⋆
Exercice 1

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u = (1, 1, -1, -1)$ et $v = (1, 1, 0, 0)$, et soit π la projection orthogonale sur F

1) Déterminer une base orthonormée (f_1, f_2) de F et une base orthonormée (f_3, f_4) de $F^\perp$.
2) Quelle est la matrice de π dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4) ?
3) Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (f_1, f_2, f_3, f_4). Montrer que $P^{-1} = {}^tP$ et en déduire la matrice de π dans la base canonique.

⋆
Exercice 2

On cherche à minimiser la quantité $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (x + y - 1)^2$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pour cela, on pose $u = (x - 1, y + 1, 1 - x - y)$ et $v = (1, 1, 1)$.

Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) \geq \dfrac{1}{3}$, puis montrer que l'équation $f(x, y) = \dfrac{1}{3}$ admet une unique solution.

⋆ ⋆
Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $(e_1, ..., e_p)$ une famille de vecteurs de E de norme 1 telle que pour tout $x \in E$,

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k \rangle^2$$

Montrer que $n = p$ et que $(e_1, ..., e_p)$ est une base orthonormée de E.

⋆ ⋆
Exercice 4

(D'après oraux ESCP 2023) Dans $\mathbb{R}^n$, une famille de vecteurs $(x_1, ..., x_p)$ est dite **obtusangle** si pour tout

$$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle < 0$$

L'objectif de cet exercice est de montrer par récurrence sur n que si $(e_1, ..., e_p)$ est une famille de vecteurs obtusangles de $\mathbb{R}^n$, alors $p \leq n + 1$.

1) Étudier le cas $n = 1$
2) On suppose le résultat vrai pour un entier n, et on considère une famille $(x_1, ..., x_p)$ de p vecteurs de $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que $\forall (i, j) \in [\![1, n + 3]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle < 0$.
   a) Montrer que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $x_i \neq 0$
   b) On pose
   $$\forall i \in [\![1, p]\!],\ y_i = \frac{x_i}{\|x_i\|} \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![1, n + 2]\!],\ z_j = y_j - \langle y_j, y_p \rangle y_p$$
   pour tout $(i, j) \in [\![1, p - 1]\!]^2$ tel que $i \neq j$, calculer $\langle z_i, z_j \rangle$ et donner son signe.
   c) Pour tout $i \in [\![1, p - 1]\!]$, calculer $\langle z_i, y_p \rangle$.
   d) On pose $F = (\mathrm{Vect}\,(y_p))^\perp$. Déterminer la dimension de F.
   e) Conclure.

⋆ ⋆
Exercice 5

(D'après oraux HEC 2022). Soit $n \geq 2$ un entier. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est ne matrice, on note M^T sa transposée.
On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $MM^T = I_n$
On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique si $M^T = M$
On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si $M^T = -M$
On confond dans la suite $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^n$ que l'on munit de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée notée $\| \cdot \|$.

1) Question de cours : rappeler la définition d'une matrice inversible.
2) a) Montrer que tout matrice orthogonale est inversible.

b) Soit $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Préciser pour quelle(s) valeur(s) de l'entier $k \in \mathbb{N}$ la matrice V^k est orthogonale.

3) Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $M = I_n + A$ et $N = I_n - A$.

a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Calculer $(X^T AX)^T$ et en déduire la valeur de $X^T AX$.

b) Montrer que la seule valeur propre possible pour A est 0. Dans quel cas la matrice A est-elle diagonalisable ?

c) Montrer que les matrices M et N sont inversibles.

d) Montrer que les matrices M et N^{-1} commutent.

e) Montrer que la matrice $\Omega = MN^{-1}$ est orthogonale.

f) -1 est-il valeur propre de Ω ?

4) Soit U une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'admettant pas -1 comme valeur propre. Montrer qu'il existe une unique matrice antisymétrique $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$U = (I_n + B)(I_n - B)^{-1}$$

⋆ ⋆

Exercice 6

(D'après oraux ESCP 2022) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cet exercice, on confondra $\mathbb{R}^n$ et l'espace des matrices colonnes réelles $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On rappelle qu'alors, le produit scalaire est défini par :

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2,\ \langle X, Y\rangle = {}^tXY$$

On étudie les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété (P) suivante :

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2,\ {}^tYAX = 0 \Rightarrow {}^tXAY = 0$$

1) Vérifier que $\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tYAX$ est un nombre réel.

2) Montrer que si A est symétrique ou antisymétrique, alors A vérifie la propriété P

3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que pour tout $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tZAZ = 0$.

a) Établir que pour tout $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tYAX = -{}^tXAY$

b) En déduire que A est antisymétrique.

On suppose dans toute la suite de l'exercice que A vérifie la propriété (P) et n'est pas antisymétrique.

4) a) montrer qu'alors ${}^tA$ vérifie (P).

b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $(\mathrm{Vect}\,(AX))^\perp = (\mathrm{Vect}\,({}^tAX))^\perp$ puis que $\mathrm{Vect}\,(AX) = \mathrm{Vect}\,({}^tAX)$.

c) En déduire que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe $\alpha_X \in \mathbb{R}$ tel que ${}^tAX = \alpha_X AX$

d) En conclure que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX = \alpha_X {}^tXAX$

5) Montrer qu'il existe $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tYAY \neq 0$ et qu'on a alors ${}^tAY = AY$

6) Soit Y telle que ${}^tYAY \neq 0$

a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que AX est non nulle et colinéaire à AY. Montrer que ${}^tAX = AX$

b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que AX est non colinéaire à AY. En considérant ${}^tA(X + Y)$, montrer que ${}^tAX = AX$.

c) En conclure que A est symétrique.

Le coin des Khûbes

★

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $u \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul fixé. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $s(x) = x - 2\dfrac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}u$.

1) Vérifier que s est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$.
2) Montrer que s est une symétrie de $\mathbb{R}^n$.
3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|s(x)\| = \|x\|$
4) Calculer $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$, puis décrire géométriquement s.

★ ★

Exercice 8

Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$.

1) Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \langle p(x), x\rangle \geq 0$$

2) Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$$

★

Exercice 9

(Oral ENS 2024) Soit σ un réel strictement positif. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes, toutes d'espérance nulle et toutes de variance σ^2. On introduit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne associée. Soit H un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de dimension k, avec $1 \leq k \leq n$. On note P la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, de la projection orthogonale sur H.

1) Déterminer, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la valeur de l'espérance $\mathbb{E}[(PX)_i]$.
2) Calculer l'espérance $\mathbb{E}[\|X\|^2]$, où $\|X\|$ désigne la norme de X.
   La norme d'une matrice colonne X est définie comme celle du vecteur associé $(X_1, \ldots, X_n)$.
3) a) Vérifier que ${}^tPP = P = P^2$, où P^t désigne la transposée de P. Donner la valeur de la trace de P.
   b) Montrer que $\|PX\|^2 = {}^tXPX$ et en déduire la valeur de $\mathbb{E}[\|PX\|^2]$.
   c) En utilisant le théorème de Pythagore, déterminer la valeur de $\mathbb{E}[\|(I-P)X\|^2]$, où I désigne la matrice identité.