Correction de Maths ENS - Oraux 2013 - planche 12

Exercice 1

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$.
   - Si $\mathrm{e}^{-x} > 1$, alors $\mathrm{e}^{-n^2 x} = (\mathrm{e}^{-x})^{n^2} \geq (\mathrm{e}^{-x})^n$ et $(\mathrm{e}^{-x})^n$ est le terme général d'une série géométrique **divergente**, donc par comparaison la série $\sum \mathrm{e}^{-n^2 x}$ diverge.
   - Si $\mathrm{e}^{-x} < 1$, alors $\mathrm{e}^{-n^2 x} = (\mathrm{e}^{-x})^{n^2} \leq (\mathrm{e}^{-x})^n$ et $(\mathrm{e}^{-x})^n$ est cette fois ci le terme général d'une série géométrique **convergente**, donc par comparaison la série $\sum \mathrm{e}^{-n^2 x}$ converge.

   On en conclut que la série converge si et seulement si $0\,\mathrm{e}^{-x} < 1$, si et seulement si $x > 0$. Donc $D =]0; +\infty[$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a, pour tout t tel que $k \leq t < k+1$:

$$\mathrm{e}^{-(k+1)^2 x} \leq \mathrm{e}^{-t^2 x} \leq \mathrm{e}^{-k^2 x}$$

   donc en intégrant sur l'intervalle $[k, k+1]$ par rapport à la variable t on obtient :

$$\mathrm{e}^{-(k+1)^2 x} \leq \int_k^{k+1} \mathrm{e}^{-t^2 x}\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{-k^2 x}$$

   car le membre de gauche et de droite de l'inégalité de départ sont des constantes dans l'intégrale. Finalement, en sommant pour k allant de 0 à $+\infty$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(k+1)^2 x} \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2 x}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k^2 x}$$

   (tout converge car la somme de droite est $f(x)+1$ donc converge). Comme $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(k+1)^2 x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k^2 x} = f(x)$ on a finalement :

$$f(x) \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2 x}\,\mathrm{d}t \leq f(x) + 1$$

   d'où :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2 x}\,\mathrm{d}t - 1 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2 x}\,\mathrm{d}t$$

3. Pour tout $A > 1$ et pour tout $x \in D$ on a, via le changement de variable $u = \sqrt{x}t$:

$$\int_0^{A} \mathrm{e}^{-t^2 x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}A} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

   Puis en faisant tendre A vers $+\infty$ on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2 x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

   donc par encadrement : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{x}}$.

Exercice 2

1. $E(X_0) = \dfrac{M+1}{2}$ et $V(X_0) = \dfrac{M^2-1}{12}$ (cours).

2. Alice perd à l'étape k si $X_k \leq X_{k-1}$. Si $X_{k-1} = a$, alors la probabilité d'avoir $X_k \leq X_{k-1}$ au prochain tour est $\mathbb{P}(X_k \leq a) = \frac{a}{M}$.

   Alice perd donc au prochain tour avec probabilité $\frac{a}{M}$ et gagne avec probabilité $\frac{M-a}{M}$. Si elle gagne (et qu'elle choisit stop au prochain tour), alors elle gagne $k+1$. Sinon elle gagne 0. Ainsi l'espérance de son gain est $(k+1)\frac{M-a}{M}$.

3. Si Alice choisit "-" à l'étape k, elle perd avec probabilité $\frac{M-a+1}{M}$ et gagne avec probabilité $\frac{a-1}{M}$. Son espérance de gain est donc $(k+1)\frac{a-1}{M}$.

   Si Alice choisit "Stop" à l'étape k, elle gagne k avec probabilité 1.

   - Elle a donc intérêt à jouer "+" lorsque $(k+1)\frac{M-a}{M} > k$, c'est à dire lorsque $M-(k+1)a > 0$ donc lorsque $a < \frac{M}{k+1}$.
   - Elle a intérêt à jouer "-" lorsque $(k+1)\frac{a-1}{M} > k$, c'est à dire lorsque $a > \frac{Mk}{k+1} + 1$.
   - Elle a intérêt à jouer "stop" lorsque $\frac{M}{k+1} \leq a \leq \frac{Mk}{k+1} + 1$. À noter que dès qu'on a $k \geq M$ on a $\frac{M}{k+1} < 1$ et $\frac{Mk}{k+1} + 1 = \frac{M(k+1)-M}{k+1} + 1 = M + 1 - \frac{M}{k+1} > M$ donc quel que soit le résultat du k-ème tirage Alice devra raisonnablement s'arrêter selon cette stratégie, donc le nombre d'étape jouées est au plus M.

   Notons Y le gain d'Alice, Y est égal au nombre d'étape jouées donc $Y(\Omega) = \{1, ..., M\}$.

   Pour $M = 2$: quelle que soit la valeur de X_0, Alice arrête de jouer. En effet, si $X_0 = 1$ alors $1 = \frac{2}{1+1}$ et si $X_0 = 2$ alors $2 = \frac{2\times 1}{1+1} + 1$ donc elle va choisir "stop" dans les deux cas. Ainsi, $E(Y) = 1$

   Pour $M = 3$

   - étape 1 : Si $X_0 = 1$ ou $X_0 = 3$, Alice continue à jouer en pariant "+" dans le premier cas et "-" dans le second. Si $X_0 = 2$, alors $\frac{3}{1+1} < 2$ et $\frac{3\times 1}{1+1} + 1 > 2$ donc Alice a intérêt à jouer "stop".
   - étape 2 : si $X_1 = 1$ alors $\frac{3}{2+1} = 1 \geq 1$ donc Alice a intérêt à jouer stop, et de même si $X_1 = 2$ et si $X_1 = 3$. Le jeu s'arrête donc à l'étape 2 et Alice gagne 2

   Ainsi $E(Y) = \mathbb{P}(X_0 = 1) \times \mathbb{P}(X_1 > 1) \times 2 + \mathbb{P}(X_0 = 2) \times 1 + \mathbb{P}(X_0 = 3) \times \mathbb{P}(X_0 < 3) \times 2 = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times 2 + \frac{1}{3} = \frac{11}{9}$.

4. Avec cette variante, la probabilité de gagner à l'étape k avec "+" si $X_{k-1} = a$ est $\frac{M-a+1}{M}$, et la probabilité de gagner avec "-" est $\frac{a}{M}$.

   - Alice a intérêt à jouer "+" si $(k+1)\frac{M-a+1}{M} > k$ c'est à dire si $a < \frac{M}{k+1} + 1$.
   - Alice a intérêt à jouer "-" si $(k+1)\frac{a}{M} > k$ c'est à dire si $a > \frac{Mk}{k+1}$

   En reprenant pour $M = 2$ la stratégie sera simplement de jouer "+" si $X_{k-1} = 1$ et "-" si $X_{k-1} = 2$, et il n'y a aucun risque de jamais perdre, l'espérance de gain est infinie.

   Pour $M = 3$ Alice jouera naturellement "+" si $X_{k-1} = 1$ et "-" si $X_{k-1} = 3$ et ne perdra jamais dans ces cas là.

   Si $X_{k-1} = 2$, on aura $\frac{M}{k+1} + 1 = \frac{3}{k+1} + 1 < 2$ dès que $k \geq 3$ et $\frac{Mk}{k+1} = \frac{3k}{k+1} > 2$ dès que $k \geq 3$ donc à partir de $k = 3$ Alice aura intérêt à s'arrêter au premier 2 obtenu.

   Le gain d'Alice est donc égale à Y où Y est le rang d'apparition du premier 2 à partir du rang 3.

   Pour tout $k \geq 3$, $\mathbb{P}(Y = k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-3} \times \frac{1}{3}$. $Y - 2$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$: $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y - 2 = k) = \mathbb{P}(Y = k+2) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3}$. On en déduit que $E(Y-2) = 3$ donc $E(Y) - 2 = 3$ donc $E(Y) = 5$. L'espérance du gain d'Alice est donc 5.

Correction de Maths ENS - Oraux 2013 - planche 10

Exercice 1

1. $R_\theta X_{\theta'} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') \end{pmatrix}$

2. $R_\theta R_{\theta'} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta' \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} = R_{\theta+\theta'}$.

   Comme $I_2 = R_0$ on a $R_\theta R_{-\theta} = R_{\theta-\theta} = R_0 = I_2$ donc R_θ est inversible d'inverse $R_{-\theta}$, et on observe (par parité du cosinus et imparité du sinus) que :

$$R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = {}^t R_\theta$$

3. On cherche les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $R_\theta - \lambda I$ n'est pas inversible.

$$\begin{aligned} \lambda \in Sp(R_\theta) &\iff R_\theta - \lambda I \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \det(R_\theta - \lambda I) = 0 \\ &\iff (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 2\cos\theta\lambda + \cos^2\theta + \sin^2\theta = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 2\cos\theta\lambda + 1 = 0 \end{aligned}$$

   $\Delta = 4\cos^2\theta - 4$, or pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \cos^2\theta \leq 1$ donc $\Delta \leq 0$ avec égalité si et seulement si $\cos^2\theta = 1$, si et seulement si $\theta = 0 + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   Lorsque $\cos\theta = 1$, la seule valeur propre est $\lambda = 1$ (on a alors $\theta = 0 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $R_\theta = I$).
   Lorsque $\cos\theta = -1$, la seule valeur propre est $\lambda = -1$ (on a alors $\theta = \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $R_\theta = -I$.

   Conclusion : R_θ est diagonalisable si et seulement si $\theta = 0 + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Elle est diagonalisable et même diagonalisable dans ces cas, avec $R_\theta = I$ si $\theta = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ et $R_\theta = -I$ si $\theta = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

4. Lorsque θ parcourt $\mathbb{R}$, Y_θ décrit le cercle de centre O et de rayon $\|X\|$.
   On a, en choisissant $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\cos\alpha = \dfrac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}$ et $\sin\alpha = \dfrac{X_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}$:

$$\begin{aligned} |(Y_\theta)_1| + |(Y_\theta)_2| &= |\cos\theta X_1 - \sin\theta X_2| + |\sin\theta X_1 + \cos\theta X_2| \\ &= \sqrt{X_1^2 + X_2^2}\left(\left|\cos\theta\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} - \sin\theta\frac{X_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}\right| + \left|\sin\theta\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} + \cos\theta\frac{X_2}{X_1^2 + X_2^2}\right|\right) \\ &= \sqrt{X_1^2 + X_2^2}\,(|\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha| + |\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha|) \\ &= \sqrt{X_1^2 + X_2^2}\,(|\cos(\theta+\alpha)| + |\sin(\theta+\alpha)|) \end{aligned}$$

   Il suffit donc de trouver la valeur maximale et la valeur minimale de $|\cos x| + |\sin x|$ pour répondre à la question. Par symétrie sur le cercle, il suffit de trouver le maximum sur $[0; \pi/2]$ de $f : x \mapsto \cos x + \sin x$: cette fonction est dérivable et sa dérivée est $f'(x) = -\sin x + \cos x$ qui s'annule et change de signe lorsque $\sin x = \cos x$ c'est à dire lorsque $x = \dfrac{\pi}{4}$.
   Ainsi la valeur maximum de $|\cos x| + |\sin x|$ est $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, et la valeur minimale est 1.
   On a donc :

$$\max_{\theta\in\mathbb{R}}\{|(Y_\theta)_1| + |(Y_\theta)_2|\} = \sqrt{2}\sqrt{X_1^2 + X_2^2}$$

$$\min_{\theta\in\mathbb{R}}\{|(Y_\theta)_1| + |(Y_\theta)_2|\} = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$$

   et ces deux valeurs sont supérieures ou égales à $\sqrt{X_1^2 + X_2^2}$

Exercice 2

1. On a d'une part :

$$(1+x)^{n+p} = \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}(1+x)^n(1+x)^p &= \left(\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x^\ell\right)\left(\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} x^i\right)\\ &= \sum_{\ell=0}^{n}\sum_{i=0}^{p} \binom{n}{\ell}\binom{p}{i} x^{\ell+i}\end{aligned}$$

donc pour $k \in [\![0, n+p]\!]$ donné, en identifiant les termes de degré k dans chacun des deux polynômes précédent on a :

$$\binom{n+p}{k} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n}{\ell}\binom{p}{k-\ell}$$

avec comme convention $\binom{n}{\ell} = 0$ si $\ell > n$

2. S_{n+p} compte le nombre de X_i qui valent 1 donc suit la loi binomiale de paramètres $n+p$ et $\frac{1}{2}$. De même, S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$ et S'_p suit la loi binomiale de paramètres p et $\frac{1}{2}$. De plus, S_n et S'_p sont indépendantes d'après le lemme des coalitions et $S_n + S'_p = S_{n+p}$.
On peut donc exprimer $\mathbb{P}(S_{n+p} = k)$ de deux façons différentes :

$$\mathbb{P}(S_{n+p} = k) = \binom{n+p}{k}\frac{1}{2^k} \times \frac{1}{2^{n+p-k}} = \binom{n+p}{k}\frac{1}{2^{n+p}}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{n+p} = k) &= \mathbb{P}(S_n + S'_p = k)\\ &= \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}(S_n = \ell, S'_p = k-\ell)\\ &= \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}(S_n = \ell)\mathbb{P}(S'_p = k-\ell) && \text{par indépendance}\\ &= \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n}{\ell}\frac{1}{2^\ell} \times \frac{1}{2^{n-\ell}} \times \binom{p}{k-\ell}\frac{1}{2^{k-\ell}} \times \frac{1}{2^{p-k+\ell}}\\ &= \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n}{\ell}\binom{p}{k-\ell}\frac{1}{2^{n+p}}\end{aligned}$$

donc on en déduit que :

$$\sum_{\ell=0}^{k} \binom{n}{\ell}\binom{p}{k-\ell} = \binom{n+p}{k}$$

3. $\text{card}(\mathcal{E}) = \text{card}(\mathcal{E}_1) + \text{card}(\mathcal{E}_2) = n + p$ donc il y a $\binom{n+p}{k}$ sous ensemble de $\mathcal{E}$ à k éléments.
Choisir une partie à k éléments de $\mathcal{E}$ contenant exactement ℓ éléments de $\mathcal{E}_1$ revient à choisir d'abord une partie de $\mathcal{E}_1$ à ℓ éléments puis une partie de $\mathcal{E}_2$ à $k-\ell$ éléments.
Il y a $\binom{n}{\ell}$ façons de choisir une partie de $\mathcal{E}_1$ contenant exactement ℓ éléments, et pour chacune d'entre elles il y a $\binom{p}{k-\ell}$ façon de choisir une partie de $\mathcal{E}_2$ contenant exactement $k-\ell$ éléments. Il y a donc $\binom{n}{\ell} \times \binom{p}{k-\ell}$ façons de choisir une partie de $\mathcal{E}$ contenant exactement ℓ éléments de $\mathcal{E}_1$.
Chaque partie à k éléments de $\mathcal{E}$ peut se décomposer en l'union d'une partie de $\mathcal{E}_1$ à ℓ éléments et une partie de $\mathcal{E}_2$ à $k-\ell$ éléments, avec $\ell \in \{0, ..., k\}$, donc :

$$\binom{n+p}{k} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n}{\ell}\binom{p}{k-\ell}$$

4. En appliquant la formule démontrée avec $n = p$ on obtient :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell}\binom{n}{n-\ell}$$

Or pour tout $\ell \in \{0, ..., n\}$, $\binom{n}{n-\ell} = \binom{n}{\ell}$ donc :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell}^2$$

Correction de Maths ENS - Oraux 2016 - planche 3

Exercice 1

1. $x^x = \mathrm{e}^{x \ln x}$ et $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ par croissance comparée, donc par composition : $\lim\limits_{x \to 0} x^x = 1$.
2. Suivant l'indication de l'énoncé, écrivons :

$$\begin{aligned}\int_0^{1/n} x^{x+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{1/n} (x^{x+1} - x + x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{1/n} x(x^x - 1)\,\mathrm{d}x + \int_0^{1/n} x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

La fonction $f : x \mapsto x \ln x$ est dérivable sur $]0, 1[$ et $f'(x) = \ln x + 1$ donc f est décroissante sur $]0, \mathrm{e}^{-1}[$ et croissante sur $]\,\mathrm{e}^{-1}, 1[$:

x	0		e^{-1}		1
$x \ln(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

On en déduit que $x^x - 1$ est négatif sur $]0; 1[$ et que pour n assez grand, lorsque $\dfrac{1}{n} \leq \mathrm{e}^{-1}$, on a :

$$1 - x^x \leq 1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\left| n^2 \int_0^{1/n} x(x^x - 1)\,\mathrm{d}x \right| &\leq n^2 \int_0^{1/n} x|x^x - 1|\,\mathrm{d}x \\ &\leq n^2 \int_0^{1/n} x(1 - x^x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq n^2 \int_0^{1/n} x\left(1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}\right) x \\ &\leq n^2 \left(1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}\right) \int_0^{1/n} x\,\mathrm{d}x \\ &\leq n^2 \left(1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}\right) \times \frac{1}{n^2} \qquad \leq \left(1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}\right)\end{aligned}$$

et le membre de droite tend vers 0 d'après la question 1 donc par comparaison :

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 \int_0^{1/n} x(x^x - 1) = 0$$

De plus, $n^2 \int_0^{1/n} x\,\mathrm{d}x = n^2 \times \dfrac{1}{n^2} = 1$ donc :

$$n^2 \int_0^{1/n} x^{x+1}\,\mathrm{d}x = \underbrace{n^2 \int_0^{1/n} x(x^x - 1)\,\mathrm{d}x}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0} + \underbrace{n^2 \int_0^{1/n} x\,\mathrm{d}x}_{=1}$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 \int_0^{1/n} x^{x+1}\,\mathrm{d}x = 1$.

Exercice 2

1. $Y_i(\Omega) = \{0, 1/\sqrt{p_i}\}$ et $\mathbb{P}(Y_i = 1/\sqrt{p_i}) = \mathbb{P}(X = i) = p_i$.
   On a donc $E(Y_i) = 0 \times \mathbb{P}(Y_i = 0) + \dfrac{1}{\sqrt{p_i}}\mathbb{P}(Y = 1/\sqrt{p_i} = \dfrac{\mathbb{P}(X = i)}{\sqrt{p_i}} = \dfrac{p_i}{\sqrt{p_i}} = \sqrt{p_i}$.
   Calculons $E(Y_i^2)$:
   $$E(Y_i^2) = 0^2\mathbb{P}(Y_i = 0) + \frac{1}{\sqrt{p_i}^2}\mathbb{P}(Y_i = 1/\sqrt{p_i} = \frac{\mathbb{P}(X = i)}{p_i} = 1$$
   donc d'après la formule de Koenig-Huygens :
   $$V(Y_i) = E(Y_i^2) - E(Y_i)^2 = 1 - \sqrt{p_i}^2 = 1 - p_i$$
2. $C_{i,j} = \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$ et on sait d'après la formule de Koenig-Huygens que $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = E(Y_iY_j) - E(Y_i)E(Y_j)$.
   $$\begin{aligned} E(Y_iY_j) &= \sum_{\ell=0}^{1}\sum_{\ell'=0}^{1} \ell\ell'\mathbb{P}(Y_i = \ell, Y_j = \ell') \\ &= \mathbb{P}(Y_i = 1, Y_j = 1) && \text{car tous les autres termes sont nuls} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$
   De plus d'après la question précédente :
   $$E(Y_i)E(Y_j) = \frac{\mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(X = j)}{\sqrt{p_i}\sqrt{p_j}} = \frac{p_ip_j}{\sqrt{p_i}\sqrt{p_j}} = \sqrt{p_ip_j}$$
   d'où :
   $$C_{i,j} = \begin{cases} 1 - p_i & \text{si } i = j \\ -\sqrt{p_ip_j} & \text{sinon} \end{cases}$$
3. VV^T est la matrice définie par $(VV^T)_{i,j} = V_i(V^T)_j = V_iV_j = \sqrt{p_ip_j}$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.
   Ainsi, $I - VV^T$ est la matrice dont le coefficient (i, j) vaut $1 - p_i$ si $i = j$ et $-\sqrt{p_ip_j}$ si $i \neq j$, c'est bien la matrice C.
4. $C^2 = (I - VV^T)^2 = I^2 - 2VV^T + (VV^T)^2 = I - 2VV^T + (VV^T)^2 = (I - VV^T) + (VV^T)^2 - VV^T = C + (VV^T - I)VV^T = C - CVV^T$
   Or $V \in \mathrm{Ker}(C)$: en effet le i-ème coefficient de la colonne CV est :
   $$\sqrt{p_i}(1 - p_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} p_j\sqrt{p_i} = \sqrt{p_i}\left(1 - p_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} p_j\right) = \sqrt{p_i}\left(1 - \sum_{j=1}^{n} p_j\right) = 0$$
   car $\sum_{j=1}^{n} p_j = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X = j) = 1$.
   Finalement : $C^2 = C$.
5. C est la matrice d'un projecteur d'après la question précédente, donc d'après le cours $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(C) \oplus \mathrm{Im}(C)$.
6. Soit $X \in \mathrm{Ker}(C)$. Alors $(I - VV^T)X = 0$ donc $X = VV^TX$ donc $X \in \mathrm{Im}(VV^T)$ qui est de rang 1 (toutes les lignes sont multiples de V^T) donc $X \in \mathrm{Vect}\,(V)$.
   Réciproquement on a vu à la question précédente que $V \in \mathrm{Ker}(C)$ donc finalement $\mathrm{Ker}(C) = \mathrm{Vect}\,(V)$.
7. D'après le cours sur les projecteurs : $Y \in \mathrm{Im}(C) \iff CY = Y$.
   Si $Y \in \mathrm{Im}(C)$, on a donc $Y = CY$ c'est-à-dire $Y = Y - VV^TY$ donc $VV^TY = 0$. On en déduit que pour tout i, $\sqrt{p_i}\sum_{j=1}^{n} y_j\sqrt{p_j} = 0$ donc $\sum_{j=1}^{n} y_j\sqrt{p_j} = 0$ car au moins l'un des p_i est non nul.
   Réciproquement, si $\sum_{j=1}^{n} y_j\sqrt{p_j} = 0$ alors $V^TY = 0$ donc $CY = Y$ donc $Y \in \mathrm{Im}(C)$. Finalement on a bien :
   $$\mathrm{Im}(C) = \left\{(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^{n} y_i\sqrt{p_i} = 0\right\}$$
   (note : il aurait été plus convenable d'écrire : $\mathrm{Im}(C) = \left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ : \ \sum_{i=1}^{n} y_i\sqrt{p_i} = 0\right\}$)