

★

Exercice 1

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.

- 1) Montrer que si p est un projecteur de E alors p est diagonalisable et que $\operatorname{rg}(p) = \operatorname{tr}(p)$.
- 2) Montrer que si s est une symétrie de E alors s est diagonalisable et que $n - \operatorname{tr}(s)$ est un entier pair.

★

Exercice 2

Étudier la diagonalisabilité des matrices suivantes (on ne demande pas de les diagonaliser) :

$$1) A = \begin{pmatrix} -9 & 8 \\ -18 & 15 \end{pmatrix}$$

$$3) C = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2) B = \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 18 & -10 \end{pmatrix}$$

$$4) D = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 12 \\ -4 & 6 & -8 \\ -6 & 9 & -12 \end{pmatrix}$$

★

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

- 1) Montrer que $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A , préciser la valeur propre associée à X .
- 2) Déterminer les autres valeurs propres de A .
- 3) Justifier que A est diagonalisable et déterminer $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

★ ★

Exercice 4

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- 1) Déterminer le rang de $A(a)$ selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$.
- 2) Discuter de la diagonalisabilité de $A(a)$ selon la valeur de $a \in \mathbb{R}$.
- 3) On note dans cette question $A = A(1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\frac{1}{4^n} A^n$.

★ ★

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On considère l'endomorphisme $f = \lambda \cdot \operatorname{Id}_E$ (f est une **homothétie de rapport** λ) et un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ avec $p \neq \operatorname{Id}_E$ et $p \neq 0$.

- 1) Montrer que λ est une valeur propre de $f \circ p$. Quel est le sous-espace propre associé ?
- 2) Montrer que 0 est une valeur propre de $f \circ p$. Quel est le sous-espace propre associé ?
- 3) L'application $f \circ p$ est-elle diagonalisable ?
- 4) Réciproquement, supposons que g soit un automorphisme de E tel que $g \circ p$ soit diagonalisable avec pour seules valeurs propres λ et 0, a-t-on nécessairement $g = \lambda \cdot \operatorname{Id}_E$?

★

Exercice 6

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$ un entier. Étudier la diagonalisabilité de $A = \begin{pmatrix} a & \cdots & a \\ \vdots & & \vdots \\ a & \cdots & a \end{pmatrix}$ et la diagonalisabilité de $B = A - I_n$.

★ ★ ★
Exercice 7

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.

- 1) Dans cette question, u et v sont deux endomorphismes de E avec u diagonalisable. Montrer que u et v commutent si et seulement si tout sous-espace propre de u est stable par v .
- 2) Dans cette question, u et v sont deux endomorphismes diagonalisables de E . Montrer que u et v commutent si et seulement si il existe une base \mathcal{B} de diagonalisation commune à u et v .

★ ★
Exercice 8

- 1) a) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.
b) Trouver deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonalisables dont la somme n'est pas diagonalisable.
- 2) Soit A une matrice carrée diagonalisable. Montrer que A^2 est également diagonalisable.
- 3) a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^2$.
b) Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonalisable telle que A^2 est diagonalisable.

★ ★
Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application $\psi_n : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par $\psi_n(P)(X) = P(1 - X)$.

- 1) Montrer que ψ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
- 2) Calculer $\psi_n(1), \psi_n(X), \psi_n(X^2)$ et $\psi_n(X^3)$
- 3) Montrer que ψ_n est une symétrie.
- 4) On s'intéresse dans cette question au cas $n = 3$
 - a) Déterminer la matrice M de ψ_3 dans la base canonique \mathcal{B}_0
 - b) Déterminer $\text{Ker}(\psi_3 - \text{Id})$ et $\text{Ker}(\psi_3 + \text{Id})$.
 - c) Déterminer une matrice P telle que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

★ ★ ★
Exercice 10

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que α^2 est une valeur propre de f^2 si et seulement si α ou $-\alpha$ est valeur propre de f .

★ ★
Exercice 11

On définit pour tout $k \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^k e^{-x}$ et on note \mathcal{B} la famille (f_0, f_1, f_2, f_3) . Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ engendré par \mathcal{B} .

- 1) Montrer que \mathcal{B} est une base de E
- 2) Montrer que l'application $u : f \mapsto f' - f''$ est un endomorphisme de E
- 3) Déterminer la matrice de u dans la base \mathcal{B}
- 4) u est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

★ ★
Exercice 12

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid MA = AM\}$ le **commutant** de A .

Pour $1 \leq k \leq n$ on note I_k la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(I_k)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ et } i \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- 1) Déterminer $C(I_k)$.
- 2) Soit P une matrice inversible. Montrer que M appartient à $C(A)$ si et seulement si $P^{-1}MP$ appartient à $C(P^{-1}AP)$.

3) Supposons que A est la matrice d'un projecteur. Déterminer $C(A)$.

★ ★ ★
Exercice 13

Soit $n \geq 1$ un entier et $A \in \mathbb{R}_n[x]$ un polynôme fixé. Soit $\phi : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$, $P \mapsto \phi_P$ où la fonction polynomiale ϕ_P est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi_P(x) = A(x) \times \int_0^1 P(t) dt - P(x) \int_0^1 A(t) dt$$

Dans la suite, on notera $\alpha = \int_0^1 A(t) dt$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$.

- 1) Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$
- 2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de ϕ . Montrer que $\lambda \in \{0, -\alpha\}$.
- 3) Montrer que $\text{Im}(\phi + \alpha \text{Id}) \subseteq \text{Ker}(\phi)$.
- 4) En déduire que pour $\alpha \neq 0$, on a $\text{Ker}(\phi + \alpha \text{Id}) \oplus \text{Ker}(\phi) = \mathbb{R}_n[x]$
- 5) À quelle condition ϕ est-il diagonalisable ?

Le coin des khûbes

★
Exercice 14

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit l'application ϕ par :

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ v & \mapsto u \circ v \end{cases}$$

On note $\text{Id}_{\mathcal{L}(E)}$ et Id_E les fonctions identités des espaces $\mathcal{L}(E)$ et E .

- 1) Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
- 2) Montrer que $\text{Spec}(\phi) \subset \text{Spec}(u)$.
- 3) En considérant des endomorphismes particuliers de E , montrer que $\text{Spec}(\phi) = \text{Spec}(u)$.
- 4) Soit $\lambda \in \text{Spec}(u)$
 - a) Montrer que

$$v \in \text{Ker}(\phi - \lambda \text{Id}_{\mathcal{L}(E)}) \iff \text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$$

- b) En déduire $\dim(\text{Ker}(\phi - \lambda \text{Id}_{\mathcal{L}(E)}))$
- c) Montrer que u est diagonalisable si et seulement si ϕ est diagonalisable.

★
Exercice 15

(D'après écrits ENS 2023)

On considère un entier $n \geq 1$ et l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ définie par

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n}, x_{2n+1}) = (x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_4, \dots, x_{2n-1} + x_{2n+1}, x_{2n})$$

- 1) Quelle est la matrice de φ dans la base canonique ?
- 2) Déterminer une base du noyau de φ .
- 3) Déterminer le rang de φ
- 4) A-t-on $\text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^{2n+1}$?
- 5) Soient a et b deux réels. En étudiant la partie imaginaire de $e^{ia}(e^{ib} + e^{-ib})$, montrer que

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \cos(b) \sin(a)$$

- 6) Soit $k \in \{1, 2, \dots, 2n+1\}$ et $\theta = \frac{k\pi}{2n+2}$. On considère le vecteur

$$v_\theta = (\sin(\theta), \sin(2\theta), \sin(3\theta), \dots, \sin((2n+1)\theta))$$

- a) Pour $j \in \{1, \dots, 2n+1\}$, montrer que la j -ème coordonnée de $\varphi(v_\theta)$ est

$$\sin((j-1)\theta) + \sin((j+1)\theta)$$

- b) Montrer que v_θ est un vecteur propre de φ , préciser la valeur propre associée.
- c) La matrice de φ est-elle diagonalisable ?