

Révisions mathématiques pour l'hypokhâgne BL

Ce document contient :

- Un programme de révisions qui fait la liste des points importants du programme de Terminale Spé Maths et des compétences à maîtriser.
- Trois chapitres de cours sur des notions qui figurent au programme de spécialité maths mais pas au programme de maths complémentaires : Raisonnements par récurrence, Composition de fonctions, Dénombrement.
- 70 exercices de révisions, répartis en 7 parties, qui portent sur l'ensemble du programme de spécialité maths.
- Des indications et corrections pour la majorité des exercices.

Pour les étudiants n'ayant pas suivi la spécialité mathématiques en terminale : il est vivement recommandé de travailler en autonomie pendant l'été les trois chapitres de cours fournis et de faire les exercices mentionnés au début de chaque chapitre.

Ces notions seront toutes revues au cours de l'année d'hypokhâgne mais le rythme sera plus rapide qu'au lycée et elles seront rapidement suivies de notions nouvelles et plus complexes, il est donc primordial de prendre de l'avance.

Pour tous les futurs étudiants : profitez de l'été pour entretenir vos acquis en travaillant les exercices qui vous intéressent. Il n'est bien sûr pas nécessaire de faire tous les exercices, certains sont même assez difficiles.

Remarque : La partie VII des exercices porte sur les nombres complexes. Au lycée cette notion est vue uniquement en maths experte. Cette partie fera l'objet d'un chapitre de cours en Hypokhâgne BL, il n'est pas nécessaire (ou en tout cas pas prioritaire) de travailler ce chapitre seul si vous n'avez pas suivi l'option maths experte.

- [Lien vers le programme de révision](#)
- [Lien vers le Chapitre 1 : Raisonnements par récurrence](#)
- [Lien vers le Chapitre 2 : Composition de fonctions](#)
- [Lien vers le Chapitre 3 : Dénombrement](#)
- [Lien vers les exercices](#)
- [Lien vers la correction \(partielle\) des exercices](#)

Programme de révisions mathématiques

Entrée en Hypokhâgne BL

Voici une liste exhaustive des points du programme de maths du lycée qui vous seront utiles en hypokhâgne BL. Les points du programme de Terminale Spé qui ne sont pas au programme de l'option mathématiques Complémentaire sont indiqués **en gras**. Les élèves n'ayant pas suivi les cours de mathématiques Spécialité doivent prêter une attention particulière à ces points.

Certains points de cette liste sont travaillés très superficiellement au lycée (par exemple les fonctions trigonométriques). Pas de panique : ils seront retravaillés dès l'entrée en hypokhâgne afin d'assurer des bases communes à tout le monde.

Parmi les documents fournis, vous trouverez des exercices couvrant une grande partie de ce programme, ainsi que 3 chapitres de cours sur les notions suivantes : Dénombrement, Raisonnements par récurrence, Composition de fonctions. Ces cours sont surtout destinés aux élèves venant de l'option maths complémentaire mais ils peuvent intéresser tout le monde.

1 Logique

- Implication (\implies), réciproque d'une implication, équivalence (\iff)
- Quantificateurs : \forall, \exists
- **Démonstration par récurrence**

2 Calcul

- Maîtriser le calcul algébrique : les règles de développement, factorisation, priorités des opérations, identités remarquables
- Savoir manipuler une égalité ou une inégalité par équivalence (ajouter, soustraire, multiplier, diviser par un nombre, être très vigilant lorsqu'on multiplie ou divise par une expression algébrique).
- Savoir manipuler une égalité ou une inégalité par implication (élever au carré par exemple, $x = y \Rightarrow x^2 = y^2$ mais $x^2 = y^2 \not\Rightarrow x = y$)
- **Savoir utiliser le symbole somme \sum**

3 Étude de fonctions

On appelle fonction usuelles les fonctions polynômiales (en particulier affines et polynômes de degré 2), la fonction racine carrée, les fonctions exponentielles et logarithme, la fonction inverse, les fonctions trigonométriques cosinus, sinus, tangente.

- Savoir déterminer les racines d'une fonction polynôme de degré 2.
- Savoir factoriser une fonction polynôme de degré 2.
- Connaître par cœur les dérivées des fonctions usuelles
- Savoir dériver une somme, un produit un quotient, une composée de fonction usuelles
- Savoir étudier le signe d'une expression algébrique : mettre sous forme de produit et de quotient, utiliser un tableau de signe.
- Connaître le lien entre les variations d'une fonction et signe de sa dérivée, savoir étudier les variations d'une fonction composée de fonctions usuelles.
- Pour toutes les fonctions usuelles, connaître :
 - Leur ensemble de définition
 - Leur ensemble de dérivabilité
 - Leur dérivée si elle existe

- Leurs variations, leurs signes en fonction de x
- Leurs valeurs remarquables
- **Composition de deux fonctions u par v , notée $v \circ u$: savoir calculer la limite d’une fonction composée, savoir calculer la dérivée d’une fonction composée.**
- **Savoir déterminer la limite d’une fonction par opération usuelles, par composition ou comme la limite d’un taux d’accroissement (exemple avec $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)**
- Savoir déterminer la limite d’une fonction par encadrement ou par comparaison
- Croissance comparée de x^n et de $\exp(x)$ (en $+\infty$ et en $-\infty$), croissance comparée de x^n et de $\ln(x)$ (en $+\infty$ et en 0)
- Notion de continuité : savoir utiliser le Théorème des valeurs intermédiaires, ainsi que son corollaire.

4 Suites numériques

- **Maîtriser le raisonnement par récurrence**
- Maîtriser le vocabulaire : faire la différence entre le rang n , le **terme** de rang n u_n , la **suite** (u_n) .
- Savoir étudier la nature d’une suite, son sens de variation
- Suites arithmétiques, suites géométriques : sens de variation, terme général, limite
- Savoir déterminer la limite d’une suite à l’aide des opérations usuelles ou à l’aide de composition de fonctions
- Savoir déterminer la limite d’une suite par encadrement, par comparaison

5 Probabilités

- Connaître les notions d’univers, d’issus, d’événement, savoir les distinguer
- Union et intersection d’événements
- Formule $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- Notion de variable aléatoire, loi d’une variable aléatoire
- Succession d’épreuves aléatoires indépendantes.
- Schéma de Bernoulli
- Loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique
- Espérance et variance d’une variable aléatoire
- Somme de variables aléatoires, $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

6 Dénombrement

- **Produit cartésien d’ensemble, principe multiplicatif ($\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B)$)**
- **Notion de k -uplet**
- **Notion de k -arrangement**
- **Notion de k -combinaison**
- **Formule pour le nombre de k -uplets, nombre de k -arrangement, nombre de k -combinaisons**
- **Applications au dénombrement.**

7 Géométrie dans l'espace

- Notion de vecteurs de l'espace, repère de l'espace
- Calcul avec des vecteurs

8 Intégration

- Notion de primitive d'une fonction
- Intégrale d'une fonction continue et positive entre deux réels a et b
- Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque entre a et b
- Propriétés de l'intégrale : signe, linéarité, inégalités
- Interprétation de l'intégrale comme une moyenne
- Savoir déterminer une primitive d'une fonction de la forme de la dérivée d'une fonction usuelle, d'une somme/produit/quotient/composée de fonctions usuelles.
- Savoir faire une intégration par partie.
- Les équations différentielles ne sont pas utiles en BL

Liste des exercices à travailler : 13, 14, 17, 18, 20, 23, 24, 25

1. Principe de récurrence

a) Énoncé

Proposition 1

Principe de récurrence

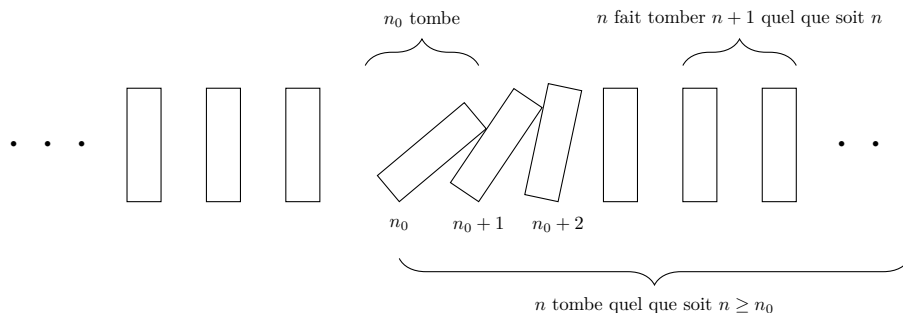
On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ qui dépend d'un entier n . Supposons que les deux conditions suivantes sont remplies :

- Il existe un entier n_0 tel que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie
- Pour tout $n \geq n_0$, on a $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit $n \geq n_0$.

Remarque

Le principe de récurrence fonctionne comme un jeu de dominos : si chaque domino fait tomber le suivant, et que le domino n_0 tombe, alors tous les dominos après le domino n_0 tomberont.



Le raisonnement par récurrence se rédige donc en trois étapes :

- **Initialisation** : On démontre que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier $n \geq n_0$ quelconque et on montre que cela implique que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On peut écrire

- « Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}...$ »
- « Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vrai... »
- « Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vrai pour un certain entier $n \in \mathbb{N}...$ »
- etc.

- **Conclusion** : Par principe de récurrence, on en conclut que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Remarque

En général l'initialisation se fait pour $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$ mais cela peut être un autre entier, tout dépend du contexte.

b) Exemples

Application 1

On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq n^2$
2. En déduire la limite de la suite (u_n)

Solution :

1. Pour tout entier naturel n on pose $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n \geq n^2$ » et on raisonne par récurrence :
 - **Initialisation** : $1^2 = 1$ et $u_0 = 1$ donc $u_0 \geq 0^2$, ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
 - **Hérédité** : On suppose que $u_n \geq n^2$ pour un certain rang n .
Alors $u_n + 2n + 1 \geq n^2 + 2n + 1$, donc $u_n + 2n + 1 \geq (n + 1)^2$ (on reconnaît une identité remarquable).
On a donc $u_{n+1} \geq (n + 1)^2$, donc $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
 - **Conclusion** : par principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n^2$
2. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, on en déduit par comparaison de limites que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Application 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 50$ et $u_{n+1} = 0,8u_n + 20$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 100$
2. En déduire les variations de la suite u_n
3. En déduire que (u_n) converge vers une limite finie ℓ .

Solution :

1. On raisonne par récurrence, pour tout entier naturel n on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $0 \leq u_n \leq 100$
 - **Initialisation** : $u_0 = 50$ donc $0 \leq u_0 \leq 100$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
 - **Hérédité** : Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est à dire tel que $0 \leq u_n \leq 100$.
Alors,
$$0 \leq 0,8u_n \leq 80$$

$$0 \leq 20 \leq 0,8u_n + 20 \leq 100$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq 100$$

donc $0 \leq u_{n+1} \leq 100$ et $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

 - **Conclusion** : Par principe de récurrence, on en conclut que $0 \leq u_n \leq 100$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
2. Pour étudier les variations de (u_n) , il faut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 0,8u_n + 20 - u_n \\ &= 20 - 0,2u_n \end{aligned}$$

Or, d'après la question 1, $0 \leq u_n \leq 100$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, donc

$$\begin{aligned} 0 &\leq 0,2u_n \leq 20 \\ 0 &\geq -0,2u_n \geq -20 \\ 20 &\geq 20 - 0,2u_n \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$ donc (u_n) est croissante.

3.

Rappel**Définition**

- On dit qu'une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
- On dit qu'une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leq u_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
- On dit qu'une suite (u_n) est **bornée** s'il existe un réel $m \in \mathbb{R}$ et un réel $M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leq u_n \leq M$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Rappel

Propriété Une suite croissante et majorée converge vers un réel ℓ .

Attention : le majorant n'est pas forcément égal à la limite.

(u_n) est croissante d'après la question 2. et majorée par 100 d'après la question 1. Elle converge donc vers une limite finie ℓ .

Application 3

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 2$ est un multiple de 3.

Rappel

Un entier $n \in \mathbb{N}$ est un multiple de 3 si n peut s'écrire $n = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Solution :

Pour tout entier naturel n , on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $4^n + 2$ est un multiple de 3 »

- **Initialisation** : $4^0 + 2 = 1 + 2 = 3$ est un multiple de 3, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire que $4^n + 2$ est un multiple de 3.
Alors, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $4^n + 2 = 3k$.
En multipliant par 4 cette égalité, on obtient

$$4^{n+1} + 8 = 12k$$

$$4^{n+1} + 2 = 12k - 6$$

$$4^{n+1} + 2 = 3(4k - 2)$$

en posant $k' = 4k - 2$, on a $k' \in \mathbb{N}$ et $4^{n+1} + 2 = 3k'$ donc par définition $4^{n+1} + 2$ est un multiple de 3. On a donc montré que $\mathcal{P}(n+1)$ était vraie.

- **Conclusion** : Par principe de récurrence, on en conclut que $4^n + 2$ est un multiple de 3 quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Applications

Une formule

Proposition 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Autrement dit

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration : On peut démontrer cette formule par récurrence. On veut montrer la formule pour tout $n \in \mathbb{N}^$ donc on initialise à $n = 1$.*

On note pour tout entier n , $\mathcal{P}(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- **Initialisation :** $\frac{1 \times (1+1)}{2} = 1$ donc la formule est vraie pour $n = 1$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. On veut montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire que

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad (2)$$

On part de l'égalité (1) qu'on a supposé vraie, et on ajoute $(n+1)$ de chaque côté. On obtient

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1) + 2n + 2}{2} \\ 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

Si on développe le membre de gauche de l'égalité (2), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)(n+2)}{2} &= \frac{n^2 + 2n + n + 2}{2} \\ &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \end{aligned} \quad (4)$$

Ainsi, en combinant les égalités (3) et (4) on a bien

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion :** Par principe de récurrence, on en conclut que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$

□

Une autre formule

Proposition 3

Pour tout réel $q \neq 1$, on a

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Autrement dit

$$\boxed{\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}}$$

Démonstration : Soit $q \neq 1$ un réel, on note $\mathcal{P}(n) : \sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ et on raisonne par récurrence :

- **Initialisation :** $\sum_{k=0}^0 q^k = q^0 = 1$ d'une part, et $\frac{q^{0+1} - 1}{q - 1} = \frac{q - 1}{q - 1} = 1$ d'autre part, donc $\sum_{k=0}^0 q^k = \frac{q^{0+1} - 1}{q - 1}$, l'égalité est vraie au rang $n = 0$
- **Hérédité :** Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire que $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$.

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= q^{n+1} + \sum_{k=0}^n q^k \\ &= q^{n+1} + \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{(q - 1)q^{n+1} + q^{n+1} - 1}{q - 1} \\ &= \frac{q^{n+2} - q^{n+1} + q^{n+1} - 1}{q - 1} \\ &= \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1} \end{aligned}$$

ainsi, $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

- **Conclusion :** par principe de récurrence, on en conclut que l'égalité $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ est vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

□

Exercice 1

En complément, on peut donner les deux formules suivantes à démontrer par récurrence (exercice pour le lecteur)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Autrement dit :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Autrement dit

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Un lemme

Lemme 1

Soit a un réel strictement positif. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1+na$.

Démonstration : On pose $\mathcal{P}(n) : (1+a)^n \geq 1+na$ et on raisonne par récurrence :

- **Initialisation :** $(1+a)^0 = 1$ d'une part, et $1+0 \times a = 1$ d'autre part, donc on a bien $(1+a)^0 \geq 1+0 \times a$, ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Supposons que pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$ on ait $(1+a)^n \geq 1+na$. Alors, en multipliant par $1+a$ de chaque côté, on obtient

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a) \quad \text{car } 1+a > 0$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+a+na+na^2$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a + \underbrace{na^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)a$$

donc $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$, ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion :** Par principe de récurrence, on en conclut que quel que soit $n \in \mathbb{N}$ on a $(1+a)^n \geq 1+na$.

□

On déduit de ce lemme la proposition suivante :

Proposition 4

Soit q un nombre réel.

- Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Si $0 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

Démonstration : Le lemme permet de démontrer le cas $q > 1$: il suffit de poser $a = q - 1 > 0$, alors $q = 1+a$ et $q^n = (1+a)^n \geq 1+na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+na) = +\infty$ on a, par comparaison de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

Pour la limite dans le cas $0 < q < 1$, il suffit de poser $Q = \frac{1}{q}$. On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q^n = +\infty$, et comme $q^n = \frac{1}{Q^n}$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ par inverse de limite.

□

2. Récurrence double, récurrence forte

Deux variantes du principe de récurrence dont l'hérédité ne repose pas seulement sur le rang précédent mais sur les deux rangs précédents, ou bien sur l'ensemble de tous les rangs précédents

Proposition 5

Principe de récurrence double

On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ qui dépend d'un entier n . Supposons que les deux conditions suivantes sont remplies :

- Il existe un entier n_0 tel que $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies.

- Pour tout $n \geq n_0$, on a $(\mathcal{P}(n) \wedge \mathcal{P}(n+1)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$.

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit $n \geq n_0$.

Le raisonnement par récurrence double se rédige en trois étapes :

- **Initialisation** : On démontre que $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0 + 1)$ sont vraies.
- **Hérédité** : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n + 1)$ sont vraies pour un entier $n \geq n_0$ quelconque et on montre que cela implique que $\mathcal{P}(n + 2)$ est vraie.
- **Conclusion** : Par principe de récurrence double, on en conclut que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Application 4

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 12, \quad u_{n+2} = 12u_{n+1} - 35u_n$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = 5^n + 7^n$

Solution :

On note $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 5^n + 7^n$

- **Initialisation** : On a $5^0 + 7^0 = 2 = u_0$ et $5^1 + 7^1 = 12 = u_1$, donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
- **Hérédité** : Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n + 1)$ soient vraies, c'est à dire que

$$u_n = 5^n + 7^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 5^{n+1} + 7^{n+1}$$

Alors, par définition de la suite (u_n) , on a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 12 \times (5^{n+1} + 7^{n+1}) - 35 \times (5^n + 7^n) \\ &= 5^n(12 \times 5 - 35) + 7^n(12 \times 7 - 35) \\ &= 5^n \times 25 + 7^n \times 49 \\ &= 5^{n+2} + 7^{n+2} \end{aligned}$$

- **Conclusion** : par principe de récurrence double, on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = 5^n + 7^n$.

Application 5

La suite de Fibonacci (F_n) est une suite récurrente d'ordre 2 définie par

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \forall n \geq 0, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n$

Solution :

On note $\mathcal{P}(n)$: $F_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n$.

- **Initialisation** : On a $\left(\frac{5}{3}\right)^0 = 1$ et $\left(\frac{5}{3}\right)^1 = \frac{5}{3}$.

Comme $F_0 = 0 < 1$ et $F_1 = 1 < \frac{5}{3}$, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

- **Hérédité** : Supposons qu'il existe un certain $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n + 1)$ soient vraies, c'est à dire que

$$F_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n \quad \text{et} \quad F_{n+1} < \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}$$

Alors

$$F_{n+2} < \left(\frac{5}{3}\right)^n + \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}$$

$$F_{n+2} < \frac{5^n \times 3^2}{3^n \times 3^2} + \frac{5^{n+1} \times 3}{3^{n+1} \times 3}$$

$$F_{n+2} < \frac{9 \times 5^n + 3 \times 5^{n+1}}{3^{n+2}}$$

$$F_{n+2} < \frac{24 \times 5^n}{3^{n+2}} < \frac{25 \times 5^n}{3^{n+2}}$$

$$F_{n+2} < \frac{5^{n+2}}{3^{n+2}}$$

Proposition 6

Principe de récurrence forte

On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ qui dépend d'un entier n . Supposons que les deux conditions suivantes sont remplies :

- Il existe un entier n_0 tel que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie
- Pour tout $n \geq n_0$, on a $(\forall k, n_0 \leq k \leq n, \mathcal{P}(k)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit $n \geq n_0$.

Le raisonnement par récurrence forte se rédige en trois étapes :

- **Initialisation** : On démontre que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que $\mathcal{P}(n_0), \mathcal{P}(n_0+1), \dots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies pour un entier $n \geq n_0$ quelconque et on montre que cela implique que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : Par principe de récurrence forte, on en conclut que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Application de la récurrence forte : un théorème sur les nombres premiers

Théorème 1

Tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier.

Démonstration : On note $\mathcal{P}(n)$: « n admet un diviseur premier » et on raisonne par principe de récurrence forte.

- **Initialisation** : 2 est un nombre premier et 2 divise 2 donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
- **Hérédité** : Supposons que pour un entier n tous les nombres entiers entre 2 et n admettent un diviseur premier. Considérons maintenant le nombre $n+1$: soit ce nombre est premier, soit il ne l'est pas. S'il est premier, il admet un diviseur premier : lui-même. S'il n'est pas premier, par définition il peut s'écrire comme produit de deux entiers $n+1 = a \times b$, avec $a < n+1$ et $b < n+1$. Par hypothèse de récurrence forte, a et b admettent tous deux au moins un diviseur premier, donc $n+1$ aussi. Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : Par principe de récurrence forte on en conclut que tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier.

□

Application 6

On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k$.
Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n = 2^{n-1}$.

Solution :

On note $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 2^{n-1}$ et on raisonne par récurrence :

- **Initialisation** : $2^{1-1} = 1$ et $u_1 = \sum_{k=0}^0 u_k = u_0 = 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- **Hérédité** : Supposons que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie pour tout entier $1 \leq k \leq n$, c'est à dire que $u_k = 2^{k-1}$.
Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_0 + \sum_{k=1}^n u_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n 2^{k-1} \\ &= 1 + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j \\ &= 1 + \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\ &= 2^n \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** : par principe de récurrence forte, on en conclut que $u_n = 2^{n-1}$ quel que soit l'entier $n \geq 1$.

Remarque

Dans l'exemple précédent la propriété n'est pas vraie pour le rang $n = 0$, on initialise donc à $n = 1$.

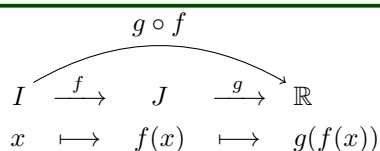
Liste des exercices à travailler : 40, 41, 42, 43, 45, 46, 47, 48, 49

1. Composée de deux fonctions

a) Définition

Définition 1

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J , telles que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \in J$. Alors pour tout $x \in I$, $g(f(x))$ est bien défini et la fonction $x \mapsto g(f(x))$, notée $g \circ f$ (lire « g rond f ») et définie sur I , est appelée fonction composée de f par g .



Exemple 1

- Soit $f(x) = e^x$ et $g(x) = x^2 + 3$.
Alors $(g \circ f)(x) = (e^x)^2 + 3 = e^{2x} + 3$ et $(f \circ g)(x) = e^{x^2+3}$
 $g \circ f$ et $f \circ g$ sont définies sur \mathbb{R} .
- Soit $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 3x - 1$.
 $(g \circ f)(x) = 3\sqrt{x} - 1$ est définie sur $[0; +\infty[$
 $(f \circ g)(x) = \sqrt{3x - 1}$ est définie si $3x - 1 > 0$ donc définie sur $] \frac{1}{3}; +\infty[$.

Remarque

En général, $f \circ g \neq g \circ f$

b) Limites

Propriété 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J telles que pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$.

Soient a, b, c trois réels (ou $+\infty$ ou $-\infty$). Supposons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et que $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = c$

Application 1

Déterminer la limite de $\ln(3x - 8)$ lorsque $x \rightarrow 3$.

Solution :

Par opérations sur les limites, on sait que $\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 8) = 1$

Or, on sait aussi que $\lim_{X \rightarrow 1} \ln(X) = 0$.

Ainsi, par composition de limites, on a $\lim_{x \rightarrow 3} \ln(3x - 8) = 0$.

Application 2

Déterminer la limite de e^{x^2} lorsque $x \rightarrow +\infty$ et lorsque $x \rightarrow -\infty$.

Solution :

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$.

De plus, $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$, donc par composition de limites on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2} = +\infty.$$

c) Dérivée**Propriété 2**

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et v une fonction définie et dérivable sur un intervalle J telles que pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$.

Alors $v \circ u$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad (v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$$

Application 3

Calculer les dérivées des fonctions suivantes en déterminant leur domaine de dérivabilité :

1. $f(x) = e^{3x^2+5x}$
2. $g(x) = (4x - 2)^6$
3. $h(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$
4. $k(x) = \ln(x^2 + x + 1)$

Solution :

1. $f(x) = v \circ u(x)$ avec $u(x) = 3x^2 + 5x$ et $v(x) = e^x$, toutes deux dérivables sur \mathbb{R} .

De plus, $u'(x) = 6x + 5$ et $v'(x) = e^x$ donc f est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (6x + 5) \times v'(3x^2 + 5x) \\ &= (6x + 5) e^{3x^2+5x} \end{aligned}$$

2. $g(x) = v \circ u(x)$ avec $u(x) = 4x - 2$ et $v(x) = x^6$. u et v sont dérivables sur \mathbb{R} avec $u'(x) = 4$ et $v'(x) = 6x^5$. Ainsi, f est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \times v'(4x - 2) \\ &= 4 \times 6(4x - 2)^5 \\ &= 24(4x - 2)^5 \end{aligned}$$

3. $h(x) = v \circ u(x)$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$.
 u est dérivable sur \mathbb{R} et $u'(x) = 2x + 1$. De plus, $\Delta < 0$ donc u n'a pas de racines, $u(x) > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

v est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ainsi, f est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x + 1) \times v'(x^2 + x + 1) \\ &= (2x + 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} \\ &= \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} \end{aligned}$$

4. $k(x) = v \circ u(x)$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$ et $v(x) = \ln(x)$.

Comme vu à la question précédente, $u(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x + 1$ et v est dérivable sur $]0; +\infty[$ avec $v'(x) = \frac{1}{x}$.

Ainsi, f est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x + 1) \times v'(x^2 + x + 1) \\ &= (2x + 1) \times \frac{1}{x^2 + x + 1} \\ &= \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

2. Généralisations

On généralise l'exemple précédent en plusieurs formules de dérivation pour les fonctions de la forme $f(ax + b)$, e^u , u^n , $\ln(u)$ et \sqrt{u} avec u une fonction.

Propriété 3

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $g : x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = af'(ax + b)$.

Démonstration : A partir de la formule vue dans la partie précédente

□

Propriété 4

Soit u une fonction définie sur un intervalle I . Alors $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

On retiendra :

$$(e^u)' = u' e^u$$

.

Démonstration : A partir de la formule vue dans la partie précédente

□

Propriété 5

Soit u une fonction définie sur un intervalle I . Alors $f : x \mapsto (u(x))^n$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = nu'(x)(u(x))^{n-1}$.

On retiendra :

$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$

.

Démonstration : A partir de la formule vue dans la partie précédente

□

Propriété 6

Soit u une fonction définie sur un intervalle I à valeurs strictement positives. Alors $f : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

On retiendra :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

.

Démonstration : A partir de la formule vue dans la partie précédente

□

Propriété 7

Soit u une fonction définie sur un intervalle I à valeurs strictement positives. Alors $f : x \mapsto \sqrt{u}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

On retiendra :

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

.

Démonstration : A partir de la formule vue dans la partie précédente

□

Liste des exercices à travailler : 52, 56, 57, 58, 59, 60, 61

I. Ensemble, cardinal

1. Ensemble, sous-ensemble

Définition 1

Un **ensemble** E est une collection d'éléments. On note $x \in E$ si x est un élément de E .

- Un **ensemble fini** est un ensemble qui contient n éléments où n est un entier naturel.
- Un **ensemble infini** est un ensemble qui n'est pas fini.
- On note $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$, où e_1, e_2, \dots, e_n sont les **éléments de E** .

Le nombre d'éléments n de E s'appelle **cardinal de E** , noté $\text{card}(E)$

Exemple 1

- $A = \{1, 3, 6, 12\}$ est un ensemble fini de cardinal 4
- \mathbb{N} , \mathbb{R} et $[0, 1]$ sont des ensembles infinis.

Définition 2

A est un **sous-ensemble de E** (ou une **partie de E**) si tout élément de A est aussi un élément de E . On note alors $A \subset E$ (A inclus dans E).

Propriété 1

Soit E un ensemble fini et soit A une **partie** de E . Alors A est fini et $\text{card}(A) \leq \text{card}(E)$.

Remarque

On note \bar{A} l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A .

Rappel : deux ensembles A et B sont dit **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$.

2. Sous-ensemble, principe additif

Dans toute cette partie, E désigne un ensemble fini.

Propriété 2

Soient A et B deux parties disjointes de E . Alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$

Si A_1, A_2, \dots, A_n sont n parties disjointes de E deux à deux disjointes, alors $\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \dots + \text{card}(A_n)$

On note

$$\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \text{card}(A_k)$$

On en déduit la propriété suivante :

Propriété 3

Si $\text{card}(E) = n$, alors $\text{card}(\overline{A}) = n - \text{card}(A)$

Propriété 4

(principe additif) Soient A et B deux parties de E . Alors

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

Démonstration : En effet, $A \cup B$ est l'union disjointe de A et de $B \cap \overline{A}$.

Or, B est l'union disjointe de $B \cap A$ et de $B \cap \overline{A}$ donc $\text{card}(B) = \text{card}(B \cap \overline{A}) + \text{card}(B \cap A)$ d'où $\text{card}(B \cap \overline{A}) = \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

Finalement :

$$\begin{aligned} \text{card}(A \cup B) &= \text{card}(A) + \text{card}(B \cap \overline{A}) \\ &= \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) \end{aligned}$$

□

II. Produit cartésien et k -uplet

1. produit cartésien

Définition 3

Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et F , noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (e, f) où $e \in E$ et $f \in F$.

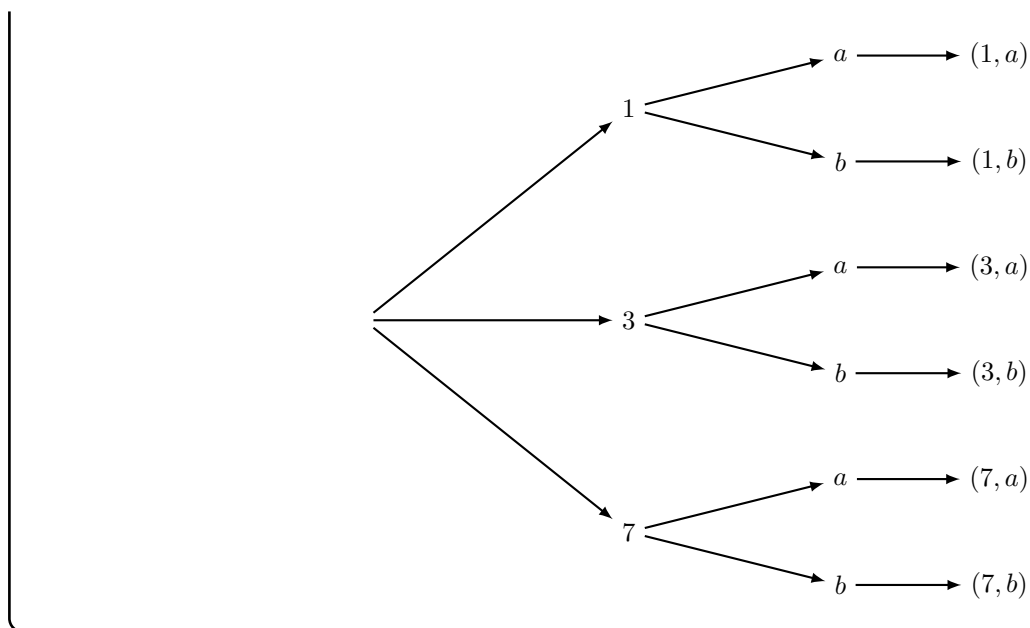
Un élément de $E \times F$ a donc une première composante dans E et une seconde composante dans F . On a donc $E \times F \neq F \times E$ en général, et $(e, f) \neq (f, e)$ pour $e \in E$ et $f \in F$.

Exemple 2

Si $E = \{1, 3, 7\}$ et $F = \{a, b\}$, alors les éléments de $E \times F$ sont $(1, a)$, $(1, b)$, $(3, a)$, $(3, b)$, $(7, a)$ et $(7, b)$.
On peut représenter le produit cartésien par un tableau croisé

éléments de E \ éléments de F	a	b
1	$(1, a)$	$(1, b)$
3	$(3, a)$	$(3, b)$
7	$(7, a)$	$(7, b)$

On peut aussi représenter cette situation par un arbre représentant le choix d'un élément de E puis d'un élément de F

**Exemple 3**

le choix d'une carte dans un jeu de 52 cartes est équivalent au choix d'une valeur parmi

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R\}$$

et d'une couleur parmi

$$F = \{\text{"coeur"}, \text{"pique"}, \text{"carreau"}, \text{"trefle"}\}$$

Le choix d'une carte est le choix d'un élément de $E \times F$.

Exemple 4

Le résultat d'un lancer de deux dés est le choix d'un élément de $E \times E$ avec $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Remarque

le produit cartésien $E \times E$ se note également E^2

Propriété 5

(principe multiplicatif)

Si E et F sont finis, alors $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$.

Exemple 5

Dans un jeu de cartes, il y a 13 valeurs et 4 couleurs et chaque carte a une unique combinaison d'une valeur et d'une couleur. Le nombre total de cartes est donc $4 \times 13 = 52$.

Exemple 6

Dans un lancer de deux dé à 6 faces, il y a $6 \times 6 = 36$ résultats possibles.



a priori les résultats $(1, 4)$ et $(4, 1)$ sont deux résultats **différents**.

2. k -uplet

Définition 4

Soit E un ensemble fini et $k \geq 1$ un entier.

Un **k -uplet** d'éléments de E est une liste ordonnée de k éléments de E .

Un k -uplet d'éléments de E est un élément de $\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{k \text{ fois}} = E^k$

Vocabulaire :

- 2-uplet = doublet
- 3-uplet = triplet
- 4-uplet = quadruplet etc...

Exemple 7

Dans un plan muni d'un repère, un point peut être assimilé à un couple de réels (ses coordonnées), donc à un élément de \mathbb{R}^2 .

De même, dans l'espace muni d'un repère, un point peut être assimilé à un triplet de réels donc à un élément de \mathbb{R}^3 .

Remarque



Différence entre **ordonné** et **non ordonné**

- Un **ensemble** est non ordonné, ce qui signifie que les ensembles suivants sont égaux : $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$
- Un k -uplet est **ordonné**, ce qui signifie que les éléments suivants sont différents : $(1, 2, 3) \neq (3, 1, 2)$

Propriété 6

Le nombre de k -uplets se calcule à l'aide du principe multiplicatif :

$$\text{card}(E^k) = \underbrace{\text{card}(E) \times \cdots \times \text{card}(E)}_{k \text{ fois}} = \text{card}(E)^k$$

Exemple 8

Vaut-il mieux avoir un mot de passe de 12 caractères constitué uniquement de lettres en minuscule ou un mot de passe de 8 caractères constitué de lettres majuscules et minuscules et de chiffres? **Solution :**

Il y a $26^{12} \simeq 9 \times 10^{16}$ mots de passe possible de 12 caractères constitués de lettres minuscules et $62^8 \simeq 2 \times 10^{14}$ mots de passe possibles de 8 caractères constitués de lettres majuscules, minuscules et chiffres. La première option est donc meilleure pour se protéger d'une attaque informatique.

3. Nombre de parties d'un ensemble

On considère un ensemble fini E de cardinal n .

On s'intéresse au nombre de parties de E , c'est à dire au nombre d'ensembles A tels que $A \subset E$.

Remarque

L'ensemble E est toujours une partie de lui même et l'ensemble vide \emptyset est toujours une partie de E .

$$E \subset E$$

$$\emptyset \subset E$$

Propriété 7

Le nombre de parties de E est égal à 2^n

Exemple 9

Compter "à la main" le nombre de parties de $E = \{1, 2, 3\}$.

Solution :

D'après la propriété il devrait y avoir $2^3 = 8$ parties de E .

On peut déjà compter l'ensemble vide \emptyset et l'ensemble E . Ensuite il y a :

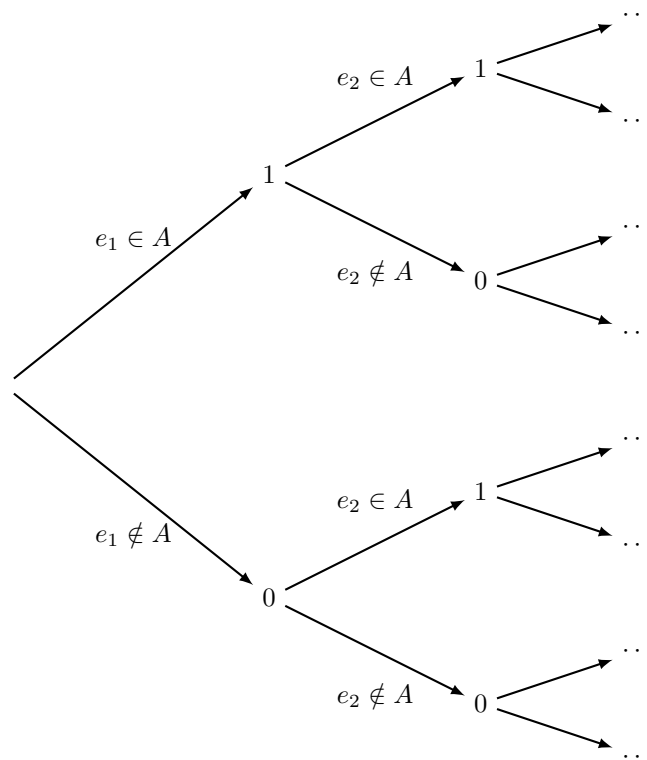
- $\{1\}$
- $\{2\}$
- $\{3\}$
- $\{1, 2\}$
- $\{1, 3\}$
- $\{2, 3\}$

soit 8 parties en tout.

Démonstration : Posons $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Choisir une partie A de E , c'est dire pour chaque élément e_i s'il appartient à A ou non.

On peut représenter ce choix par un arbre, en notant 1 si l'élément appartient à A et 0 sinon.



Le choix d'une partie A de E est donc équivalente au choix d'un n -uplet de $\{0, 1\}$ (c'est à dire une liste de 1 et de 0 de taille n).

Exemples :

- l'ensemble $A = \{e_1, e_3\}$ correspond au n -uplet $(1, 0, 1, 0, 0, \dots, 0)$
- L'ensemble vide \emptyset correspond au n -uplet $(0, 0, 0, \dots, 0)$
- L'ensemble E correspond au n -uplet $(1, 1, \dots, 1)$

Il y a donc autant de parties de E que de n -uplets de $\{0, 1\}$, c'est à dire d'éléments de $\{0, 1\}^n$

D'après la partie précédente $\text{card}(\{0, 1\}^n) = 2^n$

□

III. Arrangements, permutations

Dans toute cette partie, E est un ensemble fini à n éléments.

Si k est un entier, on note $k!$ (prononcé "factorielle k "), le nombre $k! = k \times (k-1) \times (k-2) \times \cdots \times 2 \times 1$

Exemple 10

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

1. Arrangements

Définition 5

Un **arrangement** de k éléments d'un ensemble E est un k -uplet d'éléments **distincts** de E , autrement dit une **liste ordonnée sans répétition** de k éléments de E .

Exemple 11

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, alors $(3, 1, 6)$ est un **arrangement à 3 éléments de E** et $(6, 1, 3)$ en est un autre, mais $(3, 3, 6)$ n'en est pas un.

Propriété 8

Le nombre d'arrangements à k éléments d'un ensemble E à n éléments, noté A_n^k , est égal à $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$

Remarque

$$A_n^k = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Remarque

Il y a k termes dans le produit $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$. En effet, il commence à $(n-0)$ et se termine à $(n-(k-1))$. De 0 à $k-1$ il y a bien k entiers.

Exemple 12

on considère une course à pied entre 10 concurrents numérotés de 1 à 10.

Le nombre de résultats au podium est le nombre de façon d'ordonner 3 concurrents distincts parmi les 10. Le nombre de podiums possibles est donc $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

Démonstration : Démontrons la formule. Pour choisir k éléments distincts parmi n , il faut d'abord choisir un élément quelconque parmi les n éléments de E .

Pour chacun de ces choix, il y a ensuite $n-1$ choix pour choisir un élément distinct du premier.

Pour chacun de ces deux choix, il y a ensuite $n-2$ choix pour choisir un élément distinct des deux premiers...

...et ainsi de suite jusqu'à avoir choisi k éléments. Il y a donc $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$ choix possibles en tout.

□

2. Permutations

Définition 6

Une permutation de E est un arrangement à n éléments de E .

Remarque

Une permutation de E est une liste ordonnée de tous les éléments de E .

Écrire toutes les permutations de E , c'est écrire toutes les façons possibles de faire une liste ordonnées de tous les éléments de E .

Exemple 13

Écrire toutes les permutations de $E = \{1, 2, 3\}$

Solution :

Les permutations de E sont : $\{(1, 2, 3); (1, 3, 2); (2, 1, 3); (2, 3, 1); (3, 1, 2); (3, 2, 1)\}$

Propriété 9

Le nombre de permutation de E est $n!$

Démonstration : Découle immédiatement de la formule pour les arrangements

□

IV. Combinaisons**1. Définition****Définition 7**

On appelle combinaison de k éléments de E (ou k -combinaison) une partie de E à k éléments.

Exemple 14

$E = \{a; b; c; d; e; f\}$

La partie $\{a; e; f\}$ est une combinaison de 3 éléments de E .

Remarque

$\{e; f; a\}$ désigne la même partie de E : $\{e; f; a\} = \{a; e; f\}$.

En revanche, les 3-uplets $(a; e; f)$ et $(e; f; a)$ sont différents : $(a; e; f) \neq (e; f; a)$

Une combinaison k -combinaison de E est donc une **liste non ordonnée de k éléments de E** .

2. Dénombrement**Exemple 15**

Combien y a-t-il de partie à deux éléments dans l'ensemble $E = \{a; b; c; d\}$?

Réponse : Il y a $\{a; b\}$, $\{a; c\}$, $\{a; d\}$, $\{b; c\}$, $\{b; d\}$ et $\{c; d\}$ donc il y a 6 combinaison à 2 éléments de E .

Définition 8

Soit n un entier et E un ensemble tel que $\text{card}(E) = n$.

Le nombre de combinaison de k éléments de E est noté C_n^k ou $\binom{n}{k}$ et se lit "k parmi n".

Le nombre $\binom{n}{k}$ est appelé **coefficient binomial**.

Propriété 10

Soit $n \geq 1$ un entier et k un entier tel que $0 \leq k \leq n$. Alors

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Démonstration : Pour chaque partie A de E contenant k éléments, on peut définir $k!$ arrangements de ces k éléments de A . Réciproquement, chaque arrangement est une liste ordonnée de k éléments de E , donc une partie A de E sur laquelle on a défini un ordre.

Ainsi, il y a autant de k -arrangements de E que de façon de choisir une partie à k éléments de E puis de choisir une façon d'ordonnée ces k éléments, on en déduit :

$$A_n^k = C_n^k \times k!$$

$$d'où C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \times k!}$$

□

Exemple 16

Calculer $\binom{10}{3}$, $\binom{7}{3}$ et $\binom{20}{4}$

Solution :

$$\begin{aligned} \binom{10}{3} &= \frac{10!}{7! \times 3!} \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} \\ &= 120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \binom{7}{3} &= \frac{7!}{4! \times 3!} \\ &= \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \\ &= 35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \binom{20}{4} &= \frac{20!}{16! \times 4!} \\ &= \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= 4845 \end{aligned}$$

Exemple 17

Au poker, une main est un ensemble de 5 cartes parmi un paquet de 52 cartes. Combien y a-t-il de mains possibles ?

Solution :

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{47! \times 5!} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2\,598\,960$$

Il y a 2 598 960 mains possibles.

Exemple 18

Calculer $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{n}$, $\binom{n}{1}$ et $\binom{n}{n-1}$ pour différentes valeurs de n . Que peut-on constater ? **Solution :**

On a toujours $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. En effet, puisque $0! = 1$ on a $\frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!} = 1$
 De même, on a toujours $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$. En effet, $\frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$.

Propriété 11

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

Démonstration : En effet, quel que soit l'ensemble E tel que $\text{card}(E) = n$, il y a un seul sous-ensemble de E à 0 éléments : l'ensemble vide.

Il y a un seul sous-ensemble de E à n éléments : l'ensemble E lui-même.

Il y a n sous-ensemble de E à 1 élément : les ensemble de la forme $\{e\}$ où $e \in E$.

□

V. Propriétés des coefficients binomiaux

1. Somme des coefficients binomiaux

Propriété 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Exemple 19

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$$

Démonstration : Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de parties de E est 2^n (voir Chapitre 2)

On peut diviser les parties de E en $n + 1$ catégories distinctes :

- celle qui contient 0 éléments : \emptyset
- celles qui contiennent 1 éléments
- celles qui contiennent 2 éléments
- \vdots
- celles qui contiennent n éléments : E

Le cardinal de chacune de ces catégories est respectivement $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, ..., $\binom{n}{n}$. Si on fait la somme, on obtient donc le nombre total de parties de E , soit 2^n .

□

2. Symétrie

Propriété 13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k un entier avec $0 \leq k \leq n$. Alors

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Démonstration : Par le calcul, on applique la formule :

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Par le dénombrement : choisir une partie de E à k éléments revient à choisir les $n - k$ éléments qui ne sont pas dans cette partie. Il y a donc autant de parties à k éléments que de parties à $n - k$ éléments.

□

3. Triangle de Pascal

Théorème 1

(Formule de Pascal)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n - 1$. Alors :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Démonstration : Soit E un ensemble tel que $\text{card}(E) = n$ et soit k tel que $1 \leq k \leq n - 1$.

Considérons un élément quelconque $a \in E$. On peut diviser les parties à k éléments de E en deux catégories distinctes :

- *celles qui contiennent a .*
- *celles qui ne contiennent pas a .*

Choisir une partie de E à k éléments contenant a revient à choisir les $k - 1$ éléments restants parmi les $n - 1$ éléments distincts de a . Il y en a donc $\binom{n-1}{k-1}$.

Choisir une partie de E à k éléments ne contenant pas a revient à choisir k éléments parmi les $n - 1$ éléments de E distincts de a . Il y en a donc $\binom{n-1}{k}$.

Le nombre de partie à k éléments de E est donc $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. On a donc

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

□

Propriété 14

Le triangle de Pascal permet de retrouver les valeurs des coefficients binomiaux à l'aide de simples additions. On inscrit les coefficients binomiaux en fonction de n et de k dans un tableau à double entrée en commençant par les 1 pour $\binom{n}{0}$ et $\binom{n}{n}$, puis on applique la formule du binôme : la somme de deux coefficients consécutifs sur la même ligne donne le coefficient immédiatement sous le 2ème (par exemple $4 + 6 = 10$ à la 5ème ligne.)

n							
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
	0	1	2	3	4	5	6

PARTIE I : Manipulations algébriques

Les savoir-faire :

- Manipulation des opérations algébriques élémentaires et maîtrise du calcul littéral : Factorisation et développements.
- Factoriser un polynôme grâce à ses racines.
- Écrire un polynôme du second degré sous sa forme canonique.
- Racines carrées, valeurs absolues.
- Savoir résoudre des équations en raisonnant par équivalence
- Savoir résoudre des équations en raisonnant par analyse-synthèse.

Exercice 1

*

Factoriser dans \mathbb{R} la fonction polynomiale suivante :

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

Exercice 2

*

Factoriser dans \mathbb{R} la fonction polynomiale suivante :

$$f(x) = 2(x+2)^2 + 2(x+2) - 12$$

Indication : on pourra utiliser le changement de variable $X = x + 2$

Exercice 3

*

Soit n un entier naturel. Factoriser dans \mathbb{R} l'expression suivante :

$$A = x^{n+2} - x^n$$

Exercice 4

*

a et b sont deux réels non nuls. Simplifier les fractions suivantes :

1. $\frac{\frac{a}{b} - a}{b - 1}$
2. $\frac{a-b}{a} - \frac{a-b}{b}$
3. $\frac{(1 - \frac{1}{a})^2}{1 - \frac{1}{a^2}}$

Exercice 5

*

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $x^3 + 2x = 3x^2$
2. $(2x+1)(x^2 - 2x + 2) = 2x + 1$
3. $\frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$

Indication : penser à se ramener à une équation produit ou quotient

Exercice 6

*

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $x^4 + 1 = 2x^2$
2. $6x^4 - x^2 - 1 = 0$
3. $x^4 + x^2 = 2$

Exercice 7

*

Écrire sous forme d'une fraction :

1. $A(x) = \frac{1-3x}{(2+x)^2} - \frac{1-2x}{2+x}$
2. $B(x) = \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x}{1+x}$
3. $C(x) = \frac{2+x}{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+x}{x}$

Exercice 8

**

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante :

$$x - 4 = \sqrt{2x - 5}$$

Indication : Attention, élever au carré n'est pas une opération réversible ! On a $x = y \implies x^2 = y^2$ mais $x^2 = y^2 \not\implies x = y$

Exercice 9

*

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $x = \sqrt{x}$
2. $x = \sqrt{x^2}$
3. $x = \sqrt{-x}$
4. $x = (\sqrt{x})^2$

Exercice 10

*

Déterminer l'unique fonction polynomiale du second degré f vérifiant :

$$f(0) = 2 \quad f(1) = -1 \quad f(-1) = 9$$

PARTIE II : Suites numériques et récurrence

Les savoir-faire :

- Reconnaître une suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique. Donner leur terme général et connaître la somme des termes d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique.
- Convergence de suites. Calcul de limites de suites géométriques en fonction de la raison.
- Théorèmes de comparaison, théorème des gendarmes

Nouveauté pour les étudiants n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité :

- Suites croissante majorée / décroissante minorée
- Raisonnement par récurrence

Exercice 11

*

Soit (u_n) une suite géométrique telle que :

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_5 = 96$$

Déterminer la raison q de cette suite et déterminer la somme S suivante :

$$S = u_3 + u_4 + \dots + u_{11}$$

Exercice 12

*

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 4 \\ u_0 = 2 \\ v_n = u_n + 1 \end{cases}$$

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. Exprimer u_n en fonction de n .
3. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 13

*

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $7^n - 1$ est divisible par 6

Exercice 14

*

On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq n^2$
2. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 15

*

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1} \quad ; \quad v_n = \frac{1}{u_n}$$

et par $u_0 = 1$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier n , u_n est bien défini et $u_n > 0$.
2. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Sa raison ?
3. Exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 16

*

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + v_n \end{cases}$$

1. Soient (a_n) et (b_n) les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$a_n = v_n + u_n \quad ; \quad b_n = v_n - u_n$$

Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont géométriques. Préciser leur premier terme et leur raison.

2. Exprimer a_n et b_n en fonction de n .

3. Exprimer u_n et v_n en fonction de n .

Exercice 17

*

Soit $x > 0$ un réel. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n :

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Exercice 18

**

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = \frac{1+2u_n}{2+u_n} \quad ; \quad u_0 = 0$$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul on a $0 < u_n < 1$

Indication : étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{1+2x}{2+x}$ sur l'intervalle $[0; 1]$

Exercice 19

**

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = -1 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \\ v_n = u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.
2. Exprimer v_n en fonction de n .
Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = \frac{u_n}{2^n}$$

3. Montrer que (w_n) est une suite arithmétique. On précisera sa raison et son premier terme.
4. Exprimer w_n , puis u_n en fonction de n .

Exercice 20

*

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = a \quad ; \quad u_{n+1} = (u_n)^2$$

1. Montrer que si $a > 1$ alors (u_n) est une suite strictement croissante. Est-elle convergente ?
2. Montrer que si $0 < a < 1$, la suite (u_n) est une suite strictement décroissante. Est-elle convergente ?

PARTIE III : le symbole somme \sum

.....

Rappel : le symbole \sum est utilisé pour écrire une somme de plusieurs termes qui s'écrivent en fonction d'un paramètre.

Si $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels, alors $\sum_{k=1}^n x_k$ se lit « somme pour k allant de 1 à n de x_k » et est défini par

$$\sum_{k=1}^n x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n$$

Voici quelques autres exemples :

- $\sum_{k=1}^4 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$
- $\sum_{k=1}^5 \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{213}{60}$
- $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$
(formule vue en classe de 1ère)

Exercice 21

*

Calculer $\sum_{k=0}^n 3^k$. En déduire $\sum_{k=0}^n 3^{n-k}$

Exercice 22

*

Montrer que $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1$

Exercice 23

*

Montrer par récurrence que l'égalité suivante est vraie pour tout entier n :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 24

*

Soit $q \neq 1$ un réel fixé. Montrer par récurrence que l'égalité suivante est vraie pour tout entier n :

$$\sum_{k=1}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exercice 25

*

Montrer par récurrence que l'égalité suivante est vraie pour tout entier n :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 26

*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

1. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ où a et b sont deux réels à déterminer.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Exercice 27

**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3
2. Montrer par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$

Exercice 28

**

Soit $a > 0$. On pose $u_n(a) = \sum_{k=0}^n e^{-ka}$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $u_n(a)$ en fonction de a et n
2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(a) = \frac{e^a}{e^a - 1}$

PARTIE IV : Inégalités

Les savoir-faire :

- Résoudre des inéquations du premier ou second degré, ainsi que des inéquations produit et quotient.
- Opérations sur les inégalités (produit, somme, inverse) avec **rigueur**. En particulier :
 - Le passage à l'inverse change le sens de l'inéquation quand les deux membres sont **strictement du même signe**.
 - Multiplier ou diviser par un nombre strictement positif ne change pas le sens de l'inégalité, multiplier ou diviser par un nombre strictement négatif change le sens de l'inégalité.
- Distinguer les opérations sur les inégalités qui préservent l'équivalence ou celles qui ne donnent qu'une implication (par exemple la mise au carré, ne donne qu'une implication, le passage à l'exponentielle donne une équivalence).
- Définition de la croissance et de la décroissance via une inégalité.
- Résoudre une inégalité par l'étude d'une fonction, notamment par une étude de variations et l'étude des extrema.
- Faire le lien entre la convexité ou concavité d'une fonction sur un intervalle et le rapport aux tangentes.
- Faire la différence entre une inégalité large ou stricte.
- Maîtriser les écritures sous forme d'union ou d'intersection d'intervalle pour les ensembles de solution.

Exercice 29

*

Montrer que pour tout réel $x > 1$ on a :

$$\frac{1-x}{\sqrt{x}-1} < 0$$

Exercice 30

*

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $2x + 5 < 3x - 4$
2. $x - 1 \leq x + 1$
3. $(x+1)(2x+1) \geq (x+1)(x-1)$
4. $\frac{x+1}{2x-4} \geq 0$

Exercice 31

*

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $4x^2 - 8x + 4 \geq 0$
2. $x^3 + x^2 \geq -x - 1$
3. $(x+1)^2 < (x-1)^2$
4. $\sqrt{x-1} < \sqrt{x+1}$
5. $\sqrt{(2x+1)^2} < \sqrt{(3-x)^2}$

Exercice 32

*

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $\frac{x+4}{x-1} < \frac{2x+1}{x-1}$

3. $\frac{1}{x} \geq -2$

2. $\frac{x-2}{x+4} < \frac{x+1}{x-1}$

Exercice 33

*

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $0 \leq \frac{x^2}{x^2-1} \leq 1$

3. $\frac{x^3-1}{x+1} \leq x^2 - x - 1$

2. $0 \leq \frac{x}{x+1} \leq 2$

4. $\frac{x-1}{x-1} \leq 1$

Exercice 34

*

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $|4-x| \leq 1$

3. $|x-3| + |x+4| \leq 1$

2. $\sqrt{(x-2)^2} \geq 1$

Exercice 35

*

Montrer que de tous les rectangles qui partagent le même périmètre, celui ayant la plus grande aire est le carré.

Exercice 36

**

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation suivante :

$$e^x + 1 \leq e^{-x}$$

Exercice 37

**

Montrer que pour tout réel x on a :

$$x \ln(x) > -\frac{1}{e}$$

PARTIE V : Étude de fonctions

Les savoir-faire :

- Savoir déterminer les domaines de définition, continuité et dérivabilité des fonctions usuelles (puissances, inverses, logarithmes, exponentielles, racines, valeurs absolues) et de compositions de fonctions.
- Savoir dériver une somme, un produit, un quotient, une composée de deux fonctions.
- Connaître les définitions de fonction paire, impaire, périodique, croissante, décroissante, convexe et concave.
- Déterminer une primitive d'une fonction usuelle. calculer une intégrale d'une fonction usuelle.
- Connaître le lien entre intégrale et aire sous la courbe. Théorème fondamental de l'analyse et lien avec les primitives.
- Théorème des valeurs intermédiaires, corollaire du théorème des valeurs intermédiaire. Rédaction associée.
- Tracer la courbe représentative de toutes les fonctions usuelles. Tracer l'allure de la courbe représentative d'une fonction à l'aide de points.
- Dresser le tableau de signe et de variations d'une fonction usuelle. Déterminer les extrema d'une fonction.

Nouveauté pour les étudiants n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

- Composition de fonctions
- Fonctions trigonométriques cosinus, sinus et tangente.

Dans la suite des exercices, on entendra par « **Faire l'étude de la fonction f** » l'ensemble des choses suivantes :

- Déterminer le domaine de définition de f
- Étudier la continuité et la dérivabilité de f
- Dériver f , étudier le signe de la fonction dérivée, dresser le tableau de variations de la fonction, déterminer ses extrema.
- On pourra aussi étudier le signe de f et les limites aux bornes de l'ensemble de définition si elles existent.

Exercice 38

*

On considère la fonction f suivante :

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

Faire l'étude de la fonction f .

Exercice 39

*

On considère la fonction f suivante :

$$f(x) = 4x^3 - 3x - 1$$

Faire l'étude de la fonction f .

Exercice 40

*

On considère la fonction f suivante :

$$f(x) = (x + 1)e^{2x}$$

Faire l'étude de la fonction f .

Exercice 41

*

On considère la fonction f suivante :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$$

Faire l'étude de la fonction f .

Exercice 42

*

On considère la fonction f suivante :

$$f(x) = \sqrt{e^x - e^{2x}}$$

Exercice 43

*

On considère la fonction f suivante :

$$f(x) = \ln(2x + 1)$$

Faire l'étude de la fonction f .

Exercice 44

*

On considère la fonction f suivante :

$$f(x) = \frac{x - 4}{2x + 1}$$

1. Faire l'étude de la fonction f .
2. Déterminer les asymptotes droites de la fonction f

Exercice 45

**

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$$

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Étudier la limite de $f(x)$ en 1 en utilisant un nombre dérivé.

Indice : On pourra considérer le taux d'accroissement de la fonction g définie pour $x \geq -3$ par $g(x) = \sqrt{x+3}$ en 1.

Exercice 46

*

Dans chaque cas, étudier le domaine de définition et de dérivabilité de la fonction f , puis calculer une expression de sa dérivée f' sur cet intervalle.

1. $f(x) = \left(\frac{2x+1}{4-x}\right)^5$

2. $f(x) = (x-2)\sqrt{x}$

3. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+2}$

4. $f(x) = x^n \ln(x)$ pour n un entier naturel non nul.

Exercice 47******

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \sin(x) \cos(x)^4$
2. $f_3(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x)^3}$
3. $f_2(x) = xe^{-x^2}$
4. $f_4(x) = 3^x$

Exercice 48*****

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 (3t^2 + 2t - 1) dt$
2. $\int_1^4 \frac{2}{t} dt$
3. $\int_{-1}^1 (2t + 2)^2 dt$
4. $\int_e^{e^2} \frac{1+2t+t^2}{1+t} dt$
5. $\int_0^\pi \sin(t) dt$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos(t) dt$

Exercice 49*****

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^\pi \sin(t) \cos(t) dt$
2. $\int_0^1 t(3t^2 + 1)^4 dt$
3. $\int_0^1 e^{2t} dt$
4. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan(t) dt$
5. $\int_1^2 \frac{3t^2 + 1}{(t^3 + t)^4} dt$
6. $\int_1^3 \frac{1}{(t+1)^2} dt$

Exercice 50******

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{t^2 + t + 1}{t + 1} dt$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t) - \sin(t))e^{-t} dt$
3. $\int_0^1 \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt$
4. $\int_0^\pi \sqrt{1 - \cos(t)^2} dt$
5. $\int_1^2 \frac{3t^2 + 1}{(t^3 + t)^4} dt$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(t)^2 - \sin(t)^2) dt$

PARTIE VI : Probabilités et dénombrement**Les savoir-faire :**

- Connaître la définition d'un évènement, d'une probabilité, d'une probabilité conditionnelle.
- Connaître la différence entre indépendant et incompatible. Ne pas confondre les deux.
- Faire la différence entre un évènement et la probabilité de cet évènement.
- Écrire un évènement à l'aide d'intersections, d'unions ou de la négation d'autres évènements.
- Maîtriser les schémas de Bernoulli
- Connaître la définition d'une variable aléatoire, de la loi d'une variable aléatoire
- Connaître la définition d'un schéma de Bernoulli, d'une loi binomiale
- Connaître la définition d'espérance, variance et écart-type.
- Savoir exprimer un évènement sous la forme d'une égalité ou d'une inégalité avec une variable aléatoire ($P(X = 2)$ ou $P(X < 5)$ par exemple, notamment dans le cadre d'une loi binomiale).
- Savoir utiliser les formules de dénombrement : principe additif, principe multiplicatif, k -uplets, arrangements et combinaisons.

Exercice 51*****

Un joueur lance des fléchettes dans une cible. La fléchette touche la cible dans 81% des cas. Combien le joueur doit-il tirer de fléchette pour être sûr à au moins 99,99% qu'au moins une de ses fléchettes touche la cible ?

Exercice 52*****

On lance trois dés équilibrés à 6 faces. Quelle est la probabilité que la somme des trois chiffres obtenus soit 6 ?

Exercice 53*****

Michel a un chien qu'il a appelé Snoopy. Tous les jours, quand Michel rentre chez lui, il trouve Snoopy en train de dormir dans 20% des cas, en train de manger dans 35% des cas et en train de jouer dans 45% des cas. On note X le nombre de fois où Michel retrouve Snoopy en train de dormir en rentrant chez lui sur une durée de sept jours.

1. Quelle est la loi suivie par X ?
2. Quelle est la probabilité que Michel trouve Snoopy en train de dormir exactement trois fois sur ces sept jours ?
3. Quelle est la probabilité que Michel trouve Snoopy en train de dormir au moins deux fois sur ces sept jours ?
4. En moyenne, combien de fois Michel trouve-t-il Snoopy en train de dormir en rentrant chez lui au cours d'une année ?

Exercice 54*****

Une urne contient 20% de billes bleues, 30% de billes vertes et 50% de billes rouges. Seules 10% des billes vertes portent une étoile, contre 15% des billes bleues et 20% des billes rouges.

On tire dans l'urne une bille. Elle est étoilée. Quelle est la probabilité que cette bille soit rouge ?

Exercice 55

*

Une urne contient 150 jetons, dont 70 rouges et 80 bleus. Parmi les jetons rouges, 40 sont carrés et 30 sont triangulaires.

Parmi les jetons bleus, 50 sont carrés et 30 sont triangulaires.

On tire un jeton au hasard dans l'urne. On note A l'événement « le jeton tiré est rouge » et B l'événement « le jeton tiré est bleu ».

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 56

*

- Combien existe-il de mot de passe contenant 5 lettres majuscules ou minuscules suivies de 4 chiffres ?
- Pour jouer au loto, il faut cocher 6 numéros : 5 sur une grille de 49 numéros et 1 numéro chance sur une grille de 10 numéros.
Pour remporter le jackpot, il faut que tous les numéros correspondent au tirage. Quelle est la probabilité de gagner le jackpot ?
- Combien y a-t-il de façons différentes de mélanger un jeu de 32 cartes ?
- Gérard a 12 livres dans son étagère : 5 romans classiques, 4 livres de science fiction, et 3 livres de cuisine.
De combien de façon différentes Gérard peut-il ranger ses livres sans mélanger les genres ?

Exercice 57

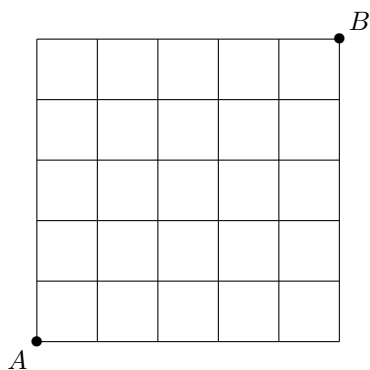
*

Combien un élève de seconde peut-il choisir de triplettes de 3 spécialités parmi les 10 spécialités proposées dans son établissement ?

Exercice 58

*

On parcourt la figure suivante en partant du point A et en allant jusqu'au point B , en avançant sur les arêtes soit vers le haut (H) soit vers la droite (D).



De combien de façons différentes peut-on faire ce parcours ?

Exercice 59

*

On lance un dé à 6 faces 5 fois de suites.

- Calculer la probabilité d'obtenir des numéros dans l'ordre strictement croissant.

- Calculer la probabilité d'obtenir des numéros dans l'ordre croissant.

Exercice 60

*

Soit $n \geq 1$ un entier. On lance n fois un dé parfaitement équilibré à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir

- au moins une fois le chiffre 6 ?
- au moins deux fois le chiffre 6 ?
- au moins k fois le chiffre 6 avec $1 \leq k \leq n$?

Exercice 61

*

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n .

Soit k un entier avec $1 \leq k \leq n$. On pioche k jetons successivement et sans remise dans l'urne. Calculer la probabilité de tirer k numéros dans l'ordre décroissant.

PARTIE VII : Nombres complexes

Les savoir-faire

- Nombre imaginaire i , nombre complexe, partie réelle, partie imaginaire, forme algébrique.
- Somme, produit, quotient de deux nombres complexes, conjugué d'un nombre complexe.
- Équation du second degré à solutions complexes.
- Représentation d'un nombre complexe dans le plan, coordonnées cartésiennes, affixe. Lien avec les vecteurs.
- Représentation d'un nombre complexe dans le plan par un angle et une distance, coordonnées polaires, module et argument, forme trigonométrique, forme exponentielle.
- Trigonométrie : Fonction sinus et fonction cosinus, formules des sommes en trigonométrie. Formules d'Euler.

Les nombres complexes ne sont abordés que dans l'option maths experte. Vous trouverez en complément de cette feuille d'exercice un cours complet sur les nombres complexes qui vous donnera les bases nécessaires sur ce chapitre. Il est important de se familiariser avec ces notions avant de les aborder dans le cours d'hypokhâgne.

Exercice 62

*

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (3 + i)(13 - 2i)$
2. $z_4 = 4 + 2i(3i + 2)$
3. $z_2 = (1 - i)^2$
4. $z_5 = \frac{2 + i}{i - 3}$
5. $z_3 = (3 + i)(2 + i)(i - 1)$
6. $z_6 = \frac{(4 - i)(5 - i)}{(2i + 1)(3 - i)}$

Exercice 63

*

Donner la forme algébrique du conjugué des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (3 + 2i)(-4 + 2i)$
2. $z_3 = \frac{2 - 3i}{8 + 5i}$
3. $z_2 = (2 + i)^3$
4. $z_4 = \frac{2}{i + 1} + \frac{1}{1 - 2i}$

Exercice 64

*

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

1. $3z^2 + 12z + 12 = 0$
2. $z^2 + z + 1 = 0$
3. $2z^2 - 6z + 7 = 0$
4. $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$

Exercice 65

*

Soit b un nombre réel.

1. Développer $(z^2 - bz + 4)(z^2 + bz + 4)$.
2. En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^4 + 16 = 0$ dans \mathbb{C} .

Exercice 66

*

Soit z un nombre complexe différent de 1.

On pose $h = \frac{z + 2i}{z - 1}$ un nombre complexe.

1. Déterminer l'ensemble R des points d'affixe z tel que h soit un nombre réel.
2. Déterminer l'ensemble I des points d'affixe z tel que h soit un nombre imaginaire pur.

Exercice 67

*

Pour tout nombre complexe z on pose $P(z) = z^4 - 1$.

1. Factoriser $P(z)$ et en déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^4 = 1$.
2. En déduire les solutions de l'équation $\left(\frac{2z + 1}{z - 1}\right)^4 = 1$.

Exercice 68

*

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $25 + 10z + z^2 = 16i$.

Exercice 69

*

Donner la forme trigonométrique, puis la forme exponentielle, des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 1 + i$
2. $z_3 = 2 - \sqrt{12}i$
3. $z_2 = 3 - 3i$
4. $z_4 = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$

Exercice 70

*

On considère dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^3 - (1 - i)z^2 + (1 - i)z + i = 0$

1. Montrer que (E) possède une unique solution imaginaire pure.
2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E).

Exercice 71

*

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes dont on donne la forme algébrique :

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i \quad ; \quad z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

Soit z_3 le nombre complexe défini par : $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

1. Donner la forme algébrique du nombre complexe z_3 .
2. Donner la forme exponentielle du nombre complexe z_1 .
3. Donner la forme exponentielle du nombre complexe z_2 .
4. En déduire la forme exponentielle du nombre complexe z_3 .
5. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Indications et corrections des exercices de révision

Correction exercice 1

$$f(x) = (x - 2)(x - 1)$$

Correction exercice 2

$$f(x) = 2x(x + 5)$$

Correction exercice 3

$$A = x^n(x + 1)(x - 1)$$

Correction exercice 4

1. $\frac{\frac{a}{b} - a}{b - 1} = -\frac{a}{b}$
2. $\frac{a - b}{a} - \frac{a - b}{b} = \frac{-(a - b)^2}{ab}$
3. $\frac{\left(1 - \frac{1}{a}\right)^2}{1 - \frac{1}{a^2}} = \frac{a - 1}{a + 1}$

Correction exercice 5

1. $S = \{0; 1; 2\}$
2. $S = \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$
3. $S = \emptyset$

Correction exercice 6

1. $S = \{-1; 1\}$
2. $S = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$
3. $S = \{-1; 1\}$

Correction exercice 7

1. $A(x) = \frac{2x^2 - 1}{(2 + x)^2}$
2. $B(x) = \frac{x}{1 - x^2}$
3. $C(x) = \sqrt{x} - 1$

Correction exercice 8

$$S = \{7\}$$

Correction exercice 9

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1. $S = \{0; 1\}$ | 3. $S = \{0\}$ |
| 2. $S = [0; +\infty[$ | 4. $S = [0; +\infty[$ |

Correction exercice 10

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 2$$

Correction exercice 11

$$q = 2 \text{ car } q^5 = 32$$

$$S = 3 \times 2^3(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^8) = 24 \times \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = 12\,264$$

Correction exercice 12

1. Pour tout entier n , $v_{n+1} = 5u_n + 5 = 5v_n$ donc (v_n) est géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = u_0 + 1 = 3$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3 \times 5^n$ donc $u_n = 3 \times 5^n - 1$
3. $5 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$ donc par opérations de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. (u_n) n'est pas convergente.

Correction exercice 13

On note $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $7^n - 1$ est divisible par 6. »

- **Initialisation** : $7^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ donc est divisible par 6. $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier n , c'est à dire que $7^n - 1$ est divisible par 6. Il existe donc un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $7^n - 1 = 6k$.

En multipliant par 7 on obtient

$$7^{n+1} - 7 = 42k$$

puis en ajoutant 6 :

$$7^{n+1} - 1 = 42k + 6 = (7k + 1) \times 6$$

donc $7^{n+1} - 1$ est un multiple de 6. On a montré que $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$.

- **Conclusion** : Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ est un multiple de 6.

Correction exercice 14

1. — **Initialisation** : $u_0 = 1 \geq 0^2$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$
— **Hérédité** : Supposons que pour un certain entier n on ait $u_n \geq n^2$.
Alors $u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \geq n^2 + 2n + 1$ par hypothèse de récurrence, donc $u_{n+1} \geq (n+1)^2$.
On a montré que si la propriété est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n+1$.
— **Conclusion** : Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq n^2$.
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ donc par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Correction exercice 15

1. Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « u_n est bien défini et $u_n > 0$ ».
 - **Initialisation** : Pour $n = 0$, u_0 est bien défini donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
 - **Hérédité** : Supposons que u_n soit bien défini et $u_n > 0$. Alors $u_n + 1 > 0$ donc $\frac{u_n}{u_n + 1}$ est bien défini et $\frac{u_n}{u_n + 1} > 0$. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
 - **Conclusion** : Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$.
2. Pour tout entier n on a $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_n + 1}{u_n} = 1 + \frac{1}{u_n} = 1 + v_n$ donc (v_n) est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $u_0 = 1$.
3. Pour tout entier n on a $v_n = 1 + n$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{1+n}$.

Correction exercice 16

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= v_{n+1} + u_{n+1} \\&= 3u_n + v_n + u_n + 3v_n \\&= 4u_n + 4v_n \\&= 4a_n\end{aligned}$$

donc (a_n) est géométrique de raison 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}b_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} \\&= 3u_n + v_n - u_n - 3v_n \\&= 2u_n - 2v_n \\&= -2b_n\end{aligned}$$

donc (b_n) est géométrique de raison -2 .

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 3 \times 4^n$ et $b_n = (-2)^n$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{4^n - (-2)^n}{2}$ et $v_n = \frac{4^n + (-2)^n}{2}$

Correction exercice 17

Notons $\mathcal{P}(n) : (1+x)^n \geq 1+nx$

- **Initialisation** : $(1+x)^1 = 1+x$ donc $(1+x)^1 \geq 1+1 \times x$, la propriété est vraie pour $n = 1$
- **Hérédité** : Supposons que pour un certain entier n on ait $(1+x)^n \geq 1+nx$. Alors en multipliant par $1+x$ qui est positif on obtient

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &\geq (1+x)(1+nx) \\&\geq 1+nx+x+nx^2 \\&\geq 1+(n+1)x+nx^2\end{aligned}$$

Or $nx^2 \geq 0$ donc $1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$ d'où

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

la propriété est donc vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion** : Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Correction exercice 18

Posons $f(x) = \frac{1+2x}{2+x}$. f est dérivable sur $[0;1]$ et $f'(x) = \frac{4}{(2+x)^2}$ donc f est strictement croissante sur $[0;1]$. De plus $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f(1) = 1$ donc pour tout réel x , si $0 < x < 1$ alors $f(0) < f(x) < f(1)$ donc $0 < \frac{1}{2} < f(x) < 1$.

On en déduit que $\forall x \in [0;1], f(x) \in [0;1]$

Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété $0 < u_n < 1$.

- **Initialisation** : $u_1 = \frac{1}{2}$ donc $0 < u_1 < 1$, la propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité** : Supposons que la propriété soit vraie pour un entier n , alors $u_n \in [0;1]$.

On a donc $f(u_n) \in]0; 1[$ d'après l'étude de la fonction f donc $u_{n+1} \in]0; 1[$.

— **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < u_n < 1$.

Correction exercice 21

$$\sum_{k=0}^n 3^k = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

$$\sum_{k=0}^n 3^{n-k} = 3^n + 3^{n-1} + \cdots + 3^2 + 3 + 1. \text{ C'est en fait la même somme donc elle vaut } \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Correction exercice 22

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cancel{\frac{1}{n+1}}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cancel{\frac{1}{n+1}}\right) = 1$$

Correction exercice 23

Exercice de cours classique

Correction exercice 24

Exercice de cours classique

Correction exercice 25

Exercice classique

Correction exercice 26

1. Pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
2. On a donc $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ après simplification.

Correction exercice 27

1. $u_1 = u_0 = 1$.
 $u_2 = u_0 + u_1 = 2$
 $u_3 = u_0 + u_1 + u_2 = 4$
 2. Dans une récurrence forte, l'hypothèse de récurrence porte sur tous les entier k jusqu'à un rang n , et pas seulement sur le rang n .
 - **Initialisation :** $u_1 = 2^0$, la propriété est vérifiée pour $n = 1$.
 - **Hérédité :** Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_k = 2^{k-1}$ pour tout entier k avec $1 \leq k \leq n$.
Alors $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + \sum_{k=1}^n 2^{k-1}$ par hypothèse de récurrence.
Or, $\sum_{k=1}^n 2^{k-1} = \sum_{k'=0}^{n-1} 2^{k'}$ par changement d'indice $k' = k - 1$, donc $\sum_{k=1}^n 2^{k-1} = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$.
Finalement, $u_{n+1} = 2^n$, la propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
- **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n = 2^{n-1}$.

Correction exercice 28

1. $u_n(a) = \sum_{k=0}^n (e^{-a})^k = \frac{(e^{-a})^{n+1} - 1}{e^{-a} - 1} = \frac{1 - (e^{-a})^{n+1}}{1 - e^{-a}}$.
2. Puisque $a > 0$ on a $0 < e^{-a} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-a})^n = 0$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(a) = \frac{1}{1 - e^{-a}}$
puis en multipliant au numérateur et au dénominateur par e^a : $u_n = \frac{e^a}{e^a - 1}$.

Correction exercice 29

Faire un tableau de signe pour $\frac{1-x}{\sqrt{x}-1}$.

Correction exercice 30

1. $S =]9; +\infty[$
2. $S =]-\infty; -2] \cup [-1; +\infty[$
3. $S = \mathbb{R}$
4. $S =]-\infty; -1] \cup]2; +\infty[$

Correction exercice 31

1. $S = \mathbb{R}$
2. $S =]-\infty; 0[$
3. $S =]-2; \frac{2}{3}[$
4. $S = [-1; +\infty[$
5. $S = [1; +\infty[$

Correction exercice 32

1. $S =]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$
2. $S =]-4; -\frac{1}{4}[\cup]1; +\infty[$
3. $S =]-\infty; -\frac{1}{2}] \cup]0; +\infty[$

Correction exercice 33

1. $S = \{0\}$
2. $S =]-1; 0]$
3. $S =]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$
4. $S =]-1; +\infty[$

Correction exercice 34

1. $S = [3; 5]$
2. $S =]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$
3. $S = \emptyset$

Correction exercice 35

Poser une fonction bien choisie reliant aire, largeur et longueur. Vous pouvez aussi utiliser de la géométrie de collège et des identités remarquables.

Correction exercice 36

$$S =]-\infty; \ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)]$$

Correction exercice 37

Étudier le signe de la fonction $f(x) = x \ln(x) + \frac{1}{e}$

Correction exercice 38

f est une fonction polynomiale de degré 2, elle est donc définie et dérivable sur \mathbb{R} tout entier, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - 3$. f admet un extrema en $\frac{3}{2}$ et $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = -\frac{1}{4}$

De plus, f a deux racines : $x = 1$ et $x = 2$.

Enfin, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x) = +\infty$ donc par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. En $+\infty$ on a $f(x) =$

$x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = 1$ donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

On en déduit le tableau de variations et le tableau de signe de f :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Correction exercice 39

Domaine de définition : f est une fonction polynôme de degré 3 donc f est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

Variations et limites : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 12x^2 - 3 = 3(4x^2 - 1) = 3(2x - 1)(2x + 1)$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ par somme de limites, et en $+\infty$ on a $f(x) = x^3 \left(4 - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)$

avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = 4$ donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	\nearrow	$f(-\frac{1}{2})$	\searrow	$f(\frac{1}{2})$	\nearrow	$+\infty$

Signe : Pour factoriser un polynôme de degré 3 on commence par chercher une racine évidente. Ici, $f(1) = 0$ donc $f(x)$ peut être factorisée par $(x - 1)$:

Si $f(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$, alors $f(x) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$, donc en posant

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \\ c = 1 \end{cases} \text{ on a bien } f(x) = (x - 1)(4x^2 + 4x + 1).$$

Ainsi, $f(x) = (x - 1)(2x + 1)^2$. Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $(2x + 1)^2 \geq 0$ on en déduit que $f(x)$ est du signe de $x - 1$ et s'annule en $x = -\frac{1}{2}$:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

Correction exercice 40

Domaine de définition : f est définie et dérivable sur \mathbb{R} comme produit et composée de fonctions définies et dérivables sur \mathbb{R} .

Variations et limites : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{2x} + 2(x+1)e^{2x} = (2x+3)e^{2x}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $2x+3$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ donc par composition de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$ donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{2x} = +\infty$.

En $-\infty$ c'est plus difficile : $f(x) = xe^{2x} + e^{2x} = \frac{1}{2} \times 2xe^{2x} + e^{2x}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$ par croissance comparée, donc par composition de limites on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} = 0$. De plus, $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ donc par composition de limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$.

Par somme de limites on en conclut que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Finalement on peut dresser le tableau de variations complet de f :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	0	$f(-\frac{3}{2})$	$+\infty$

Signe : $\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} > 0$ donc $f(x)$ est du même signe que $x+1$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Correction exercice 41

Domaine de définition et de dérivabilité : f est de la forme $f(x) = u \circ v(x)$ avec $v(x) = x^2 - x - 2$ et $u(x) = \sqrt{x}$.

Pour tout réel x , $f(x)$ est défini si et seulement si $x^2 - x - 2 \geq 0$. Étudions le signe de ce trinôme : $\Delta = 9$ et il existe deux racines, $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - x - 2 \geq 0 \iff x \in]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$ donc f est définie sur cet ensemble, notons le \mathcal{D}_f .

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ (et non pas sur $[0; +\infty[$), donc f est dérivable en x si et seulement si $x^2 - x - 2 > 0$. Ainsi, f est dérivable sur $] -\infty, -1[\cup]2, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$.

Variations et limites : Pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$, $2\sqrt{x^2-x-2} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x-1$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x - 2) = +\infty$ par somme de limites. En $+\infty$ on a $x^2 - x - 2 = x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) = 1$ donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x - 2) = +\infty$.

Comme $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$, on par composition de limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$				$+$
f	$+\infty$	0		0	$+\infty$

Signe : $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) \geq 0$.

Correction exercice 47

- 1) Si on pose $u(x) = \cos(x)$, on a $(u(x)^5)' = -5 \sin(x) \cos^4(x)$, donc $f(x) = -\frac{1}{5}(u(x)^5)'$. Une primitive de f_1 est donc $x \mapsto -\frac{1}{5} \cos^5(x)$.
- 2) Si on pose $u(x) = x^2 + x$, la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{(u(x))^2}$ est $x \mapsto \frac{-2u'(x)}{(u(x))^3} = \frac{-2(2x+1)}{(x^2+x)^3} = -2f_3(x)$.
Une primitive de f_2 est donc $x \mapsto \frac{-1}{2(u(x))^2}$.
- 3) Une primitive de f_3 est $-\frac{1}{2} e^{-x^2}$.
- 4) On a $f_4(x) = 3^x = e^{x \cdot \ln(3)}$. Une primitive de f_4 est donc $x \mapsto \frac{1}{\ln(3)} e^{x \cdot \ln(3)} = \frac{3^x}{\ln(3)}$.

Correction exercice 48

1.

$$\int_0^1 (3t^2 + 2t - 1) dt = [t^3 + t^2 - t]_0^1$$

$$\boxed{= 1}$$

2.

$$\int_1^4 \frac{2}{x} dx = [2 \ln(x)]_1^4$$

$$= 2 \ln(4) - 2 \ln(1)$$

$$\boxed{= 4 \ln(2)}$$

3.

$$\int_{-1}^1 (2t+2)^2 dt = \left[\frac{1}{2 \times 3} (2t+2)^3 \right]_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{6} \times ((2+2)^3 - (-2+2)^3)$$

$$\boxed{= \frac{32}{3}}$$

4.

$$\begin{aligned}
 \int_e^{e^2} \frac{1+2u+u^2}{1+u} du &= \int_e^{e^2} \frac{(1+u)^2}{1+u} du \\
 &= \int_e^{e^2} (1+u) du \\
 &= \left[u + \frac{u^2}{2} \right]_e^{e^2} \\
 &= e^2 + \frac{e^4}{2} - e - \frac{e^2}{2} \\
 &= \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2} - e
 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \sin(t) dt &= [-\cos(t)]_0^\pi \\
 &= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) \\
 &= -(-1) + 1 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos(t) dt &= [4 \sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= 4 \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \right) \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

Correction exercise 49

1.

2.

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \sin(t) \cos(t) dt &= \left[\frac{1}{2} \sin^2(t) \right]_0^\pi \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (\sin^2(\pi) - \sin^2(0)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 t(3t^2+1)^4 dt &= \int_0^1 \frac{1}{30} \times 5 \times 6t(3t^2+1)^4 dt \\
 &= \left[\frac{(3t^2+1)^5}{30} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1024}{30} - \frac{1}{30} \\
 &= \frac{341}{10}
 \end{aligned}$$

4.

$$\int_0^1 e^{2t} dt = \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^1$$

$$\boxed{= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}}$$

5.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan(t) dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)} dt$$

$$= [-\ln(\cos(t))]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln(3)$$

6.

$$\int_1^2 \frac{3t^2 + 1}{(t^3 + t)^4} dt = \int_1^2 -\frac{1}{3} \times \frac{-3(3t^2 + 1)}{(t^3 + t)^4} dt$$

$$= \left[-\frac{1}{3} \times \frac{1}{(t^3 + t)^3} \right]_1^2$$

$$= \frac{-1}{3} \left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{8} \right)$$

$$= \frac{-1}{3} \times \frac{-124}{1000}$$

$$\boxed{= \frac{31}{750}}$$

7.

$$\int_1^3 \frac{1}{(t+1)^2} dt = \left[\frac{-1}{t+1} \right]_1^3$$

$$= \frac{-1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{= \frac{1}{4}}$$

Correction exercice 51

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le lancer de n fléchettes constitue une répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Si on note X la variable aléatoire égale au nombre de fléchettes qui touchent la cible, alors X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,81$.

La probabilité de l'événement $(X = 0)$ est $(1 - 0,81)^n$ (que des échecs). La probabilité qu'au moins une fléchette touche la cible est alors donnée par $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - (1 - 0,81)^n$.

On cherche alors n tel que $\mathbb{P}(X \geq 1) \geq 0,9999$

$$1 - 0,19^n \geq 0,9999 \iff -0,19^n \geq -0,0001$$

$$\iff 0,19^n \leq 0,0001$$

$$\iff n \ln(0,19) \leq \ln(0,0001)$$

$$\iff n \geq \frac{\ln(0,0001)}{\ln(0,19)} \quad \text{car } \ln(0,19) < 0$$

à la calculatrice on trouve $\frac{\ln(0,0001)}{\ln(0,19)} \simeq 5,46$.

Ainsi, pour $n \geq 6$, la probabilité qu'au moins une fléchette touche la cible sera supérieure à 0,9999.

Correction exercice 52

Chaque dé peut prendre 6 valeurs possibles, il y a donc $6 \times 6 \times 6 = 216$ résultats possibles équiprobables pour ce lancer.

Parmi ces résultats, seuls 10 donnent une somme égale à 6 : (1, 1, 4), (1, 2, 3), (1, 3, 2), (1, 4, 1), (2, 1, 3), (2, 2, 2), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (4, 1, 1).

La probabilité que la somme des dés fasse 6 est donc $\frac{10}{216}$.

Correction exercice 53

- 1) X compte le nombre de succès dans la répétition de 7 épreuves de Bernoulli, de succès « Michel trouve Snoopy en train de dormir », avec probabilité de succès $p = 0,2$. Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = 0,2$.
- 2) $\mathbb{P}(X = 3) = \binom{7}{3} \times 0,2^3 \times 0,8^4 = 0,115$ à 10^{-3} près.
- 3) $\mathbb{P}(X \geq 2) = 0,423$ à 10^{-3} près d'après la calculatrice.
- 4) L'espérance de X est $E(X) = np = 7 \times 0,2 = 1,4$ Il y a 52 semaines dans une année donc en moyenne le nombre de fois où Michel trouve Snoopy en train de dormir est $1,4 \times 52 = 72,8$.

Correction exercice 54

Si on note E l'événement « la bille est étoilée » et R l'événement « la bille est rouge », alors on nous demande de calculer la probabilité de R sachant E .

$$\mathbb{P}(R|E) = \frac{\mathbb{P}(R \cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{0,5 \times 0,2}{0,5 \times 0,2 + 0,2 \times 0,15 + 0,3 \times 0,1} = \frac{0,1}{0,16} = \frac{1}{16} = 0,0625$$