⋆

Exercice 1

On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y+z\ ,\ x-y+z\ ,\ z-2x) \end{array}$$

1) Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.
3) On considère la base $\mathcal{B} = ((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1))$.
   Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}(f)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0}(f)$, et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$

⋆

Exercice 2

On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y, 2y-3x) \end{array}$$

1) Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$
3) On considère la base $\mathcal{B} = ((1,1),(0,2))$ de $\mathbb{R}^2$ et la base $\mathcal{B}' = ((1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)$ de $\mathbb{R}^3$.
   Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.
4) Montrer que f est injective.
5) Déterminer une base de $\mathrm{im}(f)$.

⋆

Exercice 3

Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ données par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Vérifier que $A^2 = A$ et que $B^2 = B$
2) Déterminer le rang de A ainsi que la dimension du noyau de A
3) En notant I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que $I_2 - AB$ et que $A + B - AB$ sont inversibles.

⋆ ⋆

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme non nul. On suppose que $f^2 = 0$, c'est à dire que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $\mathrm{im}(f) \subset \ker(f)$
2) En déduire que $0 < \mathrm{rg}(f) \leq \dim(\ker(f)) < 3$
3) À l'aide du théorème du rang, déterminer $\mathrm{rg}(f)$ et $\dim(\ker(f))$.
4) Justifier qu'il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(u) \neq 0$.
5) On pose $v = f(u)$. Justifier qu'il existe $w \in \mathrm{Ker}(f)$ tel que (v,w) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
6) Montrer que (v,w,u) est une base de $\mathbb{R}^3$ qui répond au problème posé.

⋆

Exercice 5

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que si f est une homothétie de E, alors la matrice représentative de f dans une base $\mathcal{B}$ de E ne dépend pas de la base choisie.

⋆

Exercice 6

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que : $\forall \boldsymbol{x} \in E, \exists \lambda \in \mathbb{R}, f(\boldsymbol{x}) = \lambda \cdot \boldsymbol{x}$
Montrer que : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{x} \in E,\ f(\boldsymbol{x}) = \lambda \cdot \boldsymbol{x}$.

⋆ ⋆

Exercice 7

On considère l'application suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y+z\ ,\ x-2y+z\ ,\ x+y\ ,\ 2x+z) \end{array}$$

1) Montrer que f est une application linéaire
2) Déterminer la matrice de f dans la base canonique
3) On pose :
$$\mathcal{B} = ((2,0,0),(0,2,0),(0,0,2)) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = ((1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(0,1,1,1))$$
Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$
4) Déterminer la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à la base canonique.
5) En déduire $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
6) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.

⋆

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient les matrices carrées de taille n suivante : $A = (2^{i+j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (i+j)_{1 \leq i,j \leq n}$
1) Écrire A et B dans le cas $n = 5$
2) Déterminer le rang de A et le rang de B dans le cas général
3) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(A)$ et une base de $\mathrm{Ker}(B)$ dans le cas $n = 5$.

⋆ ⋆

Exercice 9

Soit $n \geq 2$ un entier et soit $A = (\sin(i+j))_{1 \leq i,j \leq n}$. Montrer que $\mathrm{rg}(A) \leq 2$.

⋆ ⋆

Exercice 10

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
1) a) Calculer $(A-I)^2$
   b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.
2) On pose $u_1 = (f - \mathrm{Id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.
   a) Montrer que le rang de $(f - \mathrm{Id})$ est égal à 1. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
   b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$
3) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$
4) Déterminer la matrice T de f dans cette base.
5) Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible puis écrire la relation existant entre les matrices A, T, P et P^{-1}.

⋆ ⋆
Exercice 11

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée de taille n. On dit que A est une matrice stochastique si les deux conditions suivantes sont remplies :

- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j} \geq 0$
- $\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$

1) Soient A et B deux matrice stochastiques. Montrer que AB est stochastique.
2) On considère la matrice $A = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) Vérifier que A est stochastique.
   b) Justifier que A^n est stochastique.
   c) Calculer le rang de A.
   d) On pose $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (0,-1,1)$ et $e_3 = (-2,1,1)$ et X_1, X_2, X_3 les vecteurs colonnes correspondant. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$
   e) Exprimer AX_1, AX_2 et AX_3 en fonction de X_1, X_2 et X_3 et en déduire qu'il existe une matrice inversible P telle que :
   $$A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} P^{-1}$$
   Préciser la matrice P et déterminer son inverse P^{-1}.
   f) Déterminer une expression de A^n en fonction de n.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 12

On veut démontrer dans cet exercice la formule d'inversion de Pascal : on suppose que (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$.

Le but de l'exercice est de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} a_k$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$$

1) Montrer que u définit bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Montrer que u est inversible d'inverse :
$$v : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X-1) \end{array}$$
3) Exprimer les matrices de u et de v dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, \ldots, X^n)$.
4) On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$ et $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(v)$, et on note $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

   Montrer que $X^T = Y^T M$ et en déduire l'égalité voulue.