⋆

Exercice 1

Étudier l'existence d'extrema locaux des fonctions suivantes en vous ramenant à l'étude d'une fonction quadratique :

1) $f(x, y) = x^2 - y^2 + 3xy$
2) $f(x, y) = 3(x + y)^2 - 4xy + 2$
3) $f(x, y) = 2(x - 1)^2 + 3(y - x)^2$
4) $f(x, y) = x^2 + 3x + 2 + 2y^2 - 2y + 1 + xy$

⋆

Exercice 2

Déterminer les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes après avoir précisé leur ensemble de définition

1) $f(x, y) = \mathrm{e}^{(x-y)^2} + y^2$
2) $f(x, y) = \sin\left(\pi\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\right)$
3) $f(x, y) = \ln(x)^2 + (x - 1)^2 + y^2$

⋆ ⋆

Exercice 3

(Oral ENS 2016) Pour toute fonction $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ (avec $k \geq 1$), on appelle maximiseur de g, quand il en existe, tout point $x_0 \in \mathbb{R}^k$ tel que $g(x_0) \geq \sup_{x\in\mathbb{R}^k} g(x)$. On dit aussi que x_0 maximise g.
On considère la fonction

$$F(m, s) = \frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-\frac{m^2+(m-2)^2}{2s}}$$

1) Donner le domaine de définition D de F
2) Montrer qu'un point (m_0, s_0) maximise F si et seulement s'il maximise aussi $\ln(F)$.
3) Déterminer les dérivées partielles $\dfrac{\partial \ln(F)}{\partial m}(m, s)$ et $\dfrac{\partial \ln(F)}{\partial s}(m, s)$.
4) Montrer que, quelle que soit la valeur de $s \in \mathbb{R}_+^*$, $m_0 = 1$ est l'unique maximiseur de la fonction $m \mapsto F(m, s)$.
5) Montrer que la fonction $s \mapsto F(m_0, s)$ admet un unique maximiseur s_0 et calculer s_0.
6) Montrer que pour tout $(m, s) \in D$,

$$(m, s) \neq (m_0, s_0) \Longrightarrow F(m, s) < F(m_0, s_0)$$

⋆ ⋆

Exercice 4

En microéconomie, une fonction de production f est une fonction qui exprime une relation entre les facteurs de production et la quantité produite Q. Si on prend seulement en compte les deux facteurs de production que sont le capital (K) et le travail (L), on a $Q = f(K, L)$ où f est une fonction réelle de deux variables réelles à définir.

— On dit que les **rendements d'échelle** sont
  - croissants si pour tout réel $\lambda > 0$, $f(\lambda K, \lambda L) > \lambda f(K, L)$
  - décroissants si pour tout réel $\lambda > 0$, $f(\lambda K, \lambda L) < \lambda f(K, L)$
  - constants si pour tout réel $\lambda > 0, f(\lambda K, \lambda L) = \lambda f(K, L)$

— La **productivité marginale** de chaque facteur est la dérivée partielle de f par rapport à ce facteur.

Dans cet exercice, on s'intéresse à une **fonction de Cobb-Douglas**, c'est-à-dire une fonction de production la forme $f(K, L) = cK^\alpha L^\beta$ où $c, \alpha, \beta > 0$ sont des paramètres qui dépendent du contexte.

1) Déterminer une relation entre $\alpha + \beta$ et le type de rendement d'échelle.
2) Exprimer les productivités marginales du capital et du travail en fonction de c, K, L, α et β.
3) Dans cette question on suppose que les rendements d'échelle sont constants.
   a) Montrer que l'augmentation de l'utilisation d'un facteur fait diminuer sa productivité marginale (c'est la **loi des rendements décroissants**)
   b) Montrer que l'augmentation de l'utilisation d'un facteur fait augmenter la productivité marginale **de l'autre facteur**

⋆ ⋆
Exercice 5

(Oral ENSAE 2013) Soit la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) = (x^2+y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$$

1) Soit α une constante, à quoi ressemble l'ensemble $\{(x,y)$ tels que $F(x,y)=\alpha\,\}$?
2) En quels points de $\mathbb{R}^2$ la fonction F est-elle maximale ?

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 6

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^4+y^4-2(x-y)^2$.

1) Montrer que f a trois points critiques, et que deux d'entre eux sont des minimums locaux.
2) Montrer que le point $(0,0)$ n'est pas un extremum local.
3) Montrer que les deux autres points critiques sont des extremums globaux.
   Indice : développer $(x^2-2)^2+(y^2-2)^2+2(x+y)^2$

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 7

(Oral ENS 2019) On considère la fonction suivante

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^2(1+y)^3+y^2$$

1) Calculer les dérivées partielles de f à l'ordre 1.
2) Montrer que $(0;0)$ est l'unique point critique de f
3) Montrer que $(0;0)$ est un extremum local de f et en déterminer la nature
4) Montrer que $(0;0)$ n'est pas un extremum global pour f
5) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui admet un unique extremum local. Montrer que cet extremum est global.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f : (x_1,x_2) \longmapsto (3x_1+4x_2)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}$$

Déterminer les extremums locaux de f.

Le coin des Khûbes

⋆
Exercice 9

On considère la fonction g définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = \mathrm{e}^x(x+y^2+\mathrm{e}^x)$$

Montrer que g admet un unique extremum local et déterminer si c'est un extremum global.

⋆
Exercice 10

On s'intéresse au problème suivant : étant donné une variable aléatoire X suivant une loi de probabilité dépendant d'un ou plusieurs paramètres, on cherche une estimation de ces paramètres à partir de l'observation empirique d'un échantillon issu de cette loi.
Pour une loi dont le paramètre est θ

— On pose $f(x,\theta) = \mathbb{P}(X=x)$ si X suit une loi discrète
— On pose $f(x,\theta) = f(x)$ où f est la densité de la loi si X suit une loi continue.

On appelle **vraisemblance de** θ au vu des observations $(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$ la fonction $\mathcal{L}$ suivante :

$$\mathcal{L}(x_1,...,x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$$

Par exemple, si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p inconnu, on a $f(1,p) = \mathbb{P}(X = 1) = p$ et $f(0,p) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$, et donc :

$$\mathcal{L}(x_1, ..., x_n, p) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$$

où $(x_1, ..., x_n) \in \{0,1\}^n$ sont n observations de X.
On appelle **maximum de vraisemblance** la valeurs du (ou des) paramètre(s) qui maximise $\mathcal{L}$.

1) Montrer que $\mathcal{L}(x_1, ..., x_n, \theta)$ est un maximum de $\mathcal{L}$ si et seulement si $\ln \mathcal{L}(x_1, ..., x_n, \theta)$ est un maximum de $\ln \mathcal{L}$. On dit que $\ln \mathcal{L}$ est la log-vraisemblance.
2) Déterminer la valeur de p qui maximise $\ln(\mathcal{L}(x_1, ..., x_n, p)$ si X suit une loi de Bernoulli.
3) Montrer que si X suit une loi normale d'espérance μ et de variance $v = \sigma^2$, la log-vraisemblance est

$$\ln \mathcal{L}(x_1, ..., x_n, \mu, v) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi v) - \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

puis montrer que le maximum est atteint pour $\mu = \overline{x}$ et $v = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ avec $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.