⋆ ⋆

Exercice 1 — Voir correction

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

1) a) Exprimer A^2 en fonction de A et I, et en déduire un polynôme P tel que $P(A) = 0$.
   b) Montrer que si λ est une valeur propre de A alors λ est racine de P.
   c) En déduire les valeurs propres possibles de A puis montrer que A est diagonalisable.

Dans la suite de l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On considère l'ensemble T_n des matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

- pour tout (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$.
- A admet la valeurs propre 1 et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur-colonne propre associé à cette valeur propre.

2) L'ensemble T_n, muni des lois usuelles sur les matrices, est-il un espace vectoriel ?
3) Montrer que le produit de deux matrices de T_n est une matrice de T_n.
4) Soit A un élément de T_n et λ une valeur propre de A.
   a) Montrer qu'il existe un vecteur-colonne propre $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre λ, pour lequel il existe un entier k de $[\![1, n]\!]$ vérifiant $v_k = 1$ et pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $|v_i| \leqslant 1$.
   b) En déduire que l'on a : $|\lambda| \leqslant 1$ et $|\lambda - a_{k,k}| \leqslant 1 - a_{k,k}$.
5) Montrer que si les éléments diagonaux d'une matrice A de T_n sont tous strictement supérieur à $1/2$, la matrice A est inversible.

⋆ ⋆

Exercice 2 — Voir correction

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est à dire l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tM = -M$.

1) Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite A est une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f est l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe

$$f(M) = ({}^tA)M + MA$$

2) a) Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.
   b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) On considère les trois matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
   b) Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$
4) a) Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement.
   b) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathcal{B}$.
   c) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ puis en donner une base.
5) a) Écrire la matrice F de f dans la base $\mathcal{B}$. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1, 0\}$.
   b) En déduire les valeurs propres de f.
   c) On note Id l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de $f + \mathrm{Id}$ et dire si f est ou n'est pas diagonalisable.

⋆⋆

Exercice 3 — Voir correction

On note I et A les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \ ; \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Prérequis

1) Montrer que si M est une matrice carrée d'ordre n et P est un polynôme annulateur de M, alors toute valeur propre λ de M vérifie $P(\lambda) = 0$.

Partie 1 : Étude de A

2) Calculer A^2 et A^3 et vérifier que $A^3 = 2A$.
3) Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre.
4) Déterminer les valeurs propres de A, puis montrer que A est diagonalisable (on précisera une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 et une matrice D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant telles que : $A = PDP^{-1}$.

Partie 2 : Étude d'une application définie sur $\mathcal{E}$.

5) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que la famille (I, A, A^2) est une base de $\mathcal{E}$. En déduire la dimension de $\mathcal{E}$.
6) Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, la matrice AM appartient à $\mathcal{E}$.

On note f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à toute matrice M de $\mathcal{E}$, associe AM.

7) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.
8) Déterminer la matrice F de f dans la base (I, A, A^2) de $\mathcal{E}$.
9) a) Montrer que $f \circ f \circ f = 2f$.
   b) Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres de f.
10) L'endomorphisme f est-il bijectif ? Diagonalisable ?
11) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
12) a) Résoudre l'équation $f(M) = I + A^2$ d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.
    b) Résoudre l'équation $f(N) = A + A^2$ d'inconnue $N \in \mathcal{E}$.

⋆⋆⋆

Exercice 4 — Voir correction

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Le but de cet exercice est de montrer qu'un endomorphisme f de E est diagonalisable si et seulement si il existe p nombres $r_1, ..., r_p$ réels distincts tels que le polynôme $P = (X - r_1) \cdots (X - r_p)$ soit un polynôme annulateur de f.

1) Soient g et h deux endomorphismes de E. Soit alors l'application $\varphi : \mathrm{Ker}(g \circ h) \to E$ définie par :

$$\forall x \in \mathrm{Ker}(g \circ h), \quad \varphi(x) = h(x)$$

   a) Comparer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathrm{Ker}(g)$.
   b) En déduire que $\dim(\mathrm{Ker}(g \circ h)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(h)) + \dim(\mathrm{Ker}(g))$.

On considère désormais un endomorphisme f de E

2) On suppose que f est diagonalisable. Montrer qu'il existe p nombres $r_1, ..., r_p$ réels distincts (avec $p \in \mathbb{N}^*$) tels que $P = (X - r_1) \cdots (X - r_p)$ soit un polynôme annulateur de f.
3) Réciproquement, on suppose qu'il existe p nombres $r_1, ..., r_p$ réels distincts (avec $p \in \mathbb{N}^*$) tels que $P = (X - r_1) \cdots (X - r_p)$ soit un polynôme annulateur de f.
   a) Montrer que $\sum_{i=1}^{p} \dim(\mathrm{Ker}(f - r_i \mathrm{Id}_E)) \geqslant n$.
   b) Montrer que f est diagonalisable.
4) **Application :** On suppose que f est diagonalisable. Montrer que si E_0 est un sous-espace vectoriel de E stable par f, alors l'endomorphisme $f_{|E_0}$ de E_0 induit par f est, lui aussi, diagonalisable.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$ donc $A^2 = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}A$ d'où $2A^2 - A - I = 0$. En posant $P(X) = 2X^2 - X - 1$ on a bien $P(A) = 0$.

b) Si λ est une valeur propre de A alors il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $X \neq 0$ et $AX = \lambda \cdot X$. On en déduit $A^2X = A(\lambda \cdot X) = \lambda \cdot (AX) = \lambda \cdot (\lambda X) = \lambda^2 X$. Ainsi :

$$\begin{aligned} 0 &= P(A)X \\ &= (2A^2 - A - I)X \\ &= 2A^2X - AX - X \\ &= 2\lambda^2 X - \lambda X - X \\ &= (2\lambda^2 - \lambda - 1)X \\ &= P(\lambda) \cdot X \end{aligned}$$

or $X \neq 0$ donc $P(\lambda) = 0$.

c) P admet 1 et $-\frac{1}{2}$ comme racines.

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{rg}(A - I) = 2$, et le théorème du rang donne donc $\dim(\mathrm{Ker}(A - I)) = 1$.

$$A + \frac{1}{2}I = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{rg}(A + \frac{1}{2}) = 1$ et le théorème du rang donne $\dim(\mathrm{Ker}(A + \frac{1}{2}) = 2$, donc :

$$\dim(\mathrm{Ker}(A - I)) + \dim(\mathrm{Ker}(A + \frac{1}{2})) = 3$$

et donc A est diagonalisable.

2) T_n n'est pas un espace vectoriel ($0_n \notin T_n$ par exemple)

3) Si A et B sont dans T_n, alors les coefficients de AB sont tous positifs (comme sommes de produits de termes positifs), et $ABX_0 = AX_0 = X_0$ car A et B sont dans T_n, d'où $AB \in T_n$.

4) a) Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre non nul de A associé à la valeur propre λ. Soit k un entier de $[\![1, n]\!]$ tel que $|u_k| = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} \{|u_1|, ..., |u_n|\}$. U est non nul donc $u_k \neq 0$. On a alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|u_i| \leq |u_k|$ et donc $\left|\dfrac{u_i}{u_k}\right| \leq 1$.

En posant $V = \dfrac{1}{u_k}U$ il vient que $v_k = 1$ et $|v_i| = \left|\dfrac{u_i}{u_k}\right| \leq 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Enfin, $AV = \dfrac{1}{u_k}AU = \dfrac{1}{u_k}\lambda U = \lambda \cdot \left(\dfrac{1}{u_k}U\right) = \lambda \cdot V$ donc V est bien un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

b) L'égalité $AV = \lambda V$ donne, en s'intéressant au k-ème coefficient de ce vecteur colonne :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{k,i} v_i = \lambda v_k = \lambda \tag{1}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
|\lambda| &= \left|\sum_{i=1}^{n} a_{k,i} v_i\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |a_{k,i}| \times |v_i| && \text{par inégalité triangulaire} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} && \text{car } |v_i| \leq 1 \text{ pour tout } i \text{ dand } [\![1,n]\!] \text{ et car les coefficients de } A \text{ sont positifs} \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

puis en soustrayant $a_{k,k}v_k$ de chaque côté de l'égalité (1) on obtient :

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} a_{k,i} v_i = \lambda - a_{k,k}$$

d'où

$$\begin{aligned}
|\lambda - a_{k,k}| &\leq \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} |a_{k,i}| && \text{par inégalité triangulaire} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} - a_{k,k} \\
&\leq 1 - a_{k,k}
\end{aligned}$$

5) Soit A une matrice de T_n dont les coefficients diagonaux sont tous strictement supérieure à 1/2. Raisonnons par l'absurde et supposons que A n'est pas inversible, alors $\operatorname{Ker}(A) \neq \{0\}$ donc 0 est valeur propre de A, donc d'après la question 4)a) et 4)b) il existe un entier k de $[\![1,n]\!]$ tel que $|0 - a_{k,k}| \leq 1 - a_{k,k}$, c'est à dire $|a_{k,k}| \leq 1 - a_{k,k}$. Or $a_{k,k} > 1/2$ par hypothèse donc $1 - a_{k,k} < 1/2$ et $|a_{k,k}| < /2$, contradiction. On en conclut que A est inversible.

Correction de l'exercice 3 :

1) Notons $P(X) = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$ le polynôme annulateur de M Soit λ une valeur propre de P et X un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ, avec $X \neq 0$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k X = \lambda^k X$ (par récurrence immédiate) donc :

$$\begin{aligned}
0 &= P(M)X \\
&= \left(\sum_{i=0}^{m} a_i M^i\right) X \\
&= \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot (M^i X) \\
&= \sum_{i=0}^{m} a_i \lambda^i X \\
&= \left(\sum_{i=0}^{m} a_i \lambda^i\right) X \\
&= P(\lambda) \cdot X
\end{aligned}$$

or $X \neq 0$ donc $P(\lambda) = 0$.

2) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ donc on a bien $A^3 = 2A$.

3) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $xI + yA + zA^2 = 0$, alors

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y & 0 \\ y & 0 & y \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 0 & z \\ 0 & 2z & 0 \\ z & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{pmatrix} x+z & y & z \\ y & x+2z & y \\ z & y & x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc nécessairement $x = y = z = 0$. On en conclut que la famille (I, A, A^2) est libre.

4) $A^3 - 2A = 0$ d'après la question 2) donc le polynôme $P(X) = X^3 - 2X$ annule A. Comme $P(X) = X(X^2 - 2) = X(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$ il admet pour racines 0, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. Ces racines sont les valeurs propres possibles de A.

- A est de rang 2 donc 0 est valeur propre de A.
- $A-\sqrt{2}I = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}(A-\sqrt{2}I) = 2$, donc $\sqrt{2}$ est une valeur propre de A
- $A+\sqrt{2}I = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}(A+\sqrt{2}I) = 2$, donc $-\sqrt{2}$ est une valeur propre de A.

A est d'ordre 3 et elle a trois valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable.
On trouve comme vecteurs propres :

- $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ pour la valeur propre $-\sqrt{2}$
- $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour la valeur propre 0
- $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ pour la valeur propre $\sqrt{2}$.

en posant $D = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ on a $A = PDP^{-1}$.

5) Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = aI + bA + cA^2$ donc

$$\mathcal{E} = \left\{ aI + bA + cA^2 \ ; \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \mathrm{Vect}\left(I, A, A^2\right)$$

On en conclut que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et que la famille (I, A, A^2) est une famille génératrice de $\mathcal{E}$. Elle est aussi libre d'après la question 3), c'est donc bien une base de $\mathcal{E}$ et on a $\dim(\mathcal{E}) = 3$.

6) Soit $M \in \mathcal{E}$ et soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = aI + bA + cA^2$. Alors $AM = A(aI + bA + cA^2) = aA + bA^2 + cA^3 = aA + bA^2 + 2cA = (a + 2c)A + bA^2$ donc $AM \in \mathcal{E}$.

7) f va bien de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ d'après la question précédente. Soit M et N deux matrices de $\mathcal{E}$ et λ et μ deux réels, on a

$$\begin{aligned} f(\lambda M + \mu N) &= A(\lambda M + \mu N) \\ &= \lambda AM + \mu AN \\ &= \lambda f(M) + \mu f(N) \end{aligned}$$

donc f est linéaire, c'est donc bien un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

8) $f(I) = AI = A$, $f(A) = A^2$ et $f(A^2) = A^3 = 2A$ donc :

$$F = \mathbf{M}_{(I,A,A^2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9) a) Pour tout $M \in \mathcal{E}$, $f^3(M) = A(A(AM))) = A^3M = 2AM = 2f(M)$ donc $f^3 = 2f$.

b) $X^3 - 2X$ est donc un polynôme annulateur de f. Les valeurs propres possibles de f sont les mêmes que celles de A. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on résout :

$$FX = 0 \iff \begin{cases} x + 2z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \iff X = z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{Ker}(F) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(-2I + A^2\right)$.

$$(F - \sqrt{2}I)X = 0 \iff \begin{cases} -\sqrt{2}x &= 0 \\ x - \sqrt{2}y + 2z &= 0 \\ y - \sqrt{2}z &= 0 \end{cases}$$

$$\iff y = \sqrt{2}z$$

donc $\mathrm{Ker}(F - \sqrt{2}I) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ donc $\mathrm{Ker}(f - \sqrt{2}\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\left(\sqrt{2}A + A^2\right)$.

$$(F + \sqrt{2}I)X = 0 \iff \begin{cases} \sqrt{2}x &= 0 \\ x + \sqrt{2}y + 2z &= 0 \\ y + \sqrt{2}z &= 0 \end{cases}$$

$$\iff y = -\sqrt{2}z$$

donc $\mathrm{Ker}(F + \sqrt{2}I) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ donc $\mathrm{Ker}(f + \sqrt{2}\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\left(-\sqrt{2}A + A^2\right)$.

Les valeurs propres de A sont donc $-\sqrt{2}, 0$ et $\sqrt{2}$ et les sous espaces propres associés sont respectivement $\mathrm{Vect}\left(-\sqrt{2}A + A^2\right)$, $\mathrm{Vect}\left(-2I + A^2\right)$ et $\mathrm{Vect}\left(\sqrt{2}A + A^2\right)$.

10) f n'est pas bijectif car $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ d'après la question précédente, et f admet trois valeurs propres distinctes donc f est diagonalisable.

11) Par lecture des colonnes de F, $\mathrm{Vect}\,(F) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, donc une base de $\mathrm{Im}(f)$ est (A, A^2).

D'après la question précédente, une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est $(-2I + A^2)$

12) a) On peut remarquer que $I + A^2 \notin \mathrm{Vect}\left(A, A^2\right) = \mathrm{Im}(f)$ donc $f(M) = I + A^2$ n'a pas de solution dans $\mathcal{E}$.

b) Soit $N \in \mathcal{E}$ quelconque. N peut s'écrire dans une base de sous-espaces propres :

$$N = x(-\sqrt{2}A + A^2) + y(-2I + A^2) + z(\sqrt{2}A + A^2)$$

et on a alors

$$\begin{aligned} f(N) &= xf(-\sqrt{2}A + A^2) + yf(-2I + A^2) + zf(\sqrt{2}A + A^2) \\ &= -\sqrt{2}x(-\sqrt{2}A + A^2) + \sqrt{2}z(\sqrt{2}A + A^2) \\ &= x(2A - \sqrt{2}A^2) + z(2A + \sqrt{2}A^2) \end{aligned}$$

$$= (2x+2z)A + \sqrt{2}(z-x)A^2$$

donc par liberté de la famille (A, A^2),

$$f(N) = A + A^2 \iff \begin{cases} 2x+2z &= 1 \\ \sqrt{2}(z-x) &= 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= \dfrac{1-\sqrt{2}}{4} \\ z &= \dfrac{1+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation $f(N) = A + A^2$ est

$$\left\{ \frac{1-\sqrt{2}}{4}(-\sqrt{2}A + A^2) + y(-2I + A^2) + \frac{1+\sqrt{2}}{4}(\sqrt{2}A + A^2) \ ; \ y \in \mathbb{R} \right\}$$

Correction de l'exercice 4 :

1) a) Si $y \in \mathrm{Im}(\varphi)$, alors il existe x dans $\mathrm{Ker}(g \circ h)$ tel que $y = \varphi(x) = h(x)$ donc $g(y) = g(h(x)) = 0$ car $x \in \mathrm{Ker}(g \circ h)$. Ainsi $y \in \mathrm{Ker}(g)$ donc $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

b) On en déduit que $\mathrm{rg}(\varphi) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(g))$. En appliquant le théorème du rang à φ cela donne :

$$\dim(\mathrm{Ker}(g \circ h)) - \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(g))$$

donc

$$\dim(\mathrm{Ker}(g \circ h)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Ker}(g))$$

Il suffit ensuite de montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(h)$ pour conclure : si $x \in \mathrm{Ker}(h)$ alors $x \in \mathrm{Ker}(g \circ h)$ donc x est dans l'espace de départ de φ et on a $\varphi(x) = h(x) = 0$ par définition. Réciproquement, si $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $h(x) = \varphi(x) = 0$ par définition. On a donc bien $\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ ce qui permet de conclure en remplaçant dans l'inégalité précédente :

$$\dim(\mathrm{Ker}(g \circ h)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(h)) + \dim(\mathrm{Ker}(g))$$

2) Soient $r_1, ..., r_p$ les valeurs propres de f et $E_{r_1}, ..., E_{r_p}$ les sous-espaces propres associés. Posons $P(X) = (X - r_1) \cdots (X - r_p)$.

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et tout $x_i \in E_{r_i}$, on a

$$\begin{aligned} P(f)(x_i) &= (f - r_1\mathrm{Id}_E) \circ \cdots \circ (f - r_p\mathrm{Id}_E)(x_i) \\ &= \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} (f - r_k\mathrm{Id}_E) \right) \circ (f - r_i\mathrm{Id}_E)(x_i) && \text{car les } (f - r_k) \text{ commutent entre eux} \\ &= 0 && \text{car } x_i \in \mathrm{Ker}(f - r_i) \end{aligned}$$

donc $P(f)(x_i) = 0$.

Comme f est diagonalisable on a $E = E_{r_1} \oplus \cdots \oplus E_{r_p}$ donc pour tout $x \in E$, il existe $(x_1, ..., x_p) \in E_{r_1} \times \cdots \times E_{r_p}$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_p$.

Comme $P(f)(x_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, il s'ensuit que $P(f)(x) = 0$ par linéarité, et ce quel que soit $x \in E$. On a donc $P(f) = 0$ donc P est un polynôme annulateur de f.

3) a) D'après la question 1)b) et par récurrence immédiate on a :

$$\dim(\mathrm{Ker}((f - r_1\mathrm{Id}_E) \circ \cdots \circ (f - r_p\mathrm{Id}_E))) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f - r_1\mathrm{Id}_E)) + \cdots + \dim(\mathrm{Ker}(f - r_p\mathrm{Id}_E))$$

et comme $\mathrm{Ker}((f - r_1\mathrm{Id}_E) \circ \cdots \circ (f - r_p\mathrm{Id}_E)) = \mathrm{Ker}(P(f)) = \mathrm{Ker}(0_{\mathcal{L}(E)}) = E$ on en déduit que $\sum_{i=1}^{p} \dim(\mathrm{Ker}(f - r_i\mathrm{Id}_E)) \geqslant \dim(E) = n$.

b) D'après la question précédente, $\dim(\mathrm{Ker}(f - r_1\mathrm{Id}_E) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(f - r_p\mathrm{Id}_E)) = \sum_{i=1}^{p} \dim(\mathrm{Ker}(f - r_i\mathrm{Id}_E)) \geq n$ donc par inclusion et égalité de dimension on a : $E = \mathrm{Ker}(f - r_1\mathrm{Id}_E) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(f - r_p\mathrm{Id}_E)$ donc f est diagonalisable et ses valeurs propres sont $r_1, ..., r_p$.

4) f est diagonalisable donc il existe un polynôme annulateur P de f de la forme $P(X) = (X - r_1) \cdots (X - r_p)$ avec $r_1, ..., r_p$ distincts d'après la question 2).

Comme $P(f) = 0$, on a aussi $P(f_{|E_0}) = P(f)_{|E_0} = 0$ donc $f_{|E_0}$ est annulé par un polynôme de la forme $P(X) = (X - r_1) \cdots (X - r_p)$ avec $r_1, ..., r_p$ distincts, ce qui implique que $f_{|E_0}$ est diagonalisable d'après la question 3)b).