

★

Exercice 1

Soit F le sous espace de \mathbb{R}^5 engendré par $u = (1, 2, 3, -1, 2)$ et $v = (2, 4, 7, 2, -1)$. Trouver une base de l'orthogonal F^\perp de F .

★

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ ainsi que le vecteur $u = (-5, 3, 1) \in E$ et le sous-espace $F = \text{Vect}(u)$. Soit p le projeté orthogonal sur F . Déterminer la matrice de p dans la base canonique.

★ ★

Exercice 3

Dans cet exercice on se place dans l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique qui à deux vecteurs $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ associe $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. On note $\|x\|$ la norme d'un vecteur x et on note (e_1, \dots, e_n) la base canonique (orthonormée) de \mathbb{R}^n .

- 1) Dans cette question, u désigne un endomorphisme de E . On cherche à démontrer qu'il existe un unique endomorphisme de E , noté u^* , vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

- a) Montrer que si u^* existe, alors :

$$\forall y \in E, \quad u^*(y) = \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), y \rangle e_i$$

- b) En déduire que si u^* existe alors u^* est unique.

- c) Vérifier que l'application définie à la question 1)a) est effectivement un endomorphisme de E et conclure.

- 2) On appelle endomorphisme **adjoint** de u l'endomorphisme u^* défini dans la question précédente. Dans cette question, on étudie les endomorphismes **normaux**, c'est à dire les endomorphismes qui vérifient :

$$u \circ u^* = u^* \circ u$$

- a) Soit f un endomorphisme symétrique de E . Donner son adjoint et vérifier que f est normal.

Dans la suite u désigne un endomorphisme normal.

- b) Montrer que : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$

- c) En déduire que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^*)$.

- d) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , alors F^\perp est stable par u^* .

- e) On suppose que u possède une valeur propre λ et on note E_λ le sous-espace propre associé. Montrer que E_λ est stable par u^* .

- f) Établir que $(u^*)^* = u$ puis en déduire que E_λ^\perp est stable par u .

★

Exercice 4

On munit $E = \mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique et de sa norme associée. Soit (u_1, u_2) une famille libre de E . On note $H = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et on définit $f : E \rightarrow E$ par

$$\forall u \in E, f(u) = \langle u, u_1 \rangle u_2 + \langle u, u_2 \rangle u_1$$

- 1) Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.

- 2) Montrer que $\text{Im} f = H$ et $\text{Ker} f = H^\perp$

- 3) On pose $v_1 = \|u_1\|u_2 - \|u_2\|u_1$, $v_2 = \|u_1\|u_2 + \|u_2\|u_1$ et on prend $v_3 \in H^\perp$ quelconque tel que $v_3 \neq 0$. Montrer que v_1, v_2, v_3 est une base orthogonale de E .

- 4) Donner la matrice de f dans cette base.

- 5) En déduire que f est diagonalisable avec une valeur propre strictement positive, une strictement négative, et une nulle.

★

Exercice 5

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Démontrer que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$

★

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. L'objectif de cet exercice est de trouver une matrice colonne X telle que $\|AX - B\|$ soit minimal.

- 1) Vérifier que $\text{Im} A$ est un plan et donner une équation cartésienne de ce plan.
- 2) Construire une base orthonormée de ce plan.
- 3) Calculer Y projection orthogonale de B sur ce plan, et conclure.

★ ★

Exercice 7

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On cherche à minimiser $\|AX - B\|$ où $X \in \mathcal{M}_{p,1}$.

- 1) Si $n = p$, résoudre le problème.
- 2) On revient au cas général. Montrer que $AX = 0 \Rightarrow X = 0$, et en déduire que $C = A^T A$ est inversible.
- 3) Soit $H = \{AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$. Vérifier que H est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et interpréter le problème posé en termes de distance et de projection orthogonale.
- 4) Soit $Y = AX_0$ le projeté orthogonal de B sur H . Montrer que

$$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}, \quad X^T A^T B - X^T A^T A X_0 = 0$$

- 5) En déduire que $Y = AC^{-1}A^T B$

- 6) Application avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour retrouver le résultat de l'exercice précédent.

★

Exercice 8

(D'après oral INSEE 2019) On considère l'espace \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire canonique et de la norme associée $\|\cdot\|$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n et soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice symétrique réelle et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n associé.

On admet que A est diagonalisable et on note $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ ses valeurs propres. On admet aussi qu'il existe une base orthonormale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de \mathbb{R}^n , constitués de vecteurs propres de f tels que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$.

Le but de cet exercice est d'établir le résultat suivant :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^k a_{j,j} \leq \sum_{j=1}^k \lambda_j$$

- 1) Étudier le cas $k = n$.
- 2) Soit maintenant $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Établir que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$a_{j,j} \leq \sum_{i=1}^k \langle e_j, \varepsilon_i \rangle^2 \lambda_i + \lambda_k \sum_{i=k+1}^n \langle e_j, \varepsilon_i \rangle^2$$

(Indication : montrer que $a_{j,j} = \langle f(e_j), e_j \rangle$)

- 3) En déduire, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'inégalité suivante :

$$a_{j,j} \leq \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \lambda_k) \langle e_j, \varepsilon_i \rangle^2 + \lambda_k$$

(Indication : considérer la matrice $A' = A - \lambda_k I_n$)

- 4) Conclure

★ ★
Exercice 9

Soit p un projecteur orthogonal de $E = \mathbb{R}^n$ et soit A la matrice représentative de p dans la base canonique (e_1, e_2, \dots, e_n) .

Le but de cet exercice est de montrer que $\sum_{i=1}^n \text{tr}({}^tAA) = \text{rg}(A)$

- 1) Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, exprimer $p(e_i)$ dans la base canonique.
- 2) Soit $p = \text{rg}(A)$ et soit f_1, \dots, f_p une base orthonormée de $\text{Im}A$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, exprimer $p(e_i)$ dans la base f_1, \dots, f_p .
- 3) En déduire deux façons différentes d'exprimer $\|p(e_i)\|^2$.
- 4) Conclure

★ ★ ★
Exercice 10

- 1) a) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$. Résoudre $AX = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$
 b) Un calcul donne $A \begin{pmatrix} 0.2 \\ 4.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \end{pmatrix}$. En quoi cela peut-il paraître surprenant ?
- 2) Soit maintenant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont tous non nuls. Soient deux matrices colonnes $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note X et \tilde{X} les solutions de $AX = B$ et $A\tilde{X} = B + R$.

Pour une matrice colonne $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ quelconque, on note $\|Y\| = \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$.

- a) Montrer que $\max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{|\lambda_k|} = \frac{1}{\min_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|}$.
- b) Montrer que $\frac{\|\tilde{X} - X\| \|B\|}{\|R\| \|X\|} \leq \frac{\max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|}{\min_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|}$
- c) La matrice A étant fixée, construire explicitement B et R pour qu'il y ait égalité dans l'inégalité précédente.

★
Exercice 11

Soit $n \geq 1$ un entier et A est une matrice carrée à coefficients réels d'ordre n symétrique : ${}^tA = A$. On note E l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes à coefficients réels et on fixe un vecteur non nul $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ de E . Pour tout x de E , on pose :

$$q_A(x) = {}^txAx \quad \text{et} \quad c(x) = {}^tx\omega - 1$$

et on suppose que pour tout vecteur x non nul de E , $q_A(x) > 0$. Enfin, on désigne par C l'ensemble $C = \{x \in E; c(x) = 0\}$. Toute matrice carrée d'ordre 1 sera confondue avec le réel la constituant. Le but de cet exercice est d'étudier l'existence du minimum de q_A sur l'ensemble C .

- 1) Vérifier que si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a $q_A(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j$ et $c(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i x_i - 1$.
- 2) En résolvant l'équation $Ax = 0$ pour x inconnue de E , montrer que la matrice A est inversible.
- 3) Montrer que $A^{-1} = {}^t(A^{-1})$.
- 4) Montrer que pour tout vecteur x non nul de E , on a ${}^txA^{-1}x > 0$.
- 5) Montrer que pour tout vecteur x de E , il existe un réel λ unique et un vecteur h de E unique tels que $x = \lambda A^{-1}\omega + h$ et ${}^t\omega h = 0$.
- 6) Montrer alors que si x vérifie $c(x) = 0$, on a $q_A(x) = \frac{1}{{}^t\omega A^{-1}\omega} + {}^thAh$.
- 7) En déduire que q_A admet un minimum sur C atteint uniquement en x_0 vérifiant $Ax_0 = \lambda_0\omega$ avec $\lambda_0 = \frac{1}{{}^t\omega A^{-1}\omega}$.