★

Exercice 1 — Voir correction

Dans chaque cas, montrer que f est continue sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ et déterminer si la fonction f est $\mathcal{C}^1$ ou non sur $\mathcal{D}_f$.

a) $f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, $\mathcal{D}_f = [0, +\infty[$

b) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \mathrm{e}^{1/x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

d) $f(x) = |x| \ln(1+x)$, $\mathcal{D}_f =]-1; +\infty[$.

★

Exercice 2 — Voir correction

Dans chaque cas déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a à l'aide d'une dérivée connue :

a) $f(x) = \dfrac{3 - \sqrt{9 - 4x}}{x}$, $a = 0$

b) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$, $a = \dfrac{\pi}{2}$

c) $f(x) = \dfrac{2^x - 4}{x - 2}$, $a = 2$

d) $f(x) = \dfrac{x - 1}{8 \arctan(x) - 2\pi}$, $a = 1$

★

Exercice 3 — Voir correction

Dans chaque cas déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a à l'aide d'un développement limité :

a) $f(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{3x}}{2x}$, $a = 0$

b) $f(x) = \dfrac{3 - \sqrt{9 - 4x}}{x}$, $a = 0$

c) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$, $a = \dfrac{\pi}{2}$

d) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{3x - 3}$, $a = 1$

e) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - \cos(x)}{\sin(3x)}$, $a = 0$

f) $f(x) = \left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^x$, $a = +\infty$

★

Exercice 4 — Voir correction

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1} - 2x$. À l'aide d'un développement limité, montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

★

Exercice 5 — Voir correction

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = 2\sqrt{x^2 + 3x} - 3\sqrt[3]{x^3 - 4x^2} + \sqrt[4]{x^4 + 5x^3}$$

Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

★

Exercice 6 — Voir correction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$ on a $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{-1/x} P_n(1/x)$ où P_n est un polynôme de degré $2n$.
2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

⋆ ⋆

Exercice 7 — **Voir correction**

Le but de cet exercice est de généraliser le théorème de Rolle : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f'(c) = 0$.

⋆ ⋆

Exercice 8 — **Voir correction**

En utilisant le théorème de Rolle, montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ qu'un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines distinctes.

⋆

Exercice 9 — **Voir correction**

Déterminer dans chaque cas un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

1) $u_n = \sqrt{n^4 + 5n + 2} - n^2$
2) $u_n = \ln(n^2 + 1) - 2\ln(n + 5)$
3) $u_n = \mathrm{e}^{1/n} - \sqrt{1 + 1/3n}$

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 10 — **Voir correction**

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$ **(Formule de Leibniz)**
2) **Application :** soient a et b deux réels. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x-a)^n(x-b)^n$.
   a) Calculer $\varphi^{(n)}(x)$
   b) En considérant le cas $a = b$, en déduire $\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$.
   Rappel : on note $C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

⋆

Exercice 11 — **Voir correction**

À l'aide du théorème des accroissements finis, démontrer les inégalités suivantes :

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \geq 1 + x$

b) $\forall x \in]-1; +\infty[, \quad \ln(1 + x) \leq x$

c) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\sin y - \sin x| \leq |y - x|$

⋆ ⋆

Exercice 12 — **Voir correction**

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}$.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 2]$ par $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$.

1) Étudier les variations de f et montrer que pour tout $x \in [1; 2]$ on a $f(x) \in [1; 2]$.
2) Montrer que la suite (u_n) est bien définie et à valeurs dans $[1; 2]$.
3) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et déterminer le maximum de $|f'(x)|$ sur $[1; 2]$.
4) En déduire qu'il existe un réel $r \in [0; 1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq r^n |u_1 - u_0|$.
5) Montrer que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge puis en déduire que la suite (u_n) converge.
6) Déterminer la limite de (u_n).

⋆ ⋆

Exercice 13 — Voir correction

Le but de cet exercice est de généraliser le résultat de l'exercice précédent.
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $[a;b]$ telle que

- $\forall x \in [a;b]$ on a $f(x) \in [a;b]$.
- Il existe un réel $r \in [0;1[$ tel que $\forall x \in [a;b]$, $|f'(x)| \leq r$

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in [a;b]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Montrer que f admet un unique point fixe, c'est à dire un unique réel $\ell \in [a;b]$ tel que $f(\ell) = \ell$.
2) Montrer par récurrence que (u_n) est bien définie et à valeurs dans $[a;b]$.
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq r|u_n - \ell|$
4) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq r^n|u_0 - \ell|$.
5) En déduire que (u_n) converge vers ℓ.

⋆ ⋆

Exercice 14 — Voir correction

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x\,\mathrm{e}^{-x}$.

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0;+\infty[$.
2) Montrer que l'intervalle $I = [1;+\infty[$ est stable par f.
3) Montrer que pour tout $x \in [0;+\infty[$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$
4) Prouver qu'il existe un unique réel $\alpha \in [1;+\infty[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
5) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$.
6) En déduire la limite de la suite (u_n).

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

a) Sur $]0;+\infty[$, $f(x)=x\ln x$ donc f est continue sur cet intervalle comme produit de fonctions continues.
En 0, on a $f(0)=0$ d'une part et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$ par croissance comparée. Ainsi f est continue en 0
On en conclut que f est continue sur $[0;+\infty[$.
f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions $\mathcal{C}^1$.
Pour tout $x>0$, on a $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{x\ln x}{x}=\ln x$, donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$. On en déduit que f n'est pas dérivable en 0, donc $f\notin\mathcal{C}^1$.

b) $x\mapsto -\dfrac{1}{x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et à valeurs dans $]-\infty;0[$ et $x\mapsto \mathrm{e}^x$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;0[$, donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.
De même, f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ comme composée de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ par la fonction $x\mapsto\mathrm{e}^x$ qui sont toutes deux $\mathcal{C}^1$.
Il reste à montrer que f est continue en 0 et si elle est $\mathcal{C}^1$ en 0.

- On a $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^X=0$ donc par composition de limites $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=0$
  De même, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$, donc f admet une limite à gauche et une limite à droite en 0 et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=0=f(0)$ donc f est continue en 0.
  Pour tout $x>0$ on a
  $$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x}=\frac{1}{x}\times\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$$
  Or, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}X\,\mathrm{e}^{-X}=0$ donc par composition de limites $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=0$.
  De même, pour tout $x<0$, on a
  $$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x}=\frac{1}{x}\times\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$
  Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{1}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}X\,\mathrm{e}^{X}=0$ donc par composition de limites $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$.
  La limite à gauche et la limite à droite sont les mêmes, donc on a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$. Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.
  Pour que f soit $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, il faut que f' soit continue sur $\mathbb{R}$. f' est définie par
  $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\\ -\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{1/x} & \text{si } x<0\end{cases}$$
  En posant $X=\dfrac{1}{x}$ on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} X=+\infty$, et comme $\lim\limits_{X\to+\infty}X^2\,\mathrm{e}^{-X}$ on en déduit par composition de limites que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-1/x}=0$.
  De même, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} X=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty}-X^2\,\mathrm{e}^{X}=0$ donc par composition $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}-\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{1/x}=0$
  La limite à droite et la limite à gauche sont les mêmes donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=f'(0)=0$, ainsi f' est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est $\mathcal{C}^1$.

c) $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$ donc $x\longmapsto\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ par composée de fonctions $\mathcal{C}^k$.

De plus, $x \longmapsto x^2$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ par produit de fonctions $\mathcal{C}^1$.

Montrons que f est continue en 0 :

On sait que pour tout $x \neq 0$, $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ donc $-x^2 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$. Or $\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$ donc $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$. On en déduit que f est continue en 0.

Étudions la dérivabilité de f en 0

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or $\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq x$ donc par comparaison $\lim_{x\to 0}\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0$ On en déduit que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On vérifie si f est $\mathcal{C}^1$:

Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Ainsi, $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Comme vu précédemment, $\lim_{x\to 0} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, mais $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

En effet, si on pose $x_k = \frac{1}{k\pi}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*, \cos(x_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k$, donc $\cos(x_k)$ ne converge pas alors que $\lim_{k\to+\infty} x_k = 0$.

On en conclut que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas $\mathcal{C}^1$ en 0.

d) $x \mapsto 1+x$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$ et ne s'annule pas, donc $x \mapsto \ln(1+x)$ est $\mathcal{C}^1$ par composition de fonction $\mathcal{C}^1$.

De plus, $x \longmapsto |x|$ est continue sur $]-1;+\infty[$ et $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$ mais pas $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$ puisque non dérivable en 0.

Ainsi, f est continue sur $]-1;+infty[$ comme produit de fonctions continues.

Vérifion si f est dérivable en 0

Pour tout $x \neq 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|\ln(1+x)}{x} = \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x>0 \\ -\ln(1+x) & \text{si } x<0 \end{cases}$. En effet, $\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ -1 & \text{si } x<0 \end{cases}$.

Or, $\lim_{x\to 0}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}(-\ln(1+x)) = 0$ donc $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$. On en conclut que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=0$.

Vérifions si f est $\mathcal{C}^1$:

Sur l'intervalle $]-1;0[$, f est $\mathcal{C}^1$ et $f(x) = -x\ln(1+x)$ donc $f'(x) = -\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$. Ainsi, $\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} f'(x) = -\ln(1+0) - \frac{0}{1+0} = 0$.

De même, f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et sur cet intervalle on a $f(x) = x\ln(1+x)$. Ainsi $f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$, donc $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f'(x) = 0$

On a donc $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$ donc f' est continue en 0. Ainsi f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$.

Correction de l'exercice 2 :

1) En posant $g(x) = \sqrt{9-4x}$ on a $\frac{3-\sqrt{9-4x}}{x} = \frac{g(0)-g(x)}{x} = -\frac{g(x)-g(0)}{x}$

Or g est dérivable en 0 et $g'(x) = \frac{-4}{2\sqrt{9-4x}} = \frac{-2}{\sqrt{9-4x}}$ donc $g'(0) = \frac{-2}{\sqrt{9}} = -\frac{2}{3}$

On en déduit que $\lim_{x\to 0} -\frac{3-\sqrt{9-4x}}{x} = -\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

2) En posant $g(x)=\cos x$ on a $\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\dfrac{g(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$.

Or g est dérivable en $\dfrac{\pi}{2}$ et $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=-1$

3) En posant $g(x)=2^x=\mathrm{e}^{x\ln(2)}$ on a $f(x)=\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}$. Or g est dérivable et $\forall x\in]0;+\infty[$, $g'(x)=\ln(2)\,\mathrm{e}^{x\ln(2)}=\ln(2)2^x$. On en déduit que $g'(2)=4\ln(2)$ donc $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4\ln(2)$.

4) En posant $g(x)=\arctan(x)$ on a $f(x)=\dfrac{x-1}{8\arctan(x)-8\arctan(1)}=\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{\frac{\arctan(x)-\arctan(1)}{x-1}}$.

Or g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ donc $g'(1)=\dfrac{1}{2}$ d'où $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 3 :

1) Lorsque x tend vers 0, on a $1-\mathrm{e}^{3x}=1-(1+3x+o(3x))=-3x+o(3x)$.

Ainsi, $\dfrac{1-\mathrm{e}^{3x}}{2x}=\dfrac{-3x+o(3x)}{2x}=-\dfrac{3}{2}+o\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\mathrm{e}^{3x}}{2x}=-\dfrac{3}{2}$.

2) Lorsque x tend vers 0, on a $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}+o(x)$. On a donc

$$\begin{aligned}\sqrt{9-4x}&=\sqrt{9\left(1-\frac{4x}{9}\right)}\\&=3\sqrt{1-\frac{4x}{9}}\\&=3\left(1-\frac{2x}{9}+o\left(\frac{4x}{9}\right)\right)\\&=3-\frac{2x}{3}+o\left(\frac{4x}{3}\right)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{3-\sqrt{9-4x}}{x}&=\frac{3-\left(3-\frac{2x}{3}+o\left(\frac{4x}{3}\right)\right)}{x}\\&=\frac{\frac{2x}{3}+o\left(\frac{4x}{3}\right)}{x}\\&=\frac{2}{3}+o\left(\frac{4}{3}\right)\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{9-4x}}{x}=\dfrac{2}{3}$

3) Calculons le développement limité de $\cos x$ au voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$. D'après le cours, lorsque x tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ on a :

$$\cos(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+o\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

Or, $\cos'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$ donc au voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$ on a

$$\cos(x)=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+o\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

Finalement

$$\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=-1+o(1)$$

donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=-1$

4) Méthode 1 :
Au voisinage de 1 on a

$$\begin{aligned}\ln(x) &= \ln(1) + \ln'(1) \times (x-1) + o(x-1) \\ &= x - 1 + o(x-1)\end{aligned}$$

ainsi $\dfrac{\ln x}{3x-3} = \dfrac{x-1+o(x-1)}{3(x-1)} = \dfrac{1}{3} + o\left(\dfrac{1}{3}\right)$.
Finalement, $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{3x-3} = \frac{1}{3}$.
Méthode 2 : on pose $h = x-1$ pour avoir $x = 1+h$. Lorsque x tend vers 1, h tend vers 0 et on sait que $\ln(1+h) = h+o(h)$, ainsi

$$\frac{\ln(x)}{3x-3} = \frac{\ln(1+h)}{3(1+h)-3} = \frac{h+o(h)}{3h} = \frac{1}{3} + o\left(\frac{1}{3}\right)$$

d'où $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{3x-3} = \frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 4 : On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1 + \dfrac{1}{2x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

$$\begin{aligned}\forall x > 0, \quad f(x^2) &= \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1} - 2x \\ &= \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})} + \sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})} - 2x \\ &= x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - 2x \\ &= x\left(1+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + x\left(1-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - 2x \\ &= 2x - 2x + o\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= o\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Correction de l'exercice 5 :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0;+\infty[, \quad f(x) &= 2\sqrt{x^2+3x} - 3\sqrt[3]{x^3-4x^2} + \sqrt[4]{x^4+5x^3} \\ &= 2\sqrt{x^2(1+\frac{3}{x})} - 3\sqrt[3]{x^3(1-\frac{4}{x})} + \sqrt[4]{x^4(1+\frac{5}{x})} \\ &= 2x\sqrt{1+\frac{3}{x}} - 3x\sqrt[3]{1-\frac{4}{x}} + x\sqrt[4]{1+\frac{5}{x}} \\ &= 2x(1+\frac{3}{x})^{1/2} - 3x(1-\frac{4}{x})^{1/3} + x(1+\frac{5}{x})^{1/4} \\ &= 2x\left(1+\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - 3x\left(1-\frac{4}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) + x\left(1+\frac{5}{4x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= 2x+3-3x+4+x+\frac{5}{4}+o(1) \\ &= \frac{33}{4}+o(1)\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{33}{4}$

Correction de l'exercice 6 :

1) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$ la propriété « f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]0;+\infty[$ et il existe un polynôme de degré n P_n tel que $\forall x > 0,\ f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{-1/x} P_n(1/x)$. »et on raisonne par récurrence.

— **Initialisation :** Pour $n = 0$ on a $f^{(0)}(x) = f(x) = \mathrm{e}^{-1/x}$ sur $]0;+\infty[$. De plus $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ car x ne s'annule pas. Ainsi, par composition de fonctions $\mathcal{C}^1$, f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.
De plus, on a $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-1/x}$ sur $]0;+\infty[$, donc $f'(x) = \mathrm{e}^{-1/x} P_1(1/x)$ avec $P_1(x) = x^2$ un polynôme de degré 2.
Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

— **Hérédité :** Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors il existe P_n un polynôme de degré n tel que $\forall x \in]0;+\infty[, f^{-n)}(x) = \mathrm{e}^{-1/x} P_n(1/x)$.
$f^{(n)}$ est donc dérivable comme produit de fonctions dérivables, et

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-1/x} P_n(1/x) - \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-1/x} P_n'(1/x)$$

où P_n' est la fonction dérivée de la fonction polynôme P_n.
Ainsi,

$$f^{(n+1)}(x) = \mathrm{e}^{-1/x}\left(\frac{1}{x^2} P_n(1/x) - \frac{1}{x^2} P_n'(1/x)\right)$$

En posant $P_{n+1}(x) = x^2 P_n(x) - x^2 P_n'(x)$, alors P_{n+1} est un polynôme de degré $2n+2$ car $P_n(x)$ est de degré $2n$ donc $x^2 P_n(x)$ est de degré $2n+2$ et $P_n'(x)$ est de degré $2n-1$ donc $x^2 P_n'(x)$ est de degré $2n+1$.
De plus, on a $f^{(n+1)}(x) = \mathrm{e}^{-1/x} P_{n+1}(x)$ pour tout $x > 0$.
Aini, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— **Conclusion :** Par principe de récurrence, on en conclut que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc f est $\mathcal{C}^n$ sur $]0;+\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et ainsi f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$

2) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$

— **Initialisation :** f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables. En $x = 0$ on a

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x}\\ &= \frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-1/x}\end{aligned}$$

or $\lim\limits_{X\to+\infty} X\,\mathrm{e}^{-X} = 0$ donc par composition de limites $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-1/x} = 0$.
On en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$, ainsi la propriété est vraie au rang $n = 1$.

— **Hérédité :**Supposons que f soit n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f^n(0) = 0$.
Sur $]-\infty;0[$, $f(x) = 0$ donc $f^{(n)}(x) = 0$, ainsi on a

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} P_n(1/x) & \text{si } x > 0\\ 0 & \text{si } x \le 0\end{cases}$$

d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence. Ainsi, $f^{(n)}$ est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
Étudions la dérivabilité en 0 :

$$\begin{aligned}\forall x > 0,\quad \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x-0} &= \frac{\mathrm{e}^{-1/x} P_n(1/x)}{x}\\ &= \frac{1}{x} P_n(1/x)\,\mathrm{e}^{-1/x} \qquad = X P_n(X)\,\mathrm{e}^{-X} \text{en posant } X = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$, et pour tout polynôme P on a $\lim\limits_{X\to+\infty} P(X)\,\mathrm{e}^{-X} = 0$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x-0} = 0$, donc $(f^{(n)})'_d(0) = 0$
A gauche de 0 on a :

$$\forall x < 0,\quad \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x-0} = \frac{0}{x} = 0$$

donc $(f^{(n)})'_g(0) = 0 = (f^{(n)})'_d(0)$.
Finalement, $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}(0) = 0$. Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$

— **Conclusion :** Par principe de récurrence, on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable et $f^{(n)}(0) = 0$. Ainsi f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 7 :

- Si f est constante égale à ℓ, alors $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0$
- Si f n'est pas constante, alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq \ell$.
Soit $\varepsilon > 0$ tel que $f(x_0) \notin]\ell - \varepsilon\ ,\ \ell + \varepsilon[$. Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \leq x_1, \quad f(x) \in]\ell - \varepsilon\ ,\ \ell + \varepsilon[$ et $\forall x \geq x_2, \quad f(x) \in]\ell - \varepsilon\ ,\ \ell + \varepsilon[$. De plus, on a nécessairement $x_1 < x_0 < x_2$

  ▷ Supposons que $f(x_0) > \ell + \varepsilon$. Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ elle est continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque $f(x_1) < ell + \varepsilon$ et $f(x_2) < \ell + \varepsilon$ il existe deux réels a et b avec $a \in [x_1, x_0[$ et $b \in]x_0, x_2]$ tels que $f(a) = f(b) = \ell + \varepsilon$.
  f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et on a $f(a) = f(b)$ donc d'après le théorème de Rolle il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

  ▷ Supposons que $f(x_0) < \ell - \varepsilon$. Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ elle est continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque $f(x_1) > ell - \varepsilon$ et $f(x_2) > \ell - \varepsilon$ il existe deux réels a et b avec $a \in [x_1, x_0[$ et $b \in]x_0, x_2]$ tels que $f(a) = f(b) = \ell - \varepsilon$.
  f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et on a $f(a) = f(b)$ donc d'après le théorème de Rolle il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

  Dans tous les cas on a prouvé l'existence d'un réel $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Correction de l'exercice 8 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{P}(n)$: tout polynôme non nul de degré n admet au plus n racines distinctes, et on raisonne par récurrence.

— **Initialisation :** Pour $n = 0$, un polynôme non nul de degré 0 est un polynôme constant. Puisqu'il et non nul il ne s'annule jamais donc il possède 0 racines.
Pour $n = 1$: un polynôme de degré 1 est une fonction affine de la forme $f : x \longmapsto ax + b$ avec $a \neq 0$.
$f(x) = 0 \iff ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a}$ donc f admet une uniqe racine.
La propriété est vraie au rang $n = 0$ et $n = 1$.

— **Hérédité :** Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, et soit P un polynôme de degré $n+1$.
On raisonne par l'absurde et on suppose que P admet $n+2$ racines distinctes. Cela signifie qu'il existe $n+2$ réels distincts $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} < x_{n+2}$ tels que $P(x_1) = P(x_2) = \cdots = P(x_{n+1}) = P(x_{n+2}) = 0$.
Pour tout $k \in [\![1\ ,\ n+1]\!]$, la fonction P est continue sur $[x_k\ ,\ x_{k+1}]$ et dérivable sur $]x_k\ ,\ x_{k+1}[$ en tant que fonction polynômiale. De plus, $P(x_k) = P(x_{k+1})$. D'après le théorème de Rolle, il existe donc un réel $y_k \in]x_k\ ,\ x_{k+1}[$ tel que $P'(y_k) = 0$.
La fonction P' admet donc $n+1$ racines distinctes $y_1 < y_2 < \cdots < y_k < y_{k+1}$. Or P' est un polynôme de degré n donc P admet au plus n racines distinctes, contradiction.
On en conclut que P admet au plus $n+1$ racines distinctes.

— **Conclusion :** La propriété est vraie au rang $n = 1$ et elle est héréditaire, donc par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Correction de l'exercice 9 :

1) Lorsque $n \to +\infty$, on a

$$\begin{aligned}
u_n &= \sqrt{n^4 + 5n + 2} - n^2 \\
&= \sqrt{n^4(1 + \frac{5}{n^3} + \frac{2}{n^4})} - n^2 \\
&= n^2\sqrt{1 + \frac{5}{n^3} + \frac{2}{n^4}} - n^2 \\
&= n^2\left(1 + \frac{5}{2n^3} + o\left(\frac{5}{2n^3}\right)\right) - n^2 && \text{car } \frac{2}{n^4} = o\left(\frac{5}{2n^3}\right) \\
&= \frac{5}{2n} + o\left(\frac{5}{2n}\right)
\end{aligned}$$

donc $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{5}{2n}$

2) Lorsque n tend vers $+\infty$ on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \ln(n^2+1) - 2\ln(n+5) \\ &= \ln(n^2) + \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) - 2\ln(n) - 2\ln\left(1+\frac{5}{n}\right) \\ &= 2\ln(n) + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 2\ln(n) - 2\left(\frac{5}{n} + o\left(\frac{5}{n}\right)\right) \\ &= -\frac{10}{n} + o\left(\frac{10}{n}\right) && \text{car } \frac{1}{n^2} = o\left(\frac{10}{n}\right) \end{aligned}$$

donc $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{-10}{n}$

Correction de l'exercice 10 :

1) On note $\mathcal{P}(n)$: $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$.

— **Initialisation :** Pour $n=0$, on a $(fg)^{(0)}(x) = (fg)(x) = f(x)g(x)$ d'une part, et $\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{0}f^{(0)}(x)g^{(0-0)}(x) = f(x)g(x)$ d'autre part, donc la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée au rang $n=0$
Pour $n=1$, on a $(fg)^{(1)}(x) = (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
D'autre part, on a $\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) = \binom{1}{0}f(x)g'(x) + \binom{1}{1}f'(x)g(x)$.
Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(0)$ sont vraies (un seul de deux suffit).

— **Hérédité :** Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$.
Alors $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$. En dérivant de chaque côté on obtient

$$\begin{aligned} (fg)^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k+1)}(x)g^{((n+1)-(k+1))} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) \\ &= \sum_{k'=1}^{n+1}\binom{n}{k'-1}f^{(k')}(x)g^{(n+1-k')}(x) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) \\ &= \binom{n}{n}f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x) + \binom{n}{0}f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x) + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) \\ &= \binom{n+1}{n+1}f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x) + \binom{n+1}{0}f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x) + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) \end{aligned}$$

car $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$ et car $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.
On en conclut que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que la propriété est vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

2) a) Si $f(x) = (x-a)^n$, alors $f'(x) = n(x-a)^{n-1}$, $f^{(2)}(x) = n(n-1)(x-a)^{n-2}$, par récurrence immédiate on a pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!}(x-a)^{(n-k)}$.
En appliquant la formule de Leibniz à la fonction φ, on en déduit que

$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(x-a)^{n-k} \times \frac{n!}{(n-(n-k))!}(x-b)^{n-(n-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{n!}{k!}(x-a)^{n-k}(x-b)^k$$

b) Avec $a = b$, on a $\varphi(x) = (x-a)^{2n}$ donc $\varphi^{(n)}(x) = 2n \times (2n-1) \times (2n-n+1)(x-a)^{2n-n} = \frac{(2n)!}{n!}(x-a)^n$ d'une part, et d'autre part en appliquant le résultat de la question précédente on a

$$\begin{aligned}\varphi^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!k!} \times n! \times (x-a)^{n-k}(x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 \times n!(x-a)^n \\ &= (x-a)^n \times n! \times \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2\end{aligned}$$

Par identification, on a $\frac{(2n)!}{n!} = n! \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$ donc $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = C_{2n}^n$

Correction de l'exercice 11 :

1) On distingue les cas selon que $x > 0$, $x = 0$ ou $x < 0$.
   - Si $x \in]0, +\infty[$. La fonction exponentielle est continue et dérivable sur $[0, x]$ et sa dérivée est $x \mapsto \mathrm{e}^x$ donc d'après le théorème des accroissements finis il existe un réel $c \in]0, x[$ tel que $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^c(x-0)$.
     Or $\mathrm{e}^c \geq \mathrm{e}^0 = 1$ donc $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0 \geq x$, et finalement $\mathrm{e}^x \geq x + 1$.
   - Si $x = 0$, alors $\mathrm{e}^x = 1$ et $x + 1 = 1$ donc $\mathrm{e}^x \geq x + 1$
   - Si $x < 0$, d'après le théorème des accroissements finis il existe $c \in]x, 0[$ tel que $\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^c(0-x)$. On a donc $1 - \mathrm{e}^x = -\mathrm{e}^c x$ c'est à dire $\mathrm{e}^x = 1 + \mathrm{e}^c x$.
     Or $\mathrm{e}^c < 1$ donc $\mathrm{e}^c x > x$ car $x < 0$. Finalement, $1 + \mathrm{e}^c x \geq 1 + x$ donc $\mathrm{e}^c \geq 1 + x$.

   ainsi dans tous les cas on a $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$.
2) On pose $f(x) = \ln(1+x)$. f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ comme composée de la fonction $x \mapsto 1 + x$ qui est dérivable et strictement positive par la fonction $x \mapsto \ln(x)$ qui est dérivable.
   $\forall x \in]-1, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$.
   Soit $x \in]-1, +\infty[$. On distingue les cas selon que $x \in]-1, 0[$, $x = 0$ ou $x > 0$.
   - Si $x > 0$, d'après le théorème des accroissements finis il existe un réel $c \in]0, x[$ tel que $f(x) - f(0) = f'(c)(x-0)$ donc $\ln(1+x) = \frac{x}{1+c}$.
     Or $c > 0$ donc $\frac{1}{1+c} < 1$ et $\frac{x}{1+c} < x$ car $x > 0$. Ainsi, $\ln(1+x) \leq x$.
   - Si $x = 0$, $\ln(1+x) = \ln(1) = 0$ et $x = 0$ donc $\ln(1+x) \leq x$.
   - Si $-1 < x < 0$, d'après le théorème des accroissements finis il existe un réel $c \in]x, 0[$ tel que $f(0) - f(x) = f'(c)(0-x)$ donc $-\ln(1+x) = \frac{-x}{1+c}$ c'est à dire $\ln(1+x) = \frac{x}{1+c}$
     Comme $-1 < c < 0$, on a $0 < 1 + c < 1$ donc $\frac{1}{1+c} > 1$. Puisque $x < 0$ on a $\frac{x}{1+c} < x$ donc finalement $\ln(1+x) < x$.

   ainsi dans tous les cas on a $\ln(1+x) \leq x$.
3) On pose $f(x) = \sin x$. f est dérivable et $f'(x) = \cos(x)$ et on sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\cos x| \leq 1$.
   D'après le théorème des accroissements finis, on en déduit que pour tout $x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq 1 \times |x - y|$.
   Autrement dit $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

Correction de l'exercice 12 :

1) f est dérivable sur $[1; 2]$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle et $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$
   On a

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \geq 0$$

$$\iff \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{2}$$
$$\iff x^2 \geq 2$$
$$\iff x \leq -\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x \geq \sqrt{2}$$

Comme $x \in [1;2]$ on a $f'(x) \geq 0 \iff x \geq \sqrt{2}$.
On en déduit que f est décroissante sur $[1;\sqrt{2}]$ et croissante sur $[\sqrt{2};2]$.
De plus, $f(1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, $f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, et enfin $f(2) = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

x	1		$\sqrt{2}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

D'après ce tableau de variation, on a $\forall x \in [1;2]$, $\sqrt{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{2}$
Or $1 \leq 2$ donc $1 \leq \sqrt{2}$, et $\frac{3}{2} \leq 2$, donc finalement pour tout $x \in [1;2]$, $1 \leq \sqrt{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{2} \leq 2$.

2) $u_0 = 1$ donc $u_0 \in [1;2]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $u_n \in [1;2]$ est bien définie alors $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini et $f(u_n) \in [1;2]$ d'après la question précédente donc $u_{n+1} \in [1;2]$. Par une récurrence immédiate, on en déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in [1;2]$.

3) On a déjà montré à la question 1 que f était dérivable sur $[1;2]$ et que sa dérivée était donnée par $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$.
Ainsi, f' est dérivable comme somme de fonctions dérivables et $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. Pour tout $x \in [1;2]$, $x^3 \geq 1 \geq 0$ donc $\frac{2}{x^3} \geq 0$. On en déduit que f' est croissante sur $[1;2]$, donc que $\forall x \in [1;2]$, $f'(1) \leq f'(x) \leq f'(2)$.
Or $f'(1) = -\frac{1}{2}$ et $f'(2) = \frac{1}{4}$, donc $\forall x \in [1;2]$, $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$.
On en déduit que $\forall x \in [1;2]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

4) D'après les précédentes questions, f est dérivable sur $[1;2]$ et $\forall x \in [1;2]$ $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis, $\forall x, y \in [1;2]$, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$.
On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| \leq \frac{1}{2} \times |u_n - u_{n-1}|$
Par une récurrence immédiate, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2^n} \times |u_1 - u_0|$.

5) Comme $\frac{1}{2} < 1$, la série de terme général $\frac{1}{2^n} \times |u_1 - u_0|$ est une série géométrique convergente.
Par comparaison, on en déduit que la série de terme général $|u_{n+1} - u_n|$ converge donc que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge.
Or, $\sum_{n=0}^{N}(u_{n+1} - u_n) = u_{N+1} - u_0$ par sommes téléscopiques, donc la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge. On en déduit que la suite (u_n) converge.

6) Puisque f est une fonction continue sur $[1;2]$ et que (u_n) converge vers une limite ℓ, on a $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$ et $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ donc finalement $\ell = f(\ell)$.
Ainsi, ℓ est solution de l'équation $\ell = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{\ell}$.

$$\ell = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{\ell} \iff \frac{\ell}{2} - \frac{1}{\ell} = 0$$
$$\iff \frac{\ell^2 - 2}{\ell} = 0$$

$$\iff \ell^2 - 2 = 0 \quad \text{et} \quad \ell \neq 0$$

$$\iff \ell = \sqrt{2} \text{ car } \ell \in [1;2]$$

on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 13 :

1) On pose $g(x) = f(x) - x$ sur l'intervalle $[a;b]$. f est dérivable donc continue, ainsi g est continue comme différence de fonctions continues et de plus $g(a) = f(a) - a$ et $g(b) = f(b) - b$.
Puisque pour tout $x \in [a;b]$ on a $f(x) \in [a;b]$, alors en particulier $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$, ainsi $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$.
D'après le théroème des valeurs intermédiaires il existe donc un réel $\ell \in [a;b]$ tel que $g(\ell) = 0$, c'est à dire tel que $f(\ell) = \ell$.
Montrons que ce réel est unique : on suppose qu'il existe un autre réel $\ell' \in [a;b]$ tel que $f(\ell') = \ell'$.
Comme f est dérivable sur $[a;b]$ et que $\forall x \in [a;b]$, $|f'(x)| \leq r$, on a d'après l'ingalité des accroissements finis :
$$|\ell' - \ell| = |f(\ell') - f(\ell)| \leq r|\ell' - \ell|$$
donc $|\ell' - \ell| \leq r|\ell' - \ell|$. Si $\ell' \neq \ell$, alors $|\ell' - \ell| > 0$ donc en divisant de chaque côté par $|\ell' - \ell|$ on obtient $1 \leq r$, ce qui contredit l'hypothèse $r \in [0,1[$.
Finalement, $\ell' = \ell$, le point fixe de f est unique.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\mathcal{P}(n)$: « u_n est bien définie et $u_n \in [a;b]$ ».
   — **Initialisation :** $u_0 \in [a;b]$ d'après l'énoncé donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   — **Hérédité :** Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie.
   On a $u_n \in [a;b]$ donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie et par hypothèse $f(x) \in [a;b]$ pour tout $x \in [a;b]$ donc $u_{n+1} \in [a;b]$. Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   — **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité des accroissements finis on a $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq r|u_n - \ell|$.
4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\mathcal{P}(n)$: « $|u_n - \ell| \leq r^n|u_0 - \ell|$ et on raisonne par récurrence.
   — **Initialisation :** $r^0 = 1$ donc $|u_0 - \ell| = r^0|u_0 - \ell|$.
   — **Hérédité :** Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Alors
   $|u_{n+1} - \ell| \leq r|u_n - \ell| \leq r \times r^n|u_0 - \ell|$ par hypothèse de récurrence
   D'où $|u_{n+1} - \ell| \leq r^{n+1}|u_0 - \ell|$.
   — **Conclusion :** par principe de récurrence on en conclut que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq r^n|u_0 - \ell|$.
5) Puisque $r \in [0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n|u_0 - \ell| = 0$ donc par comparaion $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Correction de l'exercice 14 :

1) La fonction $x \mapsto -x$ est $\mathcal{C}^2$ et la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ aussi donc $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est $\mathcal{C}^2$ par composition de fonctions. Les fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \dfrac{1}{2}x$ sont $\mathcal{C}^2$, donc f est $\mathcal{C}^2$ sur $[0;+\infty[$ comme produit et somme de fonctions $\mathcal{C}^2$.
De plus, $f'(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} - \dfrac{1}{2}x\,\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}(1-x)$ et $f''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}(-1+x-1) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}(x-2)$
2) Pour tout $x \in [1;+\infty[$, $1 - x \leq 0$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}(1-x) \leq 0$. On en déduit que f est décroissante sur $[1;+\infty[$.
Or $f(1) = 1 + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} > 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ par croissance comparée et par somme.
On en déduit donc que pour tout $x \in [1;+\infty[$, $f(x) \in [1;+\infty[$, autrement dit l'intervalle $[1;+\infty[$ est stable par f.
3) On sait que $f''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}(x-2)$, donc f' est croissante sur $[0;2]$ et décroissante sur $[2;+\infty[$.
Or, $f'(0) = \dfrac{1}{2}$, $f'(2) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-2}}{2}$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$ par croissance comparée et par somme.
On en déduit que $\forall x \in [0;+\infty[$, $-\dfrac{1}{2} \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2}$, autrement dit $\forall x \in [0;+\infty[$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.
4) On pose $g(x) = f(x) - x$. Alors g est dérivable sur $[1;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et $g'(x) = f'(x) - 1 = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}(1-x) - 1$.
Pour tout $x \geq 1$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2} > 0$ et $(1-x) \leq 0$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}(1-x) \leq 0$ et ainsi $g'(x) \leq -1 < 0$ donc $g'(x) < 0$

On en déduit que g est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$. g est continue comme somme de fonctions continues, et $g(1) = f(1) - 1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{e} - 1 > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ par somme de limites.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in [1;+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$, c'est à dire il existe un unique réel $\alpha \in [1;+\infty[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

5) f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on sait que pour tout $x \in [0;+\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ donc on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall x, y \in [0;+\infty, \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

Par une récurrence immédiate on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$.

6) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha| = 0$ donc par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$, et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.