

TD 8 : Analyse réelle (Indications)

Indications pour l'exercice 1 :

1. Composition de DL : si $f(x) = P(x) + o(x^3)$ et $g(x) = \sum_{k=0}^3 a_k x^k + o(x^3)$ avec P un polynôme de degré 3, alors $g(f(x)) = \sum_{k=0}^3 a_k (P^k(x))_3 + o(x^3)$ où $(P^k(x))_3$ est le polynôme $P(X)^k$ dans lequel les termes de degré strictement plus grand que 3 sont tronqués.
2. Rappel : si $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $a^b := e^{b \ln(a)}$
3. Se ramener à une expression de la forme $\frac{1}{1 + f(x)}$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.
4. Remarquer que $\frac{1}{e^x}$ peut s'écrire $\frac{1}{1 + f(x)}$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Indications pour l'exercice 2 :

1. Rappel : si $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $a^b := e^{b \ln(a)}$
2. Idem.
3. Poser le changement de variable $u = x - 1$ pour se ramener à des DL en 0
4. Ramener le premier terme à une expression de la forme $\frac{1}{1 + f(x)}$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Indications pour l'exercice 3 :

Dans chaque cas il faut trouver un équivalent de la forme $\frac{1}{n^\alpha}$ et comparer avec une série de Riemann.

Indications pour l'exercice 4 :

1. Faire l'étude du dénominateur de f
2. **Attention** : il faut partir d'un DL à l'ordre 4 des différentes fonctions qui composent f
3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ à l'aide du DL précédent
4. Montrer que $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$ admet une limite en 0 à l'aide du DL précédent.
5. Étudier le terme d'ordre 2 (s'il est nul le terme d'ordre 3, et ainsi de suite) du DL pour connaître la position relative au voisinage d'un point.

Indications pour l'exercice 5 :

1. Justifier la continuité sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.
2. Justifier la dérивabilité sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et montrer que $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ a une limite finie quand x tend vers 0.
3. Montrer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f'(x) \neq f'(0)$.

Indications pour l'exercice 6 :

1. Factoriser par x^2 et utiliser un DL de $\sqrt{1 - \frac{9}{x} + \frac{8}{x^2}}$.
2. Trouver d'abord un développement limité de $\exp\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right)$ en fonction de $\frac{1}{x}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Indications pour l'exercice 7 :

Déterminer une expression simplifiée de P' et montrer que P' n'a qu'une seule racine : -1 .

Montrer que la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$ est à valeurs strictement négative (on peut par exemple étudier les suites définies par $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$ et montrer qu'elles sont adjacentes).

Indications pour l'exercice 8 :

- Montrer que $\overline{P(\lambda)} = P(\bar{\lambda})$ en posant les coefficients de P .
- Utiliser le fait que P est scindé dans \mathbb{C} .

Indications pour l'exercice 9 :

- Reconnaitre une dérivée de la forme $(e^u(x))'$
- Faire une IPP en utilisant $(1+t)' = 1$
- Faire deux IPP successives
- Reconnaitre une dérivée de la forme $(u(x)^n)'$.
- Reconnaitre une dérivée de la forme $\left(\frac{1}{v(x)}\right)'$.
- Reconnaitre une dérivée de la forme $(u \circ v)'(x)$ ou bien poser le changement de variable $u = \sqrt{x}$.

Indications pour l'exercice 10 :

- Justifier l'existence de l'intégrale pour tout entier n , comparer les fonctions définies par $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}}$ et $f_{n+1}(x) = \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n+1}}$ et utiliser la croissance de l'intégrale.
- Minorer e^{-x} pour l'une, majorer (bêtement) $\frac{1}{x + \frac{1}{n}}$ pour l'autre.
- Remarquer que $u_n = v_n + w_n \geq v_n$
- (a) Une seule impropreté en 0 résolue par un DL
 (b) S'obtient par une simple comparaison de fonctions à intégrer.
 (c) Montrer grâce à l'encadrement précédent que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ln(n+1)} = 1$, et redémontrer que $\ln(n+1) \sim \ln(n)$.

Indications pour l'exercice 11 :

- Pour que l'intégrale ait un sens, il faut que la fonction à intégrer soit bien définie sur le domaine d'intégration, et que l'intégrale converge si l'une des bornes n'est pas dans le domaine de définition.
- $f(x) = G(x^2) - G(x)$ pour toute primitive G de la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$.
- Montrer que $t \mapsto \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}$ se prolonge par continuité en 1, puis déterminer une expression explicite de $g(x)$.
- Utiliser à nouveau la fonction g en montrant que $\frac{f(x)-g(x)}{x-1}$ et $\frac{g(x)-f(1)}{x-1}$ admettent des limites. Quantifier au voisinage de 1 à l'aide de la limite précédente.

Indications pour l'exercice 12 :

- Penser au théorème des bornes atteintes.
- À cause de l'hypothèse sur f , si $y = f(x)$, alors $f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$.
- Montrer que si $a \in]0; 1[$ alors $f'(a) = 0$ et aboutir à une contradiction, raisonner de façon analogue pour b .
- Si f est seulement continue, la condition de la question 2 est une condition suffisante.

Indications pour l'exercice 13 :

- Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.
- Opérations sur les fonctions \mathcal{C}^∞
- Raisonnez par récurrence, sans détailler l'expression du polynôme.
- Montrer par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $f^{(n)}$ est dérivable et $f^{(n)}(0) = 0$ »

Indications pour l'exercice 14 :

1. u_0 est un calcul direct et u_1 nécessite une intégration par partie.
2. (a) Pour $x \in [0; 1]$ on a $1 \leq e^{1-x} \leq e$
 (b) Théorème d'encadrement.
3. (a) Faire une intégration par partie.
 (b) Par récurrence.
4. Étudier la suite $(u_n - v_n)_{n \geq 0}$.
5. (a) Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n puis inverser la relation.
 (b) **Attention :** aussi tentant que cela puisse être on **n'additionne pas** des équivalents. Factoriser dans les fractions pour se ramener à des DL de la forme $\frac{1}{1+x_n}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

Indications pour l'exercice 15 :

1. Montrer que l'équation $x^n = 2x + 1$ n'a pas de solution sur $[0; 1[$ puis étudier la fonction définie par $f_n(x) = x^n - 2x - 1$ sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
2. Étudier le signe de $f_{n+1}(u_n)$
3. Raisonnner par l'absurde en supposant que $\ell > 1$.
4. (a) Repartir de l'équation qui définit u_n .
 (b) Utiliser un équivalent simple de $\ln(1 + \varepsilon_n)$.

Indications pour l'exercice 16 :

1. Appliquer le TVI après avoir vérifié les hypothèses.
2. Étudier le signe de $f_{n+1}(u_n)$ pour montrer ensuite que $u_n \leq u_{n+1}$. Raisonnner ensuite par l'absurde pour montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
3. Poser $g(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$ et montrer que g est constante.
4. Utiliser l'égalité précédente, l'égalité $u_n - \arctan(u_n) - n^\alpha = 0$, et l'équivalent $\arctan(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$.