

★

Exercice 1

Voir correction

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.

- 1) Montrer que si p est un projecteur de E alors p est diagonalisable et que $\text{rg}(p) = \text{tr}(p)$.
- 2) Montrer que si s est une symétrie de E alors s est diagonalisable et que $n - \text{tr}(s)$ est un entier pair.

★

Exercice 2

Voir correction

Étudier la diagonalisabilité des matrices suivantes (on ne demande pas de les diagonaliser) :

$$1) A = \begin{pmatrix} -9 & 8 \\ -18 & 15 \end{pmatrix}$$

$$3) C = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2) B = \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 18 & -10 \end{pmatrix}$$

$$4) D = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 12 \\ -4 & 6 & -8 \\ -6 & 9 & -12 \end{pmatrix}$$

★

Exercice 3

Voir correction

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

- 1) Montrer que $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A , préciser la valeur propre associée à X .
- 2) Déterminer les autres valeurs propres de A .
- 3) Justifier que A est diagonalisable et déterminer $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

★ ★

Exercice 4

Voir correction

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- 1) Déterminer le rang de $A(a)$ selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$.
- 2) Discuter de la diagonalisabilité de $A(a)$ selon la valeur de $a \in \mathbb{R}$.
- 3) On note dans cette question $A = A(1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\frac{1}{4^n} A^n$.

★ ★

Exercice 5

Voir correction

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On considère l'endomorphisme $f = \lambda \cdot \text{Id}_E$ (f est une **homothétie de rapport** λ) et un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ avec $p \neq \text{Id}_E$ et $p \neq 0$.

- 1) Montrer que λ est une valeur propre de $f \circ p$. Quel est le sous-espace propre associé ?
- 2) Montrer que 0 est une valeur propre de $f \circ p$. Quel est le sous-espace propre associé ?
- 3) L'application $f \circ p$ est-elle diagonalisable ?
- 4) Réciproquement, supposons que g soit un automorphisme de E tel que $g \circ p$ soit diagonalisable avec pour seules valeurs propres λ et 0, a-t-on nécessairement $g = \lambda \cdot \text{Id}_E$?

★

Exercice 6

Voir correction

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$ un entier. Étudier la diagonalisabilité de $A = \begin{pmatrix} a & \cdots & a \\ \vdots & & \vdots \\ a & \cdots & a \end{pmatrix}$ et la diagonalisabilité de $B = A - I_n$.

★ ★ ★

Exercice 7

Voir correction

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.

- 1) Dans cette question, u et v sont deux endomorphismes de E avec u diagonalisable. Montrer que u et v commutent si et seulement si tout sous-espace propre de u est stable par v .
- 2) Dans cette question, u et v sont deux endomorphismes diagonalisables de E . Montrer que u et v commutent si et seulement si il existe une base \mathcal{B} de diagonalisation commune à u et v .

★ ★

Exercice 8

Voir correction

- 1) a) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.
b) Trouver deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonalisables dont la somme n'est pas diagonalisable.
- 2) Soit A une matrice carrée diagonalisable. Montrer que A^2 est également diagonalisable.
- 3) a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^2$.
b) Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonalisable telle que A^2 est diagonalisable.

★ ★

Exercice 9

Voir correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application $\psi_n : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par $\psi_n(P)(X) = P(1 - X)$.

- 1) Montrer que ψ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
- 2) Calculer $\psi_n(1), \psi_n(X), \psi_n(X^2)$ et $\psi_n(X^3)$
- 3) Montrer que ψ_n est une symétrie.
- 4) On s'intéresse dans cette question au cas $n = 3$
 - a) Déterminer la matrice M de ψ_3 dans la base canonique \mathcal{B}_0
 - b) Déterminer $\text{Ker}(\psi_3 - \text{Id})$ et $\text{Ker}(\psi_3 + \text{Id})$.
 - c) Déterminer une matrice P telle que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

★ ★ ★

Exercice 10

Voir correction

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que α^2 est une valeur propre de f^2 si et seulement si α ou $-\alpha$ est valeur propre de f .

★ ★

Exercice 11

Voir correction

On définit pour tout $k \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^k e^{-x}$ et on note \mathcal{B} la famille (f_0, f_1, f_2, f_3) . Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ engendré par \mathcal{B} .

- 1) Montrer que \mathcal{B} est une base de E
- 2) Montrer que l'application $u : f \mapsto f' - f''$ est un endomorphisme de E
- 3) Déterminer la matrice de u dans la base \mathcal{B}
- 4) u est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

★ ★

Exercice 12

Voir correction

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid MA = AM\}$ le **commutant** de A .

Pour $1 \leq k \leq n$ on note I_k la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(I_k)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ et } i \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- 1) Déterminer $C(I_k)$.
- 2) Soit P une matrice inversible. Montrer que M appartient à $C(A)$ si et seulement si $P^{-1}MP$ appartient à $C(P^{-1}AP)$.

3) Supposons que A est la matrice d'un projecteur. Déterminer $C(A)$.

★ ★ ★
Exercice 13

— Voir correction —

Soit $n \geq 1$ un entier et $A \in \mathbb{R}_n[x]$ un polynôme fixé. Soit $\phi : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$, $P \mapsto \phi_P$ où la fonction polynomiale ϕ_P est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi_P(x) = A(x) \times \int_0^1 P(t) dt - P(x) \int_0^1 A(t) dt$$

Dans la suite, on notera $\alpha = \int_0^1 A(t) dt$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$.

- 1) Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$
- 2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de ϕ . Montrer que $\lambda \in \{0, -\alpha\}$.
- 3) Montrer que $\text{Im}(\phi + \alpha \text{Id}) \subseteq \text{Ker}(\phi)$.
- 4) En déduire que pour $\alpha \neq 0$, on a $\text{Ker}(\phi + \alpha \text{Id}) \oplus \text{Ker}(\phi) = \mathbb{R}_n[x]$
- 5) À quelle condition ϕ est-il diagonalisable ?

Le coin des khûbes

★
Exercice 14

— Voir correction —

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit l'application ϕ par :

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \rightarrow & \mathcal{L}(E) \\ v & \mapsto & u \circ v \end{cases}$$

On note $\text{Id}_{\mathcal{L}(E)}$ et Id_E les fonctions identités des espaces $\mathcal{L}(E)$ et E .

- 1) Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
- 2) Montrer que $\text{Spec}(\phi) \subset \text{Spec}(u)$.
- 3) En considérant des endomorphismes particuliers de E , montrer que $\text{Spec}(\phi) = \text{Spec}(u)$.
- 4) Soit $\lambda \in \text{Spec}(u)$
 - a) Montrer que

$$v \in \text{Ker}(\phi - \lambda \text{Id}_{\mathcal{L}(E)}) \iff \text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$$

- b) En déduire $\dim(\text{Ker}(\phi - \lambda \text{Id}_{\mathcal{L}(E)}))$
 - c) Montrer que u est diagonalisable si et seulement si ϕ est diagonalisable.

★
Exercice 15

— Voir correction —

(D'après écrits ENS 2023)

On considère un entier $n \geq 1$ et l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ définie par

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n}, x_{2n+1}) = (x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_4, \dots, x_{2n-1} + x_{2n+1}, x_{2n})$$

- 1) Quelle est la matrice de φ dans la base canonique ?
- 2) Déterminer une base du noyau de φ .
- 3) Déterminer le rang de φ
- 4) A-t-on $\text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^{2n+1}$?
- 5) Soient a et b deux réels. En étudiant la partie imaginaire de $e^{ia}(e^{ib} + e^{-ib})$, montrer que

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \cos(b) \sin(a)$$

- 6) Soit $k \in \{1, 2, \dots, 2n+1\}$ et $\theta = \frac{k\pi}{2n+2}$. On considère le vecteur

$$v_\theta = (\sin(\theta), \sin(2\theta), \sin(3\theta), \dots, \sin((2n+1)\theta))$$

- a) Pour $j \in \{1, \dots, 2n+1\}$, montrer que la j -ème coordonnée de $\varphi(v_\theta)$ est

$$\sin((j-1)\theta) + \sin((j+1)\theta)$$

- b) Montrer que v_θ est un vecteur propre de φ , préciser la valeur propre associée.
 - c) La matrice de φ est-elle diagonalisable ?

Correction des exercices

Correction de l'exercice 1 :

- 1) On a $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p) = \text{Ker}(p) \oplus \text{Ker}(p - \text{Id})$ car on a : $x \in \text{Im}(p) \iff p(x) = x \iff (p - \text{Id})(x) = 0$ (la première équivalence est du cours). En prenant une base $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_r)$ de $\text{Ker}(p)$ et une base $\mathcal{B}'' = (e_{r+1}, \dots, e_n)$ de $\text{Im}(p)$ on obtient une base \mathcal{B} de E en concaténant les deux bases : $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ on a $p(e_i) = 0$ et pour tout $i \in \{r+1, \dots, n\}$ on a $p(e_i) = e_i$ donc la matrice de p dans la base \mathcal{B} est diagonale :

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le nombre de 1 sur la diagonale est égale à la dimension de $\text{Im}(p)$ c'est à dire à $\text{rg}(p)$, et on a aussi $\text{tr}(p) = 1 + 1 + \cdots + 1 = \text{rg}(p)$.

- 2) s est une symétrie de E donc on a $E = \text{Ker}(s - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id})$. En prenant une base $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_r)$ de $\text{Ker}(s - \text{Id})$ et une base $\mathcal{B}'' = (e_{r+1}, \dots, e_n)$ de $\text{Ker}(s + \text{Id})$ on obtient une base \mathcal{B} de E en concaténant les deux bases : $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ on a $s(e_i) = e_i$ et pour tout $i \in \{r+1, \dots, n\}$ on a $s(e_i) = -e_i$ par définition de $\text{Ker}(s - \text{Id})$ et $\text{Ker}(s + \text{Id})$, donc la matrice de s dans la base \mathcal{B} est diagonale :

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le nombre de 1 sur la diagonale est égal à $\dim(\text{Ker}(s - \text{Id})) = r$ et le nombre de -1 est égal à $\dim(\text{Ker}(s + \text{Id})) = n - r$. Ainsi on a :

$$\begin{aligned} n - \text{tr}(s) &= n - (r - (n - r)) \\ &= 2n - 2r \\ &= 2(n - r) \end{aligned}$$

donc $n - \text{tr}(s)$ est bien un entier pair.

Correction de l'exercice 2 :

- 1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

λ est valeur propre de A ssi $A - \lambda I$ n'est pas inversible

$$\text{ssi } \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\text{ssi } \det \begin{pmatrix} -9 - \lambda & 8 \\ -18 & 15 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{ssi } (-9 - \lambda)(15 - \lambda) + 144 = 0$$

$$\text{ssi } \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$\text{ssi } (\lambda - 3)^2 = 0$$

$$\text{ssi } \lambda = 3$$

Donc 3 est l'unique valeur propre de A . Si A était diagonalisable, il existerait une matrice inversible P telle que

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P = 3P^{-1}IP = 3I. \text{ Or } A \neq 3I \text{ donc } A \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

- 2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

λ est valeur propre de B ssi $B - \lambda I$ n'est pas inversible

$$\text{ssi } \det(B - \lambda I) = 0$$

$$\text{ssi } (11 - \lambda)(-10 - \lambda) + 108 = 0$$

$$\text{ssi } \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\text{ssi } \lambda = 2 \quad \text{ou} \quad \lambda = -1$$

donc A a deux valeurs propres : -1 et 2 . Comme A a deux valeurs propres distinctes et qu'elle est d'ordre 2, elle est diagonalisable et elle est semblable à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est valeur propre de C si et seulement si $C - \lambda I$ n'est pas inversible, si et seulement si $\text{rg}(C - \lambda I) < 3$.

$$\begin{aligned} \text{rg}(C - \lambda I) &= \text{rg} \begin{pmatrix} -5 - \lambda & 0 & 6 \\ 3 & 1 - \lambda & -3 \\ -3 & 0 & 4 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 - \lambda \\ 3 & 1 - \lambda & -3 \\ -5 - \lambda & 0 & 6 \end{pmatrix} && (L_1 \leftrightarrow L_3) \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda \\ 0 & 0 & 6 - \frac{1}{3}(5 + \lambda)(4 - \lambda) \end{pmatrix} && (L_2 \leftarrow L_2 + L_1, L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3}(5 + \lambda)) \end{aligned}$$

Donc $\text{rg}(C - \lambda I)$ est de rang < 3 si et seulement si $1 - \lambda = 0$ ou $6 - \frac{1}{3}(5 + \lambda)(4 - \lambda) = 0$. On résout et on trouve $\lambda = 1$ ou $\lambda = -2$. Ainsi 1 et -2 sont les seules valeurs propres de A , il faut étudier la dimension des sous espaces propres associés :

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - I) &= \text{rg} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 1 && (\text{car deux colonnes colinéaires et une troisième nulle}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rg}(A + 2I) &= \text{rg} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 2 && (\text{car deux lignes non nulles linéairement indépendantes et une troisième nulle}) \end{aligned}$$

donc en appliquant le théorème du rang $\dim(\text{Ker}(A - I)) = 2$ et $\dim(\text{Ker}(A + 2I)) = 1$. Comme $\dim(\text{Ker}(A - I)) + \dim(\text{Ker}(A + 2I)) = 3$ on en déduit que A est diagonalisable, elle est semblable à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4) On remarque que les lignes de D sont deux à deux colinéaires et non nulles donc $\text{rg}(D) = 1$. Ainsi $\dim(\text{Ker}(D)) = 2$ d'après le théorème du rang, donc 0 est valeur propre et le sous-espace propre associé est de dimension 2.

Raisonnons par l'absurde et supposons que D est diagonalisable et que $\lambda \in \mathbb{R}$ est son autre valeur propre. Alors $\lambda \neq 0$

(sinon la dimension de $\text{Ker}(D)$ serait 3) et D est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dont la trace est λ . Or deux

matrices semblables ont la même trace, donc $\text{tr}(D) = \lambda$. Or $\text{tr}(D) = 0$ donc $\lambda = 0$, contradiction. On en conclut que D n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 3 :

- 1) $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2X$ avec $X \neq 0$ donc 2 est valeur propre de A et X est un vecteur propre associé à 2.
- 2) Cherchons s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A - \lambda \cdot I_3$ ne soit pas inversible.

$$\begin{aligned}
 A - \lambda \cdot I_3 &= \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
 &\xleftrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 5-\lambda & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &\xleftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - (5-\lambda)L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 6-\lambda & 2\lambda-8 \\ 0 & 6-\lambda & -1-(3-\lambda)(5-\lambda) \end{pmatrix} \\
 &\xleftrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 6-\lambda & 2\lambda-8 \\ 0 & 0 & -1-(3-\lambda)(5-\lambda)-2\lambda+8 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Cette matrice est non inversible si $\lambda = 6$ ou si $-1 - (3 - \lambda)(5 - \lambda) - 2\lambda + 8 = 0$ c'est à dire si $-\lambda^2 + 6\lambda - 8 = 0$. On trouve deux solutions : $\lambda = 2$ et $\lambda = 4$.

On a donc montré que $A - \lambda_3$ était non inversible si et seulement si $\lambda \in \{2; 4; 6\}$ donc A a trois valeurs propres, $\text{Sp}(A) = \{2; 4; 6\}$.

- 3) $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ et A a trois valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable ($\dim(E_2) + \dim(E_4) + \dim(E_6) \geq 3$ donc $\dim(E_2) + \dim(E_4) + \dim(E_6) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$).

Puisque chaque sous-espace propre est de dimension au moins 1, on en déduit qu'ils sont tous de dimension 1. Cherchons un vecteur propre associé à chaque valeur propre.

On sait déjà que $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est associé à la valeur propre 2, on a donc $E_2 = \text{Vect}(X_1)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne quelconque.

$$\begin{aligned}
 AX = 4X &\iff \begin{cases} 5x + y - z = 4x \\ 2x + 4y - 2z = 4y \\ x - y + 3z = 4z \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

donc $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 4, on a donc $E_4 = \text{Vect}(X_2)$.

$$\begin{aligned}
 AX = 6X &\iff \begin{cases} 5x + y - z = 6x \\ 2x + 4y - 2z = 6y \\ x - y + 3z = 6z \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}
 \end{aligned}$$

donc $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 6, on a donc $E_6 = \text{Vect}(X_3)$.

La famille (X_1, X_2, X_3) est une base de \mathbb{R}^3 (cours). Si P est la matrice de passage de la base canonique à (X_1, X_2, X_3) on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. La matrice de passage P est $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 4 :

1)

$$\begin{aligned} \text{rg}(A) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-2a \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si $a = 1$ on a $\text{rg}(A) = 1$, et si $a \neq 1$ on a $\text{rg}(A) = 2$.

2) Pour tout réel a et tout réel λ on a :

$$\begin{aligned} \text{rg}(A(a) - \lambda I_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & a \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2-\lambda \\ 2 & 2-2\lambda & 2 \\ 2-2\lambda & 2 & 2a \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2-\lambda \\ 0 & -2\lambda & \lambda \\ 0 & 2-2(1-\lambda) & 2a-(2-\lambda)(1-\lambda) \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2-\lambda \\ 0 & -2\lambda & \lambda \\ 0 & 2\lambda & 2a-2+3\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2-\lambda \\ 0 & -2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 2a-2+4\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc lorsque $a = 1$, A admet deux valeurs propres : 0 et 4 avec $\dim(\text{Ker}(A)) = 2$ et $\dim(\text{Ker}(A - 4I)) \geq 1$ donc $\dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Ker}(A - 4I)) = 3$ donc A est diagonalisable.

Lorsque $a \neq 1$, 0 est valeur propre de multiplicité 1. Posons $P(\lambda) = 2a - 2 + 4\lambda - \lambda^2$. $\Delta = 16 + 8a - 8 = 8 + 8a$.

Si $a < -1$, alors $\Delta < 0$ donc P n'a pas de racines, donc A n'a pas d'autres valeurs propres donc A n'est pas diagonalisable.

Si $a > -1$, alors P a deux racines distinctes non nulles (car $2a - 2 \neq 0$) donc A admet trois valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable.

Si $a = -1$, alors P admet 2 comme unique racine, et $\text{rg}(A - 2I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\dim(\text{Ker}(A - 2I_3)) = 1$. Les seules valeurs propres de A sont 0 et 2 et elle sont chacune une multiplicité égale à 1, donc A n'est pas diagonalisable.

3) On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ donc $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$ puis $A^3 = \begin{pmatrix} 16 & 16 & 16 \\ 16 & 16 & 16 \\ 32 & 32 & 32 \end{pmatrix}$. On peut conjecturer que $A^n = \begin{pmatrix} 4^{n-1} & 4^{n-1} & 4^{n-1} \\ 4^{n-1} & 4^{n-1} & 4^{n-1} \\ 4^n & 4^n & 4^n \end{pmatrix}$, $4^{n-1}A$ et le prouver par récurrence : si l'égalité est vraie pour un entier n il vient :

$$A^{n+1} = 4^{n-1}A^2 = 4^{n-1}4A = 4^nA$$

donc elle est vraie pour l'entier $n + 1$.

On en conclut : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{4^n}A^n = \frac{1}{4}A$.

Correction de l'exercice 5 :

- 1) p est un projecteur non nul donc $\text{Im}(p) \neq \{0\}$ donc il existe $x \in E$ avec $x \neq 0$ tel que $p(x) = x$.

Ainsi, $(f \circ p)(x) = f(x) = \lambda x$ par définition de f , donc λ est une valeur propre de $f \circ p$ et x est un vecteur propre associé à λ .

Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} f(p(x)) &= \lambda x \iff \lambda p(x) = \lambda x \\ &\iff p(x) = x && \text{car } \lambda \neq 0 \\ &\iff x \in \text{Im}(p) \text{ car } p \text{ est un projecteur} \end{aligned}$$

Ainsi, le sous espace propre de $f \circ p$ associé à λ est $\text{Im}(p)$.

- 2) $p \neq \text{Id}$ donc $\text{Ker}(p) \neq \{0\}$. Soit $x \in \text{Ker}(p)$ avec $x \neq 0$, alors $f(p(x)) = f(0) = 0$ donc 0 est valeur propre de $f \circ p$.
Pour tout $x \in E$, on a

$$f(p(x)) = 0 \iff \lambda p(x) = 0 \iff p(x) = 0$$

car $\lambda \neq 0$. Ainsi, $f(p(x)) = 0 \iff x \in \text{Ker}(p)$ donc le sous espace propre de $f \circ p$ associé à 0 est $\text{Ker}(p)$.

- 3) Puisque p est un projecteur, $\text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p) = E$, donc E est la somme directe des sous-espace propre de $f \circ p$. On en déduit que $f \circ p$ est diagonalisable.
- 4) Pas nécessairement, par exemple dans \mathbb{R}^2 si p est le projecteur sur $\text{Vect}((1,0))$ parallèlement à $\text{Vect}((0,1))$ et que $g : (x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda x + y)$, alors g est un automorphisme de \mathbb{R}^2 et on a $g \circ p(x, y) = g(x, 0) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda \cdot (x, x)$.
Ainsi, $g \circ p = \lambda \cdot q$ où q est le projecteur sur $\text{Vect}((1,1))$ parallèlement à $\text{Vect}((0,1))$ donc $g \circ p$ admet bien deux valeurs propres λ et 0 d'après les 3 premières questions, mais $g \neq \lambda \cdot \text{Id}$.

Correction de l'exercice 6 :

Si $a = 0$, alors A est diagonale et $B = -I_n$ est diagonale. Supposons donc $a \neq 0$.

On remarque que $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} na \\ \vdots \\ na \end{pmatrix} = na \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donc na est une valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à na .

De plus, A est de rang 1 donc $\dim(\text{Ker}(A)) = n - 1$ d'après le théorème du rang. Si on note E_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ , on a $\dim(E_0) = n - 1$ et $\dim(E_{na}) \geq 1$. Puisqu'ils sont en somme directe on a $\dim(E_0 \oplus E_{na}) \geq n$ et $\dim(E_0 \oplus E_{na}) \leq n$ par inclusion. Donc $E_0 \oplus E_{na} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par égalité des dimensions. Ainsi, A est diagonalisable, elle est

semblable à la matrice $\begin{pmatrix} na & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

On remarque que $X \in \text{Ker}(A) \iff AX = 0 \iff (A - I_n)X = -I_n X \iff BX = -X$. Ainsi, -1 est valeur propre de B et le sous-espace propre associé à cette valeur propre est $\text{Ker}(A)$.

On remarque également que $B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (na - 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $na - 1$ est valeur propre de B et un vecteur propre associé

est $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Puisque ce vecteur n'est pas dans $\text{Ker}(A)$, on en déduit que $\text{Ker}(A)$ et $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ sont en somme directe donc

par égalité des dimensions $\text{Ker}(A) \oplus \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi B est diagonalisable, elle est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} na-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 7 :

- 1) Supposons que u et v commutent, et soit E_λ un sous-espace propre de u associé à une valeur propre λ . Soit $x \in E_\lambda$, alors $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$ donc $v(x) \in E_\lambda$. Ainsi, E_λ est stable par v . Supposons maintenant que tout sous-espace propre de u est stable par v . Si E_λ est un sous-espace propre de u associé à une valeur propre λ de u , alors pour tout $x \in E_\lambda$, $u(v(x)) = \lambda v(x)$ car $v(x) \in E_\lambda$ par stabilité, et $v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$. Ainsi, les restrictions de $u \circ v$ et de $v \circ u$ à E_λ sont égales. u et v commutent sur chaque sous-espace propre donc commutent sur E . En effet, E est la somme directe de tous les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de u car u est diagonalisable.
- 2) Supposons que u et v commutent. Alors tout sous-espace propre de u est stable par v . Soit E_λ un sous-espace propre de u , et notons $E_{\mu_1}, \dots, E_{\mu_r}$ les sous-espaces propres de v . Montrons qu'alors on a :

$$E_\lambda = (E_\lambda \cap E_{\mu_1}) \oplus \dots \oplus (E_\lambda \cap E_{\mu_r})$$

L'inclusion \supset est évidente. Réciproquement, si $x \in E_\lambda$, il existe $(x_1, \dots, x_r) \in E_{\mu_1} \times \dots \times E_{\mu_r}$ tel que

$$x = x_1 + \dots + x_r \quad (1)$$

et il reste à montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $x_i \in E_\lambda$. En composant par u dans (1) on obtient :

$$\lambda x = u(x_1) + \dots + u(x_r)$$

et pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, E_{μ_i} est stable par u donc $u(x_i) \in E_{\mu_i}$. En multipliant par λ dans (1) on obtient :

$$\lambda x = \lambda x_1 + \dots + \lambda x_r$$

et par unicité de la l'écriture dans une somme directe on en déduit :

$$u(x_1) = \lambda x_1 \quad ; \quad u(x_2) = \lambda x_2 \quad ; \quad \dots \quad ; u(x_r) = \lambda x_r$$

donc on a bien $x_1, \dots, x_r \in E_\lambda$ et donc pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $x_i \in E_\lambda \cap E_{\mu_i}$. On a donc montré que $E_\lambda = (E_\lambda \cap E_{\mu_1}) \oplus \dots \oplus (E_\lambda \cap E_{\mu_r})$.

Ainsi la restriction de v à E_λ est un endomorphisme de E_λ (car il est stable par v) diagonalisable (car E_λ s'écrit comme somme de sous-espace propre de $v|_{E_\lambda}$). Il existe donc une base \mathcal{B}_λ de E_λ composée de vecteurs propres de v .

La réunion de toutes les bases ainsi créées pour chaque valeur propre de u est une base de E dans laquelle u est diagonale (car elle l'est dans n'importe quelle base de vecteurs propres) et dans laquelle v est diagonale (car elle l'est pour chaque restriction à E_λ).

Supposons réciproquement qu'il existe une base commune \mathcal{B} de diagonalisation à u et v . Notons (e_1, \dots, e_n) les vecteurs de cette base. Alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, e_i est un vecteur propre de u associé à une valeur propre λ_i et e_i est un vecteur propre de v associé à une valeur propre μ_i . On a donc $u(v(e_i)) = u(\mu_i e_i) = \mu_i \lambda_i e_i$ et $v(u(e_i)) = v(\lambda_i e_i) = \lambda_i \mu_i e_i$ donc $u(v(e_i)) = v(u(e_i))$. Ceci étant vrai pour chaque vecteur de la base, on a $u \circ v = v \circ u$.

Correction de l'exercice 8 :

- 1) a) C'est une matrice triangulaire supérieure donc la seule valeur propre de $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est 1. Ainsi, elle est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. Or, s'il existe P tel que $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P I_2 P^{-1}$ alors $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ (la seule matrice semblable à la matrice identité est la matrice identité). Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ si et seulement si $a = 0$.
- b) Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La première est diagonalisable car elle a deux valeurs propres distinctes, 1 et 0, et la seconde est déjà diagonale. De plus, $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable d'après la question 1)a).
- 2) Il existe D une matrice diagonale et P une matrice inversible telles que $D = P^{-1}AP$. Alors $D^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}A^2P$. Or D^2 est diagonale (ses coefficients diagonaux sont ceux de D élevés au carré), donc A^2 est semblable à une matrice diagonale donc diagonalisable.
- 3) a) $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$

b) En posant $\theta = \frac{\pi}{2}$ dans la question précédente, on trouve que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + 1 \geq 1 > 0$ donc A n'a pas de valeurs propres, elle n'est donc pas diagonalisable. A^2 est diagonale donc diagonalisable.

Correction de l'exercice 9 :

1) Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, et soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned} \psi_n(\lambda P + \mu Q)(X) &= (\lambda P + \mu Q)(1 - X) \\ &= \lambda P(1 - X) + \mu Q(1 - X) \\ &= \lambda \psi_n(P)(X) + \mu \psi_n(Q)(X) \\ &= (\lambda \psi_n(P) + \mu \psi_n(Q))(X) \end{aligned}$$

donc ψ_n est une application linéaire. Pour montrer que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, il faut montrer que $\psi_n(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ donc $\psi_n(P)(X) = P(1 - X) = \sum_{k=0}^n a_k (1 - X)^k = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i X^i$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $0 \leq i \leq n$ donc $P(1 - X) \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, $\psi_n(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$ donc finalement ψ_n est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) $\psi_n(1) = 1$

$$\psi_n(X) = 1 - X$$

$$\psi_n(X^2) = (1 - X)^2 = X^2 - 2X + 1$$

$$\psi_n(X^3) = (1 - X)^3 = -X^3 + 3X^2 - 3X + 1$$

3) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ quelconque, alors

$$\begin{aligned} \psi_n(\psi_n(P))(X) &= \psi_n(P)(1 - X) \\ &= P(1 - (1 - X)) \\ &= P(X) \end{aligned}$$

donc $\psi_n \circ \psi_n = \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$, ainsi ψ_n est une symétrie de $\mathbb{R}_n[X]$.

4) a) D'après la question 2., la matrice de ψ_3 dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $\text{Ker}(\psi_3 - \text{Id}) = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1 - X) = P(X)\}$

Soit $P = a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme quelconque

$$P \in \text{Ker}(\psi_3 - \text{Id}) \iff P(X) = P(1 - X)$$

$$\iff a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = a_3 (1 - X)^3 + a_2 (1 - X)^2 + a_1 (1 - X) + a_0$$

$$\iff a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = -a_3 X^3 + (3a_3 + a_2)X^2 + (-3a_3 - 2a_2 - a_1)X + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$$

$$\iff \begin{cases} a_3 &= -a_3 \\ a_2 &= 3a_3 + a_2 \\ a_1 &= -3a_3 - 2a_2 - a_1 \\ a_0 &= a_3 + a_2 + a_1 + a_0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_3 &= 0 \\ a_1 &= -a_2 \end{cases}$$

$$\iff P = a_2 X^2 - a_2 X + a_0$$

car deux polynômes sont égaux si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux. Ainsi, $\text{Ker}(\psi_3 - \text{Id}) = \text{Vect}(X^2 - X; 1)$.

$$P \in \text{Ker}(\psi_3 + \text{Id}) \iff P(X) = -P(1 - X)$$

$$\iff a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = -a_3(1 - X)^3 - a_2(1 - X)^2 - a_1(1 - X) - a_0$$

$$\iff a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = a_3X^3 + (-3a_3 - a_2)X^2 + (3a_3 + 2a_2 + a_1)X + (-a_3 - a_2 - a_1 - a_0)$$

$$\iff \begin{cases} a_3 &= a_3 \\ a_2 &= -3a_3 - a_2 \\ a_1 &= 3a_3 + 2a_2 + a_1 \\ a_0 &= -a_3 - a_2 - a_1 - a_0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_2 &= -\frac{3}{2}a_3 \\ a_0 &= -\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3) \end{cases}$$

$$\iff P = a_3X^3 - \frac{3}{2}a_3X^2 + a_1X - \frac{1}{2}(a_1 - \frac{1}{2}a_3)$$

$$\iff P \in \text{Vect} \left(X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{4} ; X - \frac{1}{2} \right)$$

$$\iff P \in \text{Vect} (4X^3 - 6X^2 + 1 ; 2X - 1)$$

$$\text{donc } \text{Ker}(\psi + \text{Id}) = \text{Vect} (4X^3 - 6X^2 + 1 ; 2X - 1)$$

c) Dans la base $(X^2 - X ; 1 ; 4X^3 - 6X^2 + 1 ; 2X - 1)$, la matrice de ψ_3 est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice de

passage de la base canonique vers cette base est la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et on a alors $P^{-1}MP =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 10 : Un sens est facile : si α est valeur propre de f (respectivement $-\alpha$), alors il existe $x \in E$ avec $x \neq 0$ tel que $f(x) = \alpha x$ (respectivement $f(x) = -\alpha x$) et on a alors $f^2(x) = f(f(x)) = \alpha f(x) = \alpha^2 x$ (respectivement $f(f(x)) = f(-\alpha x) = -\alpha f(x) = (-\alpha)^2 x = \alpha^2 x$). Dans tous les cas, α^2 est donc valeur propre de f .

Montrons la réciproque : supposons que α^2 soit valeur propre de f . Alors $f - \alpha^2 \text{Id}$ n'est pas inversible, donc $(f - \alpha \text{Id}) \circ (f + \alpha \text{Id})$ n'est pas inversible. Si g et h sont deux endomorphismes inversibles, alors $g \circ h$ est également inversible. Par contraposée si $(f - \alpha \text{Id}) \circ (f + \alpha \text{Id})$ n'est pas inversible on en déduit que soit $f - \alpha \text{Id}$ n'est pas inversible, soit $f + \alpha \text{Id}$ n'est pas inversible, et donc que α est valeur propre de f ou $-\alpha$ est valeur propre de f .

Correction de l'exercice 11 :

- 1) Par définition de E , \mathcal{B} est une famille génératrice de E . Montrons qu'elle est libre : soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 + \lambda_3 \cdot f_3 = 0$ (l'application nulle).

Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_0 e^{-x} + \lambda_1 x e^{-x} + \lambda_2 x^2 e^{-x} + \lambda_3 x^3 e^{-x} = 0$. Or $e^{-x} \neq 0$ donc $\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 = 0$. Ceci étant vrai pour tout x , on en déduit que le polynôme $\lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \lambda_3 X^3$ est le polynôme nul donc que tous ses coefficients sont nuls, ainsi (f_0, f_1, f_2, f_3) est libre. C'est donc finalement une base de E .

- 2) Montrons que u est une application linéaire.

Soient $(f, g) \in E$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$u(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)' - (\lambda f + \mu g)'' = \lambda f' + \mu g' - \lambda f'' - \mu g'' = \lambda(f' - f'') + \mu(g' - g'') \text{ par linéarité de la dérivation.}$$

Ainsi, $u(\lambda f + \mu g) = \lambda u(f) + \mu u(g)$ donc u est une application linéaire.

Montrons que $u(E) \subset E$. Soit $f \in E$, il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda_0 e^{-x} + \lambda_1 x e^{-x} + \lambda_2 x^2 e^{-x} + \lambda_3 x^3 e^{-x}$. f est de classe \mathcal{C}^∞ car $x \mapsto e^{-x}$ l'est par composition de fonctions \mathcal{C}^∞ et $x \mapsto x^n$ l'est pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= -\lambda_0 e^{-x} + \lambda_1 e^{-x} - \lambda_1 x e^{-x} + 2\lambda_2 x e^{-x} - \lambda_2 x^2 e^{-x} + 3\lambda_3 x^2 e^{-x} - \lambda_3 x^3 e^{-x} \\ &= (\lambda_1 - \lambda_0) e^{-x} + (2\lambda_2 - \lambda_1)x e^{-x} + (3\lambda_3 - \lambda_2)x^2 e^{-x} - \lambda_3 x^3 e^{-x} \end{aligned}$$

donc $f' \in E$, et de même

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = (2\lambda_2 - 2\lambda_1 + \lambda_0)e^{-x} + (6\lambda_3 - 4\lambda_2 + \lambda_1)x e^{-x} + (-6\lambda_3 + \lambda_2)x^2 e^{-x} + \lambda_3 x^3 e^{-x}$$

donc $f'' \in E$, ainsi $f' - f'' \in E$ donc u est bien un endomorphisme de E . De plus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f' - f'')(x) = (-2\lambda_2 + 3\lambda_1 - 2\lambda_0)e^{-x} + (-6\lambda_3 + 6\lambda_2 - 2\lambda_1)x e^{-x} + (9\lambda_3 - 2\lambda_2)x^2 e^{-x} - 2\lambda_3 x^3 e^{-x}$$

donc

3)

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4) u est triangulaire supérieure avec des coefficients non nuls sur la diagonale donc elle est inversible.

Si u était diagonalisable, sa seule valeur propre serait -2 , et la matrice de u serait donc semblable à $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot I_4$. Ainsi il existerait $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P \times (-2I) \times P^{-1} = -2PIP^{-1} = -2I$ et u serait une homothétie de rapport -2 . Or u n'est pas une homothétie donc u n'est pas diagonalisable.

Remarque : une application linéaire (respectivement une matrice) qui n'a qu'une seule valeur propre λ n'est diagonalisable que si cette application est $\lambda \cdot \text{Id}$ (respectivement cette matrice est λI_n)

Correction de l'exercice 12 :

1) Soit $M \in C(I_k)$. Alors $MI_k = I_k M$. Si on note C_1, C_2, \dots, C_n les colonnes et L_1, L_2, \dots, L_n les lignes de M on obtient

$$\begin{pmatrix} \text{---} & L_1 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & L_k & \text{---} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left| \right. & & \left| \right. & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & \\ C_1 & \dots & C_k & \vdots & & \vdots \\ \left| \right. & & \left| \right. & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

donc $M \in C(I_k)$ si et seulement si $(i > k) \text{ ou } (j > k) \Rightarrow M_{i,j} = 0$, c'est à dire si et seulement si on peut l'écrire comme une matrice par bloc de la forme $M = \begin{pmatrix} M_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $M_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.

Ainsi $C(I_k) = \text{Vect}((E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k})$ où $(E_{i,j})$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) $M \in C(A) \iff MA = AM \iff P^{-1}MAP = P^{-1}AMP \iff P^{-1}MPP^{-1}AP = P^{-1}APP^{-1}MP \iff P^{-1}MP \in C(P^{-1}AP)$

3) Si A est la matrice dans une base \mathcal{B} d'un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ avec E un \mathbb{R} -e.v. de dimension n , alors A est diagonalisable avec pour seules valeurs propres 0 et 1, il existe donc une base de E dans laquelle la matrice de ce projecteur est I_k avec $k = \text{rg}(p)$. A est donc semblable à I_k : il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $I_k = P^{-1}AP$.

D'après la question précédente, $M \in C(A) \iff P^{-1}MP \in C(P^{-1}AP) \iff P^{-1}MP \in C(I_k) \iff P^{-1}MP \in \text{Vect}((E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k})$.

Si on pose $F = \text{Vect}((E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k})$, on a $C(A) = \{PMP^{-1} \mid M \in F\}$

Correction de l'exercice 13 :

1) Montrons que ϕ est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[x]$: soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Alors $\int_0^1 P(t) dt$ est un réel, donc $x \mapsto A(x) \int_0^1 P(t) dt$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n car A en est une. De même, $x \mapsto P(x) \int_0^1 A(t) dt = \alpha P(x)$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n donc par somme on a bien $\phi_P \in \mathbb{R}_n[x]$.

Montrons que ϕ est linéaire : soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi_{\lambda P + \mu Q}(x) &= A(x) \int_0^1 (\lambda P(t) + \mu Q(t)) dt - (\lambda P(x) + \mu Q(x))\alpha \\ &= \lambda A(x) \int_0^1 P(t) dt + \mu A(x) \int_0^1 Q(t) dt - \lambda \alpha P(x) - \mu \alpha Q(x) \end{aligned}$$

$$= \lambda \phi_P(x) + \mu \phi_Q(x)$$

donc $\phi_{\lambda P + \mu Q} = \lambda \phi_P + \mu \phi_Q$ et donc $\phi(\lambda P + \mu Q) = \lambda \phi(P) + \mu \phi(Q)$.

- 2) Soit $\lambda \in Sp(\phi)$ et soit P un vecteur propre associé à cette valeur propre. Alors $P \neq 0$ et $\phi_P = \lambda P$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad A(x) \int_0^1 P(t) dt - \alpha P(x) = \lambda P(x)$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad A(x) \int_0^1 P(t) dt = (\lambda + \alpha) P(x)$$

En intégrant sur $[0; 1]$ de chaque côté par rapport à la variable x on obtient :

$$\int_0^1 A(x) dx \int_0^1 P(t) dt = (\lambda + \alpha) \int_0^1 P(x) dx$$

donc

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^1 P(t) dt &= \lambda \int_0^1 P(x) dx + \alpha \int_0^1 P(x) dx \\ \lambda \int_0^1 P(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

donc $\lambda = 0$ ou $\int_0^1 P(x) dx = 0$. Si $\int_0^1 P(x) dx = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, \phi_P(x) = -\alpha P(x)$ et alors $\lambda = -\alpha$. On a donc bien $\lambda = 0$ ou $\lambda = -\alpha$.

- 3) Soit $Q \in \text{Im}(\phi + \alpha \text{Id})$. Il existe $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \phi_P(x) + \alpha P(x) = A(x) \times \int_0^1 P(t) dt$.
Posons $\beta = \int_0^1 P(t) dt$, puisque $Q = \beta \times A$ il suffit par linéarité de montrer que $A \in \text{Ker}(\phi)$. Or $\forall x \in \mathbb{R}, \phi_A(x) = A(x) \int_0^1 A(t) dt - A(x) \int_0^1 A(t) dt = 0$ par définition de ϕ . Ainsi $Q \in \text{Ker}(\phi)$ donc finalement $\text{Im}(\phi + \alpha \text{Id}) \subset \text{Ker}(\phi)$.
- 4) Pour $\alpha \neq 0$, $\text{Ker}(\phi + \alpha \text{Id})$ et $\text{Ker}(\phi)$ sont deux sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes (0 et α) donc ils sont en somme directe d'après le cours.
De plus, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(\phi + \alpha \text{Id})) = \dim(\mathbb{R}_n[x]) - \text{rg}(\phi + \alpha \text{Id})$. Or $\text{rg}(\phi + \alpha \text{Id}) \leq \dim(\text{Ker}(\phi))$ d'après la question précédente donc $\dim(\text{Ker}(\phi + \alpha \text{Id})) \geq \dim(\mathbb{R}_n[x]) - \dim(\text{Ker}(\phi))$.
D'après la formule de Grassmann, on a $\dim(\text{Ker}(\phi + \alpha \text{Id}) \oplus \text{Ker}(\phi)) = \dim(\text{Ker}(\phi + \alpha \text{Id})) + \dim(\text{Ker}(\phi))$ car $\text{Ker}(\phi + \alpha \text{Id}) \cap \text{Ker}(\phi) = \{0\}$ donc $\dim(\text{Ker}(\phi + \alpha \text{Id}) \oplus \text{Ker}(\phi)) \geq \dim(\mathbb{R}_n[x]) - \dim(\text{Ker}(\phi)) + \dim(\text{Ker}(\phi)) \geq \dim(\mathbb{R}_n[x])$.
Puisqu'on a $\text{Ker}(\phi + \alpha \text{Id}) \oplus \text{Ker}(\phi) \subset \mathbb{R}_n[x]$ on a $\dim(\text{Ker}(\phi + \alpha \text{Id}) \oplus \text{Ker}(\phi)) \leq \dim(\mathbb{R}_n[x])$ donc on a finalement égalité des dimensions, et enfin par inclusion et égalité des dimensions on obtient $\text{Ker}(\phi + \alpha \text{Id}) \oplus \text{Ker}(\phi) = \mathbb{R}_n[x]$.
- 5) D'après la question précédente, si $\alpha \neq 0$ alors $\mathbb{R}_n[x]$ est la somme directe de deux sous-espaces propres de ϕ donc ϕ est diagonalisable.

Si $\alpha = 0$, alors $\phi_P(x) = A(x) \times \int_0^1 P(t) dt$. On remarque qu'alors $\phi_P(\phi_P(x)) = A(x) \times \int_0^1 A(t) dt \times \int_0^1 P(t) dt = 0$, donc $\phi_P^2 = 0$. La seule valeur propre possible de ϕ est donc 0. La matrice diagonale avec des 0 sur la diagonale est la matrice nulle, et la seule matrice semblable à la matrice nulle est elle-même, donc si ϕ était diagonalisable, la matrice de ϕ serait la matrice nulle dans toutes les bases, autrement dit ϕ serait l'application nulle. C'est le cas seulement si A est le polynôme nul.

On en conclut que ϕ est diagonalisable si et seulement si $\alpha \neq 0$ ou $A = 0$.

Correction de l'exercice 14 :

- 1) Par règles de compositions d'endomorphismes :

$$\forall (v, w) \in \mathcal{L}(E), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \phi(\lambda v + w) = u \circ (\lambda v + w) = \lambda u \circ v + u \circ w = \lambda \phi(v) + \phi(w)$$

donc ϕ est bien un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

- 2) Soit λ une valeur propre de ϕ est $v \neq 0$ un vecteur propre associé (élément de $\mathcal{L}(E)$).
Alors $u \circ v = \lambda v$ donc pour tout $x \in E$, $u(v(x)) = \lambda v(x)$. Or $v \neq 0$ donc il existe un vecteur x de E tel que $v(x) \neq 0$, et d'après l'égalité précédente $v(x)$ est donc un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ , donc $\lambda \in \text{Spec}(u)$.
On a montré $\text{Spec}(\phi) \subset \text{Spec}(u)$.
- 3) Soit $\lambda \in \text{Spec}(u)$. Soit $E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$ le sous-espace propre associé et F un supplémentaire quelconque de E_λ dans E . Posons p la projection de E sur E_λ parallèlement à F (comme $E_\lambda \neq \{0\}$ on a $p \neq 0$).
Alors pour tout $x = x_1 + x_2 \in E = E_\lambda \oplus F$, on a $u \circ p(x) = u(x_1) = \lambda x_1$ et $\lambda p(x) = \lambda x_1$.
On a donc : $\forall x \in E$, $u(p(x)) = \lambda p(x)$ donc $u \circ p = \lambda p$, ainsi p est un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ .
Ainsi $\lambda \in \text{Spec}(\phi)$. On a montré $\text{Spec}(u) \subset \text{Spec}(\phi)$ donc finalement $\text{Spec}(u) = \text{Spec}(\phi)$.

- 4) a) On peut raisonner directement par équivalence :

$$\begin{aligned}
 v \in \text{Ker}(\phi - \lambda \text{Id}_{\mathcal{L}(E)}) &\iff u \circ v = \lambda v \\
 &\iff \forall x \in E, u(v(x)) = \lambda v(x) \\
 &\iff \forall x \in E, (u - \lambda \text{Id}_E)(v(x)) = 0 \\
 &\iff \text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)
 \end{aligned}$$

- b) $\text{Ker}(\phi - \lambda \text{Id}_{\mathcal{L}(E)})$ est l'ensemble des endomorphisme v de E dont l'image est dans $E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$.
 Soit $G = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid \text{Im}(v) \subset E_\lambda\}$. Alors $G = \{v \in \mathcal{L}(E, E_\lambda)\}$ donc $\dim(\text{Ker}(\phi - \lambda \text{Id}_{\mathcal{L}(E)})) = \dim(G) = \dim(E) \times \dim(E_\lambda)$
- c) On a montré dans les questions précédentes que u et ϕ ont les mêmes valeurs propres. Pour chaque valeur propre λ de u , notons E_λ^u le sous-espace propre de E associé à u , et E_λ^ϕ le sous espace propre de $\mathcal{L}(E)$ associé à ϕ . Alors :

$$\begin{aligned}
 \phi \text{ est diagonalisable} &\iff \sum_{\lambda \in \text{Spec}(\phi)} \dim(E_\lambda^\phi) = \dim(\mathcal{L}(E)) \\
 &\iff \sum_{\lambda \in \text{Spec}(\phi)} \dim(E) \times \dim(E_\lambda^u) = \dim(E) \times \dim(E) \\
 &\iff \sum_{\lambda \in \text{Spec}(\phi)} \dim(E_\lambda^u) = \dim(E) \\
 &\iff u \text{ est diagonalisable}
 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 15 :

- 1) La matrice de φ dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & & \ddots & & \ddots & & & \vdots \\
 \vdots & & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{pmatrix}$$

- 2) Soit $x = (x_1, \dots, x_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$.

$$\begin{aligned}
 x \in \text{Ker}(\varphi) &\iff \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = -x_1 \\ x_4 = -x_2 \\ x_5 = -x_3 \\ \vdots \\ x_{2n+1} = -x_{2n-1} \\ x_{2n} = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \forall k \in \{1, \dots, n\}, x_{2k} = 0 \\ (x_1, x_3, \dots, x_{2n+1}) = (x_1, -x_1, x_1, \dots, (-1)^n x_1) \end{cases} \\
 &\iff X \in \text{Vect}((1, 0, -1, \dots, (-1)^{n-1}, 0, (-1)^n))
 \end{aligned}$$

donc $\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}((1, 0, -1, \dots, (-1)^{n-1}, 0, (-1)^n))$

- 3) On en déduit $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 1$ donc $\text{rg}(\varphi) = 2n + 1 - 1 = 2n$ d'après le théorème du rang.
- 4) Soit $y = (y_1, \dots, y_{2n+1}) \in \text{Ker}(\varphi) \cap \text{Im}(\varphi)$ et $x = (x_1, \dots, x_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ tel que $y = \varphi(x)$
 $y \in \text{Vect}((1, 0, -1, \dots, (-1)^{n-1}, 0, (-1)^n))$ donc

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & x_2 \\ y_2 & = & x_1 + x_3 \\ y_3 & = & x_2 + x_4 \\ & \vdots & \\ y_{2n} & = & x_{2n-1} + x_{2n+1} \\ y_{2n+1} & = & x_{2n} \\ y_2 & = & y_4 = \dots = y_{2n} = 0 \\ y_1 & = & -y_3 = y_5 = \dots = (-1)^n y_{2n+1} \end{array} \right.$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + x_3 & = & 0 \\ x_3 + x_5 & = & 0 \\ & \vdots & \\ x_{2n-1} + x_{2n+1} & = & 0 \\ x_2 & = & -x_2 - x_4 = x_4 + x_6 = \dots = (-1)^{n-1} x_{2n-2} + (-1)^{n-1} x_{2n} = (-1)^n x_{2n} \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit que $x_2 + x_4 = x_4 + x_6 = \dots = x_{2n-2} + x_{2n} = 0$, d'où également $x_2 = x_{2n} = 0$ donc $\varphi(x) = 0$. On a donc $\text{Ker}(\varphi) \cap \text{Im}(\varphi) = \{0\}$, donc $\text{Ker}(\varphi) + \text{Im}(\varphi) = \text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Im}(\varphi)$.

Enfin, on a $\dim(\text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Im}(\varphi)) = \dim(\text{Ker}(\varphi)) + \dim(\text{Im}(\varphi)) = n$ d'après le théorème de Grassmann et le théorème du rang donc :

$$\mathbb{R}^{2n+1} = \text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Im}(\varphi)$$

5) On a d'une :

$$e^{ia}(e^{ib} + e^{-ib}) = e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)}$$

donc

$$\begin{aligned} \text{Im}(e^{ia}(e^{ib} + e^{-ib})) &= \text{Im}(e^{i(a+b)}) + \text{Im}(e^{i(a-b)}) \\ &= \sin(a+b) + \sin(a-b) \end{aligned}$$

et d'autre part, comme $e^{ib} + e^{-ib} = 2 \cos(b)$:

$$\begin{aligned} \text{Im}(e^{ia}(e^{ib} + e^{-ib})) &= 2 \cos(b) \text{Im}(e^{ia}) \\ &= 2 \cos(b) \sin(a) \end{aligned}$$

d'où l'égalité voulue.

6) Comme $(2n+2)\theta = \pi$ et que $\sin(\pi) = 0$, la j -ème coordonnée de $\varphi(v_\theta)$ est

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sin(2\theta) = \sin(0 \times \theta) + \sin(2\theta) & \text{si } j = 1 \\ \sin(2n\theta) = \sin(2n\theta) + \sin((2n+2)\theta) & \text{si } j = 2n+1 \\ \sin((j-1)\theta) + \sin((j+1)\theta) & \text{sinon} \end{array} \right.$$

dans tous les cas la j -ème coordonnée de $\varphi(v_\theta)$ est bien $\sin((j-1)\theta) + \sin((j+1)\theta)$.

7) On a pour tout $j \in \{1, 2, \dots, 2n+1\}$:

$$\sin((j-1)\theta) + \sin((j+1)\theta) = \sin(j\theta - \theta) + \sin(j\theta + \theta) = 2 \cos(\theta) \sin(j\theta)$$

donc $\varphi(v_\theta) = 2 \cos \theta v_\theta$. De plus $v_\theta \neq 0$ car $0 < \theta < \pi$ donc $\sin(\theta) > 0$.

Ainsi v_θ est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $2 \cos \theta$.

8) Pour chaque valeur de k dans $\{1, \dots, 2n+1\}$, le réel $2 \cos \theta$ est valeur propre de φ . Or la fonction $x \mapsto 2 \cos x$ est strictement décroissante sur $]0; \pi[$ donc l'application

$$\begin{aligned} \{1, \dots, 2n+1\} &\rightarrow]-\pi/2; \pi/2[\\ k &\mapsto 2 \cos\left(\frac{k\pi}{2n+2}\right) \end{aligned}$$