hasard). Un collectionneur achète chaque semaine un paquet de cordon bleu. Pour tout entier $k \geq 1$, on note X_k le nombre de semaines écoulées au moment où le nombre de départements distincts dans sa collections atteint k. Ainsi, $X_1 = 1$, et X_{101} est le nombre de semaines écoulées au moment où il termine sa collection des 101 départements.
   a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi suivie par $X_{k+1} - X_k$?
   b) Déterminer $\mathbb{E}[X_{101}]$. Interpréter ce résultat.
2) **Problème 2 :** Des pochettes de cartes Pokémon contiennent m cartes distinctes. Notons n le nombre total de Pokémon distincts à collectionner. Chaque Pokémon porte un numéro entre 1 et n.

   Un collectionneur achète un paquet par semaine, on note T_k le rang de la première pochette contenant le Pokémon n°k, et on note N le nombre de semaines nécessaires pour compléter la collection.
   a) Expliquer pourquoi $N = \max(T_1, T_2, \ldots, T_n)$.
   b) On rappelle la formule du crible pour une famille $(A_1,\ldots, A_n)$ d'événements :
   $$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}\mathbb{P}\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)$$
   Montrer que pour tout entier $\ell \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(N > \ell) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}\left(\frac{C_{n-k}^m}{C_n^m}\right)^{\ell}$
   c) Montrer que pour une variable aléatoire X à valeur dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance, $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X > \ell)$
   d) En déduire que $\mathbb{E}[N] = C_n^m \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{C_n^k}{C_n^m - C_{n-k}^m}$

⋆⋆⋆
Exercice 8 **Voir correction**

Soit I un intervalle. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **absolument monotone** sur I si

$$f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } I \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(n)}(x) \geq 0.$$

1) Soit f la fonction classe C^∞ sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ définie par $f(x) = \tan(x)$
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$f^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}$$
   b) En déduire que f est absolument monotone sur I.

On revient maintenant au cas général. Soit $a > 0$ et f une fonction de $I = [0, a[$ dans $\mathbb{R}$ absolument monotone sur $[0, a[$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On pose, pour $x \in I$,
$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

2) a) Montrer que, pour tout $x > 0$,
$$\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} = \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)du.$$
   b) En déduire que la fonction $x \mapsto \frac{R_n(x)}{x^{n+1}}$ est croissante sur $]0, a[$.
   c) Déduire des deux questions précédentes que si $0 < x < y < a$, alors
$$0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y).$$
   d) En déduire que pour tout $x \in [0, a[$,
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

3) On revient au cas où $f = \tan$. Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,
$$\tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

⋆⋆
Exercice 9 **Voir correction**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé. À toute fonction f continue sur $\mathbb{R}_+$, on associe, sous réserve d'existence, la fonction $T_n(f)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$\forall x > 0, \quad T_n(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-ntx}dt$$

1) a) Soit $f_a : t \mapsto e^{-at}$, où $a \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout réel $a > 0$, la fonction $T_n(f_a)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Expliciter son expression.
   b) Soit $f_k : t \mapsto t^k$, où $k \in \mathbb{N}$. Pour quelles valeurs de l'entier k la fonction $T_n(f_k)$ est-elle définie ? Dans ces cas, l'expliciter.
2) On suppose, dans cette question, que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
   a) Montrer que la fonction $T_n(f)$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b) Déterminer
$$\lim_{x \to +\infty} T_n(f)(x).$$
3) On suppose, dans cette question, que la fonction f est bornée, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et que sa dérivée f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que l'on a :
$$\lim_{x \to +\infty} (xT_n(f)(x)) = \frac{f(0)}{n}$$

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) $U(\Omega) = V(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(U=i, V=k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(U=i)\mathbb{P}(V=k-i) && \text{car } U \text{ et } V \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathrm{e}^{-\alpha}\,\frac{\alpha^i}{i!}\,\mathrm{e}^{-\beta}\,\frac{\beta^{k-i}}{(k-i)!} \\
&= \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!\alpha^i\beta^{k-i}}{k!i!(k-i)!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \alpha^i \beta^{k-i} \\
&= \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)}\,\frac{(\alpha+\beta)^k}{k!} && \text{d'après la formule du binôme de Newton}
\end{aligned}$$

donc X suit bien une loi de Poisson de paramètre $\alpha+\beta$.
De même, Y suit une loi de Poisson de paramètre $\beta+\gamma$.

2) $\mathrm{Cov}(U+V, V+W) = \mathrm{Cov}(U,V) + \mathrm{Cov}(U,W) + \mathrm{Cov}(V,V) + \mathrm{Cov}(V,W) = \mathrm{Cov}(V,V) = V(V) = \beta$ car U,V et W sont indépendantes et car V suit une loi de Poisson de paramètre β.

Correction de l'exercice 2 :

1) X suit une loi binomiale de paramètres N et $p = \dfrac{1}{2}$ donc $V(x) = Np(1-p) = \dfrac{N}{4}$, et on a $Y = N - X$ donc $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X, N-X) = \mathrm{Cov}(X,N) - \mathrm{Cov}(X,X) = 0 - V(X) = -\dfrac{N}{4}$
Y suit la même loi que X donc, $V(Y) = V(X) = \dfrac{N}{4}$. Ainsi, $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \dfrac{-N/4}{N/4} = -1$.
X et Y ne sont pas indépendantes, si elles l'étaient on aurait $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, or $-\dfrac{N}{4} \neq 0$.

2) a) En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(N=n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n) \times \mathbb{P}(X=0|N=n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2^n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

b) On a $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(Y=0) = \dfrac{1}{3}$ par symétrie du problème, pourtant $\mathbb{P}(X=0, Y=0) = 0$ car $N \geq 1$ donc on lance au moins une fois la pièce. Ainsi, $\mathbb{P}(X=0, Y=0) \neq \mathbb{P}(X=0) \times \mathbb{P}(Y=0)$.

3) a) En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(N = n)_{n\in\mathbb{N}}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) \times \mathbb{P}(X = k|N = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{k} \frac{1}{2^k} \times \frac{1}{2^{n-k}} \\
&= \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k! 2^k} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)! 2^{n-k}} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda/2)^k}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda/2)^j}{j!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda/2)^k}{k!} \mathrm{e}^{\lambda/2} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda/2} \frac{(\lambda/2)^k}{k!}
\end{aligned}$$

donc X suit une loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\lambda}{2}$. De même, Y suit une loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\lambda}{2}$.

b) X et Y suivent des lois de Poisson donc admettent un moment d'ordre 2, donc d'après la formule de Koenig-Huygens : $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XY] - \dfrac{\lambda^2}{4}$.

De plus,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} ij \mathbb{P}(X = i, Y = j) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} ij \mathbb{P}(X = i, N = i + j) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} ij \mathbb{P}(N = i + j) \times \mathbb{P}(X = i|N = i + j) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} ij\, \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} \binom{i+j}{i} \frac{1}{2^{i+j}} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i\lambda^i}{2^i i!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j\lambda^j}{2^j j!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i\lambda^i}{2^i i!} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{2^j (j-1)!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i\lambda^i}{2^i i!} \frac{\lambda}{2} \sum_{j'=0}^{+\infty} \frac{(\lambda/2)^{j'}}{j'!} && \text{en posant } j' = j - 1 \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda/2} \frac{\lambda}{2} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i\lambda^i}{2^i i!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \times \mathrm{e}^{\lambda/2} \times \mathrm{e}^{\lambda/2} \times \frac{\lambda}{2} \times \frac{\lambda}{2} \\
&= \frac{\lambda^2}{4}
\end{aligned}$$

donc finalement $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

c) Pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ donnés, on a d'une part :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=i, Y=j) &= \mathbb{P}(X=i, N=i+j)\\ &= \mathbb{P}(N=i+j) \times \mathbb{P}(X=i|N=i+j)\\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}\binom{i+j}{i}\frac{1}{2^{i+j}}\\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{2^{i+j}i!j!}\end{aligned}$$

et d'autre part : $\mathbb{P}(X=i)\times\mathbb{P}(Y=j) = \mathrm{e}^{-\lambda/2}\frac{\lambda^i}{2^i i!}\times \mathrm{e}^{-\lambda/2}\frac{\lambda^j}{2^j j!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{2^{i+j}i!j!}$.

On a donc $\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j)$ et ce quel que soient $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$, donc X et Y sont indépendantes.

Correction de l'exercice 3 : Supposons d'abord que X suit une loi géométrique de paramètre $q \in]0\,;1[$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X>k) &= \sum_{i=k+1}^{+\infty} q(1-q)^{i-1}\\ &= q(1-q)^k \sum_{i=k+1}^{+\infty}(1-q)^{i-k-1}\\ &= q(1-q)^k\sum_{i=0}^{+\infty}(1-q)^i\\ &= q(1-q)^k \times \frac{1}{1-(1-q)}\\ &= (1-q)^k\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X>n+p|X>n) &= \frac{\mathbb{P}(X>n+p \cap X>n)}{\mathbb{P}(X>n)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(X>n+p)}{\mathbb{P}(X>n)} && \text{car } (X>n+p)\subset(X>n)\\ &= \frac{(1-q)^{n+p}}{(1-q)^n}\\ &= (1-q)^p\\ &= \mathbb{P}(X>p)\end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que X est sans mémoire. Posons $q = 1 - \mathbb{P}(X>1)$ et montrons que X suit une loi géométrique de paramètre q.

Pour tout entier n, on a $\mathbb{P}(X>n+1|X>n) = \mathbb{P}(X>1) = 1-q$, donc $\mathbb{P}(X>n+1) = \mathbb{P}(X>n+1\cap X>n) = \mathbb{P}(X>n)\times\mathbb{P}(X>n+1|X>n) = \mathbb{P}(X>n)\times(1-q)$. La suite $(\mathbb{P}(X>n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $(1-q)$, ce qui prouve que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X>n) = (1-q)^n$.

On en déduit immédiatement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(X>n-1) - \mathbb{P}(X>n) = (1-q)^{n-1} - (1-q)^n = (1-q)^{n-1}(1-(1-q)) = q(1-q)^{n-1}$, donc X suit une loi géométrique de paramètre q.

Correction de l'exercice 4 :

1) La suite d'événements A_n : « au cours des n premiers tirages, au plus une boule bleue a été obtenue »est une suite décroissante d'événements. Le théorème de la limite monotone assure donc que $\mathbb{P}\left(\bigcap A_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n)$.

   Or pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_n) = nr(1-r)^{n-1} + (1-r)^n$ (c'est la probabilité de $(X\leq 1)$ lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,r)$).

   Or, $\lim_{n\to+\infty}(nr(1-r)^{n-1} + (1-r)^n = 0$ par croissance comparée car $|1-r|<1$, donc finalement $\mathbb{P}\left(\bigcap A_n\right) = 0$. La probabilité de jamais obtenir une deuxième boule bleue est donc nulle, on en déduit que les variables aléatoires X et Y sont bien définies.

X est à valeurs dans $[\![2,+\infty[\![$ et pour tout $k\in[\![2\,;+\infty[$,

$$\mathbb{P}(X=k)=\underbrace{\binom{k-1}{1}r(1-r)^{k-2}}_{\substack{\text{probabilité de tirer exactement une boule bleue}\\ \text{lors des } k-1 \text{ premiers tirages}}}\times\underbrace{r}_{\substack{\text{probabilité de tirer une boule bleue}\\ \text{lors du } k\text{-ème tirage}}}=(k-1)r^2(1-r)^{k-1}$$

2) Soit a un réel vérifiant $|a|<1$. Notons d'abord que $k^2\times\binom{n+k}{n}a^k=k^2\times\dfrac{(n+k)\times(n+k-1)\times\cdots\times(k+1)}{k!}a^k\underset{k\to+\infty}{\sim}\dfrac{k^{n+2}a^k}{k!}$
0 donc $\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{n}a^k$ converge d'après le critère de Riemann.
Pour $n=0$ on a $\sum_{k=0}^{+\infty}a^k=\dfrac{1}{1-a}$ (série géométrique), donc $\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k+0}{0}a^k=\dfrac{1}{(1-a)^{0+1}}$, la propriété est donc vraie pour $n=0$.
Supposons qu'elle soit vraie pour un entier n quelconque. On a

$$\begin{aligned}(1-a)\sum_{k=0}^{p}\binom{k+n+1}{n+1}a^k&=\sum_{k=0}^{p}\binom{k+n+1}{n+1}a^k-\sum_{k=0}^{p}\binom{k+n+1}{n+1}a^{k+1}\\&=\sum_{k=0}^{p}\binom{k+n+1}{n+1}a^k-\sum_{k=1}^{p+1}\binom{k+n}{n+1}a^k\\&=\binom{n+1}{n+1}a^0-\binom{n+p+1}{n+1}a^{p+1}+\sum_{k=1}^{p}\left(\binom{k+n+1}{n+1}-\binom{k+n}{n+1}\right)a^k\\&=1-\binom{n+p+1}{n+1}a^{p+1}+\sum_{k=1}^{p}\binom{k+n}{n}a^k&&\text{d'après la formule de Pas}\end{aligned}$$

On a $\binom{n+p+1}{n+1}a^{p+1}=\dfrac{(n+p+1)(n+p)\cdots(p+1)}{(n+1)!}a^{p+1}\sim\dfrac{p^na^p}{(n+1)!}\xrightarrow[p\to+\infty]{}0$ donc en passant à la limite lorsque $p\to+\infty$ dans l'égalité précédente on obtient :

$$\begin{aligned}(1-a)\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k+n+1}{n+1}a^k&=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\binom{k+n}{n}a^k\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k+n}{n}a^k\\&=\frac{1}{(1-a)^{n+1}}&&\text{par hypothèse de récurrence}\end{aligned}$$

donc l'égalité est vraie au rang $n+1$. On a donc prouvé par récurrence que pour tout entier n, $\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k+n}{n}a^k=\dfrac{1}{(1-a)^{n+1}}$.

3) $X(\Omega)=[\![2\,;+\infty[\![$ et $Y(\Omega)=\mathbb{N}$
Si $(X=i)$ est réalisé, alors on a effectué i tirages dont deux sont des boules bleues, et les $i-2$ autres sont soit jaunes soit noires en proportion respective $\dfrac{p}{p+q}$ et $\dfrac{q}{p+q}$. Le nombre de boules jaunes obtenus suit sous cette condition une loi binomiale de paramètres $i-2$ et $\dfrac{p}{p+q}=\dfrac{p}{1-r}$.
Si $i-2<j$ on a $\mathbb{P}(X=i,Y=j)=0$.
Pour tout $i\in[\![2\,;+\infty[\![$ et tout $j\in\mathbb{N}$ vérifiant $j\leq i-2$, on a donc donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=i,Y=j)&=\mathbb{P}(X=i)\times\mathbb{P}(Y=j|X=i)\\&=(i-1)r^2(1-r)^{i-2}\times\binom{i-2}{j}\frac{p^j}{(1-r)^j}\times\frac{q^{i-2-j}}{(1-r)^{i-2-j}}\\&=(i-1)r^2\binom{i-2}{j}p^jq^{i-2-j}\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=j) &= \sum_{i=j+2}^{+\infty} \mathbb{P}(X=i, Y=j) \\
&= \sum_{i=j+2}^{+\infty} (i-1) r^2 \binom{i-2}{j} p^j q^{i-2-j} \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} r^2 (i+j+1) \binom{i+j}{j} p^j q^i \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} r^2 (j+1) \binom{i+j+1}{j+1} p^j q^i && \text{en appliquant l'égalité } n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k} \\
&= r^2 (j+1) p^j \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{i+j+1}{j+1} q^i \\
&= \frac{(j+1) r^2 p^j}{(1-q)^{j+2}} && \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= (j+1) \left(\frac{r}{1-q}\right)^2 \left(\frac{p}{1-q}\right)^j
\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=j) = 1$ pour s'assurer qu'on ne s'est pas trompé en appliquant la formule donnant la somme d'une série géométrique dérivée seconde :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{+\infty} (j+1) \left(\frac{p}{1-q}\right)^j &= \frac{1}{\left(1 - \frac{p}{1-q}\right)^2} \\
&= \frac{(1-q)^2}{(1-q-p)^2} \\
&= \frac{(1-q)^2}{r^2}
\end{aligned}$$

d'où $\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=j) = 1$

Correction de l'exercice 5 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x)^k}{k!}\right) = \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{k!}$

   Si k est pair, $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{x^k + (-x)^k}{k!} = \dfrac{x^k}{k!}$ et si k est impair, $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{x^k + (-x)^k}{k!} = 0$.

   On réécrit la somme en ne gardant que les termes pairs : $\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!}$.

   On cherche à comparer cette somme avec $\mathrm{e}^{x^2/2} = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(x^2/2)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^{2i}}{2^i i!}$.

   Pour $i \geq 1$ on a $(2i)! = 2i \times (2i-1) \times \cdots \times (i+1) \times i!$ avec pour tout $k \in [\![1, i]\!]$, $i + k \geq 2$ donc par produit $(2i)! \geq 2^i i!$. Pour $i = 0$ on a $\dfrac{x^{2i}}{(2i)!} = 1 = \dfrac{x^{2i}}{2^i i!}$. On en déduit par somme d'inégalités que $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!} \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^{2i}}{2^i i!}$, donc que $\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \leq \mathrm{e}^{x^2/2}$.

2) S est une somme finie de variables prenant un nombre finis de valeurs, donc $S(\Omega)$ est fini. On en déduit que e^{tS} prend un nombre fini de valeurs donc admet une espérance. On a donc

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{tS}] = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{n} t a_k X_k}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} e^{ta_kX_k}\right]$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{ta_kX_k}\right] \qquad \text{car } e^{ta_1X_1},\dots,e^{ta_nX_n} \text{ sont indépendantes d'après le lemme des coaliations}$$

Pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, on a d'après le théorème de transfert : $\mathbb{E}\left[e^{ta_kX_k}\right] = e^{ta_k}\,\mathbb{P}(X_k = 1) + e^{-ta_k}\,\mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}(e^{ta_k} + e^{-ta_k}) \leq e^{t^2a_k^2}$ d'après le résultat de la question précédente.

Par produit d'inégalités on a donc $\mathbb{E}\left[e^{tS}\right] \leq \prod_{k=1}^{n} e^{t^2a_k^2} \leq e^{t^2(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)} \leq e^{t^2}$ car $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$.

3) On peut appliquer l'inégalité de Markov à la variable e^{tS} car elle est à valeurs positives : pour tout réel $c > 0$ et tout réel $t \geq 0$, $P(S \geq c) = \mathbb{P}(e^{tS} \geq e^{tc}) \leq \dfrac{\mathbb{E}\left[e^{tS}\right]}{e^{tc}} \leq e^{\frac{t^2}{2}-tc}$

La fonction $t \mapsto \dfrac{t^2}{2} - tc$ atteint son minimum en $t = c$, pour $t = c$ on a donc $\mathbb{P}(S \geq c) \leq e^{c^2/2-c^2} \leq e^{-c^2/2}$.

4) On a $-S = \sum_{k=1}^{n} a_k(-X_k)$ et pour tout $k \in \{1,\dots,n\}, (-X_k)$ suit la même loi que X_k, et les $(-X_k)_{1\leq k\leq n}$ sont indépendantes, donc $-S$ suit la même loi que S. On a donc pour tout $c > 0$, $\mathbb{P}(S \geq c) = \mathbb{P}(-S \geq c)$. Ainsi, $\mathbb{P}(|S| \geq c) = \mathbb{P}((S \geq c) \cup (-S \geq c)) = \mathbb{P}(S \geq c) + \mathbb{P}(-S \geq c)$ car ces événements sont disjoints.

Or $\mathbb{P}(-S \geq c) \leq e^{-c^2/2}$ car $-S$ suit la même loi que S donc finalement $\mathbb{P}(|S| \geq c) \leq 2\,e^{-c^2/2}$.

Correction de l'exercice 6 :

1)

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n)^2 = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \varepsilon_i\varepsilon_j$$

Pour $i \neq j$ on a $\mathbb{E}[\varepsilon_i\varepsilon_j] = \mathbb{E}[\varepsilon_i]\mathbb{E}[\varepsilon_j]$ par indépendance de ε_i et ε_j, donc $\mathbb{E}[\varepsilon_i\varepsilon_j] = 0$ car $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{E}[\varepsilon_k] = 0$.

De plus, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\varepsilon_k^2 = 1$ (ε_k^2 est une variable aléatoire déterministe) donc $\mathbb{E}[\varepsilon_k^2] = 1$.

On en conclut par linéarité de l'espérance que

$$\mathbb{E}[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n)^2] = \sum_{k=1}^{n} 1 + \sum_{1\leq i<j\leq n} 0 = n$$

2) Soit $a \in]0\,;1[$.

a) $an \geq 0$ donc $(|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n| \geq a_n) = \big((\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n)^2 \geq a^2n^2\big)$.
On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n| \geq an) &= \mathbb{P}\big((\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n)^2 \geq a^2n^2\big) \\
&\leq \frac{\mathbb{E}[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n)^2]}{a^2n^2} && \text{d'après l'inégalité de Markov} \\
&\leq \frac{n}{a^2n^2} && \text{d'après la question précédente} \\
&\leq \frac{1}{a^2n}
\end{aligned}$$

b) Notons X le nombre de ε_k qui valent 1. Alors X suit une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$. De plus, $n - X$ est alors le nombre de ε_k qui valent -1.
On a alors $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n = X - (n - X) = 2X - n$, donc $(|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n| \geq an) = (|2X - n| \geq an)$.
L'événement $(|2X - n| \geq an)$ est réalisé si et seulement si $X = \ell$ avec $|2\ell - n| \geq an$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|2X - n| \geq a_n) &= \sum_{\ell=0}^{n} \mathbb{P}(X = \ell) \times \mathbf{1}_{\{|2\ell-n|\geq an\}} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \frac{1}{2^\ell} \times \frac{1}{2^{n-\ell}} \times \mathbf{1}_{\{|2\ell-n|\geq an\}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\mathbf{1}_{\{|2\ell-n|\geq an\}}$$

avec $\mathbf{1}_{\{|2\ell-n|\geq an\}}$ défini comme dans l'énoncé.

c) D'après la question 2.a, et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{a^2n}=0$ on a par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(|\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n|^2)=0$ donc d'après la question 2.b $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\mathbf{1}_{\{|2\ell-n|\geq an\}}=0$.

Correction de l'exercice 7 :

1) a) $X_{k+1}-X_k$ est le temps d'atteinte entre l'obtention du k-ème magnet et du $k+1$-ème magnet distinct de la collection. Une fois k-magnet distinct obtenus, le temps d'attente d'un magnet distinct des k premiers suit une loi géométrique de paramètre $\frac{101-k}{101}$.

Pour tout k, $X_{k+1}-X_k\hookrightarrow\mathcal{G}(p_k)$ avec $p_k=\frac{101-k}{101}$.

b) On a $X_{101}-X_1=\sum_{k=1}^{100}(X_{k+1}-X_k)$ par télescopage, donc $X_{101}=X_1+\sum_{k=1}^{100}(X_{k+1}-X_k)$ d'où, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}[X_{101}]=\mathbb{E}[X_1]+\sum_{k=1}^{100}\mathbb{E}[X_{k+1}-X_k]=1+\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{p_k}=1+\sum_{k=1}^{100}\frac{101}{101-k}$.

On peut obtenir à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice programmable $S\simeq 525$, il faut donc en moyenne 525 semaines à un collectionneur pour obtenir tous les départements.

2) a) Si k_0 est tel que $T_{k_0}=\max(T_1,T_2,...,T_n)$, alors le pokémon n° k_0 est le dernier pokémon qui n'a pas encore été obtenu au rang T_{k_0}, car pour tout $i\in[\![1,n]\!]\setminus\{k_0\}$ on a $T_i\leq T_{k_0}$. Ainsi, $N=\max(T_1,T_2,...,T_n)$.

b) Pour tout entier $\ell\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(N>\ell)=\mathbb{P}(\max(T_1,T_2,...,T_n>\ell)$ d'après la question 1.

Or, $(\max(T_1,T_2,...,T_n)>\ell)=(T_1>\ell)\cup(T_2>\ell)\cup\cdots\cup(T_n>\ell)$.

Pour $k\in[\![1,n]\!]$ et $(i_1,i_2,...,i_k)$ un k -uplet d'indices entre 1 et n vérifiant $i_1<i_2<\cdots<i_k$, on a

$$\mathbb{P}((T_{i_1}>\ell)\cap(T_{i_2}>\ell)\cap\cdots\cap(T_{i_k}>\ell))=\left(\frac{C_{n-k}^m}{C_n^m}\right)^\ell$$

En effet, c'est la probabilité que lors des ℓ premiers tirages, aucun des pokémon numérotés $i_1,i_2,...,i_k$ n'aient été obtenus. Il y a C_n^m pochettes différentes, et C_{n-k}^m pochettes ne contenant pas ces k pokémons, donc la probabilité pour une pochette donnée de ne pas contenir ces k pokémons est $\frac{C_{n-k}^m}{C_n^m}$, et sur ℓ choix de pochettes indépendants la probabilité de ne jamais obtenir ces k pokémons est $\left(\frac{C_{n-k}^m}{C_n^m}\right)^\ell$.

En appliquant la formule du crible on a donc bien

$$\mathbb{P}(N>\ell)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k}\left(\frac{C_{n-k}^m}{C_n^m}\right)^\ell$$

(erreur dans l'énoncé distribué : il manque un -1 dans $(-1)^{k-1}$)

c) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui admet une espérance. $\mathbb{E}[X]=\sum_{k=1}^{+\infty}k\mathbb{P}(X=k)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}k\mathbb{P}(X=k)$.

Pour un entier n fixé, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k\mathbb{P}(X=k)&=\sum_{k=1}^{n}k(\mathbb{P}(X>k-1)-P(X>k))\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\mathbb{P}(X>k)-\sum_{k=1}^{n}kP(X>k)\\&=\mathbb{P}(X>0)-n\mathbb{P}(X>n)+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1-k)\mathbb{P}(X>k)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X>k)+n\mathbb{P}(X>n)\qquad(1)\end{aligned}$$

Or, $n\mathbb{P}(X>n)\leq n\sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}k\mathbb{P}(X=k)$. Or

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}k\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)-\sum_{k=1}^{n}k\mathbb{P}(X=k)$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)-\sum_{k=1}^{n}k\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{E}[X]-\mathbb{E}[X]=0$ donc $\lim\limits_{n\to+infty}n\mathbb{P}(X>n)=0$. Puisque $\sum_{k=1}^{n}k\mathbb{P}(X=k)$ converge vers $\mathbb{E}[X]$ lorsque $n\to+\infty$, on déduit de l'inégalité (1) que $\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X>k)$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et que $\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>k)=\sum_{k=0}^{+\infty}k\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{E}[X]$.

d) D'après les question 2c :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N]&=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N>\ell)\\
&=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k}\left(\frac{C_{n-k}^m}{C_n^m}\right)^\ell && \text{d'après la question 2b}\\
&=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k\left(\frac{C_{n-k}^m}{C_n^m}\right)^\ell && \text{par somme de } C_n^k \text{ termes constants}\\
&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k\sum_{\ell=0}^{+\infty}\left(\frac{C_{n-k}^m}{C_n^m}\right)^\ell\\
&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k\frac{1}{1-\frac{C_{n-k}^m}{C_n^m}}\\
&=C_n^m\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{C_n^k}{C_n^m-C_{n-k}^m}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 8 :

1) a) On a $f'=1+f^2$ donc pour $n=1$:

$$f''=2ff'=ff'+f'f=\binom{1}{0}ff'+\binom{1}{1}f'f=\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}f^{(k)}f^{(n-k)}$$

Supposons le résultat vrai à un rang n quelconque, alors

$$\begin{aligned}
f^{(n+2)}&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(k+1)}f^{(n-k)}+f^{(k)}f^{(n-k+1)}\right)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k+1)}f^{(n-k)}+\sum_{k=0}^{n}f^{(k)}f^{(n-k+1)}\\
&=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}f^{(k)}f^{(n-k+1)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}f^{(n-k+1)}\\
&=\underbrace{\binom{n}{n}}_{=1}f^{(n+1)}f^{(0)}+\underbrace{\binom{n}{0}}_{=1}f^{(0)}f^{(n+1)}+\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)}_{=\binom{n+1}{k}}f^{(k)}f^{(n-k+1)}\\
&=\binom{n+1}{n+1}f^{(n+1)}f^{(0)}+\binom{n+1}{0}f^{(0)}f^{(n+1)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}f^{(k)}f^{(n-k+1)}\\
&=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}f^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

b) On sait que f est positive sur $[0,\frac{\pi}{2}[$, et f' aussi car $f' = 1 + f^2$. De plus si $f, f', \dots, f^n$ sont positives alors $f^{(n+1)}$ l'est aussi d'après la relation prouvée à la question précédente. On en conclut par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est positive donc f est absolument monotone.

2) a) Pour un $x > 0$ fixé, en faisant le changement de variable $u = \dfrac{t}{x}$ on a $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{x}$ donc :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{(x-xu)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)x\,\mathrm{d}u\\ &= \int_0^1 x^n\frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)x\,\mathrm{d}u\\ &= x^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} = \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u$$

b) Soient x et y deux réels de $]0,a[$ tels que $x < y$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{R_n(y)}{y^{n+1}} - \frac{R_n(x)}{x^{n+1}} &= \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(yu)\,\mathrm{d}u - \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u\\ &= \int_0^1 \underbrace{\frac{(1-u)^n}{n!}}_{\geq 0}\left(f^{(n+1)}(yu) - f^{(n+1)}(xu)\right)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Or pour tout $u \in [0,1]$ on a $xu < yu$ donc $f^{(n+1)}(xu) \leq f^{(n+1)}(yu)$ car f est absolument monotone, donc l'intégrale précédente est positive. On en déduit que $\dfrac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leq \dfrac{R_n(y)}{y^{n+1}}$.

On a donc montré que la fonction $x \mapsto \dfrac{R_n(x)}{x^{n+1}}$ est croissante.

c) Si $0 < x < y < a$ alors

$$0 \leq \frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leq \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}$$

donc

$$0 \leq R_n(x) \leq R_n(y)\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}$$

Or d'après la formule de Taylor avec reste intégral : $f(y) = \sum_{k=0}^n \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}y^k + R_n(y) \geq R_n(y)$ car tous les termes de la somme sont positifs, donc $R_n(y) \leq f(y)$ d'où l'inégalité voulue.

d) Pour tout $x \in [0,a[$ et tout $y \in]x,a[$, $0 < \dfrac{x}{y} < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} = 0$. Par encadrement on en déduit que pour tout $x \in [0,a[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ donc $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité de Taylor avec reste intégral.

e) Pour $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$ le résultat est établi d'après les questions 1b et 2d.
Comme f est impaire, on a :

$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\quad f(-x) = -f(x)$$

donc

$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\quad -f'(-x) = -f'(x)$$

donc

$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\quad f''(-x) = -f''(x)$$

et par récurrence immédiate on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(2k)}$ est impaire et $f^{(2k+1)}$ est paire. On en conclut que $f^{(2k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc :

$$\tan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Si $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$, alors par imparité de tan on a $\tan(x) = -\tan(-x) = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} (-x)^{2k+1}$

Finalement on a bien :

$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)(0)}}{n!} x^n$$

Correction de l'exercice 9 :

1) a) Soit $a > 0$, on a pour tout $x > 0$ et tout $t \in [0, +\infty[$, $f_a(t)\,\mathrm{e}^{-ntx} = \mathrm{e}^{-at-ntx} = \mathrm{e}^{-(a+nx)t}$. Comme $a + nx > 0$ on a $t^2\,\mathrm{e}^{-(a+nx)t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $\mathrm{e}^{-(a+nx)t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente l'intégrale $T_n(f_a)(x)$ converge. De plus :

$$\begin{aligned} T_n(f_a)(x) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(a+nx)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{\mathrm{e}^{-(a+nx)t}}{a+nx}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{a+nx} \end{aligned}$$

b) $T_n(f_k)$ est définie si et seulement si pour tout $x > 0$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^k\,\mathrm{e}^{-ntx}\,\mathrm{d}t$ converge.

Elle converge pour toute valeur de k car $t^k\,\mathrm{e}^{-tx} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$, et en posant le changement de variable $u = ntx$ on obtient :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad T_n(f_k)(x) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{nx}\right)^k \mathrm{e}^{-u}\,\frac{\mathrm{d}u}{nx} \\ &= \frac{1}{(nx)^{k+1}}\Gamma(k+1) \\ &= \frac{k!}{(nx)^{k+1}} \end{aligned}$$

2) a) Soit $M > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}_+, |f(t)| \leq M$. Alors $|f(t)\,\mathrm{e}^{-ntx}| \leq M\,\mathrm{e}^{-ntx}$ et $\int_0^{+\infty} M\,\mathrm{e}^{-ntx}\,\mathrm{d}t$ converge donc $T_n(f)(x)$ converge absolument quel que soit $x > 0$.

b) On a :

$$\begin{aligned} \left|\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-ntx}\,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_0^{+\infty} |f(t)\,\mathrm{e}^{-ntx}|\,\mathrm{d}t \\ &\leq M \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ntx}\,\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{M}{nx} \end{aligned}$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{M}{nx} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} |T_n(f)(x)| = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} T_n(f)(x) = 0$.

3) Soit $A > 0$. En intégrant par partie sur l'intervalle $[0, A]$:

$$\int_0^A nxf(t)\,\mathrm{e}^{-ntx}\,\mathrm{d}t = \left[-f(t)\,\mathrm{e}^{-ntx}\right]_0^A + \int_0^A f'(t)\,\mathrm{e}^{-ntx}\,\mathrm{d}t$$

$$= -f(A)\,\mathrm{e}^{-ntA} + f(0) + \int_0^A f'(t)\,\mathrm{e}^{-ntx}\,\mathrm{d}t$$

or f est bornée donc $\lim\limits_{x\to+} f(A)\,\mathrm{e}^{-ntA} = 0$, et f' est bornée donc $T_n(f')$ est bien défini donc en passant à la limite lorsque A tend vers $+\infty$ on obtient :

$$nxT_n(f)(x) = f(0) + T_n(f')(x)$$

et d'après la question précédente $\lim\limits_{x\to+\infty} T_n(f')(x) = 0$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} nxT_n(f)(x) = f(0)$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty} xT_n(f)(x) = \frac{f(0)}{n}$$