

★ ★

Exercice 1

Calculer les développements limités suivants

1) DL à l'ordre 3 en 0 de $e^{\sin x}$

3) DL à l'ordre 3 en 0 de $\frac{1}{1+e^x}$

2) DL à l'ordre 3 en 0 de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$

4) DL à l'ordre 3 en 0 de $\frac{\sin(x)}{e^x}$

★ ★

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes à l'aide de développements limités

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2^{1/x} + 3^{1/x} - 5^{1/x})^x$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 5\pi x}{\sin 4\pi x}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$

★

Exercice 3

Étudier la nature des séries suivantes :

1) $\sum_{n \geq 1} (1 - \cos(\frac{1}{n}))$

3) $\sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{\cos(1/n)}{1 - \sin(1/n)} \right)$

2) $\sum_{n \geq 1} (e^{1/n} - e^{1/(n+1)})$

4) $\sum_{n \geq 1} n^{8/3} (\cos(1/n) - e^{-1/(2n^2)})$

★

Exercice 4

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x e^x - \sin(x) - x^2}{\ln(1+x) - x}$.1) Déterminer l'ensemble de définition de f .2) Donner un développement limité d'ordre 2 en 0 de f .3) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On appelle g ce prolongement.4) Montrer que g est dérivable en 0, et déterminer $g'(0)$.5) Déterminer l'équation de la tangente T en 0 au graphe Γ de g et préciser les positions relatives de Γ et de T au voisinage de 0

★

Exercice 5

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ définie sur \mathbb{R} .1) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .2) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} , et préciser $f'(0)$.3) Montrer que f n'est pas \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

★

Exercice 6

1) Soit f la fonction réelle de la variable réelle définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 8}$.Après avoir étudié l'ensemble de définition de f , déterminer deux asymptotes oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ à \mathcal{C}_f , la courbe représentative de f .2) Mêmes questions avec la fonction g définie par $g(x) = x \exp\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right)$.

★ ★
Exercice 7

Soit n un entier pair et soit $P : x \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$. Montrer que P n'a pas de racine multiple.

★
Exercice 8

Soit P un polynôme à coefficients réels.

- 1) Montrer que si λ est une racine complexe de P , alors $\bar{\lambda}$ est racine de P avec la même multiplicité que λ .
- 2) Supposons que toutes les racines réelles de P soient de multiplicité paire. Montrer que n est pair.

★
Exercice 9

Calculer les intégrales suivantes :

- | | | |
|----------------------------|----------------------------------|----------------------------------------|
| 1) $\int_0^1 x e^{x^2} dx$ | 3) $\int_0^\pi x^2 \sin x dx$ | 5) $\int_0^2 \frac{e^u}{(1+e^u)^2} du$ |
| 2) $\int_0^1 \ln(1+t) dt$ | 4) $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^5}$ | 6) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ |

★ ★
Exercice 10

(ENS 2021) On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx$.

- 1) Justifier que (u_n) est bien définie et étudier son sens de variations.
- 2) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx$ et $w_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\ln(n+1)}{e} \leq v_n$ et $0 \leq w_n \leq \frac{1}{e}$.

- 3) En déduire la limite de la suite (u_n)
- 4) On cherche maintenant à obtenir un résultat plus précis.
 - a) Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$ est convergente.
 - b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx \leq I$
 - c) En déduire que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

★ ★ ★
Exercice 11

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

- 1) Donner l'ensemble D des réels pour lesquels cette intégrale a un sens.
- 2) Montrer que f est dérivable sur D et que sa dérivée est $f'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$. En déduire les variations de f .
- 3) Soit g la fonction définie par $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}$. Montrer que $f(x) - g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 1, et en déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1.
- 4) On prolonge alors f par continuité en 1 (on note encore f ce prolongement). Étudier la dérivabilité de f en 1.

★ ★ ★
Exercice 12

Soit f une fonction définie et continue sur $[0, 1]$, à valeurs dans $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$, et vérifiant $f \circ f = f$. On note $a = \min \{f(x), x \in [0, 1]\}$ et $b = \max \{f(x), x \in [0, 1]\}$.

- 1) Justifier l'existence de a et de b .

- 2) Quelle est la restriction de f à $[a, b]$?
- 3) Quelles sont toutes les fonctions non constantes vérifiant toutes les hypothèses ci-dessus ? On pourra considérer les valeurs de $f'(a)$ et de $f'(b)$.
- 4) Quelles sont toutes les fonctions f continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ vérifiant $f \circ f = f$?

Le coin des Khûbes

★ ★ ★ Exercice 13

Soit f la fonction définie par :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}
- 2) Justifier que la restriction de f à $]0; +\infty[$ est de classe \mathcal{C}^∞ .
- 3) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}$$

- 4) En déduire que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

★ ★ Exercice 14

(D'après ESCP 1994) Pour tout entier naturel n , on pose

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

- 1) Calculer u_0 et u_1 .
- 2) a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$.
b) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
- 3) a) Exprimer, pour tout $n \geq 1$, u_n en fonction de u_{n-1} et de n .
b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = n! \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$
- 4) Soit a un nombre réel et soit $(v_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par les conditions :

$$v_0 = a \quad \text{et pour tout entier } n \geq 1, \quad v_n = n v_{n-1} - 1$$

Montrer que si $a \neq u_0$, la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est divergente.

- 5) a) Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{u_{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

- b) En déduire qu'il existe deux constantes c_1 et c_2 , que l'on déterminera, telles qu'on ait

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

★

Exercice 15

(ENS 2025)

- 1) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $x^n = 2x + 1$ d'inconnue x admet une unique solution positive. Cette solution est notée u_n .
- 2) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est monotone, puis qu'elle converge vers une limite $\ell \geq 1$.
- 3) Montrer que $\ell = 1$.
- 4) On pose $\varepsilon_n = u_n - 1$ pour tout $n \geq 2$.
 - a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $n \ln(1 + \varepsilon_n) = \ln(3 + 2\varepsilon_n)$.
 - b) En déduire que $n\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(3)$.

★

Exercice 16

(ENS 2025)

Soit $\alpha > 0$. Pour tout entier $n \geq 1$ et $x \geq 0$ on pose :

$$f_n(x) = x - \arctan(x) - n^\alpha$$

- 1) Montrer que pour tout $n \geq 1$ il existe un unique $x \geq 0$ tel que $f_n(x) = 0$, qu'on notera u_n dans la suite.
- 2) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.
- 3) Démontrer que pour tout $x > 0$ on a $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$
- 4) Démontrer que $n^\alpha(u_n - n^\alpha - \pi/2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$.