★

Exercice 1 — Voir correction

Étudier l'existence d'extrema locaux des fonctions suivantes en vous ramenant à l'étude d'une fonction quadratique :

1) $f(x, y) = x^2 - y^2 + 3xy$
2) $f(x, y) = 3(x + y)^2 - 4xy + 2$
3) $f(x, y) = 2(x - 1)^2 + 3(y - x)^2$
4) $f(x, y) = x^2 + 3x + 2 + 2y^2 - 2y + 1 + xy$

★

Exercice 2 — Voir correction

Déterminer les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes après avoir précisé leur ensemble de définition

1) $f(x, y) = \mathrm{e}^{(x-y)^2} + y^2$
2) $f(x, y) = \sin\left(\pi\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\right)$
3) $f(x, y) = \ln(x)^2 + (x - 1)^2 + y^2$

★ ★

Exercice 3 — Voir correction

(Oral ENS 2016) Pour toute fonction $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ (avec $k \geq 1$), on appelle maximiseur de g, quand il en existe, tout point $x_0 \in \mathbb{R}^k$ tel que $g(x_0) \geq \sup_{x\in\mathbb{R}^k} g(x)$. On dit aussi que x_0 maximise g.
On considère la fonction

$$F(m, s) = \frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-\frac{m^2+(m-2)^2}{2s}}$$

1) Donner le domaine de définition D de F
2) Montrer qu'un point (m_0, s_0) maximise F si et seulement s'il maximise aussi $\ln(F)$.
3) Déterminer les dérivées partielles $\dfrac{\partial \ln(F)}{\partial m}(m, s)$ et $\dfrac{\partial \ln(F)}{\partial s}(m, s)$.
4) Montrer que, quelle que soit la valeur de $s \in \mathbb{R}_+^*$, $m_0 = 1$ est l'unique maximiseur de la fonction $m \mapsto F(m, s)$.
5) Montrer que la fonction $s \mapsto F(m_0, s)$ admet un unique maximiseur s_0 et calculer s_0.
6) Montrer que pour tout $(m, s) \in D$,

$$(m, s) \neq (m_0, s_0) \Longrightarrow F(m, s) < F(m_0, s_0)$$

★ ★

Exercice 4 — Voir correction

En microéconomie, une fonction de production f est une fonction qui exprime une relation entre les facteurs de production et la quantité produite Q. Si on prend seulement en compte les deux facteurs de production que sont le capital (K) et le travail (L), on a $Q = f(K, L)$ où f est une fonction réelle de deux variables réelles à définir.

— On dit que les **rendements d'échelle** sont
  - croissants si pour tout réel $\lambda > 0$, $f(\lambda K, \lambda L) > \lambda f(K, L)$
  - décroissants si pour tout réel $\lambda > 0$, $f(\lambda K, \lambda L) < \lambda f(K, L)$
  - constants si pour tout réel $\lambda > 0$,$f(\lambda K, \lambda L) = \lambda f(K, L)$

— La **productivité marginale** de chaque facteur est la dérivée partielle de f par rapport à ce facteur.

Dans cet exercice, on s'intéresse à une **fonction de Cobb-Douglas**, c'est-à-dire une fonction de production la forme $f(K, L) = cK^\alpha L^\beta$ où $c, \alpha, \beta > 0$ sont des paramètres qui dépendent du contexte.

1) Déterminer une relation entre $\alpha + \beta$ et le type de rendement d'échelle.
2) Exprimer les productivités marginales du capital et du travail en fonction de c, K, L, α et β.
3) Dans cette question on suppose que les rendements d'échelle sont constants.
   a) Montrer que l'augmentation de l'utilisation d'un facteur fait diminuer sa productivité marginale (c'est la **loi des rendements décroissants**)
   b) Montrer que l'augmentation de l'utilisation d'un facteur fait augmenter la productivité marginale **de l'autre facteur**

CC BY NC

⋆ ⋆
Exercice 5 — **Voir correction**

(Oral ENSAE 2013) Soit la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) = (x^2+y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$$

1) Soit α une constante, à quoi ressemble l'ensemble $\{(x,y)$ tels que $F(x,y)=\alpha\ \}$?
2) En quels points de $\mathbb{R}^2$ la fonction F est-elle maximale ?

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 6 — **Voir correction**

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^4+y^4-2(x-y)^2$.

1) Montrer que f a trois points critiques, et que deux d'entre eux sont des minimums locaux.
2) Montrer que le point $(0,0)$ n'est pas un extremum local.
3) Montrer que les deux autres points critiques sont des extremums globaux.
Indice : développer $(x^2-2)^2+(y^2-2)^2+2(x+y)^2$

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 7 — **Voir correction**

(Oral ENS 2019) On considère la fonction suivante

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^2(1+y)^3+y^2$$

1) Calculer les dérivées partielles de f à l'ordre 1.
2) Montrer que $(0\,;0)$ est l'unique point critique de f
3) Montrer que $(0\,;0)$ est un extremum local de f et en déterminer la nature
4) Montrer que $(0\,;0)$ n'est pas un extremum global pour f
5) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui admet un unique extremum local. Montrer que cet extremum est global.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 8 — **Voir correction**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f : (x_1,x_2) \longmapsto (3x_1+4x_2)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}$$

Déterminer les extremums locaux de f.

Le coin des Khûbes

⋆
Exercice 9 — **Voir correction**

On considère la fonction g définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = \mathrm{e}^x(x+y^2+\mathrm{e}^x)$$

Montrer que g admet un unique extremum local et déterminer si c'est un extremum global.

⋆
Exercice 10 — **Voir correction**

On s'intéresse au problème suivant : étant donné une variable aléatoire X suivant une loi de probabilité dépendant d'un ou plusieurs paramètres, on cherche une estimation de ces paramètres à partir de l'observation empirique d'un échantillon issu de cette loi.
Pour une loi dont le paramètre est θ

— On pose $f(x,\theta) = \mathbb{P}(X=x)$ si X suit une loi discrète
— On pose $f(x,\theta) = f(x)$ où f est la densité de la loi si X suit une loi continue.

On appelle **vraisemblance de** θ au vu des observations $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ la fonction $\mathcal{L}$ suivante :

$$\mathcal{L}(x_1,\dots,x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$$

CC BY NC

Par exemple, si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p inconnu, on a $f(1,p) = \mathbb{P}(X = 1) = p$ et $f(0,p) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$, et donc :

$$\mathcal{L}(x_1, ..., x_n, p) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$$

où $(x_1,..., x_n) \in \{0,1\}^n$ sont n observations de X.
On appelle **maximum de vraisemblance** la valeurs du (ou des) paramètre(s) qui maximise $\mathcal{L}$.

1) Montrer que $\mathcal{L}(x_1,..., x_n, \theta)$ est un maximum de $\mathcal{L}$ si et seulement si $\ln \mathcal{L}(x_1,..., x_n, \theta)$ est un maximum de $\ln \mathcal{L}$. On dit que $\ln \mathcal{L}$ est la log-vraisemblance.
2) Déterminer la valeur de p qui maximise $\ln(\mathcal{L}(x_1,..., x_n, p)$ si X suit une loi de Bernoulli.
3) Montrer que si X suit une loi normale d'espérance μ et de variance $v = \sigma^2$, la log-vraisemblance est

$$\ln \mathcal{L}(x_1, ..., x_n, \mu, v) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi v) - \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

puis montrer que le maximum est atteint pour $\mu = \overline{x}$ et $v = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ avec $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

CC BY NC

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) f est une fonction quadratique et $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ avec $a = 1$, $b = \frac{3}{2}$ et $c = -1$. Ainsi, $ac - b^2 = -\dfrac{5}{2} < 0$ donc f n'admet pas d'extremum local.
2) f admet un extremum local si et seulement si la fonction $g : (x,y) \mapsto 3(x+y)^2 - 4xy$ en admet un. Or $g(x,y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2$ et $3 \times 3 - 1^2 > 0$ donc g admet un extremum local en $(0,0)$. Puisque $3 > 0$ cet extremum est un minimum. Ainsi, f admet un minimum local en $(0,0)$ qui vaut $f(0,0) = 2$.
3) En posant $X = x - 1$ et $Y = y - 1$ on a $f(x,y) = 2X^2 + 3(Y-X)^2 = g(X,Y)$ avec $g(X,Y) = 2X^2 - 6XY + 3Y^2$. Comme $2 \times 3 - 3^2 < 0$, la fonction g n'admet pas d'extremum local donc f non plus.
4) En posant $X = x + 2$ et $Y = y - 1$ on a

$$f(x,y) = X^2 + 2Y^2 + XY$$

et $1 \times 2 \times 1 - (\frac{1}{2})^2 > 0$ donc $g(X,Y) = X^2 + XY + 2Y^2$ admet un extremum local en $(0,0)$. Puisque $1 > 0$ cet extremum est un minimum local.
Ainsi f admet un minimum local en $(x,y) = (-2,1)$.

Correction de l'exercice 2 :

1) f est définie et admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$\partial_1 f(x,y) = 2(x-y)\,\mathrm{e}^{(x-y)^2} \qquad \partial_2 f(x,y) = -(x-y)\,\mathrm{e}^{(x-y)^2} + 2y$$

ainsi

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{rcl}\partial_1 f(x,y) &=& 0\\ \partial_2 f(x,y) &=& 0\end{array}\right. &\iff \left\{\begin{array}{rcl}2(x-y)\,\mathrm{e}^{(x-y)^2} &=& 0\\ -(x-y)\,\mathrm{e}^{(x-y)^2} + 2y &=& 0\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl}x &=& y\\ 2y &=& 0\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl}x &=& 0\\ y &=& 0\end{array}\right.\end{aligned}$$

f admet un unique point critique en $(0,0)$. De plus, $f(0,0) = 1$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x-y)^2 \geq 0$ donc $\mathrm{e}^{(x-y)^2} \geq 1$ et $y^2 \geq 0$ donc $f(x,y) \geq 1$. Ainsi ce point critique est un minimum global de f.

2) f est définie sur $\mathbb{R}^2$ et admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

$$\partial_1 f(x,y) = -2x\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \cos\left(\pi\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\right) \qquad \partial_2 f(x,y) = -2y\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \cos\left(\pi\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\right)$$

donc

$$\left\{\begin{array}{rcl}\partial_1 f(x,y) &=& 0\\ \partial_2 f(x,y) &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}2x\cos\left(\pi\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\right) &=& 0\\ 2y\cos\left(\pi\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\right) &=& 0\end{array}\right.$$

Or, $x^2 + y^2 \geq 0$ donc $0 < \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \leq 1$ donc $0 < \pi\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \leq \pi$. Sur l'intervalle $]0,\pi]$, $\cos(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}$ donc

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \cos\left(\pi\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\right) = 0 &\iff \pi\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} = \frac{\pi}{2}\\ &\iff \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} = \frac{1}{2}\\ &\iff x^2 + y^2 = \ln(2)\end{aligned}$$

Finalement,

$$\left\{\begin{array}{rcl}\partial_1 f(x,y) &=& 0\\ \partial_2 f(x,y) &=& 0\end{array}\right. \iff (x,y) = (0,0) \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = \ln(2)$$

CC BY NC

Les points critiques de f sont le point $(0,0)$ et le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{\ln(2)}$.
Remarquons que pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x^2+y^2 = \ln(2)$ on a $f(x,y) = \sin\left(\pi\,\mathrm{e}^{-\ln(2)}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \leq 1$. Ainsi, f atteint un maximum global en chaque point du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{\ln(2)}$.
De plus, puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $0 < \pi\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \leq \pi$, on a $f(x,y) \geq 0$ avec $f(0,0) = 0$ donc f atteint un minimum global en $(0,0)$.

3) f est définie sur $]0\,;+\infty[\times\mathbb{R}$ et admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{2\ln x}{x} + 2(x-1) \qquad \partial_2 f(x,y) = 2y$$

donc

$$\left\{\begin{array}{rcl}\partial_1 f(x,y) & = & 0\\ \partial_2 f(x,y) & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{2\ln x}{x} + 2(x-1) & = & 0\\ 2y & = & 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl}2\ln x + 2x^2 - 2x & = & 0\\ y & = & 0\end{array}\right.$$

La fonction $g : x \mapsto 2\ln x + 2x^2 - 2x$ s'annule en $x = 1$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{2}{x} + 4x - 2 = \dfrac{4x^2-2x+2}{x}$.
Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $4x^2-2x+2 > 0$ (car $\Delta < 0$) donc g est continue strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. Le théorème de la bijection assure donc que $g(x) = 0 \iff x = 1$.
On en déduit que $(x,y) = (1,0)$ est l'unique point critique de f. Puisque $\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, $\ln(x)^2 \geq 0$, $(x-1)^2 \geq 0$ et $y^2 \geq 0$ on a $f(x,y) \geq 0$ donc $f(1,0) = 0$ est le minimum global de f.

Correction de l'exercice 3 :

— $F(m,s)$ est défini si et seulement si $s \neq 0$ donc $D = \{(m,s) \in \mathbb{R}^2 \mid s \neq 0\}$.

— Puisque $\forall (m,s) \in \mathbb{R}^2$ on a $\mathrm{e}^{\frac{-m^2+(m-2)^2}{2s}} > 0$, alors $F(m,s)$ est du signe de s. Ainsi, $\ln(F)$ est défini si et seulement si $s > 0$.
F prend des valeurs strictement positives et strictement négatives donc si (m_0,s_0) maximise F, alors $F(m_0,s_0) > 0$ donc $\ln(F(m_0,s_0))$ est bien défini.

(m_0,s_0) maximise Fsi et seulement si pour tout $(m,s) \in \mathbb{R}^2$, $F(m,s) \leq F(m_0,s_0)$

si et seulement si pour tout $(m,s) \in \mathbb{R}^2$, $F(m,s) < 0$ ou $F(m,s) > 0$ et $\ln(F(m,s)) \leq \ln(F(m_0,s_0))$

si et seulement si (m_0,s_0) maximise $\ln(F)$

— Pour $s > 0$ on a $\ln(F) = \dfrac{-m^2-(m-2)^2}{2s} - \ln(s)$ donc $\dfrac{\partial \ln(F)}{\partial m} = \dfrac{-2m-2(m-2)}{2s} = \dfrac{2-2m}{s}$ et $\dfrac{\partial \ln(F)}{\partial s} = \dfrac{m^2+(m-2)^2}{2s^2} - \dfrac{1}{s} = \dfrac{m^2+(m-2)^2-2s}{2s^2}$

— Quel que soit $s \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{\partial \ln(F)}{\partial m}(m,s)$ s'annule uniquement en $m = 1$ et change de signe donc l'unique maximum de $m \mapsto \ln(F(m,s))$ est en $m = 1$, donc l'unique maximiseur de $m \mapsto F(m,s)$ est en $m = 1$.

— Pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$, $F(m_0,s) = \dfrac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-1/s}$.
La dérivée de $f : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-x}$ vérifie $\forall x \in [0\,;+\infty[$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(1-x)$ donc f admet un maximum strict en 1, donc $s \mapsto F(m_0,s)$ atteint son unique maximum lorsque $\dfrac{1}{s} = 1$ c'est à dire lorsque $s = 1$.

— Pour tout $(m,s) \in D$, $(m,s) \neq (m_0,s_0) \Rightarrow m \neq m_0$ ou $s \neq s_0$.
Si $m \neq m_0$, alors $F(m,s) < F(m_0,s) \leq F(m_0,s_0)$ car m_0 est l'unique maximiseur de $m \mapsto F(m,s)$. De même, si $s \neq s_0$, $F(m,s) \leq F(m_0,s) < F(m_0,s_0)$ car s_0 est l'unique maximiseur de $s \mapsto F(m_0,s)$.

Correction de l'exercice 4 :

1) Pour une fonction de Cobb-Douglas f et pour tout réel $\lambda > 0$, $f(\lambda K, \lambda L) = c\lambda^{alpha+\beta}K^\alpha L^\beta = \lambda^{\alpha+\beta}f(K,L)$. Or $\lambda^{\alpha+\beta} > \lambda \iff \alpha+\beta > 1$, on en déduit donc que les rendements d'échelle sont...
   — croissant si et seulement si $\alpha+\beta > 1$
   — décroissant si et seulement si $\alpha+\beta < 1$

CC BY NC

— constant si et seulement si $\alpha+\beta=1$

2) La productivité marginale du capital est $\dfrac{\partial f}{\partial K}(K,L)=c\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}$ et la productivité marginale du travail est $\dfrac{\partial f}{\partial L}(K,L)=c\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}$.

3) a) Pour un réel $L>0$ fixé, il faut montrer que $p_1 : K\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial K}(K,L)$ est décroissante. Or, $\forall K>0$, $p_1'(K)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial K^2}=c\alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2}L^{\beta}$. Puisque $\alpha+\beta=1$ on a $\alpha<1$ donc $p_1'(K)<0$.
De même pour un réel $K>0$ fixé et la fonction $p_2 : L\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial L}(K,L)$: $\forall L>0$, $p_2'(L)=c\beta(\beta-1)K^{\alpha}L^{\beta-2}$ donc $p_2'(L)<0$.
On a donc montré que la productivité marginale de chaque facteur décroît lorsque ce facteur croit.

b) Pour un réel $L>0$ fixé, considérons la fonction $q_1 : K\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial L}(K,L)$, qui à une quantité de travail K associe la productivité marginale du travail en (K,L). Alors $\forall K>0$, $q_1'(K)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial K\partial L}(K,L)=c\alpha\beta K^{\alpha-1}L^{\alpha-1}>0$ donc q_1 est croissante.
De même, pour un réel $K>0$ fixé et pour la fonction $q_2 : L\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial K}(K,L)$, on a $\forall L>0$, $q_2'(L)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial L\partial K}(K,L)=c\alpha\beta K^{\alpha-1}L^{\alpha-1}>0$.
On a montré que l'augmentation de l'utilisation d'un facteur fait augmenter la productivité marginale de l'autre facteur.

Correction de l'exercice 5 :

1) La fonction $f : x\mapsto x\,\mathrm{e}^{-x}$ admet le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $F(x,y)=f(x^2+y^2)$. On distingue 4 cas selon la valeur de α :

— Si $\alpha>\mathrm{e}^{-1}$ ou $\alpha<0$, l'équation $f(x)=\alpha$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc $F(x,y)=\alpha$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}^2$.

— Si $\alpha=\mathrm{e}^{-1}$, l'équation $f(x)=\alpha$ admet $x=1$ pour unique solution. Ainsi, $F(x,y)=\alpha \iff x^2+y^2=1$ donc l'ensemble des solutions de $F(x,y)=\alpha$ dans $\mathbb{R}^2$ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

— Si $\alpha\in]0\,;\mathrm{e}^{-1}[$, l'équation $f(x)=\alpha$ admet exactement deux solutions, l'une dans $]0\,;1[$ et l'autre dans $]1\,;+\infty[$, d'après le tableau de variation de f et le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à chacun de ces deux intervalles (car f est continue). Si on note a_1 et a_2 ces deux solutions, alors $F(x,y)=\alpha\iff x^2+y^2=a_1$ ou $x^2+y^2=a_2$, donc l'ensemble des solutions de $F(x,y)=\alpha$ est la réunion du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{a_1}$ et du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{a_2}$.

— Si $\alpha=0$, alors $F(x,y)=\alpha\iff x^2+y^2=0\iff (x,y)=(0,0)$ donc la seule solution est le point $(0,0)$.

2) Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2x-2x(x^2+y^2)=2x\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(1-x^2-y^2)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)=2y\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(1-x^2-y^2)$.
Les points critiques de F sont donc $(0,0)$ et l'ensemble des points (x,y) tels que $x^2+y^2=1$, c'est à dire le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.
$F(0,0)=0$ et $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $F(x,y)\geq 0$ donc $F(0,0)$ est le minimum global de F.
D'après la question 1, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $F(x,y)=f(x^2+y^2)\leq f(1)$. Si $x^2+y^2=1$, $F(x,y)$ est donc le maximum global de F. F est donc maximale sur tout le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

Correction de l'exercice 6 :

1) Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)=4x^3-4(x-y)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)=4y^3+4(x-y)$

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) & = & 0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}4x^3-4x+4y & = & 0\\ 4y^3+4x-4y & = & 0\end{array}\right.$$

en additionnant les deux lignes on trouve $4(x^3+y^3)=0$ donc $x^3+y^3=0$.
Si (x,y) est un point critique, on a donc $x^3=-y^3$ donc $x=-y$. Alors $4x^3-4x+4y=0 \iff 4x^3-8x=0 \iff 4x(x^2-2)=0 \iff x=0$ ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$. Réciproquement, si $(x,y)\in\{(0,0),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})\}$, alors (x,y) est un point critique de F.
On a

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)=12x^2-4,\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)=12y^2-4\qquad ,\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)=4$$

donc

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0)=-4,\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(0,0)=-4,\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(0,0)=4$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\sqrt{2},-\sqrt{2})=20,\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\sqrt{2},-\sqrt{2})=20,\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(\sqrt{2},-\sqrt{2})=4$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(-\sqrt{2},\sqrt{2})=20,\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(-\sqrt{2},\sqrt{2})=20,\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(-\sqrt{2},\sqrt{2})=4$$

donc le dicriminant de la forme quadratique $(y_1,y_2)\mapsto \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)y_1^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)y_1y_2+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)y_2^2$ est strictement négatif en $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et en $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, f atteint des extremums locaux stricts en ces points. En $(0,0)$ le discriminant vaut 0 donc ce n'es pas un extremum local strict.
En $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et en $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ on a $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}>0$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}>0$ donc F atteint des minimums locaux en ces points. $f(\sqrt{2},-\sqrt{2})=f(-\sqrt{2},\sqrt{2})=-8$.

2) $f(0,0)=0$, montrons donc qu'il existe toujours des points (x,y) dans des disques de centre $(0,0)$ arbitrairement petits tels que $f(x,y)>0$ et d'autres tels que $f(x,y)>0$. $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $f(x,x)=2x^4>0$, et $f(x,-x)=2x^4-8x^2=2x^2(x^2-4)=2x^2(x-2)(x+2)$. Lorsque $0<|x|<2$ on a donc $f(x,-x)<0$. Ainsi, $(0,0)$ n'est pas un minimum local.

3) Suivant l'indication, on développe :

$$\begin{aligned}(x^2-2)^2+(y^2-2)^2+2(x+y)^2 &= x^4-4x^2+4+y^4-4y^2+4+2x^2+2y^2+4xy\\ &= x^4+y^4-2(x^2+y^2-2xy)+8\\ &= x^4+y^4-2(x-y)^2+8\\ &= f(x,y)+8\end{aligned}$$

Puisque $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(x^2-2)^2+(y^2-2)^2+2(x+y)^2\geq 0$, on a $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)\geq -8$ donc -8 est un minimum global (atteint uniquement en $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et en $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ d'après la question 1).

Correction de l'exercice 7 :

1) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x(1+y)^3$ et $\frac{\partial f}{\partial y}=3x^2(1+y)^2+2y$

2) $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ est un point critique de f si et seulement si $\left\{\begin{array}{rcl}2x(1+y)^3&=&0\\3x^2(1+y)^2+2y&=&0\end{array}\right.$.
$2x(1+y)^3=0\iff x=0$ ou $y=-1$. Si $x=0$, alors $3x^2(1+y)^2+2y=0\iff 2y=0\iff y=0$ donc $(0,0)$ est point critique.
Si $y=-1$, alors $3x^2(1+y)^2+2y=0\iff 2y=0$ contradiction, donc le seul point critique est $(0,0)$.

3) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2(1+y)^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=6x(1+y)^2$, $\frac{\partial f}{\partial y^2}(x,y)=6x^2(1+y)+2$.
Ainsi $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=2$.
Le discriminant de la forme quadratique $(y_1,y_2)\mapsto 2y_1^2+2y_2^2$ est $0^2-2\times 2=-4<0$ donc $(0,0)$ est un extremum local de f. Puisque $2>0$ c'est un minimum local.

4) $f(0,0)=0$, or pour $x=1$ on a $f(1,y)=(1+y)^3+y^2\underset{y\to-\infty}{\sim}y^3$ donc $\lim\limits_{y\to-\infty}f(1,y)=-\infty$. Il existe donc des points $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y)<0$ donc $f(0,0)$ n'est pas un minimum global.

cc BY NC

5) Supposons que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue qui admet un unique extremum local. Supposons que cet extremum est un minimum. Il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$ tel que $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $g(x) \geq g(x_0)$ avec égalité si et seulement si $x = x_0$ (sinon le minimum ne serait pas unique).

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_2) < g(x_0)$. Si $x_2 > x_0$, alors il existe $x_1 \in]x_0, x_0+\delta[$ tel que $g(x_2) < g(x_0) < g(x_1)$. Or g est continue sur $\mathbb{R}$ donc est bornée et atteint ses bornes sur $[x_0 ; x_2]$. Notons M son maximum et notons $x_3 \in [x_0, x_2]$ tel que $g(x_3) = M$. On a $M \geq g(x_1) > g(x_0) > g(x_2)$ donc $x_3 \neq x_0$ et $x_3 \neq x_2$. On a donc $x_3 \in]x_0, x_2[$ donc M est un maximum local sur l'intervalle $]x_0, x_2[$ donc sur $\mathbb{R}$. Cela contredit l'unicité de l'extremum local.

On en conclut que x_0 est un minimum global.

Si x_0 est un maximum local, il suffit de remplacer g par $-g$ pour se ramener au cas précédent.

Correction de l'exercice 8 : $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}(3 - x_1(3x_1 + 4x_2))$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}(4 - x_2(3x_1 + 4x_2))$.

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2) \text{ est un extremum local de } f \text{si et seulement si} &\left\{\begin{array}{rcl} 3 - 3x_1^2 - 4x_1x_2 &=& 0 \\ 4 - 3x_1x_2 - 4x_2^2 &=& 0 \end{array}\right. \\
\text{si et seulement si} &\left\{\begin{array}{rcl} x_1(3x_1 + 4x_2) &=& 3 \\ x_2(3x_1 + 4x_2) &=& 4 \end{array}\right. \\
\text{si et seulement si} &\left\{\begin{array}{rcl} 3x_1 + 4x_2 &=& a \\ ax_1 &=& 3 \\ ax_2 &=& 4 \end{array}\right. , a \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

En multipliant la 1ère ligne par a on trouve $3ax_1 + 4ax_2 = a^2$ donc $9 + 16 = a^2$ d'où $a = 5$ ou $a = -5$.
On en déduit que $(x_1, x_2) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ et $(x_1, x_2) = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ sont les deux seuls points critiques de f. Puisque $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f(-x_1, -x_2) = -f(x_1, x_2)$, il suffit d'étudier un seul de ces points critiques.
Pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}(-6x_1 - 4x_2 - x_1(3 - 3x_1^2 - 4x_1x_2)) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}\left(-9x_1 - 4x_2 + x_1^2(3x_1 + 4x_2)\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}(-3x_1 - 8x_2 - x_2(4 - 3x_1x_2 - 4x_2^2)) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}(-3x_1 - 12x_2 + x_2^2(3x_1 + 4x_2))$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}(-4x_1 - x_2(3 - 3x_1^2 - 4x_1x_2)) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}(-4x_1 - 3x_2 + x_1x_2(3x_1 + 4x_2))$$

donc en $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ on a :

$$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{9}{25}+\frac{16}{25}\right)}\left(\frac{-27}{5} - \frac{16}{5} + \frac{9}{25}\right) = -\frac{34}{5}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

$$c = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}\left(-\frac{9}{5} - \frac{48}{5} + \frac{16}{5}\right) = -\frac{41}{5}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

$$b = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}\left(-\frac{12}{5} - \frac{12}{5} + \frac{12}{5}\right) = -\frac{12}{5}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

$b^2 - ac = \mathrm{e}^{-1}\left(\dfrac{144 - 1394}{25}\right) < 0$ donc f admet un extremum local en $\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$. Comme $a < 0$ et $c < 0$, c'est un maximum local. On en déduit ainsi que $\left(-\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$ est un minimum local de f.

Correction de l'exercice 9 : Recherche des points critiques de g :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= \mathrm{e}^x(x + y^2 + \mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^x(1 + \mathrm{e}^x) \\
&= \mathrm{e}^x(1 + x + y^2 + 2\,\mathrm{e}^x) \\
\frac{\partial g}{\partial y} &= 2y\,\mathrm{e}^x
\end{aligned}$$

donc :

$$(x,y) \text{ est un point critique de } g \text{si et seulement si} \left\{ \begin{array}{rcl} e^x(1+x+y^2+2e^x) & = & 0 \\ 2y\,e^x & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\text{si et seulement si} \left\{ \begin{array}{rcl} 1+x+2e^x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

Posons $f(x) = 1 + x + 2e^x$. f est strictement croissante comme somme de fonctions strictement croissantes, $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$.
Le seul point critique de g est $(x_0, 0)$.

Nature du point critique :
On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= e^x(1+x+y^2+2e^x) + e^x(1+2e^x) \\ &= e^x(2+x+y^2+2e^x) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= 2e^x \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} &= 2y\,e^x \end{aligned}$$

donc :

$$a = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_0,0) = e^{x_0}(1 + \underbrace{1+x_0+2e^{x_0}}_{=0}) = e^{x_0} \quad ; \quad b = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x_0,0) = 0 \quad ; \quad c = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_0,0) = 2e^{x_0}$$

On a $b^2 - ac = -2e^{2x_0} < 0$ donc ce point critique est un extremum local, et $a > 0$ donc c'est un minimum local.

Local ou global :
Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $x + y^2 + e^x \geq x + e^x$ donc $g(x,y) \geq e^x(x+e^x)$.
Posons $h(x) = e^x(x+e^x) = x\,e^x + e^{2x}$. h est dérivable et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) &= e^x + x\,e^x + 2e^{2x} \\ &= e^x(1+x+2e^x) \\ (2mm] &= e^x f(x) \end{aligned}$$

Or f est strictement croissante et s'annule en x_0, donc $h'(x)$ est négatif si $x < x_0$ et positif sinon, on en déduit que h est décroissante sur $]-\infty, x_0[$ et croissante sur $]x_0\,; +\infty[$. Elle atteint donc son minimum en x_0 ce qui signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) \geq h(x_0)$ donc $g(x,y) \geq h(x) \geq h(x_0) = g(x_0, 0)$. Le point $(x_0, 0)$ est donc un minimum global de g.

CC BY NC