⋆

Exercice 1 — Voir correction

Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1) $(3-2i)(i+1)$
2) $(4-2i)(4+2i)$
3) $\dfrac{1+2i}{5-3i}$
4) $\dfrac{-5}{7+i}$
5) $(1+i)^4$
6) $\left(\dfrac{i}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

⋆

Exercice 2 — Voir correction

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ (donner le résultat sous forme algébrique) :

1) $4iz+2=3-2i$
2) $z(1+i)=1-zi$
3) $\dfrac{1}{2iz}+5=3i$
4) $\overline{z+5i}=z(3-i)$
5) $z^2+2z+2=0$
6) $\dfrac{13}{z}=6-z$

⋆

Exercice 3 — Voir correction

Écrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique

1) $z_1=5+5i$
2) $z_2=\sqrt{3}-i$
3) $z_3=12i-4\sqrt{3}$
4) $z_4=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$
5) $z_5=-7$
6) $z_6=-5\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}i-\dfrac{1}{2}\right)$

⋆

Exercice 4 — Voir correction

Calculer en utilisant la forme exponentielle :

1) $z_1=\dfrac{1+i}{1-i}$
2) $z_2=(2+2i)^4$
3) $z_3=(\sqrt{3}+3i)^7+(\sqrt{3}-3i)^7$
4) $z_4=\displaystyle\sum_{k=0}^{17}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^k$

⋆

Exercice 5 — Voir correction

On note $Z=\dfrac{i-z}{z+2}$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

1) Z est un imaginaire pur
2) Z est un réel
3) Z a un module égal à 1

⋆ ⋆

Exercice 6 **Voir correction**

(D'après Bac S Antilles Guyane Septembre 2017) On considère la suite de nombres complexes z_n définie par

$$\begin{cases} z_0 = 100 \\ z_{n+1} = \dfrac{i}{3} z_n \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

On note M_n le point d'affixe z_n dans le plan complexe.

1) Démontrer que pour tout entier naturel n, les points O, M_n et M_{n+2} sont alignés.
2) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} |z_n| = 0$.
3) En déduire qu'à partir d'un certain rang, tous les points M_n appartiennent à un disque de centre O et de rayon $0,01$.

⋆

Exercice 7 **Voir correction**

(D'après Bac S Métropole - La Réunion 2017) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe

$$z' = -z^2 + 2z$$

Le point M' est appelé image du point M.

1) Déterminer les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.
2) Soit M un point d'affixe z et soit M' son image d'affixe z'.
   On note N le point d'affixe $z_N = z^2$
   Montrer que M est le milieu du segment $[NM']$.

⋆

Exercice 8 **Voir correction**

(D'après Bac S Polynésie 2015) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = z^2 + 4z + 3$$

1) Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.
   Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique.
2) Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$
   Montrer que OAB est un triangle équilatéral.
3) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe $z = x + iy$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.
4) Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathcal{E}$.

⋆

Exercice 9 **Voir correction**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\dfrac{1 + \overline{z}}{1 - z}$ est un réel si et seulement si z est un réel ou z est un imaginaire pur.

⋆ ⋆

Exercice 10 **Voir correction**

Soit z un nombre complexe différent de 1. Montrer que $|z| = 1$ si et seulement si $\dfrac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur.

⋆

Exercice 11 **Voir correction**

Résoudre l'équation $\mathrm{e}^z = 4\sqrt{3} + 6i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
(indication : poser $z = a + ib$ avec a et b réels.

⋆

Exercice 12 — Voir correction

Soient a et b deux réels.

1) Exprimer de deux façons différentes les parties réelles et imaginaires de $e^{ia} \times e^{ib}$.
2) En déduire les expressions de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$ et $\sin b$.

⋆

Exercice 13 — Voir correction

Soit θ un nombre réel.

1) a) Exprimer de deux façons différentes les parties réelles et imaginaires de $(e^{i\theta})^2$.
   b) En déduire que $\cos^2(\theta) = \dfrac{\cos(2\theta)+1}{2}$.
2) En considérant le nombre $(e^{i\theta})^3$, exprimer $\cos^3(\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\cos(3\theta)$.

⋆

Exercice 14 — Voir correction

Soit $a \in]0, \pi[$. Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $z = \dfrac{1-e^{ia}}{1+e^{-ia}}$.
(indication : factoriser au numérateur et au dénominateur par $e^{i\frac{a}{2}}$ et $e^{-i\frac{a}{2}}$

⋆

Exercice 15 — Voir correction

Exprimer les sommes suivante en fonction de θ et de n :

1) $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ 2) $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$ 3) $S_3 = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta)$

⋆

Exercice 16 — Voir correction

1) Montrer que les solutions de l'équation $z^3 = 1$ sont $1, j, j^2$ où j est un nombre complexe de module 1.
2) Montrer que $1 + j + j^2 = 0$
3) Montrer que l'équation $z^n = 1$ admet n solutions de module 1, notées $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$.
4) Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$.

⋆ ⋆

Exercice 17 — Voir correction

(D'après oraux ENS 2017)

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \quad \text{et} \quad \cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$$
Indication : on pourra considérer le nombre complexe $z = \cos(x) + i\sin(x)$ et calculer z^2
2) Montrer que pour tout $x \in]0; \pi[$ on a
$$\frac{\sin(x)}{1-\cos(x)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$
3) Pour un entier $n \geq 2$, on introduit
$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$
Montrer que $S_n = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$
Indication : on pourra considérer le nombre complexe $z = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$
4) Trouver la limite de $\frac{S_n}{n}$ lorsque $n \to \infty$

⋆⋆⋆

Exercice 18 — Voir correction

(D'après oraux ENS 2021) Soient x_0 et y_0 deux nombres réels. Soit $h > 0$ un réel. On définit par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = x_n - hy_n \quad \text{et} \quad y_{n+1} = y_n + hx_n$$

1) On introduit le nombre complexe $z_n = x_n + iy_n$. Exprimer z_n en fonction de n et de z_0.
2) Calculer la limite de $x_n^2 + y_n^2$ lorsque n tend vers $+\infty$
3) Soit N un nombre entier. On définit le réel h_N de telle sorte que $\arg(1 + ih_N) = \dfrac{2\pi}{N}$.
   a) Montrer que $\sqrt{1 + h_N^2} = \dfrac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)}$
   b) En prenant $h = h_N$, on définit la suite (z_n) comme dans la première question (cette suite dépend donc de N). On note $w_N = z_N$ le N-ème terme de cette suite. Montrer que $w_N \to z_0$ lorsque N tend vers $+\infty$.

⋆⋆⋆

Exercice 19 — Voir correction

(D'après oraux ENS 2023)

1) On considère les ensembles suivants :

$$H = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } \Im(z) > 0\} \quad \text{et} \quad D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| < 1\}$$

   où $\Im(z)$ désigne la partie imaginaire de z. Représenter graphiquement ces deux ensembles.
2) Montrer que pour tout $z \in H$, le nombre complexe $\dfrac{1 + iz}{z + i}$ est bien défini et appartient à D
3) Montrer que la fonction définie sur H et à valeurs dans D donnée par la formule $\dfrac{1 + iz}{z + i}$ est une bijection. Quelle est sa fonction réciproque ?
4) On remplace les inégalités strictes par des inégalités larges dans les définitions de H et de D. La fonction est-elle encore bijective ?

⋆⋆⋆

Exercice 20 — Voir correction

(D'après oraux ENS 2018)
Soit $k \geq 2$ un entier et $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{k}}$.

1) Soit $j \geq 0$ un entier. Si j est un multiple de k, que vaut ω^j ?
2) Pour tout entier $0 \leq \ell \leq k - 1$, montrer que $|1 + \omega^\ell| = |\omega^{-\ell/2} + \omega^{\ell/2}| = 2\left|\cos\left(\frac{\pi\ell}{k}\right)\right|$.
3) Soit $j \geq 0$ un entier. Calculer la quantité

$$\sum_{\ell=0}^{k-1} \omega^{\ell j}$$

   suivant si j est un multiple de k ou non.
4) Montrer que

$$\sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ multiple de } k}}^{n} \binom{n}{j} = \frac{1}{k} 2^n + \frac{1}{k} \sum_{\ell=1}^{k-1} (1 + \omega^\ell)^n$$

5) Soit X_n le nombre de piles obtenus dans une succession de n lancers indépendants d'une pièce équilibrée. Montrer que la probabilité que X_n soit un multiple de k converge lorsque $n \to +\infty$ et calculer la limite.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1)

$$\begin{aligned}(3-2i)(i+1) &= 3i+3-2i^2-2i \\ &= 5+i\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}(4-2i)(4+2i) &= 4^2+2^2 \\ &= 20\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\frac{1+2i}{5-3i} &= \frac{(1+2i)(5+3i)}{5^2+3^2} \\ &= \frac{5+3i+10i-6}{34} \\ &= \frac{-1}{34}+\frac{13}{34}i\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}\frac{-5}{7+i} &= \frac{-5(7-i)}{7^2+1^2} \\ &= \frac{-35+5i}{50} \\ &= -\frac{35}{50}+\frac{5}{50}i \\ &= -\frac{7}{10}+\frac{1}{10}i\end{aligned}$$

5) On a

$$\begin{aligned}(1+i)^2 &= 1^2+2i+i^2 \\ &= 2i\end{aligned}$$

donc $(1+i)^4=(2i)^2=4i^2=-4$.

6)

$$\begin{aligned}\left(\frac{i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 &= \left(\frac{i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\left(\frac{i}{2}\right)^2-2\times\frac{i}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) \\ &= \left(\frac{i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{4}-\frac{i\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}\right) \\ &= \left(\frac{i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{i}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i \\ &= i\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 :

1)

$$\begin{aligned} 4iz+2=3-2i &\iff 4iz=1-2i \\ &\iff z=\frac{1-2i}{4i} \\ &\iff z=\frac{i+2}{4i^2} \\ &\iff z=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} z(1+i)=1-zi &\iff z(1+i+i)=1 \\ &\iff z=\frac{1}{1+2i} \\ &\iff z=\frac{1-2i}{1^2+2^2} \\ &\iff z=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2iz}+5=3i &\iff \frac{1}{2iz}+5-3i=0 \\ &\iff \frac{1+10iz-6i^2z}{2iz}=0 \\ &\iff \frac{1+(10i+6)z}{2iz}=0 \\ &\iff 1+(10i+6)z=0 \quad \text{et} \quad 2iz\neq 0 \\ &\iff z=-\frac{1}{10i+6} \quad \text{et} \quad z\neq 0 \\ &\iff z=-\frac{6-10i}{10^2+6^2} \quad \text{et} \quad z\neq 0 \\ &\iff z=\frac{10i-6}{136} \quad \text{et} \quad z\neq 0 \end{aligned}$$

donc $S=\{\frac{5}{68}-\frac{3}{68}i\}$.

4) On pose $z=a+ib$.
Alors

$$\begin{aligned} \overline{z+5i}=z(3-i) &\iff \overline{a+ib+5)}=(a+ib)(3-i) \\ &\iff a-ib+5)=3a-ai+3ib+b \\ &\iff -2a-b+i-b-5+a-3b)=0 \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} -2a-b &=& 0 \\ -4b-5+a &=& 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} b &=& -2a \\ 9a-5 &=& 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} b &=& -\frac{10}{9} \\ a &=& \frac{5}{9} \end{array}\right. \end{aligned}$$

finalement $S=\{\frac{5}{9}-\frac{10}{9}i\}$

5) $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0$ donc deux solutions :

$$z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{4}}{2} = -1 - i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-2 + i\sqrt{4}}{2} = -1 + i$$

6)

$$\begin{aligned} \frac{13}{z} = 6 - z &\iff \frac{13}{z} - 6 + z = 0 \\ &\iff \frac{13 - 6z + z^2}{z} = 0 \\ &\iff z^2 - 6z + 13 = 0 \quad \text{et} \quad z \neq 0 \end{aligned}$$

on résout $z^2 - 6z + 13 = 0$: $\Delta = 6^2 - 4 \times 13 = -16 < 0$ donc l'équation a deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{6 - i\sqrt{16}}{2} = 3 - 2i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{6 + i\sqrt{16}}{2} = 3 + 2i$$

Correction de l'exercice 3 :

1) $|z_1| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
Soit θ un argument de z_1, alors

$$\begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{\Re(z_1)}{|z_1|} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta &= \dfrac{\Im(z_1)}{|z_1|} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Ainsi $\theta \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$
On en conclut que

$$z_1 = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

2) $|z_2| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$
Soit θ un argument de z_2. Alors

$$\begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta &= \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

donc $\theta \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$.
Ainsi, on en conclut que

$$z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

3) $|z_3| = \sqrt{12^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{144 + 16 \times 3} = \sqrt{192} = \sqrt{4 \times 48} = \sqrt{4 \times 3 \times 16} = 8\sqrt{3}.$
Soit θ un argument de z_3. Alors :

$$\begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{-4\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta &= \dfrac{12}{8\sqrt{3}} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

donc $\theta \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.
Ainsi, on en conclut que

$$z_3 = 8\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

4) $z_4 = \dfrac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)}{\sqrt{3}^2+1^2} = \dfrac{\sqrt{3}+i+3i-\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4i}{4} = i$

Ainsi, $z_4 = 1 \times \left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

5) $|z_5| = 7$ et $\arg(z_5) \equiv -\pi[2\pi]$, donc $z_5 = 7\left(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right)$

6) $z_6 = -5\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}i - \dfrac{1}{2}\right) = 5\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

En posant $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$, on a $z_6 = 5(\cos\theta + i\sin\theta)$ donc finalement

$$z_6 = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Correction de l'exercice 4 :

1) $1+i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ et $1-i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc $z_1 = \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = i$

2) $2+2i = 2\sqrt{2}(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$.

Ainsi, $z_2 = (2+2i)^4 = (2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} = (2\sqrt{2})^4\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}\times 4} = 64\,\mathrm{e}^{-i\pi} = -64$

3) $\sqrt{3}+3i = \sqrt{3}(1+\sqrt{3}i) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$

$\sqrt{3}-3i = \overline{\sqrt{3}+3i} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Ainsi, $z_3 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^7 \left((\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}})^7 + (\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}})^7\right)$

$z_3 = \dfrac{(\sqrt{3})^6\sqrt{3}}{2^7}\left(\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{3}} + \mathrm{e}^{-i\frac{7\pi}{3}}\right) = \dfrac{27\sqrt{3}}{128} \times 2\cos\left(\dfrac{7\pi}{3}\right) = \dfrac{27\sqrt{3}}{256}$

4) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ donc

$$\begin{aligned} z_4 &= \sum_{k=0}^{17} (\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}})^k \\ &= \frac{1-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}\times 18}}{1-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5 :

1) Notons $z = a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} Z &= \frac{i-a-ib}{a+ib+2} \\ &= \frac{(-a+i1-b))(a+2-ib)}{(a+2)^2+b^2} \\ &= \frac{-a^2-2a+abi+ia-ab+2-2b)+b-b^2}{a^2+2a+4+b^2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\Re(Z) = \dfrac{-a^2-2a+b-b^2}{a^2+2a+4+b^2}$ et $\Im(Z) = \dfrac{ab+a-ab+2-2b}{a^2+2a+4+b^2} = \dfrac{a+2-2b}{a^2+2a+4+b^2}$.

ainsi, Z est un imaginaire pur si et seulement si $\Re(Z) = 0$, si et seulement si $-a^2-2a+b-b^2 = 0$

Or,

$$\begin{aligned} -a^2-2a+b-b^2 = 0 &\iff a^2+2a-b+b^2 = 0 \\ &\iff (a+1)^2 - 1 + \left(b-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \end{aligned}$$

$$\iff (a+1)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

l'ensemble des points de coordonnées (a, b) vérifiant cette équation est le cercle de centre $(-1, \frac{1}{2})$ et de rayon $R = \sqrt{5/4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

2) Z est un réel si et seulement si $\Im(Z) = 0$, si et seulement si $a + 2 - 2b = 0 \iff b = \frac{1}{2}a + 1$. L'ensemble des points de coordonnées (a, b) vérifiant cette équation est la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$.

3) $|Z| = \frac{|i - z|}{|z + 2|}$ donc Z a pour module 1 si et seulement si $|i - z| = |z + 2|$.
Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe -2.
Alors $|i - z| = AM$ et $|z + 2| = BM$. L'ensemble des points M tels que $AM = BM$ est la médiatrice de $[AB]$.
Ainsi, Z a pour module 1 si et seulement si $M(z)$ est sur la médiatrice de $[AB]$ avec $A(i)$ et $B(-2)$.

Correction de l'exercice 6 :

1) (z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{i}{3}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \left(\frac{i}{3}\right)^n \times z_0 = 100 \times \left(\frac{i}{3}\right)^n$.
Soit n un entier naturel et soient M_n et M_{n+2} les points d'affixe z_n et z_{n+2}.
Alors M_n a pour affixe $100 \times \left(\frac{i}{3}\right)^n$ et M_{n+2} a pour affixe $100 \times \left(\frac{i}{3}\right)^{n+2} = 100 \times \left(\frac{i}{3}\right)^n \times \left(\frac{i}{2}\right)^2 = z_n \times \left(-\frac{1}{9}\right)$
Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{OM_n}$ a pour affixe z_n et le vecteur $\overrightarrow{OM_{n+2}}$ a pour affixe $z_{n+2} = z_n \times \left(-\frac{1}{9}\right)$.
Ainsi, $\overrightarrow{OM_{n+2}} = -\frac{1}{9}\overrightarrow{OM_n}$ donc $\overrightarrow{OM_n}$ et $\overrightarrow{OM_{n+2}}$ son colinéaires. On en déduit que les points O, M et N sont alignés.

2) On a $|z_n| = 100 \times \left|\frac{i}{3}\right|^n$ et que $\left|\frac{i}{3}\right| = \frac{1}{3}$.
Or $0 \leq \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n|^n = 0$.

3) On en déduit qu'à partir d'un certain rang N, on a $|z_n| < 0,01$ pour tout $n \geq N$, donc M_n d'affixe z_n est contenu dans le disque de centre O et de rayon $0,01$ pour tout $n \geq N$.

Correction de l'exercice 7 :

1) On résout $-z^2 + 2z = 2$. Cette équation est équivalente à $-z^2 + 2z - 2 = 0$
$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = -4$. Cette équation a donc deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{4}}{-2} = 1 + i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-2 + i\sqrt{4}}{-2} = 1 - i$$

Les affixes des points dans l'image est le point d'affixe 2 sont donc $1 + i$ et $1 - i$.

2) z est l'affixe de M, z' est l'affixe de M' et z^2 est l'affixe de N.
On a $z' = -z^2 + 2z$ donc $z = \frac{z' + z^2}{2}$ donc M est le milieu de $[M'N]$.

Correction de l'exercice 8 :

1) $M(z)$ est invariant si et seulement si $z = z^2 + 4z + 3$.
On résout l'équation $z = z^2 + 4z + 3$ équivalente à l'équation $z^2 + 3z + 3 = 0$.
$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3$.
$\Delta < 0$ donc l'équation a 2 solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$$

Il y a donc deux points invariants dont les affixes sont $-\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

2) Calculons les longueurs OA, OB et AB :

$$OA = |z_A|$$

$$\begin{aligned}
&= \left|\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\right| \\
&= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} \\
&= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
OB &= |z_B| \\
&= \left|\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}\right| \\
&= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} \\
&= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

et

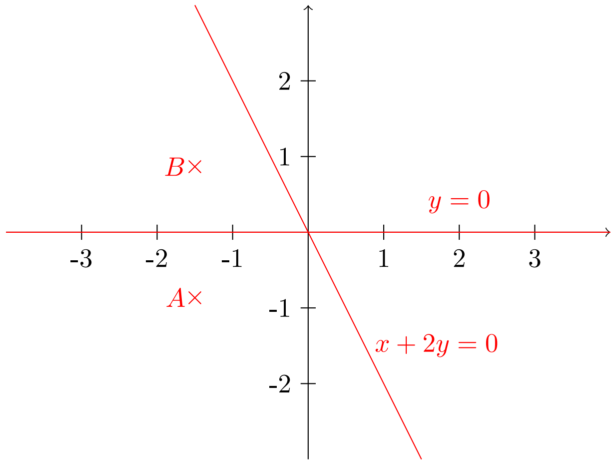
$$\begin{aligned}
AB &= |z_B - z_A| \\
&= |i\sqrt{3}| \\
&= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Ainsi $OA = OB = AB$ donc OAB est un triangle équilatéral.

3) $M'(z')$ est sur l'axe des réels si et seulement si $\Im(z') = 0$, ssi $\Im(z^2+4z+3) = 0$.

$$\begin{aligned}
\Im(z^2+4z+3) = 0 &\iff \Im((x+iy)^2+4(x+iy)+3) = 0 \\
&\iff \Im(x^2-y^2+4x+3+i2xy+4y) = 0 \\
&\iff 2xy+4y = 0 \\
&\iff 2y(x+2y) = 0 \\
&\iff y = 0 \quad \text{ou} \quad x+2y = 0
\end{aligned}$$

L'ensemble des points M d'affixe z tels que l'image M' d'affixe z' est situé sur l'axe réel est donc la réunion de la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) et de la droite d'équation $x+2y = 0$.



4)

Correction de l'exercice 9 : Posons $Z = \dfrac{1+\overline{z}}{1-z}$. Z est un réel si et seulement si $\overline{Z} = Z$, si et seulement si $\dfrac{1+z}{1-\overline{z}} = \dfrac{1+\overline{z}}{1-z}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1+z}{1-\overline{z}} = \frac{1+\overline{z}}{1-z} &\iff (1+z)(1-z) = (1+\overline{z})(1-\overline{z}) \\
&\iff 1 - z^2 = 1 - \overline{z}^2 \\
&\iff \overline{z}^2 - z^2 = 0 \\
&\iff (\overline{z}+z)(\overline{z}-z) = 0 \\
&\iff \overline{z} = -z \quad \text{ou} \quad \overline{z} = z \\
&\iff z \in i\mathbb{R} \quad \text{ou} \quad z \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 10 : Posons $Z = \dfrac{1+z}{1-z}$.

$$\begin{aligned}
Z \text{ est imaginaire pur} &\iff \overline{Z} = -Z \\
&\iff \frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}} = -\frac{1+z}{1-z} \\
&\iff (1+\overline{z})(1-z) = -(1-\overline{z})(1+z) \\
&\iff 1 - z + \overline{z} - \overline{z}z = -1 - z + \overline{z} + \overline{z}z \\
&\iff 2|z|^2 = 2 \\
&\iff |z|^2 = 1 \\
&\iff |z| = 1
\end{aligned}$$

Remarque : on peut raisonner uniquement à partir de la forme algébrique. Si $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{1+z}{1-z} &= \frac{1+x+iy}{1-x-iy} \\
&= \frac{(1+x+iy)(1-x+iy)}{(1-x)^2+y^2} \\
&= \frac{1-x+iy+x-x^2+ixy+iy-ixy-y^2}{(1-x)^2+y^2}
\end{aligned}$$

donc $\Re\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) = \dfrac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2}$. $\dfrac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle, si et seulement si $1 - x^2 - y^2 = 0$, si et seulement si $x^2 + y^2 = 1$ c'est à dire $|z|^2 = 1$ donc $|z| = 1$.

Correction de l'exercice 11 : On pose $z = a = ib$. Alors $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^{ib}$ est un nombre complexe de module e^a et d'argument b.

Or, $|4\sqrt{3} + 6i| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 6^2} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$

Ainsi, $\mathrm{e}^{z} = 4\sqrt{3}+6 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{a} = 2\sqrt{21}$ et $\cos b = \dfrac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{21}} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ et $\sin b = \dfrac{6}{2\sqrt{21}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$

Soit $\theta \in [0, 2\pi]$ l'unique réel tel que $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$. Alors $b \equiv \theta[2\pi]$.

Correction de l'exercice 12 :

$\mathrm{e}^{ia} \times \mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^{ia+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$ d'une part. Donc $\Re(\mathrm{e}^{ia}\,\mathrm{e}^{ib}) = \cos(a+b)$ et $\Im(\mathrm{e}^{ia}\,\mathrm{e}^{ib}) = \sin(a+b)$.
D'autre part,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{ia} \times \mathrm{e}^{ib} &= (\cos a + i\sin a) \times (\cos b + i\sin b) \\
&= \cos a\cos b + i\cos a\sin b + i\sin a\cos b + i^2\sin a\sin b \\
&= \cos a\cos b - \sin a\sin b + i\cos a\sin b + \sin a\cos b)
\end{aligned}$$

donc $\Re(\mathrm{e}^{ia}\,\mathrm{e}^{ib}) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ et $\Im(\mathrm{e}^{ia}\,\mathrm{e}^{ib}) = \cos a\sin b + \sin a\cos b$.
On en déduit les formules d'addition du sinus et du cosinus :

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$$

Correction de l'exercice 13 :

1) D'une part on a $(\mathrm{e}^{i\theta})^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta + i^2\sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta$.
   D'autre part, on a $(\mathrm{e}^{i\theta})^2 = \mathrm{e}^{2i\theta} = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$.
2) En identifiant la partie réelle de ces deux expressions, on en déduit

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta)$$

   ainsi

$$\cos^2\theta - (1-\cos^2\theta) = \cos(2\theta)$$

   d'où

$$2\cos^2\theta - 1 = \cos(2\theta)$$
$$\cos^2\theta = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}$$

3)

$$\begin{aligned}
(\mathrm{e}^{i\theta})^3 &= (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\
&= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta + 3i^2\cos\theta\sin^2\theta + \sin^3\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Re((\mathrm{e}^{i\theta})^3) &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \\
&= \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) \\
&= \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{aligned}$$

   D'autre part, on a $(\mathrm{e}^{i\theta})^3 = \mathrm{e}^{3i\theta} = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$
   Par identification des partis réelles, on a

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos(3\theta)$$
$$\cos^3\theta = \frac{\cos(3\theta)+3\cos\theta}{4}$$

Correction de l'exercice 14 : On a

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1-\mathrm{e}^{ia}}{1+\mathrm{e}^{-ia}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{i\frac{a}{2}}(\mathrm{e}^{-i\frac{a}{2}} - \mathrm{e}^{i\frac{a}{2}})}{\mathrm{e}^{-i\frac{a}{2}}(\mathrm{e}^{i\frac{a}{2}} + \mathrm{e}^{-i\frac{a}{2}})} \\
&= \mathrm{e}^{ia}\,\frac{-2i\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{a}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Or $a \in]0,\pi[$ donc $\dfrac{a}{2} \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$, ainsi $\cos\left(\dfrac{a}{2}\right) > 0$ et $\sin\left(\dfrac{a}{2}\right) > 0$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin\left(\dfrac{a}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{a}{2}\right)} \times (-2i) \times \mathrm{e}^{ia} \\
&= \frac{\sin\left(\dfrac{a}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{a}{2}\right)} \times 2\,\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{2}} \times \mathrm{e}^{ia} \\
&= \frac{\sin\left(\dfrac{a}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{a}{2}\right)} \times \mathrm{e}^{i\left(a+\frac{3\pi}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 15 :

1)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) &= \sum_{k=0}^{n}\Re(\mathrm{e}^{ik\theta}) \\
&= \Re\left(\sum_{k=0}^{n}(\mathrm{e}^{i\theta})^k\right) \\
&= \Re\left(\frac{(\mathrm{e}^{i\theta})^{n+1}-1}{\mathrm{e}^{i\theta}-1}\right) \\
&= \Re\left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta(n+1)}-1}{\mathrm{e}^{i\theta}-1}\right) \\
&= \Re\left(\frac{\mathrm{e}^{i\frac{\theta(n+1)}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta(n+1)}{2}} - \mathrm{e}^{-i\frac{\theta(n+1)}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}\right) \\
&= \Re\left(\frac{\mathrm{e}^{i\frac{\theta(n+1)}{2}} \times 2i \times \sin\left(\frac{\theta(n+1)}{2}\right)}{\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} \times 2i \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) \\
&= \Re\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta(n+1)}{2} - i\frac{\theta}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{\theta(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\theta(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \times \Re\left(\mathrm{e}^{i\frac{n\theta}{2}}\right) \qquad \text{car } \frac{\sin\left(\frac{\theta(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \in \mathbb{R} \\
&\boxed{= \frac{\sin\left(\frac{\theta(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \times \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

2) De même, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) &= \sum_{k=0}^{n} \Im\left(\mathrm{e}^{ik\theta}\right) \\
&= \Im\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\theta(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \Im\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\right) \\
&\boxed{= \frac{\sin\left(\frac{\theta(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \times \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

3) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2(k\theta) = \frac{1+\cos(2k\theta)}{2}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} (1+\cos(2k\theta)) \\
&= \frac{1}{2}\left(n+1+\frac{\sin\left(\frac{2\theta(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{2n\theta}{2}\right)\right) && \text{d'après l'exercice précédent} \\
&= \frac{1}{2}\left(n+1+\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}\cos(n\theta)\right) \\
&\boxed{= \frac{(n+1)\sin\theta+\sin((n+1)\theta)\cos(n\theta)}{2\sin\theta}}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 16 :

1) Soit z un nombre complexe tel que $z^3 = 1$.
Alors $|z|^3 = 1$ donc $|z| = 1$.
Soit θ un argument de z. Alors $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ donc $z^3 = \mathrm{e}^{3i\theta}$.
$\mathrm{e}^{3i\theta} = 1 \iff 3i\theta \equiv 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \iff \theta = \dfrac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$.
Ainsi, $z = \mathrm{e}^{2ik\pi/3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc $z \in \left\{1, \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}, \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}}\right\}$.
En posant $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$, les solutions sont bien 1, j et j^2.

2) On a

$$\begin{aligned}
1+j+j^2 &= 1+\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}+\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}} \\
&= 1+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\
&= 1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

3) Soit z tel que $z^n = 1$. Alors $|z|^n = 1$ donc $|z| = 1$.
Soit θ un argument de z. Alors $z = e^{i\theta}$.
$z^n = 1 \iff \mathrm{e}^{ni\theta} = 1 \iff \mathrm{e}^{ni\theta} = \mathrm{e}^{ni\theta} = 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, $\theta = \dfrac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$.

On en déduit que $z \in \left\{1, \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}, \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{n}}, \cdots, \mathrm{e}^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\right\}$. Réciproquement, ces nombres sont bien solutions de $z^n = 1$.

Les solutions sont donc $\{z_k = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}$.

4) L'ensemble des solutions est $\{\omega^k \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}$ avec $\omega = z_1 = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}$.

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \dfrac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 0$ car $\omega^n = 1$.

Correction de l'exercice 17 :

1) Posons $z = \cos x + i \sin x$. Alors $z^2 = \cos(2x) + i\sin(2x)$ d'après la formule de Moivre, et d'autre part $z^2 = (\cos^2 x + i^2 \sin^2 x + 2i \cos x \sin x$ donc en identifiant les parties réelles et imaginaires de chaque expression :

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \text{et} \quad \sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

2) En utilisant le fait que $x = 2\frac{x}{2}$ et d'après les formules de la question 1 on a :

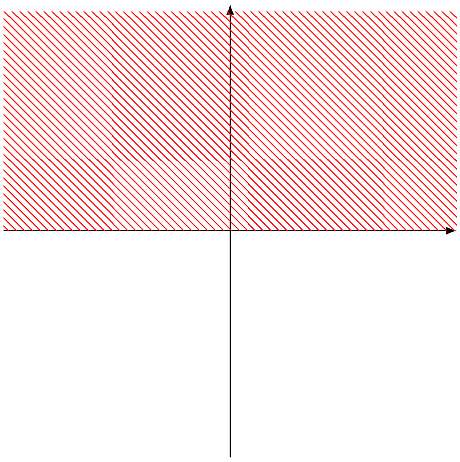
$$\begin{aligned}
\frac{\sin x}{1 - \cos x} &= \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1 - \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} \\
&= \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

3) On pose $z = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}$. Alors

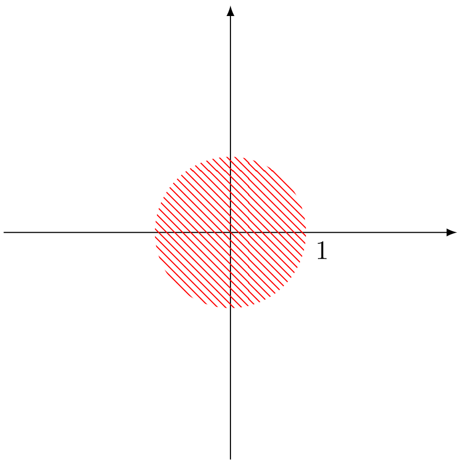
$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \Re(\mathrm{e}^{ik\pi/n}) \\
&= \Re\left(\sum_{k=0}^{n-1} (\mathrm{e}^{i\pi/n})^k\right) \\
&= \Re\left(\frac{\mathrm{e}^{i\pi} - 1}{\mathrm{e}^{i\pi/n} - 1}\right) \\
&= \Re\left(\frac{-2}{\mathrm{e}^{i\pi/2n}(\mathrm{e}^{i\pi/2n} - \mathrm{e}^{-i\pi/2n}}\right) \\
&= \Re\left(-2\,\mathrm{e}^{-i\pi/2n} \times \frac{2i}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right) \\
&= \frac{-4}{\sin\frac{\pi}{2n}} \Re\left(\mathrm{e}^{-i\pi/2n}\,\mathrm{e}^{i\pi/2}\right) \\
&= \frac{-4}{\sin\frac{\pi}{2n}} \cos\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{-4\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2n}}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 19 :

1) H est le demi plan suivant :



et D est l'intérieur du disque suivant (sans le bord) :



2) Si $z \in H$, alors $\text{Im}(z) > 0$ donc $z \neq -i$. Ainsi $z + i \neq 0$ donc $\dfrac{1+iz}{z+i}$ est bien défini.
De plus, en posant $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{1+iz}{z+i}\right| &= \frac{|1+iz|}{|z+i|} \\ &= \frac{|1+ix-y|}{|x+i(y+1)|} \\ &= \frac{(1-y)^2+x^2}{x^2+(y+1)^2} \end{aligned}$$

Le numérateur et le dénominateur sont positifs donc :

$$\begin{aligned} \frac{(1-y)^2+x^2}{x^2+(y+1)^2} < 1 &\iff (1-y)^2+x^2 < x^2+(y+1)^2 \\ &\iff (1-y)^2 < (y+1)^2 \\ &\iff 1-2y+y^2 < y^2+2y+1 \\ &\iff 4y > 0 \\ &\iff y > 0 \end{aligned}$$

Or $y > 0$ car $z \in H$ donc finalement $\left|\dfrac{1+iz}{z+i}\right| < 1$.

3) Soit $z' \in D$. On a :

$$\begin{aligned} z' = \frac{1+iz}{z+i} &\iff z'z + iz' = 1 + iz \\ &\iff z(z'-i) = 1 - iz' \\ &\iff z = \frac{1-iz'}{z'-i} \end{aligned}$$

Montrons que $\frac{1-iz'}{z'-i}$ est un élément de H. Soient $x', y' \in \mathbb{R}$ tels que $z' = x' + iy'$:

$$\begin{aligned} \frac{1-iz'}{z'-i} &= \frac{1-ix'+y'}{x'+i(y'-1)} \\ &= \frac{(1-ix'+y')(x'-i(y'-1)}{x'^2+(y'-1)^2} \\ &= \frac{x'-i(y'-1)-ix'^2-x'y'+x'+x'y'-iy'^2+iy'}{x'^2+(y'-1)^2} \qquad = \frac{2x'+i(1-x'^2-y'^2)}{x'^2+(y'-1)^2} \end{aligned}$$

donc $\Im\left(\frac{1-iz'}{z'-i}\right) = \frac{1-x'^2-y'^2}{x'^2+(y'-1)^2}$ et puisque $z' \in D$ on a $|z'|^2 < 1$ donc $x'^2+y'^2 < 1$ d'où $\Im\left(\frac{1-iz'}{z'-i}\right) > 0$, ce qui prouve que tout élément z' de D admet un unique antécédent dans H par l'application qui à z associe $\frac{1+iz}{z+i}$. Cette application est donc une bijection de H vers D.

4) Si on remplace les inégalités strictes par des inégalités larges dans les définitions de H et D, alors $i \in D$ mais n'a pas d'antécédent par l'application précédente. En effet :

$$\begin{aligned} \frac{1+iz}{z+i} = i &\iff 1 + iz = iz - 1 \\ &\iff 2 = 0 \end{aligned}$$

cette application n'est donc plus surjective.

Correction de l'exercice 20 :

1) Si j est un multiple de k alors il existe un entier m tel que $j = mk$. On a donc :

$$\begin{aligned} \omega^j &= \left(\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{k}}\right)^{mk} \\ &= \mathrm{e}^{2i\pi m} \\ &= 1 \end{aligned}$$

car $2i\pi m$ est un multiple de $2i\pi$.

2) Soit ℓ un entier tel que $0 \leq \ell \leq k-1$. Alors :

$$\begin{aligned} |1+\omega^\ell| &= |\omega^{\ell/2}(\omega^{-\ell/2}+\omega^{\ell/2})| \\ &= |\omega|^{\ell/2} \times |\,\mathrm{e}^{-i\pi\ell/k} + \mathrm{e}^{i\pi\ell/k}\,| \\ &= |2\cos(\pi\ell/k))\,| \\ &= 2|\cos(\pi\ell/k)\,| \end{aligned}$$

3) Si $j \geq 0$ n'est pas un multiple de k, alors $\omega^j \neq 1$ donc :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} \omega^{\ell j} &= \sum_{j=0}^{k-1} (\omega^j)^\ell \\ &= \frac{1-\omega^{kj}}{1-\omega^j} \end{aligned}$$

$$= 0 \qquad \text{car } kj \text{ est un multiple de } k \text{ donc } \omega^{kj} = 1$$

Si j est un multiple de k alors pour tout entier $\ell \geq 0$ on a $\omega^{j\ell} = 1$ donc :

$$\sum_{j=0}^{k-1} \omega^{\ell j} = k$$

4) Posons pour tout entier $j \geq 0$: $m_j = \begin{cases} k & \text{si } j \text{ est un multiple de } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k}2^n + \frac{1}{k}\sum_{\ell=1}^{k-1}(1+\omega^\ell)^n &= \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1}(1+\omega^\ell)^n \\
&= \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\omega^{\ell j}1^{n-j} \\
&= \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sum_{\ell=0}^{k-1}\omega^{\ell j} \\
&= \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} \times m_j \\
&= \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ multiple de } k}}^{n} \binom{n}{j}
\end{aligned}$$

5) X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$ donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n \text{ est un multiple de } k) &= \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ multiple de } k}}^{n} \binom{n}{j} \times \frac{1}{2^j} \times \frac{1}{2^{n-j}} \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ multiple de } k}}^{n} \binom{n}{j} \\
&= \frac{1}{k} + \frac{1}{2^n k}\sum_{\ell=1}^{k-1}(1+\omega^\ell)^n
\end{aligned}$$

Intéressons-nous au deuxième terme :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2^n k}\sum_{\ell=1}^{k-1}(1+\omega^\ell)^n\right| &\leq \frac{1}{2^n k}\sum_{\ell=1}^{k-1}|1+\omega^\ell|^n && \text{par inégalité triangulaire} \\
&\leq \frac{1}{2^n k}\sum_{\ell=1}^{k-1}2^n|\cos^n(\pi\ell/k) \\
&\leq \frac{1}{k}\sum_{\ell=1}^{k-1}\cos^n(\pi\ell/k)
\end{aligned}$$

Or pour tout $\ell \in \{1, ..., k-1\}$ on a $0 < \frac{\pi\ell}{k} < \pi$ donc $-1 < \cos\left(\frac{\pi\ell}{k}\right) < 1$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \cos^n(\pi\ell/k) = 0$ donc par somme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{\ell=1}^{k-1}\cos^n(\pi\ell/k) = 0$. Finalement on en conclut que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \text{ est un multiple de } k) = \frac{1}{k}}$$