Sous-espaces vectoriels

★
Exercice 1 — **Voir correction**

Déterminer dans chaque cas si F est un sous-espace vectoriel de E ou non.

1) $E=\mathbb{R}^3$, $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 4x-2y+z=0\}$
2) $E=\mathbb{R}^4$, $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-t=y+2z \quad \text{et} \quad x+y=0\}$
3) $E=\mathbb{R}^2$, $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2=y^2\}$
4) $E=\mathbb{R}^3$, $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$
5) $E=\mathbb{R}^3$, $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=0\}$
6) $E=\mathbb{R}^2$, $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+3y=0\}$
7) $E=\mathbb{R}^n$, $F=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n x_k=0\}$
8) $E=\mathbb{R}^n$, $F=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n (-1)^k x_k^2=0\}$

★
Exercice 2 — **Voir correction**

On note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et on admet que $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Les ensembles suivant sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

1) L'ensemble F des fonctions continues sur $\mathbb{R}$
2) L'ensemble F des fonctions paires sur $\mathbb{R}$
3) L'ensemble F des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$
4) L'ensemble F des fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$
5) L'ensemble F des fonctions f telles que $\lim\limits_{x\to+\infty}=0$.
6) L'ensemble F des polynômes de degré 2
7) L'ensemble F des fonctions de la forme $x\mapsto e^{ax}$ avec $a\in\mathbb{R}$.

★
Exercice 3 — **Voir correction**

Soit $n\in\mathbb{N}$, on considère l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer dans chacun des cas suivant si F est un sous-espace vectoriel de E ou non :

1) $F=\{P\in\mathbb{R}_n[X] \mid P(0)=P(1)\}$
2) $F=\{P\in\mathbb{R}_n[X] \mid \exists a\in\mathbb{R}, P(a)=0\}$
3) $F=\{P\in\mathbb{R}_n[X] \mid 1<\deg(P)<n\}$
4) $F=\{P\in\mathbb{R}_n[X] \mid \exists Q\in\mathbb{R}_n[X], P=XQ'(X)\}$

★
Exercice 4 — **Voir correction**

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on considère l'espace vectoriel $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer dans chacun des cas suivant si F est un sous-espace vectoriel de E ou non :

1) $F=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM+\mathrm{tr}(M)I=0\}$
2) $F=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^2=I\}$
3) $F=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^2=0\}$
4) $F=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM=0\}$ avec $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée.
5) $F=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \exists N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AN=M\}$ avec $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée.

Familles libres, familles génératrices, bases

★
Exercice 5 — **Voir correction**

On considère l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^3$. Déterminer dans chaque cas si la famille (u,v,w) est libre ou liée.

1) $u=(3,-2,1)$, $v=(1,2,3)$ et $w=(-4,1,5)$
2) $u=(1,1,3)$, $v=(4,2,5)$ et $w=(-1,1,4)$
3) $u=(1,0,1)$, $v=(0,1,0)$ et $w=(0,0,1)$
4) $u=(1,1,1)$, $v=(3,0,3)$ et $w=(0,3,0)$

⋆

Exercice 6 — Voir correction

Soit $F = \text{Vect}\left((-4,1,3)\right) \subset \mathbb{R}^3$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0 \quad \text{et} \quad 4x-2y+6z=0\}$

1) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2) Montrer que $F \subset G$.
3) Montrer que $F = G$

⋆⋆⋆

Exercice 7 — Voir correction

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectorielles des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1) Montrer que la famille $(\cos, \sin)$ est libre dans E
2) Soient $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ une famille de n réels. Montrer que $(x \mapsto \sin(a_i x))_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre.

⋆

Exercice 8 — Voir correction

Dans chaque cas déterminer une base de E

1) $E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 0 \\ x+y+2z+3t & = & 0 \end{array}\right.\right\}$

2) $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 0 \\ -x+3y & = & 0 \end{array}\right.\right\}$

3) $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{\begin{array}{rcl} x-y+2z & = & 0 \\ 4x+y-z & = & 0 \end{array}\right.\right\}$

4) $E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 0 \\ x-y+z+t & = & 0 \\ x+y+z-t & = & 0 \end{array}\right.\right\}$

5) $E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{\begin{array}{rcl} x-y-3z-t & = & 0 \\ 2x-y-5z+t & = & 0 \end{array}\right.\right\}$

⋆

Exercice 9 — Voir correction

On considère $F = \text{Vect}\left((3,-2,4),(5,0,6),(3,8,2)\right) \subset \mathbb{R}^3$. Déterminer la dimension de F.

⋆

Exercice 10 — Voir correction

Soient $u = (1,0,1)$, $v = (1,1,0)$ et $w = (0,1,1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1) Montrer que (u,v,w) constitue une base de $\mathbb{R}^3$
2) Exprimer les coordonnées des vecteurs $x = (3,1,2)$ et $y = (0,0,4)$ dans la base (u,v,w).

⋆

Exercice 11 — Voir correction

Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y+z=0\}$. Déterminer une base de E.

⋆

Exercice 12 — Voir correction

Soit $F = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

⋆

Exercice 13 — Voir correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ et l'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E
2) Montrer que $\dim(F) = n$.

⋆

Exercice 14 Voir correction

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et soit $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$. L'ensemble $\mathcal{C}(A)$ s'appelle le **commutant** de A.

1) Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in \mathcal{C}(A)$ si et seulement si $a = d$ et $b = -c$.
3) En déduire $\dim(\mathcal{C}(A))$.

Applications linéaires

⋆

Exercice 15 Voir correction

Dans chaque cas, déterminer si l'application φ est linéaire ou non.
Si φ est linéaire, déterminer son noyau et son image.

1) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x,y,z) = (x+z, y-z)$
2) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x,y,z) = xy + 2z$
3) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = 3y - x$
4) $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, $\varphi(x,y,z,t) = (x+2t, z+x+y, 3-2t, 5x)$

⋆

Exercice 16 Voir correction

Soit $E = \text{Vect}\left((4,1,-1),(2,0,2)\right)$ un sous espace vectoriel de R^3.
On considère l'application $f : E \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (x,y,z) \in E, \quad f(x,y,z) = (x-y \ , \ y+z)$$

1) Montrer que f est une application linéaire de E vers $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que $(1,0) \in \text{Im}(f)$ et $(0,1) \in \text{Im}(f)$
3) En déduire que f est surjective
4) Déterminer $\text{Ker}(f)$
5) En déduire que f est injective.

⋆ ⋆

Exercice 17 Voir correction

Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{3}x + y = 0\}$ et $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$
On considère l'application φ définie sur E par

$$\forall (x,y) \in E, \quad \varphi(x,y) = \left((\sqrt{6}-\sqrt{2})x - (\sqrt{6}+\sqrt{2})y \ , \ (\sqrt{6}+\sqrt{2})x + (\sqrt{6}-\sqrt{2})y\right)$$

1) Montrer que φ est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}^2$
2) Montrer que φ est une application linéaire de E dans F

⋆ ⋆

Exercice 18 Voir correction

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On note $f^2 = f \circ f$.

1) Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$.
2) Montrer que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$
3) Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \iff \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}$

⋆ ⋆

Exercice 19 Voir correction

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 = f \circ f = 0$. Montrer que $\text{rg}(f) \leq \dfrac{\dim(E)}{2}$.

⋆

Exercice 20 — Voir correction

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1) Si f est injective et que $(u_1, u_2, \cdots u_p)$ est une famille libre de E, montrer que $(f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_p))$ est une famille libre de F.
2) Si f est surjective et que $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est une famille génératrice de E, montrer que $(f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_n))$ est une famille génératrice de F.
3) Que peut-on en déduire si f est bijective ?

⋆ ⋆

Exercice 21 — Voir correction

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère l'application $\varphi_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta \ , \ x\sin\theta + y\cos\theta)$$

1) Montrer que $\varphi_\theta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.
2) Pour quelle(s) valeur(s) de θ a-t-on $\varphi_\theta = id_{\mathbb{R}^2}$?
3) Pour quelle(s) valeur(s) de θ a-t-on $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi_\theta(x, y) = -(x, y)$
4) Existe-t-il une valeur de θ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi_\theta(x, y) = (-x, y)$?
5) Soit $M(x, y)$ un point du plan muni d'un repère, et soit M' le point dont les coordonnées sont données par $\varphi_\theta(x, y)$.
   a) Montrer que si M appartient au cercle de centre 0 et de rayon 1, alors M' aussi.
   b) On pose $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Représenter l'image de $(0, 1)$, de $(1, 0)$ et de $(-1, 0)$ par φ_θ.
   c) Quelle est la transformation du plan correspondant à φ_θ pour θ quelconque.

⋆ ⋆

Exercice 22 — Voir correction

Soit E un espace vectoriel de dimension n et H un sous-espace vectoriel de E. On dit que H est **un hyperplan de** E si $\dim(H) = n - 1$.

1) Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ une forme linéaire non nulle. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E.
2) Soit H un hyperplan de E. Montrer qu'il existe une application $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

⋆

Exercice 23 — Voir correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application f qui à tout polynôme P associe le polynôme $P(1 - X)$.

1) Montrer que f définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Montrer que $f^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. En déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

⋆ ⋆

Exercice 24 — Voir correction

Soit f l'application qui à tout polynôme P associe $P(X + 1) - P(X)$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que f définit une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$, puis en déduire $\mathrm{Im}(f)$ par un argument sur les dimensions.

⋆ ⋆

Exercice 25 — Voir correction

Existence et unicité des polynômes interpolateurs de Lagrange : soient $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une famille de n réels deux à deux distincts et $(y_1, y_2, ..., y_n)$ une famille de n réels. On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ P & \longmapsto & (P(x_1), P(x_2), ..., P(x_n)) \end{array}$$

1) Montrer que φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$.
2) Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \left\{0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}\right\}$. En déduire que φ est un isomorphisme.
3) Justifier qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(x_i) = y_i$.

⋆ ⋆
Exercice 26 — Voir correction

On considère l'application suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M - {}^tM \end{array}$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2) À quel sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ correspond $\mathrm{Ker}(f)$?
3) En déduire $\mathrm{Im}(f)$.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 27 — Voir correction

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle fixée. On considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A \end{array}$$

1) Montrer que f est une application linéaire.
2) Montrer que si $\mathrm{tr}(A) = 0$ alors $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n^2 - 1$
3) Montrer que si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, alors $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$
4) Montrer que $f^2 = \mathrm{tr}(A)f$.

⋆ ⋆
Exercice 28 — Voir correction

Soit $n \geq 2$ un entier.

1) Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], P(0) = 0\}$, montrer que $\dim(E) = n - 1$
2) Déterminer le noyau de l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], P \mapsto XP''(X)$
3) En déduire que $\mathrm{Im}(f) = E$.
4) Montrer que si P est un polynôme de degré $n-1$ qui s'annule en 0 alors il existe un polynôme Q de degré n tel que $P(X) = XQ''(X)$.

⋆ ⋆ ⋆
Exercice 29 — Voir correction

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit g un endomorphisme de E. On note $0_{\mathcal{L}(E)}$ l'endomorphisme nul de E qui à tout vecteur x associe le vecteur nul 0_E. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $g^n = \underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{n \text{ fois}}$. Par exemple, $g^2 = g \circ g$ et $g^3 = g \circ g \circ g$.
Si A et B sont deux ensembles, on note $A \subsetneq B$ si $A \subset B$ avec $A \neq B$.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(g^2) \subset \mathrm{Ker}(g^3)$
2) On suppose désormais que $g^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et que $\{0_E\} \subsetneq \mathrm{Ker}(g) \subsetneq \mathrm{Ker}(g^2) \subsetneq \mathrm{Ker}(g^3)$.
   a) Déterminer $\mathrm{Ker}(g^3)$
   b) Déterminer $\dim(\mathrm{Ker}(g))$, $\dim(\mathrm{Ker}(g^2))$ et $\dim(\mathrm{Ker}(g^3))$.
   c) Montrer que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(g^2)$ puis que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(g^2)$.
3) Soit $a \in \mathrm{Ker}(g)$ un vecteur non nul. Montrer qu'il existe $b \in E$ tel que $g(b) = a$. Montrer que $b \in \mathrm{Ker}(g^2)$ et en déduire que (a, b) est une famille libre.
4) Montrer qu'il existe $c \in E$ tel que $g(c) = b$.
5) Montrer que (a, b, c) est alors une base de E. Préciser les décompositions de $g(a)$, $g(b)$ et $g(c)$ dans cette base.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) On a $4\times 0 - 2\times 0 + 0 = 0$ donc $(0,0,0)\in F$, ainsi F est non vide.
Soient $(x,y,z)\in F$ et $(x',y',z')\in F$ deux éléments de F, et soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
On a $\lambda\cdot(x,y,z)+\mu\cdot(x',y',z') = (\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y', \lambda z+\mu z')$.
De plus,

$$\begin{aligned}4(\lambda x+\mu x') - 2(\lambda y+\mu y') + (\lambda z+\mu z') &= 4\lambda x - 2\lambda y + \lambda z + 4\mu x' - 2\mu y' + \mu z'\\ &= \lambda(\underbrace{4x-2y+z}_{=0}) + \mu(\underbrace{4x'-2y'+z'}_{=0})\\ &= 0\end{aligned}$$

donc $\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')\in F$. Ainsi, F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) On a $0-0=0+2\times 0$ et $0+0=0$ donc $(0,0,0,0)\in F$, ainsi F est non vide.
Soient (x,y,z,t) et (x',y',z',t') deux éléments de F, et soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.
On a $\lambda\cdot(x,y,z,t)+\mu\cdot(x',y',z',t') = (\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y', \lambda z+\mu z', \lambda t+\mu t')$.
De plus,

$$\begin{aligned}(\lambda x+\mu x') - (\lambda t+\mu t') &= \lambda(\underbrace{x-t}_{=y+2z}) + \mu(\underbrace{x'-t'}_{=y'+2z'})\\ &= \lambda(y+2z)+\mu(y'+2z')\\ &= (\lambda y+\mu y') + 2(\lambda z+\mu z')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda x+\mu x') + (\lambda y+\mu y') &= \lambda(\underbrace{x+y}_{=0}) + \mu(\underbrace{x'+y'}_{=0})\\ &= 0\end{aligned}$$

donc $\lambda\cdot(x,y,z,t)+\mu\cdot(x',y',z',t')\in F$. Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E.

3) On a $0^2=0^2$ donc $(0,0)\in F$, F est non vide.
En revanche, $u=(1,1)\in F$ et $v=(1,-1)\in F$ car $1^2=(-1)^2=1$, mais $u+v=(2,0)$ donc $u+v\notin F$ car $2^2\neq 0^2$.
Ainsi, F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

4) $0^2+0^2+0^2 = 0 \neq 1$ donc $(0,0,0)\notin F$, donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

5) $(0,0,0)\in F$ donc F est non vide.
Soient $(x,y,z)\in F$ et $(x',y',z')\in F$ et soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.
Alors,

$$\lambda\cdot(x,y,z)+\mu\cdot(x',y',z') = (\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y', \lambda z+\mu z')$$

On a

$$\begin{aligned}\lambda z+\mu z' &= \lambda\times 0+\mu\times 0 && \text{car } (x,y,z)\in F \text{ et } (x',y',z')\in F\\ &= 0\end{aligned}$$

donc $\lambda\cdot(x,y,z)+\mu\cdot(x',y',z')\in F$.
Ainsi, F est un sous espace vectoriel de F.

6) $(0,0) \in F$ car $0^2 + 3 \times 0 = 0$, donc F est non vide.
Soit $u = (3, -3)$ et $\lambda = 2$, alors $3^2 + 3 \times (-3) = 0$ donc $u \in F$.
Alors

$$\lambda \cdot u = (6, -6)$$

On a $6^2 + 3 \times (-6) = 36 - 18 = 18 \neq 0$, donc $u \notin F$. F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

7) $(0, 0, \cdots, 0) \in F$ car $0 + 0 + \cdots + 0 = 0$, donc F est non vide.
Soient $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in F$ et $(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in F$ soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Alors $\lambda \cdot (x_1, x_2, \cdots, x_n) + \mu \cdot (y_1, y_2, \cdots y_n) = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \cdots, \lambda x_n + \mu y_n)$.
On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(\lambda x_k + \mu y_k) &= \sum_{k=1}^{n}\lambda x_k + \sum_{k=1}^{n}\mu y_k \\ &= \lambda \underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_k}_{=0} + \mu \underbrace{\sum_{k=1}^{n} y_k}_{=0} \\ &= 0\end{aligned}$$

8) $(0, 0, \cdots, 0) \in F$ car $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \times 0^2 = 0$, F est non vide.

- Si n est pair, on a $u = (1, 1, \cdots, 1) \in F$ car $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k 1^2 = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k = (-1)\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} = (-1)\dfrac{1-(-1)^n}{1-(-1)} = 0$ car n est pair donc $(-1)^n = 1$.
On a aussi $v = (1, -1, \cdots, 1, -1) \in F$.
En revanche $u + v = (1, 1, \cdots, 1) + (1, -1, \cdots, -1) = (2, 0, \cdots, 2, 0)$ et on a $2^2 - 0^2 + 2^2 - 0^2 + \cdots + 2^2 - 0^2 = \dfrac{n}{2} \times 2^2 = 2n \neq 0$, donc $u + v \notin F$, F n'est pas un sous-espace vectoriel.
- Si n est impair, on a $u = (1, 1, \cdots, 1, 0) \in F$ et $v = (1, -1, 1, -1, \cdots, 1, -1, 0) \in F$ mais $u + v = (2, 0, 2, 0, \cdots, 2, 0, 0) \notin F$, donc F n'est pas un sous-espace vectoriel.

Correction de l'exercice 2 :

1) Oui
2) Oui
3) Oui
4) Oui
5) Oui
6) Non. $f : x \mapsto x^2 + x + 1$ et $g : x \mapsto -x^2 + x + 1$ sont des polynômes de degré 2 mais $(f + g) : x \mapsto 2x + 2$ n'est pas un polynôme de degré 2.
La fonction nulle n'est pas non plus un polynôme de degré 2.
7) Non. En effet, la fonction nulle ne peut pas s'écrire sous la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$ car $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{ax} \neq 0$.

Correction de l'exercice 3 :

1) Oui
2) Oui
3) Non ($0 \notin F$)
4) Oui

Correction de l'exercice 4 :

1) Oui (c'est le noyau de l'endomorphisme $f : M \mapsto {}^tM + \mathrm{tr}(M)I$)
2) Non ($0 \notin F$)
3) Non : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in F$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in F$ mais $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin F$
4) Oui (c'est le noyau de l'endomorphisme $f : M \mapsto AM$).
5) Oui (c'est l'image de l'endomorpisme $f : M \mapsto AN$)

Correction de l'exercice 5 :

1) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$$

On a

$$\lambda_1 \cdot (3,-2,1) + \lambda_2 \cdot (1,2,3) + \lambda_3 \cdot (-4,1,5) = 0 \iff (3\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3\ ,\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3\ ,\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3) = 0$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -8\lambda_2 - 19\lambda_3 & = & 0 \\ 8\lambda_2 + 11\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -8\lambda_3 & = & 0 \\ 8\lambda_2 + 11\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 & = & 0 \end{array} \right.$$

donc finalement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. On en déduit que la famille (u, v, w) est libre.

2) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$$

On a

$$\lambda_1 \cdot (1,1,3) + \lambda_2 \cdot (4,2,5) + \lambda_3 \cdot (-1,1,4) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \\ -7\lambda_2 + 7\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{2}L_2$$

ce système admet des solutions non triviales, par exemple $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ et $\lambda_1 = -3$. On a effectivement

$$-3 \cdot (1,1,3) + (4,2,5) + (-1,1,4) = (0,0,0)$$

donc la famille (u, v, w) est liée.

3) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$$

On a

$$\lambda_1 \cdot (1,0,1) + \lambda_2 \cdot (0,1,0) + \lambda_3 \cdot (0,0,1) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{lllcl} \lambda_1 & & & = & 0 \\ & \lambda_2 & & = & 0 \\ \lambda_1 & & + \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

donc finalement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, on en déduit que la famille (u, v, w) est libre.

4) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$$

On a

$$\lambda_1 \cdot (1,1,1) + \lambda_2 \cdot (3,0,3) + \lambda_3 \cdot (0,3,0) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + 3\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 \quad\quad + 3\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + 3\lambda_2 & = & 0 \\ -3\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. \quad \begin{smallmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{smallmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & -3\lambda_2 \\ -3\lambda_2 & = & -3\lambda_3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & -3\lambda_3 \\ \lambda_2 & = & \lambda_3 \end{array} \right.$$

ce système admet des solutions non triviales, par exemple $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-3, 1, 1)$.
En effet, on a

$$-3 \cdot (1,1,1) + (3,0,3) + (0,3,0) = 0$$

La famille (u, v, w) est donc liée.

Correction de l'exercice 6 :

1) On a $4 \times 0 - 2 \times 0 + 6 \times 0 = 0$ donc $(0,0,0) \in G$, ainsi G est non vide.
Soient $(x,y,z) \in G$ et $(x',y',z') \in G$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Alors $\lambda \cdot (x,y,z) + \mu \cdot (x',y',z') = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$.
On a d'une part :

$$\begin{aligned}(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') &= \lambda(\underbrace{x + y + z}_{=0}) + \mu(\underbrace{x' + y' + z'}_{=0}) \\ &= 0\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}4(\lambda x + \mu x') - 2(\lambda y + \mu y') + 6(\lambda z + \mu z') &= \lambda(\underbrace{4x - 2y + 6z}_{=0}) + \mu(\underbrace{4x' - 2y' + 6z'}_{=0}) \\ &= 0\end{aligned}$$

donc $\lambda \cdot (x,y,z) + \mu \cdot (x',y',z') \in G$.
On en déduit que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) Soit $u \in F$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda \cdot (-4,1,3)$, donc $u = (-4\lambda, \lambda, 3\lambda)$.
On a d'une part

$$-4 + 1 + 3 = 0$$

et d'autre part :

$$4 \times (-4\lambda) - 2 \times \lambda + 6 \times (3\lambda) = (-16 - 2 + 18)\lambda = 0$$

donc $u \in G$. On en déduit pour tout $u \in F$ on a $u \in G$, donc que $F \subset G$.

3) Montrons l'inclusion réciproque : soit $u = (x,y,z) \in G$.
Alors (x,y,z) est solution du système $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 0 \\ 4x - 2y + 6z & = & 0 \end{array} \right.$.
Or on a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 0 \\ 4x - 2y + 6z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 0 \\ -6y + 2z & = & 0 \end{array} \right. \quad L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -y-z \\ z &=& 3y \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -4y \\ z &=& 3y \end{array}\right.$$

$$\iff (x,y,z) = y(-4,1,3)$$

$$\iff (x,y,z) \in \text{Vect}\left((-4,1,3)\right)$$

donc $(x,y,z) \in F$. On en déduit que $G \subset F$, donc finalement que $F = G$.

Correction de l'exercice 7 :

1) Soient deux réels λ et μ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \cos x + \mu \sin x = 0$. Alors, pour $x = 0$ on a $\lambda \times 1 + \mu \times 0 = 0$ donc $\lambda = 0$ et pour $x = \frac{pi}{2}$ on a $\lambda \times 0 + \mu \times 1 = 0$ donc $\mu = 0$. Finalement, $\lambda = \mu = 0$ donc la famille $(\cos, \sin)$ est libre.
2) On raisonne par récurrence sur n. $(x \mapsto \sin(a_1 x))$ est une famille d'une fonction non nulle donc est libre, la propriété est donc vraie pour $n = 1$. Supposons que la propriété soit vraie au rang $n-1$ et soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n \lambda_i \sin(a_i x) = 0$.
En dérivant à gauche et à droite on obtient $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \cos(a_i x) = 0$, puis en dérivant de nouveau on obtient $-\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^2 \sin(a_i x)$
0.
En ajoutant a_n^2 fois l'égalité de départ à celle ci on obtient :
$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (a_n^2 - a_i^2) \sin(a_i x) = 0$$
Or la famille $(x \mapsto \sin(a_i x))_{1 \leq i \leq n-1}$ est libre par hypothèse de récurrence, donc $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\lambda_i(a_n^2 - a_i^2) = 0$. Or pour tout $i \in \{1,\dots,n-1, \; 0 < a_i < a_n$ donc $a_i^2 < a_n^2$ donc $\lambda_i = 0$. Il reste donc $\forall x \in \mathbb{R}, \; \lambda_n \sin(a_n x) = 0$ donc on obtient $\lambda_n = 0$ pour $x = \frac{\pi}{2a_n}$.
Finalement, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ donc la famille $(x \mapsto \sin(a_i x))_{1 \leq i \leq n}$ est libre.

Correction de l'exercice 8 :

1) On a
$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t &=& 0 \\ x+y+2z+3t &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t &=& 0 \\ z+2t &=& 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -y+t \\ z &=& -2t \end{array}\right.$$
Donc
$$(x,y,z,t) \in E \iff (x,y,z,t) = (-y+t, y, -2t, t)$$
$$\iff (x,y,z,t) = y(-1,1,0,0) + t(1,0,-2,1)$$
Finalement $E = \text{Vect}\left((-1,1,0,0),(1,0,-2,1)\right)$ et cette famille est libre (2 vecteurs non colinéaires) donc $((-1,1,0,0),(1,0,-2,$
est une base de E
2) On a
$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y &=& 0 \\ -x+3y &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+2y &=& 0 \\ 5y &=& 0 \end{array}\right. \qquad L2 \leftarrow L_2 + L_1$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y &=& 0 \end{array}\right.$$
donc $E = \{(0,0)\}$. La famille vide est une base de E.
3) On a
$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y+2z &=& 0 \\ 4x+y-z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-y+2z &=& 0 \\ 5y-9z &=& 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& y-2z \\ y &=& \frac{9}{5}z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{1}{5}z \\ y & = & \frac{9}{5}z \end{array}\right.$$

$$\iff (x,y,z) = \left(-\frac{1}{5}z, \frac{9}{5}z, z\right)$$

$$\iff (x,y,z) = z\left(-\frac{1}{5}, \frac{9}{5}, 1\right)$$

donc $E = \text{Vect}\left(\left(-\frac{1}{5}, \frac{9}{5}, 1\right)\right) = \text{Vect}\left((-1,9,5)\right)$, la famille à un élément $((-1,9,5))$ est une base de E.

4) On a

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 0 \\ x-y+z+t & = & 0 \\ x+y+z-t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 0 \\ -2y & = & 0 \\ -2t & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & 0 \\ t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff (x,y,z,t) = (-z,0,z,0)$$

$$\iff (x,y,z,t) = z(-1,0,1,0)$$

donc $E = \text{Vect}\left((-1,0,1,0)\right)$. La famille à un élément $((-1,0,1,0))$ est une base de E.

5) On a

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y-3z-t & = & 0 \\ 2x-y-5z+t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-y-3z-t & = & 0 \\ y+z+3t & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -z-3t+3z+t \\ y & = & -z-3t \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2z-2t \\ y & = & -z-3t \end{array}\right.$$

$$\iff (x,y,z,t) = (2z-2t, -z-3t, z, t)$$

$$\iff (x,y,z,t) = z(2,-1,1,0) + t(-2,-3,0,1)$$

donc $E = \text{Vect}\left((2,-1,1,0), (-2,-3,0,1)\right)$. La famille $((2,-1,1,0),(-2,-3,0,1))$ est libre (2 vecteurs non colinéaires) et génératrice de E donc c'est une base de E.

Correction de l'exercice 9 : F est engendré par une famille à 3 éléments, donc $\dim(F) \leq 3$.
On vérifie si la famille $((3,-2,4),(5,0,6),(3,8,2))$ est libre. Pour tous réels $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\lambda_1 \cdot (3,-2,4) + \lambda_2 \cdot (5,0,6) + \lambda_3 \cdot (3,8,2) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} 3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_1 \qquad + 8\lambda_3 & = & 0 \\ 4\lambda_1 + 6\lambda_2 + 2\lambda_3 & & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 12\lambda_1 + 20\lambda_2 + 12\lambda_3 & = & 0 \\ -12\lambda_1 \qquad + 48\lambda_3 & = & 0 \\ 12\lambda_1 + 18\lambda_2 + 6\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 12\lambda_1 + 20\lambda_2 + 12\lambda_3 & = & 0 \\ 20\lambda_2 + 60\lambda_3 & = & 0 \\ -2\lambda_2 - 6\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 12\lambda_1 + 20\lambda_2 + 12\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & -3\lambda_3 \\ \lambda_2 & = & -3\lambda_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 12\lambda_1 & = & 48\lambda_3 \\ \lambda_2 & = & -3\lambda_3 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 &= 4\lambda_3 \\ \lambda_2 &= -3\lambda_3 \end{cases}$$

donc $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (4, -3, 1)$ est une solution non triviale de ce système.
Ainsi, $4 \cdot (3, -2, 4) - 3 \cdot (5, 0, 6) + (3, 8, 2) = 0$, la famille est liée. On a :

$$(3, 8, 2) = 3(5, 0, 6) - 4(3, -2, 4)$$

donc $(3, 8, 2) \in \text{Vect}\left((5, 0, 6), (3, -2, 4)\right)$.
Ainsi, $F = \text{Vect}\left((3, -2, 4), (5, 0, 6)\right)$, donc $\dim(F) \leq 2$.
On a

$$\lambda \cdot (3, -2, 4) + \mu \cdot (5, 0, 6) = 0 \iff \begin{cases} 3\lambda + 5\mu &= 0 \\ -2\lambda &= 0 \\ 4\lambda + 6\mu &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda &= 0 \\ \mu &= 0 \end{cases}$$

donc la famille $((3, -2, 4), (5, 0, 6))$ est libre, on en déduit que c'est une base de F et donc que $\dim(F) = 2$.

Correction de l'exercice 10 :

1) Montrons que (u, v, w) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
Soient $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda u + \mu v + \gamma w = 0$.
Alors $\begin{cases} \lambda + \mu &= 0 \\ \mu + \gamma &= 0 \\ \lambda + \gamma &= 0 \end{cases}$.
On a

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= 0 \\ \mu + \gamma &= 0 \\ \lambda + \gamma &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu &= 0 \\ \mu + \gamma &= 0 \\ -\mu + \gamma &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda + \mu &= 0 \\ \mu + \gamma &= 0 \\ 2\gamma &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda &= 0 \\ \mu &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{cases}$$

ainsi $\lambda = \mu = \gamma = 0$, donc la famille (u, v, w) est libre. On sait d'après le cours que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, donc (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) On sait que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ donc il existe $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x = x_1 u + x_2 v + x_3 w$.

$$(3, 1, 2) = x_1 \cdot (1, 0, 1) + x_2 \cdot (1, 1, 0) + x_3 \cdot (0, 1, 1) \iff \begin{cases} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_3 &= 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_2 + x_3 &= -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_3 &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 0 \end{cases}$$

Finalement $x = 2 \cdot (1, 0, 1) + (1, 1, 0)$.
Les coordonnées de x dans la base (u, v, w) sont $(2, 1, 0)$.

De même, il existe $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $y = y_1 u + y_2 v + y_3 w$.

$$(0,0,4) = y_1 \cdot (1,0,1) + y_2 \cdot (1,1,0) + y_3 \cdot (0,1,1) \iff \left\{\begin{array}{rcl} y_1 + y_2 &=& 0 \\ y_2 + y_3 &=& 0 \\ y_1 + y_3 &=& 4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} y_1 + y_2 &=& 0 \\ y_2 + y_3 &=& 0 \\ -y_2 + y_3 &=& 4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} y_1 + y_2 &=& 0 \\ y_2 + y_3 &=& 0 \\ 2y_3 &=& 4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} y_1 &=& 2 \\ y_2 &=& -2 \\ y_3 &=& 2 \end{array}\right.$$

Finalement, $y = 2 \cdot (1,0,1) - 2 \cdot (1,1,0) + 2 \cdot (0,1,1)$, donc les coordonnées de y dans la base (u, v, w) sont $(2, -2, 2)$.

Correction de l'exercice 11 : On admet que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in E &\iff x - 2y + z = 0 \\ &\iff x = 2y - z \\ &\iff (x,y,z) = y(2,1,0) + z(-1,0,1)\end{aligned}$$

donc $E = \text{Vect}\left((2,1,0), (-1,0,1)\right)$.
Montrons que cette famille est libre :

$$x \cdot (2,1,0) + y(-1,0,1) = (0,0,0) \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x - y &=& 0 \\ x &=& 0 \\ y &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\iff x = y = 0$$

donc $((2,1,0), (-1,0,1))$ est une famille libre, elle est aussi génératrice donc c'est une base de E.

Correction de l'exercice 12 : Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & b' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de F. Alors $M+N = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ b+b' & b+b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ b'' & b'' \end{pmatrix}$ avec $a'' = a + a'$ et $b'' = b + b'$ donc $M + N \in F$.

De plus, pour tout $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix} \in F$, $M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de F. Elle est libre car $a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = 0$.

Finalement, une base de F est $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ donc $\dim(F) = 2$.

Correction de l'exercice 13 :

1) F est non vide car le polynôme nul appartient à F. Si $P, Q \in F$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors $\lambda P + \mu Q \in E$ car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = 0$ donc $\lambda P + \mu Q \in F$. Ainsi F est bien un sous-espace vectoriel de E.
2) $F \subset E$ donc $\dim(F) \leq \dim(E) = n+1$. De plus, $F \neq E$ (par exemple le polynôme constant égal à 1 est dans E mais pas dans F), donc $\dim(F) \neq \dim(E)$ (sinon on aurait $F = E$). On en déduit que $\dim(F) < \dim(E)$ donc $\dim(F) \leq n$. La famille $(X^n - 1, X^{n-1} - 1, ..., X^2 - 1, X - 1)$ est une famille de polynômes échelonnée en degré, tous dans F, donc c'est une famille libre de F de cardinal n. On en déduit que $\dim(F) \geq n$ et puisque $\dim(F) \leq n$ on a finalement $\dim(F) = n$ (et la famille citée est une base de F).

Correction de l'exercice 14 :

1) La matrice nulle commute avec toutes les matrices donc commute avec A, ainsi $0 \in \mathcal{C}(A)$ donc $\mathcal{C}(A)$ est non vide.
Pour tout $(M, N) \in \mathcal{C}(A)^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned}(\lambda M+\mu N)A &= \lambda MA+\mu NA \\ &= \lambda AM+\mu AN && \text{car } M \text{ et } N \text{ commutent avec } A \\ &= A(\lambda M+\mu N)\end{aligned}$$

donc $\lambda M+\mu N \in \mathcal{C}(A)$. $\mathcal{C}(A)$ est non vide et stable par combinaison linéaire donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Soit $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}M\in\mathcal{C}(A) &\iff MA=AM \\ &\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b\end{pmatrix} \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& d \\ b &=& -c\end{array}\right.\end{aligned}$$

3) On en déduit que $\mathcal{C}(A)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix} \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)$ et cette famille est libre donc $\dim(\mathcal{C}(A))=2$.

Correction de l'exercice 15 :

1) Soient $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et $(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$.
Soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.
Alors

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda\cdot(x,y,z)+\mu\cdot(x',y',z')) &= \varphi((\lambda x+\mu x'\ ,\ \lambda y+\mu y'\ ,\ \lambda z+\mu z')) \\ &= (\lambda x+\mu x'+\lambda z+\mu z'\ ,\ \lambda y+\mu y'-\lambda z-\mu z') \\ &= (\lambda x+\lambda z\ ,\ \lambda y-\lambda z)+(\mu x'+\mu z'\ ,\ \mu y'-\mu z') \\ &= \lambda\cdot(x+z\ ,\ y-z)+\mu\cdot(x'+z'\ ,\ y'-z') \\ &= \lambda\cdot\varphi(x,y,z)+\mu\cdot\varphi(x,y,z)\end{aligned}$$

donc φ est une application linéaire.

- On détermine le noyau de φ :

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in\text{Ker}\varphi &\iff \varphi(x,y,z)=(0,0) \\ &\iff (x+z,y-z)=(0,0) \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+z &=& 0 \\ y-z &=& 0\end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -z \\ y &=& z\end{array}\right. \\ &\iff (x,y,z)=z(-1,1,1),\quad z\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

  donc $\text{Ker}\varphi=\text{Vect}\left((-1,1,1)\right)$.
- On déterminer l'image de φ :
  $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $\varphi(x,y,z)=(x+z,y-z)=x\cdot(1,0)+y\cdot(0,1)+z\cdot(1,-1)$, donc $\text{Im}(\varphi)=\text{Vect}\left((1,0),(0,1),(1,-1)\right)$.
  Remarque : puisque $(1,-1)=(1,0)-(0,1)$, alors $\text{Vect}\left((1,0),(0,1),(1,-1)\right)=\text{Vect}\left((1,0),(0,1)\right)$, donc $\text{Im}(\varphi)=\text{Vect}\left((1,0),(0,1)\right)=\mathbb{R}^2$.

2) $\varphi(1,0,0) = 0$ et $\varphi(0,1,0) = 0$ mais $\varphi((1,0,0)+(0,1,0)) = \varphi(1,1,0) = 1 \neq \varphi(1,0,0)+\varphi(0,1,0)$ donc φ n'est pas une application linéaire.
3) Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Alors

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda \cdot (x,y) + mu \cdot (x',y') &= \varphi(\lambda x + \mu x' \ , \ \lambda y + \mu y') \\ &= 3(\lambda y + \mu y') - (\lambda x + \mu x') \\ &= \lambda(3y - x) + \mu(3y' - x') \\ &= \lambda \varphi(x,y) + \mu \varphi(x',y')\end{aligned}$$

donc φ est une application linéaire.

- On détermine le noyau de φ :
On a

$$\begin{aligned}(x,y) \in \mathrm{Ker}(\varphi) &\iff 3y - x = 0 \\ &\iff x = 3y \\ &\iff (x,y) = y(3,1)\end{aligned}$$

donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left((3,1)\right)$.
- On détermine l'image de φ :
On a $\varphi(0,1) = 3$, donc $\mathrm{Vect}\left((3)\right) \subset \mathrm{Im}(\varphi)$. Or $\mathrm{Vect}\left((3)\right) = \mathbb{R}$ donc $\mathbb{R} \subset \mathrm{Im}(\varphi)$ donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$.

4) On a $\varphi(0,0,0,0) = (0,0,3,0) \neq (0,0,0,0)$ donc φ n'est pas linéaire.

Correction de l'exercice 16 :

1) Soient $(x,y,z) \in E$ et $(x',y',z') \in E$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Alors

$$\begin{aligned}f(\lambda \cdot (x,y,z) + \mu \cdot (x',y',z')) &= f(\lambda x + \mu x' \ , \ \lambda y + \mu y' \ , \ \lambda z + \mu z') \\ &= (\lambda x + \mu x' - \lambda y - \lambda y' \ , \ \lambda y + \mu y' + \lambda z + \mu z') \\ &= (\lambda x - \lambda y \ , \ \lambda y + \lambda z) + (\mu x' - \mu y' \ , \ \mu y' + \mu z') \\ &= \lambda \cdot (x - y, y + z) + \mu \cdot (x' - y', y' + z') \\ &= \lambda \cdot f(x,y,z) + \mu \cdot f(x,y,z)\end{aligned}$$

donc f est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}^2$.
2) On raisonne par analyse synthèse :
Analyse : supposons que $(1,0) \in \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $u \in E$ tel que $f(u) = (1,0)$. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $f(u) = f(\lambda \cdot (4,1,-1) + \mu \cdot (2,0,2)) = (1,0)$.
Or,

$$\begin{aligned}f(\lambda \cdot (4,1,-1) + \mu \cdot (2,0,2)) &= f(4\lambda + 2\mu, \lambda, -\lambda + 2\mu) \\ &= (4\lambda + 2\mu - \lambda, \lambda - \lambda + 2\mu) \\ &= (3\lambda + 2\mu, 2\mu)\end{aligned}$$

donc $(3\lambda + 2\mu, 2\mu) = (1,0)$ et on en déduit $\mu = 0$ et $\lambda = \dfrac{1}{3}$.

Synthèse : soit $u = \dfrac{1}{3} \cdot (4,1,-1) = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. Alors

$$\begin{aligned}f(u) &= f\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \\ &= \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}, \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

$$= (1,0)$$

donc $(1,0) \in \mathrm{Im}(f)$.
On raisonne de même pour montrer que $(0,1) \in \mathrm{Im}(f)$.
Analyse : supposons que $(0,1) \in \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $v \in E$ tel que $f(v) = (0,1)$ donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $f(v) = f(\lambda \cdot (4,1,-1) + \mu \cdot (2,0,2)) = (0,1)$.
Or, $f(\lambda \cdot (4,1,-1) + \mu \cdot (2,0,2)) = (3\lambda + 2\mu, 2\mu)$ donc $\begin{cases} 3\lambda + 2\mu & = & 0 \\ 2\mu & = & 1 \end{cases}$, on en déduit $\mu = \frac{1}{2}$ et $\lambda = -\dfrac{1}{3}$.
Synthèse : on pose $v = -\dfrac{1}{3} \cdot (4,1,-1) + \frac{1}{2} \cdot (2,0,2) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$. Alors :

$$\begin{aligned} f(v) &= \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right) \\ &= (0,1) \end{aligned}$$

donc $(0,1) \in \mathrm{Im}(f)$.

3) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$.
Puisque $(1,0) \in \mathrm{Im}(f)$ et $(0,1) \in \mathrm{Im}(f)$, on a $x(1,0) + y(0,1) \in \mathrm{Im}(f)$ car $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
Ainsi, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \in \mathrm{Im}(f)$, autrement dit $\mathbb{R}^2 \subset \mathrm{Im}(f)$ donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$, ainsi f est surjective.

4) Soit $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors, $(x,y,z) \in E$ et $f(x,y,z) = (0,0)$ donc $x - y = 0$ et $y + z = 0$.
On a donc $x = y$ et $z = -y$, ainsi $(x,y,z) = y(1,1,-1)$.
Puisque $(x,y,z) \in E$, il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y(1,1,-1) = \lambda \cdot (4,1,-1) + \mu \cdot (2,0,2)$.
Ainsi, (y,λ,μ) est solution du système suivant :

$$\begin{cases} y & = & 4\lambda + 2\mu \\ y & = & \lambda \\ -y & = & -\lambda + 2\mu \end{cases} \iff \begin{cases} y - 4\lambda - 2\mu & = & 0 \\ y - \lambda & = & 0 \\ -y + \lambda - 2\mu & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y - 4\lambda - 2\mu & = & 0 \\ 3\lambda + 2\mu & = & 0 \\ -3\lambda - 4\mu & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y - 4\lambda - 2\mu & = & 0 \\ 3\lambda + 2\mu & = & 0 \\ -2\mu & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y & = & 0 \\ \lambda & = & 0 \\ \mu & = & 0 \end{cases}$$

donc finalement $(x,y,z) = (0,0,0)$, donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

5) $\mathrm{Ker}(f) = 0_E$, donc f est injective. f est injective et surjective donc elle est bijective.

Correction de l'exercice 17 :

1) E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
En effet, pour tout $(x,y) \in E$, pour tout $(x',y') \in E$, pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, on a $\lambda \cdot (x,y) + \mu \cdot (x',y') = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')$, et $-\sqrt{3}(\lambda x + \mu x') + \lambda y + \mu y' = \lambda(\underbrace{-\sqrt{3}x + y}_{=0}) + \mu(\underbrace{-\sqrt{3}x' + y'}_{=0}) = 0$
φ est une application définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Montrons qu'elle est linéaire.
Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$.
Alors

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda \cdot (x,y) + \mu \cdot (x',y')) =& \varphi(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\ =& ((\sqrt{6} - \sqrt{2})(\lambda x + \mu x') - (\sqrt{6} + \sqrt{2})(\lambda y + \mu y')\ , \\ & (\sqrt{6} + \sqrt{2})(\lambda x + \mu x') + (\sqrt{6} - \sqrt{2})(\lambda y + \mu y')) \\ =& (\lambda(\sqrt{6} - \sqrt{2})x - \lambda(\sqrt{6} + \sqrt{2})y\ , \\ & \lambda(\sqrt{6} + \sqrt{2})x + \lambda(\sqrt{6} - \sqrt{2})y) + (\mu(\sqrt{6} - \sqrt{2})x' - \mu(\sqrt{6} - \sqrt{2})y'\ ,\ \mu(\sqrt{6} + \sqrt{2})x' + \mu(\sqrt{6} - \sqrt{2})y \\ =& \lambda \cdot \varphi(x,y) + \mu \cdot \varphi(x',y') \end{aligned}$$

donc φ est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}^2$

2) F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet, si $(x,y) \in F$ et $(x',y') \in F$, alors $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda(x,y)+\mu(x',y') = (\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y')$ avec $\lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y' = \lambda(\underbrace{x+y}_{=0})+\mu(\underbrace{x'+y'}_{=0}) = 0$

Il s'agit de vérifier que pour tout $(x,y) \in E$, on a $\varphi(x,y) \in F$.
Soit donc $(x,y) \in E$, alors $-\sqrt{3}x+y=0$, autrement dit $y=\sqrt{3}x$.
On a donc

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= ((\sqrt{6}-\sqrt{2})x-(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sqrt{3}x\ ,\ (\sqrt{6}+\sqrt{2})x+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sqrt{3}x)\\ &= ((\sqrt{6}-\sqrt{2})x-(3\sqrt{2}+\sqrt{6})x\ ,\ (\sqrt{6}+\sqrt{2})x+(3\sqrt{2}-\sqrt{6})x)\\ &= (-4\sqrt{2}x, 4\sqrt{2}x)\end{aligned}$$

Or, $-4\sqrt{2}x+4\sqrt{2}x=0$ donc $\varphi(x,y) \in F$.
Ainsi, φ est à valeur dans F donc φ est bien une application linéaire de E vers F.

Correction de l'exercice 18 :

1) Pour tout $x \in \mathrm{Ker}(f)$ on a $f(x)=0_E$ donc $f(f(x))=f(0_E)=0_E$ car f est linéaire, donc $f^2(x)=0_E$. Pour tout $x \in \mathrm{Ker}(f)$ on a $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$ donc $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.
2) Pour tout $\in \mathrm{Im}(f^2)$ il existe $y \in E$ tel que $f^2(y)=x$ donc $f(f(y))=x$. Ainsi, $f(y)$ est un antécédent de x par f donc $x \in \mathrm{Im}(f)$.
Pour tout $x \in \mathrm{Im}(f^2)$ on a $x \in \mathrm{Im}(f)$ donc $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.
3) Montrons le sens direct $\Rightarrow$.
Supposons que $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Ker}(f^2)$ et soit $x \in \mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Ker}(f)$.
Alors $x \in \mathrm{Im}(f)$ et $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Il existe donc $y \in E$ tel que $x=f(y)$, et $f(x)=0_E$ donc $f(f(y))=0_E$.
Ainsi, $y \in \mathrm{Ker}(f^2)$, mais puisque $\mathrm{Ker}(f^2)=\mathrm{Ker}(f)$ par hypothèse on a aussi $y \in \mathrm{Ker}(f)$. On en conclut que $f(y)=0_E$, et puisque $x=f(y)$ on a finalement $x=0_E$.
Pour tout $x \in \mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Ker}(f)$ on a $x=0_E$ donc $\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Ker}(f) \subset \{0_E\}$ et puisque l'inclusion réciproque est toujours vraie (car $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des s-e.v. de E) alors $\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Ker}(f)=\{0_E\}$.

Montrons le sens indirect $\Leftarrow$
Supposons que $\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Ker}(f)=\{0_E\}$ et montrons que $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Ker}(f^2)$.
D'après la question 1 l'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ est toujours vraie. Montrons l'inclusion réciproque : pour tout $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$ on a $f^2(x)=0_E$ donc $f(f(x))=0_E$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$. Puisqu'on a aussi $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ par définition, on a finalement $f(x) \in \mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Ker}(f)=\{0_E\}$. Ainsi, $f(x)=0_E$ donc $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Cela prouve que $\mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$ donc que $\mathrm{Ker}(f^2)=\mathrm{Ker}(f)$.

Correction de l'exercice 19 : D'après le théorème du rang, on a $\dim(E)=\dim(\mathrm{Ker}(f))+\dim(\mathrm{Im}(f))$.
Or, $f^2=0$ donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. En effet, pour tout $x \in \mathrm{Im}(f), \exists y \in E$ tel que $x=f(y)$ et $f(x)=f^2(y)=0$ par hypothèse sur f.
Ainsi, $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f)$. On en déduit appliquant cette inégalité au théorème du rang que $\dim(E) \geq \dim(\mathrm{Im}(f))+\dim(\mathrm{Im}(f))$ d'où $\mathrm{Im}(f) \leq \dfrac{\dim(E)}{2}$.

Correction de l'exercice 20 :

1) Soient $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que $\lambda_1 f(u_1)+\lambda_2 f(u_2)+\cdots+\lambda_p f(u_p)=0_F$.
Alors
$$f(\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\cdots+\lambda_p u_p)=0$$
par linéarité de f.
Or, f est injective, donc $\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\cdots+\lambda_p u_p=0$. Or la famille $(u_1,u_2,\cdots,u_p)$ est libre, donc $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_p=0$.
On en déduit que la famille $(f(u_1),f(u_2),\cdots,f(u_p))$ est libre.
2) Soit $y \in F$. Montrons que y peut s'écrire comme une combinaison linéaire de la famille $(f(u_j))$.
On sait que f est surjective, donc il existe $x \in E$ tel que $f(x)=y$.
La famille $(u_1,u_2,\cdots,u_p)$ est une famille génératrice de E, donc il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)$ tels que $x=\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\cdots+\lambda_p u_p$.
Ainsi, $f(x)=f(\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\cdots+\lambda_p u_p$. Comme f est linéaire, on en déduit que $y=\lambda_1 f(u_1)+\lambda_2 f(u_2)+\cdots+\lambda_p f(u_p)$.
Ce raisonnement est valable quel que soit $y \in F$, donc $(f(u_1),f(u_2),\cdots,f(u_p))$ est une famille génératrice de F.

3) On en déduit que si f est bijective, alors l'image d'une base de E par f est une base de F.
En effet, d'après la question 1 l'image d'une famille libre est une famille libre.
D'après la question 2 l'image d'une famille génératrice est une famille génératrice.
L'image d'une famille libre et génératrice est donc une famille libre et génératrice.

Correction de l'exercice 21 :

1) Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$ deux vecteurs, et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Alors

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda \cdot (x,y) + \mu \cdot (x',y')) &= \varphi(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\
&= (\cos\theta(\lambda x + \mu x') - \sin\theta(\lambda y + \mu y' \ , \ \sin\theta(\lambda x + \mu x') + \cos\theta(\lambda y + \mu y')) \\
&= (\lambda(\cos\theta x - \sin\theta y) + \mu(\cos\theta x' + \sin\theta y') \ , \ \lambda(\sin\theta x + \cos\theta y) + \mu(\sin\theta x' + \cos\theta y') \\
&= \lambda \cdot (\cos\theta x - \sin\theta y \ , \ \sin\theta x + \cos\theta y) + \mu \cdot (\cos\theta x' - \sin\theta y' \ , \ \sin\theta x' + \cos\theta y') \\
&= \lambda \cdot \varphi(x,y) + \mu \cdot \varphi(x',y')
\end{aligned}$$

donc φ est une application linéaire.

2) On a $\varphi_\theta = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ si et seulement si $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi_\theta(x,y) = (x,y)$.
En partiulier, si $\varphi_\theta = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ on a $\varphi_\theta(1,0) = (1,0)$, on en déduit que $(\cos\theta, \sin\theta) = (1,0)$ donc $\left\{\begin{array}{lcl} \cos\theta & = & 1 \\ \sin\theta & = & 0 \end{array}\right.$, on en déduit que $\theta \equiv 0[2\pi]$
Réciproquement, si $\theta \equiv 0[2\pi]$, $\cos\theta = 1$ et $\sin\theta = 0$ donc pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi_\theta(x,y) = (1x - 0y, 0x + 1y) = (x,y)$.
Les seules valeurs de θ pour lesquelles $\varphi_\theta = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ sont donc $\theta = 0 + 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

3) On a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi_\theta(x,y) = -(x,y) \Longleftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left\{\begin{array}{lcl} \cos\theta x - \sin\theta y & = & -x \\ \sin\theta x + \cos\theta y & = & -y \end{array}\right.$$

En particulier pour $(x,y) = (1,0)$,on obtient comme condition nécessaire $\left\{\begin{array}{lcl} \cos\theta & = & -1 \\ \sin\theta & = & 0 \end{array}\right.$, donc $\theta = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Réciproquement, si $k = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on a bien $\varphi_\theta(x,y) = (-1x - 0y, 0x - 1y) = -(x,y)$.
Ainsi, on a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi_\theta(x,y) = -(x,y)$ si et seulement si $\theta = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4) Supposons que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $\varphi_\theta(x,y) = (-x,y)$, alors $\varphi_\theta(1,0) = (-1,0)$ et $\varphi_\theta(0,1) = (0,1)$.
On a donc $\left\{\begin{array}{lcl} \cos\theta & = & -1 \\ \sin\theta & = & 0 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{lcl} -\sin\theta & = & 0 \\ \cos\theta & = & 1 \end{array}\right.$, on ne peut pas avoir à la fois $\cos\theta = 1$ et $\cos\theta = -1$, donc il n'existe aucune valeur de θ telle que $\varphi_\theta(x,y) = (-x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

5) a) $M(x,y)$ appartient au cercle de centre 0 et de rayon 1 si et seulement si $x^2 + y^2 = 1$.
Supposons que $x^2 + y^2 = 1$, alors $M' = \varphi_\theta(M)$ a pour coordonnées $(X,Y) = (\cos\theta x - \sin\theta y, \sin\theta x + \cos\theta y)$.
On a donc

$$\begin{aligned}
X^2 + Y^2 &= (\cos\theta x - \sin\theta y)^2 + (\sin\theta x + \cos\theta y)^2 \\
&= \cos^2\theta x^2 + \sin^2\theta y^2 - 2\cos\theta\sin\theta xy + \sin^2\theta x^2 + \cos^2\theta y^2 + 2\sin\theta\cos\theta xy \\
&= x^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + y^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\
&= x^2 + y^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

donc M' appartient au cercle de centre 0 et de rayon 1.

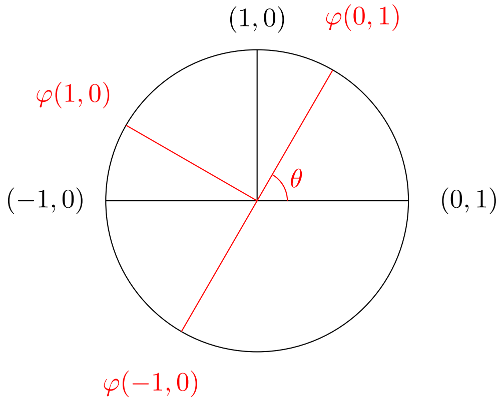
b) On a $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi_\theta(x,y) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \ , \ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$$

On a donc

- $\varphi_\theta(1,0) = \left(\frac{1}{2} \ , \ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

- $\varphi_\theta(0,1) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- $\varphi(-1,0) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



c) La fonction φ_θ semble appliquer une rotation de centre $(0,0)$ et d'angle θ.

Correction de l'exercice 22 :

1) φ est une forme linéaire non nulle donc il existe $u \in E$ tel que $\varphi(u) \neq 0$. Ainsi, $\text{Vect}\,(\varphi(u)) \subset \text{Im}(\varphi)$ et comme $\dim(\text{Vect}\,(\varphi(u))) = 1$ (c'est une droite vectorielle) on en conclut que $\text{Vect}\,(\varphi(u)) = \mathbb{R}$. Ainsi, $\mathbb{R} \subset \text{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}$ donc $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$.
   D'après le théorème du rang, on a $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(\varphi)) + \text{rg}(\varphi)$. Or $\text{rg}(\varphi) = \dim(\text{Im}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}) = 1$ d'où $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = \dim(E) - 1$.
   Ainsi, $\text{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$, c'est donc un hyperplan de E.
2) Soit H un hyperplan de E.
   Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$ une base de H. D'après le théorème de la base incomplète, il existe $e_n \in E$ tel que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E.
   On a nécessairement $e_n \notin H$ sinon on aurait $E = H = \text{Vect}\,((e_1, e_2, \ldots, e_n))$.
   Soit φ la forme linéaire définie sur les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ par
   $$\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ \varphi(e_i) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(e_n) = 1$$
   Cela suffit pour définir φ sur E tout entier.
   Montrons que $H = \text{Ker}(\varphi)$. Il est clair que par combinaison linéaire, tout élément de $\text{Vect}\,((e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}))$ appartient à $\text{Ker}(\varphi)$ donc $H \subset \text{Ker}(\varphi)$.
   Réciproquement, puisque φ est une forme linéaire non nulle alors la dimension de son noyau est $n-1$, donc puisque $H \subset \text{Ker}(\varphi)$ et que $\dim(H) = n-1$ on en conclut que $H = \text{Ker}(\varphi)$.

Correction de l'exercice 23 :

1) Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(1-X) = \lambda P(1-X) + \mu Q(1-x) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$, ainsi f est linéaire.
   Montrons que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
   Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $f(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k (1-X)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} X^i$.
   Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et tout $i \in [\![0, k]\!]$, $\deg(X^i) \leq n$ donc $\deg(f(P)) \leq n$. On en déduit que f définit bien une application de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}_n[X]$ qui est linéaire, donc c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $f(f(P))(X) = f(P)(1-X) = P(1-(1-X)) = P(X)$, donc $f^2 = \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. On en déduit que f est bijective d'inverse f donc c'est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Correction de l'exercice 24 :

1) Pour tout $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,
   $$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) \\ &= \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) - \lambda P(X) - \mu Q(X) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$
   donc f est une application linéaire.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors

$$\begin{aligned} f(P) &= \sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k [(X+1)^k - X^k] \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i \end{aligned}$$

pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $\deg(X^i) \leq n-1$ donc par somme $\deg(f(P)) \leq n-1$. Ainsi f est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathrm{Ker}(f)$. Montrons que P est constant de deux façons différentes :
Méthode algébrique : Supposons que P n'est pas constant et soit $n_0 = \max\{k \in [\![0, n]\!] \mid a_k \neq 0\}$. Alors $n_0 \geq 1$.
Puisque $f(P) = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n_0} a_k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i = 0$$

Cette somme contient un seul terme de degré $n_0 - 1$ dont le coefficient est $a_{n_0}\binom{n_0}{n_0-1}$. Or un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, donc $a_{n_0}\binom{n_0}{n_0-1} = 0$, d'où $a_{n_0} = 0$, contradiction.
Méthode analytique : Puisque $f(P) = 0$, on a $P(X+1) - P(X) = 0$ ce qui signifie que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x+1) = P(x)$.
P est donc périodique de période 1 donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(0)$.
Le polynôme $Q(X) = P(X) - P(0)$ vérifie donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q(n) = P(n) - P(0) = 0$ donc il admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. On en déduit que $P(X) = P(0)$ donc P est constant.
On a donc montré que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(1)$, c'est à dire $\mathrm{Ker}(f)$ est l'ensemble des polynômes constants.
D'après le théorème du rang,

$$\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}_n[X])$$

donc $\mathrm{rg}(f) = n+1-\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n+1-1 = n$. Puisque $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$, on a finalement $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Correction de l'exercice 25 :

1) Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q) &= ((\lambda P + \mu Q)(x_1), ..., (\lambda P + \mu Q)(x_n)) \\ &= (\lambda P(x_1) + \mu Q(x_1), ..., \lambda P(x_n) + \mu Q(x_n)) \\ &= \lambda \cdot (P(x_1), ..., P(x_n)) + \mu \cdot (Q(x_1), ..., Q(x_n)) \\ &= \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q) \end{aligned}$$

donc φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vers $\mathbb{R}^n$.

2) Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $(P(x_1),..., P(x_n)) = 0$ donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(x_k) = 0$. Puisque les réels $(x_1,..., x_n)$ sont deux à deux distincts, le polynôme P admet n racines distinctes. Un polynôme non nul de degré $n-1$ admet au plus $n-1$ racines distinctes donc P est nul, ainsi $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}\}$.
On en déduit que φ est injective, et comme $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n$ on en déduit à l'aide du théorème du rang que $\mathrm{rg}(\varphi) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$ donc φ est surjective donc bijective.

3) Soit $y = (y_1,..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. D'après la question précédente, puisque φ est bijective y admet un unique antécédent P par ϕ donc il existe un unique polynôme P tel que $(P(x_1),..., P(x_n)) = (y_1,..., y_n)$, c'est à dire tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$.

Correction de l'exercice 26 :

1) Pour tout $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned} f(aM + bN) &= (aM + bN) - {}^t(aM + bN) \\ &= aM + bN - a{}^tM - b{}^tN \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a(M - {}^tM) + b(N - {}^tN) \\ &= af(M) + bf(N) \end{aligned}$$

donc f est bien une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) $M \in \operatorname{Ker}(f) \iff f(M) = 0 \iff M = {}^tM \iff M$ est symétrique.
Ker(f) est l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3) On remarque que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tf(M) = {}^t(M - {}^tM) = {}^tM - M = -(M - {}^tM) = -f(M)$ donc $f(M)$ est antisymétrique.
Si on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n antisymétriques, alors $\operatorname{Im}(f) \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Or $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ où $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices antisymétriques de taille n. D'après le théorème du rang on a donc

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(f) &= \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \qquad\qquad = \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) \end{aligned}$$

par inclusion $\operatorname{Im}(f) \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et égalité des dimensions on en conclut que $\operatorname{Im}(f) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 27 :

1) Pour tout $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} f(\lambda M + \mu N) &= \operatorname{tr}(A)(\lambda M + \mu N) - \operatorname{tr}(\lambda M + \mu N)A \\ &= \lambda \operatorname{tr}(A)M + \mu \operatorname{tr}(A)N - \lambda \operatorname{tr}(M)A - \mu \operatorname{tr}(N)A \qquad \text{par linéarité de la trace} \\ &= \lambda(\operatorname{tr}(A)M - \operatorname{tr}(M)A) + \mu(\operatorname{tr}(A)N - \operatorname{tr}(N)A) \\ &= \lambda f(M) + \mu f(N) \end{aligned}$$

donc f est une application linéaire.

2) Si $\operatorname{tr}(A) = 0$, alors $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(M) = -\operatorname{tr}(M)A$, donc $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Vect}(A)$.
De plus, il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est non nulle donc $f(M) \neq 0$, donc $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(A)$.
Ainsi, $\operatorname{rg}(f) = 1$ et d'après le théorème du rang $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - \operatorname{rg}(f) = n^2 - 1$.

3) Si $\operatorname{tr}(A) \neq 0$, $M \in \operatorname{Ker}(f) \iff M = \dfrac{\operatorname{tr}(M)}{\operatorname{tr}(A)}A$. Si $M \in \operatorname{Ker}(f)$, alors $M \in \operatorname{Vect}(A)$. Réciproquement si $M \in \operatorname{Vect}(A)$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda A$ donc $f(M) = \lambda f(A) = \lambda(\operatorname{tr}(A)A - \operatorname{tr}(A)A) = 0$. Finalement, $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}(A)$ donc $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 1$.

4) On a :

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f^2(M) &= f(\operatorname{tr}(A)M - \operatorname{tr}(M)A) \\ &= \operatorname{tr}(A)(\operatorname{tr}(A)M - \operatorname{tr}(M)A) - \operatorname{tr}(\operatorname{tr}(A)M - \operatorname{tr}(M)A)A \\ &= \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(A)M - \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(M)A - \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(M)A + \operatorname{tr}(M)\operatorname{tr}(A)A \\ &= \operatorname{tr}(A)(\operatorname{tr}(A)M - \operatorname{tr}(M)A) \\ &= \operatorname{tr}(A)f(M) \end{aligned}$$

donc $f^2 = \operatorname{tr}(A)f$.

Correction de l'exercice 28 :

1) Soit $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. $P(0) = 0 \iff a_0 = 0$ donc $E = \operatorname{Vect}\left(X, X^2, ..., X^{n-1}\right)$ donc $\dim(E) = n - 1$.
On peut aussi voir que E est le noyau de l'application linéaire $f : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(0)$ et que cette application est non nulle donc $\operatorname{rg}(f) \geq 1$ donc $\operatorname{rg}(f) = 1$ car $\operatorname{Im}(f) \subset \mathbb{R}$. Le théorème du rang assure donc que $\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) - 1 = n - 1$.

2) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $f(P) = 0$. Alors $\forall x \neq 0$, $xP''(x) = 0$ donc $P''(x) = 0$. P'' est un polynôme de degré $n-2$ qui admet une infinité de racines donc c'est le polynôme nul.
Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ tel que $P''(X) = 0$, alors $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k X^{k-2} = 0$. Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls donc $\forall k \geq 2$, $k(k-1)a_k = 0$ donc $a_k = 0$. On en déduit que $P(X) = a_1 x + a_0$ donc $P \in \mathbb{R}_1[X]$.
Réciproquement, si $P \in \mathbb{R}_1[X]$, alors $P''(X) = 0$.
Finalement $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}_1[X]$.

3) D'après la question précédente, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}_1[X]) = 2$.
De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg(XP''(X)) = \deg(X) + \deg(P''(X)) \leq 1 + n - 2 \leq n-1$ donc $f(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et $f(P)(0) = 0 \times P''(0) = 0$ donc finalement $f(P) \in E$. On a montré que $\mathrm{Im}(f) \subset E$, et puisque le théorème du rang donne :
$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n + 1 - 2 = n - 1 = \dim(E)$$
on en conclut que $\mathrm{Im}(f) = E$.

4) Si P est un polynôme de degré $n-1$ qui s'annule en 0, alors $P \in E$ donc $P \in \mathrm{Im}(f)$ d'après la question précédente donc il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(Q) = P$, c'est à dire tel que $P(X) = XQ''(X)$.

Correction de l'exercice 29 :

1) Soit $x \in \mathrm{Ker}(g)$. Alors $g(x) = 0$ donc $g(g(x)) = g(0) = 0$ car g est linéaire, donc $x \in \mathrm{Ker}(g^2)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(g^2)$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(g^2)$, alors $g(g(x)) = 0$ donc $g(g(g(x))) = g(0) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(g^3)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(g^2) \subset \mathrm{Ker}(g^3)$.

2) a) Puisque $g^3 = 0$, on a $\forall x \in E$, $g^3(x) = 0$ donc $\mathrm{Ker}(g^3) = E$.
   b) Les inclusions $\{0_E\} \subsetneq \mathrm{Ker}(g) \subsetneq \mathrm{Ker}(g^2) \subsetneq \mathrm{Ker}(g^3)$ donnent :
   $$0 \leq \dim(\mathrm{Ker}(g)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(g^2)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(g^3))$$
   puis
   $$0 < \dim(\mathrm{Ker}(g)) < \dim(\mathrm{Ker}(g^2)) < \dim(\mathrm{Ker}(g^3))$$
   car des égalités donneraient une égalité des ensemble par inclusion et égalité des dimensions, ce qui contrediraient l'hypothèse des inclusions strictes.
   On en conclut que $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = 1$, $\dim(\mathrm{Ker}(g^2)) = 2$ et $\dim(\mathrm{Ker}(g^3)) = 3$ (c'est la seule suite strictement croissante d'entiers de 1 à 3).
   c) Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $g(x) = y$, donc $g^2(y) = g^3(x) = 0$ par hypothèse, ainsi $y \in \mathrm{Ker}(g^2)$ d'où $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(g^2)$.
   Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(g)) = 3 - \dim(\mathrm{Ker}(g)) = 3 - 1 = 2 = \dim(\mathrm{Ker}(g^2))$, on en déduit donc que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(g^2)$.

3) Soit $a \in \mathrm{Ker}(g)$. On a alors $a \in \mathrm{Ker}(g^2) = \mathrm{Im}(g)$ donc il existe $b \in E$ tel que $g(b) = a$. De plus, $g^2(b) = g(a) = 0$ par hypothèse donc $b \in \mathrm{Ker}(g^2)$.
Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda a + \mu b = 0$. Alors
$$g(\lambda a + \mu b) = g(0) = 0$$
donc
$$\lambda g(a) + \mu g(b) = 0$$
d'où
$$\mu g(b) = 0$$
Or $g(b) = a \neq 0$ donc $\mu = 0$. On revient donc à $\lambda a = 0$ et donc $\lambda = 0$. Ainsi la famille (a, b) est libre.

4) $b \in \mathrm{Ker}(g^2) = \mathrm{Im}(g)$ donc il existe $c \in E$ tel que $g(c) = b$

5) Soit $(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$\lambda a + \mu b + \gamma c = 0$$
Alors en appliquant g on obtient par linéarité :
$$\lambda g(a) + \mu g(b) + \gamma g(c)$$
d'où
$$\mu a + \gamma b = 0$$
or (a, b) est libre donc $\mu = \gamma = 0$ d'où $\lambda a = 0$ et finalemenet $\lambda = 0$. Ainsi la famille (a, b, c) est libre.
Puisque $\dim(E) = 3$ on en conclut que (a, b, c) est une base de E.
Dans cette base, on a :

$$g(a) = 0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c$$
$$g(b) = 1 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c$$

et

$$g(c) = 0 \cdot a + 1 \cdot b + 0 \cdot c$$