★
Exercice 1 — Voir correction

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u = (1, 1, -1, -1)$ et $v = (1, 1, 0, 0)$, et soit π la projection orthogonale sur F

1) Déterminer une base orthonormée (f_1, f_2) de F et une base orthonormée (f_3, f_4) de $F^\perp$.
2) Quelle est la matrice de π dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4) ?
3) Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (f_1, f_2, f_3, f_4). Montrer que $P^{-1} = {}^tP$ et en déduire la matrice de π dans la base canonique.

★
Exercice 2 — Voir correction

On cherche à minimiser la quantité $f(x, y) = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (x+y-1)^2$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pour cela, on pose $u = (x-1, y+1, 1-x-y)$ et $v = (1, 1, 1)$.

Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) \geq \dfrac{1}{3}$, puis montrer que l'équation $f(x, y) = \dfrac{1}{3}$ admet une unique solution.

★ ★
Exercice 3 — Voir correction

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $(e_1, ..., e_p)$ une famille de vecteurs de E de norme 1 telle que pour tout $x \in E$,

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k \rangle^2$$

Montrer que $n = p$ et que $(e_1, ..., e_p)$ est une base orthonormée de E.

★ ★
Exercice 4 — Voir correction

(D'après oraux ESCP 2023) Dans $\mathbb{R}^n$, une famille de vecteurs $(x_1, ..., x_p)$ est dite **obtusangle** si pour tout

$$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle < 0$$

L'objectif de cet exercice est de montrer par récurrence sur n que si $(e_1, ..., e_p)$ est une famille de vecteurs obtusangles de $\mathbb{R}^n$, alors $p \leq n+1$.

1) Étudier le cas $n = 1$
2) On suppose le résultat vrai pour un entier n, et on considère une famille $(x_1, ..., x_p)$ de p vecteurs de $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que $\forall (i, j) \in [\![1, n+3]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle < 0$.
   a) Montrer que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $x_i \neq 0$
   b) On pose
   $$\forall i \in [\![1, p]\!],\ y_i = \frac{x_i}{\|x_i\|} \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![1, n+2]\!],\ z_j = y_j - \langle y_j, y_p \rangle y_p$$
   pour tout $(i, j) \in [\![1, p-1]\!]^2$ tel que $i \neq j$, calculer $\langle z_i, z_j \rangle$ et donner son signe.
   c) Pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$, calculer $\langle z_i, y_p \rangle$.
   d) On pose $F = (\mathrm{Vect}\,(y_p))^\perp$. Déterminer la dimension de F.
   e) Conclure.

★ ★
Exercice 5 — Voir correction

(D'après oraux HEC 2022). Soit $n \geq 2$ un entier. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est ne matrice, on note M^T sa transposée.
On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $MM^T = I_n$
On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique si $M^T = M$
On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si $M^T = -M$
On confond dans la suite $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^n$ que l'on munit de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée notée $\| \cdot \|$.

1) Question de cours : rappeler la définition d'une matrice inversible.
2) a) Montrer que tout matrice orthogonale est inversible.

b) Soit $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Préciser pour quelle(s) valeur(s) de l'entier $k \in \mathbb{N}$ la matrice V^k est orthogonale.

3) Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $M = I_n + A$ et $N = I_n - A$.

a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Calculer $(X^T AX)^T$ et en déduire la valeur de $X^T AX$.

b) Montrer que la seule valeur propre possible pour A est 0. Dans quel cas la matrice A est-elle diagonalisable ?

c) Montrer que les matrices M et N sont inversibles.

d) Montrer que les matrices M et N^{-1} commutent.

e) Montrer que la matrice $\Omega = MN^{-1}$ est orthogonale.

f) -1 est-il valeur propre de Ω ?

4) Soit U une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'admettant pas -1 comme valeur propre. Montrer qu'il existe une unique matrice antisymétrique $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$U = (I_n + B)(I_n - B)^{-1}$$

⋆ ⋆

Exercice 6 — Voir correction

(D'après oraux ESCP 2022) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cet exercice, on confondra $\mathbb{R}^n$ et l'espace des matrices colonnes réelles $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On rappelle qu'alors, le produit scalaire est défini par :

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2,\ \langle X,Y\rangle = {}^tXY$$

On étudie les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété (P) suivante :

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2,\ {}^tYAX = 0 \Rightarrow {}^tXAY = 0$$

1) Vérifier que $\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tYAX$ est un nombre réel.

2) Montrer que si A est symétrique ou antisymétrique, alors A vérifie la propriété P

3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que pour tout $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tZAZ = 0$.

a) Établir que pour tout $(X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tYAX = -{}^tXAY$

b) En déduire que A est antisymétrique.

On suppose dans toute la suite de l'exercice que A vérifie la propriété (P) et n'est pas antisymétrique.

4) a) montrer qu'alors ${}^tA$ vérifie (P).

b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $(\mathrm{Vect}\,(AX))^\perp = (\mathrm{Vect}\,({}^tAX))^\perp$ puis que $\mathrm{Vect}\,(AX) = \mathrm{Vect}\,({}^tAX)$.

c) En déduire que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe $\alpha_X \in \mathbb{R}$ tel que ${}^tAX = \alpha_X AX$

d) En conclure que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX = \alpha_X {}^tXAX$

5) Montrer qu'il existe $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tYAY \neq 0$ et qu'on a alors ${}^tAY = AY$

6) Soit Y telle que ${}^tYAY \neq 0$

a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que AX est non nulle et colinéaire à AY. Montrer que ${}^tAX = AX$

b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que AX est non colinéaire à AY. En considérant ${}^tA(X+Y)$, montrer que ${}^tAX = AX$.

c) En conclure que A est symétrique.

Le coin des Khûbes

⋆

Exercice 7 — **Voir correction**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $u \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul fixé. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $s(x) = x - 2\dfrac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}u$.

1) Vérifier que s est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$.
2) Montrer que s est une symétrie de $\mathbb{R}^n$.
3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|s(x)\| = \|x\|$
4) Calculer $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$, puis décrire géométriquement s.

⋆ ⋆

Exercice 8 — **Voir correction**

Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$.

1) Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \langle p(x), x\rangle \geq 0$$

2) Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$$

⋆

Exercice 9 — **Voir correction**

(Oral ENS 2024) Soit σ un réel strictement positif. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes, toutes d'espérance nulle et toutes de variance σ^2. On introduit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne associée. Soit H un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de dimension k, avec $1 \leq k \leq n$. On note P la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, de la projection orthogonale sur H.

1) Déterminer, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la valeur de l'espérance $\mathbb{E}[(PX)_i]$.
2) Calculer l'espérance $\mathbb{E}[\|X\|^2]$, où $\|X\|$ désigne la norme de X.
   La norme d'une matrice colonne X est définie comme celle du vecteur associé $(X_1, \dots, X_n)$.
3) a) Vérifier que ${}^tPP = P = P^2$, où P^t désigne la transposée de P. Donner la valeur de la trace de P.
   b) Montrer que $\|PX\|^2 = {}^tXPX$ et en déduire la valeur de $\mathbb{E}[\|PX\|^2]$.
   c) En utilisant le théorème de Pythagore, déterminer la valeur de $\mathbb{E}[\|(I-P)X\|^2]$, où I désigne la matrice identité.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) u et v sont non colinéaires donc (u,v) est une base de F. On construit une base orthonormée (f_1,f_2) de F par orthonormalisation de (u,v) : on pose $f_1=\dfrac{u}{\|u\|}=\dfrac{1}{2}u=\left(\frac12,\frac12,-\frac12,-\frac12\right)$ de sorte que $f_1\in F$ avec $\|f_1\|=1$.

   On pose ensuite $f_2=\dfrac{v-\langle v,f_1\rangle f_1}{\|v-\langle v,f_1\rangle f_1\|}$

$$v-\langle v_1,f_1\rangle f_1=v-1\times f_1=(1,1,0,0)-\left(\frac12,\frac12,-\frac12,-\frac12\right)=\left(\frac12,\frac12,\frac12,\frac12\right)$$

$$\|v-\langle v_1,f_1\rangle f_1\|=1$$

   donc on pose

$$f_2=\left(\frac12,\frac12,\frac12,\frac12\right)$$

   On cherche maintenant une base orthonormée de $F^\perp$:

$$\begin{aligned}
\forall(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ (x,y,z,t)\in F^\perp &\iff \langle (x,y,z,t),u\rangle=0 \quad\text{et}\quad \langle (x,y,z,t),v\rangle=0\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y-z-t &=& 0\\ x+y &=& 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} z &=& -t\\ x &=& -y\end{array}\right.\\
&\iff (x,y,z,t)=(-y,y,-t,t)\\
&\iff (x,y,z,t)=y(-1,1,0,0)+t(0,0,-1,1)
\end{aligned}$$

   On en déduit que $((-1,1,0,0),(0,0,-1,1))$ est une base de $F^\perp$ et on remarque qu'elle est déjà orthogonale. Il suffit donc de poser $f_3=\left(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2},0,0\right)$ et $f_4=\left(0,0,-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)$ pour que (f_3,f_4) soit une base orthonormée de $F^\perp$.

2) $\pi(f_1)=f_1$ et $\pi(f_2)=f_2$ car $f_1\in F$ et $f_2\in F$ et $\pi(f_3)=\pi(f_4)=0$, la matrice de π dans la base (f_1,f_2,f_3,f_4) est donc $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

3) Les colonnes de P sont les coordonnées de f_1,f_2,f_3,f_4 dans la base canonique.

   On en déduit que le coefficient (i,j) de ${}^tPP$ est $\langle f_i,f_j\rangle$. Ainsi, $({}^tPP)_{i,j}=\left\{\begin{array}{ll}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{sinon}\end{array}\right.$. On en conclut que ${}^tPP=I_4$ donc $P^{-1}={}^tP$

   Notons $\mathcal{B}_0$ la base canonique et $\mathcal{B}=(f_1,f_2,f_3,f_4)$. D'après la propriété de changement de base, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(\pi)&=P\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\pi)P^{-1}\\
&=P\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\pi)^tP
\end{aligned}$$

   d'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(\pi)&=\frac12\begin{pmatrix}1&1&-\sqrt2&0\\1&1&\sqrt2&0\\-1&1&0&-\sqrt2\\-1&1&0&\sqrt2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times\frac12\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\1&1&1&1\\-\sqrt2&\sqrt2&0&0\\0&0&-\sqrt2&\sqrt2\end{pmatrix}\\
&=\frac14\begin{pmatrix}1&1&-\sqrt2&0\\1&1&\sqrt2&0\\-1&1&0&-\sqrt2\\-1&1&0&\sqrt2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 2 : D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\| \times \|v\|$. Or, $\langle u,v\rangle = x-1+y+1+1-x-y = 1$, $\|u\|^2 = (x-1)^2+(y+1)^2+(x+y-1)^2 = f(x,y)$ et $\|v\|^2 = \frac{1}{3}$.
On en déduit que

$$1 \leq 3f(x,y)$$

donc que

$$\frac{1}{3} \leq f(x,y)$$

avec égalité si et seulement si u et v sont colinéaires. On a donc $f(x,y) = \frac{1}{3}$ si et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-1 & = & a \\ y+1 & = & a \\ 1-x-y & = & a \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & a+1 \\ y & = & a+1 \\ 1-(a+1)-(a-1) & = & a \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{4}{3} \\ y & = & -\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

Finalement, l'équation $f(x,y) = \frac{1}{3}$ admet pour unique solution $(x,y) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.
Correction de l'exercice 3 : Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on a d'après l'hypothèse :

$$\|e_i\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \langle e_i, e_j\rangle^2$$

donc

$$1 = 1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} \langle e_i, e_j\rangle^2$$

d'où $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} \langle e_i, e_j\rangle^2 = 0$, donc $\forall j \neq i$, $\langle e_j, ei\rangle = 0$. Ceci étant vrai quel que soit $i \in [\![1,p]\!]$, on en déduit que la famille $(e_1, ..., e_p)$ est orthogonale (en particulier elle est libre).
Soit $F = \text{Vect}\,(e_1,...,e_p)$ et soit p la projection orthogonale sur F. Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$p(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k\rangle e_k =$$

donc $\|p(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k\rangle^2 = \|x\|^2$. Or d'après le théorème de Pythagore on a $\forall x \in E$, $\|x\| = \|p(x)\|^2 + \|x-p(x)\|^2$ d'où l'on déduit que $\|x-p(x)\|^2 = 0$ donc $x = p(x)$.
On en conclut que $\forall x \in E, x \in F$ donc $(e_1,...,e_p)$ est une famille génératrice de E.
Correction de l'exercice 4 :

1) On se place dans le cas $n = 1$ et on suppose que $(x_1,...,x_p)$ est une famille de vecteurs obtusangles de $\mathbb{R}^1$, c'est à dire des réels tels que $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, i \neq j \Rightarrow x_i x_j < 0$, c'est à dire des réels de signes distincts. Si $p \geq 3$ il n'est pas possible d'avoir p réels non nuls de signes distincts, donc la propriété est vraie pour $n = 1$.
2) a) S'il existe $i \in [\![1,p]\!]$ tel que $x_i = 0$ alors $\forall j \neq i, \langle x_i, x_j\rangle = 0$ ce qui contredit l'hypothèse de départ. On en déduit que $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $x_i = 0$

b) Soit $(i,j) \in [\![1,p-1]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

$$\begin{aligned}\langle z_i, z_j\rangle &= \langle y_i - \langle y_i, y_p\rangle y_p, y_j - \langle y_j, y_p\rangle y_p\rangle \\ &= \langle y_i, y_j\rangle - 2\langle y_i, y_p\rangle\langle y_j, y_p\rangle + \langle y_i, y_p\rangle\langle y_j, y_p\rangle \|y_p\|^2 \\ &= \frac{1}{\|x_i\|\|x_j\|}\left(\langle x_i, x_j\rangle - 2\langle x_i, x_p\rangle\langle x_j, x_p\rangle + \langle x_i, x_p\rangle\langle x_j, x_p\rangle\right) \\ &= \frac{1}{\|x_i\|\|x_j\|}\left(\langle x_i, x_j\rangle - \langle x_i, x_p\rangle\langle x_j, x_p\rangle\right)\end{aligned}$$

Or par hypothèse $\langle x_i, x_j\rangle < 0$ et $\underbrace{\langle x_i, x_p\rangle}_{<0}\underbrace{\langle x_j, x_p\rangle}_{<0} > 0$ donc $\langle z_i, z_j\rangle < 0$. On en déduit que la famille $(z_1, ..., z_{p-1})$ est obtusangle.

c) Pour tout $i \in [\![1,p-1]\!]$,

$$\begin{aligned}\langle z_i, y_p\rangle &= \langle y_i - \langle y_i, y_p\rangle y_p\rangle \\ &= \langle y_i, y_p\rangle - \langle y_i, y_p\rangle \underbrace{\|y_p\|^2}_{=1} \\ &= 0\end{aligned}$$

d) On a $y_p \neq 0$ d'après la question 2.a. donc $\dim(\mathrm{Vect}\,(y_p)) = 1$ et donc $\dim(F^\perp) = n+1-1 = n$.

e) D'après les questions 2.b et 2.c, $(z_1, ..., z_{p-1})$ est une famille obtusangle de F qui est de dimension n. Par hypothèse de récurrence, on a donc $p-1 \leq n+1$, donc $p \leq n+2$. Ainsi la propriété est héréditaire et on en conclut par principe de récurrence qu'elle est vraie pour tout entier n.

Correction de l'exercice 5 :

1) Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I$. Remarque : $AB = I$ et $BA = I$ sont toutes les deux des conditions suffisantes.

2) a) Si M est orthogonale, alors $MM^T = I_n$ donc M est inversible d'inverse M^T

b) $V^0 = I_4$ est orthogonale
$VV^T = I_4$ donc V^1 est orthogonale, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $V^k(V^k)^T = V^k(V^T)^k = I_4$ donc $\forall k \in \mathbb{N}$, V^k est orthogonale.

3) a) $(X^TAX)^T = X^TA^T(X^T)^T = X^T(-A)X = -X^TAX$, donc X^TAX est antisymétrique.
Or, X^TAX est une matrice de taille 1×1, c'est à dire un réel, donc elle est aussi symétrique ! On a $(X^TAX)^T = X^TAX$. On en déduit que $X^TAX = -X^TAX$ donc que $X^TAX = 0$.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé à λ. Alors $X^TAX = X^T\lambda X = \lambda\|X\|^2$. Or $X^TAX = 0$ donc $\lambda\|X\|^2 = 0$ mais puisque $X \neq 0$ alors $\|X\|^2 \neq 0$ donc finalement $\lambda = 0$
La seule valeur propre de A est 0, si elle est diagonalisable alors il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ avec D la matrice diagonale nulle, donc $A = 0$. A est diagonalisable si et seulement si A est la matrice nulle.

c) -1 n'est pas valeur propre de A donc $A + I_n$ est inversible. De même, 1 n'est pas valeur propre de A donc $A - I_n$ est inversible donc $I_n - A$ aussi.

d) M et N sont des polynômes en A donc commutent, on a donc :

$$MN^{-1} = (N^{-1}N)MN^{-1} = N^{-1}(NM)N^{-1} = N^{-1}MNN^{-1} = N^{-1}M$$

donc M et N commutent.

e) Calculons $\Omega\Omega^T$:

$$\begin{aligned}\Omega\Omega^T &= MN^{-1}(MN^{-1})^T \\ &= MN^{-1}(N^{-1})^TM^T \\ &= MN^{-1}(N^T)^{-1}M^T \\ &= MN^{-1}(I_n^T - A^T)^{-1}(I_n^T + A^T)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= MN^{-1}(I_n + A)^{-1}(I_n - A) && \text{car } A \text{ est antisymétrique} \\
&= MN^{-1}M^{-1}N \\
&= N^{-1}MM^{-1}N && \text{car } M \text{ et } N^{-1} \text{ commutent} \\
&= I
\end{aligned}$$

donc Ω est orthogonale.

f) Supposons qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $X \neq 0$ tel que $\Omega X = -X$, alors $MN^{-1}X = -X$. Posons $Y = N^{-1}X$, alors $MY = -NY$, donc $(I_n + A)Y = -(I_n - A)Y$ d'où $2Y = 0$ c'est à dire $Y = 0$ donc $X = 0$, contradiction. Ainsi, -1 n'est pas valeur propre de Ω.

4) Raisonnons par analyse synthèse et supposons qu'il existe une matrice B telle que $U = (I_n + B)(I_n - B)^{-1}$. Alors $U(I_n - B) = I_n + B$ d'où $B(I_n + U) = U - I_n$. Or -1 n'est pas valeur propre de U donc $I_n + U$ est inversible et donc $B = (U - I_n)(U + I_n)^{-1}$.
Réciproquement, si on pose $B = (U - I_n)(U + I_n)^{-1}$, alors

$$\begin{aligned}
B^T &= \left((U + I_n)^{-1}\right)^T (U - I_n)^T \\
&= \left(U^T + I_n^T\right)^{-1} (U^T - I_n^T) \\
&= \left(U^{-1} + I_n\right)^{-1} (U^{-1} - I_n) \\
&= \left(U^{-1} + I_n\right)^{-1} U^{-1}U(U^{-1} - I_n) \\
&= (I_n + U)^{-1} (I_n - U) \\
&= (I_n - U)(I_n + U)^{-1} && \text{car } I_n + U \text{ et } I_n - U \text{ commutent donc } I_n - U \text{ et } (I_n + U)^{-1} \text{ aussi} \\
&= -B
\end{aligned}$$

donc B est antisymétrique. Vérifions qu'elle répond au problème posé :

$$\begin{aligned}
B &= (U - I_n)(U + I_n)^{-1} \\
B(U + I_n) &= U - I_n \\
UB - U &= -B - I_n \\
U &= -(B + I_n)(B - I_n)^{-1} \\
U &= (B + I_n)(I_n - B)^{-1}
\end{aligned}$$

et l'unicité est garantie par la partie analyse.

Correction de l'exercice 6 :

1) ${}^tY$ est une matrice de taille $1 \times n$, A est une matrice de taille $n \times n$ et X est une matrice de taille $n \times 1$ donc ${}^tYAX$ est une matrice de taille 1×1 c'est à dire un nombre réel.

2) Si A est symétrique, alors ${}^tA = A$ donc :

$$\begin{aligned}
\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tYAX = 0 &\Rightarrow {}^t({}^tYAX) = 0 \\
&\Rightarrow {}^tX\,{}^tAY = 0 \\
&\Rightarrow {}^tXAY = 0
\end{aligned}$$

Si A est antisymétrique, alors ${}^tA = -A$ donc :

$$\begin{aligned}
\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tYAX = 0 &\Rightarrow {}^t({}^tYAX) = 0 \\
&\Rightarrow {}^tX\,{}^tAY = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow {}^tX(-A)Y = 0$$
$$\Rightarrow {}^tXAY = 0$$

dans les deux cas A vérifie la propriété (P).

3) a) Soit $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En posant $Z = X + Y$, on a par hypothèse sur A :

$$\begin{aligned} {}^t(X+Y)A(X+Y) &= 0 \\ {}^tXAX + {}^tXAY + {}^tYAX + {}^tYAY &= 0 \\ {}^tXAY + {}^tYAX &= 0 && \text{car } {}^tXAX = {}^tYAY = 0 \text{ par hypothèse} \\ {}^tXAY &= -{}^tYAX \end{aligned}$$

b) En prenant X_i et X_j les vecteurs colonnes associées aux vecteurs e_i et e_j de la base canonique, on a d'après la question précédente : ${}^tX_iAX_j = -{}^tX_jAX_i$.
Or ${}^tX_iAX_j = a_{i,j}$ et ${}^tX_jAX_i = a_{j,i}$ donc finalement $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = -a_{j,i}$ autrement dit A est antisymétrique.

4) a) Soit $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tY{}^tAX = 0$. Alors ${}^t({}^tY{}^tAX) = 0$ donc ${}^tXAY = 0$. Puisque A vérifie la propriété (P) on a donc ${}^tYAX = 0$ donc ${}^t({}^tYAX) = 0$ c'est à dire ${}^tX{}^tAY = 0$. On a montré que ${}^tA$ vérifie la propriété (P).

b) Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $Y \in (\mathrm{Vect}\,(AX))^\perp \iff {}^tYAX = 0 \iff {}^tXAY = 0 \iff {}^t({}^tXAY) = 0 \iff {}^tY{}^tAX = 0 \iff Y \in (\mathrm{Vect}\,(AX))^\perp$. La deuxième équivalence découle du fait que A vérifie la propriété (P).
Puisque $(\mathrm{Vect}\,(AX))^\perp = (\mathrm{Vect}\,({}^tAX))^\perp$, on a $((\mathrm{Vect}\,(AX))^\perp)^\perp = ((\mathrm{Vect}\,({}^tAX))^\perp)^\perp$ donc $\mathrm{Vect}\,(AX) = \mathrm{Vect}\,({}^tAX)$.

c) Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tAX \in \mathrm{Vect}\,({}^tAX) = \mathrm{Vect}\,(AX)$ donc il existe α_X tel que ${}^tAX = \alpha_X AX$

d) En multipliant l'égalité précédente par ${}^tX$ à gauche on obtient $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX{}^tAX = \alpha_X {}^tXAX$. Or ${}^tX{}^tAX$ est une matrice 1×1 donc symétrique donc ${}^tXAX = {}^t({}^tX{}^tAX) = \alpha_X {}^tXAX$

5) Si on avait pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tYAY = 0$ alors on aurait A antisymétrique d'après la question 3.b. Or A est supposée non-antisymétrique, donc il existe $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tYAY \neq 0$.
On a alors ${}^tYAY = \alpha_Y {}^tYAY$ d'après la question 4.d donc $\alpha_Y = 1$ car ${}^tYAY \neq 0$. Ainsi, ${}^tAY = AY$ d'après 4.c.

6) a) AX est colinéaire à AY donc il existe $k \in \mathbb{R}^*$, $AX = kAY$. On a donc ${}^tXAX = k{}^tXAY = k{}^tYAX = k^2{}^tYAY$. Puisque $k \neq 0$ et ${}^tYAY \neq 0$, alors ${}^tXAX \neq 0$ donc $\alpha_X = 1$ d'après la question 4.d donc ${}^tAX = AX$ d'après la question 4.c.

b) ${}^tA(X+Y) = {}^tAX + {}^tAY = \alpha_X AX + \alpha_Y AY$.
De plus, ${}^tA(X+Y) = \alpha_{X+Y}A(X+Y) = \alpha_{X+Y}AX + \alpha_{X+Y}AY$. Supposons $AX \neq 0$, puisque AX et AY sont non colinéaires, alors la famille (AX, AY) est libre donc l'égalité $\alpha_X AX + \alpha_Y AY = \alpha_{X+Y}AX + \alpha_{X+Y}AY$ donne $\alpha_{X+Y} = \alpha_X = \alpha_Y$. Puisque $\alpha_Y = 1$ d'après la question 5, $\alpha_X = 1$ d'où ${}^tAX = AX$.
Si $AX = 0$, alors ${}^tAX = 0$ d'après 4.c donc ${}^tAX = AX$.

c) D'après les questions 6.a) et 6.b) on a $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tAX = AX$ donc ${}^tA = A$ donc A est symétrique.

Correction de l'exercice 7 :

1) Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} s(x + \lambda y) &= x + \lambda y - 2\frac{\langle x + \lambda y, u\rangle}{\|u\|^2}u \\ &= x + \lambda y - 2\frac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}u - 2\lambda\frac{\langle y, u\rangle}{\|u\|^2}u \\ &= x - 2\frac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}u + \lambda\left(y - 2\frac{\langle y, u\rangle}{\|u\|^2}u\right) \\ &= s(x) + \lambda s(y) \end{aligned}$$

donc s est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\langle s(x), y\rangle = \left\langle x - 2\frac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}u, y\right\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle x, y\rangle - 2\frac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}\langle u, y\rangle \\
&= \langle y, x\rangle - 2\frac{\langle y, u\rangle}{\|u\|^2}\langle u, x\rangle \\
&= \left\langle y - 2\frac{\langle y, u\rangle}{\|u\|^2}u, x\right\rangle \\
&= \langle s(y), x\rangle
\end{aligned}
$$

donc s est symétrique.

2) s est un symétrie si et seulement si : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $s(s(x)) = x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$
\begin{aligned}
s(s(x)) &= s(x) - 2\frac{\langle s(x), u\rangle}{\|u\|^2}u \\
&= x - 2\frac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}u - \frac{2}{\|u\|^2}\left\langle x - 2\frac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}u, u\right\rangle u \\
&= x - 2\frac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}u - 2\frac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}u + 4\frac{\langle x, u\rangle\|u\|^2}{\|u\|^4}u \\
&= x
\end{aligned}
$$

donc s est bien un symétrie.

3) Pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$
\begin{aligned}
\|s(x)\| &= \sqrt{\langle s(x), s(x)\rangle} \\
&= \sqrt{\langle x, s(s(x))\rangle} && \text{car } s \text{ est symétrique} \\
&= \sqrt{\langle x, x\rangle} && \text{car } s \text{ est un symétrie} \\
&= \|x\|
\end{aligned}
$$

4) Pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$
\begin{aligned}
x \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) &\iff s(x) = x \\
&\iff -2\frac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}u = 0 \\
&\iff \langle x, u\rangle = 0 && \text{car } u \neq 0 \\
&\iff x \in u^\perp
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
x \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}) &\iff s(x) = -x \\
&\iff 2x - 2\frac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}u = 0 \\
&\iff x = \frac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}u \\
&\iff x \in \mathrm{Vect}\,(u)
\end{aligned}
$$

pour la dernière équivalence : le sens direct est évident, réciproquement si $x \in \mathrm{Vect}\,(u)$ alors $x = \lambda u$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\langle x, u\rangle = \lambda\langle u, u\rangle = \lambda\|u\|^2$ d'où $\lambda = \dfrac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}$.

On en conclut que s est la symétrie par rapport à l'hyperplan $u\perp$ dans la direction de $\mathrm{Vect}\,(u)$ (symétrie orthogonale).

Correction de l'exercice 8 : Supposons que p est un projecteur orthogonal, et soit $F = \mathrm{Im}(p)$. Alors $F^\perp = \mathrm{Ker}(p)$ et tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire $x = x_F + x_{F^\perp}$ avec $x_F \in F$ et $x_{F^\perp} \in F^\perp$, donc :

$$\begin{aligned}\langle p(x), x\rangle &= \langle x_F, x_F + x_{F^\perp}\rangle \\ &= \|x_F\|^2 + \langle x_F, x_{F^\perp}\rangle \\ &= \|x_F\|^2 \\ &\geq 0\end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle p(x), x\rangle \geq 0$.
Soit $x \in \mathrm{Im}(p)$ et $y \in \mathrm{Ker}(p)$. Par hypothèse on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \langle p(x+ty), x+ty\rangle \geq 0$$

donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \langle x, x+ty\rangle \geq 0$$

donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \|x\|^2 + t\langle x, y\rangle \geq 0$$

or la fonction $t \mapsto \|x\|^2 + t\langle x, y\rangle$ est une fonction affine, elle est de signe constant donc $\langle x, y\rangle = 0$. On en conclut que $\mathrm{Im}(p) \perp \mathrm{Ker}(p)$ donc p est bien un projecteur orthogonal.

Correction de l'exercice 9 :

1) $(PX)_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}X_j$ donc par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}[(PX)_i] = \sum_{j=1}^n p_{ij}\mathbb{E}(X_j) = 0$ car les (X_i) sont tous d'espérance nulle.
2) $\|X\|^2 = \sum_{k=1}^n X_k^2$ donc par linéarité de l'espérance :
$$\mathbb{E}(\|X\|^2) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k)^2 = n\sigma^2$$
car $\forall k \in \{1, ..., n\}$, $\mathbb{E}(X_k)^2 = V(X_k) = \sigma^2$.
3) P représente un projecteur (donc $P^2 = P$) orthogonal, qui est un endomorphisme symétrique, dans une base orthonormée, donc P est symétrique : ${}^tP = P = P^2$. De plus $\mathrm{tr}(P) = \mathrm{rg}(P) = k$ car dans une base de diagonalisation les 1 sur la diagonale correspondent au sous espace propre $\mathrm{Im}(P)$ et la seule autre valeur propre est 0.
4) $\|PX\|^2 = {}^t(PX)PX = {}^tX{}^tPPX = {}^tXP^2X = {}^tXPX$.
On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\|PX\|^2) &= \mathbb{E}({}^tXPX) \\ &= \mathbb{E}(\sum_{i=1}^n X_i(PX)i) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i(PX)_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i\sum_{j=1}^n p_{ij}X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n p_{ij}\mathbb{E}(X_iX_j) \\ &= \sum_{i=1}^n p_{ii}\mathbb{E}(X_i^2) + \sum_{\substack{i,j\in\{1,..,n\}\\ i\neq j}} \underbrace{\mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)}_{=0} \qquad \text{par indépendance de } X_i \text{ et } X_j \text{ quand } i \neq j\end{aligned}$$

$$= \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} p_{ii}$$
$$= \sigma^2 \text{tr}(P)$$
$$= k\sigma^2$$

5) On sait que $X = X - PX + PX$ avec $PX \in H$ et $X - PX \in H^\perp$ donc $\|X\|^2 = \|X - PX\|^2 + \|PX\|^2$ d'après le théorème de Pythagore. On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\|(I-P)X\|^2) = \mathbb{E}(\|X\|^2) - \mathbb{E}(\|PX|^2) \\ &= n\sigma^2 - k\sigma^2 \\ &= (n-k)\sigma^2\end{aligned}$$

6)