Programme de khôlle n° 26

Semaine du 26 Mai

Cours

- **Chapitre 15 : Familles de variables aléatoires, indépendance.**

  Dans tous le chapitre, les variables aléatoires sont des variables aléatoires réelles discrètes.

  - Couples de v.a., lois marginales
  - Loi d'une somme de variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$.
  - Formule de transfert pour 2 v.a. X et Y :

  $$\mathbb{E}(\varphi(X,Y)) = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} \varphi(x,y)\mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

  - Espérance d'un produit :

  $$\mathbb{E}(XY) = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

  - Covariance, inégalité de Cauchy-Schwarz, Formule de Koenig-Huygens
  - Propriétés de la covariance : $\mathrm{Cov}(X,X) = V(X)$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$, bilinéarité.
  - Coefficient de corrélation $\rho = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$. Invariance d'échelle.
  - $|\rho(X,Y)| = 1$ si et seulement si il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{P}(Y = aX+b) = 1$.
  - Lien avec la variance : $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + \mathrm{Cov}(X,Y)$

    $V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$
  - Indépendance de variables aléatoires, lemme des coalitions
  - Si X et Y sont indépendances, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$
  - S suit une loi binomiale de paramètres n et p si et seulement si il existe $X_1, \dots, X_n$ des variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p telles que $S = \sum_{k=1}^n X_k$
  - Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ avec X et Y indépendantes, alors $X+Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n+m,p)$
  - Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ avec X et Y indépendantes, alors $X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$
  - Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi admettant une espérance μ et une variance, alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

  $$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Questions de cours et exercice

- Pas de questions de cours cette semaine