Correction de Maths ENS - Oraux 2016 - planche 10

Exercice 1

1. $f_n'(x) = 1 - \dfrac{n}{x}$ négative sur $]0; n[$ et positive sur $]n, +\infty[$ donc f décroissante sur $]0, n[$, croissante sur $]n, +\infty[$ admet un minimum en n qui vaut $n - n \ln n$.
   $f(x) = x\left(1 - \dfrac{n \ln x}{x}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ par croissance comparée, et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.
2. Le minimum de f est $n(1 - \ln(n) < 0$ car $n \geq 3$ donc f s'annule exactement deux fois d'après son tableau de variation et le théorème des valeurs intermédiaires (f continue, strictement monotone sur $]0, n[$ et sur $]n, +\infty[$, etc.) : une fois sur $]0, n[$ et une fois sur $]n, +\infty[$.
3. Soit $n \geq 3$ un entier quelconque fixé. D'après la question précédente on a $u_n \in]0, n[$ et comme $f_n(1) = 1 > 0$ on a $1 < u_n < n$. On a $f_n(u_n) = 0$ et $f_{n+1}(u_n) = u_n - (n+1)\ln(u_n) = u_n - n\ln(u_n) - \ln(u_n) = f_n(u_n) - \ln(u_n) = -\ln(u_n) < 0$ car $u_n > 1$. Comme $1 < u_n < n < n+1$ et que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 > f_{n+1}(u_n)$ on en déduit que $u_{n+1} < u_n$.
   La suite (u_n) est donc décroissante.
4. D'après la question précédente, (u_n) est décroissante et minorée par 1. Elle converge donc vers un réel $\ell \geq 1$.
   Supposons par l'absurde que $\ell > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_n) = \ln(\ell) > 0$ par continuité de ln. On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n\ln(u_n) = +\infty$ ce qui donne une contradiction en passant à la limite dans l'égalité $u_n = n\ln(u_n)$: $\ell = +\infty$.
   On en conclut que $\ell = 1$.
5. Pour tout $n \geq 3$, $u_n = n\ln(u_n)$ donc $u_n = \mathrm{e}^{u_n/n}$. On a donc $v_n = u_n - 1 = \mathrm{e}^{u_n/n} - 1 \sim \dfrac{u_n}{n} \sim \dfrac{1}{n}$.

Exercice 2

1. Il y a 2^m sous ensembles de E.
2. Le sous ensemble X est choisi uniformément au hasard parmi tous les sous ensembles de E donc

$$\mathbb{P}(V_k^X = 1) = \mathbb{P}(k \in X) = \frac{\text{card}(\{\text{sous ensembles de } E \text{ qui contiennent } k\})}{\text{card}(\{\text{sous ensembles de } E\})} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$$

   En effet, choisir un sous ensemble de E qui contient k revient à choisir un sous ensemble de $E \setminus \{k\}$ et à faire l'union avec $\{k\}$ (c'est à dire choisir tous les éléments qui ne sont pas k dans cet ensemble). Il y a 2^{n-1} sous ensembles de E donc 2^{n-1} façons de choisir un sous-ensemble de E qui contient k.
3. On a montré à la question précédente que $V_k^X \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$ donc il reste juste à montrer l'indépendance. Comme ce sont des variables de Bernoulli il suffit de montrer que pour tout $r \in [\![1, m$
   rbracket et tout $(i_1, ..., i_r)$ tels que $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq m$ les événements $([V_{i_1}^X = 1], \ldots, [V_{i_r}^X = 1]$ sont indépendants.
   Soit donc $(i_1, ..., i_r)$ un r uplet d'indices distincts entre 1 et m, alors

$$\mathbb{P}(V_{i_1}^X = 1, ..., V_{i_r}^X = 1) = \frac{\text{card}(\{\text{sous ensembles de } E \text{ qui contiennent } \{i_1, ..., i_r\}\})}{\text{card}(\{\text{sous ensembles de } E\})} = \frac{2^{n-r}}{2^m} = \frac{1}{2^r}$$

   En effet, choisir un sous ensemble de E qui contient $\{i_1, ..., i_r\}$ revient à choisir un sous ensemble de $E \setminus \{i_1, ..., i_r\}$, et il y a 2^{m-r} façons de faire ce choix.

   D'autre part, on a bien $\mathbb{P}(V_{i_1}^X = 1) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_{i_r}^X = 1) = \dfrac{1}{2} \times \cdots \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^r}$ donc les variables $(V_1^X, ..., V_m^X)$ sont indépendantes.
4. D'après le cours, une somme de n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On en conclut que ${}_c ard(X) \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/2)$ et donc que $E(\text{card}(X)) = \dfrac{n}{2}$ et $V(\text{card}(X)) = \dfrac{n}{4}$.
5. $\text{card}(X_1 \cap X_2)$ est à valeurs dans $\{0, ..., n\}$. Soit $k \in \{0, ..., n\}$ fixé.
   Pour que $[\text{card}(X_1 \cap X_2) = k]$ soit réalisé, il faut que X_1 et X_2 aient exactement k éléments en commun. Fixons d'abord ces k éléments (il y a $\binom{m}{k}$ façons de le faire). X_1 peut avoir entre k et m éléments, il faut donc choisir entre 0 et $m - k$ éléments différents de ceux qui sont fixés. Et X_2 peut ensuite avoir entre k et $m - \text{card}(X_1) + k$ éléments, il reste à choisir entre 0 et $m - \text{card}(X_1)$ éléments parmis ceux qui ne sont pas déjà fixés et ceux qui sont différents des éléments de X_1.
   Le nombre de façons de faire ces choix est :

$$\underbrace{\binom{m}{k}}_{\substack{\text{choix des} \\ k \text{ éléments communs}}} \times \sum_{i=0}^{m-k} \overbrace{\binom{m-k}{i}}^{\text{choix d'un ensemble } X_1 \text{ à } k+i \text{ éléments}} \underbrace{\times 2^{m-k-i}}_{\substack{\text{choix d'un ensemble } X_2 \\ \text{à } m - \text{card}(X_1) \text{ éléments}}}$$

En calculant on trouve :

$$\begin{aligned}\binom{m}{k}\sum_{i=0}^{m-k}\binom{m-k}{i}2^{m-k-i} &= \binom{m}{k}\sum_{i=0}^{m-k}\binom{m-k}{i}2^{m-k-i}\times 1^i \\ &= \binom{m}{k}(1+2)^{m-k} && \text{d'après la formule du binôme de Newton} \\ &= \binom{m}{k}3^{m-k}\end{aligned}$$

Le nombre total de choix de deux ensembles X_1 et X_2 est $2^m \times 2^m = 4^m$ donc finalement :

$$\mathbb{P}(\text{card}(X_1\cap X_2)=k) = \frac{\binom{m}{k}3^{m-k}}{4^m} = \binom{m}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{m-k}\times\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

donc $\text{card}(X_1\cap X_2)$ suit une loi binomiale de paramètres m et $\dfrac{1}{4}$.

De façon similaire, $\text{card}(X_1\cup X_2)$ est à valeurs dans $\{0,...,n\}$. Pour tout $k\in\{0,...,n\}$, choisir X_1 et X_2 tels que $\text{card}(X_1\cup X_2)=k$ revient à d'abord choisir une partie X à k éléments, puis à choisir une partie X_1 de X. X_1 a i élément avec $i\in\{0,...,k\}$, puis on choisit une partie X_2 de X qui contient au moins les éléments de $X\setminus X_1$.
Il y a $\binom{m}{k}$ façons de choisir X puis 2^k façons de choisir X_1, et enfin $2^{k-\text{card}(X_1)}$ façons de choisir X_2. Le nombre de façon de faire ces choix est donc :

$$\binom{m}{k}\times\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\times 2^{k-i} = \binom{m}{k}3^k$$

donc le même calcul donne que $\text{card}(X_1\cup X_2)$ suit une loi binomiale de paramètres m et $\dfrac{3}{4}$.

Remarque :

- Pour $[\text{card}(X_1\cap X_2)=k]$ on peut aussi voir les choses de la façon suivante : on choisi d'abord les k éléments de l'intersection, puis on décide pour chacun des $m-k$ éléments restants dans E s'il appartient à X_1, à X_2, ou à aucun des deux, ce qui fait 3^{m-k} choix possibles
- Pour $[\text{card}(X_1\cup X_2)=k]$ on peut aussi voir les choses de la façon suivante : on choisit d'abord k éléments parmi m, puis pour chacun de ces éléments on décide s'il appartient à $X_1\cap X_2$, à $X_1\setminus X_2$ ou à $X_2\setminus X_1$, ce qui fait 3^k choix possibles.

Remarque 2 (post-scriptum) : Il y avait en fait beaucoup plus rapide en utilisant les variables V^{X_1} et V^{X_2} !
On peut remarquer que pour tout i tel que $1\le i\le m$ on a $V_i^{X_1}\times V_i^{X_2} = \begin{cases}1 & \text{si } i\in X_1\cap X_2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. Comme $\mathbb{P}(V_i^{X_1}\times V_i^{X_2}=1) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$ par indépendance de X_1 et X_2, on en déduit comme à la question (4) que $\text{card}(X_1\cap X_2)$ suit la loi $\mathcal{B}(m,\frac{1}{4})$.

De même, pour tout i tel que $1\le i\le m$, on a $V_i^{X_1}+V_i^{X_2}-V_i^{X_1}V_i^{X_2} = \begin{cases}1 & \text{si } i\in X_1\cup X_2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$
Ainsi, $\text{card}(X_1\cap X_2)=\sum_{i=1}^m V_i^{X_1}+V_i^{X_2}-V_i^{X_1}V_i^{X_2}$ somme de variables de Bernoulli indépendantes (par indépendance des V_i^X) de paramètre $\mathbb{P}(V_i^{X_1}+V_i^{X_2}-V_i^{X_1}V_i^{X_2}=1)=\mathbb{P}(i\in X_1\cup X_2)=1-\mathbb{P}(i\in\overline{X_1}\cap\overline{X_2})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. On en déduit de même que $\text{card}(X_1\cup X_2)\hookrightarrow\mathcal{B}(m,3/4)$.

6. On remarque à nouveau que $V_i^{X_1\cap\cdots\cap X_n}=V_i^{X_1}\times\cdots\times V_i^{X^n}$ donc :
$Z_n=\sum_{i=1}^m V_i^{X_1}\times V_i^{X_2}\times\cdots\times V_i^{X_n}$

d'où

$$\begin{aligned}
E(Z_n) &= \sum_{i=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} E(V_i^{X_k}) && \text{par indépendance des } (X_k) \text{ donc des } V_i^{X_k} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^n} \\
&= \frac{m}{2^n} \\
&= 1 && \text{avec l'hypothèse } m = 2^n
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
V(Z_n) &= \sum_{i=1}^{m} V(V_i^{X_1} \times \cdots \times V_i^{X_n}) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^n} \times \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) && \text{car } \prod_{k=1}^{n} V_i^{X_k} \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2^n) \text{ par indépendance des } X_k \\
&= \frac{m(2^n - 1)}{4^n} \\
&= 1 - \frac{1}{2^n} && \text{avec l'hypothèse } m = 2^n
\end{aligned}$$

7. On a d'après l'inégalité de Markov, pour tout $M > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_n > M) &= \mathbb{P}(Z_n^2 > M^2) && \text{car } Z_n \geq 0 \\
&\leq \frac{E(Z_n^2)}{M^2} \\
&\leq \frac{V(Z_n) + E(Z_n)^2}{M^2} && \text{d'après l'égalité de Koenig-Huygens} \\
&= \frac{1}{M^2}\left(1 - \frac{1}{2^n} + 1\right) \\
&= \frac{1}{M^2} \times \left(2 - \frac{1}{2^n}\right)
\end{aligned}$$

d'où $\mathbb{P}(Z_n > M) \leq \dfrac{2}{M^2}$ car $2 - \dfrac{1}{2^n} < 2$.

Correction de Maths ENS - Oraux 2018 - planche 5

Exercice 1

1. À chaque étape on rajoute deux boules dans l'urne avec 2 boules au départ donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 2 + 2n = 2(n+1)$
2. Le support de V_n est $[\![1, n+1]\!]$ puisqu'au moment du n-ème tirage il y a au plus n boules vertes dans l'urne, donc après ce tirage il y en aura au plus $n+1$.
3. On ajoute une boule verte à l'étape n si ne boule verte est tirée, ce qui arrive avec probabilité $\dfrac{k}{b_{n-1}} = \dfrac{k}{2n}$ si on suppose que $V_{n-1} = k$ (c'est à dire que l'urne contient exactement k boules vertes au moment du n-ème tirage).
4. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(V_{n-1} = k)_{1 \le k \le n}$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{on ajoute une boule verte à l'étape } n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(V_{n-1} = k)\mathbb{P}(\text{on ajoute une boule verte à l'étape } n \mid V_{n-1} = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(V_{n-1} = k) \times \frac{k}{2n} \\
&= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(V_{n-1} = k) \\
&= \frac{1}{2n} E(V_{n-1})
\end{aligned}$$

5. Définissons X_n comme indiqué dans l'énoncé, alors $V_n = V_{n-1} + X_n$ donc $E(V_n) = E(V_{n-1}) + E(X_n)$ et $E(X_n) = \mathbb{P}(\text{on ajoute une boule verte à l'étape } k) = \dfrac{1}{2n} E(V_{n-1})$ d'où $E(V_n) = E(V_{n-1}) + \dfrac{1}{2n} E(V_{n-1}) = \dfrac{2n+1}{2n} E(V_{n-1})$.
6. On en déduit par récurrence immédiate que pour tout $n \ge 1$, $E(V_n) = \dfrac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1}{2n \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \cdots 4 \cdot 2} E(V_0) = \dfrac{(2n+1)!}{(2n)^2(2n-2)^2 \cdots 4^2 \cdot 2^2} = \dfrac{(2n+1)!}{4^n n^2 (n-1)^2 \cdots 2^2 \cdot 1^2} = \dfrac{(2n+1)!}{4^n (n!)^2}$.
   En utilisant l'équivalence fournie :

$$\begin{aligned}
E(V_n) &\sim \frac{\left(\dfrac{2n+1}{\mathrm{e}}\right)^{2n+1} \sqrt{2\pi(n+1)}}{4^{2n} \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} \cdot 2\pi n} \\
&\sim \left(\frac{2n+1}{n}\right)^{2n} \times \frac{2n+1}{\mathrm{e}} \times \frac{1}{4^n \sqrt{2\pi n}} \\
&\sim 4^n \times \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \times \frac{2n}{\mathrm{e}} \times \frac{1}{4^n \sqrt{2\pi n}} \\
&\sim \frac{\sqrt{2}\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} && \text{car } \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = \mathrm{e}^1 \\
&\sim C\sqrt{n}
\end{aligned}$$

   avec $C = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$

Exercice 2

1. $a^2 = a \circ (b \circ a \circ b) = (a \circ b \circ a) \circ b = b^2$
   De plus, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
b &= a \circ b \circ a \\
&= a \circ b \circ (b \circ a \circ b) \\
&= a \circ b^2 \circ a \circ b \\
&= a \circ a^2 \circ a \circ b \\
&= a^4 \circ b
\end{aligned}$$

donc en composant à droite par b^{-1} on obtient $a^4 = \mathrm{Id}_E$ donc a^2 est une involution.

2. (a) Suivons l'indication :

$$\begin{aligned}
(a+b) \circ (a-b) &= a^2 - ab + ba - b^2 \\
&= \mathrm{Id}_E - ab + ba - \mathrm{Id}_E \\
&= ba - ab
\end{aligned}$$

donc $\mathrm{Im}(ab - ba) = \mathrm{Im}(ba - ab) \subset im(a+b)$. De même :

$$\begin{aligned}
(a-b) \circ (a+b) &= a^2 + ab - ba - b^2 \\
&= ab - ba
\end{aligned}$$

donc on a aussi $\mathrm{Im}(ab - ba) \subset \mathrm{Im}(a-b)$, d'où $\mathrm{Im}(ab - ba) \subset \mathrm{Im}(a-b) \cap \mathrm{Im}(a+b)$.

(b) Si $u \in \mathrm{Im}(a-b) \cap \mathrm{Im}(a+b)$, il existe $x \in E$ tel que $(a+b)(x) = u$ et $y \in E$ tel que $(a-b)(y) = u$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
2a(u) &= (a+b)(u) + (a-b)(u) \\
&= (a+b)(a-b)(y) + (a-b)(a+b)(x) \\
&= (b \circ a - a \circ b)(y) + (a \circ b - b \circ a)x) \\
&= (a \circ b)(x-y) - (b \circ a)(x-y) \\
&= (a \circ b - b \circ a)(x-y)
\end{aligned}$$

donc $a(u) = \frac{1}{2}(a \circ b - b \circ a)(x-y)$
Finalement, $u = a^2(u)$ car a est une involution donc :

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2}(a^2 \circ b - a \circ b \circ a)(x-y) \\
&= \frac{1}{2}(b \circ a^2 - a \circ b \circ a)(x-y) && \text{car } a^2 = \mathrm{Id}_E \\
&= \frac{1}{2}(b \circ a - a \circ b)(a(x-y))
\end{aligned}$$

donc $u \in \mathrm{Im}(b \circ a - a \circ b) = \mathrm{Im}(a \circ b - b \circ a)$. On a donc montré que $\mathrm{Im}(a-b) \cap \mathrm{Im}(a+b) = \mathrm{Im}(a \circ b - b \circ a)$.