★ ★
Exercice 1 — Voir correction

Calculer les développements limités suivants

1) DL à l'ordre 3 en 0 de $\mathrm{e}^{\sin x}$
2) DL à l'ordre 3 en 0 de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$
3) DL à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$
4) DL à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{\sin(x)}{\mathrm{e}^x}$

★ ★
Exercice 2 — Voir correction

Déterminer les limites suivantes à l'aide de développements limités

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2^{1/x}+3^{1/x}-5^{1/x})^x$
2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin 5\pi x}{\sin 4\pi x}$
4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

★
Exercice 3 — Voir correction

Étudier la nature des séries suivantes :

1) $\sum_{n\geq1}(1-\cos(\frac{1}{n}))$
2) $\sum_{n\geq1}(\mathrm{e}^{1/n}-\mathrm{e}^{1/(n+1)})$
3) $\sum_{n\geq1}\ln\left(\dfrac{\cos(1/n)}{1-\sin(1/n)}\right)$
4) $\sum_{n\geq1}n^{8/3}(\cos(1/n)-\mathrm{e}^{-1/(2n^2)})$

★
Exercice 4 — Voir correction

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x\,\mathrm{e}^x-\sin(x)-x^2}{\ln(1+x)-x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Donner un développement limité d'ordre 2 en 0 de f.
3) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On appelle g ce prolongement.
4) Montrer que g est dérivable en 0, et déterminer $g'(0)$.
5) Déterminer l'équation de la tangente T en 0 au graphe Γ de g et préciser les positions relatives de Γ et de T au voisinage de 0

★
Exercice 5 — Voir correction

On considère la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et préciser $f'(0)$.
3) Montrer que f n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

★
Exercice 6 — Voir correction

1) Soit f la fonction réelle de la variable réelle définie par $f(x)=\sqrt{x^2-9x+8}$.
   Après avoir étudier l'ensemble de définition de f, déterminer deux asymptotes oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ à $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f.
2) Mêmes questions avec la fonction g définie par $g(x)=x\exp\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)$.

⋆ ⋆
Exercice 7 — Voir correction

Soit n un entier pair et soit $P : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$. Montrer que P n'a pas de racine multiple.

⋆
Exercice 8 — Voir correction

Soit P un polynôme à coefficients réels.

1) Montrer que si λ est une racine complexe de P, alors $\overline{\lambda}$ est racine de P avec la même multiplicité que λ.
2) Supposons que toutes les racines réelles de P soient de multiplicité paire. Montrer que n est pair.

⋆
Exercice 9 — Voir correction

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$
2) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t$
3) $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$
4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^5}$
5) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{e}^u}{(1+\mathrm{e}^u)^2}\,\mathrm{d}u$
6) $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$

⋆ ⋆
Exercice 10 — Voir correction

(ENS 2021) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$.

1) Justifier que (u_n) est bien définie et étudier son sens de variations.
2) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$ et $w_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$.

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\ln(n+1)}{\mathrm{e}} \leq v_n$ et $0 \leq w_n \leq \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
3) En déduire la limite de la suite (u_n)
4) On cherche maintenant à obtenir un résultat plus précis.
   a) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x \leq I$
   c) En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 11 — Voir correction

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

1) Donner l'ensemble D des réels pour lesquels cette intégrale a un sens.
2) Montrer que f est dérivable sur D et que sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$. En déduire les variations de f.
3) Soit g la fonction définie par $g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1}$. Montrer que $f(x) - g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 1, et en déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1.
4) On prolonge alors f par continuité en 1 (on note encore f ce prolongement). Étudier la dérivabilité de f en 1.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 12 — Voir correction

Soit f une fonction définie et continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$, et vérifiant $f \circ f = f$.
On note $a = \min\{f(x)\ ,\ x \in [0,1]\}$ et $b = \max\{f(x)\ ,\ x \in [0,1]\}$.

1) Justifier l'existence de a et de b.

2) Quelle est la restriction de f à $[a, b]$?
3) Quelles sont toutes les fonctions non constantes vérifiant toutes les hypothèses ci-dessus ? On pourra considérer les valeurs de $f'(a)$ et de $f'(b)$.
4) Quelles sont toutes les fonctions f continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ vérifiant $f \circ f = f$?

Le coin des Khûbes

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 13 — Voir correction

Soit f la fonction définie par :

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
2) Justifier que la restriction de f à $]0; +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x}$$

4) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

⋆ ⋆

Exercice 14 — Voir correction

(D'après ESCP 1994) Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x$$

1) Calculer u_0 et u_1.
2) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
   b) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
3) a) Exprimer, pour tout $n \geq 1$, u_n en fonction de u_{n-1} et de n.
   b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = n!\left(\mathrm{e} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$
4) Soit a un nombre réel et soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par les conditions :

$$v_0 = a \quad \text{et pour tout entier } n \geq 1, \quad v_n = nv_{n-1} - 1$$

Montrer que si $a \neq u_0$, la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est divergente.
5) a) Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{u_{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

   b) En déduire qu'il existe deux constantes c_1 et c_2, que l'on déterminera, telles qu'on ait

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

⋆

Exercice 15 — Voir correction

(ENS 2025)

1) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $x^n = 2x+1$ d'inconnue x admet une unique solution positive. Cette solution est notée u_n.
2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est monotone, puis qu'elle converge vers une limite $\ell \geq 1$.
3) Montrer que $\ell = 1$.
4) On pose $\varepsilon_n = u_n - 1$ pour tout $n \geq 2$.
   a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $n\ln(1+\varepsilon_n) = \ln(3+2\varepsilon_n)$.
   b) En déduire que $n\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(3)$.

⋆

Exercice 16 — Voir correction

(ENS 2025)
Soit $\alpha > 0$. Pour tout entier $n \geq 1$ et $x \geq 0$ on pose :

$$f_n(x) = x - \arctan(x) - n^\alpha$$

1) Montrer que pour tout $n \geq 1$ il existe un unique $x \geq 0$ tel que $f_n(x) = 0$, qu'on notera u_n dans la suite.
2) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.
3) Démontrer que pour tout $x > 0$ on a $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$
4) Démontrer que $n^\alpha(u_n - n^\alpha - \pi/2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) À l'ordre 3 au voisinage de 0 on a $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\mathrm{e}^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{6} + o(u^3)$.
On compose ces deux DL en tronquant tous les termes d'ordre ≥ 4 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3\right) \\
&= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\
&\boxed{= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)}
\end{aligned}$$

Remarque : le terme d'ordre 3 est nul dans le DL de $\mathrm{e}^{\sin x}$ (tout comme le terme d'ordre 2 est nul dans le DL de $\sin x$, on peut tout de même écrire $\sin x = x + o(x^2)$).

2) $\forall x \neq 0$, $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)$. Or $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + o(x^4)$ donc $\dfrac{1}{x}\ln(1+x) = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + o(x^3)$ est un DL de $\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$ à l'ordre 3.

Si on retire 1 à cette epression elle tend vers 0 en 0 et en composant par le DL $\exp(u) = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{6} + o(u^3)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x) - 1\right) &= 1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^3 + o(x^3) \\
&= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{1}{8}x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3) \\
&\boxed{= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + o(x^3)}
\end{aligned}$$

d'où finalement en multipliant par e : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}}{2}x + \dfrac{11\,\mathrm{e}\,x}{24}x^2 - \dfrac{7\,\mathrm{e}}{16}x^3$

3) Au voisinage de 0 on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\mathrm{e}^x} &= \frac{1}{2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right)^3 + o(x^3)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{8} + o(x^3)\right) \\
&\boxed{= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + o(x^3)}
\end{aligned}$$

4) Au voisinage de 0, $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.
Ainsi,

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

$$= 1 - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^2 - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3)$$

$$= 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^2 + x^3 - x^3 + o(x^3)$$

$$= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Ainsi

$$\frac{\sin x}{e^x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \times \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

$$\boxed{= x - x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$$

Correction de l'exercice 2 :

1) **Attention :** on ne peut pas utiliser le DL de $(1+x)^\alpha$ car α doit être constant, ici les exposants sont x et $\frac{1}{x}$ donc sont des variables.
Pour tout $x > 0$ on a $(2^{1/x} + 3^{1/x} - 5^{1/x})^x = \exp(x \ln(2^{1/x} + 3^{1/x} - 5^{1/x}))$
Cherchons la limite de $x \ln(2^{1/x} + 3^{1/x} - 5^{1/x})$ lorsque $x \to +\infty$.
$2^{1/x} = \exp(\ln(2)/x)$ avec $\frac{\ln(2)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $2^{1/x} = 1 + \frac{\ln(2)}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. De même, $3^{1/x} = 1 + \frac{\ln(3)}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ et $5^{1/x} = 1 + \frac{\ln(5)}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
On en déduit que $2^{1/x} + 3^{1/x} - 5^{1/x} = 1 + \frac{\ln(2) + \ln(3) - \ln(5)}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \ln\left(\frac{6}{5}\right) \times \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$
En composant par $\ln(1+u) = u + o(u)$ on obtient que $\ln(2^{1/x} + 3^{1/x} - 5^{1/x}) = \ln\left(\frac{6}{5}\right) \times \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ donc $x \ln\left(2^{1/x} + 3^{1/x} - 5^{1/x}\right) = \ln\left(\frac{6}{5}\right) + o(1)$ et ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} x \ln\left(2^{1/x} + 3^{1/x} - 5^{1/x}\right) = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$ et finalement par composition de limites, $(2^{1/x} + 3^{1/x} - 5^{1/x})^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \exp\left(\ln\left(\frac{6}{5}\right)\right) = \frac{6}{5}$.

2) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = \exp\left(\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)$.
Or, $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$.
Il s'ensuit que $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2)$ par composition avec $\ln(1+u) = u + o(u)$ donc $\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{1}{6} + o(1)$ donc $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = e^{-\frac{1}{6}}$.

3) On pose le changement de variable $u = x - 1$ et on étudie $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sin(5\pi(u+1))}{\sin(4\pi(u+1))}$.
On a $\sin(5\pi(u+1)) = \sin(5\pi u + \pi) = -\sin(5\pi u)$ et $\sin(4\pi(u+1)) = \sin(4\pi u + 4\pi) = \sin(4\pi u)$.
Lorsque u tend vers 0 on a $\sin(5\pi u) \sim 5\pi u$ et $\sin(4\pi u) \sim 4\pi u$ donc $\lim\limits_{u\to0} \frac{-\sin(5\pi u)}{\sin(4\pi u)} = \frac{-5\pi}{4\pi} = -\frac{5}{4}$ donc $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sin 5\pi x}{\sin 4\pi x} = -\frac{5}{4}$.

4) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $\frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right)} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + o(1)$ donc $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2} + o(1)$ et finalement $\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 3 :

1) Lorsque $n \to +\infty$ on a :

$$1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $1-\cos(1/n) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$. La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge car $2>1$ donc par comparaison de séries positives $\sum_{n\geq 1}(1-\cos(1/n))$ converge.

2) Lorsque $n \to +\infty$ on a :

$$\begin{aligned}
e^{1/n} - e^{1/(n+1)} &= e^{1/(n+1)}\left(e^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}} - 1\right) \\
&= e^{1/(n+1)}\left(e^{1/(n(n+1))} - 1\right) \\
&= e^{1/(n+1)}\left(\frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

or la série de Riemann $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge car $2>1$ donc par comparaison de séries positives $\sum_{n\geq 1}(e^{1/n}-e^{1/(n+1)})$ converge.

3) Lorsque $n \to +\infty$ on a :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{\cos(1/n)}{1-\sin(1/n)}\right) &= \ln\left(\frac{1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right) \\
&= \ln\left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \ln\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

or la série harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge donc par comparaison de séries positives la série $\sum_{n\geq 1}\ln\left(\dfrac{\cos(1/n)}{1-\sin(1/n)}\right)$ diverge.

4) Lorsque $n \to +\infty$ on a :

$$\begin{aligned}
n^{8/3}(\cos(1/n)-e^{-1/(2n^2)}) &= n^{8/3}\left[\left(1-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{24n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)-\left(1-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{48n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right] \\
&= n^{8/3}\left(\frac{1}{48n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \\
&= \frac{1}{48n^{4/3}}+o\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)
\end{aligned}$$

donc $n^{8/3}(\cos(1/n)-e^{-1/(2n^2)}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{48n^{4/3}}$. Or la série de Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{4/3}}$ converge car $\frac{4}{3}>1$ donc par comparaison de séries positives la série converge.

Correction de l'exercice 4 :

1) Pour tout réel x, $f(x)$ est définie si et seulement si $1+x>0$ et $\ln(1+x)-x\neq 0$.
Or, pour tout $x\geq -1$, $\ln(1+x)\leq x$ avec égalité si et seulement si $x=0$ (on peut le prouver en étudiant la fonction $h(x)=x-\ln(1+x)$ par exemple).
Ainsi, f est définie sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$.

2) En 0 on a $\ln(1+x)-x = -\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+o(x^4)$ et $x\,e^x-\sin(x)-x^2 = x+x^2+\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^4}{6}-x+\dfrac{x^3}{6}-x^2+o(x^4) = \dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{x^4}{6}+o(x^4)$.
Ainsi,

$$f(x) = \frac{\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{6}+o(x^4)}{-x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right)}$$

$$= -2\frac{\frac{2x}{3}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}{1-\frac{2x}{3}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}$$

$$= -2\left(\frac{2x}{3}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\left(1+\frac{2x}{3}-\frac{x^2}{2}+\left(\frac{2x}{3}-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^2)\right)$$

$$= -\left(\frac{4x}{3}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)\left(1+\frac{2x}{3}-\frac{x^2}{4}+\frac{4x^2}{9}+o(x^2)\right)$$

$$= -\left(\frac{4x}{3}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)\left(1+\frac{2x}{3}-\frac{7x^2}{36}+o(x^2)\right)$$

$$= -\frac{4x}{3}-\frac{8x^2}{9}-\frac{x^2}{3}+o(x^2)$$

$$= -\frac{4x}{3}-\frac{11x^2}{9}+o(x^2)$$

3) D'après la question précédente, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ donc on peut prolonger f en une fonction g continue définie sur $]-1;+\infty[$ par $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$.

4) D'après la question 2, pour tout $x\neq 0$ on a $\dfrac{g(x)}{x}=-\dfrac{4}{3}-\dfrac{11x}{9}+o(x)$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=-\dfrac{4}{3}$. Ainsi g est dérivable en 0et $g'(0)=\dfrac{-4}{3}$.

5) Puisque $g(0)=0$, l'équation de la tangente en 0 à Γ est $y=-\dfrac{4}{3}x$. Dans le développement limité de g au voisinage de 0, le terme suivant $-\dfrac{4}{3}x$ est $-\dfrac{11x^2}{9}$ donc au voisinage de 0, la courbe Γ est située en dessous de T.

Correction de l'exercice 5 :

1) $x\mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$, $x\mapsto \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc par composition $x\mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$. Enfin, $x\mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions continues.

   Pour tout $x\neq 0$, $-1\leq \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq 1$ donc $-x^2\leq x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq x^2$ et ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ donc puisque $f(0)=0$ on en déduit que f est continue en 0.

   Finalement, f est bien continue sur $\mathbb{R}$.

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonctions dérivables, comme dans la question 1.

   De plus, pour tout $x\neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)}{x}=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   Pour tout $x\neq 0$, $-1\leq \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq 1$ donc $-|x|\leq x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq |x|$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$. On en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=0$.

3) Pour tout $x\neq 0$, $f'(x)=2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)+x^2\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)=2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   Or, $2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\xrightarrow[x\to 0]{}0$ et $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite lorsque $x\to 0$. En effet, si $x_n=\dfrac{1}{2\pi n}$ on a $\cos\left(\dfrac{1}{x_n}\right)=\cos(2\pi n)=1\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ et si $x_n=\dfrac{1}{(2\pi n+\pi)}$ on a $\cos\left(\dfrac{1}{x_n}\right)=\cos(2\pi n+\pi)=\cos(\pi)=-1\xrightarrow[n\to+\infty]{}-1$ ce qui contredit l'unicité de la limite.

   On en déduit que $f'(x)$ ne tend pas vers $f'(0)$ lorsque x tend vers 0 donc f' n'est pas continue en 0, donc f n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 6 :

1) Pour tout réel x, $f(x)$ est défini si et seulement si $x^2-9x+8\geq 0$. Or $x^2-9x+8=(x-8)(x-1)$ donc f est définie sur $]-\infty;1]\cup[8;+\infty[$.

   Pour tout x dans l'ensemble de définition de f, on a

$$\sqrt{x^2-9x+8}=|x|\sqrt{1-\frac{9}{x}+\frac{8}{x^2}}$$

$$= |x|\left(1-\frac{9}{2x}+o\left(\frac{9}{2x}\right)\right) \qquad \text{d'après le DL de } \sqrt{1+u} \text{ lorsque } u\to 0$$

m

Ainsi, si $x>0$ on a $f(x)=x-\frac{9}{2}+o(1)$ lorsque $x\to+\infty$ donc $f(x)-x+\frac{9}{2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ donc la droite d'équation $y=x-\frac{9}{2}$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.

De même, si <0 on a $f(x)=-x+\frac{9}{2}+o(1)$ donc la droite d'équation $y=-x+\frac{9}{2}$ est asymptote oblique à la courbe de f en $-\infty$.

2) Pour tout réel x, $g(x)$ est défini si et seulement si $x^2-1\neq 0 \Longleftrightarrow x\neq 1$ et $x\neq -1$ donc g est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.
En $+\infty$ et en $-\infty$ on a $\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2}{x}\times\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{x}\left(1+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.
Ainsi, $\exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)=1+\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$ donc $g(x)=x+2+o(2)$ et ainsi $x+2$ est asymptote oblique à la courbe représentative de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

Correction de l'exercice 7 : On a $P'(x)=\sum_{k=0}^{n-1}x^k$ donc pour tout $x\neq 1$, $P'(x)=\frac{1-x^n}{1-x}$.

$P'(1)=\sum_{k=0}^{n-1}1=n$ donc 1 n'est pas racine de P', et pour tout $x\neq 1$ on a $P'(x)=0\Longleftrightarrow 1-x^n=0\Longleftrightarrow x=1$ ou $x=-1$ car n est pair.

Ainsi, (-1) est la seule racine de P'. Montrons que -1 n'est pas racine de P, c'est à dire que $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}\neq 0$. Pour cela on étudie la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$.

Les suites $a_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}$ et $b_n=\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k}$ sont adjacentes :

— $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_{n+1}-a_n=\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2}+\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+1}<0$ donc (a_n) est strictement décroissante.

— $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $b_{n+1}-b_n=\frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3}+\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2}=\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+3}>0$ donc (b_n) est strictement croissante.

— $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $b_n-a_n=\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}=-\frac{1}{2n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

Ainsi, $\forall n\geq 2$, $b_0<b_n\leq a_n<a_1$ (et $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ mais la limite ne nous sert pas ici).

On en conclut que $\forall n\geq 2$, $b_0<u_n<a_1$ donc $-1<u_n<-\frac{1}{2}$. Ainsi, $P(-1)\neq 0$.
Finalement, P n'a pas de racine multiple.

Correction de l'exercice 8 :

1) Soit $(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ les coefficients réels de P tels que $P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$.
Supposons que $\lambda\in\mathbb{C}$ est racine de P. Alors $P(\lambda)=0$ donc $\sum_{k=0}^{n}a_k\lambda^k=0$. En passant au conjugué dans cette égalité on obtient :

$$\overline{\sum_{k=0}^{n}a_k\lambda^k}=0$$

donc par propriété algébrique du conjugué :

$$\sum_{k=0}^{n}\overline{a_k}\,\overline{\lambda}^k=0$$

Or les a_i sont réels donc $\forall i, \overline{a_i}=a_i$ et ainsi $\sum_{k=0}^{n}a_k\overline{\lambda}^k=0$, c'est à dire $P\left(\overline{\lambda}\right)=0$, $\overline{\lambda}$ est bien racine de P.
Comme P est à coefficient réel, toutes les dérivées de P sont des polynômes à coefficients réels donc pour tout $k\geq 0$, $P^{(k)}(\lambda)=0\Longleftrightarrow P^{(k)}\left(\overline{\lambda}\right)=0$ d'où l'on déduit que $\overline{\lambda}$ a la même multiplicité que λ si λ est racine de P.

2) Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ les racines réelles de P et $\mu_1,\dots,\mu_p,\overline{\mu_1},\dots,\overline{\mu_p}$ les racines complexes non réelles de P. Notons k_{λ_i} et k_{μ_i} la multiplicité de ces racines.
Alors P se factorise sous la forme $P(x)=a_n\prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)^{k_{\lambda_i}}\times\prod_{j=1}^{p}(X-\mu_j)^{k_{\mu_j}}\times\prod_{j=1}^{p}\left(X-\mu_j\right)^{k_{\mu_j}}$ car pour tout j, μ_j et $\overline{\mu_j}$ ont la même multiplicité.
Ainsi, $P(x)=a_n\prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)^{k_{\lambda_i}}\times\prod_{j=1}^{p}[(X-\mu_j)(X-\overline{\mu_j})]^{k_{\mu_j}}=a_n\prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)^{k_{\lambda_i}}\prod_{j=1}^{p}(X^2-2Re(\mu_j)X+|\mu_j|^2)^{k_{\mu_j}}$.
Si toutes les racines réelles de P ont une multiplicité paire, alors le degré de ce polynôme est pair car pour tout j, $\deg(X^2-2Re(\mu_j)X+|\mu_j|^2)^{k_{\mu_j}})=2k_{\mu_j}$ est pair.

Correction de l'exercice 9 :

1) On a

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2}\right]_0^1$$
$$\boxed{= \frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)}$$

2) Par intégration par partie :

$$\int_0^1 \ln(1+t) = [(1+t)\ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 (1+t)\times\frac{1}{(1+t)}\,\mathrm{d}t$$
$$\boxed{= 2\ln(2)-1}$$

3) Par intégration par partie :

$$\int_0^\pi x^2\sin x\,\mathrm{d}x = \left[-x^2\cos(x)\right]_0^\pi + \int_0^\pi 2x\cos x\,\mathrm{d}x$$
$$= \pi^2 + [2x\sin x]]_0^\pi - \int_0^\pi 2\sin x\,\mathrm{d}x$$
$$= \pi^2 + 0 - [-2\cos x]_0^\pi$$
$$\boxed{= \pi^2 - 4}$$

4) On a :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^5} = \int_0^1 (1+x)^{-5}\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{(1+x)^{-4}}{-4}\right]_0^1$$
$$= \left[\frac{-1}{4(1+x)^4}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^4}\right)$$
$$\boxed{= \frac{15}{64}}$$

5) On a :

$$\int_0^2 \frac{\mathrm{e}\,5}{(1+\mathrm{e}^u)^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{-1}{1+\mathrm{e}^u}\right]_0^2$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{1+\mathrm{e}^2}$$
$$\boxed{= \frac{\mathrm{e}-1}{2+2\,\mathrm{e}^2}}$$

6) On a :

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)} = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+(\sqrt{x})^2}$$

$$= \left[2\arctan(\sqrt{x})\right]_1^3$$
$$= 2\arctan(\sqrt{3}) - 2\arctan(1)$$
$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{\pi}{6}$$

Correction de l'exercice 10 :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}$ est continue sur $[0;+\infty[$. En $+\infty$ on a $x^2\dfrac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \sim \dfrac{x^2 e^{-x}}{x} \sim x e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+\frac{x}{n}}\,dx$ converge par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;+\infty[$, $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{n}$ donc $x + \dfrac{1}{n+1} \leq x + \dfrac{1}{n}$ donc $\dfrac{1}{x+\frac{1}{n+1}} \geq \dfrac{1}{x+\frac{1}{n}}$ donc finalement :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;+\infty[, \quad \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \leq \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n+1}}$$
On en déduit en intégrant :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}$$
donc (u_n) est croissante.

2) Pour tout $x \in [0;1]$, $e^{-1} \leq e^{-x}$ donc $\dfrac{e^{-1}}{x+\frac{1}{n}} \leq \dfrac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}$.
En intégrant sur $[0;1]$, on obtient $\dfrac{1}{e}\left[\ln\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]_0^1 \leq v_n$. Or $\left[\ln\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{1}{n}\right) = \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \ln(n+1)$ d'où $\dfrac{\ln(n+1)}{e} \leq v_n$.
De plus, pour tout $x \geq 1$, $\dfrac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \leq e^{-x}$ donc $w_n \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{A\to+\infty}(e^{-1}-e^{-A}) = e^{-1}$ d'où $0 \leq w_n \leq \dfrac{1}{e}$ (w_n est l'intégrale d'une fonction positive sur $[1;+\infty[$ donc est positif.

3) Puisque $u_n = v_n + w_n$ d'après la relation de Chasles et que $w_n \geq 0$, on a $u_n \geq v_n \geq \dfrac{\ln(n+1)}{e}$ pour tout $n \in \mathbb{N}*$. Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{e} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4) a) $x \mapsto \dfrac{1-e^{-x}}{x}$ est continue sur $]0;1]$ et au voisinage de 0 on a $\dfrac{1-e^{-x}}{x} = \dfrac{1-(1-x+o(x))}{x} = 1+o(1)$ donc $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1-e^{-x}}{x} = 1$. Cette fonction se prolonge par continuité en 0 donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$ converge.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;1]$ $1-e^{-x} \geq 0$ donc $\dfrac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \geq 0$, et $\dfrac{1}{x+\frac{1}{n}} \leq \dfrac{1}{x}$ donc $\dfrac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \leq \dfrac{1-e^{-x}}{x}$, ainsi en intégrant sur $[0;1]$ on obtient $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \leq I$.

c) D'après l'encadrement précédent, on a
$$0 \leq \int_0^1 \frac{1}{x+\frac{1}{n}} - v_n \leq I$$
donc $0 \leq \ln(n+1) - u_n \leq I$.
En divisant par $\ln(n+1)$ on obtient $0 \leq 1 - \dfrac{u_n}{\ln(n+1)} \leq \dfrac{I}{\ln(n+1)}$ donc par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(1 - \frac{u_n}{\ln(n+1)} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n+1)} = 1$ d'où $u_n \sim \ln(n+1)$.
Or $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n) + o(\ln(n))$ donc $\ln(n+1) \sim \ln(n)$, donc finalement $u_n \sim \ln(n)$.

Correction de l'exercice 11 :

1) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est définie pour tout t tel que $\ln(t)$ existe et $\ln(t) \neq 0$. Elle est donc définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$.
Si $x \in]0;1[$, alors $x^2 \in]0;1[$ donc l'intégrale $\int_x^{x^2} \dfrac{dt}{\ln t}$ a un sens. Si $x \in]1;+\infty[$, alors $x^2 \in]1;+\infty[$ donc $\int_x^{x^2} \dfrac{dt}{\ln t}$ a aussi un sens. Finalement, cette intégrale a un sens si et seulement si $x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$.

2) Si G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$, alors on a $f(x) = H(x^2) - H(x)$. f est donc dérivable comme différence et composée de fonctions dérivables et $\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$, $f'(x) = 2xH'(x^2) - H'(x) = \dfrac{2x}{\ln(x^2)} - \dfrac{1}{\ln(x)} = \dfrac{x}{\ln x} - \dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{x-1}{\ln x}$.
Pour tout $x \in]0;1[$, $x - 1 < 0$ et $\ln(x) < 0$ donc $f'(x) > 0$ et pour tout $x \in]1;+\infty[$, $x - 1 > 0$ et $\ln(x) > 0$ donc $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

3) Pour tout $x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$, $f(x) - g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}\right) \mathrm{d}t = \int_x^{x^2} \frac{t - 1 - \ln t}{(t-1)\ln t} \,\mathrm{d}t$.
Or, $t - 1 - \ln(t) = t - 1 - (t-1) + \frac{(t-1)^2}{2} + o((t-1)^2)$ donc $t - 1 - \ln t \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{(t-1)^2}{2}$, et $(1-t)\ln t \underset{t\to 1}{\sim} (1-t)^2$ d'où $\dfrac{1}{\ln t} - \dfrac{1}{t-1} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{1}{2}$. On peut donc prolonger cette fonction par continuité en 1, et pour toute fonction φ continue sur $]0;1]$ on a $\lim\limits_{x\to 1} \int_x^{x^2} \phi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^0 \phi(t)\,\mathrm{d}t = 0$ par continuité de $x \mapsto \int_{x_0}^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.
Finalement on a donc bien $\lim\limits_{x\to 0}(f(x) - g(x)) = 0$. Calculons $g(x)$ explicitement :

$$\begin{aligned}
\forall x \neq 1,\ \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} &= [\ln(t-1)]_x^{x^2} \\
&= \ln(x^2 - 1) - \ln(x - 1) \\
&= \ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) \\
&= \ln(x+1)
\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \ln(2)$ donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \ln(2)$.

4) Étudions la limite de $\dfrac{f(x) - \ln(2)}{x-1}$ lorsque x tend vers 1.

$$\frac{f(x) - \ln(2)}{x-1} = \frac{f(x) - g(x)}{x-1} + \frac{g(x) - \ln(2)}{x-1}$$

On a : $f(x) - g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{t - 1 - \ln(t)}{(t-1)\ln t}\,\mathrm{d}t$
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t-1-\ln(t)}{(t-1)\ln t} = \dfrac{1}{2}$ comme on l'a vu à la question précédente, il existe donc un voisinage $]1-a, 1+a[$ de 1 tel que $\forall t \in]1-a, 1+a[$, $\left|\dfrac{t-1-\ln(t)}{(t-1)\ln t} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$.
Ainsi, pour x suffisamment proche de 1, on a $x \in]1-a, 1+a[$ et $x^2 \in]1-a, 1+a[$ donc par inégalité triangulaire

$$\left|\int_x^{x^2} \left(\frac{t-1-\ln(t)}{(t-1)\ln t} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^{x^2} \left|\frac{t-1-\ln(t)}{(t-1)\ln t} - \frac{1}{2}\right| \mathrm{d}t \leq (x^2 - x)\varepsilon$$

d'où :

$$\left| f(x) - g(x) - \int_x^{x^2} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \right| \leq x(x-1)\varepsilon$$

donc

$$\left| \frac{f(x) - g(x)}{x(x-1)} - \frac{1}{x(x-1)} \int_x^{x^2} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \right| \leq \varepsilon$$

c'est à dire :

$$\left| \frac{f(x) - g(x)}{x(x-1)} - \frac{1}{2} \right| \leq \varepsilon$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x} \times \dfrac{f(x) - g(x)}{x-1} = \dfrac{1}{2}$ donc que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-g(x)}{x-1} = \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{2}$.

D'autre part on a $\dfrac{g(x) - \ln 2}{x-1} = \dfrac{\ln(1+x) - \ln 2}{x-1} = \ln'(2) = \dfrac{1}{2}$ qu'on obtient comme limite d'un taux d'accroissement.
Finalement, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - \ln(2)}{x-1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$ donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 1$.

Correction de l'exercice 12 :

1) f est continue sur $[a,b]$ qui est un intervalle fermé borné, donc f atteint son maximum et son minimum sur $[a,b]$. Il existe donc x_a tel que $\forall x \in [0,1]$, $f(x_a) \leq f(x)$ et alors a existe et $a = f(x_a)$ et il existe $x_b \in [0,1]$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $f(x_b) \geq f(x)$ et alors b existe et $b = f(x_b)$.
2) Pour tout $y \in [a,b]$, puisque f est continue sur $[a,b]$ et atteint les valeurs a et b, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaire un réel $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$. On a alors $f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$. Pour tout $y \in [a,b]$, $f(y) = y$ donc $f_{|[a,b]}$ est la fonction identité.
3) Supposons f non constante. Puisque a est le minimum de f et que c'est aussi un réel de $[0,1]$ et que $f(a) = a$, alors ou bien $a = 0$ (a est une borne de l'intervalle), ou bien $a \in]0;1[$ et $f'(a) = 0$ (on ne peut pas avoir $a = 1$ sinon on aurait f constante égale à 1 car f est à valeurs dans $[0,1]$). Or $a < b$ (car f non constante) et $f_{|[a;b]} : x \mapsto x$ donc $f'_{|[a;b]} = 1$ donc la dérivée à gauche de f en a vaut 1, donc $f'(a) = 1$. On en déduit finalement $a = 0$, et de la même façon $b = 1$.
4) Dans cette question on suppose seulement f continue.

   Le résultat de la question 2 est alors une condition suffisante. En effet, s'il existe un intervalle $[a,b] \subset [0,1]$ tel que $\forall x \in [a,b]$, $f(x) = x$ et tel que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [a,b]$, alors pour tout $x \in [0,1]$ on a $f(f(x)) = f(x)$ car f est l'identité sur $[a,b]$.

   L'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ vérifiant $f \circ f = f$ est donc l'ensemble des fonctions définies par morceau de la forme
$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in [0,a] \\ x & \text{si } x \in [a,b] \\ f_2(x) & \text{si } x \in [b,1] \end{cases}$$
   avec $f_1(a) = a$ et $f_2(b) = b$, et f_1, f_2 à valeurs dans $[a,b]$ et continues sur $[0,a]$ et sur $[b,1]$ respectivement.

Correction de l'exercice 13 :

1) f est continue sur $]-\infty;0]$ et sur $]0;+\infty[$ car sa restriction à chacun de ces intervalles est une fonction continue (par opérations usuelles).

   Montrons que f est continue en 0 :

   $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} 0 = 0$

   et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{-1}{x} = +\infty$ donc par composition $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 0$. Ainsi $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0.

   $\boxed{\text{Finalement } f \text{ est bien continue sur } \mathbb{R}}$.
2) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;\infty[$ et exp est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc par composition $x \mapsto \mathrm{e}^{-1/x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3) Pour $n = 1$, on a pour tout $x > 0$,
$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-1/x}$$
   donc en posant $P_1(x) = x^2$ on a bien $f'(x) = P_1\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x}$. La propriété est vraie pour $n = 1$.

   Supposons que pour un certain entier $n \geq 1$ on ait
$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x}$$
   avec P_n un polynôme, alors $f^{(n)}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables et
$$\begin{aligned}\forall x > 0, \quad f^{(n+1)}(x) &= -\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x} + \frac{1}{x^2}P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x} \\ &= \frac{1}{x^2}\left(P_n\left(\frac{1}{x}\right) - P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\right)\mathrm{e}^{-1/x}\end{aligned}$$
   En posant $P_{n+1}(X) = X^2P_n - X^2P_n'$, alors P_{n+1} est bien un polynôme et on a :
$$\forall x > 0, \quad f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x}$$
   La propriété est donc vraie pour $n+1$. Par récurrence on en conclut qu'elle est vraie pour tout entier $n \geq 1$.
4) Montrons par récurrence que pour tout entier n, $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$.

   f est dérivable sur $]-\infty;0]$ et sur $]0;+\infty[$. En 0, on a :

— $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 0 = 0$

— Si $x>0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x} = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-1/x}$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} X\,\mathrm{e}^{-X} = 0$ par croissance comparée donc par composition de limites $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$.

On en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=0$.
Supposons que le résultat est vrai pour un entier n quelconque fixé. Alors

— $\forall x<0$, $f^{(n)}(x)=0$ par calcul de dérivée et $f^{(n)}(0)=0$ par hypothèse de récurrence, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0} = 0$.

— Si $x>0$, $\dfrac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0} = \dfrac{1}{x}P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x} = XP_n(X)\,\mathrm{e}^{-X}$ en posant $X=\frac{1}{x}$.

Or par croissance comparée $\lim\limits_{X\to+\infty} XP_n(X)\,\mathrm{e}^{-X} = 0$ car P_n est un polynôme, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0} = 0$

On en conclut que $f^{(n)}$ est dérivable en 0 (donc sur $\mathbb{R}$) et que $f^{(n)}(0)=0$.
Par récurrence on en déduit finalement que le résultat est vrai pour tout entier n. On a donc bien $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 14 :

1) $u_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{1-x}\right]_0^1 \boxed{= \mathrm{e}-1}$

$u_1 = \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\,\mathrm{e}^{1-x}\right]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \boxed{= \mathrm{e}-2}$

2) a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $x\in[0;1]$, $0\le x\le 1$ donc $0\le 1-x\le 1$ et donc $1\le \mathrm{e}^{1-x}\le \mathrm{e}$. En multipliant par x^n et en intégrant sur $[0;1]$ on obtient donc :

$$\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}\,\mathrm{d}x$$

d'où :

$$\boxed{\frac{1}{n+1} \le u_n \le \frac{\mathrm{e}}{n+1}}$$

b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{n+1} = 0$ on en déduit par encadrement $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

3) a) Une intégration par partie donne pour tout entier $n\ge 1$:

$$u_n = \left[-x^n\,\mathrm{e}^{1-x}\right]_0^1 + \int_0^1 nx^{n-1}\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x$$
$$\boxed{= -1 + nu_{n-1}}$$

b) Procédons par récurrence :

— **Initialisation :** $u_0 = \mathrm{e}-1$ d'après la question 1) et $\mathrm{e}-\sum_{k=0}^0 \dfrac{1}{k!} = \mathrm{e}-1$, donc l'égalité est vraie pour $n=0$.

— **Hérédité :** Supposons l'égalité vraie pour un entier naturel n. Alors :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= (n+1)u_n - 1 && \text{d'après la question précédente}\\
&= (n+1)n!\left(\mathrm{e}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right) - 1\\
&= (n+1)!\left(\mathrm{e}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right) - \frac{(n+1)!}{(n+1)!}\\
&= (n+1)!\left(\mathrm{e}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \frac{1}{(n+1)!}\right)\\
&= (n+1)!\left(\mathrm{e}-\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}\right)
\end{aligned}$$

l'égalité est alors vraie pour l'entier $n+1$. La propriété est donc héréditaire.

— **Conclusion :** $\boxed{\text{Par principe de récurrence on en conclut que pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ on a } u_n = n!\left(\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right).}$

4) Pour tout $n \geq 1$, $u_n - v_n = nu_{n-1} - 1 - (nv_{n-1} - 1) = n(u_{n-1} - v_{n-1})$ donc par une récurrence immédiate :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n - v_n = n!(u_0 - v_0)$$

Le terme de droite diverge si $u_0 \neq v_0$, et comme $(u_n)_{n\geq 0}$ converge $\boxed{\text{on en déduit que } (v_n)_{n\geq 0} \text{ diverge}}$.

5) a) Appliquons deux fois la relation de récurrence à u_{n+2} :

$$\begin{aligned}\forall n \geq 0, \quad u_{n+2} &= (n+2)u_{n+1} - 1 \\ &= (n+2)[(n+1)u_n - 1] - 1 \\ &= (n+2)(n+1)u_n - (n+2) - 1\end{aligned}$$

donc en divisant par $(n+2)(n+1)$:

$$\boxed{u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{u_{n+2}}{(n+1)(n+2)}}$$

b) On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} \\ &= \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

De plus on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+2} = 0$ donc $\dfrac{u_{n+2}}{(n+1)(n+2)} = o\left(\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Ainsi, d'après la question précédente et par somme :

$$\boxed{u_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

(c'est à dire $c_1 = 1$ et $c_2 = 0$).

Correction de l'exercice 15 :

1) Pour tout $n \geq 2$ posons $f_n(x) = x^n - 2x - 1$. Cette fonction est dérivable sur $[0; +\infty[$ et :

$$\forall x \geq 0, \quad f_n'(x) = nx^{n-1} - 2$$

Pour tout $x > 1$, on a $x^{n-1} > 1$ donc $nx^{n-1} > 2$ et donc $f_n'(x) > 0$. On en déduit que f_n est strictement croissante sur $]1; +\infty[$. Comme $f_n(1) = -1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, et que f est continue (car dérivable) sur $]1; +\infty[$, on peut en conclure d'après le théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
De plus, cette équation n'admet pas de solution dans l'intervalle $[0; 1]$ car si $x \in [0; 1[$, $x^n \in [0; 1[$ et $2x + 1 \geq 1$ et si $x = 1$ on a $x^n = 1$ et $2x + 1 = 3$.
On en conclut que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur l'intervalle $[0; +\infty[$, et que $u_n \geq 1$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) &= u_n^{n+1} - 2u_n - 1 - (u_n^n - 2u_n - 1) \\ &= u_n^{n+1} - u_n^n \\ &= u_n^n(u_n - 1) \\ &\geq 0 \qquad \text{car } u_n \geq 1 \text{ et } u_n \geq 0 \end{aligned}$$

Comme $f_n(u_n) = 0$ on en déduit que $f_{n+1}(u_n) \geq 0$ donc que $f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1})$. Comme f_{n+1} est croissante sur $[1; +\infty[$ on en conclut que $u_n \geq u_{n+1}$, et ce quel que soit $n \geq 2$.
On en conclut que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante. Comme elle est minorée par 1 on en conclut qu'elle converge vers une limite finie $\ell \geq 1$.

3) Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell > 1$. Comme (u_n) converge en décroissant vers ℓ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \ell$ donc $u_n^n \geq \ell^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell^n = +\infty$ car $\ell > 1$. Par comparaison on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = +\infty$.
Or pour tout $n \geq 2$, $u_n^n = 2u_n + 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(2u_n + 1) = +\infty$. Or par somme de limites on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(2u_n + 1) = 2\ell + 1$ ce qui contredit l'unicité de la limite.
On en conclut que $\ell = 1$.

4) a) Pour tout $n \geq 2$ on a $u_n^n = 2u_n + 1$ donc $n \ln(u_n) = \ln(2u_n + 1)$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} n \ln(1 + \varepsilon_n) &= n \ln(u_n) \\ &= \ln(2u_n + 1) \\ &= \ln(2\varepsilon_n + 3) \end{aligned}$$

b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ donc $n \ln(1 + \varepsilon_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\varepsilon_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(3 + 2\varepsilon_n) = \ln(3)$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n\varepsilon_n = \ln(3)}$.

Correction de l'exercice 16 :

1) f_n est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et :

$$\begin{aligned} \forall x \geq 0, \quad f_n'(x) &= 1 - \frac{1}{1 + x^2} \\ &= \frac{x^2}{1 + x^2} \end{aligned}$$

donc pour tout réel $x > 0$, $f_n'(x) > 0$. On en déduit que f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. De plus, $f_n(0) = -n^\alpha < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ et f_n est continue sur $[0; +\infty[$ (comme somme de fonctions continues), donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires : il existe un unique réel u_n dans l'intervalle $]0; +\infty[$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $f_n(u_n) = 0$ on a :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(u_n) &= f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) \\ &= u_n - \arctan(u_n) - (n+1)^{alpha} - (u_n - \arctan(u_n) - n^\alpha) \\ &= n^\alpha - (n+1)^\alpha \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

d'où $f_{n+1}(u_n) \leq f_{n+1}(u_{n+1})$ et comme f_{n+1} est croissante sur $[0; +\infty[$ on en déduit que $u_n \leq u_{n+1}$, et ce pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Supposons que (u_n) converge vers un réel $\ell \geq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$u_n - \arctan(u_n) = n^\alpha$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - \arctan(u_n)) = \ell - \arctan(\ell)$ par somme de limite et continuité de arctan, tandis que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$ ce qui contredit l'unicité de la limite. On en conclut que (u_n) ne converge pas donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3) Posons $g(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$, cette foncton est dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

donc g est constante. Comme $g(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$, g est donc constante égale à $\frac{\pi}{2}$ donc :

$$\forall x > 0, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

4) Par définition de u_n on a :

$$\begin{aligned} u_n - n^\alpha &= \arctan(u_n) \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{u_n}\right) \end{aligned}$$

donc

$$u_n - n^\alpha - \frac{\pi}{2} = -\arctan\left(\frac{1}{u_n}\right)$$

et donc

$$n^\alpha\left(u_n - n^\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -n^\alpha \arctan\left(\frac{1}{u_n}\right)$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$ donc $\arctan\left(\frac{1}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{u_n}$. Enfin comme $u_n = n^\alpha + \arctan(u_n)$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \arctan(u_n) = \frac{\pi}{2}$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^\alpha$ et on en conclut dont que :

$$-n^\alpha \arctan\left(\frac{1}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n^\alpha}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} -1$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha(u_n - n^\alpha - \frac{\pi}{2}) = -1$.