⋆

Exercice 1

Soit F le sous espace de $\mathbb{R}^5$ engendré par $u = (1, 2, 3, -1, 2)$ et $v = (2, 4, 7, 2, -1)$. Trouver une base de l'orthogonal $F^\perp$ de F.

⋆

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ ainsi que le vecteur $u = (-5, 3, 1) \in E$ et le sous-espace $F = \text{Vect}\,(u)$. Soit p le projeté orthogonal sur F. Déterminer la matrice de p dans la base canonique.

⋆ ⋆

Exercice 3

Dans cet exercice on se place dans l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique qui à deux vecteurs $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$ et $\boldsymbol{y} = (y_1, ..., y_n)$ associe $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$. On note $\|x\|$ la norme d'un vecteur x et on note $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique (orthonormée) de $\mathbb{R}^n$.

1) Dans cette question, u désigne un endomorphisme de E. On cherche à démontrer qu'il existe un unique endomorphisme de E, noté u^*, vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

   a) Montrer que si u^* existe, alors :

$$\forall y \in E, \quad u^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i$$

   b) En déduire que si u^* existe alors u^* est unique.
   c) Vérifier que l'application définie à la question 1)a) est effectivement un endomorphisme de E et conclure.

2) On appelle endomorphisme **adjoint** de u l'endomorphisme u^* défini dans la question précédente. Dans cette question, on étudie les endomorphismes **normaux**, c'est à dire les endomorphismes qui vérifient :

$$u \circ u^* = u^* \circ u$$

   a) Soit f un endomorphisme symétrique de E. Donner son adjoint et vérifier que f est normal.

   Dans la suite u désigne un endomorphisme normal.

   b) Montrer que : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$
   c) En déduire que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^*)$.
   d) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.
   e) On suppose que u possède une valeur propre λ et on note E_λ le sous-espace propre associé. Montrer que E_λ est stable par u^*.
   f) Établir que $(u^*)^* = u$ puis en déduire que $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

⋆

Exercice 4

On munit $E = \mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique et de sa norme associée. Soit (u_1, u_2) une famille libre de E. On note $H = \text{Vect}\,(u_1, u_2)$ et on définie $f : E \to E$ par

$$\forall u \in E, f(u) = \langle u, u_1\rangle u_2 + \langle u, u_2\rangle u_1$$

1) Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
2) Montrer que $\text{Im} f = H$ et $\text{Ker} f = H^\perp$
3) On pose $v_1 = ||u_1||u_2 - ||u_2||u_1$, $v_2 = ||u_1||u_2 + ||u_2||u_1$ et on prend $v_3 \in H^\perp$ quelconque tel que $v_3 \neq 0$.
   Montrer que v_1, v_2, v_3 est une base orthogonale de E.
4) Donner la matrice de f dans cette base.
5) En déduire que f est diagonalisable avec une valeur propre strictement positive, une strictement négative, et une nulle.

⋆

Exercice 5

Soit $(x_1, x_2, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que $x_1 + x_2 + \cdots x_n = 1$. Démontrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$

⋆

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. L'objectif de cet exercice est de trouver une matrice colonne X telle que $||AX - B||$ soit minimal.

1) Vérifier que $\mathrm{Im}A$ est un plan et donner une équation cartésienne de ce plan.
2) Construire une base orthonormée de ce plan.
3) Calculer Y projection orthogonale de B sur ce plan, et conclure.

⋆ ⋆

Exercice 7

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On cherche à minimiser $||AX - B||$ où $X \in \mathcal{M}_{p,1}$.

1) Si $n = p$, résoudre le problème.
2) On revient au cas général. Montrer que $AX = 0 \Rightarrow X = 0$, et en déduire que $C = A^T A$ est inversible.
3) Soit $H = \{AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$. Vérifier que H est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et interpréter le problème posé en termes de distance et de projection orthogonale.
4) Soit $Y = AX_0$ le projeté orthogonal de B sur H. Montrer que
$$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}, \quad X^T A^T B - X^T A^T A X_0 = 0$$
5) En déduire que $Y = AC^{-1}A^T B$
6) Application avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour retrouver le résultat de l'exercice précédent.

⋆

Exercice 8

(D'après oral INSEE 2019) On considère l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique et de la norme associée $||\cdot||$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice symétrique réelle et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé.
On admet que A est diagonalisable et on note $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ ses valeurs propres. On admet aussi qu'il existe une base orthonormale $(\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$, constitués de vecteurs propres de f tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$.
Le but de cet exercice est d'établir le résultat suivant :
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{k} a_{j,j} \leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda_j$$

1) Étudier le cas $k = n$.
2) Soit maintenant $k \in [\![1, n]\!]$. Établir que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a
$$a_{j,j} \leqslant \sum_{i=1}^{k} \langle e_j, \varepsilon_i \rangle^2 \lambda_i + \lambda_k \sum_{i=k+1}^{n} \langle e_j, \varepsilon_i \rangle^2$$
(Indication : montrer que $a_{j,j} = \langle f(e_j), e_j \rangle$)
3) En déduire, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, l'inégalité suivante :
$$a_{j,j} \leqslant \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_k) \langle e_j, \varepsilon_i \rangle^2 + \lambda_k$$
(Indication : considérer la matrice $A' = A - \lambda_k I_n$)
4) Conclure

⋆ ⋆

Exercice 9

Soit p un projecteur orthogonal de $E = \mathbb{R}^n$ et soit A la matrice représentative de p dans la base canonique $(e_1, e_2, ..., e_n)$.
Le but de cet exercice est de montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \operatorname{tr}\left({}^tAA\right) = \operatorname{rg}(A)$

1) Pour $i \in [\![1, n]\!]$, exprimer $p(e_i)$ dans la base canonique.
2) Soit $p = \operatorname{rg}(A)$ et soit $f_1, ..., f_p$ une base orthonormée de $\operatorname{Im}A$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, exprimer $p(e_i)$ dans la base $f_1, ..., f_p$
3) En déduire deux façons différentes d'exprimer $||p(e_i)||^2$.
4) Conclure

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 10

1) a) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$. Résoudre $AX = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

   b) Un calcul donne $A\begin{pmatrix} 0.2 \\ 4.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \end{pmatrix}$. En quoi cela peut-il paraître surprenant ?

2) Soit maintenant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont tous non nuls. Soient deux matrice colonnes $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note X et $\tilde{X}$ les solutions de $AX = B$ et $A\tilde{X} = B + R$.

   Pour une matrice colonne $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ quelconque, on note $\|Y\| = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$.

   a) Montrer que $\displaystyle\max_{1\leq k\leq n} \frac{1}{|\lambda_k|} = \frac{1}{\displaystyle\min_{1\leq k\leq n} |\lambda_k|}$.

   b) Montrer que $\displaystyle\frac{\|\tilde{X} - X\|\|B\|}{\|R\|\|X\|} \leq \frac{\displaystyle\max_{1\leq k\leq n} |\lambda_k|}{\displaystyle\min_{1\leq k\leq n} |\lambda_k|}$

   c) La matrice A étant fixée, construire explicitement B et R pour qu'il y ait égalité dans l'inégalité précédente.

⋆

Exercice 11

Soit $n \geq 1$ un entier et A est une matrice carrée à coefficients réels d'ordre n symétrique : ${}^tA = A$. On note E l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes à coefficients réels et on fixe un vecteur non nul $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ de E. Pour tout x de E, on pose :

$$q_A(x) = {}^txAx \quad \text{et} \quad c(x) = {}^tx\omega - 1$$

et on suppose que pour tout vecteur x non nul de E, $q_A(x) > 0$. Enfin, on désigne par C l'ensemble $C = \{x \in E; c(x) = 0\}$. Toute matrice carrée d'ordre 1 sera confondue avec le réel la constituant. Le but de cet exercice est d'étudier l'existence du minimum de q_A sur l'ensemble C.

1) Vérifier que si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a $q_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_ix_j$ et $c(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_ix_i - 1$.
2) En résolvant l'équation $Ax = 0$ pour x inconnue de E, montrer que la matrice A est inversible.
3) Montrer que $A^{-1} = {}^t(A^{-1})$.
4) Montrer que pour tout vecteur x non nul de E, on a ${}^txA^{-1}x > 0$.
5) Montrer que pour tout vecteur x de E, il existe un réel λ unique et un vecteur h de E unique tels que $x = \lambda A^{-1}\omega + h$ et ${}^t\omega h = 0$.
6) Montrer alors que si x vérifie $c(x) = 0$, on a $q_A(x) = \dfrac{1}{{}^t\omega A^{-1}\omega} + {}^thAh$.
7) En déduire que q_A admet un minimum sur C atteint uniquement en x_0 vérifiant $Ax_0 = \lambda_0\omega$ avec $\lambda_0 = \dfrac{1}{{}^t\omega A^{-1}\omega}$.