⋆

Exercice 1 — Voir correction

On lance deux dés équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6. On note X la somme des faces obtenues et Y le produit des faces obtenus.

1) Quels sont les valeurs prises par X ? Par Y ?
2) Déterminer la loi de probabilité de X et de Y
3) Calculer l'espérance de X et l'espérance de Y

⋆

Exercice 2 — Voir correction

Un joueur paie 10€ pour jouer à un jeu qui consiste à tirer une carte au hasard dans un paquet de cartes.

- S'il pioche un As, il gagne a€, où a est un réel supérieur ou égal à 15.
- S'il pioche une figure (Roi, Dame, Valet), il gagne 15€
- S'il pioche un 8, un 9 ou un 10, il gagne 5€
- Dans tous les autres cas, il ne gagne rien.

On note X le gain algébrique du joueur.

1) Déterminer la loi de X en fonction de a.
2) Déterminer la fonction de répartition de X et la tracer
3) Calculer l'espérance de X en fonction de a
4) Quelle valeur faut-il donner à a pour que le jeu soit équitable, c'est à dire qu'il ait une espérance nulle ?

⋆

Exercice 3 — Voir correction

On lance une pièce équilibrée à pile ou face trois fois de suite, et on note X le nombre de Piles obtenus.

1) Déterminer les valeurs prises par X
2) Déterminer la loi de X sous forme de tableau
3) Déterminer la fonction de répartition de X et tracer sa courbe représentative dans un repère.

⋆

Exercice 4 — Voir correction

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On pioche successivement et avec remise k boules dans l'urne, et on note X la valeur maximale inscrite sur les boules tirées.

1) Donner $X(\Omega)$.
2) Calculer $\mathbb{P}(X \leq 1)$
3) Calculer $\mathbb{P}(X \leq i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$
4) En déduire la loi de X.

⋆

Exercice 5 — Voir correction

Soit a un réel. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose $p_i = \dfrac{3a}{2^{i+2}}$.

1) Déterminer la valeur de a telle qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = i) = p_i$$

2) Montrer que X admet une espérance et calculer $\mathbb{E}[X]$.
3) Montrer que X admet une variance et calculer $V(X)$.

⋆

Exercice 6 — Voir correction

On appelle **médiane** d'une variable aléatoire X n'importe quel réel $x_{1/2}$ tel que

$$\mathbb{P}\Big(X \leq x_{1/2}\Big) \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\Big(X \geq x_{1/2}\Big) \geq \frac{1}{2}$$

Si $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ avec I égal à $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$ et que les x_i sont rangés dans l'ordre croissante, montrer que $x_{1/2}$ est la plus petite valeur de x_i telle que $\mathbb{P}(X \leq x_{1/2}) \geq \dfrac{1}{2}$.

★★

Exercice 7 — **Voir correction**

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}$ vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{2 \times 3^{|k|}}$$

1) Vérifier que X est une variable aléatoire bien définie.
2) Montrer que X admet un moment d'ordre 1 et un moment d'ordre 2, et calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.
3) Montrer que pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \dfrac{3}{2a^2}$

★

Exercice 8 — **Voir correction**

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k$$

★

Exercice 9 — **Voir correction**

Soit $q \in]0,1[$ et soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} 1 - q^{\lfloor x \rfloor} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière inférieure de x, c'est à dire l'unique entier relatif n tel que $n \leqslant x < n+1$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
2) Montrer que F est croissante
3) Montrer qu'il existe une variable aléatoire X telle que F est la fonction de répartition de X.

★

Exercice 10 — **Voir correction**

Soit $\lambda > 0$ un réel et soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

1) On pose $Y = X^2$. Déterminer pour quelles valeurs de λ la variable aléatoire Y admet une espérance et calculer $\mathbb{E}[Y]$ le cas échéant.
2) On pose $Z = X!$. Déterminer pour quelles valeurs de λ la variable aléatoire Z admet une espérance et calculer $\mathbb{E}[Z]$ le cas échéant.

★

Exercice 11 — **Voir correction**

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p avec $p \in]0\,;1[$. On pose $Y = \mathrm{e}^X$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur l'entier r pour que Y admette un moment d'ordre r et calculer $E[Y^r]$ lorsque c'est possible.

★★

Exercice 12 — **Voir correction**

(D'après oraux ENS 2019) Un gardien de nuit dispose de 10 clés indiscernables dans l'obscurité, et dont une seule permet d'ouvrir une certaine porte. Selon son état, il a deux méthodes possibles pour ouvrir la porte :

A. À jeun, il effectue des essais successifs en retirant les clés déjà essayées.

B. Ivre, à chaque nouvel essai, il utilise une clé prise au hasard parmi les 10 clés.

On note X_A le nombre de clés essayées (y compris la bonne) avant d'ouvrir la porte dans le cas **A** et X_B le nombre de clés essayées (y compris la bonne) avant d'ouvrir la porte dans le cas **B**.

1) Déterminer la loi de la variable aléatoire X_A et son espérance
2) Déterminer la loi de la variable aléatoire X_B et son espérance
3) On sait que le gardien est ivre un jour sur quatre. Un jour, après avoir essayé 8 clés, il n'a toujours pas réussi à ouvrir la porte. Calculer la probabilité pour qu'il soit ivre.

★ ★ ★
Exercice 13 — Voir correction

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages avec remise et on note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts qui ont été tirées lors des k premiers tirages. On pose $Y_0 = 0$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit Z_k la variable aléatoire égale à 1 si le k-ième tirage amène un numéro qui n'a pas encore été tiré, et égale à 0 sinon. On remarque que $Z_1 = 1$.

1) Déterminer la loi de Z_2.
2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la valeur de $\mathbb{P}_{\{Y_k=j\}}(Z_{k+1} = 1)$. En déduire : $\mathbb{P}(Z_{k+1} = 1) = 1 - \frac{1}{n}\mathbb{E}[Y_k]$
3) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $Y_k = \sum_{j=1}^{k} Z_j$, montrer :
$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = 1) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\mathbb{P}(Z_j = 1)$$
4) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Z_k = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$.
5) Déterminer alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'espérance de Y_k.

★
Exercice 14 — Voir correction

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{E}[X]$ existe et $\mathbb{P}(X > 0) > 0$.
Soit Y la variable aléatoire définie par
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y = k) = \frac{k\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{E}[X]}$$

1) Montrer que la variable aléatoire Y est bien définie.
2) On suppose dans cette question que X suit une loi de Poisson. Montrer que $X + 1$ et Y ont la même loi.
3) Réciproquement, on suppose dans cette question que Y et $X + 1$ on la même loi. Montrer que X suit une loi de Poisson.

★ ★ ★
Exercice 15 — Voir correction

(D'après oraux ESCP 2016) On dispose de deux urnes U_1 et U_2 et de n boules numérotées de 1 à n (avec $n \geq 2$).
Soit m un entier fixé tel que $0 \leq m \leq n$. On place au hasard m boules dans l'urne U_1 et les $n - m$ autres dans l'urne U_2.
On choisit au hasard un entier j de $[\![1, n]\!]$ et on déplace la boule numéro j de l'urne dans laquelle elle se trouve pour la mettre dans l'autre urne.
On répète indéfiniment cette expérience. Pour tout $k \geq 1$, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans l'urne U_1 à l'issue des k premières expériences.

1) Donner la loi de X_1 et calculer $\mathbb{E}(X_1)$
2) Déterminer pour tout k et pour tout i une relation entre $\mathbb{P}(X_{k+1} = i)$, $\mathbb{P}(X_k = i - 1)$ et $\mathbb{P}(X_k = i + 1)$.
3) Soit G_k le polynôme défini par $G_k(t) = \sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(X_k = i)t^i$.
   a) Donner une expression de $\mathbb{E}(X_k)$ à l'aide de la fonction G_k
   b) Déterminer une relation entre $G_{k+1}(t)$, $G_k(t)$ et $G'_k(t)$.
   c) En déduire l'expression de $\mathbb{E}(X_k)$ en fonction de n. Déterminer $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{E}(X_k)$

★ ★ ★
Exercice 16 — Voir correction

Soit X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui admet une espérance.

1) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\mathbb{P}(X > n) = 0$
2) Montrer que $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X > n)$.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 17 — Voir correction

On lance un dé truqué qui tombe sur 6 avec probabilité p. On le lance plusieurs fois de suite et on note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués au moment ou on obtient 6 pour la r-ième fois. Déterminer la loi suivie par X.

⋆ ⋆
Exercice 18 — Voir correction

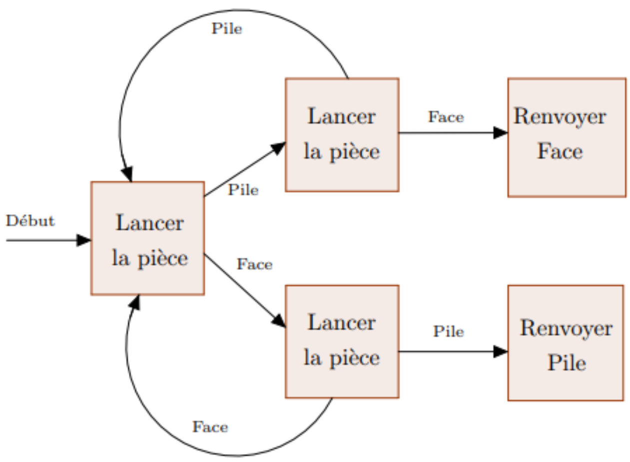
Un sac contient n pièces numérotées de 1 à n. On pioche une pièce au hasard et on la lance. On note X le numéro de la pièce, et on pose $Y = kX$ avec

$$k = \begin{cases} 1 & \text{si la pièce est tombée sur face} \\ -1 & \text{si la pièce est tombée sur pile} \end{cases}$$

1) Déterminer la loi suivie par X
2) Calculer l'espérance de X
3) Déterminer la loi suivie par Y
4) On pose $Z = Y^2 - X$. Calculer l'espérance de Z

⋆ ⋆
Exercice 19 — Voir correction

(D'après ENS 2017) On dispose d'une pièce truquée qui renvoie « pile » avec une probabilité $p \in]0,1[$ et on souhaite s'en servir pour générer un pile ou face équilibré. John von Neumann a imaginé l'algorithme suivant (où les lancers successifs de la pièce truquée se font indépendamment) :



On note $T \in \{2, 4, 6, ...\}$ la variable aléatoire donnée par le nombre de lancers néccessaire pour que l'algorithme se termine, et $R \in \{P, F\}$ le résultat de l'algorithme (où on note P pour « pile » et F pour « face »).

1) Que valent T et R si on obtient comme premiers tirages $PPPPFFPPPFFP$?
2) Démontrer que pour tout $k > 1$,

$$\mathbb{P}(T = 2k) = (p^2 + (1-p)^2)^{k-1} 2p(1-p)$$

   En déduit que l'algorithme se termine presque sûrement, c'est à dire que $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$.
3) Démontrer que l'algorithme renvoie bien « pile » ou « face » avec même probabilité, c'est à dire que $\mathbb{P}(R = \textit{pile}\,) = \frac{1}{2}$.
4) Calculer $\mathbb{E}[T]$.

⋆⋆⋆

Exercice 20 **Voir correction**

Entropie d'une variable aléatoire discrète (d'après BCE ESSEC 2019)

Partie A : Logarithme de base 2

La fonction logarithme de base 2, notée $\log_2$, est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\log_2(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$, où ln est la fonction logarithme népérien.

1) Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a $\log_2(xy) = \log_2(x) + \log_2(y)$.
2) Vérifier que pour tout réel α, $\log_2(2^\alpha) = \alpha$.
3) Montrer que la fonction $\log_2$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\log_2'(x)$.
4) On considère la fonction f définie pour tout $t \in [0\,;1]$ par

$$f(t) = \begin{cases} -t\log_2(t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

   a) Démontrer que f est continue sur $[0\,;1]$
   b) Étudier les variations de f sur $[0\,;1]$
   c) Montrer que la limite de $f'(t)$ lorsque t tend vers 0 est $+\infty$.
   d) Tracer la courbe représentative de f sur $[0\,;1]$. On pourra utilise $0,36 < e^{-1} < 0,37$

Partie B - Entropie Dans cette partie, on considère X une variable aléatoire de loi à support dans $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ où n est un entier naturel telle que $\forall k \in \{0, 1, ..., \}$, $\mathbb{P}(X = k) > 0$. On appelle **entropie** de X le réel

$$H(X) = \sum_{k=0}^{n} -\mathbb{P}(X = k)\log_2(\mathbb{P}(X = k))$$

5) On définit la fonction $g : \{0, ..., n\} \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant $g(k) = \log_2(\mathbb{P}(X = k))$ pour k élément de $\{0, 1, ..., n\}$. Montrer que $H(X) = -\mathbb{E}(g(X))$.
6) Montrer que $H(X) \geq 0$
7) Soit p un réel tel que $0 < p < 1$. On suppose dans cette question que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p.
   a) Calculer $H(X)$ en fonction de p. On note ψ la fonction qui à p associe $H(X)$.
   b) Justifier que ψ est deux fois dérivable sur $]0\,;1[$ et montrer que pour tout $p \in]0\,;1[$ on a $\psi''(p) < 0$
   c) Calculer $\psi'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et en déduire la valeur p_0 où ψ est maximale.
8) On suppose dans cette question que la loi de X est à support $\{0, 1, 2, 3\}$. Calculer l'entropie de X
   a) si X suit la loi uniforme sur $\{0, 1, 2, 3\}$
   b) si X suit la loi :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4} \quad ; \quad \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{8}$$

Partie C - Entropie maximum

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et soit X une variable aléatoire à support dans $\{1, 2, ..., n\}$. Le but de cette partie est de montrer que l'entropie de X est maximale si X suit la loi uniforme sur $\{1, 2, ..., n\}$. Pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, on note p_k le réel $\mathbb{P}(X = x_k)$.

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{1, 2, ..., n\}$.

9) Montrer que $H(U) = \log_2(n)$.
10) Montrer que $H(U) - H(X) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log_2\left(\dfrac{1}{np_k}\right)$.
11) Montrer que pour tout $x > 0$, $\log_2(x) \leq \dfrac{1}{\ln(2)}(x - 1)$.

    Indication : On pourra étudier la fonction $f : x \mapsto \log_2(x) - \dfrac{1}{\ln(2)}(x - 1)$ définie sur $]0\,;+\infty[$.
12) Déduire des questions précédentes que $H(U) - H(X) \geq 0$. Conclure.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) On peut représenter les résultats possibles de la somme de deux dés sous forme de tableau

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Les valeurs prises par X sont $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.
On peut représenter les résultats possibles pour le produit de deux dés sous forme de tableau :

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

les valeurs prises par Y sont $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$.

2) Les tableaux représentent 36 issues équiprobables, on en déduit les lois de X et de Y :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

y_i	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

3) L'espérance de X est

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + \cdots + 12 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{260}{36} \\ &= \frac{65}{9} \end{aligned}$$

L'espérance de Y est

$$\begin{aligned} E(Y) &= 1 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{3}{36} + 3 \times \frac{5}{36} + \cdots + 36 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{441}{36} \\ &= \frac{49}{4} \end{aligned}$$

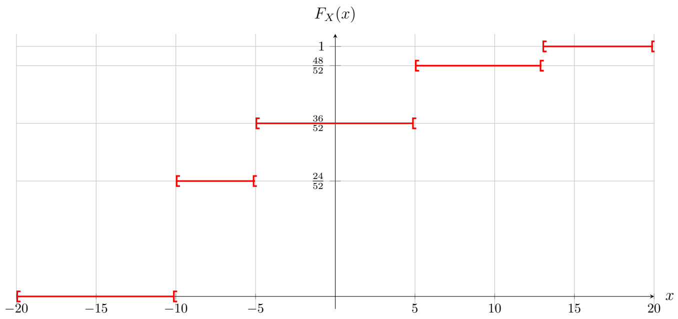
Correction de l'exercice 2 :

1) Les valeurs prises par X sont $a - 10$, 5, -5 et -10.
On a

x_i	-10	-5	5	$a - 10$
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{24}{52}$	$\frac{12}{52}$	$\frac{12}{52}$	$\frac{4}{52}$

2) La fonction de répartition de X est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -10 \\ \frac{24}{52} & \text{si } -10 \leq x < -5 \\ \frac{36}{52} & \text{si } -5 \leq x < 5 \\ \frac{48}{52} & \text{si } 5 \leq x < a - 10 \\ 1 & \text{si } a - 10 \leq x \end{cases}$$



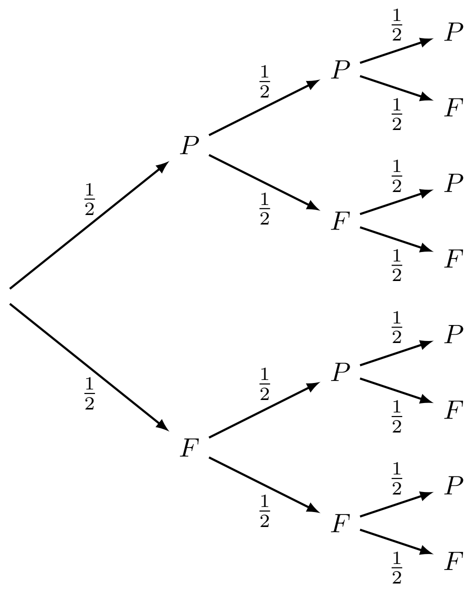
3) $\mathbb{E}[X] = -10 \times \dfrac{24}{52} - 5 \times \dfrac{12}{52} + 5 \times \dfrac{12}{52} + (a-10)\dfrac{4}{52} = \dfrac{4a - 280}{52}$.

4) Pour avoir $\mathbb{E}[X] = 0$ il suffit donc d'avoir $4a - 280 = 0$ soit $a = \dfrac{280}{4} = 70$. Si la somme gagnée lorsque le joueur pioche un as est 70€, alors le jeu est équitable.

Correction de l'exercice 3 :

1) Les valeurs prises par X sont 0, 1, 2 et 3.

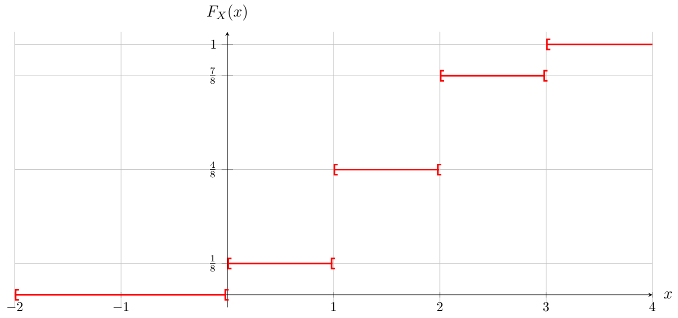
2) On peut représenter les trois tirages successifs par un arbre :



X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{1}{2}$. La loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

3) La fonction de répartition de X :



Correction de l'exercice 4 :

1) $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
2) $(X \leq 1)$ est l'événement « toutes les boules piochées portent le numéro 1 ».
   Ainsi, $\mathbb{P}(X \leq 1) = \underbrace{\frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \times \cdots \times \frac{1}{n}}_{k \text{ fois}} = \frac{1}{n^k}$
3) $\mathbb{P}(X \leq i)$ est l'événement « toutes les boules piochées portent un numéro inférieur ou égal à i ».
   Pour une boule tirée, la probabilité que son numéro soit inférieur ou égal à i est $\frac{i}{n}$.
   Ainsi $\mathbb{P}(X \leq i) = \underbrace{\frac{i}{n} \times \cdots \times \frac{i}{n}}_{k \text{ fois}} = \frac{i^k}{n^k}$
4) Soit $i \in [\![1, k]\!]$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = i) &= \mathbb{P}(X \leq i) - \mathbb{P}(X \leq i-1) \\
&= \frac{i^k}{n^k} - \frac{(i-1)^k}{n^k} \\
&= \frac{i^k - (i-1)^k}{n^k}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5 :

1) Soit $N \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{i=0}^{N} \frac{3a}{2^{i+2}} = \frac{3a}{2^2} \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{2^i}$.
   On reconnait une série géométrique convergente, donc cette expression admet une limite lorsque N tend vers $+\infty$ et $\sum_{i=0}^{+\infty} p_i = \frac{3a}{4} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3a}{2}$.
   En posant $a = \frac{2}{3}$, on a donc $\sum_{i=0}^{+\infty} p_i = 1$, et comme de plus $\forall i \in \mathbb{N}$, $p_i \geq 0$ on en déduit qu'il existe une variable aléatoire X telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = i) p_i = \frac{3}{2^{i+2}} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2^{i+1}}$.
2) X admet une espérance si et seulement si la série de terme général kp_k converge.
   Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} kp_k &= \sum_{k=0}^{N} \frac{k}{2^{k+1}} \\
&= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{N} k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

on reconnaît une série géométrique dérivée, donc cette expression converge lorsque N tend vers $+\infty$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} \\
&= \frac{1}{4} \times 4 \\
&= 1
\end{aligned}$$

3) X admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2, si et seulement si la série de terme général k^2p_k converge.
Soit $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} k^2 p_k &= \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{2^{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2-k}{2^{k+1}} + \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{2^{k+1}} \\ &= \frac{1}{2^3}\sum_{k=2}^{N} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{1}{2^2}\sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\end{aligned}$$

on reconnaît une série géométrique dérivée double et une série géométrique dérivée, donc cette expression converge lorsque N tend vers $+\infty$ et on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \frac{1}{8} \times \frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} \\ &= 3\end{aligned}$$

Finalement, d'après la formule de Koenig-Huygens, $V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 3 - 1^2 = 2$.

Correction de l'exercice 6 : Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $x_k = x_{1/2}$. Alors par hypothèse on a $\mathbb{P}(X \leq x_k) \geq \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X \leq x_{k-1}) < \dfrac{1}{2}$
Il suffit de montrer qu'on a aussi $\mathbb{P}(X \geq x_k) \geq \dfrac{1}{2}$.
De plus, $\mathbb{P}(X \geq x_k) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x_{k-1})$ car c'est la probabilité de l'événement contraire, donc $\mathbb{P}(X \geq x_k) \geq \dfrac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 7 :

1) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, posons $p_k = \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{2 \times 3^{|k|}}$.
Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=-N}^{N} p_k &= \sum_{k=-N}^{0} p_k + \sum_{k=1}^{N} p_k \\ &= \sum_{k=-N}^{0} \frac{1}{2 \times 3^{|k|}} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2 \times 3^{|k|}} \\ &= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2 \times 3^{k}} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2 \times 3^{k}} \\ &= \frac{1}{2} \times \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{1}{2\times 3}\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{1}{2\times 3}\sum_{k'=0}^{N-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k'}\end{aligned}$$

On reconnaît deux séries géométriques, donc cette expression converge lorsque N tend vers $+\infty$ et on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} \\ &= 1\end{aligned}$$

ainsi X est une variable aléatoire bien définie.

2) X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} kp_k$ converge absolument, c'est à dire si et seulement si la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|p_k$ converge.

Pour $k \geq 0$, $kp_k = \dfrac{1}{6} \times k \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}$ et on reconnait un terme général proportionnel au terme général d'une série géométrique dérivée convergente.

Pour $k < 0$ on a $|k|p_k = \dfrac{1}{6}(-k)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-k}$ donc $\sum_{k<0} |k|p_k$ converge pour la même raison. Ainsi, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} kp_k$ converge absolument donc X admet une espérance.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-N}^{N} kp_k &= \sum_{k=-N}^{0} \frac{k}{2\times 3^{|k|}} + \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{2\times 3^{|k|}} \\
&= \sum_{k'=0}^{N} \frac{-k'}{2\times 3^{k'}} + \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{2\times 3^{k}} \\
&= 0 && \text{car tous les termes s'annulent}
\end{aligned}$$

donc $E(X) = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{k=-N}^{N} kp_k = 0$ donc $\mathbb{E}[X] = 0$.

La série $\sum k^2 p_k$ est une série positive donc elle converge absolument si et seulement si elle converge.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-N}^{N} k^2 p_k &= \sum_{k=-N}^{0} \frac{k^2}{2\times 3^{|k|}} + \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{2\times 3^{k}} \\
&= \sum_{k'=0}^{N} \frac{(k')^2}{2\times 3^{k}} + \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{2\times 3^{k}} \\
&= 2 \times \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{2\times 3^{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{3^k} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{k(k-1)}{3^k} + \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{3^k} \\
&= \frac{1}{3^2} \sum_{k=1}^{N} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

on reconnaît une série géométrique dérivée convergente et une série géométrique dérivée seconde convergente, donc cette expression converge lorsque N tend vers $+\infty$ et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^2 p_k &= \frac{1}{3^2} \times \frac{2}{(1-\frac{1}{3})^3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} \\
&= \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

On en déduit que X admet un moment d'ordre 2 et que $\mathbb{E}[X^2] = \dfrac{3}{2}$.

Finalement, d'après le théorème de Kœnig-Huygens :

$$V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

$$= \frac{3}{2} - 0^2$$
$$= \frac{3}{2}$$

3) Comme X admet une variance, on peut appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à X :

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$
$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{3}{2a^2}$$

Correction de l'exercice 9 :

1) Pour tout $x > 0$, $q^{\lfloor x \rfloor} = \mathrm{e}^{x \ln(q)}$ avec $q \in]0, 1[$ donc $\ln(q) < 0$.
On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln q = -\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x \ln q} = 0$. Ainsi, par somme de limites on a bien $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - q^{\lfloor x \rfloor} = 1$.
Pour tout $x < 0$ on a $F(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

2) Soient a, b deux réels avec $a < b$.
Si $a < b < 0$, alors $F(a) = F(b) = 0$
Si $a < 0 \leq b$, alors $F(a) = 0 \leq F(b)$ car $1 - q^{\lfloor b \rfloor} \geq 0$.
Si $0 \leq a \leq b$, alors $\lfloor a \rfloor \leq \lfloor b \rfloor$ car la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante. Ainsi, $\lfloor a \rfloor \ln(q) \geq \lfloor b \rfloor \ln(q)$ car $\ln(q) < 0$, donc $\mathrm{e}^{\lfloor a \rfloor \ln(q)} \geq \mathrm{e}^{\lfloor b \rfloor \ln(q)}$ et ainsi $q^{\lfloor a \rfloor} \geq q^{\lfloor b \rfloor}$.
On en déduit que $1 - q^{\lfloor a \rfloor} \leq 1 - q^{\lfloor floor b \rfloor}$, donc $F(a) \leq F(b)$.
Dans tous les cas, on a bien $F(a) \leq F(b)$, donc F est croissante sur $\mathbb{R}$.

3) Posons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = F(k) - F(k-1)$.
Si la série $\sum p_k$ converge et que sa somme vaut 1, alors il existe une variable aléatoire X telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = p_k$ et la fonction de répartition de X est alors la fonction F.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} p_k &= 1 - q^k - (1 - q^{k-1}) \\ &= q^{k-1} - q^k \\ &= q^{k-1}(1-q) \end{aligned}$$

En posant $p = 1 - q$, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = p(1-p)^{k-1}$. On reconnaît une loi géométrique de paramètre p donc il existe une variable aléatoire X dont la fonction de répartition est F.

Correction de l'exercice 10 :

1) $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ donc X admet une espérance et $E(X) = \lambda$.
D'après le théorème de transfert, Y admet une espérance si et seulement si la série de terme général $k^2 \mathbb{P}(X = k)$ converge absolument (donc si et seulement si elle converge car c'est une série positive).
$k^4 \mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} k^4 \frac{\lambda^k}{k!} \underset{k \to \infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\lambda} k(k-1)(k-2)(k-3) \frac{lambda^k}{k!} \underset{k \to \infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^4 \frac{\lambda^{k-4}}{(k-4)!}$.
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = 0$ car c'est le terme général d'une série exponentielle convergente, donc $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{\lambda^{k-4}}{(k-4)!} = 0$. On en conclut que $k^2 \mathbb{P}(X = k) = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$. La série de terme général $\frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente car $2 > 1$ donc la série de terme général $k^2 \mathbb{P}(X = k)$ converge selon le théorème de comparaison pour les séries positives.
Ainsi X^2 admet une espérance, donc $X^2 - X$ aussi. On calcule

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \mathbb{P}(X = K) && \text{selon le théorème de transfert} \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\, \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{lambda^k}{k!} \end{aligned}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}$$
$$= \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^2\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k}}{k!}}_{=\mathrm{e}^{\lambda}}$$
$$= \lambda^2$$

On en conclut que $E(Y) = E(X^2) = E(X^2 - X) + E(X) = \lambda^2 + \lambda$.

2) D'après le théorème de transfert, Z admet une espérance si et seulement si la série de terme général $k\,!p_k$ converge absolument (si et seulement si elle converge car c'est une série positive).
Soit $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{N} k!p_k = \sum_{k=0}^{N}\lambda^k\,\mathrm{e}^{-\lambda}$$
$$= \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{N}\lambda^k$$

on reconnaît une série géométrique, celle si converge si et seulement si $|\lambda| < 1$ et dans ce cas on a

$$\mathbb{E}[Z] = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{1-\lambda}$$

Correction de l'exercice 11 : X est à valeurs dans N^* donc Y admet un moment d'ordre r si et seulement si la série $\sum_{k\geq 1}(\mathrm{e}^k)^r\mathbb{P}(X=k)$ converge absolument (d'après le théorème de transfert).
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|(\mathrm{e}^k)^r\mathbb{P}(X=k)| = e^{kr}p(1-p)^{k-1} = p\,\mathrm{e}^r(e^r(1-p))^{k-1}$.
Or la série géométrique de terme général $(\mathrm{e}^r(1-p))^k$ converge si et seulement si $\mathrm{e}^r(1-p) < 1$ (car $e^r(1-p) > 0$).

$$\mathrm{e}^r(1-p) < 1 \iff \mathrm{e}^r < \frac{1}{1-p}$$
$$\iff r < -\ln(1-p)$$

et en cas de convergence on a :

$$\mathbb{E}[Y^r] = p\,\mathrm{e}^r\sum_{k=1}^{+\infty}(\mathrm{e}^r(1-p)))^{k-1}$$
$$\boxed{= \frac{p\,\mathrm{e}^r}{1-\mathrm{e}^r(1-p)}}$$

En particulier, Y admet une espérance si et seulement si $\ln(1-p) < -1$ et $\mathbb{E}[Y] = \dfrac{p\,\mathrm{e}}{1+(p-1)\,\mathrm{e}}$

Correction de l'exercice 12 :

1) X_A est le rang du premier essai où le gardien insère la bonne clé. Les valeurs prises par X_A sont $[\![1,10]\!]$.
Si on note C_k l'événement « le gardien insère la bonne clé au k-ième essai, alors pour tout $k \in [\![1,10]\!]$.

$$\mathbb{P}(X_A = k) = \mathbb{P}(\overline{C_1}\cap\overline{C_2}\cap\cdots\cap\overline{C_{k-1}},\cap C_k)$$
$$= \frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\cdots\times\frac{10-k}{10-k+1}\times\frac{1}{10-k}$$

$$= \frac{1}{10}$$

donc X_A suit la loi uniforme sur $[\![1, 10]\!]$.
Ainsi, $\mathbb{E}[X_A] = \dfrac{1+10}{2} = \dfrac{11}{2}$.

2) Les valeurs prises par X_B sont $[\![1, +infty$
$llbracket = \mathbb{N}^*$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_B = k) &= \mathbb{P}(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \cdots \cap \overline{C_{k-1}}, \cap C_k) \\ &= \underbrace{\frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \cdots \times \frac{9}{10}}_{k-1 \text{ fois}} \times \frac{1}{10} \qquad \text{car les répétitions sont indépendantes} \\ &= \frac{1}{10} \times \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

X_B admet une espérance si et seulement si la série de terme général $k \times \dfrac{1}{10} \times \left(\dfrac{9}{10}\right)^{k-1}$ converge. On reconnait une série géométrique dérivée donc elle converge, ainsi X_B admet une espérance et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_B] &= \frac{1}{10} \times \frac{1}{(1-\frac{9}{10})^2} \\ &= 10 \end{aligned}$$

3) Notons I l'événement « Le gardien est ivre »et notons X le nombre d'essai nécessaire pour ouvrir la porte. D'après l'énoncé, $\mathbb{P}(I) = \dfrac{1}{4}$.
Il faut calculer $\mathbb{P}(I|[X \geq 4])$. D'après la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(I \mid [X \geq 4]) = \mathbb{P}([X \geq 4] \mid I) \times \frac{\mathbb{P}(I)}{\mathbb{P}[X \geq 4]} = \mathbb{P}(X_B \geq 4) \times \frac{1/4}{\mathbb{P}(I) \times \mathbb{P}(X_B \geq 4) + \mathbb{P}(\overline{I}) \times \mathbb{P}(X_A \geq 4)}$$

Calculons chacun de ces termes :

- $\mathbb{P}(X_B \geq 4) = \sum_{k=4}^{+\infty} \dfrac{1}{10} \times \left(\dfrac{9}{10}\right)^k = \dfrac{1}{10} \times \left(\dfrac{9}{10}\right)^4 \times \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\dfrac{9}{10}\right)^k = \dfrac{9^4}{10^5} \times \dfrac{1}{1-\frac{9}{10}} = \dfrac{9^4}{10^4}$
- $\mathbb{P}(X_A \geq 4) = \dfrac{7}{10}$.
  On en déduit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(I \mid [X \geq 4]) &= \frac{9^4}{10^4} \times \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} \times \frac{9^4}{10^4} + \frac{3}{4} \times \frac{7}{10}} \\ &= \frac{9^4}{10^4} \times \frac{1}{\frac{9^4}{10^4} + \frac{21}{10}} \\ &= \frac{9^4}{9^4 + 21000} \\ &= \frac{6561}{27561} \\ &= \frac{2187}{9187} \end{aligned}$$

La probabilité que le gardien soit ivre sachant qu'il a mis plus de 4 essais pour ouvrir la porte est $\dfrac{2187}{9187}$.

Correction de l'exercice 13 :

1) Les valeurs prises par Z_2 sont 0 et 1.
L'événement $Z_2 = 0$ est l'événement « le second numéro tiré est le même que le premier ». Quel que soit le numéro tiré en premier, on a $\mathbb{P}(Z_2 = 0) = \dfrac{1}{n}$, donc $\mathbb{P}(Z_2 = 1) = \dfrac{n-1}{n}$.
Z_2 suit la loi $\mathcal{B}\left(\frac{n-1}{n}\right)$

2) Si l'événement $\{Y_k = j\}$ est réalisé, c'est que exactement j numéros distincts sont apparus lors des k premiers tirages, donc que $n - j$ numéros ne sont jamais sortis.
La probabilité d'obtenir un numéro qui n'a pas encore été tiré lors du $k + 1$-ème tirage est donc $\dfrac{n-j}{n}$. Ainsi, $\mathbb{P}_{\{Y_k=j\}}(Z_{k+1} = 1) = \dfrac{n-j}{n}$.
On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_{k+1} = 1) &= \sum j = 1^n \mathbb{P}(Z_{k+1} = 1, Y_k = j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(Y_k = j)\mathbb{P}_{\{Y_k=j\}}(Z_{k+1}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(Y_k = j)\left(1 - \frac{j}{n}\right) \\
&= \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(Y_k = j)}_{=1} - \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}(Y_k = j)}_{=\mathbb{E}[Y_k]} \\
&= 1 - \frac{\mathbb{E}[Y_k]}{n}
\end{aligned}$$

3) dans la somme $\sum_{j=1}^{k} Z_j$, chaque Z_j vaut 1 si le j-ième numéro tiré n'est pas encore apparu et 0 sinon, donc le total de cette somme est le nombre de nouveaux numéros apparus au cours des k premiers tirages, autrement dit le nombre de numéros différents obtenus lors des k premiers tirages. On a donc bien $Y_k = \sum_{j=1}^{k} Z_j$.
Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}[Y_k] = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}[Z_j] = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(Z_j = 1)$ car l'espérance d'une variable de Bernoulli X est $\mathbb{P}(X = 1)$ et les variables Z_j sont des variables de Bernoulli.
On en conclut finalement que $\mathbb{P}(Z_{k+1} = 1) = 1 - \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(Z_j = 1)$.

4) On raisonne par récurrence sur k,

— **Initialisation :** $\mathbb{P}(Z_2 = 1) = 1 - \dfrac{1}{n}$ donc la propriété est vraie au rang $k = 2$

— **Hérédité :** Supposons que $\mathbb{P}(Z_k = 1) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$ soit vraie pour un certain rang k.
Alors, d'après l'égalité établie à la question précédente,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_{k+1} = 1) &= 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(Z_j = 1) \\
&= 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1} \\
&= 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j} \qquad = 1 - \frac{1}{n} \times \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)} \\
&= 1 - (1 - (1 - \frac{1}{n})^k) \\
&= (1 - \frac{1}{n})^k
\end{aligned}$$

donc la propriété est vraie au rang $k + 1$

— **Conclusion :** par principe de récurrence, on en conclut que pour tout entier strictement positif k, $\mathbb{P}(Z_k = 1) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$.

5) D'après les questions précédentes, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_k] &= \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}[Z_j] \\
&= \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(Z_j = 1) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^j \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^j \\
&= \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)} \\
&= n - n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 14 :

1) $\mathbb{E}[X]$ existe et X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ avec $\mathbb{P}(X > 0) > 0$ donc $\mathbb{E}[X] > 0$.
Vérifions que $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(Y = k)$ converge et que sa somme vaut 1.
Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{k=0}^{N} \frac{k\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{E}[X]} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \sum_{k=0}^{N} k\mathbb{P}(X = k)
\end{aligned}$$

on reconnait la série qui converge vers $\mathbb{E}[X]$, donc $\sum \mathbb{P}(Y = k)$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \times \mathbb{E}[X] = 1$$

donc Y est une variable aléatoire bien définie.

2) Pour montrer que $X + 1$ et Y ont la même loi il faut montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X + 1 = k) = \mathbb{P}(Y = k)$.
$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ donc $\mathbb{E}[X] = \lambda$. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = k) &= \frac{k\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{E}[X]} \\
&= \frac{k\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}}{\lambda} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \mathbb{P}(X = k - 1) = \mathbb{P}(X + 1 = k)
\end{aligned}$$

donc Y et $X + 1$ suivent la même loi.

3) Supposons que $X+1$ et Y suivent la même loi.
Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}(X+1=k+1)\\ &= \mathbb{P}(Y=k+1)\\ &= \frac{(k+1)\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{E}[X]}\end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(P(X=k))_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X+1) = \dfrac{\mathbb{E}[X]}{k+1}\mathbb{P}(X=k)$.

- Si $\mathbb{P}(X=0)=0$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=k)=0$, donc X n'est pas une variable aléatoire, ce cas est donc impossible.
- Si $\mathbb{P}(X=0)>0$, posons $a=\mathbb{P}(X=0)$. On a alors par récurrence immédiate $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{\mathbb{E}[X]^k a}{k!}$.
  La série $\sum \mathbb{P}(X=k)$ converge en tant que série exponentielle, et $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\mathbb{E}[x]^k a}{k!} = a\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{\mathbb{E}[X]^k}{k!} = a\,\mathrm{e}^{\mathbb{E}[X]}$.
  Puisque X est une variable aléatoire cette somme vaut 1 donc $a=\mathrm{e}^{-\mathbb{E}[X]}$. On en déduit que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=k) = \mathrm{e}^{-\mathbb{E}[X]}\dfrac{\mathbb{E}[X]^k}{k!}$ donc que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \mathbb{E}[X]$.

Correction de l'exercice 15 :

1) À l'issue de la première expérience, le nombre de boules dans l'urne U_1 a soit augmenté de 1 soit diminué de 1, donc $X_1(\Omega) = \{m-1, m+1\}$. De plus, on a :

$$\mathbb{P}(X_1 = m-1) = \frac{\binom{m-1}{n-1}}{\binom{m}{n}} = \frac{m}{n}$$

et

$$\mathbb{P}(X_1 = m+1) = \frac{\binom{m-1}{n}}{\binom{m}{n}} = \frac{n-m}{n}$$

donc $E(X_1) = (m-1)\dfrac{m}{n} + (m+1)\dfrac{n-m}{n} = m+1-\dfrac{2m}{n}$

2) L'événement $(X_k = i)$ est réalisé si et seulement si l'urne U_1 contient $i-1$ boules à l'issue de la $(k-1)$-ème expérience et que le numéro choisi est dans l'urne U_2, ou l'urne U_1 contient $i+1$ boules à l'issue de la $(k-1)$-ème expérience et que le numéro choisi est dans l'urne U_1. Ainsi :

$$\mathbb{P}(X_k=i) = \mathbb{P}(X_{k-1}=i-1)\times\frac{n-(i-1)}{n} + \mathbb{P}(X_{k-1}=i+1)\times\frac{i+1}{n}$$

et cette formule est encore vraie pour $i=0$ et $i=n$ car $\mathbb{P}(X_k=-1) = \mathbb{P}(X_k=n+1) = 0$.

3) a) On constate que $G_k'(t) = \sum_{i=1}^n i\mathbb{P}(X_k=i)t^{i-1}$ donc $G_k'(1) = E(X_k)$.
   b) On a $G_k'(t) = \sum_{i=0}^n i\mathbb{P}(X_k=i)t^{i-1} = \sum_{i=1}^n i\mathbb{P}(X_k=i)t^{i-1}$.
   En appliquant le résultat de la question 2) on obtient :

$$\begin{aligned}G_{k+1}(t) &= \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(X_{k+1}=i)t^i\\ &= \sum_{i=0}^n\left[\mathbb{P}(X_k=i-1)\frac{n-i+1}{n} + \mathbb{P}(X_k=i+1)\frac{i+1}{n}\right]t^i\\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_k=i-1)\frac{n-(i-1)}{n}t^i + \sum_{i=0}^n\mathbb{P}(X_k=i+1)\frac{i+1}{n}t^i\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{P}(X_k=i)\frac{n-i}{n}t^{i+1} + \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_k=i)\frac{i}{n}t^{i-1}\\ &= t\sum_{i=0}^n\mathbb{P}(X_k=i)t^i - \frac{t^2}{n}\sum_{i=0}^n i\mathbb{P}(X_k=i)t^{i-1} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n i\mathbb{P}(X_k=i)t^{i-1}\\ &= tG_k(t) + \frac{1-t^2}{n}G_k'(t)\end{aligned}$$

c) En dérivant l'égalité obtenue à la question précédente on obtient :

$$G'_{k+1}(t) = G_k(t) + tG'_k(t) - \frac{2t}{n}G'_k(t) + \frac{1-t^2}{n}G''_k(t)$$

d'où pour $t = 1$:

$$G_{k+1}(1) = G_k(1) + G'_k(1) - \frac{2}{n}G'_k(1)$$

c'est à dire

$$\mathbb{E}(X_{k+1}) = 1 + \frac{n-2}{n}\mathbb{E}(X_k)$$

La suite $(E(X_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est donc une suite arithmético-géométrique, en posant $r = \frac{1}{1-\frac{n-2}{n}} = \frac{n}{2}$ puis pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \mathbb{E}(X_k) - r$, on a :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_{k+1} &= \mathbb{E}(X_{k+1}) - \frac{n}{2} \\
&= 1 + \frac{n-2}{n}\mathbb{E}(X_k) - \frac{n}{2} \\
&= 1 + \frac{n-2}{n}\left(u_k + \frac{n}{2}\right) - \frac{n}{2} \\
&= \frac{n-2}{n}u_k
\end{aligned}$$

donc $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned}
E(X_k) &= \left(\frac{n-2}{n}\right)^{k-1} u_1 + r \\
&= \left(\frac{n-2}{n}\right)^{k-1} \left(E(X_1) - \frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2} \\
&= \left(\frac{n-2}{n}\right)^{k-1} \left(m + 1 - \frac{2m}{n} - \frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

et $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{E}(X_k) = \frac{n}{2}$.

Correction de l'exercice 16 :

1) X admet une espérance donc la série de terme général $n\mathbb{P}(X = n)$ converge.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n\mathbb{P}(X > n) = n\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$ car pour tout $k \geq n+1$ on a $n < k$.
   La série $\sum n\mathbb{P}(X = n)$ converge donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = 0$ donc par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} n\mathbb{P}(X > n) = 0$.

2) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(X = n) &= \sum_{n=1}^{N} n\left(\mathbb{P}(X > n-1) - \mathbb{P}(X > n)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(X > n-1) - \sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(X > n) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)\mathbb{P}(X > n) - \sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(X > n) \\
&= \mathbb{P}(X > 0) - N\mathbb{P}(X > N) + \sum_{n=1}^{N} (n+1-n)\mathbb{P}(X > n) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(X > n) - N\mathbb{P}(X > N)
\end{aligned}$$

Or $\lim_{N\to+\infty} N\mathbb{P}(X > N)$ d'après la question 1, et comme X admet une espérance le membre de gauche de l'égalité tend vers $\mathbb{E}[X]$ lorsque N tend vers $+\infty$. On en conclut finalement que $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(X > n)$ converge et que $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X > n)$.

Correction de l'exercice 17 : On a $X(\Omega) = [\![r, +\infty[\![$.
Pour $k \geq r$, l'événement $(X = k)$ est réalisé si et seulement si le k-ème lancers donne un 6, et si parmi les $k-1$ premiers lancers on a obtenu $r-1$ fois pile.
Il y a $\binom{k-1}{r-1}$ façons d'obtenir $r-1$ piles parmi les $k-1$ premiers lancers. Pour chacune de ces façons, la probabilité est de $p^{r-1}(1-p)^{(k-1)-(r-1)} = p^{r-1}(1-p)^{k-r}$.
Finalement :

$$\mathbb{P}(X = k) = p \times \binom{k-1}{r-1} \times p^{r-1}(1-p)^{k-r} = \binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}$$

Correction de l'exercice 18 :

1) X suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$.
2) $\mathbb{E}[X] = \dfrac{n+1}{2}$.
3) Les valeurs prises par Y sont $\{-n, -(n-1), \ldots, -1, 1, 2, \ldots, n\}$.
   On note P l'événement « la pièce tombe sur pile »et F l'événement « la pièce tombe sur face ».
   Pour tout $k \in [\![-n, -1]\!]$, $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}((X = -k) \cap P) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{n}$ car ces événements sont indépendants.
   Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}((X = k) \cap F) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{n}$
   Finalement, pour tout $k \in \{-n, -(n-1), \ldots, -1, 1, 2, \ldots, n\}$, $\mathbb{P}(Y = k) = \dfrac{1}{2n}$ donc Y suit la loi uniforme sur cet ensemble.
4) Quelle que soit l'issue ω, $Y(\omega)^2 = X(\omega)^2$, donc $Y^2 = X^2$. Ainsi, $Z = X^2 - X$.
   $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}(X = k)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2\\ &= \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

   Finalement, $\mathbb{E}[Z] = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{n+1}{2} = \dfrac{2n^2-2}{6}$

Correction de l'exercice 20 : Partie A

1) Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Alors $\log_2(xy) = \dfrac{\ln(xy)}{\ln(2)} = \dfrac{\ln x + \ln y}{\ln(2)} = \dfrac{\ln x}{\ln 2} + \dfrac{\ln y}{\ln 2} = \log_2(x) + \log_2(y)$.
   On en conclut que $\boxed{\text{pour tout } (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \log_2(xy) = \log_2(x) + \log_2(y)}$
2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\log_2(2^\alpha) = \dfrac{\ln(2^\alpha)}{\ln(2)} = \dfrac{\alpha\ln(2)}{\ln(2)} = \alpha$.
   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}, \log_2(2^\alpha) = \alpha.}$
3) $\boxed{x \mapsto \ln x \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ donc } \log_2 \text{ aussi et pour tout } x \in]0, +\infty[,\ \log_2'(x) = \dfrac{1}{\ln(2)x}}$
4) a) f est continue sur $]0, 1]$ comme produit de fonctions continues. Il suffit donc de montrer que f est continue en 0.
   $f(0) = 0$ par définition, et $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to 0} -\dfrac{t\ln(t)}{\ln(2)} = 0$ par croissance comparée.
   Ainsi, f est continue en 0.
   $\boxed{\text{Finalement, } f \text{ est bien continue sur l'intervalle } [0\,;1].}$

b) f est dérivable sur $]0,1]$ comme produit de fonctions dérivables, et pour tout $t \in]0,1]$ on a

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\log_2(t) - t\log_2'(t) \\ &= -\log_2(t) - t \times \frac{1}{t\ln(2)} \\ &= -\log_2(t) - \frac{1}{\ln(2)} \\ &= -\frac{1}{\ln(2)}(\ln(t)+1) \end{aligned}$$

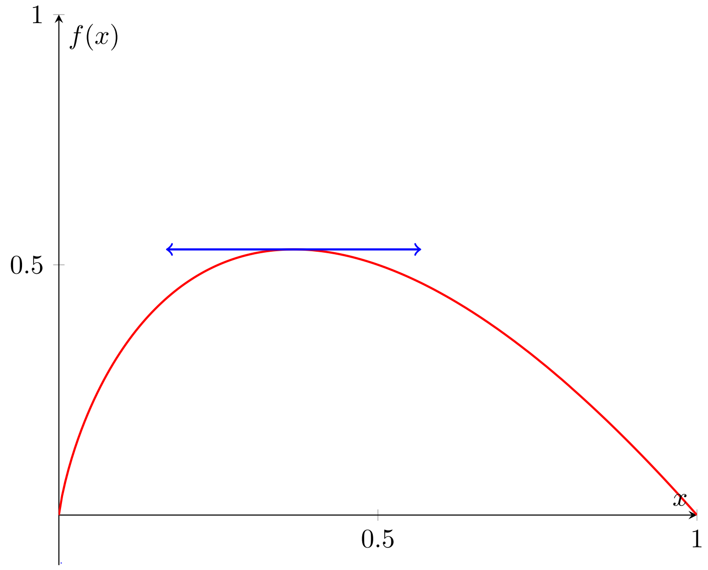
Or $2 > 1$ donc $\ln(2) > \ln(1) = 0$, ainsi f est du signe de $-\ln(t) - 1$.
$-\ln(t) - 1 \geq 0 \iff \ln(t) \leq -1 \iff t \leq \mathrm{e}^{-1}$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		e^{-1}		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{\ln(2)}$	$\searrow$	0

avec $f(0) = 0 = f(1)$ et $f(\mathrm{e}^{-1}) = -\mathrm{e}^{-1} \times \dfrac{\ln(\mathrm{e}^{-1})}{\ln(2)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{\ln(2)}$.

c) $\lim\limits_{t\to 0} \ln(t) = -\infty$, donc par somme $\lim\limits_{t\to 0}(\ln(t)+1) = -\infty$, et $\boxed{\text{par produit } \lim\limits_{t\to 0} -\dfrac{1}{\ln(2)}(\ln(t)+1) = +\infty.}$

d) Courbe représentative de f sur $[0\,;1]$:



Partie B

5) D'après la formule de transfert,

$$\begin{aligned} -\mathbb{E}[g(X)] &= -\sum_{k=0}^{n} g(k)\mathbb{P}(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} -\log_2(P(X=k))P(X=k) \\ &\boxed{= H(X)} \end{aligned}$$

6) Pour tout $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, $0 < \mathbb{P}(X = k) \leq 1$ donc $\ln(\mathbb{P}(X = k)) \leq 0$, et ainsi $\log_2(\mathbb{P}(X = k)) \leq 0$. On en conclut que pour tout $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, $-\mathbb{P}(X = k)\log_2(\mathbb{P}(X = k)) \geq 0$, $\boxed{\text{donc par somme } H(X) \geq 0.}$

7) a) On a

$$\begin{aligned} H(X) &= -\mathbb{P}(X = 0)\log_2(\mathbb{P}(X = 0)) - \mathbb{P}(X = 1)\log_2(\mathbb{P}(X = 1)) \\ &= -(1 - p)\log_2(1 - p) - p\log_2(p) \\ &\boxed{= \frac{1}{\ln(2)}\big(- (1 - p)\ln(1 - p) - p\ln(p)\big)} \end{aligned}$$

b) On a $\psi(p) = \dfrac{1}{\ln(2)}\big(- (1 - p)\ln(1 - p) - p\ln(p)\big)$. Pour tout $p \in]0, 1[$ on a $1 - p \in]0, 1[$ donc $p \mapsto \ln(1 - p)$ est dérivable sur $]0, 1[$. Ainsi ,ψ est dérivable sur $]0, 1[$ comme produit et composée de fonctions dérivables, et pour tout $p \in]0, 1]$ on a

$$\begin{aligned} \psi'(p) &= \frac{1}{\ln(2)}\big(\ln(1 - p) + 1 - \ln(p) - 1\big) \\ &= \frac{1}{\ln(2)}\ln\left(\frac{1 - p}{p}\right) \end{aligned}$$

De même, ψ' est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables et pour tout $p \in]0\,; 1[$ on a

$$\begin{aligned} \psi''(p) &= \frac{1}{\ln(2)}\left(-\frac{1}{1 - p} - \frac{1}{p}\right) \\ &= -\frac{1}{\ln(2)}\left(\frac{1}{1 - p} + \frac{1}{p}\right) \end{aligned}$$

Or, pour tout $p \in]0, 1[$, $\dfrac{1}{1 - p} > 0$ et $\dfrac{1}{p} > 0$ donc $\psi''(p) < 0$.

c) On $\psi'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\ln(2)}\ln\left(\dfrac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{\ln(2)}\ln(1) = 0$

Comme $\psi''(p) < 0$ sur $]0\,; 1[$, on en déduit que ψ' est strictement décroissante sur $]0\,; 1[$. Ainsi, $\psi'(p)$ est positif sur $]0\,; \dfrac{1}{2}[$ et négatif sur $]\dfrac{1}{2}\,; 0[$.

On en conclut que ψ est croissante sur $[0\,; \frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2}\,; 1]$, ainsi ψ atteint son maximum en $p_0 = \dfrac{1}{2}$.

8) a) Si X suit la loi uniforme sur $\{0, 1, 2, 3\}$, alors $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \dfrac{1}{4}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\log_2\left(\dfrac{1}{2^k}\right) = \log_2(2^{-k}) = -k$ d'après la question 10.

Ainsi,

$$\begin{aligned} H(X) &= -\frac{1}{4}(\log_2(1/4) + \log_2(1/4) + \log_2(1/4) + \log_2(1/4)) \\ &= -\frac{1}{4} \times 4 \times (-2) \\ &\boxed{= 2} \end{aligned}$$

b) Si X suit la loi donnée dans l'énoncé :

$$\begin{aligned} H(X) &= -\frac{1}{2}\log_2(1/2) - \frac{1}{4}\log_2(1/4) - 2 \times \frac{1}{8}\log_2(1/8) \\ &= -\frac{1}{2} \times (-1) - \frac{1}{4} \times (-2) - 2 \times \frac{1}{8} \times (-3) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{6}{8} \end{aligned}$$

$$\boxed{= \frac{7}{4}}$$

Partie C

9) On a :

$$\begin{aligned}
H(U) &= -\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(U=k)\log_2(\mathbb{P}(U=k)) \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\log_2\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\log_2(n) \\
&= (n+1)\times\frac{1}{n}\log_2(n) \\
&\boxed{= \log_2(n)}
\end{aligned}$$

10) On a

$$\begin{aligned}
H(U) - H(X) &= \log_2(n) + \sum_{k=1}^{n} p_k \log_2(p_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} p_k\log_2(n) - \sum_{k=1}^{n} p_k \log_2(\frac{1}{p_k}) && \text{car } \sum_{k=0}^{n} p_k = 1 \\
&= -\sum_{k=1}^{n} p_k \log_2\left(\frac{1}{n}\right) - \sum_{k=1}^{n} p_k\log_2\left(\frac{1}{p_k}\right) \\
&\boxed{= -\sum_{k=1}^{n} p_k \log_2\left(\frac{1}{np_k}\right)}
\end{aligned}$$

11) On pose la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \log_2(x) - \frac{1}{\ln(2)}(x-1)$. Alors f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$, et $f'(x) = \frac{1}{\ln(2)x} - \frac{1}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)}\left(\frac{1}{x}-1\right) = \frac{1}{\ln(2)}\frac{1-x}{x}$.
Ainsi, sur $]0,+\infty[$, $f'(x)$ est du même signe que $1-x$, donc positive sur $]0\,;1[$ et négative sur $]1,+\infty[$.
On en conclut que f est croissante sur $]0\,;1[$ et décroissante sur $]1\,;+\infty[$, donc que f admet son maximum en $x=1$ et que ce maximum vaut $f(1)=0$.

$$\boxed{\text{On en conclut que pour tout } x>0,\ f(x)\leq 0 \text{ et donc } \log_2(x) \leq \frac{1}{\ln(2)}(x-1).}$$

12) D'après la question 19, on sait que pour tout $x>0$ on a $\log_2(x) \leq \frac{1}{\ln(2)}(x-1)$. On a donc pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, $\log_2\left(\frac{1}{np_k}\right) \leq \frac{1}{\ln(2)}(\frac{1}{np_k}-1)$, donc par somme et produit on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} p_k \log_2\left(\frac{1}{np_k}\right) &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{\ln(2)}(\frac{1}{np_k}-1) \\
&\leq \frac{1}{\ln(2)}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{n}-p_k) \\
&\leq \frac{1}{\ln(2)}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n} p_k\right) \\
&\leq \frac{1}{\ln(2)}(1-1)
\end{aligned}$$

$$\leq 0$$

ainsi on a $H(U) - H(X) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log_2\left(\frac{1}{np_k}\right) \geq 0$.

On en conclut que quelle que soit la loi suivie par X, son entropie est inférieure ou égale à l'entropie de U, ainsi la loi uniforme est la loi pour laquelle l'entropie est maximale.