Correction de Maths 2S - HEC-ESCP - 2019

Partie I

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+\mathrm{e}^{-x} > 1 > 0$ donc $0 < \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} < 1$. Ainsi, Λ est à valeur dans $]0,1[$. Pour tout $y \in]0,1[$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}
\Lambda(x) = y &\iff \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = y \\
&\iff 1+\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{y} \\
&\iff \mathrm{e}^{-x} = \frac{1-y}{y} \\
&\iff x = -\ln\left(\frac{1-y}{y}\right) && \text{bien défini car } \frac{1-y}{y} > 0 \\
&\iff x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)
\end{aligned}$$

donc Λ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$ et pour tout $y \in]0,1[$ on a $\Lambda^{-1}(y) = \ln\left(\dfrac{y}{1-y}\right)$.

(b) Λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\Lambda'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$$

(c) Posons $f(x) = \Lambda(x) - x$. Il suffit alors de montrer qu'il existe un unique réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$.
On a :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} - 1 = \frac{-1-\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} < 0$$

donc f est strictement décroissante. De plus, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
Par continuité de f on en déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaire qu'il existe un unique réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$.

(d) Pour tout réel x on a $|f'(x)| = \left|1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\right|$. Or $0 < \mathrm{e}^{-x} < 1+\mathrm{e}^{-x} < (1+\mathrm{e}^{-x})^2$ donc $0 < \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x})^2} < 1$ et donc $|f'(x)| < 1$. On en déduit d'après l'inégalité des accroissements finis que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 1 \times |x - x_0|$$

d'où, comme $f(x_0) = 0$:

$$|\Lambda(x) - x| \leq |x - x_0|$$

2. (a)
(b)
(c)

3. (a) On observe que λ est continue, strictement positive. De plus, Λ est une primitive de λ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \Lambda(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \Lambda(x) = 0$, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $1 - 0 = 1$.
On en déduit que λ est une densité de probabilité.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$ donc

$$
\begin{aligned}
\lambda(-x) &= \frac{\mathrm{e}^{x}}{(1+\mathrm{e}^{x})^2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-2x}(1+\mathrm{e}^{x})^2} && \text{en multipliant par } \mathrm{e}^{-2x} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^{-x}+1)^2} \\
&= \lambda(x)
\end{aligned}
$$

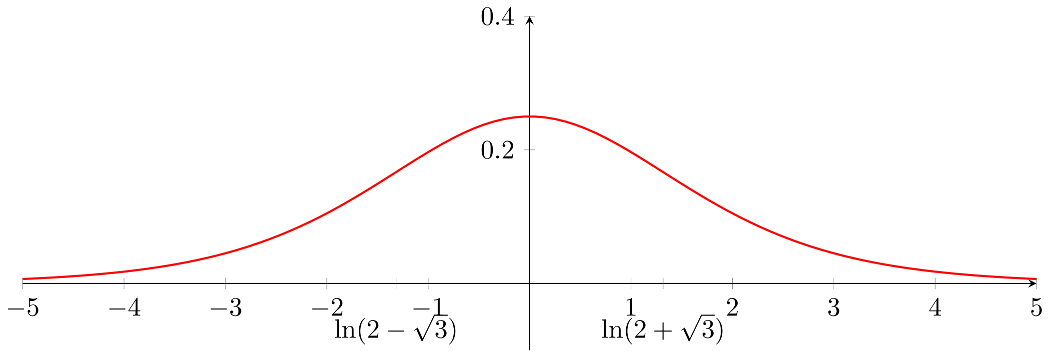
donc λ est paire. Les points d'inflexion de λ sont les points où sa dérivée seconde change de signe.
En écrivant $\lambda(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{(1+\mathrm{e}^{x})^2}$ pour simplifier, et après des calculs pénibles on obtient :

$$\lambda'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x}-1)}{(\mathrm{e}^{x}+1)^3}$$

puis, en posant $X = \mathrm{e}^{x}$:

$$\lambda''(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{2x}-4\,\mathrm{e}^{x}+1)}{(\mathrm{e}^{x}+1)^4} = \frac{X(X^2-4X+1)}{(X+1)^4}$$

Après calcul, $X^2-4X+1=0 \iff X = 2+\sqrt{3}$ ou $X = 2-\sqrt{3}$ donc $x = \ln(2+\sqrt{3})$ ou $x = \ln(2-\sqrt{3})$. Ce sont donc les points d'inflexion de la courbe. On remarque que $\ln(2-\sqrt{3}) = -\ln\left(\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}\right) = -\ln\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{4-3}\right) = -\ln(2+\sqrt{3})$.
Courbe représentative de λ :



4. (a) Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{L}(r,s)$ et posons $Z = \dfrac{Y-r}{s}$. Y admet un moment d'ordre r si et seulement si Z en admet un. Il faut donc montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x^k|\lambda(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
Par parité de $x \mapsto |x^k|\lambda(x)$, il suffit de montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^k\lambda(x)$ converge. Cette intégrale a une seule impropriété en $+\infty$. De plus, $x^2x^k\lambda(x) = \dfrac{x^{k+2}\,\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$ et par croissance comparée $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{k+2}\,\mathrm{e}^{-x} = 0$, donc par opération $x^k\lambda(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente (Riemann) donc par comparaison on en conclut que Z admet un moment d'ordre k, et ce quel que soit k.
$E(Z)$ existe et $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\lambda(x)\,\mathrm{d}x$. Or la fonction $x \mapsto x\lambda(x)$ est impaire donc $E(Z) = 0$.
(b)
(c)
5. (a) Manque au programme le théorème sur la loi d'une somme de variables aléatoires à densité indépendantes (produit de convolution).
(b)

Partie II

6. (a) $P_0(X) = (-1)^0\binom{1}{1}(X-1)^0 = 1$ et $P_1(X) = (-1)^0\binom{3}{1}(X-1)^1 + (-1)^1\binom{3}{3}(X-1)^0 = 3(X-1)-1 = 3X-4$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est un polynôme de degré n.
Le monôme de degré n vient de $(-1)^0\binom{2n+1}{1}(X-1)^n$ et le coefficient de degré n est donc $2n+1$.
Le monôme de degré $n-1$ vient des deux premiers termes de la somme :

$$(-1)^0\binom{2n+1}{1}(X-1)^n+(-1)^1\binom{2n+1}{3}(X-1)^{n-1} = (2n+1)X^n-(2n+1)\times nX^{n-1}-\binom{2n+1}{3}X^{n-1}+\underbrace{\cdots}_{\deg\leq n-2}$$

Or $\binom{2n+1}{3} = \dfrac{(2n+1)2n(2n-1)}{3!} = \dfrac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$ donc finalement le coefficient de degré $n-1$ est :

$$-n(2n+1)-\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3} = -\frac{n(2n+1)(2n+2)}{3}$$

(c) En développant $a_d\prod_{k=1}^{d}(X-z_k)$, le coefficient de degré $d-1$ est $-a_d(z_1+z_2+\cdots+z_d)$.
Ici pour le polynôme P_n on a $a_n = 2n+1$ et $a_{n-1} = -\dfrac{n(2n+1)(2n+2)}{3}$ donc la somme des racines complexes de P_n est $z_1+z_2+\cdots+z_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} = \dfrac{n(2n+2)}{3} = \dfrac{2n(n+1)}{3}$.

7. (a) On a $\sin((2n+1)x) = \mathcal{Im}\left(\mathrm{e}^{i(2n+1)x}\right) = \mathcal{Im}\left((\cos(x)+i\sin(x))^{2n+1}\right)$.
Or :

$$(\cos(x)+i\sin(x))^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}i^k\sin^k(x)\cos^{2n+1-k}(x)$$

i^k est réel si et seulement si k est pair, et imaginaire pur sinon, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\mathcal{Im}\,(\cos(x)+i\sin(x))^{2n+1} &= \sum_{k=0}^{n}2n+1\binom{2n+1}{2k+1}i^{2k+1}\sin^{2k+1}(x)\cos^{2n+1-(2k+1)}(x)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k\sin^{2k+1}(x)\cos^{2(n-k)}(x)\end{aligned}$$

d'où le résultat.

(b) On a donc :

$$\begin{aligned}\frac{\sin((2n+1)x))}{\sin^{2n+1}(x)} &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\cos^{2(n-k)}(x)\times\sin^{2k+1-(2n+1)}(x)\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\frac{\cos^{2(n-k)}(x)}{\sin^{2(n-k)}(x)}\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\left(\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}\right)^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\left(\frac{1-\sin^2(x)}{\sin^2(x)}\right)^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\left(\frac{1}{\sin^2(x)}-1\right)^{n-k}\\ &= P_n\left(\frac{1}{\sin^2(x)}\right)\end{aligned}$$

(c) On déduit de l'égalité précédente que $P_n\left(\dfrac{1}{\sin^2(x)}\right)$ s'annule lorsque $\sin((2n+1)x)$ s'annule. Or $\sin((2n+1)x) = 0 \iff (2n+1)x = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

La fonction de $]0,\pi[$ dans $[0,1]$ qui à x associe $\dfrac{1}{\sin^2 x}$ est injective donc les valeurs $\left(\dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)_{1\leq k\leq n}$ sont n racines distinctes de P_n. Or un polynôme de degré n admet au plus n racines complexes distinctes, donc ce sont exactement les racines de P_n. On en conclut d'après la question précédente que :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)}=\frac{2n(n+1)}{3}$$

8. (a) Par étude des fonctions $x\mapsto x-\sin x$ et $x\mapsto \tan x - x$ on en obtient facilement $\sin(x)\leq x\leq \tan x$.
Comme $x\mapsto\dfrac{1}{x^2}$ est décroissante on a par composition avec les inégalités précédentes : $\dfrac{1}{x^2}\leq\dfrac{1}{\sin^2(x)}$ et $\dfrac{1}{\tan^2(x)}\leq\dfrac{1}{x^2}$. Or $\dfrac{1}{\tan^2(x)}=\dfrac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}=\dfrac{1}{\sin^2(x)}-1$ d'où le résultat.

   (b) En sommant l'encadrement précédent on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}-1\right)\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)^2}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

donc

$$\frac{2n(n+1)}{3}-n\leq\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leq\frac{2n(n+1)}{3}$$

d'où finalement

$$\frac{2n(n-1)}{3}\leq\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leq\frac{2n(n+1)}{3}$$

   (c) En transformant l'encadrement précédent :

$$\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leq\frac{2n(n+1)\pi^2}{3(2n+1)^2}$$

et on a $\dfrac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2}\sim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2\pi^2}{12n^2}\sim_{n\to\infty}\dfrac{\pi^2}{12}$ et $\dfrac{2n(n+1)\pi^2}{3(2n+1)^2}\sim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2\pi^2}{12n^2}\sim_{n\to\infty}\dfrac{\pi^2}{6}$ donc par encadrement :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

9. (a) On a déjà calculé $E(Z)=0$ donc $V(Z)=E(Z^2)=2\int_0^{+\infty}x^2\lambda(x)\,\mathrm{d}x$ d'après la formule de Koenig-Huygens.
Soit $A>0$, par intégration par partie, en prenant $\Lambda-1$ comme primitive de λ on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^A x^2\lambda(x)\,\mathrm{d}x &= [x^2(\Lambda(x)-1)]_0^A-\int_0^A 2x(\Lambda(x)-1)\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{-A^2\,\mathrm{e}^{-A}}{1+\mathrm{e}^{-A}}+2\int_0^A\frac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

et en passant à la limite lorsque $A\to+\infty$:

$$\int_0^{+\infty}x^2\lambda(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$$

donc $V(X)=4\int_0^{+\infty}\dfrac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$

(b) Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-(k+1)x}\,\mathrm{d}x + I_n &= \int_0^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} x(-\mathrm{e}^{-x})^{k+1}\,\mathrm{d}x + I_n\\
&= \int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\left(\sum_{k=0}^{n}(-\mathrm{e}^{-x})^k\right)\mathrm{d}x + I_n\\
&= \int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\frac{1-(-1)^{n+1}(\mathrm{e}^{-x})^{n+1}}{1+\mathrm{e}^{-x}} + I_n\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x(\mathrm{e}^{-x})^{n+2}}{1+\mathrm{e}^{-x}}}_{=I_n} + I_n\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

(c) On sait que pour tout entier $k\in\mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} kx\,\mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{k}$ (espérance d'une loi exponentielle de paramètre k) donc $\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{k^2}$.

De plus, pour tout $x\geq 0$, $\dfrac{x\,\mathrm{e}^{-(n+2)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} \leq x\,\mathrm{e}^{-(n+2)x}$ donc en intégrant :

$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{e}^{-(n+2)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-(n+2)x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{(n+2)^2}$$

et par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\dfrac{x\,\mathrm{e}^{-(n+2)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = 0$.

On en déduit en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité précédente que :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-(k+1)x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$$

(d) On a d'après 9.a) : $V(X) = 4\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$. Commençons par réécrire : $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$. En écrivant que les termes impairs s'annulent :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2}$$

Or $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ donc $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{24}$ d'où finalement :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{12}$$

et donc $V(X) = 4\dfrac{\pi^2}{12} = \dfrac{\pi^2}{3}$

10. (a) Oui par comparaison avec $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en 0 et avec $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$ (à développer)

(b) On remarque que $I = E(\ln(U_1))$ et $J = E(\ln(U_1)^2)$ où U_1 suit une loi exponentielle de paramètre 1, donc $J - I^2$ est la variance de U_1. En posant $Z = \ln(U_1) - \ln(U_2)$ avec U_1 et U_2 indépendantes qui suivent une même loi exponentielle de paramètre 1 on a $Z \hookrightarrow \mathcal{L}(0,1)$ donc $V(Z) = \dfrac{\pi^2}{3}$ d'après la question 9.d) donc $V(\ln(U_1) - \ln(U_2)) = \dfrac{\pi^2}{3}$.

Or U_1 et U_2 sont indépendantes donc $\ln(U_1)$ et $\ln(U_2)$ aussi donc $V(\ln(U_1)) + V(\ln(U_2)) = \dfrac{\pi^2}{3} = 2V(\ln(U_1))$ donc $V(\ln(U_1)) = J - I^2 = \dfrac{\pi^2}{6}$.

11. $F' = f > 0$ donc F est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, par propriété des fonctions de répartitions, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$, F établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0, 1[$.
12. $F(\theta) = \mathbb{E}(Y_j)$ pour tout j donc d'après le théorème central limite, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^n Y_j - nF(\theta)}{\sqrt{F(\theta)(1 - F(\theta)}\sqrt{n}} \leq x \right) = \mathbb{P}(Z \leq x)$$

où Z suit la loi normale centrée réduite. Or :

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^n Y_j - nF(\theta)}{\sqrt{F(\theta)(1 - F(\theta))}\sqrt{n}} \leq x \right) = \mathbb{P}\left(\frac{n(\overline{Y_n} - F(\theta))}{\sqrt{F(\theta)(1 - F(\theta))}\sqrt{n}} \right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{Y_n} - F(\theta))}{\sqrt{F(\theta)(1 - F(\theta))}} \right)$$

donc $\dfrac{\sqrt{n}(\overline{Y_n} - F(\theta))}{\sqrt{F(\theta)(1 - F(\theta))}}$ converge en loi vers Z donc $\sqrt{n}(\overline{Y_n} - F(\theta))$ converge en loi vers $\sqrt{F(\theta)(1 - F(\theta))}Z$ qui suit la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 = F(\theta)(1 - F(\theta))$.
13. (a) $\mathbb{P}_\theta(E_n) = 1 - \mathbb{P}(\overline{Y_n} = 0) - \mathbb{P}(\overline{Y_n} = 1)$.
Or $n\overline{Y_n}$ suit une loi binomiale de paramètres n et $F(\theta)$ donc $\mathbb{P}(\overline{Y_n} = 0) = \mathbb{P}(n\overline{Y_n} = 0) = (1 - F(\theta))^n$ et $\mathbb{P}(\overline{Y_n} = 1) = \mathbb{P}(n\overline{Y_n} = n) = F(\theta)^n$.
Finalement : $\mathbb{P}_\theta(E_n) = 1 - (1 - F(\theta))^n - F(\theta)^n$.
Puisque $F(\theta) \in]0, 1[$ et $1 - F(\theta) \in]0, 1[$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}_\theta(E_n) = 1$.
   (b) i. On a pour tout $\omega \in \omega$:

$$\begin{aligned} \omega \in \{\omega \in E_n, T_n(\omega) \leq x\} &\iff \omega \in E_n \cap (T_n \leq x) \\ &\iff \omega \in E_n \cap (F(T_n) \leq F(x)) \quad \text{car la fonction } F \text{ est strictement croissante} \\ &\iff \omega \in E_n \cap (\overline{Y_n} \leq F(x)) \end{aligned}$$

car $F(T_n) = \overline{Y_n}$ si $\overline{Y_n} \notin \{0, 1\}$ ce qui est le cas lorsque E_n est réalisé.
On a donc bien :

$$\{\omega \in E_n \mid T_n(\omega) \leq x\} = [\overline{Y_n} \leq F(x)] \cap E_n$$

De plus, T_n est positive donc si $x < 0$ on a $(T_n \leq x) = \varnothing$, et si $x \geq 0$ on a $(T_n \leq x) = (F^{-1}(\overline{Y_n} \leq x) = (\overline{Y_n} \leq F(x))$ donc c'est un élément de la tribu $\mathcal{A}$ car $\overline{Y_n}$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_\theta)$.
ii. On a

$$\mathbb{P}_\theta([\overline{Y_n} \leq F(x) \cap E_n) = \mathbb{P}((T_n \leq x) \cap E_n) \leq \mathbb{P}(T_n \leq x)$$

de plus, si $x \geq 0$, $(T_n \leq x) = [F^{-1}(\overline{Y_n} \leq x) \cap E_n] \cup \overline{E_n}$ donc $\mathbb{P}(T_n \leq x) = \mathbb{P}((\overline{Y_n} \leq x) \cap E_n) + 1 - \mathbb{P}_\theta(E_n)$, et $\mathbb{P}(T_n \leq x)$ si $x < 0$.
   (c) Nécessite la loi faible des grands nombres, HP
   (d) Nécessite la définition d'un estimateur, HP
14.

Partie IV

15. (a) M^tM est une matrice carrée de taille p. Montrons qu'elle est injective :

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ M^tMX = 0 &\Rightarrow {}^tXM^tMX = 0 \\ &\Rightarrow \|{}^tMX\|^2 = 0 \\ &\Rightarrow X \in \mathrm{Ker}({}^tM) \end{aligned}$$

mais $\mathrm{rg}({}^tM) = \mathrm{rg}(M) = p$ donc $\mathrm{Ker}({}^tM) = \{0\}$ donc $X = 0$. On en déduit que M^tM est inversible.

(b) On a ${}^t({}^tMU - H)({}^tMU - H) = \|{}^tMU - H|^2$ donc la matrice colonne U qui minimise cette quantité est la matrice pour laquelle ${}^tMU$ est le projeté orthogonal de H sur $\mathrm{Im}({}^tM)$.
Une telle matrice vérifie pour tout $V \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, ${}^t({}^tMV)(H - {}^tMU) = 0$ donc :

$${}^tV(MH - M^tMU) = 0$$

d'où $MH = M^tMU$ donc $U = (M^tM)^{-1}MH$.

(c) Connaître les lois des variables $Y_{i,n}$ revient à connaître les paramètres $b(x) = \Lambda(\langle\alpha, x^{(i)}\rangle)$. Par injectivité de Λ, cela revient donc à connaître $\langle\alpha, x^{(i)}\rangle$ c'est à dire les coefficients de ${}^tMA$. Pour en déduire A il faut que ${}^tM$ soit injective donc de rang p, il faut donc que $\mathrm{rg}(M) = p$.

16. (a)

(b)