

Sous-espaces vectoriels

★

Exercice 1

Déterminer dans chaque cas si F est un sous-espace vectoriel de E ou non.

- 1) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - 2y + z = 0\}$
- 2) $E = \mathbb{R}^4$, $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - t = y + 2z \text{ et } x + y = 0\}$
- 3) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$
- 4) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
- 5) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$
- 6) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y = 0\}$
- 7) $E = \mathbb{R}^n$, $F = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n x_k = 0\}$
- 8) $E = \mathbb{R}^n$, $F = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n (-1)^k x_k^2 = 0\}$

★

Exercice 2

On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de \mathbb{R} vers \mathbb{R} et on admet que $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

- 1) L'ensemble F des fonctions continues sur \mathbb{R}
- 2) L'ensemble F des fonctions paires sur \mathbb{R}
- 3) L'ensemble F des fonctions impaires sur \mathbb{R}
- 4) L'ensemble F des fonctions périodiques sur \mathbb{R}
- 5) L'ensemble F des fonctions f telles que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- 6) L'ensemble F des polynômes de degré 2
- 7) L'ensemble F des fonctions de la forme $x \mapsto e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

★

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer dans chacun des cas suivants si F est un sous-espace vectoriel de E ou non :

- 1) $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = P(1)\}$
- 2) $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \exists a \in \mathbb{R}, P(a) = 0\}$
- 3) $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid 1 < \deg(P) < n\}$
- 4) $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \exists Q \in \mathbb{R}_n[X], P = XQ'(X)\}$

★

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer dans chacun des cas suivants si F est un sous-espace vectoriel de E ou non :

- 1) $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M + \text{tr}(M)I = 0\}$
- 2) $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^2 = I\}$
- 3) $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^2 = 0\}$
- 4) $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = 0\}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée.
- 5) $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \exists N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AN = M\}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée.

Familles libres, familles génératrices, bases

★

Exercice 5

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. Déterminer dans chaque cas si la famille (u, v, w) est libre ou liée.

- 1) $u = (3, -2, 1)$, $v = (1, 2, 3)$ et $w = (-4, 1, 5)$
- 2) $u = (1, 1, 3)$, $v = (4, 2, 5)$ et $w = (-1, 1, 4)$
- 3) $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 0)$ et $w = (0, 0, 1)$
- 4) $u = (1, 1, 1)$, $v = (3, 0, 3)$ et $w = (0, 3, 0)$

★

Exercice 6

Soit $F = \text{Vect}((-4, 1, 3)) \subset \mathbb{R}^3$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 4x - 2y + 6z = 0\}$

- 1) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
- 2) Montrer que $F \subset G$.
- 3) Montrer que $F = G$

★ ★ ★

Exercice 7

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .

- 1) Montrer que la famille (\cos, \sin) est libre dans E
- 2) Soient $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ une famille de n réels. Montrer que $(x \mapsto \sin(a_i x))_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre.

★

Exercice 8

Dans chaque cas déterminer une base de E

- 1) $E = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + y + 2z + 3t = 0 \end{cases} \right\}$
- 4) $E = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z + t = 0 \\ x + y + z - t = 0 \end{cases} \right\}$
- 2) $E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x + 3y = 0 \end{cases} \right\}$
- 5) $E = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - y - 3z - t = 0 \\ 2x - y - 5z + t = 0 \end{cases} \right\}$
- 3) $E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases} \right\}$

★

Exercice 9

On considère $F = \text{Vect}((3, -2, 4), (5, 0, 6), (3, 8, 2)) \subset \mathbb{R}^3$. Déterminer la dimension de F .

★

Exercice 10

Soient $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, 1, 0)$ et $w = (0, 1, 1)$ trois vecteurs de \mathbb{R}^3 .

- 1) Montrer que (u, v, w) constitue une base de \mathbb{R}^3
- 2) Exprimer les coordonnées des vecteurs $x = (3, 1, 2)$ et $y = (0, 0, 4)$ dans la base (u, v, w) .

★

Exercice 11

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$. Déterminer une base de E .

★

Exercice 12

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

★

Exercice 13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ et l'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$.

- 1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E
- 2) Montrer que $\dim(F) = n$.

★

Exercice 14

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et soit $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$. L'ensemble $\mathcal{C}(A)$ s'appelle le **commutant** de A .

- 1) Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 2) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in \mathcal{C}(A)$ si et seulement si $a = d$ et $b = -c$.
- 3) En déduire $\dim(\mathcal{C}(A))$.

Applications linéaires

★

Exercice 15

Dans chaque cas, déterminer si l'application φ est linéaire ou non.
Si φ est linéaire, déterminer son noyau et son image.

- 1) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \varphi(x, y, z) = (x + z, y - z)$
- 2) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \varphi(x, y, z) = xy + 2z$
- 3) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x, y) = 3y - x$
- 4) $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \varphi(x, y, z, t) = (x + 2t, z + x + y, 3 - 2t, 5x)$

★

Exercice 16

Soit $E = \text{Vect}((4, 1, -1), (2, 0, 2))$ un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
On considère l'application $f : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in E, \quad f(x, y, z) = (x - y, y + z)$$

- 1) Montrer que f est une application linéaire de E vers \mathbb{R}^2 .
- 2) Montrer que $(1, 0) \in \text{Im}(f)$ et $(0, 1) \in \text{Im}(f)$
- 3) En déduire que f est surjective
- 4) Déterminer $\text{Ker}(f)$
- 5) En déduire que f est injective.

★ ★

Exercice 17

Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{3}x + y = 0\}$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$
On considère l'application φ définie sur E par

$$\forall (x, y) \in E, \quad \varphi(x, y) = ((\sqrt{6} - \sqrt{2})x - (\sqrt{6} + \sqrt{2})y, (\sqrt{6} + \sqrt{2})x + (\sqrt{6} - \sqrt{2})y)$$

- 1) Montrer que φ est une application linéaire de E dans \mathbb{R}^2
- 2) Montrer que φ est une application linéaire de E dans F

★ ★

Exercice 18

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E . On note $f^2 = f \circ f$.

- 1) Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$.
- 2) Montrer que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$
- 3) Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \iff \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}$

★ ★

Exercice 19

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 = f \circ f = 0$. Montrer que $\text{rg}(f) \leq \frac{\dim(E)}{2}$.

★

Exercice 20

Soit E un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^m . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- 1) Si f est injective et que (u_1, u_2, \dots, u_p) est une famille libre de E , montrer que $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p))$ est une famille libre de F .
- 2) Si f est surjective et que (u_1, u_2, \dots, u_p) est une famille génératrice de E , montrer que $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_p))$ est une famille génératrice de F .
- 3) Que peut-on en déduire si f est bijective?

★ ★

Exercice 21

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère l'application $\varphi_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

- 1) Montrer que $\varphi_\theta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.
- 2) Pour quelle(s) valeur(s) de θ a-t-on $\varphi_\theta = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$?
- 3) Pour quelle(s) valeur(s) de θ a-t-on $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \varphi_\theta(x, y) = -(x, y)$?
- 4) Existe-t-il une valeur de θ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \varphi_\theta(x, y) = (-x, y)$?
- 5) Soit $M(x, y)$ un point du plan muni d'un repère, et soit M' le point dont les coordonnées sont données par $\varphi_\theta(x, y)$.
 - a) Montrer que si M appartient au cercle de centre 0 et de rayon 1, alors M' aussi.
 - b) On pose $\theta = \frac{\pi}{3}$. Représenter l'image de $(0, 1)$, de $(1, 0)$ et de $(-1, 0)$ par φ_θ .
 - c) Quelle est la transformation du plan correspondant à φ_θ pour θ quelconque.

★ ★

Exercice 22

Soit E un espace vectoriel de dimension n et H un sous-espace vectoriel de E . On dit que H est **un hyperplan de E** si $\dim(H) = n - 1$.

- 1) Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ une forme linéaire non nulle. Montrer que $\text{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E .
- 2) Soit H un hyperplan de E . Montrer qu'il existe une application $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$.

★

Exercice 23

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application f qui à tout polynôme P associe le polynôme $P(1 - X)$.

- 1) Montrer que f définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2) Montrer que $f^2 = \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. En déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

★ ★

Exercice 24

Soit f l'application qui à tout polynôme P associe $P(X + 1) - P(X)$.

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que f définit une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- 2) Déterminer $\text{Ker}(f)$, puis en déduire $\text{Im}(f)$ par un argument sur les dimensions.

★ ★

Exercice 25

Existence et unicité des polynômes interpolateurs de Lagrange : soient (x_1, x_2, \dots, x_n) une famille de n réels deux à deux distincts et (y_1, y_2, \dots, y_n) une famille de n réels. On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_{n-1}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ P &\longmapsto (P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)) \end{aligned}$$

- 1) Montrer que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans \mathbb{R}^n .
- 2) Montrer que $\text{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}\}$. En déduire que φ est un isomorphisme.
- 3) Justifier qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(x_i) = y_i$.

★ ★
Exercice 26

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto M - {}^t M \end{aligned}$$

- 1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 2) À quel sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ correspond $\text{Ker}(f)$?
- 3) En déduire $\text{Im}(f)$.

★ ★ ★
Exercice 27

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle fixée. On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto \text{tr}(A)M - \text{tr}(M)A \end{aligned}$$

- 1) Montrer que f est une application linéaire.
- 2) Montrer que si $\text{tr}(A) = 0$ alors $\dim(\text{Ker}(f)) = n^2 - 1$
- 3) Montrer que si $\text{tr}(A) \neq 0$, alors $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$
- 4) Montrer que $f^2 = \text{tr}(A)f$.

★ ★
Exercice 28

Soit $n \geq 2$ un entier.

- 1) Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], P(0) = 0\}$, montrer que $\dim(E) = n - 1$
- 2) Déterminer le noyau de l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X], P \mapsto XP''(X)$
- 3) En déduire que $\text{Im}(f) = E$.
- 4) Montrer que si P est un polynôme de degré $n - 1$ qui s'annule en 0 alors il existe un polynôme Q de degré n tel que $P(X) = XQ'(X)$.

★ ★ ★
Exercice 29

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3. Soit g un endomorphisme de E . On note $0_{\mathcal{L}(E)}$ l'endomorphisme nul de E qui à tout vecteur x associe le vecteur nul 0_E . Pour tout entier $n \geq 1$, on note $g^n = \underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{n \text{ fois}}$. Par exemple, $g^2 = g \circ g$

et $g^3 = g \circ g \circ g$.

Si A et B sont deux ensembles, on note $A \subsetneq B$ si $A \subset B$ avec $A \neq B$.

- 1) Montrer que $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(g^2) \subset \text{Ker}(g^3)$
- 2) On suppose désormais que $g^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et que $\{0_E\} \subsetneq \text{Ker}(g) \subsetneq \text{Ker}(g^2) \subsetneq \text{Ker}(g^3)$.
 - a) Déterminer $\text{Ker}(g^3)$
 - b) Déterminer $\dim(\text{Ker}(g))$, $\dim(\text{Ker}(g^2))$ et $\dim(\text{Ker}(g^3))$.
 - c) Montrer que $\text{Im}(g) \subset \text{Ker}(g^2)$ puis que $\text{Im}(g) = \text{Ker}(g^2)$.
- 3) Soit $a \in \text{Ker}(g)$ un vecteur non nul. Montrer qu'il existe $b \in E$ tel que $g(b) = a$. Montrer que $b \in \text{Ker}(g^2)$ et en déduire que (a, b) est une famille libre.
- 4) Montrer qu'il existe $c \in E$ tel que $g(c) = b$.
- 5) Montrer que (a, b, c) est alors une base de E . Préciser les décompositions de $g(a)$, $g(b)$ et $g(c)$ dans cette base.