

★

## Exercice 1

Voir correction

Dans chaque cas, montrer que  $f$  est continue sur son ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  et déterminer si la fonction  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  ou non sur  $\mathcal{D}_f$ .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad \mathcal{D}_f = [0, +\infty[$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{1/x} & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

$$\text{d) } f(x) = |x| \ln(1+x), \quad \mathcal{D}_f = ]-1; +\infty[.$$

★

## Exercice 2

Voir correction

Dans chaque cas déterminer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  à l'aide d'une dérivée connue :

$$\text{a) } f(x) = \frac{3 - \sqrt{9 - 4x}}{x}, \quad a = 0$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{2^x - 4}{x - 2}, \quad a = 2$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}, \quad a = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{x - 1}{8 \arctan(x) - 2\pi}, \quad a = 1$$

★

## Exercice 3

Voir correction

Dans chaque cas déterminer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  à l'aide d'un développement limité :

$$\text{a) } f(x) = \frac{1 - e^{3x}}{2x}, \quad a = 0$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{\ln(x)}{3x - 3}, \quad a = 1$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{3 - \sqrt{9 - 4x}}{x}, \quad a = 0$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{e^{2x} - \cos(x)}{\sin(3x)}, \quad a = 0$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}, \quad a = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{f) } f(x) = \left( \frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^x, \quad a = +\infty$$

★

## Exercice 4

Voir correction

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1} - 2x$ . À l'aide d'un développement limité, montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

★

## Exercice 5

Voir correction

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par

$$f(x) = 2\sqrt{x^2 + 3x} - 3\sqrt[3]{x^3 - 4x^2} + \sqrt[4]{x^4 + 5x^3}$$

Déterminer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

★

## Exercice 6

Voir correction

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0; +\infty[$  et que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x > 0$  on a  $f^{(n)}(x) = e^{-1/x} P_n(1/x)$  où  $P_n$  est un polynôme de degré  $2n$ .
- 2) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

★ ★

## Exercice 7

Voir correction

Le but de cet exercice est de généraliser le théorème de Rolle : soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe  $\ell \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ . Montrer qu'il existe un réel  $c$  tel que  $f'(c) = 0$ .

★ ★

## Exercice 8

Voir correction

En utilisant le théorème de Rolle, montrer par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  qu'un polynôme non nul de degré  $n$  admet au plus  $n$  racines distinctes.

★

## Exercice 9

Voir correction

Déterminer dans chaque cas un équivalent simple de  $u_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

1)  $u_n = \sqrt{n^4 + 5n + 2} - n^2$

2)  $u_n = \ln(n^2 + 1) - 2 \ln(n + 5)$

3)  $u_n = e^{1/n} - \sqrt{1 + 1/3n}$

★ ★ ★

## Exercice 10

Voir correction

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

1) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$  (**Formule de Leibniz**)

2) **Application** : soient  $a$  et  $b$  deux réels. On considère la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\varphi(x) = (x - a)^n (x - b)^n$ .

a) Calculer  $\varphi^{(n)}(x)$

b) En considérant le cas  $a = b$ , en déduire  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ .

*Rappel : on note  $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$*

★

## Exercice 11

Voir correction

À l'aide du théorème des accroissements finis, démontrer les inégalités suivantes :

a)  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x$

b)  $\forall x \in ]-1; +\infty[, \quad \ln(1 + x) \leq x$

c)  $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\sin y - \sin x| \leq |y - x|$

★ ★

## Exercice 12

Voir correction

Le but de cet exercice est d'étudier la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$ .

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[1; 2]$  par  $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ .

1) Étudier les variations de  $f$  et montrer que pour tout  $x \in [1; 2]$  on a  $f(x) \in [1; 2]$ .

2) Montrer que la suite  $(u_n)$  est bien définie et à valeurs dans  $[1; 2]$ .

3) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et déterminer le maximum de  $|f'(x)|$  sur  $[1; 2]$ .

4) En déduire qu'il existe un réel  $r \in [0; 1[$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - u_n| \leq r^n |u_1 - u_0|$ .

5) Montrer que la série de terme général  $u_{n+1} - u_n$  converge puis en déduire que la suite  $(u_n)$  converge.

6) Déterminer la limite de  $(u_n)$ .

★ ★

## Exercice 13

Voir correction

Le but de cet exercice est de généraliser le résultat de l'exercice précédent.

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $[a; b]$  telle que

- $\forall x \in [a; b]$  on a  $f(x) \in [a; b]$ .
- Il existe un réel  $r \in [0; 1[$  tel que  $\forall x \in [a; b]$ ,  $|f'(x)| \leq r$

Soit  $(u_n)$  une suite définie par  $u_0 \in [a; b]$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

- 1) Montrer que  $f$  admet un unique point fixe, c'est à dire un unique réel  $\ell \in [a; b]$  tel que  $f(\ell) = \ell$ .
- 2) Montrer par récurrence que  $(u_n)$  est bien définie et à valeurs dans  $[a; b]$ .
- 3) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - \ell| \leq r|u_n - \ell|$
- 4) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n - \ell| \leq r^n|u_0 - \ell|$ .
- 5) En déduire que  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

★ ★

## Exercice 14

Voir correction

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x e^{-x}$ .

- 1) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0; +\infty[$ .
- 2) Montrer que l'intervalle  $I = [1; +\infty[$  est stable par  $f$ .
- 3) Montrer que pour tout  $x \in [0; +\infty[$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
- 4) Prouver qu'il existe un unique réel  $\alpha \in [1; +\infty[$  tel que  $f(\alpha) = \alpha$ .
- 5) On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .  
Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$ .
- 6) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

## Correction des exercices

## Correction de l'exercice 1 :

- a) Sur  $]0; +\infty[$ ,  $f(x) = x \ln x$  donc  $f$  est continue sur cet intervalle comme produit de fonctions continues.

En 0, on a  $f(0) = 0$  d'une part et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$  par croissance comparée. Ainsi  $f$  est continue en 0

On en conclut que  $f$  est continue sur  $[0; +\infty[$ .

$f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$  comme produit de fonctions  $\mathcal{C}^1$ .

Pour tout  $x > 0$ , on a  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \ln x}{x} = \ln x$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ . On en déduit que  $f$  n'est pas dérivable en 0, donc  $f \notin \mathcal{C}^1$ .

- b)  $x \mapsto -\frac{1}{x}$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$  et à valeurs dans  $] -\infty; 0[$  et  $x \mapsto e^x$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -\infty; 0[$ , donc  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$  comme composée de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$ .

De même,  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -\infty; 0[$  comme composée de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  par la fonction  $x \mapsto e^x$  qui sont toutes deux  $\mathcal{C}^1$ .

Il reste à montrer que  $f$  est continue en 0 et si elle est  $\mathcal{C}^1$  en 0.

- On a  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x}\right) = -\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$  donc par composition de limites  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{-\frac{1}{x}} = 0$

De même,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} e^{\frac{1}{x}} = 0$ , donc  $f$  admet une limite à gauche et une limite à droite en 0 et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$

$0 = f(0)$  donc  $f$  est continue en 0.

Pour tout  $x > 0$  on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \frac{1}{x} \times e^{-\frac{1}{x}}$$

Or,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow +\infty} X e^{-X} = 0$  donc par composition de limites  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ .

De même, pour tout  $x < 0$ , on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \frac{1}{x} \times e^{\frac{1}{x}}$$

Or  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$  donc par composition de limites  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ .

La limite à gauche et la limite à droite sont les mêmes, donc on a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ . Ainsi  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$ .

Pour que  $f$  soit  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , il faut que  $f'$  soit continue sur  $\mathbb{R}$ .  $f'$  est définie par

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\frac{1}{x^2} e^{1/x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En posant  $X = \frac{1}{x}$  on a  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} X = +\infty$ , et comme  $\lim_{X \rightarrow +\infty} X^2 e^{-X} = 0$  on en déduit par composition de limites que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} e^{-1/x} = 0.$$

De même,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} X = -\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow -\infty} -X^2 e^X = 0$  donc par composition  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} -\frac{1}{x^2} e^{1/x} = 0$

La limite à droite et la limite à gauche sont les mêmes donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = 0$ , ainsi  $f'$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc  $f$  est  $\mathcal{C}^1$ .

- c)  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$  et sur  $] -\infty; 0[$  donc  $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -\infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$  par composée de fonctions  $\mathcal{C}^k$ .

De plus,  $x \mapsto x^2$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  donc  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $] - \infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$  par produit de fonctions  $\mathcal{C}^1$ .

Montrons que  $f$  est continue en 0 :

On sait que pour tout  $x \neq 0$ ,  $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$  donc  $-x^2 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$ . Or  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0$  donc

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$ . On en déduit que  $f$  est continue en 0.

Étudions la dérivabilité de  $f$  en 0

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or  $\left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq x$  donc par comparaison  $\lim_{x \rightarrow 0} \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0$  On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$  donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$ .

Ainsi  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On vérifie si  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  :

Pour tout  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Ainsi,  $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ .

Comme vu précédemment,  $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ , mais  $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$  n'a pas de limite en 0.

En effet, si on pose  $x_k = \frac{1}{k\pi}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \cos(x_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k$ , donc  $\cos(x_k)$  ne converge pas alors que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = 0$ .

On en conclut que  $f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  mais pas  $\mathcal{C}^1$  en 0.

- d)  $x \mapsto 1 + x$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $] - 1; +\infty[$  et ne s'annule pas, donc  $x \mapsto \ln(1 + x)$  est  $\mathcal{C}^1$  par composition de fonction  $\mathcal{C}^1$ .

De plus,  $x \mapsto |x|$  est continue sur  $] - 1; +\infty[$  et  $\mathcal{C}^1$  sur  $] - 1; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$  mais pas  $\mathcal{C}^1$  sur  $] - 1; +\infty[$  puisque non dérivable en 0.

Ainsi,  $f$  est continue sur  $] - 1; +\infty[$  comme produit de fonctions continues.

Vérifions si  $f$  est dérivable en 0

Pour tout  $x \neq 0$ ,  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| \ln(1 + x)}{x} = \begin{cases} \ln(1 + x) & \text{si } x > 0 \\ -\ln(1 + x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$ . En effet,  $\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ .

Or,  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-\ln(1 + x)) = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ . On en conclut que  $f$  est dérivable en 0 et que  $f'(0) = 0$ .

Vérifions si  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  :

Sur l'intervalle  $] - 1; 0[$ ,  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  et  $f(x) = -x \ln(1 + x)$  donc  $f'(x) = -\ln(1 + x) - \frac{x}{1 + x}$ . Ainsi,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'(x) =$

$$-\ln(1 + 0) - \frac{0}{1 + 0} = 0.$$

De même,  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$  et sur cet intervalle on a  $f(x) = x \ln(1 + x)$ . Ainsi  $f'(x) = \ln(1 + x) + \frac{x}{1 + x}$ , donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = 0$

On a donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0)$  donc  $f'$  est continue en 0. Ainsi  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $] - 1; +\infty[$ .

### Correction de l'exercice 2 :

- 1) En posant  $g(x) = \sqrt{9 - 4x}$  on a  $\frac{3 - \sqrt{9 - 4x}}{x} = \frac{g(0) - g(x)}{x} = -\frac{g(x) - g(0)}{x}$
- Or  $g$  est dérivable en 0 et  $g'(x) = \frac{-4}{2\sqrt{9 - 4x}} = \frac{-2}{\sqrt{9 - 4x}}$  donc  $g'(0) = \frac{-2}{\sqrt{9}} = -\frac{2}{3}$

On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{3 - \sqrt{9 - 4x}}{x} = -\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$ .

2) En posant  $g(x) = \cos x$  on a  $\frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{g(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}}$ .

Or  $g$  est dérivable en  $\frac{\pi}{2}$  et  $g'(\frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2}) = -1$ .

On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = -1$

3) En posant  $g(x) = 2^x = e^{x \ln(2)}$  on a  $f(x) = \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}$ . Or  $g$  est dérivable et  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $g'(x) = \ln(2) e^{x \ln(2)} = \ln(2) 2^x$ . On en déduit que  $g'(2) = 4 \ln(2)$  donc  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \ln(2)$ .

4) En posant  $g(x) = \arctan(x)$  on a  $f(x) = \frac{x - 1}{8 \arctan(x) - 8 \arctan(1)} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{\frac{\arctan(x) - \arctan(1)}{x - 1}}$ .

Or  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $g'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$  donc  $g'(1) = \frac{1}{2}$  d'où  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$ .

### Correction de l'exercice 3 :

1) Lorsque  $x$  tend vers 0, on a  $1 - e^{3x} = 1 - (1 + 3x + o(3x)) = -3x + o(3x)$ .

Ainsi,  $\frac{1 - e^{3x}}{2x} = \frac{-3x + o(3x)}{2x} = -\frac{3}{2} + o\left(\frac{3}{2}\right)$ .

On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{3x}}{2x} = -\frac{3}{2}$ .

2) Lorsque  $x$  tend vers 0, on a  $\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ . On a donc

$$\begin{aligned} \sqrt{9 - 4x} &= \sqrt{9 \left(1 - \frac{4x}{9}\right)} \\ &= 3 \sqrt{1 - \frac{4x}{9}} \\ &= 3 \left(1 - \frac{2x}{9} + o\left(\frac{4x}{9}\right)\right) \\ &= 3 - \frac{2x}{3} + o\left(\frac{4x}{3}\right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{3 - \sqrt{9 - 4x}}{x} &= \frac{3 - \left(3 - \frac{2x}{3} + o\left(\frac{4x}{3}\right)\right)}{x} \\ &= \frac{\frac{2x}{3} + o\left(\frac{4x}{3}\right)}{x} \\ &= \frac{2}{3} + o\left(\frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9 - 4x}}{x} = \frac{2}{3}$$

3) Calculons le développement limité de  $\cos x$  au voisinage de  $\frac{\pi}{2}$ . D'après le cours, lorsque  $x$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$  on a :

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos'\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + o\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Or,  $\cos'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$  donc au voisinage de  $\frac{\pi}{2}$  on a

$$\cos(x) = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + o\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Finalement

$$\frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = -1 + o(1)$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = -1$$

4) Méthode 1 :

Au voisinage de 1 on a

$$\begin{aligned}\ln(x) &= \ln(1) + \ln'(1) \times (x - 1) + o(x - 1) \\ &= x - 1 + o(x - 1)\end{aligned}$$

$$\text{ainsi } \frac{\ln x}{3x - 3} = \frac{x - 1 + o(x - 1)}{3(x - 1)} = \frac{1}{3} + o\left(\frac{1}{3}\right).$$

$$\text{Finalement, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{3x - 3} = \frac{1}{3}.$$

Méthode 2 : on pose  $h = x - 1$  pour avoir  $x = 1 + h$ . Lorsque  $x$  tend vers 1,  $h$  tend vers 0 et on sait que  $\ln(1 + h) = h + o(h)$ , ainsi

$$\frac{\ln(x)}{3x - 3} = \frac{\ln(1 + h)}{3(1 + h) - 3} = \frac{h + o(h)}{3h} = \frac{1}{3} + o\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{3x - 3} = \frac{1}{3}.$$

**Correction de l'exercice 4 :** On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  donc  $\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

$$\begin{aligned}\forall x > 0, \quad f(x^2) &= \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1} - 2x \\ &= \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} - 2x \\ &= x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 2x \\ &= x\left(1 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + x\left(1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - 2x \\ &= 2x - 2x + o\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= o\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

**Correction de l'exercice 5 :**

$$\begin{aligned}\forall x \in [0; +\infty[, \quad f(x) &= 2\sqrt{x^2 + 3x} - 3\sqrt[3]{x^3 - 4x^2} + \sqrt[4]{x^4 + 5x^3} \\ &= 2\sqrt{x^2\left(1 + \frac{3}{x}\right)} - 3\sqrt[3]{x^3\left(1 - \frac{4}{x}\right)} + \sqrt[4]{x^4\left(1 + \frac{5}{x}\right)} \\ &= 2x\sqrt{1 + \frac{3}{x}} - 3x\sqrt[3]{1 - \frac{4}{x}} + x\sqrt[4]{1 + \frac{5}{x}} \\ &= 2x\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{1/2} - 3x\left(1 - \frac{4}{x}\right)^{1/3} + x\left(1 + \frac{5}{x}\right)^{1/4} \\ &= 2x\left(1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - 3x\left(1 - \frac{4}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) + x\left(1 + \frac{5}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= 2x + 3 - 3x + 4 + x + \frac{5}{4} + o(1) \\ &= \frac{33}{4} + o(1)\end{aligned}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{33}{4}$$

**Correction de l'exercice 6 :**

- 1) Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $\mathcal{P}(n)$  la propriété «  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $]0; +\infty[$  et il existe un polynôme de degré  $n$   $P_n$  tel que  $\forall x > 0, f^{(n)}(x) = e^{-1/x} P_n(1/x)$ . » et on raisonne par récurrence.

— **Initialisation** : Pour  $n = 0$  on a  $f^{(0)}(x) = f(x) = e^{-1/x}$  sur  $]0; +\infty[$ . De plus  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$  car  $x$  ne s'annule pas. Ainsi, par composition de fonctions  $\mathcal{C}^1$ ,  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$ .

De plus, on a  $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x}$  sur  $]0; +\infty[$ , donc  $f'(x) = e^{-1/x} P_1(1/x)$  avec  $P_1(x) = x^2$  un polynôme de degré 2. Ainsi,  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.

— **Hérédité** : Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  soit vraie pour un certain rang  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Alors il existe  $P_n$  un polynôme de degré  $n$  tel que  $\forall x \in ]0; +\infty[, f^{(n)}(x) = e^{-1/x} P_n(1/x)$ .  $f^{(n)}$  est donc dérivable comme produit de fonctions dérivables, et

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x} P_n(1/x) - \frac{1}{x^2} e^{-1/x} P_n'(1/x)$$

où  $P_n'$  est la fonction dérivée de la fonction polynôme  $P_n$ .

Ainsi,

$$f^{(n+1)}(x) = e^{-1/x} \left( \frac{1}{x^2} P_n(1/x) - \frac{1}{x^2} P_n'(1/x) \right)$$

En posant  $P_{n+1}(x) = x^2 P_n(x) - x^2 P_n'(x)$ , alors  $P_{n+1}$  est un polynôme de degré  $2n + 2$  car  $P_n(x)$  est de degré  $2n$  donc  $x^2 P_n(x)$  est de degré  $2n + 2$  et  $P_n'(x)$  est de degré  $2n - 1$  donc  $x^2 P_n'(x)$  est de degré  $2n + 1$ .

De plus, on a  $f^{(n+1)}(x) = e^{-1/x} P_{n+1}(x)$  pour tout  $x > 0$ .

Ainsi,  $\mathcal{P}(n + 1)$  est vraie.

— **Conclusion** : Par principe de récurrence, on en conclut que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc  $f$  est  $\mathcal{C}^n$  sur  $]0; +\infty[$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et ainsi  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0; +\infty[$ .

- 2) Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $f^{(n)}(0) = 0$

— **Initialisation** :  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $] - \infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$  comme composée de fonctions dérivables. En  $x = 0$  on a

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{e^{-1/x}}{x} \\ &= \frac{1}{x} e^{-1/x} \end{aligned}$$

or  $\lim_{X \rightarrow +\infty} X e^{-X} = 0$  donc par composition de limites  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} e^{-1/x} = 0$ .

On en déduit que  $f$  est dérivable en 0 et que  $f'(0) = 0$ , ainsi la propriété est vraie au rang  $n = 1$ .

— **Hérédité** : Supposons que  $f$  soit  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $f^{(n)}(0) = 0$ .

Sur  $] - \infty; 0[$ ,  $f(x) = 0$  donc  $f^{(n)}(x) = 0$ , ainsi on a

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^{-1/x} P_n(1/x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence. Ainsi,  $f^{(n)}$  est dérivable sur  $] - \infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$ .

Étudions la dérivabilité en 0 :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} &= \frac{e^{-1/x} P_n(1/x)}{x} \\ &= \frac{1}{x} P_n(1/x) e^{-1/x} = X P_n(X) e^{-X} \text{ en posant } X = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Or  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ , et pour tout polynôme  $P$  on a  $\lim_{X \rightarrow +\infty} P(X) e^{-X} = 0$ .

Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = 0$ , donc  $(f^{(n)})'_d(0) = 0$

A gauche de 0 on a :

$$\forall x < 0, \quad \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \frac{0}{x} = 0$$



donc  $(f^{(n)})'_g(0) = 0 = (f^{(n)})'_d(0)$ .

Finalement,  $f^{(n)}$  est dérivable en 0 et  $f^{(n+1)}(0) = 0$ . Ainsi la propriété est vraie au rang  $n + 1$

- **Conclusion :** Par principe de récurrence, on en conclut que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  est  $n$  fois dérivable et  $f^{(n)}(0) = 0$ . Ainsi  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Correction de l'exercice 7 :

- Si  $f$  est constante égale à  $\ell$ , alors  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0$
- Si  $f$  n'est pas constante, alors il existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x_0) \neq \ell$ .  
Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $f(x_0) \notin ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ . Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ , il existe  $x_1 \in \mathbb{R}$  et  $x_2 \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x \leq x_1, f(x) \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$  et  $\forall x \geq x_2, f(x) \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ . De plus, on a nécessairement  $x_1 < x_0 < x_2$ 
  - ▷ Supposons que  $f(x_0) > \ell + \varepsilon$ . Comme  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  elle est continue sur  $\mathbb{R}$  donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque  $f(x_1) < \ell + \varepsilon$  et  $f(x_2) < \ell + \varepsilon$  il existe deux réels  $a$  et  $b$  avec  $a \in [x_1, x_0[$  et  $b \in ]x_0, x_2]$  tels que  $f(a) = f(b) = \ell + \varepsilon$ .  
 $f$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ , et on a  $f(a) = f(b)$  donc d'après le théorème de Rolle il existe un réel  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .
  - ▷ Supposons que  $f(x_0) < \ell - \varepsilon$ . Comme  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  elle est continue sur  $\mathbb{R}$  donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque  $f(x_1) > \ell - \varepsilon$  et  $f(x_2) > \ell - \varepsilon$  il existe deux réels  $a$  et  $b$  avec  $a \in [x_1, x_0[$  et  $b \in ]x_0, x_2]$  tels que  $f(a) = f(b) = \ell - \varepsilon$ .  
 $f$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ , et on a  $f(a) = f(b)$  donc d'après le théorème de Rolle il existe un réel  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

Dans tous les cas on a prouvé l'existence d'un réel  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Correction de l'exercice 8 :** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on note  $\mathcal{P}(n)$  : tout polynôme non nul de degré  $n$  admet au plus  $n$  racines distinctes, et on raisonne par récurrence.

- **Initialisation :** Pour  $n = 0$ , un polynôme non nul de degré 0 est un polynôme constant. Puisqu'il est non nul il ne s'annule jamais donc il possède 0 racines.  
Pour  $n = 1$  : un polynôme de degré 1 est une fonction affine de la forme  $f : x \mapsto ax + b$  avec  $a \neq 0$ .  
 $f(x) = 0 \iff ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a}$  donc  $f$  admet une unique racine.  
La propriété est vraie au rang  $n = 0$  et  $n = 1$ .
- **Hérédité :** Supposons que la propriété  $\mathcal{P}(n)$  soit vraie pour un certain rang  $n \in \mathbb{N}$ , et soit  $P$  un polynôme de degré  $n + 1$ .  
On raisonne par l'absurde et on suppose que  $P$  admet  $n + 2$  racines distinctes. Cela signifie qu'il existe  $n + 2$  réels distincts  $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} < x_{n+2}$  tels que  $P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_{n+1}) = P(x_{n+2}) = 0$ .  
Pour tout  $k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ , la fonction  $P$  est continue sur  $[x_k, x_{k+1}]$  et dérivable sur  $]x_k, x_{k+1}[$  en tant que fonction polynomiale. De plus,  $P(x_k) = P(x_{k+1})$ . D'après le théorème de Rolle, il existe donc un réel  $y_k \in ]x_k, x_{k+1}[$  tel que  $P'(y_k) = 0$ .  
La fonction  $P'$  admet donc  $n + 1$  racines distinctes  $y_1 < y_2 < \dots < y_k < y_{k+1}$ . Or  $P'$  est un polynôme de degré  $n$  donc  $P$  admet au plus  $n$  racines distinctes, contradiction.  
On en conclut que  $P$  admet au plus  $n + 1$  racines distinctes.
- **Conclusion :** La propriété est vraie au rang  $n = 1$  et elle est héréditaire, donc par principe de récurrence on en conclut que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

### Correction de l'exercice 9 :

- 1) Lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , on a

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n^4 + 5n + 2} - n^2 \\ &= \sqrt{n^4 \left(1 + \frac{5}{n^3} + \frac{2}{n^4}\right)} - n^2 \\ &= n^2 \sqrt{1 + \frac{5}{n^3} + \frac{2}{n^4}} - n^2 \\ &= n^2 \left(1 + \frac{5}{2n^3} + o\left(\frac{5}{2n^3}\right)\right) - n^2 && \text{car } \frac{2}{n^4} = o\left(\frac{5}{2n^3}\right) \\ &= \frac{5}{2n} + o\left(\frac{5}{2n}\right) \end{aligned}$$

donc  $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{5}{2n}$

2) Lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  on a :

$$\begin{aligned}
 u_n &= \ln(n^2 + 1) - 2 \ln(n + 5) \\
 &= \ln(n^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) - 2 \ln(n) - 2 \ln\left(1 + \frac{5}{n}\right) \\
 &= 2 \ln(n) + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 2 \ln(n) - 2\left(\frac{5}{n} + o\left(\frac{5}{n}\right)\right) \\
 &= -\frac{10}{n} + o\left(\frac{10}{n}\right) \quad \text{car } \frac{1}{n^2} = o\left(\frac{10}{n}\right)
 \end{aligned}$$

donc  $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{-10}{n}$

### Correction de l'exercice 10 :

1) On note  $\mathcal{P}(n)$  :  $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$ .

— **Initialisation** : Pour  $n = 0$ , on a  $(fg)^{(0)}(x) = (fg)(x) = f(x)g(x)$  d'une part, et  $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} f^{(k)}(x) g^{(0-k)}(x) = f(x)g(x)$  d'autre part, donc la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vérifiée au rang  $n = 0$

Pour  $n = 1$ , on a  $(fg)^{(1)}(x) = (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ .

D'autre part, on a  $\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} f^{(k)}(x) g^{(1-k)}(x) = \binom{1}{0} f(x)g'(x) + \binom{1}{1} f'(x)g(x)$ .

Ainsi,  $\mathcal{P}(1)$  et  $\mathcal{P}(0)$  sont vraies (un seul de deux suffit).

— **Hérédité** : Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  soit vraie pour un certain rang  $n \in \mathbb{N}$ .

Alors  $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$ . En dérivant de chaque côté on obtient

$$\begin{aligned}
 (fg)^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \right) \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x) g^{((n+1)-(k+1))} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) \\
 &= \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n}{k'-1} f^{(k')}(x) g^{(n+1-k')}(x) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) \\
 &= \binom{n}{0} f^{(n+1)}(x) g^{(0)}(x) + \binom{n}{0} f^{(0)}(x) g^{(n+1)}(x) + \sum_{k=1}^n \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) \\
 &= \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)}(x) g^{(0)}(x) + \binom{n+1}{0} f^{(0)}(x) g^{(n+1)}(x) + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)
 \end{aligned}$$

car  $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$  et car  $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ .

On en conclut que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

— **Conclusion** : Par principe de récurrence on en conclut que la propriété est vraie quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ .

2) a) Si  $f(x) = (x-a)^n$ , alors  $f'(x) = n(x-a)^{n-1}$ ,  $f^{(2)}(x) = n(n-1)(x-a)^{n-2}$ , par récurrence immédiate on a pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} (x-a)^{(n-k)}$ .

En appliquant la formule de Leibniz à la fonction  $\varphi$ , on en déduit que

$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (x-a)^{n-k} \times \frac{n!}{(n-(n-k))!} (x-b)^{n-(n-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{n!}{k!} (x-a)^{n-k} (x-b)^k$$

b) Avec  $a = b$ , on a  $\varphi(x) = (x-a)^{2n}$  donc  $\varphi^{(n)}(x) = 2n \times (2n-1) \times (2n-n+1)(x-a)^{2n-n} = \frac{(2n)!}{n!} (x-a)^n$  d'une part, et d'autre part en appliquant le résultat de la question précédente on a

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!k!} \times n! \times (x-a)^{n-k} (x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 \times n! (x-a)^n \\ &= (x-a)^n \times n! \times \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 \end{aligned}$$

Par identification, on a  $\frac{(2n)!}{n!} = n! \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$  donc  $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = C_{2n}^n$

### Correction de l'exercice 11 :

1) On distingue les cas selon que  $x > 0$ ,  $x = 0$  ou  $x < 0$ .

- Si  $x \in ]0, +\infty[$ . La fonction exponentielle est continue et dérivable sur  $[0, x]$  et sa dérivée est  $x \mapsto e^x$  donc d'après le théorème des accroissements finis il existe un réel  $c \in ]0, x[$  tel que  $e^x - e^0 = e^c(x-0)$ .  
Or  $e^c \geq e^0 = 1$  donc  $e^x - e^0 \geq x$ , et finalement  $e^x \geq x + 1$ .
- Si  $x = 0$ , alors  $e^x = 1$  et  $x + 1 = 1$  donc  $e^x \geq x + 1$
- Si  $x < 0$ , d'après le théorème des accroissements finis il existe  $c \in ]x, 0[$  tel que  $e^0 - e^x = e^c(0-x)$ . On a donc  $1 - e^x = -e^c x$  c'est à dire  $e^x = 1 + e^c x$ .  
Or  $e^c < 1$  donc  $e^c x > x$  car  $x < 0$ . Finalement,  $1 + e^c x \geq 1 + x$  donc  $e^x \geq 1 + x$ .

ainsi dans tous les cas on a  $e^x \geq 1 + x$ .

2) On pose  $f(x) = \ln(1+x)$ .  $f$  est dérivable sur  $] -1, +\infty[$  comme composée de la fonction  $x \mapsto 1+x$  qui est dérivable et strictement positive par la fonction  $x \mapsto \ln(x)$  qui est dérivable.

$$\forall x \in ] -1, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Soit  $x \in ] -1, +\infty[$ . On distingue les cas selon que  $x \in ] -1, 0[$ ,  $x = 0$  ou  $x > 0$ .

- Si  $x > 0$ , d'après le théorème des accroissements finis il existe un réel  $c \in ]0, x[$  tel que  $f(x) - f(0) = f'(c)(x-0)$  donc  $\ln(1+x) = \frac{x}{1+c}$ .  
Or  $c > 0$  donc  $\frac{1}{1+c} < 1$  et  $\frac{x}{1+c} < x$  car  $x > 0$ . Ainsi,  $\ln(1+x) \leq x$ .
- Si  $x = 0$ ,  $\ln(1+x) = \ln(1) = 0$  et  $x = 0$  donc  $\ln(1+x) \leq x$ .
- Si  $-1 < x < 0$ , d'après le théorème des accroissements finis il existe un réel  $c \in ]x, 0[$  tel que  $f(0) - f(x) = f'(c)(0-x)$  donc  $-\ln(1+x) = \frac{-x}{1+c}$  c'est à dire  $\ln(1+x) = \frac{x}{1+c}$ .  
Comme  $-1 < c < 0$ , on a  $0 < 1+c < 1$  donc  $\frac{1}{1+c} > 1$ . Puisque  $x < 0$  on a  $\frac{x}{1+c} < x$  donc finalement  $\ln(1+x) < x$ .

ainsi dans tous les cas on a  $\ln(1+x) \leq x$ .

3) On pose  $f(x) = \sin x$ .  $f$  est dérivable et  $f'(x) = \cos(x)$  et on sait que  $\forall x \in \mathbb{R}, |\cos x| \leq 1$ .

D'après le théorème des accroissements finis, on en déduit que pour tout  $x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq 1 \times |x - y|$ .

Autrement dit  $\forall x, y \in \mathbb{R}, |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ .

### Correction de l'exercice 12 :

1)  $f$  est dérivable sur  $[1; 2]$  comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle et  $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$

On a

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \geq 0$$

$$\iff \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\iff x^2 \geq 2$$

$$\iff x \leq -\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x \geq \sqrt{2}$$

Comme  $x \in [1; 2]$  on a  $f'(x) \geq 0 \iff x \geq \sqrt{2}$ .

On en déduit que  $f$  est décroissante sur  $[1; \sqrt{2}]$  et croissante sur  $[\sqrt{2}; 2]$ .

De plus,  $f(1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ ,  $f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ , et enfin  $f(2) = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ .

$x$	1	$\sqrt{2}$	2
$f'(x)$	-	0	+
$f$	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}$

D'après ce tableau de variation, on a  $\forall x \in [1; 2]$ ,  $\sqrt{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{2}$

Or  $1 \leq 2$  donc  $1 \leq \sqrt{2}$ , et  $\frac{3}{2} \leq 2$ , donc finalement pour tout  $x \in [1; 2]$ ,  $1 \leq \sqrt{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{2} \leq 2$ .

2)  $u_0 = 1$  donc  $u_0 \in [1; 2]$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $u_n \in [1; 2]$  est bien définie alors  $u_{n+1} = f(u_n)$  est bien défini et  $f(u_n) \in [1; 2]$  d'après la question précédente donc  $u_{n+1} \in [1; 2]$ . Par une récurrence immédiate, on en déduit donc que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est bien défini et  $u_n \in [1; 2]$ .

3) On a déjà montré à la question 1 que  $f$  était dérivable sur  $[1; 2]$  et que sa dérivée était donnée par  $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$ .

Ainsi,  $f'$  est dérivable comme somme de fonctions dérivables et  $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ . Pour tout  $x \in [1; 2]$ ,  $x^3 \geq 1 \geq 0$  donc  $\frac{2}{x^3} \geq 0$ . On en déduit que  $f'$  est croissante sur  $[1; 2]$ , donc que  $\forall x \in [1; 2]$ ,  $f'(1) \leq f'(x) \leq f'(2)$ .

Or  $f'(1) = -\frac{1}{2}$  et  $f'(2) = \frac{1}{4}$ , donc  $\forall x \in [1; 2]$ ,  $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$ .

On en déduit que  $\forall x \in [1; 2]$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ .

4) D'après les précédentes questions,  $f$  est dérivable sur  $[1; 2]$  et  $\forall x \in [1; 2]$   $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$  donc d'après l'inégalité des accroissements finis,  $\forall x, y \in [1; 2]$ ,  $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$ .

On en déduit que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| \leq \frac{1}{2} \times |u_n - u_{n-1}|$

Par une récurrence immédiate, on en déduit que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2^n} \times |u_1 - u_0|$ .

5) Comme  $\frac{1}{2} < 1$ , la série de terme général  $\frac{1}{2^n} \times |u_1 - u_0|$  est une série géométrique convergente.

Par comparaison, on en déduit que la série de terme général  $|u_{n+1} - u_n|$  converge donc que la série de terme général  $u_{n+1} - u_n$  converge.

Or,  $\sum_{n=0}^N (u_{n+1} - u_n) = u_{N+1} - u_0$  par sommes télescopiques, donc la série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  converge si et seulement si la suite  $(u_n)$  converge. On en déduit que la suite  $(u_n)$  converge.

6) Puisque  $f$  est une fonction continue sur  $[1; 2]$  et que  $(u_n)$  converge vers une limite  $\ell$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$  donc finalement  $\ell = f(\ell)$ .

Ainsi,  $\ell$  est solution de l'équation  $\ell = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{\ell}$ .

$$\ell = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{\ell} \iff \frac{\ell}{2} - \frac{1}{\ell} = 0$$

$$\iff \frac{\ell^2 - 2}{\ell} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \ell^2 - 2 = 0 \quad \text{et} \quad \ell \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \ell = \sqrt{2} \text{ car } \ell \in [1; 2]$$

on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2}$ .

### Correction de l'exercice 13 :

- 1) On pose  $g(x) = f(x) - x$  sur l'intervalle  $[a; b]$ .  $f$  est dérivable donc continue, ainsi  $g$  est continue comme différence de fonctions continues et de plus  $g(a) = f(a) - a$  et  $g(b) = f(b) - b$ .

Puisque pour tout  $x \in [a; b]$  on a  $f(x) \in [a; b]$ , alors en particulier  $f(a) \geq a$  et  $f(b) \leq b$ , ainsi  $g(a) \geq 0$  et  $g(b) \leq 0$ .

D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc un réel  $\ell \in [a; b]$  tel que  $g(\ell) = 0$ , c'est à dire tel que  $f(\ell) = \ell$ .

Montrons que ce réel est unique : on suppose qu'il existe un autre réel  $\ell' \in [a; b]$  tel que  $f(\ell') = \ell'$ .

Comme  $f$  est dérivable sur  $[a; b]$  et que  $\forall x \in [a; b]$ ,  $|f'(x)| \leq r$ , on a d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|\ell' - \ell| = |f(\ell') - f(\ell)| \leq r|\ell' - \ell|$$

donc  $|\ell' - \ell| \leq r|\ell' - \ell|$ . Si  $\ell' \neq \ell$ , alors  $|\ell' - \ell| > 0$  donc en divisant de chaque côté par  $|\ell' - \ell|$  on obtient  $1 \leq r$ , ce qui contredit l'hypothèse  $r \in [0, 1[$ .

Finalement,  $\ell' = \ell$ , le point fixe de  $f$  est unique.

- 2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $\mathcal{P}(n)$  : «  $u_n$  est bien définie et  $u_n \in [a; b]$  ».

— **Initialisation** :  $u_0 \in [a; b]$  d'après l'énoncé donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

— **Hérédité** : Supposons qu'il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  soit vraie.

On a  $u_n \in [a; b]$  donc  $u_{n+1} = f(u_n)$  est bien définie et par hypothèse  $f(x) \in [a; b]$  pour tout  $x \in [a; b]$  donc  $u_{n+1} \in [a; b]$ . Ainsi  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

— **Conclusion** : Par principe de récurrence on en conclut que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ .

- 3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , d'après l'inégalité des accroissements finis on a  $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq r|u_n - \ell|$ .

- 4) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $\mathcal{P}(n)$  : «  $|u_n - \ell| \leq r^n |u_0 - \ell|$  » et on raisonne par récurrence.

— **Initialisation** :  $r^0 = 1$  donc  $|u_0 - \ell| = r^0 |u_0 - \ell|$ .

— **Hérédité** : Supposons qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  soit vraie. Alors

$$|u_{n+1} - \ell| \leq r|u_n - \ell| \leq r \times r^n |u_0 - \ell| \text{ par hypothèse de récurrence}$$

$$\text{D'où } |u_{n+1} - \ell| \leq r^{n+1} |u_0 - \ell|.$$

— **Conclusion** : par principe de récurrence on en conclut que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - \ell| \leq r^{n+1} |u_0 - \ell|$ .

- 5) Puisque  $r \in [0, 1[$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0$  ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n |u_0 - \ell| = 0$  donc par comparaison  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0$ .

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ .

### Correction de l'exercice 14 :

- 1) La fonction  $x \mapsto -x$  est  $\mathcal{C}^2$  et la fonction  $x \mapsto e^x$  aussi donc  $x \mapsto e^{-x}$  est  $\mathcal{C}^2$  par composition de fonctions. Les fonctions  $x \mapsto 1$  et  $x \mapsto \frac{1}{2}x$  sont  $\mathcal{C}^2$ , donc  $f$  est  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0; +\infty[$  comme produit et somme de fonctions  $\mathcal{C}^2$ .

$$\text{De plus, } f'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-x} = \frac{e^{-x}}{2}(1-x) \text{ et } f''(x) = \frac{e^{-x}}{2}(-1+x-1) = \frac{e^{-x}}{2}(x-2)$$

- 2) Pour tout  $x \in [1; +\infty[$ ,  $1-x \leq 0$  donc  $\frac{e^{-x}}{2}(1-x) \leq 0$ . On en déduit que  $f$  est décroissante sur  $[1; +\infty[$ .

$$\text{Or } f(1) = 1 + \frac{1}{2}e^{-1} > 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ par croissance comparée et par somme.}$$

On en déduit donc que pour tout  $x \in [1; +\infty[$ ,  $f(x) \in [1; +\infty[$ , autrement dit l'intervalle  $[1; +\infty[$  est stable par  $f$ .

- 3) On sait que  $f''(x) = \frac{e^{-x}}{2}(x-2)$ , donc  $f'$  est croissante sur  $[0; 2]$  et décroissante sur  $[2; +\infty[$ .

$$\text{Or, } f'(0) = \frac{1}{2}, f'(2) = -\frac{e^{-2}}{2}, \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\frac{1}{2} \text{ par croissance comparée et par somme.}$$

$$\text{On en déduit que } \forall x \in [0; +\infty[, -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}, \text{ autrement dit } \forall x \in [0; +\infty[, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

- 4) On pose  $g(x) = f(x) - x$ . Alors  $g$  est dérivable sur  $[1; +\infty[$  comme somme de fonctions dérivables et  $g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{e^{-x}}{2}(1-x) - 1$ .

$$\text{Pour tout } x \geq 1, \frac{e^{-x}}{2} > 0 \text{ et } (1-x) \leq 0 \text{ donc } \frac{e^{-x}}{2}(1-x) \leq 0 \text{ et ainsi } g'(x) \leq -1 < 0 \text{ donc } g'(x) < 0$$

On en déduit que  $g$  est strictement décroissante sur  $[0; +\infty[$ .  $g$  est continue comme somme de fonctions continues, et  $g(1) = f(1) - 1 = \frac{1}{2}e - 1 > 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  par somme de limites.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel  $\alpha \in [1; +\infty[$  tel que  $g(\alpha) = 0$ , c'est à dire il existe un unique réel  $\alpha \in [1; +\infty[$  tel que  $f(\alpha) = \alpha$ .

- 5)  $f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  et on sait que pour tout  $x \in [0; +\infty[$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$  donc on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall x, y \in [0; +\infty, \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

Par une récurrence immédiate on en déduit que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$ .

- 6) On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha| = 0$  donc par comparaison  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ , et ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ .