Exercice 1

Dans chaque cas, montrer que f est continue sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ et déterminer si la fonction f est $\mathcal{C}^1$ ou non sur $\mathcal{D}_f$.

a) $f(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad \mathcal{D}_f = [0, +\infty[$

b) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \mathrm{e}^{1/x} & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

d) $f(x) = |x| \ln(1+x), \quad \mathcal{D}_f =]-1; +\infty[$.

Exercice 2

Dans chaque cas déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a à l'aide d'une dérivée connue :

a) $f(x) = \dfrac{3 - \sqrt{9-4x}}{x}, \quad a = 0$

b) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}, \quad a = \dfrac{\pi}{2}$

c) $f(x) = \dfrac{2^x - 4}{x - 2}, \quad a = 2$

d) $f(x) = \dfrac{x-1}{8\arctan(x) - 2\pi}, \quad a = 1$

Exercice 3

Dans chaque cas déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a à l'aide d'un développement limité :

a) $f(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{3x}}{2x}, \quad a = 0$

b) $f(x) = \dfrac{3 - \sqrt{9-4x}}{x}, \quad a = 0$

c) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}, \quad a = \dfrac{\pi}{2}$

d) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{3x - 3}, \quad a = 1$

e) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - \cos(x)}{\sin(3x)}, a = 0$

f) $f(x) = \left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^x, a = +\infty$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1} - 2x$. À l'aide d'un développement limité, montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = 2\sqrt{x^2+3x} - 3\sqrt[3]{x^3 - 4x^2} + \sqrt[4]{x^4 + 5x^3}$$

Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$ on a $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{-1/x} P_n(1/x)$ où P_n est un polynôme de degré $2n$.
2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

★ ★
Exercice 7

Le but de cet exercice est de généraliser le théorème de Rolle : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f'(c) = 0$.

★ ★
Exercice 8

En utilisant le théorème de Rolle, montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ qu'un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines distinctes.

★
Exercice 9

Déterminer dans chaque cas un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

1) $u_n = \sqrt{n^4 + 5n + 2} - n^2$
2) $u_n = \ln(n^2 + 1) - 2\ln(n + 5)$
3) $u_n = \mathrm{e}^{1/n} - \sqrt{1 + 1/3n}$

★ ★ ★
Exercice 10

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$ **(Formule de Leibniz)**
2) **Application :** soient a et b deux réels. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x - a)^n (x - b)^n$.
   a) Calculer $\varphi^{(n)}(x)$
   b) En considérant le cas $a = b$, en déduire $\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$.
   Rappel : on note $C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

★
Exercice 11

À l'aide du théorème des accroissements finis, démontrer les inégalités suivantes :

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \geq 1 + x$

b) $\forall x \in]-1; +\infty[, \quad \ln(1 + x) \leq x$

c) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\sin y - \sin x| \leq |y - x|$

★ ★
Exercice 12

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}$.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 2]$ par $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$.

1) Étudier les variations de f et montrer que pour tout $x \in [1; 2]$ on a $f(x) \in [1; 2]$.
2) Montrer que la suite (u_n) est bien définie et à valeurs dans $[1; 2]$.
3) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et déterminer le maximum de $|f'(x)|$ sur $[1; 2]$.
4) En déduire qu'il existe un réel $r \in [0; 1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq r^n |u_1 - u_0|$.
5) Montrer que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge puis en déduire que la suite (u_n) converge.
6) Déterminer la limite de (u_n).

⋆ ⋆

Exercice 13

Le but de cet exercice est de généraliser le résultat de l'exercice précédent.
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $[a;b]$ telle que

- $\forall x \in [a;b]$ on a $f(x) \in [a;b]$.
- Il existe un réel $r \in [0;1[$ tel que $\forall x \in [a;b]$, $|f'(x)| \leq r$

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in [a;b]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Montrer que f admet un unique point fixe, c'est à dire un unique réel $\ell \in [a;b]$ tel que $f(\ell) = \ell$.
2) Montrer par récurrence que (u_n) est bien définie et à valeurs dans $[a;b]$.
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq r|u_n - \ell|$
4) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq r^n|u_0 - \ell|$.
5) En déduire que (u_n) converge vers ℓ.

⋆ ⋆

Exercice 14

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x\,\mathrm{e}^{-x}$.

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0;+\infty[$.
2) Montrer que l'intervalle $I = [1;+\infty[$ est stable par f.
3) Montrer que pour tout $x \in [0;+\infty[$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$
4) Prouver qu'il existe un unique réel $\alpha \in [1;+\infty[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
5) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$.
6) En déduire la limite de la suite (u_n).