⋆

Exercice 1 — Voir correction

(Oral ENS) On se donne un dé à 4 faces, numérotées 1, 2, 3 et 4. Ce dé n'est pas forcément équilibré : chaque face $i \in \{1,2,3,4\}$ a une certaine probabilité notée $a_i > 0$ d'être tirée. On modélise cela par $\Omega = \{1,2,3,4\}$ et $\mathbb{P}$ la probabilité associée. On s'intéressera aux événements $A = \{1,3\}$ et $B = \{1,2\}$.
On introduit les vecteurs $x = (\sqrt{a_1}, 0, \sqrt{a_3}, 0)$ et $y = (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, 0, 0)$. On considère D la droite de $\mathbb{R}^4$ engendrée par le vecteur $z = \left(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}, \sqrt{a_4}\right)$. Enfin, on note π la projection orthogonale sur D.

1) Exprimer la probabilité conditionnelle d'avoir A sachant l'événement B en fonction de (a_1, a_2, a_3, a_4).
2) Combien vaut la norme du vecteur z ? Autrement dit calculer $\|z\|$.
3) Calculer $\pi(x)$ et $\pi(y)$. On exprimera les résultats en fonction des coefficients a_i et de z.
4) Montrer que les événements A et B sont indépendants si et seulement si les vecteurs $x - \pi(x)$ et $y - \pi(y)$ sont orthogonaux.

⋆

Exercice 2 — Voir correction

Soit $n \geq 1$ un entier. On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{array}$$

Dans cet exercice, si $X \in \mathbb{R}^n$ et $Y \in \mathbb{R}^n$, on notera $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

1) a) Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a $\phi(X,X) \geq 0$.
   b) Trouver toutes les valeurs de $X \in \mathbb{R}^n$ telles que $\phi(X,X) = 0$.
   c) Soit $X \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $\phi(X,Y) = 0$ pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $X = 0$ (où 0 est le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$).
2) On fixe $X \in \mathbb{R}^n$ et on considère la fonction

$$\psi_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ Y & \longmapsto & \phi(X,Y) \end{array}$$

   a) Montrer que ψ_X est une application linéaire.
   b) Quels sont le rang et la dimension du noyau de ψ_X ? Justifier.
   c) On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ définie par $f(X) = \psi_X$ est un isomorphisme d'espace vectoriels

⋆ ⋆

Exercice 3 — Voir correction

(Oral ENS) On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et un vecteur de coordonnées $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) Donner le rang de A et déterminer une base de son noyau.
2) L'équation $AX = B$ admet-elle une solution ?

On note u l'endomorphisme associé à la matrice A et $b \in \mathbb{R}^3$ le vecteur de coordonnées B dans la base canonique. En notant $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$, on définit l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|u(x) - b\|^2 \end{array}$$

3) Montrer que l'application f admet un minimum. Y a-t-il un unique minimiseur ?
4) Montrer que x minimise f si et seulement si $(b - u(x)) \in \mathrm{Im}(u)^\perp$
5) En déduire que x minimise f si et seulement si ses coordonnées $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifient $A^T AX = A^T B$
6) Calculer l'ensemble des minimiseurs de f, dont les coordonnées sont appelées *pseudo-solutions* de l'équation $AX = B$.

⋆⋆⋆

Exercice 4 **Voir correction**

(Oral ENS) Alice et Bob jouent à pierre-feuille-ciseau. Chacun choisit l'un des trois signes de façon cachée puis les signes sont révélés. Si les signes révélés sont feuille-ciseaux, la personne ayant choisi les ciseaux a un score de 3 points et l'autre un score (négatif) de -3 points. En cas de duel pierre-ciseaux, la personne ayant choisi la pierre a un score de 2 points et l'autre -2 points. Lors d'un duel pierre-feuille, la personne ayant choisi la feuille a 1 point et l'autre -1 points. Enfin, si Alice et Bob choisissent le même signe, chacun marque 0 point.
On se donne p, f et c trois réels dans $[0,1]$ tels que $p+f+c=1$. La stratégie d'Alice consiste à choisir la pierre avec probabilité p, la feuille avec probabilité f et les ciseaux avec probabilité c. De même, on se donne p', f' et c' trois réels dans $[0,1]$ tels que $p'+f'+c'=1$ et la stratégie de Bob consiste à choisir la pierre avec probabilité p', la feuille avec probabilité f' et les ciseaux avec probabilité c'. Ces choix sont effectués de façon indépendants. Enfin, on introduit la matrice et le vecteurs suivants :

$$M=\begin{pmatrix}0&1&-2\\-1&0&3\\2&-3&0\end{pmatrix}\qquad v=\begin{pmatrix}p\\f\\c\end{pmatrix}\qquad v'=\begin{pmatrix}p'\\f'\\c'\end{pmatrix}$$

1) Exprimer le produit scalaire de v' et de Mv en fonction de p,f,c,p',f',c'.
2) Calculer l'espérance du score d'Alice et montrer qu'elle est égale au produit scalaire de v' et Mv.
3) Trouver une base du noyau de M
4) Démontrer qu'il existe une unique stratégie (p,f,c) pour Alice qui est telle que l'espérance de son score soit nulle quelle que soit la stratégie (p',f',c') de Bob. Déterminer cette stratégie.
5) Si Alice applique une stratégie autre que celle de la question précédente, montrer qu'il existe une stratégie pour Bob telle que l'espérance du score d'Alice soit strictement négative et qu'il existe une stratégie pour Bob telle que l'espérance du score d'Alice soit strictement positive.

⋆⋆

Exercice 5 **Voir correction**

(Oral ENS) Soit n un entier non nul et $E=\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel.
Soit p un entier non nul et $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de vecteur de E telle qu'il existe deux réels A et B strictement positifs vérifiant

$$\forall x\in E,\quad A||x||^2\leq\sum_{i=1}^{p}\langle x,e_i\rangle^2\leq B||x||^2$$

1) Soit $F=\text{Vect}\,(e_1,...,e_p)$. Montrer que $F=E$.
2) Montrer que si $A=B=1$, et si tous les vecteurs e_i sont de norme égale à 1, alors la famille $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ est une base orthonormée de E.

⋆⋆⋆

Exercice 6 **Voir correction**

(Oral ENS) Dans cet exercice, $\langle x,y\rangle$ désigne le produit scalaire entre deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^d$ et $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne associée. Pour tout ensemble $\mathcal{E}=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ de n vecteurs de $\mathbb{R}^d$, on définit l'inertie de $\mathcal{E}$ comme la moyenne des distances au carrés des vecteurs de $\mathcal{E}$ à leur barycentre :

$$\mathcal{I}(\mathcal{E})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|x_i-\overline{x}\,(\mathcal{E})\|^2\,,$$

où $\overline{x}\,(\mathcal{E})=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$.
Dans la suite de l'exercice, on fixe un ensemble $\mathcal{E}$ de n vecteurs vérifiant $\sum_{i=1}^n x_i=0$. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^d$ tel que $\|u\|=1$. $p_u:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ désigne la projection orthogonale sur la droite vectorielle engendrée par u.

1) Montrer que $p_u(x)=\langle x,u\rangle u$.
2) Calculer l'inertie de l'ensemble $\mathcal{F}_u=\{p_u(x_1),...,p_u(x_n)\}$ obtenu par projection des vecteurs de $\mathcal{E}$ sur $\text{Vect}\,(u)$. Montrer qu'il existe un endomorphisme f de $\mathbb{R}^d$ que l'on précisera tel que $\mathcal{I}\,(\mathcal{F}_u)=\langle u,f(u)\rangle$.
3) On admet que l'endomorphisme f admet une base orthonormée de vecteurs propres. Montrer que $\max\limits_{u\in\mathbb{R}^d,\|u\|=1}\mathcal{I}\,(\mathcal{F}_u)=\lambda_{\max}$ où $\lambda_{\max}$ désigne la plus grande valeur propre de f. Pour quel vecteur u ce maximum est-il atteint ?

Le coin des khûbes

⋆⋆

Exercice 7 — **Voir correction**

Soit n un entier naturel avec $n \geq 3$. On note $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qu'on assimile à $\mathbb{R}^n$. Soient A et B deux éléments de E non nuls et non colinéaires. On pose :

$$M = A\,{}^tB + B\,{}^tA$$

1) Déterminer le rang de M ainsi que son noyau.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M et $E_1 = \mathrm{Vect}\,(A, B)$.

2) a) Montrer que la restriction de f à E_1 induit un endomorphisme de E_1 noté φ.
   b) Donner la matrice de φ dans la base (A, B) de E_1.
3) a) Déterminer les valeurs propres de φ
   b) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
4) a) En déduire que f est diagonalisable.

⋆⋆

Exercice 8 — **Voir correction**

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie la condition suivante :

$$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2,\ \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$$

1) Établir que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \langle f(x), x\rangle = 0$$
2) On admet que tout endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ admet au moins une valeur propre réelle. Montrer, en utilisant l'égalité obtenue à la question précédente, que 0 est la seule valeur propre réelle de f.
3) Dans la suite, on se propose de montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$
   Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.
4) Résoudre le problème posé si $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3$.
5) On suppose que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$.
   a) Montrer que l'on peut trouver une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, où $e_1 \in \mathrm{Im}(f)$ et où (e_2, e_3) est une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(f)$.
   b) Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :
   $$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   c) Vérifier que $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f puis montrer que b et c sont nuls.
   d) En considérant le réel $\langle f(e_1), e_1\rangle$, donner la valeur de α. Que dire de l'hypothèse $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$?
6) On suppose que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.
   a) Montrer que l'on peut trouver une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, où (e_1, e_2) est une base orthonormale de $\mathrm{Im}(f)$ et où $e_3 \in \mathrm{Ker}(f)$.
   b) Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :
   $$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   c) Montrer que a et d sont nuls et que $c = -b$.
   d) Conclure.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(\{1\}}{\mathbb{P}(\{1,2\}} = \dfrac{a_1}{a_1+a_2}$.
2) $\|z\| = \sum_{k=1}^4 (\sqrt{a_k})^2 = \sum_{k=1}^4 a_k = 1$.
3) (z) est une base orthonormée de D donc $\forall u \in \mathbb{R}^4, \pi(u) = \langle u, z\rangle z$.
   On en déduit que $\pi(x) = (\sqrt{a_1}^2 + \sqrt{a_3}^2)z = (a_1+a_3)z$ et $\pi(y) = (\sqrt{a_1}^2 + \sqrt{a_2}^2)z = (a_1+a_2)z$.
4) A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, si et seulement si $\dfrac{a_1}{a_1+a_2} = a_1+a_3$, si et seulement si $a_1 = (a_1+a_3)(a_1+a_2)$

$$\begin{aligned}
x-\pi(x) \text{ et } y-\pi(y) \text{ sont orthgonauxsi et seulement si } & \langle x-\pi(x), y-\pi(y)\rangle = 0\\
\text{si et seulement si } & \langle x,y\rangle - \langle pi(x), y\rangle - \langle x, \pi(y)\rangle + \langle \pi(x), \pi(y)\rangle = 0\\
\text{si et seulement si } & a_1 - (a_1+a_3)\langle z,y\rangle - (a_1+a_2)\langle x,z\rangle + \langle (a_1+a_2)(a_1+a_3)\langle z,z\rangle = 0\\
\text{si et seulement si } & a_1 - (a_1+a_3)(a_1+a_2) - (a_1+a_2)(a_1+a_3) + (a_1+a_2)(a_1+a_3) = 0\\
\text{si et seulement si } & a_1 = (a_1+a_3)(a_1+a_2)
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 :

1) a) $\phi(X,X) =^t XX = \|X\|^2 \geq 0$. Démonstration : $\|X\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$.
   b) Si $\phi(X,X) = 0$ alors $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$. Une somme de termes positifs est nulle si et seulement si chacun des termes est nul, donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i^2 = 0$ donc $x_i = 0$. On en déduit que $X = 0$. Réciproquement, si $X = 0$ on a bien $\phi(X,X) = 0$, c'est donc la seule valeur de X pour laquelle on a cette égalité.
   c) Si $\phi(X,Y) = 0$ pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$, alors en particulier $\phi(X,X) = 0$ donc $X = 0$
2) a) Soient $(Y,Z) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. $\psi_X(\lambda Y + \mu Z) = \phi(X, \lambda Y + \mu Z) = \sum_{i=1}^n x_i(\lambda y_i + \mu z_i) = \lambda \sum_{i=1}^n x_i z_i + \mu \sum_{i=1}^n x_i z_i = \lambda\phi(X,Y) + \mu\phi(X,Z) = \lambda\psi_X(Y) + \mu\psi_X(Z)$.
   Ainsi, ψ_X est bien une application linéaire.
   b) Si $X \neq 0$, $\psi_X(X) = \phi(X,X) \neq 0$, donc $\mathrm{Im}(\psi_X)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$, c'est donc que $\mathrm{Im}(\psi_X) = \mathbb{R}$. On en conclut que $\mathrm{rg}(\psi_X) = 1$ et donc que $\dim(\mathrm{Ker}(\psi_X)) = n-1$.
   Si $X = 0$, alors $\forall Y \in \mathbb{R}^n$, $\psi_X(Y) = \phi(0,Y) = 0$ donc $\mathrm{rg}(\psi_X) = 0$ et $\dim(\mathrm{Ker}(\psi_X)) = n$.
   c) On a $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ et $\dim(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, R) = n \times 1 = n$. Il suffit donc de montrer que f est injective : soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(X) = 0$, c'est à dire telle que $\psi_X = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,R)}$. Alors $\forall Y \in \mathbb{R}^n$, $\psi_X(Y) = 0$, donc $X = 0$ d'après la question 1.c). On en conclut que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ donc que f est injective donc bijective. f est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 3 :

1) $A \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. A est équivalente à une matrice échelonnée de rang 2 donc $\mathrm{rg}(A) = 2$.
   Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a $X \in \mathrm{Ker}(A) \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 0 \\ y-z & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & z \\ x & = & 0 \end{array}\right. \iff (x,y,z) = (0,z,z) \iff (x,y,z) = z(0,1,1)$.
   On en déduit que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left((0,1,1)\right)$.
2) En notant toujours $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on a $AX = B \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 1 \\ y-z & = & 1 \\ x & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -y+z & = & 0 \\ y-z & = & 1 \\ x & = & 1 \end{array}\right.$ or ce système n'a pas de solutions (les deux premières lignes sont clairement incompatibles), donc l'équation $AX = B$ n'admet pas de solution.
3) Notons y le projeté orthogonal de b sur $\mathrm{Im}(u)$. y est le vecteur de $\mathrm{Im}(u)$ qui minimise la valeur de $\|y-b\|^2$ d'après le cours. Démonstration : si $y' \in \mathrm{Im}(u)$, alors

$$\begin{aligned}
\|y'-b\|^2 &= \|y'-y+y-b\|^2\\
&= \|y'-y\|^2 + \|y-b\|^2
\end{aligned}$$

d'après le théorème de Pythagore car $y-b \in \mathrm{Im}(u)^\perp$ par définition du projeté orthogonal, et $y'-y \in \mathrm{Im}(u)$ car $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
On en conclut que $\|y'-b\|^2 \geq \|y-b\|^2$ car $\|y'-y\|^2 \geq 0$, y est donc bien le vecteur de $\mathrm{Im}(u)$ qui minimise la valeur de $\|y-b\|^2$.
Tout vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $u(x)=y$ minimise donc f. Il existe une infinité de vecteurs vérifiant cette inégalité car $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$, en effet $\forall x' \in \mathbb{R}^3$, $u(x')=y \iff u(x')=u(x) \iff u(x'-x)=0 \iff x'-x \in \mathrm{Ker}(f)$. Il suffit de prendre $x'=x+v$ avec $v \in \mathrm{Ker}(f)$ et $v \neq 0$ pour obtenir un autre vecteur qui minimise f.

4) Si $(b-u(x) \in \mathrm{Im}(u)^\perp$, alors $b = \underbrace{b-u(x)}_{\in \mathrm{Im}(u)^\perp} + \underbrace{u(x)}_{\in \mathrm{Im}(u)}$ donc $u(x)$ est le projeté orthogonal de b sur $\mathrm{Im}(u)$, donc x minimise f d'après la question précédente.
Réciproquement, supposons que x minimise f. Alors pour tout $y \in \mathbb{R}^3$, la fonction $g : t \mapsto \|u(x+ty)-b\|^2$ atteint son minimum en $t=0$
Or,

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) &= \|u(x)+tu(y)-b\|^2 \\ &= \|u(x)\|^2 + t^2\|u(y)|^2 + \|b\|^2 + 2t\langle u(x),u(y)\rangle - 2\langle u(x),b\rangle - 2t\langle u(y),b\rangle\end{aligned}$$

donc g est un polynôme de degré 2 en t, g est dérivable et

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) &= 2t\|u(y)\|^2 + 2(\langle u(x),u(y)\rangle - \langle u(y),b\rangle) \\ &= 2t\|u(y)\|^2 + 2\langle u(y),u(x)-b\rangle\end{aligned}$$

Or g atteint son minimum en $t=0$ donc $g'(0)=0$ donc $\langle u(y),u(x)-b\rangle = 0$.
On en déduit que $\forall y \in \mathbb{R}^3, \langle u(y),u(x)-b\rangle = 0$ donc $u(x)-b \in \mathrm{Im}(u)^\perp$.

5) x minimise f si et seulement si $(b-u(x)) \in \mathrm{Im}(u)^\perp$, si et seulement si $\forall x' \in \mathbb{R}^3, \langle u(x)-b, u(x')\rangle = 0$, si et seulement si $\forall X' \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ (AX')^T(AX-B)=0$, s et seulement si $\forall X' \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ X'^T A^T(AX-B)=0$, si et seulement si $A^T(AX-B)=0$ si et seulement si $A^TAX = A^TB$ (car le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs est le vecteur nul).

6) $A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $A^TB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ est une pseudo-solution } &\iff A^TAX = A^TB \\
&\iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+z &=& 2 \\ -x+2y-2z &=& 0 \\ x-2y+2z &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+z &=& 2 \\ -x+2y-2z &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array}\right. \qquad \text{en faisant } L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+z &=& 2 \\ 3x &=& 4 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} z &=& 2-\dfrac{8}{3}+y \\ x &=& \dfrac{4}{3} \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} z &=& y-\dfrac{2}{3} \\ x &=& \dfrac{4}{3} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

donc l'ensemble des pseudo-solutions est $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ y \\ y-\frac{2}{3} \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$.

Correction de l'exercice 4 :

1) ${}^t v' M v = \begin{pmatrix} p' & f' & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f-2c \\ -p+3c \\ 2p-3f \end{pmatrix} = p'(f-2c) + f'(-p+3c) + c'(2p-3f) = p'f - 2p'c - f'p + 3f'c + 2c'p - 3c'f.$

2) Notons X le score d'Alice. $X(\Omega) = \{0, -3, 3, -2, 2, -1, 1\}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) \\
&= -3\mathbb{P}(X=-3) + 3\mathbb{P}(X=3) - 2\mathbb{P}(X=-2) + 2\mathbb{P}(X=2) - \mathbb{P}(X=-1) + \mathbb{P}(X=1) \\
&= -3c'f + 3cf' - 2p'c + 2pc' - f'p + p'f \qquad \text{car les choix d'Alice et Bob sont} \\
&= {}^t v' M v
\end{aligned}$$

3) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On voit facilement que M est de rang 2 donc son noyau est de dimension 1 d'après le théorème du rang.

$$\begin{aligned}
X \in \mathrm{Ker}(M) &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y-2z &=& 0 \\ -x+3z &=& 0 \\ 2x-3y &=& 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x+3z &=& 0 \\ y-2z &=& 0 \\ -3y+6z &=& 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 3z \\ y &=& 2z \\ 0 &=& 0 \end{array} \right. \\
&\iff X = z \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathrm{Ker}(M)$

4) Pour avoir ${}^t v' M v_0 = 0$ pour tout $v' \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il faut et il suffit que $Mv_0 = 0$ (le seul vecteur orthogonal à tous les autres est le vecteur nul).
Ainsi, l'espérance d'Alice est nulle quelle que soit la stratégie de Bob si et seulement si $v_0 \in \mathrm{Ker}(M)$, si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $v_0 = \begin{pmatrix} 3\lambda \\ 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$.
La condition $p + f + c = 1$ impose que $6\lambda = 1$ donc $\lambda = \dfrac{1}{6}$. La seule stratégie pour Alice telle que l'espérance de son score soit nulle quelle que soit la stratégie de Bob est donc $v_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

5) Soit v une stratégie d'Alice différente de la précédente, c'est à dire telle que $Mv \neq 0$. On note encore v_0 la stratégie de la question précédente, telle que $Mv_0 = 0$. On remarque que M étant antisymétrique, on a aussi ${}^t v_0 M = -{}^t v_0 {}^t M = -{}^t (Mv_0) = 0$.
Posons $v_1'' = v_0 + \varepsilon Mv$ et $v_2'' = v_0 - \varepsilon Mv$ en prenant $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que les trois coordonnées de v_1'' et v_2'' soient strictement positives (c'est possible car les trois coordonnées de v_0 sont strictement positives et les coordonnées de Mv sont trois réels fixés)
On a alors

$$ {}^t v_1'' M v = {}^t v_0 M v + \varepsilon^t v^t M M v = \varepsilon^t (Mv) M v = \varepsilon \|Mv\|^2 $$

et

$$ {}^t v_2'' M v = {}^t v_0 M v - \varepsilon^t v^t M M v = -\varepsilon^t (Mv) M v = -\varepsilon \|Mv\|^2 $$

Or $Mv \neq 0$ donc $\|Mv\|^2 > 0$ et ainsi $\langle v_1'', Mv \rangle > 0$ et $\langle v_2'', Mv \rangle < 0$.
On pose enfin $v_1' = \dfrac{v_1''}{\sigma(v_1'')}$ et $v_2' = \dfrac{v_2''}{\sigma(v_2'')}$ où $\sigma(u)$ désigne la somme des coordonnées de u, de sorte que les coordonnées de v_1' et v_2' soient des nombres positifs dont la somme fait 1. Les stratégies v_1' et v_2' vérifient alors les conditions demandées.

Correction de l'exercice 5 :

1) F est un sous espace vectoriel de E, montrons que $F^\perp = \{0\}$. Soit $x \in F^\perp$, alors $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\langle x, e_i \rangle = 0$. D'après l'hypothèse, on en déduit que :

$$ A\|x\|^2 \leq \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle^2 $$

donc $A\|x\|^2 \leq 0$ et ainsi $\|x\| = 0$ car A est un réel strictement positif. On en conclut que $x = 0$, donc $F^\perp = \{0\}$. Puisque $F \oplus F^\perp = E$ on en conclut que $F = E$.

2) Si $A = B = 1$, alors pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ on a

$$ \|e_k\|^2 \leq \sum_{i=1}^{p} \langle e_k, e_i \rangle^2 \leq \|e_k\|^2 $$

donc

$$ 1 \leq \langle e_k, e_k \rangle^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} \langle e_k, e_i \rangle^2 \leq 1 $$

et ainsi

$$ 1 \leq \|e_k\|^4 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} \langle e_k, ei \rangle^2 \leq 1 $$

puisque $\|e_k\|^4 = 1^4 = 1$, on a donc $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} \langle e_k, e_i \rangle^2 = 0$. Or une somme de termes positifs est nulle si et seulement si chacun de ses termes est nul, donc pour tout $i \in [\![1, p]\!] \setminus \{k\}$, $\langle e_k, e_i \rangle = 0$. La famille $(e_1, ..., e_p)$ est donc orthonormée donc libre, puisque c'est aussi une famille génératrice de E d'après la question 1 c'est finalement une base orthonormée de E.

Correction de l'exercice 6 :

1) C'est une question de cours. $p_u(x) \in \operatorname{Vect}(u)$ et $x - p_u(x) \in \operatorname{Vect}(u)^\perp$ par définition d'une projection orthogonale, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $p_u(x) = \lambda u$, et $\langle x - p_u(x), u \rangle = 0$ donc $\langle x, u \rangle = \langle p_u(x), u \rangle$ donc $\langle x, u \rangle = \lambda \langle u, u \rangle = \lambda$ d'où le résultat.

2) Puisque $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, on a $\sum_{i=1}^n p_u(x_i) = p_u\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = p_u(0) = 0$. Ainsi, $\overline{x}(\mathcal{F}_u) = 0$ et ainsi

$$ \begin{aligned} \mathcal{I}(\mathcal{F}_u) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \|p_u(x_i)\|^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, u \rangle^2 \|u\|^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, u \rangle^2 \end{aligned} $$

Si on pose $f(u) = \sum_{i=1}^n \langle u, x_i \rangle x_i$, alors f définit bien une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$ (par linéarité du produit scalaire) et on a

$$ \langle u, f(u) \rangle = \left\langle u, \sum_{i=1}^{n} \langle u, x_i \rangle x_i \right\rangle $$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle u, x_i \rangle \langle u, x_i \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle u, x_i \rangle^2$$

$$= \mathcal{I}(\mathcal{F}_u)$$

3) Soit $(e_1, ..., e_n)$ la base orthonormée de vecteurs propres de f dont l'existence est admise, en supposant que $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ sont les valeurs propres de f telles que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, e_k est un vecteur propre associée à la valeur propre λ_k.
Pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|u\| = 1$, il existe $(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $u = \sum_{k=1}^n u_k e_k$ et ainsi, $f(u) = \sum_{k=1}^n u_k f(e_k) = \sum_{k=1}^n u_k \lambda_k e_k$.
On a alors d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\mathcal{F}_u) &= \langle u, f(u) \rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} u_i e_i, \sum_{k=1}^{n} u_k \lambda_k e_k \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} u_i u_k \lambda_k \langle e_i, e_k \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} u_k^2 \lambda_k \|e_k\|^2 && \text{car } (e_1, ..., e_n) \text{ est une famille orthognale} \\
&= \sum_{k=1}^{n} u_k^2 \lambda_k
\end{aligned}$$

Or, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k \leq \lambda_n$ donc $u_k^2 \lambda_k \leq u_k^2 \lambda_n$ et donc :

$$\mathcal{I}(\mathcal{F}_u) \leq \lambda_n \sum_{k=1}^{n} u_k^2 \leq \lambda_n$$

car $\|u\|^2 = 1$ donc $\| \sum_{k=1}^n u_k e_k \|^2 = 1$ donc $\sum_{k=1}^n u_k^2 = 1$.
De plus, $\mathcal{I}(\mathcal{F}_i) = \lambda_n$ si et seulement si toutes les inégalités ci-dessus sont des égalités, c'est à dire si et seulement si $\forall k \in [\![1, n]\!], u_k^2 \lambda_k = u_k^2 \lambda_n$, c'est à dire si $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $u_k = 0$ ou $\lambda_k = \lambda_n$.
On a donc $\mathcal{I}(\mathcal{F}_u) = \lambda_n$ si et seulement si u est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_n.

Correction de l'exercice 7 :

1) M est une matrice carrée de taille n. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
X \in \mathrm{Ker}(M) &\iff A^t B X + B^t A X = 0 \\
&\iff A({}^t B X) + B({}^t A X) = 0 \\
&\iff \langle B, X \rangle A + \langle A, X \rangle B = 0 \\
&\iff \langle B, X \rangle = \langle A, X \rangle = 0
\end{aligned}$$

car (A, B) est libre. Comme (A, B) est une base de $E_1 = \mathrm{Vect}(A, B)$ on a finalement $X \in \mathrm{Ker}(M) \iff X \in E_1^{\perp}$. Or $\dim(E_1^{\perp}) = n - 2$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(M)) = n - 2$ et $\mathrm{rg}(M) = 2$.

2) a) Comme $\mathrm{Im}(f) = E_1$ on a : $\forall x \in E_1, f(x) \in E_1$ et f est linéaire, donc la restriction de f à E_1 est un endomorphisme de E_1.
 b) $\varphi(A) = A^t B A + B^t A A = \langle A, B \rangle A + \|A\|^2 B$
 $\varphi(B) = A^t B B + B^t A B = \|B\|^2 A + \langle A, B \rangle B$
 donc :

$$\mathrm{Mat}_{(A,B)}(\varphi) = \begin{pmatrix} \langle A, B \rangle & \|B\|^2 \\ \|A\|^2 & \langle A, B \rangle \end{pmatrix}$$

3) a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est valeur propre de φ si et seulement si $\begin{pmatrix} \langle A,B\rangle - \lambda & \|B\|^2 \\ \|A\|^2 & \langle A,B\rangle - \lambda \end{pmatrix}$ est non inversible donc :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est v.p. de } \varphi \ &\underline{\text{ssi}}\ (\langle A,B\rangle - \lambda)^2 - \|A\|^2\|B\|^2 = 0 \\ &\underline{\text{ssi}}\ (\langle A,B\rangle - \lambda - \|A\|\|B\|)(\langle A,B\rangle - \lambda + \|A\|\|B\|) = 0 \\ &\underline{\text{ssi}}\ \lambda = \langle A,B\rangle - \|A\|\|B\| \quad \text{ou} \quad \lambda = \langle A,B\rangle + \|A\|\|B\| \end{aligned}$$

donc les valeurs propres de φ sont $\lambda_1 = \langle A,B\rangle - \|A\|\|B\|$ et $\lambda_2 = \langle A,B\rangle + \|A\|\|B\|$.

b) Comme A et B sont non nuls on a $\|A\|\|B\| \neq 0$ donc les deux valeurs propres trouvées à la question précédente sont distinctes. On en déduit que φ est diagonalisable.

4) On sait que 0 est valeur propre de f et que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n-2$. De plus, $\lambda_1 = \langle A,B\rangle - \|A\|\|B\|$ et $\lambda_2 = \langle A,B\rangle + \|A\|\|B\|$ sont deux autres valeurs propres de f. Comme A et B sont non colinéaires on a $|\langle A,B\rangle| < \|A\|\|B\|$ donc λ_1 et λ_2 sont non nulles, et distinctes entre elle. Ainsi f a (au moins) 3 valeurs propres, et la somme des dimensions de sous-espaces propres associés est $n-2+1+1 = n$, donc f est diagonalisable (et ces trois v.p. sont les seules v.p. de f).

Correction de l'exercice 8 :

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a par hypothèse sur f : $\langle f(x),x\rangle = -\langle x,f(x)\rangle = -\langle f(x),x\rangle$ par symétrie du produit scalaire, donc $\langle f(x),x\rangle = 0$.

2) Supposons que $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est une valeur propre non nulle de f. Soit $x \neq 0$ un vecteur propre associé à cette valeur propre, alors $0 = \langle f(x),x\rangle = \langle \lambda x,x\rangle = \lambda\|x\|^2$, ce qui est impossible car $\lambda \neq 0$ et $\|x\|^2 \neq 0$.
On en conclut que 0 est la seule valeur propre réelle de f (puisqu'il est admis qu'il en existe au moins une).

3) Montrons d'abord que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonaux : soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y \in \mathrm{Im}(f)$. Soit $x' \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x') = y$. Alors $\langle x,y\rangle = \langle x,f(x')\rangle = \langle f(x),x'\rangle = 0$ car $f(x) = 0$. On a donc $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ orthogonaux, donc $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Comme $\dim(\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$ on a finalement $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

4) Si $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3$ alors $f = 0$ donc A est la matrice nulle (le réel $\alpha = 0$ convient alors).

5) a) Soit e_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(f)$ de norme 1 et (e_2,e_3) une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(f)$.
Comme $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont orthogonaux, la famille (e_1,e_2,e_3) est orthogonale donc c'est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

b) Comme $f(e_2) = f(e_3) = 0$ par définition du noyau, la matrice de f est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, alors $f(y) \in \mathrm{Im}(f)$ par définition, donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(e_1) = a \cdot e_1$, et la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est alors $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d) $\langle f(e_1),e_1\rangle = 0$ d'après la question 1) donc $\langle a \cdot e_1,e_1\rangle = a\|e_1\|^2 = 0$ d'où $a = 0$ car $\|e_1\|^2 \neq 0$.
On en conclut que A est nulle donc $f = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$. On a donc nécessairement $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \neq 2$.

6) a) Soit (e_1,e_2) une base orthonormale de $\mathrm{Im}(f)$ et e_3 un vecteur non nul de norme 1 dans $\mathrm{Ker}(f)$, alors (e_1,e_2,e_3) est une famille orthonormale (car $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonaux) donc est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

b) Comme $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f il existe a,b,c,d quatre réels tels que $f(e_1) = a \cdot e_1 + c \cdot e_2$ et $f(e_2) = b \cdot e_1 + d \cdot e_2$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est alors : $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) On a d'après la question 1) : $0 = \langle f(e_1),e_1\rangle$ et $0 = \langle f(e_2),e_2\rangle$. En développant avec les expressions de la question précédente cela donne :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle a \cdot e_1 + c \cdot e_2, e_1\rangle \\ &= a\|e_1\|^2 + c\langle e_2,e_1\rangle \\ &= a\|e_1\|^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 0 &= \langle b \cdot e_1 + d \cdot e_2, e_2\rangle \\ &= b\langle e_1,e_2\rangle + d\|e_2\|^2 \end{aligned}$$

$$= d\|e_2\|^2$$

donc $a = d = 0$ car $\|e_1\|^2 \neq 0$ et $\|e_2\|^2 \neq 0$.
Enfin, on sait que $\langle f(e_1), e_2\rangle = -\langle e_1, f(e_2)\rangle$ donc :

$$\langle a \cdot e_1 + c \cdot e_2, e_2\rangle = -\langle e_1, b \cdot e_1 + d \cdot e_2\rangle$$

donc

$$c\|e_2\|^2 = -b\|e_1\|^2$$

donc

$$c = -b$$

car $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$.

d) Dans le cas $\mathrm{Ker}(f) = 1$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc de la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui répond à la question voulue.
On a donc répondu positivement à la question dans les cas $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ et on a montré que le case $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$ n'était pas possible. Le cas $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ est aussi impossible car 0 est valeur propre de f donc f n'est pas inversible.