

★

Exercice 1

Voir correction

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et soit f une application linéaire de E vers F .

- 1) Montrer que $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F et $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E
- 2) Montrer que f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- 3) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .
 - a) Montrer que $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$.
 - b) Montrer que f est injective si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une famille libre.
 - c) Montrer que f est un isomorphisme si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une base de F
- 4) Rappeler le théorème de la base incomplète, puis démontrer le théorème du rang : $\text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E)$.

★

Exercice 2

Voir correction

Soit S un système d'équations linéaires homogène de n équations à p inconnues. On note les solutions comme des p -uplets de réels. Montrer que l'ensemble E des solutions de S est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^p .

★

Exercice 3

Voir correction

Dans chaque cas, déterminer si F est un sous-espace vectoriel de E et le cas échéant déterminer une base de F .

- 1) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x = 0 \quad \text{et} \quad y = 0\}$
- 2) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0\}$
- 3) $E = \mathbb{R}^4$, $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y - z + 2t = 0 \\ x - 3y + z - t = 0 \end{cases}\}$
- 4) $E = \mathbb{R}^4$, $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{cases} 3x - y + 2z + t = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ 2x + z + t = 0 \end{cases}\}$

★

Exercice 4

Voir correction

Soit n un entier naturel non nul et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère l'ensemble $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$

- 1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E
- 2) Montrer que F est le noyau d'une application linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on précisera.
- 3) En déduire la dimension de F .

★

Exercice 5

Voir correction

Pour chaque entier i dans $\{1, 2, 3\}$, on note $P_i(X) = (X - i)^2$. Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

★

Exercice 6

Voir correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une matrice nilpotente N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, d'indice de nilpotence $p \geq 1$, c'est à dire que $N^p = 0$ et $N^{p-1} \neq 0$.

- 1) Justifier que $N^k \neq 0$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$.
- 2) Montrer que la famille $(I, N, N^2, \dots, N^{p-1})$ est libre.

★

Exercice 7

Voir correction

Pour chacune des matrices suivantes, déterminer le rang, la dimension du noyau, une base de l'image et une base du noyau.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

★

Exercice 8

Voir correction

Pour chacune des matrices suivantes, déterminer l'ensemble des valeurs réelles de x pour lesquelles elle n'est **pas** inversible.

$$A = \begin{pmatrix} x & 2-x \\ x+3 & -x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & x \\ x & 2 & -2 \\ 1 & x & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1+x & -2 \\ 1 & -1 & 2+x \\ x & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

★★

Exercice 9

Voir correction

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n et soit f un endomorphisme de E .

- 1) Montrer que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$
- 2) Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$.
- 3) Montrer que si $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors $\text{rg}(f) \leq \frac{n}{2}$.

★★

Exercice 10

Voir correction

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note A^T la transposée d'une matrice A .

- 1) Montrer qu'il existe 6 réels a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3 tels que $M_{i,j} = a_i b_j$ pour tout $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$
- 2) Justifier qu'il existe deux matrices colonnes A et B tels que $M = AB^T$.
- 3) Montrer que $M^2 = \text{tr}(M)M$

★★

Exercice 11

Voir correction

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$.

Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

★★

Exercice 12

Voir correction

On pose $T = D + N$ où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer une expression de T^n en fonction de D , N et n , puis en fonction seulement de n .

★★★

Exercice 13

Voir correction

On dit qu'un endomorphisme f d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E est une **homothétie** s'il existe un réel λ tel que $f = \lambda \cdot \text{id}_E$, c'est à dire tel que : $\forall x \in E, f(x) = \lambda \cdot x$.

On dit que qu'un sous-espace vectoriel $F \subset E$ est stable par u si $u(F) \subset F$, c'est à dire si on a : $\forall x \in F, u(x) \in F$.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E qui laisse stable toute droite vectorielle de E . Montrer que u est une homothétie.

Le coin des Khûbes

★★★

Exercice 14

Voir correction

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note f_A l'application qui à tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $\text{tr}(AX)$.

- 1) Montrer que quel que soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.
- 2) Montrer que l'application suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ A &\longmapsto f_A \end{aligned}$$

★ ★

Exercice 15

Voir correction

Soit n un entier naturel non nul et soit u l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $u(P) = P(1 - X)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

- 1) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2) Montrer que $u^2 = \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$.
- 3) En déduire qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul tel que $P(1 - X) = P(X)$ ou $P(1 - X) = -P(X)$.

★ ★ ★

Exercice 16

Voir correction

(ENS 2024) On considère une application φ non-constante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} . On suppose que pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a :

$$\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$$

Attention ! L'application φ n'est pas supposée linéaire.

- 1)
 - a) Soit O la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\varphi(O)$.
 - b) Soit I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\varphi(I)$.
- 2) Montrer que si une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors $\varphi(A)$ est non-nul.
- 3)
 - a) Soient A et B deux matrices de même rang. Montrer que $\varphi(A)$ est non-nul si et seulement si $\varphi(B)$ est non-nul.
 - b) Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que A^m est nulle. Déterminer $\varphi(A)$.
 - c) En déduire que si une matrice A vérifie $\varphi(A) \neq 0$, alors elle est inversible.

Correction des exercices

Correction de l'exercice 1 :

- 1) $\text{Im}(f)$ est non vide car $0_F = f(0_E) \in \text{Im}(f)$.

Soient u et v deux éléments de $\text{Im}(f)$ et λ, μ deux réels.

Alors, il existe u' et v' tels que $u = f(u')$ et $v = f(v')$. Ainsi, $\lambda \cdot u + \mu \cdot v = \lambda \cdot f(u') + \mu \cdot f(v') = f(\lambda \cdot u' + \mu \cdot v')$ car f est une application linéaire.

On en déduit que $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in \text{Im}(f)$ donc que $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .

$\text{Ker}(f)$ est non vide car $f(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in \text{Ker}(f)$.

Soient u et v deux éléments de $\text{Ker}(f)$ et λ, μ deux réels.

$f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v)$ car f est linéaire, donc $f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot 0_F + \mu \cdot 0_F = 0_F$, ainsi $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in \text{Ker}(f)$.

On en déduit que $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .

- 2) Supposons que f est injective. On sait que $f(0_E) = 0_F$, donc pour tout $x \in E$, $f(x) = 0_F \Rightarrow f(x) = f(0_E) \Rightarrow x = 0_E$ car f est injective. On en déduit que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Réciproquement, supposons que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ et soient $u \in E$ et $v \in E$ deux vecteurs tels que $f(u) = f(v)$. Alors $f(u) - f(v) = 0_F$ donc $f(u - v) = 0_F$. On en déduit que $u - v \in \text{Ker}(f)$ donc $u - v = 0_E$ et finalement $u = v$, f est donc injective.

- 3) a) Commençons par remarquer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, on a $f(e_k) \in \text{Im}(f)$.

Soit $u \in \text{Im}(f)$, alors il existe $v \in E$ tel que $u = f(v)$. Or, e_1, e_2, \dots, e_n est une base de E donc il existe x_1, x_2, \dots, x_n tels que $v = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots + x_n \cdot e_n$ et ainsi $u = f(v) = x_1 \cdot f(e_1) + x_2 \cdot f(e_2) + \dots + x_n \cdot f(e_n)$. Pour tout $u \in \text{Im}(f)$, u peut s'écrire comme combinaison linéaire de $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ donc $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$.

- b) Supposons que $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une famille libre, et soit $u \in \text{Ker}(f)$. \mathcal{B} est une base de E donc il existe $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $u = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots + x_n \cdot e_n$. Ainsi, $0_F = f(u) = x_1 \cdot f(e_1) + x_2 \cdot f(e_2) + \dots + x_n \cdot f(e_n)$. Or $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une famille libre donc $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ et donc finalement $u = 0_F$. On en conclut que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ donc que f est injective.

Supposons que f est injective, alors $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\lambda_1 \cdot f(e_1) + \lambda_2 \cdot f(e_2) + \dots + \lambda_n \cdot f(e_n) = 0_F$. Alors, $f(\lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \dots + \lambda_n \cdot e_n) = 0_F$ par linéarité de f , donc $\lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \dots + \lambda_n \cdot e_n \in \text{Ker}(f)$. On en déduit que $\lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \dots + \lambda_n \cdot e_n = 0_E$ donc que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ car (e_1, e_2, \dots, e_n) est une base de E donc une famille libre. On en conclut que $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une famille libre.

- c) f est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$. D'après la question 3)a), f est donc surjective si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F .

D'après les questions 3)a) et 3)b), f est donc bijective si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une famille libre et génératrice de F , c'est à dire si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une base de F .

- 4) Si V est un espace vectoriel de dimensions finie n , si $\mathcal{F}_1 = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ est une famille libre de V , et $\mathcal{F}_2 = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ est une famille génératrice de V , alors on peut compléter la famille \mathcal{F}_1 à l'aide de vecteurs de \mathcal{F}_2 de sorte à en faire une base de V .

Démonstration du théorème du rang : Soit (v_1, v_2, \dots, v_p) une base de $\text{Ker}(f)$. Alors (v_1, v_2, \dots, v_p) est une famille libre de E , que l'on peut compléter par $n-p$ vecteurs u_1, u_2, \dots, u_{n-p} en une base \mathcal{B}' de E : $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \dots, v_p, u_1, u_2, \dots, u_{n-p})$.

Alors $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_{n-p})$ est une base de $\text{Im}(f)$. En effet, c'est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ car $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_p)$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ et que $f(v_1) = f(v_2) = \dots = f(v_p) = 0_F$. Montrons que c'est une famille libre : soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-p}) \in \mathbb{R}^{n-p}$ tels que $\lambda_1 \cdot f(u_1) + \lambda_2 \cdot f(u_2) + \dots + \lambda_{n-p} \cdot f(u_{n-p}) = 0_F$.

Alors, $f(\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \dots + \lambda_{n-p} \cdot u_{n-p}) = 0_F$ par linéarité de f , donc $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \dots + \lambda_{n-p} \cdot u_{n-p} \in \text{Ker}(f)$.

Or (v_1, v_2, \dots, v_p) est une base de $\text{Ker}(f)$ donc il existe $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ tels que

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \dots + \lambda_{n-p} \cdot u_{n-p} = \mu_1 \cdot v_1 + \mu_2 \cdot v_2 + \dots + \mu_p \cdot v_p$$

donc

$$-\mu_1 \cdot v_1 - \mu_2 \cdot v_2 - \dots - \mu_p \cdot v_p + \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \dots + \lambda_{n-p} \cdot u_{n-p} = 0_E$$

Or, $(v_1, v_2, \dots, v_p, u_1, u_2, \dots, u_{n-p})$ est une base de E donc une famille libre, donc $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_p = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-p} = 0$. On en conclut que $(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_{n-p}))$ est une famille libre, donc finalement c'est une base de $\text{Im}(f)$.

Ainsi, $\dim(E) = n = p + (n - p) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f)$

Correction de l'exercice 2 : Notons S :
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p &= 0 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p &= 0 \end{cases} \quad \text{le système.}$$

- E est non vide car $(0, 0, \dots, 0)$ est solution (car le système est homogène...)
- E est stable par combinaison linéaire : si (x_1, \dots, x_p) et (y_1, \dots, y_p) sont deux solutions de S et si λ et μ sont deux réels, alors :

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_p) + \mu \cdot (y_1, \dots, y_p) = (\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_p + \mu y_p)$$

Ce p -uplet est solution de S car pour chaque ligne i , $1 \leq i \leq n$:

$$\begin{aligned} a_{i1}(\lambda x_1 + \mu y_1) + \cdots + a_{ip}(\lambda x_p + \mu y_p) &= \lambda \underbrace{(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ip}x_p)}_{=0} + \mu \underbrace{(a_{i1}y_1 + \cdots + a_{ip}y_p)}_{=0} \quad \text{en réarrangeant les termes} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc ce p -uplet est solution de S , ainsi E est bien stable par combinaison linéaire, donc c'est finalement un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^p .

Correction de l'exercice 3 :

- 1) $0 = 0$ et $0 = 0$ donc $(0, 0, 0, 0) \in F$, ainsi F est non vide.

Soient $u = (x, y, z, t) \in F$ et $v = (x', y', z', t') \in F$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\lambda \cdot u + \mu \cdot v = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z', \lambda t + \mu t')$$

On a $\lambda x + \mu x' = 0$ car $x = x' = 0$ et $\lambda y + \mu y' = 0$ car $y = y' = 0$, donc $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$. Ainsi F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .

$\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, (x, y, z, t) \in F \iff (x, y, z, t) = (0, 0, z, t) \iff (x, y, z, t) = z(0, 0, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1), (z, t) \in \mathbb{R}^2$.

Ainsi, $((0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ est une famille génératrice de F donc une base de F puisque c'est une famille de deux vecteurs non nuls non colinéaires donc libre.

- 2) « $0 = 0$ ou $0 = 0$ » est vrai, donc $(0, 0, 0, 0) \in F$

F n'est cependant pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 . En effet, $(1, 0, 0, 0) \in F$ et $(0, 1, 0, 0) \in F$ mais $(1, 0, 0, 0) + (0, 1, 0, 0) = (1, 1, 0, 0) \notin F$.

- 3) $2 \times 0 + 0 + 0 = 0, 0 - 0 + 2 \times 0 = 0$ et $0 - 3 \times 0 + 0 - 0 = 0$ donc $(0, 0, 0, 0) \in F$, ainsi F n'est pas vide.

Soient $u = (x, y, z, t) \in F$ et $v = (x', y', z', t') \in F$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\lambda \cdot u + \mu \cdot v = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z', \lambda t + \mu t')$$

On a

$$2(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') + (\lambda t + \mu t') = \lambda(2x + y + z + t) + \mu(2x' + y' + z' + t') = 0$$

et

$$(\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z') + 2(\lambda t + \mu t') = \lambda(y - z + 2t) + \mu(y' - z' + 2t') = 0$$

et

$$(\lambda x + \mu x') - 3(\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') - (\lambda t + \mu t') = \lambda(x - 3y + z - t) + \mu(x' - 3y' + z' - t') = 0$$

donc $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$, ainsi F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .

$$\forall u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, u \in F \iff \begin{cases} 2x + y + z &= 0 \\ y - z + 2t &= 0 \\ x - 3y + z - t &= 0 \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} x - 3y + z - t &= 0 \\ y - z + 2t &= 0 \\ 2x + y + z &= 0 \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \begin{cases} x - 3y + z - t &= 0 \\ y - z + 2t &= 0 \\ 7y - z + 2t &= 0 \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2} \begin{cases} x - 3y + z - t = 0 \\ y - z + 2t = 0 \\ 6z - 12t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - z + t \\ y = z - 2t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2t + t \\ y = 0 \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = t(-1, 0, 2, 1), \quad t \in \mathbb{R}$$

donc F est la droite vectorielle engendrée par $(-1, 0, 2, 1)$.

- 4) $3 \times 0 - 0 + 2 \times 0 + 0 = 0$, $-0 + 0 - 0 = 0$ et $2 \times 0 + 0 + 0 = 0$ donc $(0, 0, 0, 0) \in F$, ainsi F est non vide.

Soient $u = (x, y, z, t) \in F$ et $v = (x', y', z', t') \in F$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\lambda \cdot u + \mu \cdot v = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z', \lambda t + \mu t')$$

On a

$$3(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') + 2(\lambda z + \mu z') + (\lambda t + \mu t') = \lambda(3x - y + 2z + t) + \mu(3x' - y' + 2z' + t') = 0$$

et

$$-(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z') = \lambda(-x + y - z) + \mu(-x' + y' - z') = 0$$

et

$$2(\lambda x + \mu x') + (\lambda z + \mu z') + (\lambda t + \mu t') = \lambda(2x + z + t) + \mu(2x' + z' + t') = 0$$

donc $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$, ainsi F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .

$$\forall u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad u \in F \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 2z + t = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ 2x + z + t = 0 \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z + t = 0 \\ 2x + z + t = 0 \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1, L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1} \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2y - z + t = 0 \\ 2y - z + t = 0 \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{cases} x = y - z \\ t = z - 2y \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = (y - z, y, z, z - 2y), \quad (y, z) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow u = y(1, 1, 0, -2) + z(-1, 0, 1, 1), \quad (y, z) \in \mathbb{R}^2$$

donc $((1, 1, 0, -2), (-1, 0, 1, 1))$ est une famille génératrice de F . C'est aussi une famille libre car elle est constituée de 2 vecteurs non nuls non colinéaires. C'est donc finalement une base de F .

Correction de l'exercice 4 :

- 1) Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Alors $\lambda \cdot P + \mu \cdot Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(1) = \lambda \cdot P(1) + \mu \cdot Q(1) = 0$, donc $\lambda \cdot P + \mu \cdot Q \in F$. Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

- 2) Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P) = P(1)$. Alors φ est une application linéaire, en effet pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\varphi(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q) = (\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q)$$

Ainsi définie, F est le noyau de l'application linéaire φ .

3) φ est non nulle, il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(P) \neq 0$ (par exemple avec $P = X$, $\varphi(P) = 1$).

Ainsi, $\text{rg}(\varphi) \geq 1$. Or $\text{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}$ donc $\text{rg}(\varphi) \leq 1$, on en déduit que $\text{rg}(\varphi) = 1$.

Finalement, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(\varphi)) + \text{rg}(\varphi) = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. Puisque $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$ d'après le cours, on en déduit que $\dim(F) = \dim(\text{Ker}(\varphi)) = n + 1 - 1 = n$.

Correction de l'exercice 5 : Comme $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$ il suffit de montrer que cette famille est libre. On a :

- $P_1(X) = (X - 1)^2 = X^2 - 2X + 1$
- $P_2(X) = (X - 2)^2 = X^2 - 4X + 4$
- $P_3(X) = (X - 3)^2 = X^2 - 6X + 9$

Soient λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels tels que :

$$\lambda_1 P_1(X) + \lambda_2 P_2(X) + \lambda_3 P_3(X) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

alors

$$\lambda_1(X^2 - 2X + 1) + \lambda_2(X^2 - 4X + 4) + \lambda_3(X^2 - 6X + 9) = 0$$

donc

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)X^2 - (2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 6\lambda_3)X + \lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0$$

donc

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 6\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

car un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. On résout et on trouve comme unique solution : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ donc la famille (P_1, P_2, P_3) est bien libre donc c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Correction de l'exercice 6 :

- 1) Soit $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Supposons que $N^k = 0$, alors $N^{p-1} = N^k \times N^{p-1-k} = 0$ (avec $p-1-k \geq 0$ par hypothèse), contradiction. On en déduit que $N^k \neq 0$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$.
- 2) Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$ des réels tels que :

$$\lambda_0 I + \lambda_1 N + \lambda_2 N^2 + \dots + \lambda_{p-1} N^{p-1} = 0$$

En multipliant à gauche par N , par N^2 , par N^3 , et ainsi de suite jusqu'à N^{p-1} , et en annulant les termes N^k dès que $k \geq p$ on obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_0 I + \lambda_1 N + \lambda_2 N^2 + \dots + \lambda_{p-2} N^{p-2} + \lambda_{p-1} N^{p-1} &= 0 \\ \lambda_0 N + \lambda_1 N^2 + \lambda_2 N^3 + \dots + \lambda_{p-2} N^{p-1} &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_0 N^{p-2} + \lambda_1 N^{p-1} &= 0 \\ \lambda_0 N^{p-1} &= 0 \end{cases}$$

Dans la dernière équation, $N^{p-1} \neq 0$ donc $\lambda_0 = 0$, on en déduit grâce à l'avant dernière que $\lambda_1 = 0$, et ainsi de suite en remontant les équations on parvient à

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{p-2} = \lambda_{p-1} = 0$$

donc la famille (I, N, \dots, N^{p-1}) est bien libre.

Correction de l'exercice 7 : Matrice A

On effectue un pivot de Gauss pour déterminer le rang :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} &\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{6}{5}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On obtient une matrice échelonnée de rang 2 donc A est de rang 2. Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ engendrent l'image de A , c'est donc une base de $\text{Im}A$.

Pour trouver le noyau, on peut utiliser le théorème du rang pour remarquer que $\dim \text{Ker}A + \text{rg}A = 2$ donc $\dim \text{Ker}A = 0$ donc $\text{Ker}A = \{(0, 0)\}$

Autre méthode : on calcule directement le noyau en résolvant le système $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en utilisant la matrice échelonnée pour laquelle le système est équivalent :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -5y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\text{Ker}A$ est de dimension 0 donc sa base est vide.

Matrice B

On effectue un pivot de Gauss pour déterminer le rang :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1]{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc B est équivalente à une matrice échelonnée de rang 2 donc elle est de rang 2.

Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont dans $\text{Im}B$, et ils forment une famille libre car ils ne sont pas colinéaires. Ces deux vecteurs forment donc une base de $\text{Im}B$.

Pour déterminer $\text{Ker}B$ on résout $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ à partir de la matrice échelonnée

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2z \\ y = -z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On peut écrire toutes les coordonnées en fonction de z , on voit donc que $\text{Ker}B$ est de dimension 1 et que $\text{Ker}B = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Matrice C

On effectue un pivot de Gauss pour déterminer le rang

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + L_1]{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

C est équivalente à une matrice échelonnée de rang 3 donc elle est de rang 3.

Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une famille génératrice de $\text{Im}C$, donc forment une base de $\text{Im}C$.

C est inversible, son noyau est donc réduit à $\{0\}$

Matrice D

On effectue un pivot de Gauss pour déterminer le rang

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1]{L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D est équivalente à une matrice échelonnée de rang 2 donc elle est de rang 2.

Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ forment une famille libre de $\text{Im}D$ car ils ne sont pas colinéaires, donc ils forment une base de $\text{Im}D$.

Pour déterminer $\text{Ker}D$, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ -2y - 4z - 6t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y - 3z - 4t \\ y = -2z - 3t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z + 2t \\ y = -2z - 3t \end{cases}$$

donc

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + 2t \\ -2z - 3t \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

autrement dit

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Donc } \text{Ker}D = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Correction de l'exercice 8 :

- A est une matrice carrée d'ordre 2, on peut donc utiliser le critère :

$$A \text{ est non-inversible} \iff \det(A) = 0$$

Or $\det(A) = -x^2 - (x+3)(2-x) = x-6$ dont $\det(A) = 0 \iff x = 6$, ainsi A est non-inversible si et seulement si $x = 6$.

- On cherche une matrice équivalente à B :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & x \\ x & 2 & -2 \\ 1 & x & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ x & 2 & -2 \\ 0 & -2 & x \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - xL_1} \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 2-x^2 & -2 \\ 0 & -2 & x \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & -2 & x \\ 0 & 2-x^2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 + \frac{1}{2}(2-x^2)L_2} \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & -2 & x \\ 0 & 0 & -2 + \frac{1}{2}x(2-x^2) \end{pmatrix}$$

La matrice obtenue est échelonnée quelle que soit la valeur de x .

B est non-inversible $\iff \text{rg}(B) < 3$

$$\iff -2 + \frac{1}{2}x(2 - x^2) = 0$$

$$\iff -4 + x(2 - x^2) = 0$$

$$\iff x^3 - 2x + 4 = 0$$

$$\iff (x + 2)(x^2 - 2x + 2) = 0$$

$$\iff x = -2$$

car $x^2 - 2x + 2$ n'admet aucune racine réelle

• On a

$$\begin{aligned} C = \begin{pmatrix} 3 & 1+x & -2 \\ 1 & -1 & 2+x \\ x & -1 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2+x \\ 3 & 1+x & -2 \\ x & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - xL_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2+x \\ 0 & x+4 & -8-3x \\ 0 & x-1 & 2-x(2+x) \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2+x \\ 0 & 5 & x^2 - x - 10 \\ 0 & x-1 & -x^2 - 2x + 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{5}(x-1)L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2+x \\ 0 & 5 & x^2 - x - 10 \\ 0 & 0 & f(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $f(x) = -x^2 - 2 + 2 - \frac{1}{5}(x-1)(x^2 - x - 10) = \frac{1}{5}(-x^3 - 3x^2 - x)$. Ainsi :

C est non-inversible $\iff \text{rg}(C) < 3$

$$\iff f(x) = 0$$

$$\iff -x^3 - 3x^2 - x = 0$$

$$\iff -x(x^2 + 3x + 1) = 0$$

$$\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$$

Correction de l'exercice 9 :

- 1) Pour tout $y \in \text{Im}(f^2)$, il existe x dans E tel que $f^2(x) = y$, donc $f(f(x)) = y$ donc $f(x)$ est un antécédent de y par f , autrement dit $y \in \text{Im}(f)$. Ainsi $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.
- 2) Pour tout x dans $\text{Ker}(f)$ on a $f(x) = 0$ donc $f(f(x)) = f(0) = 0$ car f est linéaire, donc $x \in \text{Ker}(f^2)$. Ainsi $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$.
- 3) Si $f^2 = 0$, alors pour tout x dans E on a $f(f(x)) = 0$ donc $f(x) \in \text{Ker}(f)$. Ainsi $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ donc $\text{rg}(f) \leq \dim(\text{Ker}(f))$. Or d'après le théorème du rang, $\text{Ker}(f) = n - \text{rg}(f)$ donc :

$$\text{rg}(f) \leq n - \text{rg}(f)$$

d'où $\text{rg}(f) \leq \frac{n}{2}$.

Correction de l'exercice 10 :

- 1) M est de rang 1 donc $\text{Im}(M)$ est de dimension 1, c'est une droite vectorielle. Soit $U = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ un vecteur colonne tel que $\text{Im}(M) = \text{Vect}(U)$.

Comme les colonnes de M , $C_1 = \begin{pmatrix} M_{1,1} \\ M_{2,1} \\ M_{3,1} \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} M_{1,2} \\ M_{2,2} \\ M_{3,2} \end{pmatrix}$ et $C_3 = \begin{pmatrix} M_{1,3} \\ M_{2,3} \\ M_{3,3} \end{pmatrix}$ sont toutes trois dans $\text{Im}M = \text{Vect}(U)$, il existe trois réels b_1, b_2, b_3 tels que $C_1 = b_1 \cdot U$, $C_2 = b_2 \cdot U$ et $C_3 = b_3 \cdot U$

On a alors bien $M_{i,j} = a_i b_j$ pour tous $i, j \in \{1, 2, 3\}$

2) Il suffit de poser $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ pour avoir $M = AB^T$

3) $M^2 = (AB^T)(AB^T) = A(B^T A)B^T$

$$\text{Or, } B^T A = (b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \text{tr}(M)$$

$$\text{Ainsi, } M^2 = A \times \text{tr}(M) \times B^T = \text{tr}(M)AB^T = \text{tr}(M)M$$

Correction de l'exercice 11 :

Comme $f^2 \neq 0$, il existe $e_1 \neq 0$ tel que $f^2(e_1) \neq 0$. Posons $e_2 = f(e_1)$ et $e_3 = f(e_2) = f^2(e_1)$. Montrons que (e_1, e_2, e_3) est une base de E .

Montrons d'abord que ces trois vecteurs sont non nuls : c'est déjà établi pour e_1 et e_3 . Si e_2 était nul, on aurait $e_3 = f(e_2) = 0$ ce qui contredirait l'hypothèse sur e_1 .

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$.

Alors $0 = f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3) = \lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_3 + 0$ car $f(e_3) = f^3(e_1) = 0$ puisque f^3 est l'application nulle.

Ainsi $\lambda_1 e_2 = -\lambda_2 e_3$. En appliquant f on obtient $\lambda_1 e_3 = 0$ donc $\lambda_1 = 0$. On en déduit des égalités ci-dessus que $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Ainsi, e_1, e_2 et e_3 sont libres, donc c'est une base de E .

Dans cette base, la matrice représentative de f est bien $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 12 : Le calcul donne $N^2 = 0$ donc N est nilpotente et pour tout $k \geq 2$ on a $N^k = 0$. D est

diagonale donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $D^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$.

Pour appliquer la formule du binôme de Newton il faut d'abord vérifier que D et N commutent. Le calcul donne $DN =$

$ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc elles commutent bien, et on peut alors écrire pour tout entier $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} T^n &= (D + N)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k N^{n-k} \end{aligned}$$

Or $N^{n-k} = 0$ dès que $n - k \geq 2$ donc dès que $k \leq n - 2$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=n-1}^n \binom{n}{k} D^k N^{n-k} \\ &= \binom{n}{n-1} D^{n-1} N + \binom{n}{n} D^n I_3 \end{aligned}$$

On calcule $D^{n-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour obtenir finalement :

$$\begin{aligned} &= n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 13 : Pour tout $x \in E$, $\text{Vect}(x)$ est stable par u donc $u(x)$ est colinéaire avec x . Pour tout $x \in E$ il existe donc un réel λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$, et nous devons donc montrer que ce λ_x (qui dépend a priori de x) ne dépend en fait pas de x .

Soient x et y deux vecteurs non nuls quelconques de E .

Si $y \in \text{Vect}(x)$ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $y = kx$ donc $u(y) = ku(x) = k\lambda_x x = \lambda_x y$ donc $\lambda_y = \lambda_x$

Si x et y sont non colinéaires, on a $u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y$ d'une part par hypothèse de l'énoncé, et $u(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$ d'autre part. On obtient l'égalité

$$\lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y = \lambda_x x + \lambda_y y$$

et puisque (x, y) forme une famille libre on peut identifier les coefficients et on obtient $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.

Dans tous les cas on a donc $\lambda_x = \lambda_y$, ainsi le réel λ tel que $u(x) = \lambda x$ ne dépend pas du vecteur x considéré, on en conclut que $u = \lambda \cdot \text{id}$.

Correction de l'exercice 14 :

- 1) Il faut vérifier que l'application f_A est bien linéaire, quel que soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f_A(\lambda X + \mu Y) = \text{tr}(A(\lambda X + \mu Y)) = \text{tr}(\lambda AX + \mu AY) = \lambda \text{tr}(AX) + \mu \text{tr}(AY)$ par linéarité de la trace, donc finalement $f_A(\lambda X + \mu Y) = \lambda f_A(X) + \mu f_A(Y)$.

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, f_A est une application linéaire.

- 2) Montrons d'abord que φ est linéaire :

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

L'application $f_{\lambda A + \mu B}$ est celle qui à tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $\text{tr}(\lambda A + \mu B)X = \lambda \text{tr}(AX) + \mu \text{tr}(BX) = \lambda f_A(X) + \mu f_B(X)$. Cette égalité étant vraie pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a bien $f_{\lambda A + \mu B} = \lambda f_A + \mu f_B$ donc $\varphi(\lambda A + \mu B) = \lambda \varphi(A) + \mu \varphi(B)$.

φ est donc une application linéaire entre espaces vectoriels.

Puisque $\dim(\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \times \dim(\mathbb{R}) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, il suffit de montrer que φ est injective.

Soit $A \in \text{Ker}(\varphi)$, on a $f_A = 0$ donc pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{tr}(AX) = 0$.

En particulier, pour $X = E_{i,j}$ avec $E_{i,j}$ la matrice qui ne contient que des 0 sauf un 1 sur la i -ème ligne et j -ème colonne, AX est la matrice qui ne contient que des 0 sauf la i -ème colonne qui est la j -ème ligne de A . $\text{tr}(AX) = 0$ implique alors que $a_{j,i} = 0$, et en généralisant ce raisonnement à tous les coefficients $1 \leq i, j \leq n$ on obtient que $A = 0$. Ainsi, $\text{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$ donc φ est injective.

On en conclut que φ est bijective donc que c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Correction de l'exercice 15 :

- 1) Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

On a donc pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $u(P) = P(1-X) = \sum_{k=0}^n a_k (1-X)^k$. Or, en développant, on obtient que pour tout entier k , $0 \leq k \leq n$, $(1-X)^k$ est un polynôme de degré k . Ainsi $P(1-X)$ est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à n comme somme de polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Ainsi u est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Montrons que u est linéaire : soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(1-X) \\ &= \lambda P(1-X) + \mu Q(1-X) \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q) \end{aligned}$$

donc u est bien linéaire. Finalement c'est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- 2) Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\begin{aligned} u(u(P)) &= u(Q) && \text{avec } Q(X) = P(1-X) \\ &= Q(1-X) \\ &= P(1 - (1-X)) \\ &= P(X) \end{aligned}$$

donc $u^2(P) = P$, et ce quel que soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $u^2 = \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$.

- 3) On cherche à prouver l'existence d'un polynôme P vérifiant $u(P) = P$ ou $u(P) = -P$, c'est à dire $(u - \text{id})(P) = 0$ ou $(u + \text{id})(P) = 0$. Puisque $u - \text{id}$ et $u + \text{id}$ sont des applications linéaires, un tel polynôme P existe si l'un d'eux est non injectif.

Puisque $u^2 = \text{id}$, on a $u^2 - \text{id} = 0$ donc $(u - \text{id}) \circ (u + \text{id}) = 0$. Si $u - \text{id}$ et $u + \text{id}$ étaient tous deux injectifs, alors ils seraient tous deux surjectifs (car ce sont des endomorphismes), donc leur composée serait encore bijective ce qui est faux car c'est l'endomorphisme nul. Par l'absurde, on en conclut donc qu'au moins l'un d'eux est non injectif, donc que le noyau de l'un d'eux n'est pas réduit à $\{0\}$, donc qu'il existe P tel que $(u - \text{id})(P) = 0$ ou $(u + \text{id})(P) = 0$.

Correction de l'exercice 16 :

- 1) a) Par hypothèse on a $\varphi(O \times O) = \varphi(O)\varphi(O)$ donc $\varphi(O) = \varphi(O)^2$. L'équation $x = x^2$ n'a que deux solutions dans $\mathbb{R} : 0$ et 1 . Ainsi $\varphi(O) = 0$ ou $\varphi(O) = 1$.

Supposons que $\varphi(O) = 1$, alors pour toute matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$1 = \varphi(O) = \varphi(OA) = \varphi(O)\varphi(A) = \varphi(A)$$

donc l'application φ est constante égale à 1 ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. On en conclut que $\varphi(O) = 0$.

- b) De la même façon on obtient $\varphi(I) = \varphi(I^2) = \varphi(I)^2$ donc $\varphi(I) = 1$ ou $\varphi(I) = 0$.

Supposons que $\varphi(I) = 0$, alors pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\varphi(A) = \varphi(AI) = \varphi(A)\varphi(I) = 0$$

donc φ est constante égale à 0 ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. On en conclut que $\varphi(I) = 1$.

- 2) Supposons A inversible, alors $AA^{-1} = I$ donc :

$$1 = \varphi(I) = \varphi(AA^{-1}) = \varphi(A)\varphi(A^{-1})$$

Ainsi $\varphi(A)$ est non nul et de plus $\varphi(A)^{-1} = \frac{1}{\varphi(A)}$.

- 3) a) Si A et B sont de même rang, alors elles sont **équivalentes**, c'est à dire qu'il existe deux matrices inversibles P et Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $B = Q^{-1}AP$.

On a donc $\varphi(B) = \varphi(Q^{-1})\varphi(A)\varphi(P)$, et puisque $\varphi(Q^{-1})$ et $\varphi(P)$ sont tous deux non nuls on obtient que $\varphi(A)$ est non nul si et seulement si $\varphi(B)$ l'est.

- b) On a par récurrence immédiate que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout entier naturel $n : \varphi(A^m) = \varphi(A)^m$. Ainsi, s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^m = O$ on a $\varphi(A)^m = \varphi(A^m) = \varphi(O) = 0$. Si $m = 0$ alors $A^m = I \neq O$.

Pour tout $m \geq 1$, la seule solution dans \mathbb{R} de l'équation $x^m = 0$ est $x = 0$ donc $\varphi(A) = 0$.

- c) Raisonnons par contraposée et supposons que A ne soit pas inversible. Alors A est de rang inférieur ou égal à $n - 1$. Notons r le rang de A et posons B la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{array} \right) =$$

B est clairement une matrice de rang r et elle est nilpotente d'ordre r (elle vérifie $B^r = 0$), donc $\varphi(B) = 0$ et $\varphi(A) = 0$ car elles ont le même rang. On en conclut par contraposée que si $\varphi(A) \neq 0$ alors A est inversible.