Correction du DST n°2

22/11/2025

Exercice 1

1. On a :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{x^{2k}}{3^k} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{x^2}{3}\right)^k$$
$$= \frac{\left(\frac{x^2}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{x^2}{3}\right)^2}{\frac{x^2}{3} - 1}$$
$$\boxed{= \frac{x^{2n+2} - 3^{n-1}x^4}{3^n x^2 - 3^{n+1}}}$$

2. On a :

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$
$$= n(n+1) + n$$
$$\boxed{= n(n+2)}$$

3. On a :

$$\sum_{k=n}^{2n}(k-n)^2 = \sum_{i=0}^{n} i^2$$
$$\boxed{= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

4. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2^{-1})^k 1^{n-k}$$
$$= (1+\frac{1}{2})^n \qquad \text{d'après la formule du binôme de Newton}$$
$$\boxed{= \frac{3^n}{2^n}}$$

5. On a :

$$\sum_{k=0}^{2n}(-2)^{k-n}\binom{2n}{k} = (-2)^{-n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-2)^k 1^{2n-k}$$
$$= (-2)^{-n}(1+(-2))^{2n} \qquad \text{d'après la formule du binôme de Newton}$$
$$= (-2)^{-n}(-1)^{2n}$$
$$\boxed{= (-2)^n} \qquad \text{car } (-1)^{2n} = ((-1)^2)^n = 1^n = 1$$

Exercice 2

1. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i^2+ij) &= \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} i^2 + i\sum_{j=0}^{n} j\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\left((n+1)i^2 + i\frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= (n+1)\sum_{i=0}^{n} i^2 + \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=0}^{n} i\\
&= \frac{n(n+1)^2(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{4}\\
&= \frac{n(n+1)^2[2(2n+1)+3n]}{12}\\
&= \frac{n(n+1)^2(7n+2)}{12}
\end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^i\binom{n}{j} &= \left(\sum_{i=0}^{n} 2^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\right)\\
&= \left(\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\right)\times 2^n\\
&\boxed{= 2^{2n+1}-2^n}
\end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{k} &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}\binom{n}{j}\binom{j}{k}\\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^j\\
&= (1+2)^n \qquad \text{d'après la formule du binôme de Newton}\\
&\boxed{= 3^n}
\end{aligned}$$

Exercice 3

1. sh et ch sont bien définie sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} > 0$. On en déduit que $\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ est bien défini pour tout réel x, donc th est aussi définie sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(-x) &= \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}}{2}\\ &= -\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}\\ &= -\operatorname{sh}(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(-x) &= \frac{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}}{2}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}\\ &= \operatorname{ch}(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{th}(-x) &= \frac{\operatorname{sh}(-x)}{\operatorname{ch}(-x)}\\ &= \frac{-\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}\\ &= -\operatorname{th}(x)\end{aligned}$$

   donc sh et th sont impaires et ch est paire.

3. (a) La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}$ est strictement décroissante donc $x \mapsto -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}$ est strictement croissante.

   On en conclut que sh est strictement croissante comme somme de fonctions strictement croissantes.

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(x) > 0 &\iff \mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x} > 0\\ &\iff \mathrm{e}^{x} > \mathrm{e}^{-x}\\ &\iff \mathrm{e}^{2x} > 1 && \text{car } \mathrm{e}^{x} > 0\\ &\iff 2x > 0\\ &\iff x > 0\end{aligned}$$

   et de même $\operatorname{sh}(x) < 0 \iff x < 0$ et $\operatorname{sh}(x) = 0 \iff x = 0$. On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{sh}(x)$		$-$	0	$+$	

   On pouvait aussi remarquer que $\operatorname{sh}(0) = 0$ et conclure directement grâce à la croissance stricte de sh.

   (c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2} = +\infty$ par opérations.

4. (a) ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\operatorname{ch}'(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x)$$

(b) Les limites de ch en $+\infty$ et en $-\infty$ s'obtiennent par sommes de limites :

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$$

et on a $\mathrm{ch}(0) = 1$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{ch}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

5. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a par inégalité triangulaire :

$$|\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\,| \leq |\,\mathrm{e}^x\,| + |-\mathrm{e}^{-x}\,| = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = |\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\,|$$

d'où

$$\left|\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\right| \leqslant 1$$

avec égalité si et seulement si e^x et $-\mathrm{e}^{-x}$ sont de même signe, ce qui n'est jamais le cas car l'un est strictement positif et l'autre strictement négatif. On a donc bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\right| < 1$$

c'est à dire :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 < \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} < 1}$$

(b) th est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas (car $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x) \geq 1$ d'après le tableau de variation de ch).

Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{th}'(x) &= \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \\ &= 1 - \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\right)^2 \\ &= 1 - (\mathrm{th}(x))^2 \end{aligned}$$

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 < \mathrm{th}(x) < 1$ d'après la question 5.(a) donc $0 \leqslant (\mathrm{th}(x))^2 < 1$. On en déduit que $1-(\mathrm{th}(x))^2 > 0$ c'est à dire $\mathrm{th}'(x) > 0$ et donc $\boxed{\text{th est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

(d) $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^x(1 - \mathrm{e}^{-2x})}{\mathrm{e}^x(1 + \mathrm{e}^{-2x})} = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = 1$ par opérations.

De même, $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{2x} - 1)}{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{2x} + 1)} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = -1$ par opérations.

On en conclut que <u>la courbe représentative de la fonction tangente hyperbolique admet deux asymptotes horizontales, l'une d'équation $y = 1$ et l'autre d'équation $y = -1$.</u>

(e) On a déjà montré que th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc elle est injective (si $x \neq y$, alors ou bien $x < y$ donc $\mathrm{th}(x) < \mathrm{th}(y)$, ou bien $x > y$ donc $\mathrm{th}(x) > \mathrm{th}(y)$. Dans tous les cas $\mathrm{th}(x) \neq \mathrm{th}(y)$).

Pour tout $y \in]-1;1[$, et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{th}(x) = y &\Longleftrightarrow \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = y \\
&\Longleftrightarrow \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = y\,\mathrm{e}^x + y\,\mathrm{e}^{-x} \\
&\Longleftrightarrow \mathrm{e}^x(1-y) = \mathrm{e}^{-x}(1+y) \\
&\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{2x} = \frac{1+y}{1-y} && \text{car } 1-y \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) && \text{car } \frac{1+y}{1-y} > 0
\end{aligned}$$

donc $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$ est un antécédent de y, ainsi $\operatorname{th} : \mathbb{R} \to]-1;1[$ est surjective donc c'est bien une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1;1[$, et sa bijection réciproque est :

$$\boxed{\begin{array}{cccc} \operatorname{th}^{-1} : &]-1;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} \end{array}}$$

Exercice 4

1. Posons $f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x+1) + \ln(x)$ et $g(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x+1}$. f est g sont dérivables sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables. De plus :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} \qquad\qquad \forall x > 0, \quad g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x^2} \qquad\qquad = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x(x+1)}$$

Or pour tout $x > 0$ on a $x < x+1$ donc $x^2 < x(x+1) < (x+1)^2$ d'où :

$$\frac{1}{(x+1)^2} < \frac{1}{x(x+1)} < \frac{1}{x^2}$$

ce qui permet d'observer que $f'(x) < 0$ et $g'(x) < 0$ donc f et g sont toutes deux décroissantes sur $]0;+\infty[$.

Par ailleurs, $f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ donc par opérations sur les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

De même, $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$ donc par opérations sur les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

On en conclut finalement que : $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad g(x) \geqslant 0$, d'où les inégalités voulues.

2. D'après la question précédente, on peut écrire pour tout entier naturel k non nul :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \quad (1) \quad \text{et} \quad \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k} \quad (2)$$

En sommant terme à terme l'inégalité (2) pour k allant de 1 à n on a donc :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k)) &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\
&\leqslant 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \\
&\leqslant 1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} && \text{par changement d'indice} \\
&\leqslant 1+\sum_{k=1}^{n-1}(\ln(k+1)-\ln(k)) && \text{d'après l'inégalité (1)}
\end{aligned}
$$

donc on a bien, pour tout entier naturel n non nul :

$$
\boxed{\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k)) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant 1+\sum_{k=1}^{n-1}(\ln(k+1)-\ln(k))}
$$

enfin, en simplifiant les sommes téléscopiques : $\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k)) = \ln(n+1)-\ln(1) = \ln(n+1)$ et $\sum_{k=1}^{n-1}(\ln(k+1)-\ln(k)) = \ln(n)-\ln(1) = \ln(n)$ d'où :

$$
\boxed{\ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant 1+\ln(n)}
$$

3. D'après l'encadrement précédent, on peut écrire pour tout $n \geq 2$:

$$
\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \frac{1+\ln(n)}{\ln(n)}
$$

On a $\dfrac{1+\ln(n)}{\ln(n)} = 1+\dfrac{1}{\ln(n)}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\ln(n)}{\ln(n)} = 1$ par opérations sur les limites, et

$$
\begin{aligned}
\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} &= \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} \\
&= \frac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \\
&= 1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}
\end{aligned}
$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$ par opérations sur les limites.

$$
\boxed{\text{On en conclut par encadrement que } \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1.}
$$

Exercice 5

1. $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{2a\ln(x)} = 0$ par composition de limites, donc $\lim\limits_{x\to 0} ax^{2a} = 0$. $\boxed{\text{Par somme on a donc } \lim_{x\to 0}\varphi(x) = -\infty.}$

   Pour tout $x > 0$ on a :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x^{2a}\left(\frac{\ln x}{ax^{2a}} - 1)\right) \\ &= \mathrm{e}^{2a\ln(x)}\left(\frac{\ln x}{a\,\mathrm{e}^{2a\ln x}} - 1\right)\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X}{\mathrm{e}^{2aX}} = 0$ par croissance comparée donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{a\,\mathrm{e}^{2a\ln x}} = 0$ par composition, d'où par opérations : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = -\infty.}$

2. φ est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. De plus :

$$\begin{aligned}\forall x > 0, \quad \varphi'(x) &= \frac{1}{x} - 2a^2x^{2a-1} \\ &= \frac{1-2a^2x^{2a}}{x}\end{aligned}$$

donc $\varphi'(x)$ est du même signe que $1 - 2a^2x^{2a}$.

$$\begin{aligned}\varphi'(x) > 0 &\iff 1 - 2a^2x^{2a} > 0 \\ &\iff x^{2a} < \frac{1}{2a^2} \\ &\iff x < \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{1/2a} && \text{par croissance de } x \mapsto x^{1/2a}\end{aligned}$$

et de même, $\varphi'(x) < 0 \iff x > \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{1/2a}$ et $\varphi'(x) = 0 \iff x = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{1/2a}$. On en déduit le tableau suivant :

x	0		x_0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(x_0)$	$\searrow$	$-\infty$

avec $x_0 = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{1/2a}$ et

$$\begin{aligned}\varphi(x_0) &= \ln\left(\left(\frac{1}{2a^2}\right)^{1/2a}\right) - a\left(\left(\frac{1}{2a^2}\right)^{1/2a}\right)^{2a} \\ &= -\frac{1}{2a}\ln(2a^2) - \frac{a}{2a^2} \\ &= -\frac{1}{2a}(1 + \ln(2a^2))\end{aligned}$$

3. Si $a < \dfrac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{e}}}$ alors $2a^2 < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ donc $\ln(2a^2) < -1$ et $1 + \ln(2a^2) < 0$. On a donc $\varphi(x_0) > 0$.

   Comme φ est strictement croissante sur $]0;x_0[$ et strictement décroissante sur $]x_0;+\infty[$, continue sur ces intervalles, et que $0 \in]\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x);\varphi(x_0)[$ et $0 \in]\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x);\varphi(x_0)[$, le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'exactement deux solutions à l'équation $\varphi(x) = 0$, l'une dans l'intervalle $]0;x_0[$ et l'autre dans l'intervalle $]x_0;+\infty[$. En notant z_1 la première de ces solutions et z_2 la deuxième on a bien $z_1 < x_0 < z_2$.

4. Si $a > \dfrac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}}$, alors de la même façon on aboutit à $1+\ln(2a^2) > 0$ donc $\varphi(x_0) < 0$. D'après le tableau de variation de φ on a donc : $\forall x > 0, \varphi(x) < 0$ donc $\boxed{\text{l'équation } \varphi(x) = 0 \text{ n'admet aucune solution.}}$

$\boxed{\text{Si } a = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}}, \text{ l'équation } \varphi(x) = 0 \text{ admet exactement une solution : } x_0}$

Problème 1

1. On peut écrire en extension toutes les valeurs :
$\left\{\dfrac{(-1)^i}{i+1}\ ;\ i \in [\![0,4]\!]\right\} = \left\{1\ ;\ \dfrac{-1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{-1}{4}\ ;\ \dfrac{1}{5}\right\}$ donc $\min\limits_{i\in[\![0;4]\!]} \dfrac{(-1)^i}{i+1} = -\dfrac{1}{2}$.
2. (a) Pour tout entier $k \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned} u_n(k+1) &= \min_{i\in[\![n,n+k+1]\!]} x_i \\ &= \min(x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+k}, x_{n+k+1}) \\ &\leq \min(x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+k}) \\ &\leq u_n(k) \end{aligned}$$

donc la suite pour n fixé, la suite $(u_n(k))_{k\geq 0}$ est décroissante.

(b) Par hypothèse (x_n) est une suite de réels positifs, donc pour tout n et tout k dans $\mathbb{N}$ on a $u_n(k) \geq 0$. Pour tout entier naturel n, la suite $(u_n(k))_{k\geq 0}$ est donc minorée, et elle est décroissante d'après la question précédente donc elle converge.

(c) Pour tous entiers naturels n et k, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1}(k) &= \min(x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+1+k}) \\ &\geq \min(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+k+1}) \\ &\geq u_n(k+1) \end{aligned}$$

par passage à la limite dans cette inégalité lorsque k tend vers $+\infty$, on a donc : $u_{n+1} \geq u_n$. $\underline{\text{Ceci étant valable pour tout entier naturel } n, \text{ la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

(d) (u_n) est croissante. Ou bien elle est majorée, auquel cas elle converge, ou bien elle n'est pas majorée, auquel cas elle tend vers $+\infty$.

3. (a) • $\underline{\text{Suite } (y_n).}$

Soit $n \geq 0$ fixé. Pour tout $k \geq 1$, et tout $i \in [\![n, n+k]\!]$ on a $y_i = 1 + (-1)^i = \begin{cases} 2 & \text{si } i \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$. Comme $k \geq 1$, $[\![n, n+k]\!]$ contient au moins deux entiers de parité différente donc :

$$\{y_i\ ;\ i \in [\![n, n+k]\!]\} = \{0; 2\}$$

donc $\boxed{\text{pour tout } k \geq 1,\ u_n(k) = 0}$. On a donc $\lim\limits_{k\to+\infty} u_n(k) = 0$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est constante égale à } 0}$

• $\underline{\text{Suite } (z_n)}$

Soit $n \geq 0$ fixé. Pour tout $k \geq 1$, l'ensemble $[\![n, n+k]\!]$ contient au moins 2 termes de parité différentes, donc $2 \in \{z_i\ ;\ i \in [\![n, n+k]\!]\}$.

On a $z_0 = 2$, $z_1 = 1$, $z_2 = 2$, $z_3 = 3$ donc $u_0(k) = u_1(k) = 1$ pour tout $k \geq 1$, puis à partir de $n = 2$ on a : $\boxed{\forall k \geq 1,\ u_n(k) = 2}$. Par passage à la limite, $\underline{u_0 = u_1 = 1 \text{ et } u_n = 2 \text{ pour tout } n \geq 2.}$

(b) D'après la question précédente :

- Pour (y_n), $\liminf\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$
- Pour (z_n), $\liminf\limits_{n\to+\infty} z_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2$.

4. Pour tous entiers naturels n et k, $u_n(k) = \min(x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+k})$ et comme (x_n) est croissante, $\min(x_n, ..., x_{n+k}) = x_n$ donc $u_n(k) = x_n$. Par passage à la limite lorsque $k \to +\infty$: $u_n = x_n$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell.}$

5. Pour tous entiers naturels n et k on a $u_n(k) = \min(x_n, ..., x_{n+k}) = x_{n+k}$ car $(x_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

   Par unicité de la limite, $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n+k} = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$, donc par passage à la limite dans l'égalité précédente : $u_n = \ell$, et ce quel que soit $n \in \mathbb{N}$!

   $\boxed{\text{On a donc bien } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ c'est à dire } \liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell.}$

Problème 2

1. $[X = 2] = P_1 \cap P_2$

   $[X = 3] = F_1 \cap P_2 \cap P_3$

   $[X = 4] = (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4)$

   On en déduit que

$$\begin{aligned} a_2 &= P(X = 2) \\ &= P(P_1 \cap P_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} && \text{par indépendance des lancers} \\ &\boxed{= \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= P(X = 3) \\ &= P(F_1 \cap P_2 \cap P_3) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} && \text{par indépendance des lancers} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= P(X = 4) \\ &= P(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) + P(P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \\ &\boxed{= \frac{1}{8}} \end{aligned}$$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$U_n = [X = 2] \cup [X = 3] \cup \cdots \cup [X = n] = \bigcup_{k=2}^{n} [X = k]$$

   donc comme cette union est disjointe :

$$\boxed{P(U_n) = \sum_{k=2}^{n} P(X = k) = \sum_{k=2}^{n} a_k}$$

3. (a) U_{n+1} est réalisé si et seulement si au cours des $n+1$ premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs.

Ainsi, U_{n+1} est réalisé si et seulement si on obtient au moins une fois la succession de 2 piles lors des n premiers lancers, ou on obtient la succession de 2 piles au $n+1$-ième lancer. On peut donc écrire $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$ et appliquer la formule du cours :

$$\boxed{P(U_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1})}$$

(b) Soit n un entier supérieur ou égal à 4.

Supposons que $U_n \cap B_{n+1}$ est réalisé. Alors il y a eu la succession de 2 piles au $n+1$-ème lancer, donc $P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé, et il y a eu au moins une autre succession de 2 piles lors des n premiers lancers. On distingue deux cas selon le résultat du $n-1$-ème lancer :

- Si le $n-1$-ième lancer est pile, alors P_{n-1} est réalisé, donc $P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé.
- Si le $n-1$-ième lancer est face, alors F_{n-1} est réalisé et la première succession de 2 piles ne peut pas être réalisé ni au $n-1$-ième ni au n-ième lancer, donc elle a nécessairement lieu au cours des $n-2$ premier lancer, et donc U_{n-2} est réalisé. On a donc $U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$ réalisé.

On a donc montré que :

$$\boxed{U_n \cap B_{n+1} \subset (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})}$$

Réciproquement, supposons que $(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$ est réalisé. Ou bien, $U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé, ou bien $P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé.

- Si $U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé, alors il y a eu au moins une succession de 2 piles lors des $n-2$ premiers lancers, donc lors des n premiers lancers, donc U_n est réalisé. De plus $P_n \cap P_{n+1} = B_{n+1}$ donc B_{n+1} est réalisé, et donc $U_n \cap B_{n+1}$ est réalisé.
- Si $P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé, alors B_{n+1} est réalisé et puisque $P_{n-1} \cap P_n$ est réalisé il y a eu au moins cette succession de 2 piles avant le n-ième lancer, donc U_n est réalisé. on a donc là aussi $U_n \cap B_{n+1}$ réalisé.

Dans tous les cas $U_n \cap B_{n+1}$ est réalisé donc :

$$\boxed{(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \subset U_n \cap B_{n+1}}$$

et finalement

$$\boxed{U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})}$$

On en déduit d'après 3.(a) que :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + P(B_{n+1}) - P((U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})) \\ &= u_n + P(B_{n+1}) - (P(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) + P(P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})) \end{aligned}$$

car les deux événements sont incompatibles

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4} - u_{n-2} \times P(F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) - \frac{1}{8}$$

car U_{n-2} dépend uniquement des lancers 1 à $n-2$, donc est indépendant de F_{n-1}, P_n et P_{n+1}

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}u_{n-2} \\ &\boxed{= u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})} \end{aligned}$$

(c) Pour tout entier $n \geq 4$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{8}(1 - u_{n-2}) \geq 0$ car u_{n-2} est une probabilité donc $u_{n-2} \leq 1$.

On en déduit que (u_n) est croissante, elle est majorée par 1 (toujours car $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout entier n) donc elle converge vers une limite finie ℓ. On a donc aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n-2} = \ell$.

Par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$ on obtient donc $\ell = \ell + \frac{1}{8}(1 - \ell)$ d'où $\boxed{\ell = 1.}$