★

Exercice 1

Soient B_1 et B_2 deux variables de Bernoulli indépendantes avec B_1 de paramètre p et B_2 de paramètre $q = 1 - p$.
On pose $X = B_1 + 2B_2$ et $Y = 6B_1 - 3B_2$.

1) Calculer la covariance de X et Y
2) Déterminer les lois de X et Y, et la loi du couple (X, Y).
3) X et Y sont-elles indépendantes ?

★

Exercice 2

Soit $p \in]0;1[$, et soient X_1, X_2, X_3, X_4 quatre variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$, et les événements A : « M est la matrice nulle », B : « M est inversible », C : « La trace de M est non nulle ». Calculer la probabilité de A, B et C.

★

Exercice 3

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de X sachant $X + Y = n$, c'est à dire déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k \mid X + Y = n)$.

★

Exercice 4

Vrai ou faux ? Justifier

1) Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes
   Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de Bernoulli, alors $X + Y$ suit une loi de Bernoulli
2) Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi uniforme, alors $X + Y$ suit une loi uniforme.
3) Si X, Y et Z sont trois variables aléatoires indépendantes, alors $e^{|Z|}$ et $\sin(X^2 + Y^2)$ sont indépendantes.

★ ★

Exercice 5

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi géométrique de paramètre p
On pose $S = X + Y$, $U = \min(X, Y)$ et $V = X - Y$

1) Déterminer la loi de S
2) Montrer que S admet une espérance et la calculer.
3) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(U > k) = (1 - p)^{2k}$. En déduire la loi de U.
4) Soit $\ell \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{P}(V = \ell, Y = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que $\mathbb{P}(V = \ell) = \dfrac{p(1-p)^\ell}{2-p}$.
5) En déduire la loi de V.
6) Montrer que les variables aléatoires S et U ne sont pas indépendantes.
7) Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

★ ★

Exercice 6

On lance indéfiniment une pièce truquée amenant Pile avec la probabilité $p \in]0;1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On appelle **série** une succession de Pile ou de Face interrompue par l'événement contraire ; par exemple, dans la suite (Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face) il y a quatre séries successives dont deux séries de Pile de longueurs 1 et 3 et deux séries de Face de longueur 2 et 1.
On note L_1 et L_2 les longueurs aléatoires de la première et de la seconde série.

1) Déterminer la loi de L_1 ainsi que son espérance et sa variance (si elles existent).
2) Déterminer la loi du couple (L_1, L_2) et en déduire la loi marginale de L_2.
3) Déterminer l'espérance de L_2.
4) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur p pour que les variables aléatoires L_1 et L_2 soient indépendantes.

⋆ ⋆

Exercice 7

Soit $n \geq 2$ un entier. Dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, on tire les boules une à une et sans remise. On note X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la boule portant le numéro i sort au i-ème tirage, et 0 sinon. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1) Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, donner la loi de X_i, préciser son espérance et sa variance.
2) Pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$ tel que $i \neq j$, donner la loi de $X_i X_j$, préciser son espérance.
3) Calculer l'espérance de S_n
4) Calculer la variance de S_n.

⋆ ⋆

Exercice 8

Une banque comporte deux guichets, notés A et B. Chaque personne entrant dans la banque va faire la queue au guichet A avec probabilité p, ou bien au guichet B avec probabilité $1-p$.
Le nombre de personne qui entrent dans cette banque en une heure est modélisée par une variable aléatoire N suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On considère la suite de variable aléatoire $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par $X_k = 1$ si la k-ème personne va au guichet A, et $X_k = 0$ sinon. On considère que les variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes entre elles et indépendantes de N.
Soit S définie sur Ω par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = \sum_{i=0}^{N(\omega)} X_i(\omega)$$

On admet que S est une variable aléatoire.

1) Expliquer pourquoi S modélise le nombre de personne qui se sont présenté au guichet A en une heure.
2) Pour $k \geq 0$ et $n \geq 0$, exprimer la probabilité conditionnelle de $\{S = k\}$ sachant que $\{N = n\}$. On distinguera le cas $k \leq n$ et le cas $k > n$.
3) En déduire la loi du couple (S, N).
4) En déduire la loi de S. On montrera que S suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 9

Soient $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ des nombres réels tels que $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 1$ et $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \dfrac{1}{2}$. On pose

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $c > 0$, $\mathbb{P}(|S| > c) \leq 2\,\mathrm{e}^{-\frac{c^2}{2}}$.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \leq \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$. *Indication :* on pourra utiliser le fait que $\mathrm{e}^u = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{u^i}{i!}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.
2) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, e^{tS} admet une espérance et que $\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{tS}\right] \leq \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$.
3) Montrer que pour tout $c > 0$, on a $\mathbb{P}(S \geq c) \leq \mathrm{e}^{-\frac{c^2}{2}}$.
4) En déduire que $\mathbb{P}(|S| \geq c) \leq 2\,\mathrm{e}^{-\frac{c^2}{2}}$.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 10

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p, avec $0 < p < 1$. On effectue une succession indéfinie de tirages d'une boule de cette urne, les tirages ayant lieu avec remise.

1) On note V (respectivement B) le nombre aléatoire de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte (respectivement blanche).
   a) Quelles sont les lois respectives de V et B ?
   b) Les variables aléatoires V et B sont-elles indépendantes ?
2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages à partir du premier amenant le même résultat que le premier résultat et Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages amenant alors le résultat contraire.
   Par exemple, et avec des notations évidentes, si on obtient la succession de résultats $VVVVBBV...$, on réalise l'événement $(X = 4)$ et l'événement $(Y = 2)$.
   a) Déterminer la loi de X. Montrer que X admet une espérance que l'on calculera. Quand cette espérance est-elle minimale ? Admet-elle un maximum ?
   b) Déterminer la loi de Y. Montrer que Y admet une espérance que l'on calculera.
   c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 11

Soit n un entier naturel non nul. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et n boules noires indiscernables. On tire n boules simultanément.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k la variables aléatoire égale à 1 si la boule numéro k a été obtenue et 0 sinon.

1) a) Déterminer la loi de X_k
   b) Calculer l'espérance et la variance de X_k
2) a) Montrer que pour tout couple (i, j) de $[\![1; n]\!]^2$ avec $i \neq j$, on a :

$$\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \frac{n-1}{2(2n-1)}$$

   b) En déduire que $\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = -\dfrac{1}{4(2n-1)}$
3) On pose $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer l'espérance et la variance de X.
4) Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre de points obtenus en sommant les numéros des boules blanches tirées. Déterminer l'espérance de Y.