

**Exercice 1****Voir correction**

Déterminer la nature des intégrales improches suivantes :

a)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x+2}} dx$

d)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x} dx$

g)  $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{x+1} dx$

b)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+2)}} dx$

e)  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x+1} dx$

h)  $\int_0^{+\infty} \frac{x e^x + 1}{x e^{2x} + 1} dx$

c)  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^5 + 1} dx$

f)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x e^x + 1} dx$

★

**Exercice 2****Voir correction**

Déterminer la nature des intégrales improches suivantes :

a)  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$

c)  $\int_{-\infty}^0 \frac{\sin^3 x}{x^2} dx$

e)  $\int_0^\pi \ln(2x + 3 \sin x) dx$

b)  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x^3 + 1}} dx$

d)  $\int_{-\infty}^0 e^x \cos x dx$

f)  $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2} dx$

★

**Exercice 3****Voir correction**1) Montrer que pour tout réel  $a > -1$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^a e^{-t} dt$  converge.2) Montrer que pour tout réel  $a > -1$ , l'intégrale  $\int_0^1 t^a \ln(t) dt$  converge.3) Montrer que pour tout réel  $a > -1$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^{a-t} dt$  converge.

★

**Exercice 4****Voir correction**

Pour chacune des intégrale suivante montrer qu'elle converge et la calculer :

1)  $\int_{-\infty}^{+\infty} 2^{-|x|} dx$

3)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} dx$

5)  $\int_0^{+\infty} e^{-x}(1 - e^{-x})^4 dx$

2)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3}{4 + x^2} dx$

4)  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^7 e^{-x^2} dx$

6)  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$

★ ★

**Exercice 5****Voir correction**Le but de cet exercice est de démontrer la formule de Stirling :  $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}$ .Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $u_n = \frac{n!}{(\frac{n}{e})^n \sqrt{n}}$  et  $v_n = \ln u_n$ .1) a) À l'aide d'un développement limité, montrer que  $v_n - v_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + \left( \frac{1}{n^2} \right)$ .b) En déduire que la suite  $(v_n)$  converge.c) En déduire l'existence d'un réel  $C > 0$  tel que  $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C \sqrt{n} \frac{n^n}{e^n}$ .2) Montrons dans cette question que  $C = \sqrt{2\pi}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$  (intégrale de Wallis)a) Calculer  $W_0$  et  $W_1$ .b) Montrer que  $(W_n)$  converge.c) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$ d) En déduire  $W_2$ .

e) À l'aide d'une intégration par partie, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$ .

f) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ .

g) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_n}{W_{n+1}} = 1$ , et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

h) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$ .

i) En déduire que  $C = \sqrt{2\pi}$ .

★ ★  
Exercice 6

[Voir correction](#)

1) Montrer à l'aide du changement de variable  $x = e^u$  que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \sin(e^u) du$  converge.

2) Montrer à l'aide du changement de variable  $t = u^{1/3}$  que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{2/3} + u^{4/3}}$  converge et la calculer.

★ ★  
Exercice 7

[Voir correction](#)

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  tels que  $\sin(n\theta) \neq 0$ . On considère le polynôme  $P(X) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^k$

1) Montrer que  $P(X) = \frac{1}{2i}(1 + e^{i\theta} X)^n - \frac{1}{2i}(1 + e^{-i\theta} X)^n$

2) En déduire que  $\lambda$  est racine du polynôme  $P$  si et seulement si  $\exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\lambda = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}}$ .

3) Montrer que toutes les racines de  $P$  sont réelles.

★ ★  
Exercice 8

[Voir correction](#)

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{n+1} = u_n + \left( \ln \left( 1 + \frac{1}{u_n} \right) \right)^2$ .

Le but de cet exercice est de déterminer un équivalent de  $u_n$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . On admet le théorème de Cesàro :

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$  avec  $\ell \in \mathbb{R}$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \ell$

1) Montrer que la suite  $(u_n)$  est bien définie.

2) Étudier le sens de variation de  $(u_n)$  puis montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

3) Soit  $\beta$  un réel non nul. Montrer que  $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta = \beta u_n^{\beta-3} + o(u_n^{\beta-3})$ .

4) Déterminer une valeur de  $\beta$  telle que  $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$  converge vers une limite finie.

5) En déduire à l'aide du théorème admis que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}$ .

★ ★  
Exercice 9

[Voir correction](#)

Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , on appelle **fonction Gamma d'Euler** la fonction définie par  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ .

1) Montrer que  $\Gamma$  est bien définie sur  $]0; +\infty[$ .

2) Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

3) Calculer  $\Gamma(1)$  puis en déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma(n+1) = n!$

4) Calculer  $\Gamma(\frac{1}{2})$  puis  $\Gamma(\frac{3}{2})$ . On pourra admettre la valeur de l'intégrale de Gauss :  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

**Le coin des Khûbes**

★ ★

**Exercice 10**[Voir correction](#)

**(ENSAE 2013)** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une fonction continue. On suppose qu'il existe une constante  $0 < c < 1$  telle que, pour tous  $x, y$  dans  $[0, 1]$ ,

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$$

Démontrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution dans  $[0, 1]$ .

★ ★ ★

**Exercice 11**[Voir correction](#)

**(ENS 2016)** Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable telle que  $f(x)f(y) \leq f(xy)$  pour tout  $x, y \geq 0$  et  $f(1) = 1$ .

- 1) Montrer que  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \geq 0$
- 2) Montrer que  $f(x) \geq f(x^{1/n})^n$  pour tout  $x > 0$  et  $n \geq 1$
- 3) En déduire qu'il existe un réel  $p$  tel que  $f(x) \geq x^p$  pour tout  $x \geq 0$
- 4) Montrer que  $p \geq 0$
- 5) Montrer que  $f(x) = x^p$  pour tout  $x \geq 0$ .

★ ★

**Exercice 12**[Voir correction](#)

**(ENS 2025)**

Démontrer que pour tout  $a \in \mathbb{R}$  l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(at)}{t^2} dt$  est convergente, puis qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tout  $a \in \mathbb{R}$  on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(at)}{t^2} = c|a|$$

## Correction des exercice

### Correction de l'exercice 1 :

- a) La fonction  $f$  définie sur  $[1; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+2}}$  est continue sur  $[1; +\infty[$ .

Il faut donc étudier la convergence de l'intégrale en  $+\infty$ .

$f(x) \equiv x \rightarrow +\infty$   $\frac{1}{x^{3/2}}$ . Or l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$  est une intégrale de Riemann qui converge car  $\frac{3}{2} > 1$ , donc d'après le théorème d'équivalence sur les intégrales de fonctions positives,  $\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x+2}} dx \text{ converge}}$ .

**Remarque :** On peut aussi utiliser le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives en remarquant que  $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{x}$  donc  $\frac{1}{x\sqrt{x+2}} \leq \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}}$

- b) La fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}$  est continue sur  $[0; +\infty[$ . Il faut donc étudier la convergence de l'intégrale en  $+\infty$ .

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x}$$

L'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  diverge, donc d'après le théorème d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives,  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  diverge.

Comme  $f$  est continue sur  $[0; 1]$ ,  $\int_0^1 f(x) dx$  converge.

On en conclut que  $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+2)}} dx \text{ diverge}}$

- c) La fonction  $f : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x^5 + 1}$  est continue sur  $[0; +\infty[$ .

Il faut donc étudier la convergence de l'intégrale en  $+\infty$ .

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$$

L'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$  est une intégrale de Riemann qui converge car  $3 > 1$ .

D'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  converge.

Or  $f$  est continue sur  $[0; 1]$  donc  $\int_0^1 f(x) dx$  converge.

On en conclut que  $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^5 + 1} dx \text{ converge}}$

- d) La fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 \ln x}$  est continue sur  $]1; +\infty[$ .

On étudie donc la convergence de l'intégrale en  $+\infty$  et en 1.

$$\text{Pour tout } x \geq 2, \ln x \geq \ln(2) \text{ donc } \frac{1}{x^2 \ln(x)} \leq \frac{1}{x^2 \ln(2)}$$

L'intégrale  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  est une intégrale de Riemann convergente car  $2 > 1$ , donc d'après le théorème de comparaison

pour les intégrales de fonctions positives,  $\boxed{\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x} dx \text{ converge}}$

Étudions la convergence de  $\int_1^2 \frac{1}{x^2 \ln x} dx$ . Au voisinage de 1 on a  $\frac{1}{x^2 \ln(x)} \sim \frac{1}{\ln(x)}$  et on a  $\ln(x) = x - 1 + o(x - 1)$ ,

$$\text{donc } \frac{1}{x^2 \ln(x)} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x - 1}$$

Or  $\int_1^2 \frac{1}{x-1} dx$  a la même nature que  $\int_0^1 \frac{1}{u} du$  par changement de variable  $u = x - 1$ , donc diverge.

Finalement, l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln(x)} dx$  diverge.

- e) La fonction  $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x+1}$  est continue sur  $[1; +\infty[$ .

Pour  $x \geq e$ , on a  $\ln(x) \geq \ln(e) = 1$ , et donc  $\frac{\ln x}{x+1} \geq \frac{1}{x+1}$ .

Or  $\frac{1}{x+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ , et l'intégrale  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  est une intégrale de Riemann divergente.

D'après le théorème d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, l'intégrale  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx$  est donc divergente.

Ainsi d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, l'intégrale  $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x+1} dx$  est divergente.

Comme  $f$  est continue sur  $[1; e]$ , l'intégrale  $\int_1^e \frac{\ln x}{x+1} dx$  converge, donc finalement  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x+1} dx$  diverge.

- f) La fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x e^x + 1}$  est continue sur  $[0; +\infty[$ .

Il faut étudier la convergence de l'intégrale en  $+\infty$ .

Pour  $x \geq 1$ ,  $x e^x + 1 \geq e^x$  donc  $\frac{1}{x e^x + 1} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x}$

Pour tout  $X > 0$ ,  $\int_1^X e^{-x} dx = [-e^{-x}]_1^X = e^{-1} - e^{-X}$   
donc  $\int_1^X e^{-x} dx \xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} e^{-1}$  donc  $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$  converge.

D'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x e^x + 1} dx$  converge.

Or,  $f$  est continue sur  $[0; 1]$  donc  $\int_0^1 \frac{1}{x e^x + 1} dx$  converge.

On en conclut que  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x e^x + 1} dx$  converge

- g) La fonction  $f : x \mapsto \frac{e^x}{x+1}$  est continue sur  $[0; +\infty[$ .

Il faut donc étudier la convergence de l'intégrale en  $+\infty$ .

Pour tout  $x \geq 0$ ,  $\frac{e^x}{x+1} \geq \frac{1}{x+1}$ .

Or  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx$  diverge (voir question e)) donc d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives,  $\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{x+1} dx$  diverge.

Or  $f$  est continue sur  $[0; 1]$  donc  $\int_0^1 f(x) dx$  converge. On en déduit que  $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{x+1} dx$  diverge.

- h) La fonction  $f : x \mapsto \frac{x e^x + 1}{x e^{2x} + 1}$  est continue sur  $[0; +\infty[$ .

On étudie la convergence de l'intégrale en  $+\infty$ .

$$\frac{x e^x + 1}{x e^{2x} + 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x e^x}{x e^{2x}} = \frac{1}{e^x}$$

Or l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$  converge car pour tout  $X > 0$ ,  $\int_0^X e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^X = 1 - e^{-X} \xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} 1$ .

D'après le théorème d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que  $\int_0^{+\infty} \frac{x e^x + 1}{x e^{2x} + 1} dx$  converge.

### Correction de l'exercice 2 :

- a) La fonction  $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x^2}$  est continue sur  $[1; +\infty[$ .

On étudie la convergence de l'intégrale en  $+\infty$ .

$$\text{Pour tout } x \geq 1, \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

Or l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  est une intégrale de Riemann convergente, donc d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$  est absolument convergente, donc convergente.

- b) La fonction  $f : x \mapsto \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x^3 + 1}}$  est continue sur  $[0; +\infty[$ .

On étudie donc la convergence de l'intégrale en  $+\infty$ .

Pour tout  $x \in [0; +\infty[$ ,  $|\sin x + \cos x| \leq |\sin x| + |\cos x| \leq 2$

$$\text{Ainsi, } \left| \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x^3 + 1}} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{x^3 + 1}}.$$

Or,  $\frac{2}{\sqrt{x^3 + 1}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{x^{3/2}}$ , et  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$  est une intégrale de Riemann convergente car  $\frac{3}{2} > 1$ , donc d'après le théorème d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives,  $\int_1^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^3 + 1}} dx$  converge.

Ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives,  $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x^3+1}} \right| dx$  converge.

Finalement,  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x^3+1}} dx$  est absolument convergente, donc convergente. Comme  $\int_0^1 \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x^3+1}} dx$  converge par continuité de  $f$  sur  $[0; 1]$ , on en déduit que  $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x^3+1}} dx \text{ converge.}}$

c) En faisant le changement de variable  $t = -x$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^0 \frac{\sin^3 x}{x^2} dx$  est de même nature que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$ .

Or,  $\left| \frac{\sin^3 t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  est une intégrale de Riemann convergente, donc d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives,  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$  converge absolument.

De plus,  $\sin(t) \sim t$  donc  $\sin^3(t) \sim t^3$  et ainsi  $\frac{\sin^3 t}{t^2} \sim t$  donc  $\int_0^1 \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt$  converge.

Ainsi,  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$  converge donc  $\boxed{\int_{-\infty}^0 \frac{\sin^3 x}{x^2} dx \text{ converge.}}$

d) En faisant le changement de variable  $t = -x$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^0 e^x \cos x dx$  est de même nature que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t} \cos t dt$ .

Or  $|e^{-t} \cos t| \leq e^{-t}$  et l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$  converge car

$$\int_0^X e^{-t} dt = \left[ -e^{-t} \right]_0^X = 1 - e^{-X} \xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} 1$$

Ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives,  $\int_0^{+\infty} |e^{-t} \cos t| dt$  converge, donc  $\int_0^{+\infty} e^{-t} \cos t dt$  converge absolument.

On en conclut que  $\boxed{\int_{-\infty}^0 e^x \cos x dx \text{ converge.}}$

e) La fonction  $f : x \mapsto \ln(2x + 3 \sin x)$  est continue sur  $]0; \pi]$ .

On étudie la convergence de l'intégrale en 0.

Par développement limité en 0,

$$\begin{aligned} \ln(2x + 3 \sin x) &= \ln(2x + 3(x + o(x))) \\ &= \ln(5x + o(x)) \\ &= \ln(5x(1 + o(1))) \\ &= \ln(5x) + \ln(1 + o(1)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(5x) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(5) + \ln(x) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x) \end{aligned}$$

Or,  $-\ln x \geq 0$  pour tout  $x \in [0; 1]$  et  $-x^{1/2} \ln x \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$  donc  $-\ln(x) = o\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)$  et  $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx$  est une intégrale de

Riemann convergente donc par théorème de comparaison pour les fonctions positives,  $\int_0^1 (-\ln x) dx$  converge.

D'après le théorème d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, on en conclut que  $\int_0^1 (-\ln(2x + 3 \sin x)) dx$  converge, donc que  $\int_0^1 \ln(2x + 3 \sin x) dx$  converge.

Enfin, comme  $f$  est continue sur  $[1; \pi]$ ,  $\int_1^\pi \ln(2x + 3 \sin x) dx$  converge, donc finalement  $\boxed{\int_0^\pi \ln(2x + 3 \sin x) dx \text{ converge.}}$

f) La fonction  $f : x \mapsto x^4 e^{-x^2}$  est continue sur  $[0; +\infty[$  comme produit et composée de fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ .

On étudie la convergence de l'intégrale en  $+\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^6 e^{-x^2} = \lim_{X \rightarrow +\infty} X^3 e^{-X}$  par croissance comparée et par composition de  $x \mapsto x^2$  par  $x \mapsto x^3 e^{-x}$ , donc en  $+\infty$  on a  $x^4 e^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ .

Or,  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  est une intégrale de Riemann convergente, donc d'après le théorème de négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives l'intégrale  $\int_1^{+\infty} x^4 e^{-x^2} dx$  converge.

Enfin, comme  $f$  est continue sur  $[0; 1]$ ,  $\int_0^1 x^4 e^{-x^2} dx$  converge, donc finalement  $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2} dx$  converge.

### Correction de l'exercice 5 :

1) a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$v_n - v_{n+1} = \ln \left( \frac{n! \times \left( \frac{n+1}{e} \right)^{n+1} \sqrt{n+1}}{(n+1)! \times \left( \frac{n}{e} \right)^n \sqrt{n}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \ln \left( \frac{(n+1)^{n+1} e^n \sqrt{n+1}}{(n+1) \times n^n e^{n+1} \times \sqrt{n}} \right) \\
&= \ln \left( \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \sqrt{\frac{n+1}{n}} \right) - \ln(e) \\
&= n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \\
&\quad n \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - 1 \\
&= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} - 1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

b)  $v_n - v_{n+1} \sim \frac{1}{12n^2}$  d'après la question précédente, donc la suite  $(v_n - v_{n+1})$  est à termes positifs à partir d'un certain rang, et la série  $\sum \frac{1}{12n^2}$  est une série de Riemann convergente, donc par comparaison de séries à termes positifs on en conclut que la série  $\sum (v_n - v_{n+1})$  converge.

Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=1}^n (v_k - v_{k+1}) = v_1 - v_{n+1}$  par télescopage, donc puisque le membre de gauche admet une limite réelle lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , le membre de droite aussi. On en conclut que  $(v_{n+1})$  converge donc que  $(v_n)$  converge.

c) Soit  $\ell$  la limite de  $(v_n)$ , alors puisque  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = e^{v_n}$  on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^\ell$  par continuité de l'exponentielle. Finalement, en posant  $C = e^\ell$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{C \left( \frac{n}{e} \right)^n \sqrt{n}} = 1$  donc  $n! \sim C \sqrt{n} \frac{n^n}{e^n}$ .

2) a)

$$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0(x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx$$

$$\boxed{= \frac{\pi}{2}}$$

$$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx$$

$$= [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos 0$$

$$= 1$$

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $W_n \geq 0$  car c'est l'intégrale d'une fonction positive sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

De plus,  $(W_n)$  est une suite décroissante. En effet, pour tout  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $0 \leq \sin(x) \leq 1$  donc  $\sin^{n+1}(x) \leq \sin^n(x)$ . Ainsi, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\begin{aligned}
W_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x) dx \\
&\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx \\
&\leq W_n
\end{aligned}$$

$(W_n)$  est donc une suite décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel  $\ell \geq 0$ .

- c) On pose le changement de variable  $t = \frac{\pi}{2} - x$ , donc  $dt = -dx$ .

On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx &= \int_{\frac{\pi}{2}-0}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}} \sin^n(\frac{\pi}{2}-t)(-\mathrm{d}t) \\ &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n(t) dt \\ &= \boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt} \end{aligned}$$

- d) On en déduit que  $W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx$ .

donc

$$\begin{aligned} 2W_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(x) + \cos^2(x)) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que  $\boxed{W_2 = \frac{\pi}{4}}$ .

- e) Pour tout entier naturel  $n$ , on a par intégration par partie

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x) dx = [-\cos(x) \sin^{n+1}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x) \times (n+1) \cos(x) \sin^n(x) dx \\ &= 0 + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \sin^n(x) dx \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(x)) \sin^n(x) dx \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x) dx \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \end{aligned}$$

On en déduit donc

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

$$\boxed{W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n}$$

- f) Montrons que la suite  $((n+1)W_n W_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite constante.

On note pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V_n = (n+1)W_n W_{n+1}$ . Alors

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} &= (n+2)W_{n+1} W_{n+2} \\ &= (n+2)W_{n+1} \frac{n+1}{n+2} W_n \end{aligned} \quad \text{d'après la question 5}$$

$$\begin{aligned} &= (n+1)W_n W_{n+1} \\ &= V_n \end{aligned}$$

donc  $(V_n)$  est bien une suite constante, et de plus  $V_0 = (0+1)W_0 W_1 = 1 \times \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2}$  d'après la question 1.

Finalement, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V_n = \frac{\pi}{2}$  donc  $(n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ .

g) On a montré à la question 2 que  $(W_n)$  convergeait vers un réel  $\ell$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$  d'après la question précédente. Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_{n+1} = \ell$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2(n+1)} = 0$  donc par passage à la limite on obtient  $\ell^2 = 0$  donc  $\boxed{\ell = 0}$ .

Intéressons nous maintenant à la suite  $\frac{W_n}{W_{n+1}}$ .

On a montré à la question 2 que  $(W_n)$  était décroissante, ainsi pour tout entier  $n$  on a  $W_{n+1} \leq W_n$  et  $W_{n+2} \leq W_{n+1}$ .

Ainsi,  $\frac{W_n}{W_{n+1}} \geq 1$  et de plus,  $\frac{n+2}{n+1} = \frac{W_n}{W_{n+2}} \geq \frac{W_n}{W_{n+1}} \geq 1$  car  $W_n > 0$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$ , on en déduit par théorème d'encadrement que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$ .

On a ainsi  $W_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} W_{n+1}$ , donc d'après la question précédente  $\frac{\pi}{2} = (n+1)W_n W_{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} nW_n^2$ . Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}W_n =$

$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

h) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , d'après la question 5, on a

$$\begin{aligned} W_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} W_{2n-2} \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)} W_{2n-4} \\ &= \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 1}{2n \times (2n-2) \times \cdots \times 2} \times W_0 \\ &= \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 1}{2n \times (2n-2) \times \cdots \times 2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{((2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 1) \times (2n \times (2n-2) \times \cdots \times 2)}{(2n \times (2n-2) \times \cdots \times 2)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n \times (n-1) \times \cdots \times 1)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Pour le rédiger plus rigoureusement, on raisonne par récurrence :

- **Initialisation :** Pour  $n = 0$ ,  $W_0 = \frac{\pi}{2}$  et  $\frac{0!}{2^0 \times 0!^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ , donc l'égalité est vraie au rang 0.
  - **Hérédité :** Supposons qu'il existe un entier naturel  $n$  tel que  $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$ , et montrons que  $W_{2n+2} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1!)^2} \frac{\pi}{2}$ .
- Alors,

$$\begin{aligned} W_{2(n+1)} &= W_{2n+2} \\ &= \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} && \text{d'après la question 5} \\ &= \frac{(2n+1)(2n)!}{(2n+2)2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2} && \text{par hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2n+2)!}{(2n+2)^2 2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n+2)!}{2^2(n+1)^2 2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2} ((n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

donc l'égalité est vraie au rang  $n+1$

— **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$ .

i) D'après la question g) on a  $W_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$  et d'après la question h)  $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$ , donc en utilisant l'équivalent trouvé à la question 1 :  $\frac{C\sqrt{2n} \frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}}{2^{2n} C^2 n \frac{n^{2n}}{e^{2n}}} \frac{\pi}{2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$  d'où

$$C \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}\sqrt{n}(2n)^{2n}\sqrt{\pi}\sqrt{n}}{2^{2n}n^{2n+1}} \sim \sqrt{2\pi}$$

donc  $C = \sqrt{2\pi}$  par limites de constantes.

### Correction de l'exercice 6 :

1) La fonction  $u \mapsto \sin(e^u)$  est continue sur  $[0; +\infty[$  comme composition de fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ , à l'aide du changement de variable  $x = e^u$ ,  $dx = e^u du$  ( $du = \frac{dx}{x}$ ) on peut écrire pour tout  $A > 0$  :

$$\begin{aligned}
\int_0^A \sin(e^u) du &= \int_1^{e^A} \frac{\sin x}{x} dx \\
&= \left[ \frac{-\cos x}{x} \right]_1^{e^A} + \int_1^{e^A} \frac{\cos x}{x^2} dx \\
&= \cos(1) - \cos(e^A) e^{-A} + \int_1^{e^A} \frac{\cos x}{x^2} dx
\end{aligned}$$

Or  $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$  et puisque l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  converge alors l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$  est absolument convergente donc convergente. On en conclut en faisant tendre  $A$  vers  $+\infty$  que  $\int_0^{+\infty} \sin(e^u) du$  converge.

2) On pose  $t = u^{1/3}$  avec  $dt = \frac{1}{3}u^{-2/3} du$  donc  $du = 3t^2 dt$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ , on a :

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^1 \frac{du}{u^{2/3} + u^{4/3}} &= \int_{\varepsilon^{1/3}}^1 \frac{3t^2 dt}{t^2 + t^4} \\
&= 3 \int_{\varepsilon^{1/3}}^1 \frac{1}{1+t^2} dt \\
&= 3 [\arctan t]_{\varepsilon^{1/3}}^1 \\
&= 3 \arctan(1) - 3 \arctan(\varepsilon^{1/3}) \\
&\xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} 3 \arctan(1) = \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

donc  $\int_0^1 \frac{du}{u^{2/3} + u^{4/3}}$  converge et vaut  $\frac{\pi}{2}$ .

De même, pour  $A > 0$  :

$$\int_1^A \frac{du}{u^{2/3} + u^{4/3}} = \int_1^{A^{1/3}} \frac{3t^2 dt}{t^2 + t^4}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^{A^{1/3}} \frac{1}{1+t^2} dt \\
&= 3 [\arctan(t)]_1^{A^{1/3}} \\
&= 3 \arctan(A^{1/3}) - 3 \arctan(1) \\
&\xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{} \frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

donc  $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{2/3} + u^{4/3}}$  converge et vaut  $\frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}$ . Finalement  $\int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{2/3} + u^{4/3}}$  converge et vaut  $\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$ .

### Correction de l'exercice 7 :

1) On remarque qu'on peut ajouter le terme  $k = 0$  dans la somme :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i} X^k = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i\theta} X)^k 1^{n-k} - \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^n (e^{i\theta} X)^k 1^{n-k} = \frac{1}{2i} (1 + e^{i\theta} X)^n - \frac{1}{2i} (1 + e^{-i\theta} X)^n$$

2) Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ .  $P(\lambda) = 0 \iff \frac{1}{2i} (1 + e^{i\theta} \lambda)^n = \frac{1}{2i} (1 + e^{-i\theta} \lambda)^n \iff \left( \frac{1 + e^{i\theta} \lambda}{1 + e^{-i\theta} \lambda} \right)^n = 1$  et  $1 + e^{-i\theta} \lambda \neq 0$

Or, on peut vérifier que si  $1 + e^{-i\theta} \lambda = 0$ , alors  $P(\lambda) \neq 0$ . En effet, si  $1 + e^{-i\theta} \lambda = 0$  alors  $\lambda = -e^{i\theta}$  donc  $P(\lambda) = \frac{1}{2i} (1 - 2e^{2i\theta})^n = \frac{e^{ni\theta}}{2i} (e^{-i\theta} - e^{i\theta})^n = -e^{ni\theta} \sin^n \theta$ . Or  $\sin \theta = 0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = k\pi$  donc  $\sin(n\theta) = 0$ . Puisque  $\sin(n\theta) \neq 0$  on en déduit que  $\sin \theta \neq 0$  donc que  $P(\lambda) \neq 0$ .

De plus, dans  $\mathbb{C}$ ,  $z^n = 1 \iff \exists k \in [0, n-1], z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ . Ainsi,  $P(\lambda) = 0 \iff \exists k \in [0, n-1], \frac{1 + e^{i\theta} \lambda}{1 + e^{-i\theta} \lambda} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \iff \lambda \left( e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta} \right) = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \iff \exists k \in [0, n-1], \lambda = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}}$ .

On vérifie que  $e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta} \neq 0$  :

$$e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta} = 0 \Rightarrow e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{2i\theta} \Rightarrow e^{2ik\pi} = e^{2in\theta} \Rightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}, 2in\theta = 2ik\pi + 2k'\pi \iff n\theta = (k - k')\pi$$

Or puisque  $\sin(n\theta) \neq 0$  on a  $n\theta \neq (k - k')\pi$  pour tout  $k, k' \in \mathbb{Z}$  donc  $e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta} \neq 0$

3) Montrons que  $\overline{\left( \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}} \right)} = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}}$  :

$$\begin{aligned}
\overline{\left( \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}} \right)} &= \frac{e^{-\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{-i\theta} - e^{-\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}} \\
&= \frac{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta} - e^{i\theta}} \quad \text{en multipliant par } e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\
&= \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}}
\end{aligned}$$

donc  $\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}} \in \mathbb{R}$ . Toutes les racines de  $P$  sont donc réelles. On peut même aller plus loin :

$$\begin{aligned}
\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}} &= \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}} \left( e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}} \right)}{e^{\frac{ik\pi}{n}} \left( e^{i\theta} e^{-\frac{ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}} e^{-i\theta} \right)} \\
&= \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{2i} \times \frac{2i}{e^{i(\theta - \frac{k\pi}{n})} - e^{-i(\theta - \frac{k\pi}{n})}} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\theta - \frac{k\pi}{n}\right)}
\end{aligned}$$

**Correction de l'exercice 8 :**

- 1) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $\mathcal{P}(n)$  : «  $u_n$  est bien défini et  $u_n > 0$  » et raisonnons par récurrence sur  $n$ .
- **Initialisation :**  $\mathcal{P}(1)$  est vrai par hypothèse.
  - **Héritéité :** Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  soit vrai pour un certain rang  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $\left(\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\right)^2$  est bien défini et positif donc  $u_n + \left(\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\right)^2$  est bien défini et supérieur à  $u_n$ . Ainsi,  $u_{n+1}$  est bien défini et  $u_{n+1} \geq u_n > 0$ , donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vrai.
  - **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $u_n$  est bien défini et  $u_n > 0$ .
- 2)  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{n+1} - u_n = \left(\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\right)^2 \geq 0$  donc  $(u_n)$  est croissante. Il n'y a que deux possibilités, soit  $(u_n)$  converge soit elle tend vers  $+\infty$ .
- Raisonnons par l'absurde et supposons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  avec  $\ell \in \mathbb{R}$  et  $\ell \geq 1$  car  $u_1 \geq 1$  et  $(u_n)$  croissante. Alors, par continuité de  $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$  sur  $]0; +\infty[$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\right)^2 = \ln\left(1 + \frac{1}{\ell}\right)$ .
- Par passage à la limite dans l'égalité  $u_{n+1} = u_n + \left(\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\right)^2$  on obtient  $\ell = \ell + \left(\ln\left(1 + \frac{1}{\ell}\right)\right)^2$  donc  $\ln\left(1 + \frac{1}{\ell}\right) = 0$  donc  $1 + \frac{1}{\ell} = 1$  donc  $\frac{1}{\ell} = 0$  ce qui n'est pas possible.
- On en conclut que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .
- 3) Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$ . Ainsi,  $\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{u_n} + o\left(\frac{1}{u_n}\right)$ . On a donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^\beta - u_n^\beta &= \left(u_n + \left(\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\right)^2\right)^\beta - u_n^\beta \\ &= u_n^\beta \left(1 + \frac{1}{u_n} \left(\frac{1}{u_n} + o\left(\frac{1}{u_n}\right)\right)^2\right)^\beta - u_n^\beta &= u_n^\beta \left(1 + \frac{\beta}{u_n^3} + o\left(\frac{1}{u_n^3}\right)\right)^\beta - u_n^\beta \\ &= u_n^\beta + \beta u_n^{\beta-3} - u_n^\beta + o(u_n^{\beta-3}) \\ &= \beta u_n^{\beta-3} + o(u_n^{\beta-3}) \end{aligned}$$

- 4) Pour  $\beta = 3$  on a  $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta = \beta + o(1)$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}^3 - u_n^3 = 3$ .

D'après le théorème de Cesàro :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_{k+1}^3 - u_k^3) = 3$$

Or,  $\sum_{k=1}^n u_{k+1}^3 - u_k^3 = u_{n+1}^3 - u_1^3$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}^3 - u_1^3}{n} = 3$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}^3}{n} = 3$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_1^3}{n} = 0$ , et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} \frac{u_{n+1}^3}{n} = 3$  et finalement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}^3}{n+1} = 3$ . On en conclut que  $u_{n+1} \sim \sqrt[3]{3(n+1)}$  donc  $u_n \sim \sqrt[3]{3n}$

**Correction de l'exercice 9 :**

- 1) Montrons que pour tout  $x > 0$  l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$  converge.

La fonction  $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$  est continue sur  $[0; +\infty[$  si  $x \geq 1$ , et sur  $]0; +\infty[$  si  $x < 1$ . Dans les deux cas il y a une impropriété en  $+\infty$ . Or  $t^2 e^{-t} t^{x-1} = t^{x+1} e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$  donc d'après le critère de Riemann l'intégrale  $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$  converge, et ce quel que soit la valeur du réel  $x$ .

Si  $x \geq 1$  alors il n'y a pas d'impropriété en 1

Si  $0 < x < 1$ , alors  $e^{-t} t^{x-1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ . Or  $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}} dt$  converge selon le critère de Riemann car  $1-x < 1$ , donc l'intégrale  $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$  converge.

Finalement, on a bien montré que pour tout  $x > 0$ , l'intégrale  $\Gamma(x)$  converge donc  $\Gamma$  est bien définie sur  $]0; +\infty[$ .

2) On fait une intégration par partie sur l'intervalle  $[\frac{1}{A}; A]$  avec  $A > 0$  :

$$\begin{aligned} \int_{1/A}^A e^{-t} t^{x-1} dt &= \left[ e^{-t} \frac{t^x}{x} \right]_{1/A}^A + \int_{1/A}^A e^{-t} \frac{t^x}{x} dt \\ &= \frac{A^x e^{-A}}{x} - \frac{e^{-1/A} \varepsilon^x}{x} + \frac{1}{x} \int_{1/A}^A e^{-t} t^x dx \\ &\xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{} 0 + \frac{1}{x} \Gamma(x+1) \end{aligned}$$

Or le membre de gauche de cette égalité tend vers  $\Gamma(x)$  lorsque  $A \rightarrow +\infty$  d'où l'égalité  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$$3) \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} (1 - e^{-A}) = 1$$

On a donc  $\Gamma(0+1) = 1$ , or  $0! = 1$  donc on a bien  $\Gamma(0+1) = 0!$ , l'égalité est vraie pour  $n=0$ .

Supposons que l'égalité soit vraie pour un entier  $n$  quelconque, alors d'après la question précédente  $\Gamma(n+2) = \Gamma(n+1+1) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$ . L'égalité est vraie pour  $n=0$  et la propriété est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier  $n$  par principe de récurrence.

$$4) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$$

Posons  $x = \sqrt{t}$ , avec  $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$  et  $dt = 2x dx$ . Pour tout  $A > 0$  on a

$$\int_0^A \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{\sqrt{A}} \frac{e^{-x^2}}{x} 2x dx = \int_0^A e^{-x^2} dx \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

d'après la valeur admise de l'intégrale de Gauss. Ainsi,  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

On en déduit que  $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$  d'après la question 2.

**Correction de l'exercice 10 :** Existence : Considérons la fonction  $g : x \mapsto f(x) - x$ . Cette fonction est continue sur  $[0, 1]$  comme somme de fonctions continues, avec  $g(0) = f(0) \geq 0$  et  $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$  car  $f(0), f(1) \in [0, 1]$ .

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un réel  $c \in [0, 1]$  tel que  $g(c) = 0$  donc tel que  $f(c) = c$ .

Unicité : Supposons qu'il existe  $(x, y) \in [0, 1]^2$  tels que  $f(x) = x$  et  $f(y) = y$ . Alors par hypothèse sur  $f$  :

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$$

donc  $|x - y| \leq c|x - y|$ . Si  $x \neq y$  on peut diviser de chaque côté par  $|x - y|$  et obtenir  $1 \leq c$ , contradiction.

**Correction de l'exercice 11 :**

1) Pour tout  $x \geq 0$ ,  $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$  donc  $f(x) = f(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) \geq f(\sqrt{x})^2 \geq 0$  par hypothèse sur  $f$ .

2) On a :

$$\begin{aligned} f(x^{1/n})^n &= \underbrace{f(x^{1/n}) \times \cdots \times f(x^{1/n})}_{n \text{ fois}} \\ &\leq \underbrace{f(x^{1/n} \times \cdots \times x^{1/n})}_{n \text{ fois}} && \text{par hypothèse sur } f \\ &\leq f(x) \end{aligned}$$

3) Pour tout  $x \geq 0$  et tout  $n \geq 1$  on a :

$$f(x^{1/n})^n = \exp\left(n \ln(f(x^{1/n}))\right)$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{1/n} = 1$  et  $f$  est dérivable en 1 donc admet un développement limité en 1 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} f(1) + f'(1)(x-1) + o(x-1)$$

d'où

$$f(x^{1/n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} f(1) + f'(1)(x^{1/n} - 1) + o(x^{1/n} - 1) = 1 + f'(1)(x^{1/n} - 1) + o(x^{1/n} - 1)$$

par composition avec  $\ln$ , et puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(1)(x^{1/n} - 1) = 0$  on a :

$$\ln(f(x^{1/n})) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} f'(1)(x^{1/n} - 1) + o(x^{1/n} - 1)$$

De plus,  $n(x^{1/n} - 1) = n(e^{\ln(x)/n} - 1) \sim \ln(x)$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(f(x^{1/n})) = f'(1) \ln(x)$  et finalement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x^{1/n})^n = \exp(f'(1) \ln(x)) = x^{f'(1)}$$

Par passage à la limite dans l'inégalité précédente on en déduit odnc :

$$\forall x \geq 0, \forall n \geq 1, \quad f(x) \geq x^{f'(1)}$$

- 4) Si  $p < 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p = +\infty$  donc par comparaison  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ . Or  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  donc continue en 0 et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \in \mathbb{R}$ , contradiction. On en conclut que  $p \geq 0$
- 5) Montrons que le résultat est vrai si  $x > 0$  en raisonnant par l'absurde : supposons qu'il existe un réel  $x_0 > 0$  tel que  $f(x_0) > x_0^p$ .

D'après la question 3)  $f\left(\frac{1}{x_0}\right) \geq \frac{1}{x_0^p}$  donc par produit d'inégalités :

$$1 = f(1) \geq f(x_0) f\left(\frac{1}{x_0}\right) > x_0^p \times \frac{1}{x_0^p} > 1$$

contradiction. On en déduit donc que pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) = x^p$ , et par continuité de  $f$  on a donc  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x^p = 0$  si  $p \neq 0$ , et  $\lim_{x \rightarrow 0} x^p = 1$  si  $p = 0$ . Dans tous les cas,  $f(x) = x^p$  pour tout  $x \geq 0$ .

**Correction de l'exercice 12 :** L'intégrale a 3 impropriétés : en  $-\infty$ , en 0 et en  $+\infty$ . Pour tout réel  $t$  on a par inégalité triangulaire :  $|1 - \cos(at)| \leq 1 + |\cos(at)| \leq 2$ .

Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{1 - \cos(at)}{t^2} \right| \leq \frac{2}{t^2}$$

et l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  converge donc par comparaison d'intégrales positives  $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos(at)}{t^2} dt$  converge absolument donc converge.

Par parité de  $t \mapsto \frac{1 - \cos(at)}{t^2}$  on en déduit que  $\int_{-\infty}^1 \frac{1 - \cos(at)}{t^2} dt$  converge aussi.

Au voisinage de 0 on a  $1 - \cos(at) = 1 - (1 - \frac{a^2 t^2}{2}) + o(t^2)$  donc

$$\frac{1 - \cos(at)}{t^2} = \frac{a^2}{2} + o(1)$$

donc  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(at)}{t^2} = \frac{a^2}{2}$ . La fonction peut se prolonger par continuité en 0 donc elle est faussement impropre en 0.

Finalement,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(at)}{t^2} dt$  converge bien.

Posons le changement de variable  $u = at$ ,  $du = a dt$ . Pour tous réels  $A$  et  $B$  on a :

$$\begin{aligned} \int_A^B \frac{1 - \cos(at)}{t^2} dt &= \int_{aA}^{aB} \frac{1 - \cos(u)}{(u/a)^2} \frac{du}{a} \\ &= \int_{aA}^{aB} a \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du \\ &= a \int_{aA}^{aB} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du \end{aligned}$$

si  $a > 0$  on obtient lorsque  $A$  tend vers  $-\infty$  et  $B$  tend vers  $+\infty$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(at)}{t^2} dt = a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du$$

et si  $a < 0$  on obtient :



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(at)}{t^2} dt = a \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du = -a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du$$

donc dans tous les cas, en posant  $c = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du$  on a bien :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(at)}{t^2} dt = c|a|$$