★
Exercice 1

(Oral ENS) On se donne un dé à 4 faces, numérotées 1, 2, 3 et 4. Ce dé n'est pas forcément équilibré : chaque face $i \in \{1,2,3,4\}$ a une certaine probabilité notée $a_i > 0$ d'être tirée. On modélise cela par $\Omega = \{1,2,3,4\}$ et $\mathbb{P}$ la probabilité associée. On s'intéressera aux événements $A = \{1,3\}$ et $B = \{1,2\}$.
On introduit les vecteurs $x = (\sqrt{a_1}, 0, \sqrt{a_3}, 0)$ et $y = (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, 0, 0)$. On considère D la droite de $\mathbb{R}^4$ engendrée par le vecteur $z = \left(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}, \sqrt{a_4}\right)$. Enfin, on note π la projection orthogonale sur D.

1) Exprimer la probabilité conditionnelle d'avoir A sachant l'événement B en fonction de (a_1, a_2, a_3, a_4).
2) Combien vaut la norme du vecteur z ? Autrement dit calculer $\|z\|$.
3) Calculer $\pi(x)$ et $\pi(y)$. On exprimera les résultats en fonction des coefficients a_i et de z.
4) Montrer que les événements A et B sont indépendants si et seulement si les vecteurs $x - \pi(x)$ et $y - \pi(y)$ sont orthogonaux.

★
Exercice 2

Soit $n \geq 1$ un entier. On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{array}$$

Dans cet exercice, si $X \in \mathbb{R}^n$ et $Y \in \mathbb{R}^n$, on notera $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

1) a) Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a $\phi(X,X) \geq 0$.
   b) Trouver toutes les valeurs de $X \in \mathbb{R}^n$ telles que $\phi(X,X) = 0$.
   c) Soit $X \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $\phi(X,Y) = 0$ pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $X = 0$ (où 0 est le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$).
2) On fixe $X \in \mathbb{R}^n$ et on considère la fonction

$$\psi_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ Y & \longmapsto & \phi(X,Y) \end{array}$$

   a) Montrer que ψ_X est une application linéaire.
   b) Quels sont le rang et la dimension du noyau de ψ_X ? Justifier.
   c) On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ définie par $f(X) = \psi_X$ est un isomorphisme d'espace vectoriels

★ ★
Exercice 3

(Oral ENS) On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et un vecteur de coordonnées $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) Donner le rang de A et déterminer une base de son noyau.
2) L'équation $AX = B$ admet-elle une solution ?

On note u l'endomorphisme associé à la matrice A et $b \in \mathbb{R}^3$ le vecteur de coordonnées B dans la base canonique. En notant $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$, on définit l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|u(x) - b\|^2 \end{array}$$

3) Montrer que l'application f admet un minimum. Y a-t-il un unique minimiseur ?
4) Montrer que x minimise f si et seulement si $(b - u(x)) \in \mathrm{Im}(u)^{\perp}$
5) En déduire que x minimise f si et seulement si ses coordonnées $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifient $A^T A X = A^T B$
6) Calculer l'ensemble des minimiseurs de f, dont les coordonnées sont appelées *pseudo-solutions* de l'équation $AX = B$.

⋆⋆⋆

Exercice 4

(Oral ENS) Alice et Bob jouent à pierre-feuille-ciseau. Chacun choisit l'un des trois signes de façon cachée puis les signes sont révélés. Si les signes révélés sont feuille-ciseaux, la personne ayant choisi les ciseaux a un score de 3 points et l'autre un score (négatif) de -3 points. En cas de duel pierre-ciseaux, la personne ayant choisi la pierre a un score de 2 points et l'autre -2 points. Lors d'un duel pierre-feuille, la personne ayant choisi la feuille a 1 point et l'autre -1 points. Enfin, si Alice et Bob choisissent le même signe, chacun marque 0 point.
On se donne p, f et c trois réels dans $[0,1]$ tels que $p+f+c=1$. La stratégie d'Alice consiste à choisir la pierre avec probabilité p, la feuille avec probabilité f et les ciseaux avec probabilité c. De même, on se donne p', f' et c' trois réels dans $[0,1]$ tels que $p'+f'+c'=1$ et la stratégie de Bob consiste à choisir la pierre avec probabilité p', la feuille avec probabilité f' et les ciseaux avec probabilité c'. Ces choix sont effectués de façon indépendants. Enfin, on introduit la matrice et le vecteurs suivants :

$$M=\begin{pmatrix}0&1&-2\\-1&0&3\\2&-3&0\end{pmatrix}\qquad v=\begin{pmatrix}p\\f\\c\end{pmatrix}\qquad v'=\begin{pmatrix}p'\\f'\\c'\end{pmatrix}$$

1) Exprimer le produit scalaire de v' et de Mv en fonction de p,f,c,p',f',c'.
2) Calculer l'espérance du score d'Alice et montrer qu'elle est égale au produit scalaire de v' et Mv.
3) Trouver une base du noyau de M
4) Démontrer qu'il existe une unique stratégie (p,f,c) pour Alice qui est telle que l'espérance de son score soit nulle quelle que soit la stratégie (p',f',c') de Bob. Déterminer cette stratégie.
5) Si Alice applique une stratégie autre que celle de la question précédente, montrer qu'il existe une stratégie pour Bob telle que l'espérance du score d'Alice soit strictement négative et qu'il existe une stratégie pour Bob telle que l'espérance du score d'Alice soit strictement positive.

⋆⋆

Exercice 5

(Oral ENS) Soit n un entier non nul et $E=\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel.
Soit p un entier non nul et $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de vecteur de E telle qu'il existe deux réels A et B strictement positifs vérifiant

$$\forall x\in E,\quad A||x||^2\leq\sum_{i=1}^{p}\langle x,e_i\rangle^2\leq B||x||^2$$

1) Soit $F=\text{Vect}\,(e_1,...,e_p)$. Montrer que $F=E$.
2) Montrer que si $A=B=1$, et si tous les vecteurs e_i sont de norme égale à 1, alors la famille $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ est une base orthonormée de E.

⋆⋆⋆

Exercice 6

(Oral ENS) Dans cet exercice, $\langle x,y\rangle$ désigne le produit scalaire entre deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^d$ et $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne associée. Pour tout ensemble $\mathcal{E}=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ de n vecteurs de $\mathbb{R}^d$, on définit l'inertie de $\mathcal{E}$ comme la moyenne des distances au carrés des vecteurs de $\mathcal{E}$ à leur barycentre :

$$\mathcal{I}(\mathcal{E})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|x_i-\overline{x}\,(\mathcal{E})\|^2\,,$$

où $\overline{x}\,(\mathcal{E})=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$.
Dans la suite de l'exercice, on fixe un ensemble $\mathcal{E}$ de n vecteurs vérifiant $\sum_{i=1}^n x_i=0$. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^d$ tel que $\|u\|=1$. $p_u:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ désigne la projection orthogonale sur la droite vectorielle engendrée par u.

1) Montrer que $p_u(x)=\langle x,u\rangle u$.
2) Calculer l'inertie de l'ensemble $\mathcal{F}_u=\{p_u(x_1),...,p_u(x_n)\}$ obtenu par projection des vecteurs de $\mathcal{E}$ sur $\text{Vect}\,(u)$. Montrer qu'il existe un endomorphisme f de $\mathbb{R}^d$ que l'on précisera tel que $\mathcal{I}\,(\mathcal{F}_u)=\langle u,f(u)\rangle$.
3) On admet que l'endomorphisme f admet une base orthonormée de vecteurs propres. Montrer que $\displaystyle\max_{u\in\mathbb{R}^d,\|u\|=1}\mathcal{I}\,(\mathcal{F}_u)=\lambda_{\max}$ où $\lambda_{\max}$ désigne la plus grande valeur propre de f. Pour quel vecteur u ce maximum est-il atteint ?

Le coin des khûbes

⋆ ⋆

Exercice 7

Soit n un entier naturel avec $n \geq 3$. On note $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qu'on assimile à $\mathbb{R}^n$. Soient A et B deux éléments de E non nuls et non colinéaires. On pose :

$$M = A\,{}^tB + B\,{}^tA$$

1) Déterminer le rang de M ainsi que son noyau.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M et $E_1 = \mathrm{Vect}\,(A, B)$.

2) a) Montrer que la restriction de f à E_1 induit un endomorphisme de E_1 noté φ.
   b) Donner la matrice de φ dans la base (A, B) de E_1.
3) a) Déterminer les valeurs propres de φ
   b) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
4) a) En déduire que f est diagonalisable.

⋆ ⋆

Exercice 8

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie la condition suivante :

$$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2,\ \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$$

1) Établir que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \langle f(x), x \rangle = 0$$
2) On admet que tout endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ admet au moins une valeur propre réelle. Montrer, en utilisant l'égalité obtenue à la question précédente, que 0 est la seule valeur propre réelle de f.
3) Dans la suite, on se propose de montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$
Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.
4) Résoudre le problème posé si $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3$.
5) On suppose que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$.
   a) Montrer que l'on peut trouver une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, où $e_1 \in \mathrm{Im}(f)$ et où (e_2, e_3) est une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(f)$.
   b) Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :
   $$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   c) Vérifier que $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f puis montrer que b et c sont nuls.
   d) En considérant le réel $\langle f(e_1), e_1 \rangle$, donner la valeur de α. Que dire de l'hypothèse $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$?
6) On suppose que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.
   a) Montrer que l'on peut trouver une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, où (e_1, e_2) est une base orthonormale de $\mathrm{Im}(f)$ et où $e_3 \in \mathrm{Ker}(f)$.
   b) Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :
   $$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   c) Montrer que a et d sont nuls et que $c = -b$.
   d) Conclure.