
Programme de khôlle n° 25

Semaine du 19 Mai

Cours

• Chapitre 15 : Familles de variables aléatoires, indépendance.

Dans tous le chapitre, les variables aléatoires sont des variables aléatoires réelles discrètes.

- Couples de v.a., lois marginales
- Loi d'une somme de variables aléatoires X et Y à valeurs dans \mathbb{N} ou \mathbb{Z} .
- Formule de transfert pour 2 v.a. X et Y :

$$\mathbb{E}(\varphi(X, Y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} \varphi(x, y) \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

- Espérance d'un produit :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xy \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

- Covariance, inégalité de Cauchy-Schwarz, Formule de Koenig-Huygens
- Propriétés de la covariance : $\text{Cov}(X, X) = V(X)$, $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$, bilinéarité.
- Coefficient de corrélation $\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$. Invariance d'échelle.
- $|\rho(X, Y)| = 1$ si et seulement si il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{P}(Y = aX + b) = 1$.
- Lien avec la variance : $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

- Indépendance de variables aléatoires, lemme des coalitions
- Si X et Y sont indépendances, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, $\text{Cov}(X, Y) = 0$ et $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$
- S suit une loi binomiale de paramètres n et p si et seulement si il existe X_1, \dots, X_n des variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p telles que $S = \sum_{k=1}^n X_k$
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ avec X et Y indépendantes, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p)$
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ avec X et Y indépendantes, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$
- Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi admettant une espérance μ et une variance, alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu \right| \geq \varepsilon \right) = 0$$

Questions de cours et exercice

- Pas de questions de cours cette semaine