Correction de Maths ENS - Oraux 2015

Planche 1

Exercice 1

1. Si $x \in V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2)$, alors $\lambda_1 x = \lambda_2 x = f(x)$ donc $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$ donc $x = 0$ car $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
2. Voir cours (par récurrence sur le nombre de valeurs propres)
3. Tous les sous espaces propres ont une dimension supérieure ou égale à 1. Comme $\dim(V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_k)) = \sum_{i=1}^{k} \dim(V(\lambda_i))$ et que cette dimension ne peut pas excéder la dimension (finie) de E il ne peut y avoir qu'un nombre fini de sous espaces propres donc un nombre fini de valeurs propres.
4. Par récurrence, c'est vrai pour $k = 1$ par hypothèse et si c'est vrai pour un entier $k \geq 1$ alors :

$$
\begin{aligned}
AB^{2k} - B^{2k}A = kB^{2k-1} &\Rightarrow AB^{2k+2} - B^{2k}AB^2 = kB^{2k+1} && \text{en multipliant à droite par } B^2 \\
&\Rightarrow AB^{2k+2} - B^{2k}(B^2A + B) = kB^{2k+1} && \text{en utilisant } AB^2 = B^2A + B \\
&\Rightarrow AB^{2k+2} - B^{2k+2}A = kB^{2k+1} + B^{2k+1} \\
&\Rightarrow AB^{2k+2} - B^{2k+2}A = (k+1)B^{2k+1}
\end{aligned}
$$

   donc le résultat est vrai au rang $k + 1$. Par récurrence on a donc :

$$\forall k \geq 1, \quad AB^{2k} - B^{2k}A = kB^{2k-1}$$

5. $f(B^{2k-1}) = ABB^{2k-1} - B^{2k-1}BA = AB^{2k} - B^{2k}A = kB^{2k-1}$ d'après la question précédente, donc si $B^{2k-1} \neq 0$ c'est un vecteur propre de f associé à la valeur propre k.
6. f admet un nombre fini de valeurs propres, donc il ne peut pas exister une infinités d'entiers k tels que k est valeur propre de f, donc il existe un nombre fini d'entiers k tels que B^{2k-1} est vecteur propre de f, donc il existe un entier k tel que $B^{2k-1} = 0$.

   Fixons k_0 le plus petit d'entre eux, et supposons que $B^{2k_0-2} = 0$. Alors $f(B^{2k_0-3}) = (k_0-1)B^{2k_0-3}$ d'après la question 5, mais $f(B^{2k_0-3}) = AB^{2k_0-2} - B^{2k_0-2}A = 0$ par définition de f et par hypothèse sur B^{2k_0-2}. On en déduit que $B^{2k_0-3} = 0$ ce qui contredit la minimalité de k_0.

Exercice 2

1. Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$
2. Soient $a < b$ deux réels quelconques. f est continue et dérivable sur $[a,b]$ par hypothèse donc d'après le TAF il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) = 0$ par hypothèse. On en déduit que $f(a) = f(b)$, et ce quels que soient les réels $a < b$ choisis. f est donc constante sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. $\lim\limits_{x \to x_0} |x - x_0|^c = 0$ donc par comparaison $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x) - g(x_0)| = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. On en conclut que g est continue en x_0, et ce quel que soit le réel x_0 choisi. g est donc continue sur $\mathbb{R}$.
4. Si $c > 1$, alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ on a : $\left|\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right| \leq \left|\dfrac{(x - x_0)^c}{x - x_0}\right| = |x - x_0|^{c-1}$ avec $c - 1 > 0$ donc $\lim\limits_{x \to x_0} |x - x_0|^{c-1} = 0$ et par comparaison $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = 0$. On en déduit que g est dérivable en x_0 et que $g'(x_0) = 0$. Ceci étant valable pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on en déduit que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée nulle, donc g est constante d'après la question 2.
5. Si $c > 1$, alors g est nécessairement dérivable comme vu à la question précédente.

   Sans cette hypothèse ce n'est plus vrai : on peut par exemple considérer la fonction $g(x) = |x|$ qui n'est pas dérivable en 0 et pour laquelle on a par inégalité triangulaire :

$$|g(x) - g(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Planche 6

Exercice 1

1. Exercice classique d'analyse : il suffit par exemple d'étudier la fonction $f : x \mapsto \ln(x) - x + 1$
2. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(q_i) - \sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i) &= \sum_{i=1}^{n} p_i(\ln(q_i) - \ln(p_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i \ln\left(\frac{q_i}{p_i}\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{q_i}{p_i} - 1\right) && \text{d'après la question 1} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} q_i - \sum_{i=1}^{n} p_i \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

   d'où le résultat.

3. Supposons que $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$ est solution du système $\left\{ \begin{array}{rcl} a+b+c &=& 0 \\ \mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b + \mathrm{e}^c &=& 3 \end{array} \right.$.

   Alors en posant $q_1 = \mathrm{e}^a/3$, $q_2 = \mathrm{e}^b/3$ et $q_3 = \mathrm{e}^c/3$ on a $q_1 + q_2 + q_3 = 1$ donc si on pose $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$ on a d'après la question précédente :

$$p_1 \ln(q_1) + p_2 \ln(q_2) + p_3 \ln(q_3) \leq p_1 \ln(p_1) + p_2 \ln(p_2) + p_3 \ln(p_3)$$

   donc

$$-\frac{\ln(3)}{3}(a+b+c) \leq -\ln(3)$$

   donc $0 \leq -\ln(3)$ par hypothèse. Or $-\ln(3) < 0$, contradiction. Le système n'a donc pas de solutions.

Exercice 2

1. $E(S_n - S_k) = E(S_n) - E(S_k) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) - \sum_{i=1}^{k} E(X_i) = 0$.
2. $Var(S_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$ par indépendance des X_i
3. A_k est l'événement « Le plus petit indice j pour lequel $|S_j| \geq t$ est k. ». Ainsi les événements $(A_1, ..., A_n)$ sont bien disjoints deux à deux, et comme A est l'événement « Pour l'un des indices j on a $|S_j| \geq t$ on a bien $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.
4. Pour toute issue ω on a $(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k})(\omega) = 0$ si A_k n'est pas réalisé, et $(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k})(\omega) = S_k^2(\omega) \geq t^2$ si A_k est réalisé (car dans ce cas on a $|S_k(\omega)| \geq t$ donc $S_k^2(\omega) \geq t^2$).
   Ainsi on a inégalité de variables aléatoires : $S_k^2 \mathbb{1}_{A_k} \geq t^2 \mathbb{1}_{A_k}$
   Par propriété de l'espérance on a donc : $E(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k}) \geq t^2 \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_k}) = t^2 \mathbb{P}(A_k)$.
5. Comme A est l'union disjointe de A_1,...,A_n, $\mathbb{1}_A$ vaut 1 si et seulement si l'un des A_i vaut 1 (et les autres valent nécessairement 0).
   De même, $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}$ vaut 1 si et seulement si l'un des A_i vaut 1 (et les autres valent nécessairement 0), donc $\mathbb{1}_A = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}$.
   Comme $0 \leq \mathbb{1}_A \leq 1$ on a $0 \leq S_n^2 \mathbb{1}_A \leq S_n^2$. On en déduit :

$$E(S_n^2) \geq E(S_n^2 \mathbb{1}_A) = E\left(\sum_{k=1}^{n} S_n^2 \mathbb{1}_{A_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} E(S_n^2 \mathbb{1}_{A_k})$$

6. Suivant l'indication de l'énoncé, écrivons : $S_n^2 = (S_k + (S_n - S_k))^2$. On a donc :

$$\begin{aligned} E(S_n^2 \mathbb{1}_{A_k}) &= E((S_k^2 + (S_n - S_k)^2 + 2S_k(S_n - S_k))\mathbb{1}_{A_k}) \\ &\geq \mathbb{E}(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k}) + 2E(S_k(S_n - S_k)\mathbb{1}_{A_k}) && \text{car } E((S_n - S_k)^2) \geq 0 \end{aligned}$$

   Or $S_n - S_k$ ne depend que de $X_{k+1}, ...X_n$ donc est indépendante de S_k. De même, A_k ne dépend que de $X_1, ..., X_k$ donc est indépendante de $(S_n - S_k)$. On a donc $(S_n - S_k)$ indépendante de $(S_k \mathbb{1}_{A_k})$ donc par propriété de l'espérance :

$$\geq \mathbb{E}(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k}) + 2E(S_n - S_k)E(S_k \mathbb{1}_{A_k})$$

7. En utilisant l'inégalité de la question 4 dans les résultats précédents on obtient :

$$\begin{aligned} E(S_n^2) &\geq \sum_{k=1}^{n} E(S_n^2 \mathbb{1}_{A_k}) \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} E(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k}) + 2\sum_{k=1}^{n} \underbrace{E(S_n - S_k)}_{=0} E(S_k \mathbb{1}_{A_k}) \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} t^2 \mathbb{P}(A_k) && \text{d'après question 4} \\ &\geq t^2 \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \\ &\geq t^2 \mathbb{P}(A) && \text{car } (A_1, ...A_n) \text{ est une partition de } A \end{aligned}$$

   Enfin, $E(S_n^2) = V(S_n) + E(S_n)^2 = V(S_n)$ car $E(S_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = 0$, et $V(S_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$ par indépendance de $(X_1, ..., X_n)$. On en conclut que :

$$\mathbb{P}(\max_{1 \leq j \leq n} |S_k| \geq t) \leq \frac{1}{t^2} \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

8. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\max_{1 \leq j \leq n} |S_k| \geq t) &\leq \frac{1}{t^2} \sum_{i=1}^{n} V(X_i) \\ &\leq \frac{1}{t^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(2\sqrt{i})^2}{12} \\ &\leq \frac{1}{3t^2} \sum_{i=1}^{n} i \\ &\leq \frac{n(n+1)}{6t^2} \end{aligned}$$

   donc $\mathbb{P}(\max_{1 \leq j \leq n} |S_k| \geq t) \leq \dfrac{n(n+1)}{6t^2}$