⋆

Exercice 1

On considère trois variables aléatoires mutuellement indépendantes U, V, W suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs α, β, γ. On pose $X = U + V$ et $Y = V + W$

1) Montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre $\alpha + \beta$ (classique).
2) Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$

⋆ ⋆

Exercice 2

Soit N un entier naturel non nul. On lance N fois une pièce équilibrée et on note X le nombre de pile et Y le nombre de faces obtenus.

1) Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$ et $\rho(X, Y)$, où $\rho(X, Y)$ désigne le coefficient de corrélation entre X et Y. X et Y sont-elles indépendantes ?
2) On suppose dans cette question que N suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
   a) Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$
   b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3) On suppose dans cette question que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
   a) Déterminer les lois de X et Y.
   b) Déterminer $\mathrm{Cov}(X, Y)$
   c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 3

On dit qu'une variable aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ est **sans mémoire** si pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(X > n + p \mid X > n) = \mathbb{P}(X > p)$.
Montrer que X est sans mémoire si et seulement si X suit une loi géométrique.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 4

On considère une urne contenant des boules jaunes, noires et bleues en proportions p, q et r respectivement. On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule avec remise jusqu'à obtention pour la deuxième fois d'une boule bleue. On note X le nombre de tirage effectués et Y le nombre de boules jaunes obtenus lors de cette série de tirages.

1) Montrer que la probabilité de n'obtenir qu'au plus une boule bleue au cours d'une infinité de tirage est nulle. Qu'en déduit-on ?
   Préciser la loi de X.
2) Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel a vérifiant $|a| < 1$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n}{n} a^k = \frac{1}{(1-a)^{n+1}}$
3) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y), en déduire la loi de Y.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 5

Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ des nombres réels tels que $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$ et $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires indépendantes telles que $\forall k \in [\![1,]\!]$, $\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = \dfrac{1}{2}$. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k X_k$.

Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $c > 0$, on a $\mathbb{P}(|S| \geq c) \leq 2\,\mathrm{e}^{-\frac{c^2}{2}}$

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \leq \mathrm{e}^{x^2/2}$. *Indication :* on pourra utilise le fait que $\mathrm{e}^u = \sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{u^i}{i!}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.
2) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, e^{tS} admet une espérance et que $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{tS}] \leq \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$
3) Montrer que pour tout $c > 0$, on a $\mathbb{P}(S \geq c) \leq \mathrm{e}^{-\frac{c^2}{2}}$.
4) En déduire que $\mathbb{P}(|S| \geq c) \leq 2\,\mathrm{e}^{-\frac{c^2}{2}}$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 6

Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = \dfrac{1}{2}$.

1) Calculer l'espérance $\mathbb{E}[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n)^2]$ en fonction de n
2) Soit $a \in]0\,;1[$ fixé.
   a) Montrer l'inégalité $\mathbb{P}(|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n| \geq an) \leq \dfrac{1}{a^2 n}$
   b) Montrer que
   $$\mathbb{P}(|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n| \geq an) = \frac{1}{2^n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{l}\mathbf{1}_{\{|2\ell-n|\geq an\}}$$
   où $\mathbf{1}_{\{|2\ell-n|\geq an\}} = 1$ si ℓ satisfait $|2\ell - n| \geq an$ et 0 sinon.
   c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\mathbf{1}_{\{|2\ell-n|\geq an\}} = 0$

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 7

Deux problèmes de collectionneurs (d'après Y. Velenik , S. Sardy — « Petite collection d'informations utiles pour collectionneur compulsif »— *Images des Mathématiques, CNRS, 2020*)

1) **Problème 1 :** Dans chaque paquet de cordon bleu, on trouve un magnet représentant un département français (répartis uniformément au hasard). Un collectionneur achète chaque semaine un paquet de cordon bleu. Pour tout entier $k \geq 1$, on note X_k le nombre de semaines écoulées au moment où le nombre de départements distincts dans sa collections atteint k. Ainsi, $X_1 = 1$, et X_{101} est le nombre de semaines écoulées au moment où il termine sa collection des 101 départements.
   a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi suivie par $X_{k+1} - X_k$?
   b) Déterminer $\mathbb{E}[X_{101}]$. Interpréter ce résultat.
2) **Problème 2 :** Des pochettes de cartes Pokémon contiennent m cartes distinctes. Notons n le nombre total de Pokémon distincts à collectionner. Chaque Pokémon porte un numéro entre 1 et n.

   Un collectionneur achète un paquet par semaine, on note T_k le rang de la première pochette contenant le Pokémon n°k, et on note N le nombre de semaines nécessaires pour compléter la collection.
   a) Expliquer pourquoi $N = \max(T_1, T_2, \ldots, T_n)$.
   b) On rappelle la formule du crible pour une famille $(A_1,\ldots, A_n)$ d'événements :
   $$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}\mathbb{P}\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)$$
   Montrer que pour tout entier $\ell \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\mathbb{P}(N > \ell) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}\left(\frac{C_{n-k}^m}{C_n^m}\right)^{\ell}$
   c) Montrer que pour une variable aléatoire X à valeur dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance, $\displaystyle\mathbb{E}[X] = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X > \ell)$
   d) En déduire que $\displaystyle\mathbb{E}[N] = C_n^m\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{C_n^k}{C_n^m - C_{n-k}^m}$

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 8

Soit I un intervalle. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **absolument monotone** sur I si

$$f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } I \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(n)}(x) \geq 0.$$

1) Soit f la fonction classe C^∞ sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ définie par $f(x) = \tan(x)$
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$f^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}$$
   b) En déduire que f est absolument monotone sur I.

On revient maintenant au cas général. Soit $a > 0$ et f une fonction de $I = [0, a[$ dans $\mathbb{R}$ absolument monotone sur $[0, a[$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On pose, pour $x \in I$,

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

2) a) Montrer que, pour tout $x > 0$,
   $$\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} = \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)du.$$
   b) En déduire que la fonction $x \mapsto \frac{R_n(x)}{x^{n+1}}$ est croissante sur $]0, a[$.
   c) Déduire des deux questions précédentes que si $0 < x < y < a$, alors
   $$0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y).$$
   d) En déduire que pour tout $x \in [0, a[$,
   $$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$
3) On revient au cas où $f = \tan$. Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,
   $$\tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

⋆ ⋆
Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé. À toute fonction f continue sur $\mathbb{R}_+$, on associe, sous réserve d'existence, la fonction $T_n(f)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad T_n(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-ntx}dt$$

1) a) Soit $f_a : t \mapsto e^{-at}$, où $a \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout réel $a > 0$, la fonction $T_n(f_a)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Expliciter son expression.
   b) Soit $f_k : t \mapsto t^k$, où $k \in \mathbb{N}$. Pour quelles valeurs de l'entier k la fonction $T_n(f_k)$ est-elle définie ?
   Dans ces cas, l'expliciter.
2) On suppose, dans cette question, que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
   a) Montrer que la fonction $T_n(f)$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b) Déterminer
   $$\lim_{x \to +\infty} T_n(f)(x).$$
3) On suppose, dans cette question, que la fonction f est bornée, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et que sa dérivée f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que l'on a :
   $$\lim_{x \to +\infty} (xT_n(f)(x)) = \frac{f(0)}{n}$$