

★

Exercice 1

Voir correction

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x+2}} dx$

d) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x} dx$

g) $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{x+1} dx$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+2)}} dx$

e) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x+1} dx$

h) $\int_0^{+\infty} \frac{x e^x + 1}{x e^{2x} + 1} dx$

c) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^5 + 1} dx$

f) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x e^x + 1} dx$

★

Exercice 2

Voir correction

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

a) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$

c) $\int_{-\infty}^0 \frac{\sin^3 x}{x^2} dx$

e) $\int_0^\pi \ln(2x + 3 \sin x) dx$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x^3 + 1}} dx$

d) $\int_{-\infty}^0 e^x \cos x dx$

f) $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2} dx$

★

Exercice 3

Voir correction

1) Montrer que pour tout réel $a > -1$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^a e^{-t} dt$ converge.

2) Montrer que pour tout réel $a > -1$, l'intégrale $\int_0^1 t^a \ln(t) dt$ converge.

3) Montrer que pour tout réel $a > -1$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{a-t} dt$ converge.

★

Exercice 4

Voir correction

Pour chacune des intégrale suivante montrer qu'elle converge et la calculer :

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} 2^{-|x|} dx$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx$

5) $\int_0^{+\infty} e^{-x}(1-e^{-x})^4 dx$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3}{4+x^2} dx$

4) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^7 e^{-x^2} dx$

6) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$

★ ★

Exercice 5

Voir correction

Le but de cet exercice est de démontrer la formule de Stirling : $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$ et $v_n = \ln u_n$.

1) a) À l'aide d'un développement limité, montrer que $v_n - v_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2} + \left(\frac{1}{n^2}\right)$.

b) En déduire que la suite (v_n) converge.

c) En déduire l'existence d'un réel $C > 0$ tel que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C \sqrt{n} \frac{n^n}{e^n}$.

2) Montrons dans cette question que $C = \sqrt{2\pi}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$ (intégrale de Wallis)

a) Calculer W_0 et W_1 .b) Montrer que (W_n) converge.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$

d) En déduire W_2 .

- e) À l'aide d'une intégration par partie, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.
- f) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.
- g) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_n}{W_{n+1}} = 1$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
- h) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$.
- i) En déduire que $C = \sqrt{2\pi}$.

★ ★

Exercice 6

Voir correction

- 1) Montrer à l'aide du changement de variable $x = e^u$ que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(e^u) du$ converge.
- 2) Montrer à l'aide du changement de variable $t = u^{1/3}$ que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{2/3} + u^{4/3}}$ converge et la calculer.

★ ★

Exercice 7

Voir correction

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sin(n\theta) \neq 0$. On considère le polynôme $P(X) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^k$

- 1) Montrer que $P(X) = \frac{1}{2i}(1 + e^{i\theta} X)^n - \frac{1}{2i}(1 + e^{-i\theta} X)^n$
- 2) En déduire que λ est racine du polynôme P si et seulement si $\exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\lambda = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}}} e^{-i\theta}$.
- 3) Montrer que toutes les racines de P sont réelles.

★ ★

Exercice 8

Voir correction

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \left(\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\right)^2$.

Le but de cet exercice est de déterminer un équivalent de u_n lorsque $n \rightarrow +\infty$. On admet le théorème de Cesàro :

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \text{ avec } \ell \in \mathbb{R} \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \ell$$

- 1) Montrer que la suite (u_n) est bien définie.
- 2) Étudier le sens de variation de (u_n) puis montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- 3) Soit β un réel non nul. Montrer que $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta = \beta u_n^{\beta-3} + o(u_n^{\beta-3})$.
- 4) Déterminer une valeur de β telle que $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ converge vers une limite finie.
- 5) En déduire à l'aide du théorème admis que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}$.

★ ★

Exercice 9

Voir correction

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on appelle **fonction Gamma d'Euler** la fonction définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

- 1) Montrer que Γ est bien définie sur $]0; +\infty[$.
- 2) Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- 3) Calculer $\Gamma(1)$ puis en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$
- 4) Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ puis $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$. On pourra admettre la valeur de l'intégrale de Gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Le coin des Khûbes

★ ★

Exercice 10

Voir correction

(ENSAE 2013) Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. On suppose qu'il existe une constante $0 < c < 1$ telle que, pour tous x, y dans $[0, 1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$$

Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0, 1]$.

★ ★ ★

Exercice 11

Voir correction

(ENS 2016) Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(x)f(y) \leq f(xy)$ pour tout $x, y \geq 0$ et $f(1) = 1$.

- 1) Montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$
- 2) Montrer que $f(x) \geq f(x^{1/n})^n$ pour tout $x > 0$ et $n \geq 1$
- 3) En déduire qu'il existe un réel p tel que $f(x) \geq x^p$ pour tout $x \geq 0$
- 4) Montrer que $p \geq 0$
- 5) Montrer que $f(x) = x^p$ pour tout $x \geq 0$.

★ ★

Exercice 12

Voir correction

(ENS 2025)

Démontrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(at)}{t^2} dt$ est convergente, puis qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(at)}{t^2} dt = c|a|$$

Correction des exercices

Correction de l'exercice 1 :

- a) La fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+2}}$ est continue sur $[1; +\infty[$.

Il faut donc étudier la convergence de l'intégrale en $+\infty$.

$f(x) \equiv x \rightarrow +\infty \frac{1}{x^{3/2}}$. Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ est une intégrale de Riemann qui converge car $\frac{3}{2} > 1$, donc d'après

le théorème d'équivalence sur les intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x+2}} dx$ converge.

Remarque : On peut aussi utiliser le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives en remarquant que $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{x}$ donc $\frac{1}{x\sqrt{x+2}} \leq \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}}$

- b) La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$ est continue sur $[0; +\infty[$. Il faut donc étudier la convergence de l'intégrale en $+\infty$.

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x}$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge, donc d'après le théorème d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ diverge.

Comme f est continue sur $[0; 1]$, $\int_0^1 f(x) dx$ converge.

On en conclut que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+2)}} dx$ diverge.

- c) La fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+1}{x^5+1}$ est continue sur $[0; +\infty[$.

Il faut donc étudier la convergence de l'intégrale en $+\infty$.

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ est une intégrale de Riemann qui converge car $3 > 1$.

D'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge.

Or f est continue sur $[0; 1]$ donc $\int_0^1 f(x) dx$ converge.

On en conclut que $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^5+1} dx$ converge.

- d) La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 \ln x}$ est continue sur $]1; +\infty[$.

On étudie donc la convergence de l'intégrale en $+\infty$ et en 1.

Pour tout $x \geq 2$, $\ln x \geq \ln(2)$ donc $\frac{1}{x^2 \ln(x)} \leq \frac{1}{x^2 \ln(2)}$

L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est une intégrale de Riemann convergente car $2 > 1$, donc d'après le théorème de comparaison

pour les intégrales de fonctions positives, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x} dx$ converge.

Étudions la convergence de $\int_1^2 \frac{1}{x^2 \ln x} dx$. Au voisinage de 1 on a $\frac{1}{x^2 \ln(x)} \sim \frac{1}{\ln(x)}$ et on a $\ln(x) = x - 1 + o(x - 1)$,

$$\text{donc } \frac{1}{x^2 \ln(x)} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x - 1}$$

Or $\int_1^2 \frac{1}{x - 1} dx$ a la même nature que $\int_1^2 \frac{1}{u} du$ par changement de variable $u = x - 1$, donc diverge.

Finalement, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln(x)} dx$ diverge.

- e) La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x+1}$ est continue sur $[1; +\infty[$.

Pour $x \geq e$, on a $\ln(x) \geq \ln(e) = 1$, et donc $\frac{\ln x}{x+1} \geq \frac{1}{x+1}$.

Or $\frac{1}{x+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, et l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ est une intégrale de Riemann divergente.

D'après le théorème d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx$ est donc divergente.

Ainsi d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x+1} dx$ est divergente.

Comme f est continue sur $[1; e]$, l'intégrale $\int_1^e \frac{\ln x}{x+1} dx$ converge, donc finalement $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x+1} dx$ diverge.

f) La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x e^x + 1}$ est continue sur $[0; +\infty[$.

Il faut étudier la convergence de l'intégrale en $+\infty$.

Pour $x \geq 1$, $x e^x + 1 \geq e^x$ donc $\frac{1}{x e^x + 1} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x}$

Pour tout $X > 0$, $\int_1^X e^{-x} dx = [-e^{-x}]_1^X = e^{-1} - e^{-X}$

donc $\int_1^X e^{-x} dx \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} e^{-1}$ donc $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ converge.

D'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x e^x + 1} dx$ converge.

Or, f est continue sur $[0; 1]$ donc $\int_0^1 \frac{1}{x e^x + 1} dx$ converge.

On en conclut que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x e^x + 1} dx$ converge

g) La fonction $f : x \mapsto \frac{e^x}{x+1}$ est continue sur $[0; +\infty[$.

Il faut donc étudier la convergence de l'intégrale en $+\infty$.

Pour tout $x \geq 0$, $\frac{e^x}{x+1} \geq \frac{1}{x+1}$.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx$ diverge (voir question e)) donc d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{x+1} dx$ diverge.

Or f est continue sur $[0; 1]$ donc $\int_0^1 f(x) dx$ converge. On en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{x+1} dx$ diverge.

h) La fonction $f : x \mapsto \frac{x e^x + 1}{x e^{2x} + 1}$ est continue sur $[0; +\infty[$.

On étudie la convergence de l'intégrale en $+\infty$.

$$\frac{x e^x + 1}{x e^{2x} + 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x e^x}{x e^{2x}} = \frac{1}{e^x}$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge car pour tout $X > 0$, $\int_0^X e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^X = 1 - e^{-X} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 1$.

D'après le théorème d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{x e^x + 1}{x e^{2x} + 1} dx$ converge.

Correction de l'exercice 2 :

a) La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x^2}$ est continue sur $[1; +\infty[$.

On étudie la convergence de l'intégrale en $+\infty$.

Pour tout $x \geq 1$, $\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est une intégrale de Riemann convergente, donc d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ est absolument convergente, donc convergente.

b) La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x^3 + 1}}$ est continue sur $[0; +\infty[$.

On étudie donc la convergence de l'intégrale en $+\infty$.

Pour tout $x \in [0; +\infty[$, $|\sin x + \cos x| \leq |\sin x| + |\cos x| \leq 2$

Ainsi, $\left| \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x^3 + 1}} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{x^3 + 1}}$.

Or, $\frac{2}{\sqrt{x^3 + 1}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{x^{3/2}}$, et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ est une intégrale de Riemann convergente car $\frac{3}{2} > 1$, donc d'après le théorème d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^3 + 1}} dx$ converge.

Ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x^3+1}} \right| dx$ converge.

Finalement, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x^3+1}} dx$ est absolument convergente, donc convergente. Comme $\int_0^1 \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x^3+1}} dx$ converge par continuité de f sur $[0; 1]$, on en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x^3+1}} dx$ converge.

c) En faisant le changement de variable $t = -x$, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \frac{\sin^3 x}{x^2} dx$ est de même nature que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$.

Or, $\left| \frac{\sin^3 t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est une intégrale de Riemann convergente, donc d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$ converge absolument.

De plus, $\sin(t) \sim t$ donc $\sin^3(t) \sim t^3$ et ainsi $\frac{\sin^3 t}{t^2} \sim t$ donc $\int_0^1 \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt$ converge.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$ converge donc $\int_{-\infty}^0 \frac{\sin^3 x}{x^2} dx$ converge.

d) En faisant le changement de variable $t = -x$, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 e^x \cos x dx$ est de même nature que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} \cos t dt$.
Or $|e^{-t} \cos t| \leq e^{-t}$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge car

$$\int_0^X e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^X = 1 - e^{-X} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 1$$

Ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} |e^{-t} \cos t| dt$ converge, donc $\int_0^{+\infty} e^{-t} \cos t dt$ converge absolument.

On en conclut que $\int_{-\infty}^0 e^x \cos x dx$ converge.

e) La fonction $f : x \mapsto \ln(2x + 3 \sin x) dx$ est continue sur $]0; \pi]$.

On étudie la convergence de l'intégrale en 0.

Par développement limité en 0,

$$\begin{aligned} \ln(2x + 3 \sin x) &= \ln(2x + 3(x + o(x))) \\ &= \ln(5x + o(x)) \\ &= \ln(5x(1 + o(1))) \\ &= \ln(5x) + \ln(1 + o(1)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(5x) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(5) + \ln(x) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x) \end{aligned}$$

Or, $-\ln x \geq 0$ pour tout $x \in [0; 1]$ et $-x^{1/2} \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc $-\ln(x) = o\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)$ et $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx$ est une intégrale de Riemann convergente donc par théorème de comparaison pour les fonctions positives, $\int_0^1 (-\ln x) dx$ converge.

D'après le théorème d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, on en conclut que $\int_0^1 (-\ln(2x + 3 \sin x)) dx$ converge, donc que $\int_0^1 \ln(2x + 3 \sin x) dx$ converge.

Enfin, comme f est continue sur $[1; \pi]$, $\int_1^\pi \ln(2x + 3 \sin x) dx$ converge, donc finalement $\int_0^\pi \ln(2x + 3 \sin x) dx$ converge.

f) La fonction $f : x \mapsto x^4 e^{-x^2}$ est continue sur $[0; +\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues sur \mathbb{R} .

On étudie la convergence de l'intégrale en $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^6 e^{-x^2} = \lim_{X \rightarrow +\infty} X^3 e^{-X}$ par croissance comparée et par composition de $x \mapsto x^2$ par $x \mapsto x^3 e^{-x}$, donc en $+\infty$

on a $x^4 e^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est une intégrale de Riemann convergente, donc d'après le théorème de négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives l'intégrale $\int_1^{+\infty} x^4 e^{-x} dx$ converge.

Enfin, comme f est continue sur $[0; 1]$, $\int_0^1 x^4 e^{-x} dx$ converge, donc finalement $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} dx$ converge.

Correction de l'exercice 5 :

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n - v_{n+1} = \ln \left(\frac{n! \times \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \sqrt{n+1}}{(n+1)! \times \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \ln \left(\frac{(n+1)^{n+1} e^n \sqrt{n+1}}{(n+1) \times n^n e^{n+1} \times \sqrt{n}} \right) \\
&= \ln \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^n \sqrt{\frac{n+1}{n}} \right) - \ln(e) \\
&= n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \\
&= n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - 1 \\
&= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} - 1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

b) $v_n - v_{n+1} \sim \frac{1}{12n^2}$ d'après la question précédente, donc la suite $(v_n - v_{n+1})$ est à termes positifs à partir d'un certain rang, et la série $\sum \frac{1}{12n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc par comparaison de séries à termes positifs on en conclut que la série $\sum (v_n - v_{n+1})$ converge.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n (v_k - v_{k+1}) = v_1 - v_{n+1}$ par télescopage, donc puisque le membre de gauche admet une limite réelle lorsque $n \rightarrow +\infty$, le membre de droite aussi. On en conclut que (v_{n+1}) converge donc que (v_n) converge.

c) Soit ℓ la limite de (v_n) , alors puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{v_n}$ on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^\ell$ par continuité de l'exponentielle. Finalement, en posant $C = e^\ell$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{C \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} = 1$ donc $n! \sim C \sqrt{n} \frac{n^n}{e^n}$.

2) a)

$$\begin{aligned}
W_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0(x) \, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \, dx \\
&= [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \geq 0$ car c'est l'intégrale d'une fonction positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

De plus, (W_n) est une suite décroissante. En effet, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin(x) \leq 1$ donc $\sin^{n+1}(x) \leq \sin^n(x)$. Ainsi, pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned}
W_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x) \, dx \\
&\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \, dx \\
&\leq W_n
\end{aligned}$$

(W_n) est donc une suite décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel $\ell \geq 0$.

- c) On pose le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$, donc $dt = -dx$.

On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx &= \int_{\frac{\pi}{2}-0}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}} \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-dt) \\ &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt \end{aligned}$$

- d) On en déduit que $W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx$.
donc

$$\begin{aligned} 2W_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(x) + \cos^2(x)) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que $W_2 = \frac{\pi}{4}$.

- e) Pour tout entier naturel n , on a par intégration par partie

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x) dx = [-\cos(x) \sin^{n+1}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x) \times (n+1) \cos(x) \sin^n(x) dx \\ &= 0 + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \sin^n(x) dx \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(x)) \sin^n(x) dx \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x) dx \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \end{aligned}$$

On en déduit donc

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

- f) Montrons que la suite $((n+1)W_n W_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante.
On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = (n+1)W_n W_{n+1}$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = (n+2)W_{n+1}W_{n+2}$$

$$= (n+2)W_{n+1} \frac{n+1}{n+2} W_n$$

d'après la question 5

$$= (n+1)W_n W_{n+1}$$

$$= V_n$$

donc (V_n) est bien une suite constante, et de plus $V_0 = (0+1)W_0W_1 = 1 \times \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2}$ d'après la question 1.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{\pi}{2}$ donc $(n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

g) On a montré à la question 2 que (W_n) convergeait vers un réel ℓ .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$ d'après la question précédente. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_{n+1} = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2(n+1)} = 0$ donc par passage à la limite on obtient $\ell^2 = 0$ donc $\boxed{\ell = 0}$.

Intéressons nous maintenant à la suite $\frac{W_n}{W_{n+1}}$.

On a montré à la question 2 que (W_n) était décroissante, ainsi pour tout entier n on a $W_{n+1} \leq W_n$ et $W_{n+2} \leq W_{n+1}$.

Ainsi, $\frac{W_n}{W_{n+1}} \geq 1$ et de plus, $\frac{n+2}{n+1} = \frac{W_n}{W_{n+2}} \geq \frac{W_n}{W_{n+1}} \geq 1$ car $W_n > 0$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, on en déduit par théorème d'encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.

On a ainsi $W_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} W_{n+1}$, donc d'après la question précédente $\frac{\pi}{2} = (n+1)W_n W_{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} nW_n^2$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

h) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la question 5, on a

$$\begin{aligned} W_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} W_{2n-2} \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)} W_{2n-4} \\ &= \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 1}{2n \times (2n-2) \times \cdots \times 2} \times W_0 \\ &= \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 1}{2n \times (2n-2) \times \cdots \times 2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{((2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 1) \times (2n \times (2n-2) \times \cdots \times 2)}{(2n \times (2n-2) \times \cdots \times 2)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n \times (n-1) \times \cdots \times 1)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Pour le rédiger plus rigoureusement, on raisonne par récurrence :

— **Initialisation** : Pour $n = 0$, $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{0!}{2^0 \times 0!^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, donc l'égalité est vraie au rang 0.

— **Hérédité** : Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$, et montrons que $W_{2n+2} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!^2} \frac{\pi}{2}$.

Alors,

$$\begin{aligned} W_{2(n+1)} &= W_{2n+2} \\ &= \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} && \text{d'après la question 5} \\ &= \frac{(2n+1)(2n)!}{(2n+2)2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2} && \text{par hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2n+2)!}{(2n+2)^2 2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2} && \text{en multipliant par } \frac{2n+2}{2n+2} \\
&= \frac{(2n+2)!}{2^2 (n+1)^2 2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2} ((n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

donc l'égalité est vraie au rang $n+1$

— **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2}$.

i) D'après la question g) on a $W_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ et d'après la question h) $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2}$, donc en utilisant l'équivalent

trouvé à la question 1 : $\frac{C \sqrt{2n} \frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}}{2^{2n} C^2 n^{\frac{n^2}{e^{2n}}}} \frac{\pi}{2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ d'où

$$C \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2} \sqrt{n} (2n)^{2n} \sqrt{\pi} \sqrt{n}}{2^{2n} n^{2n+1}} \sim \sqrt{2\pi}$$

donc $C = \sqrt{2\pi}$ par limites de constantes.

Correction de l'exercice 6 :

1) La fonction $u \mapsto \sin(e^u)$ est continue sur $[0; +\infty[$ comme composition de fonctions continues sur \mathbb{R} , à l'aide du changement de variable $x = e^u$, $dx = e^u du$ ($du = \frac{dx}{x}$) on peut écrire pour tout $A > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^A \sin(e^u) du &= \int_1^{e^A} \frac{\sin x}{x} dx \\
&= \left[\frac{-\cos x}{x} \right]_1^{e^A} + \int_1^{e^A} \frac{\cos x}{x^2} dx \\
&= \cos(1) - \cos(e^A) e^{-A} + \int_1^{e^A} \frac{\cos x}{x^2} dx
\end{aligned}$$

Or $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ et puisque l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ est absolument convergente donc convergente. On en conclut en faisant tendre A vers $+\infty$ que $\int_0^{+\infty} \sin(e^u) du$ converge.

2) On pose $t = u^{1/3}$ avec $dt = \frac{1}{3} u^{-2/3} du$ donc $du = 3t^2 dt$.

Soit $\varepsilon > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^1 \frac{du}{u^{2/3} + u^{4/3}} &= \int_{\varepsilon^{1/3}}^1 \frac{3t^2 dt}{t^2 + t^4} \\
&= 3 \int_{\varepsilon^{1/3}}^1 \frac{1}{1 + t^2} dt \\
&= 3 [\arctan t]_{\varepsilon^{1/3}}^1 \\
&= 3 \arctan(1) - 3 \arctan(\varepsilon^{1/3}) \\
&\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 3 \arctan(1) = \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

donc $\int_0^1 \frac{du}{u^{2/3} + u^{4/3}}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.

De même, pour $A > 0$:

$$\int_1^A \frac{du}{u^{2/3} + u^{4/3}} = \int_1^{A^{1/3}} \frac{3t^2 dt}{t^2 + t^4}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^{A^{1/3}} \frac{1}{1+t^2} dt \\
&= 3 [\arctan(t)]_1^{A^{1/3}} \\
&= 3 \arctan(A^{1/3}) - 3 \arctan(1) \\
&\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

donc $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{2/3} + u^{4/2}}$ converge et vaut $\frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}$. Finalement $\int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{2/3} + u^{4/3}}$ converge et vaut $\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 7 :

1) On remarque qu'on peut ajouter le terme $k = 0$ dans la somme :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i} X^k = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i\theta} X)^k 1^{n-k} - \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{-i\theta} X)^k 1^{n-k} = \frac{1}{2i} (1 + e^{i\theta} X)^n - \frac{1}{2i} (1 + e^{-i\theta} X)^n$$

$$2) \text{ Soit } \lambda \in \mathbb{C}. P(\lambda) = 0 \iff \frac{1}{2i} (1 + e^{i\theta} \lambda)^n = \frac{1}{2i} (1 + e^{-i\theta} \lambda)^n \iff \left(\frac{1 + e^{i\theta} \lambda}{1 + e^{-i\theta} \lambda} \right)^n = 1 \text{ et } 1 + e^{-i\theta} \lambda \neq 0$$

Or, on peut vérifier que si $1 + e^{-i\theta} \lambda = 0$, alors $P(\lambda) \neq 0$. En effet, si $1 + e^{-i\theta} \lambda = 0$ alors $\lambda = -e^{i\theta}$ donc $P(\lambda) = \frac{1}{2i} (1 - 2e^{2i\theta})^n = \frac{e^{ni\theta}}{2i} (e^{-i\theta} - e^{i\theta})^n = -e^{ni\theta} \sin^n \theta$. Or $\sin \theta = 0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = k\pi$ donc $\sin(n\theta) = 0$. Puisque $\sin(n\theta) \neq 0$ on en déduit que $\sin \theta \neq 0$ donc que $P(\lambda) \neq 0$.

De plus, dans \mathbb{C} , $z^n = 1 \iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Ainsi, $P(\lambda) = 0 \iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \frac{1 + e^{i\theta} \lambda}{1 + e^{-i\theta} \lambda} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \iff \lambda (e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}) = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \lambda = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}}$.

On vérifie que $e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta} \neq 0$:

$$e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta} = 0 \Rightarrow e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{2i\theta} \Rightarrow e^{2ik\pi} = e^{2in\theta} \Rightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}, 2in\theta = 2ik\pi + 2k'\pi \iff n\theta = (k - k')\pi$$

Or puisque $\sin(n\theta) \neq 0$ on a $n\theta \neq (k - k')\pi$ pour tout $k, k' \in \mathbb{Z}$ donc $e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta} \neq 0$

$$3) \text{ Montrons que } \left(\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}} \right) = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}} :$$

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}} \right)} &= \frac{e^{-\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{-i\theta} - e^{-\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}} \\
&= \frac{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta} - e^{i\theta}} \quad \text{en multipliant par } e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\
&= \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}}
\end{aligned}$$

donc $\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}} \in \mathbb{R}$. Toutes les racines de P sont donc réelles. On peut même aller plus loin :

$$\begin{aligned}
\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}} &= \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}} \left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}} \right)}{e^{\frac{ik\pi}{n}} \left(e^{i\theta} e^{-\frac{ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}} e^{-i\theta} \right)} \\
&= \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{2i} \times \frac{2i}{e^{i(\theta - \frac{k\pi}{n})} - e^{-i(\theta - \frac{k\pi}{n})}} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\theta - \frac{k\pi}{n}\right)}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 8 :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}(n)$: « u_n est bien défini et $u_n > 0$ » et raisonnons par récurrence sur n .

— **Initialisation** : $\mathcal{P}(1)$ est vrai par hypothèse.

— **Hérédité** : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vrai pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\left(\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\right)^2$ est bien défini et positif donc $u_n + \left(\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\right)^2$ est bien défini et supérieur à u_n . Ainsi, u_{n+1} est bien défini et $u_{n+1} \geq u_n > 0$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.

— **Conclusion** : Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$ u_n est bien défini et $u_n > 0$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \left(\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\right)^2 \geq 0$ donc (u_n) est croissante. Il n'y a que deux possibilités, soit (u_n) converge soit elle tend vers $+\infty$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell \geq 1$ car $u_1 \geq 1$ et (u_n) croissante. Alors, par continuité de $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$ sur $]0; +\infty[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\right)^2 = \ln\left(1 + \frac{1}{\ell}\right)^2$.

Par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = u_n + \left(\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\right)^2$ on obtient $\ell = \ell + \ln\left(1 + \frac{1}{\ell}\right)^2$ donc $\ln\left(1 + \frac{1}{\ell}\right) = 0$ donc $1 + \frac{1}{\ell} = 1$ donc $\frac{1}{\ell} = 0$ ce qui n'est pas possible.

On en conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3) Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$. Ainsi, $\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{u_n} + o\left(\frac{1}{u_n}\right)$. On a donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^\beta - u_n^\beta &= \left(u_n + \left(\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\right)^2\right)^\beta - u_n^\beta \\ &= u_n^\beta \left(1 + \frac{1}{u_n} \left(\frac{1}{u_n} + o\left(\frac{1}{u_n}\right)\right)\right)^\beta - u_n^\beta = u_n^\beta \left(1 + \frac{\beta}{u_n^3} + o\left(\frac{1}{u_n^3}\right)\right)^\beta - u_n^\beta \\ &= u_n^\beta + \beta u_n^{\beta-3} - u_n^\beta + o(u_n^{\beta-3}) \\ &= \beta u_n^{\beta-3} + o(u_n^{\beta-3}) \end{aligned}$$

4) Pour $\beta = 3$ on a $u_{n+1}^3 - u_n^3 = \beta + o(1)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}^3 - u_n^3 = 3$.

D'après le théorème de Cesàro :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_{k+1}^3 - u_k^3) = 3$$

Or, $\sum_{k=1}^n u_{k+1}^3 - u_k^3 = u_{n+1}^3 - u_1^3$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}^3 - u_1^3}{n} = 3$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}^3}{n} = 3$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_1^3}{n} = 0$, et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} \frac{u_{n+1}^3}{n} = 3$ et finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}^3}{n+1} = 3$. On en conclut que $u_{n+1} \sim \sqrt[3]{3(n+1)}$ donc $u_n \sim \sqrt[3]{3n}$.

Correction de l'exercice 9 :

1) Montrons que pour tout $x > 0$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ converge.

La fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est continue sur $[0; +\infty[$ si $x \geq 1$, et sur $]0; +\infty[$ si $x < 1$. Dans les deux cas il y a une impropreté en $+\infty$. Or $t^2 e^{-t} t^{x-1} = t^{x+1} e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ donc d'après le critère de Riemann l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ converge, et ce quel que soit la valeur du réel x .

Si $x \geq 1$ alors il n'y a pas d'impropreté en 1

Si $0 < x < 1$, alors $e^{-t} t^{x-1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$. Or $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}} dt$ converge selon le critère de Riemann car $1-x < 1$, donc l'intégrale

$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ converge.

Finalement, on a bien montré que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\Gamma(x)$ converge donc Γ est bien définie sur $]0; +\infty[$.

2) On fait une intégration par partie sur l'intervalle $[\frac{1}{A}; A]$ avec $A > 0$:

$$\begin{aligned}\int_{1/A}^A e^{-t} t^{x-1} dt &= \left[e^{-t} \frac{t^x}{x} \right]_{1/A}^A + \int_{1/A}^A e^{-t} \frac{t^x}{x} dt \\ &= \frac{A^x e^{-A}}{x} - \frac{e^{-1/A} \varepsilon^x}{x} + \frac{1}{x} \int_{1/A}^A e^{-t} t^x dx \\ &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0 + \frac{1}{x} \Gamma(x+1)\end{aligned}$$

Or le membre de gauche de cette égalité tend vers $\Gamma(x)$ lorsque $A \rightarrow +\infty$ d'où l'égalité $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$$3) \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} (1 - e^{-A}) = 1$$

On a donc $\Gamma(0+1) = 1$, or $0! = 1$ donc on a bien $\Gamma(0+1) = 0!$, l'égalité est vraie pour $n = 0$.

Supposons que l'égalité soit vraie pour un entier n quelconque, alors d'après la question précédente $\Gamma(n+2) = \Gamma(n+1+1) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$. L'égalité est vraie pour $n = 0$ et la propriété est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier n par principe de récurrence.

$$4) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$$

Posons $x = \sqrt{t}$, avec $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$ et $dt = 2x dx$. Pour tout $A > 0$ on a

$$\int_0^A \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{\sqrt{A}} \frac{e^{-x^2}}{x} 2x dx = \int_0^A e^{-x^2} dx \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

d'après la valeur admise de l'intégrale de Gauss. Ainsi, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On en déduit que $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$ d'après la question 2.

Correction de l'exercice 10 : Existence : Considérons la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$. Cette fonction est continue sur $[0, 1]$ comme somme de fonctions continues, avec $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car $f(0), f(1) \in [0, 1]$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un réel $c \in [0, 1]$ tel que $g(c) = 0$ donc tel que $f(c) = c$.

Unicité : Supposons qu'il existe $(x, y) \in [0, 1]^2$ tels que $f(x) = x$ et $f(y) = y$. Alors par hypothèse sur f :

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$$

donc $|x - y| \leq c|x - y|$. Si $x \neq y$ on peut diviser de chaque côté par $|x - y|$ et obtenir $1 \leq c$, contradiction.

Correction de l'exercice 11 :

1) Pour tout $x \geq 0$, $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$ donc $f(x) = f(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) \geq f(\sqrt{x})^2 \geq 0$ par hypothèse sur f .

2) On a :

$$\begin{aligned}f(x^{1/n})^n &= \underbrace{f(x^{1/n}) \times \dots \times f(x^{1/n})}_{n \text{ fois}} \\ &\leq \underbrace{f(x^{1/n} \times \dots \times x^{1/n})}_{n \text{ fois}} && \text{par hypothèse sur } f \\ &\leq f(x)\end{aligned}$$

3) Pour tout $x \geq 0$ et tout $n \geq 1$ on a :

$$f(x^{1/n})^n = \exp\left(n \ln(f(x^{1/n}))\right)$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{1/n} = 1$ et f est dérivable en 1 donc admet un développement limité en 1 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} f(1) + f'(1)(x - 1) + o(x - 1)$$

d'où

$$f(x^{1/n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} f(1) + f'(1)(x^{1/n} - 1) + o(x^{1/n} - 1) = 1 + f'(1)(x^{1/n} - 1) + o(x^{1/n} - 1)$$

par composition avec \ln , et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(1)(x^{1/n} - 1) = 0$ on a :

$$\ln(f(x^{1/n})) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} f'(1)(x^{1/n} - 1) + o(x^{1/n} - 1)$$

De plus, $n(x^{1/n} - 1) = n(e^{\ln(x)/n} - 1) \sim \ln(x)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(f(x^{1/n})) = f'(1) \ln(x)$ et finalement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x^{1/n})^n = \exp(f'(1) \ln(x)) = x^{f'(1)}$$

Par passage à la limite dans l'inégalité précédente on en déduit donc :

$$\forall x \geq 0, \forall n \geq 1, \quad f(x) \geq x^{f'(1)}$$

- 4) Si $p < 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p = +\infty$ donc par comparaison $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. Or f est dérivable sur \mathbb{R}_+ donc continue en 0 et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \in \mathbb{R}$, contradiction. On en conclut que $p \geq 0$
- 5) Montrons que le résultat est vrai si $x > 0$ en raisonnant par l'absurde : supposons qu'il existe un réel $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) > x_0^p$.

D'après la question 3) $f\left(\frac{1}{x_0}\right) \geq \frac{1}{x_0^p}$ donc par produit d'inégalités :

$$1 = f(1) \geq f(x_0)f\left(\frac{1}{x_0}\right) > x_0^p \times \frac{1}{x_0^p} > 1$$

contradiction. On en déduit donc que pour tout $x > 0$, $f(x) = x^p$, et par continuité de f on a donc $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x^p = 0$ si $p \neq 0$, et $\lim_{x \rightarrow 0} x^p = 1$ si $p = 0$. Dans tous les cas, $f(x) = x^p$ pour tout $x \geq 0$.

Correction de l'exercice 12 : L'intégrale a 3 impropriétés : en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$ Pour tout réel t on a par inégalité triangulaire : $|1 - \cos(at)| \leq 1 + |\cos(at)| \leq 2$.

Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{1 - \cos(at)}{t^2} \right| \leq \frac{2}{t^2}$$

et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge donc par comparaison d'intégrales positives $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos(at)}{t^2} dt$ converge absolument donc converge.

Par parité de $t \mapsto \frac{1 - \cos(at)}{t^2}$ on en déduit que $\int_{-\infty}^1 \frac{1 - \cos(at)}{t^2} dt$ converge aussi.

Au voisinage de 0 on a $1 - \cos(at) = 1 - (1 - \frac{a^2 t^2}{2}) + o(t^2)$ donc

$$\frac{1 - \cos(at)}{t^2} = \frac{a^2}{2} + o(1)$$

donc $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(at)}{t^2} = \frac{a^2}{2}$. La fonction peut se prolonger par continuité en 0 donc elle est faussement impropre en 0.

Finalement, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(at)}{t^2} dt$ converge bien.

Posons le changement de variable $u = at$, $du = a dt$. Pour tous réels A et B on a :

$$\begin{aligned} \int_A^B \frac{1 - \cos(at)}{t^2} dt &= \int_{aA}^{aB} \frac{1 - \cos(u)}{(u/a)^2} \frac{du}{a} \\ &= \int_{aA}^{aB} a \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du \\ &= a \int_{aA}^{aB} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du \end{aligned}$$

si $a > 0$ on obtient lorsque A tend vers $-\infty$ et B tend vers $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(at)}{t^2} dt = a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du$$

et si $a < 0$ on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(at)}{t^2} = a \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du = -a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du$$

donc dans tous les cas, en posant $c = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du$ on a bien :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(at)}{t^2} dt = c|a|$$