

★

Exercice 1

Voir correction

On considère l'application suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (y + z, x - y + z, z - 2x)$$

- 1) Montrer que f est une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 .
- 2) Déterminer la matrice de f dans la base canonique \mathcal{B}_0 .
- 3) On considère la base $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$.
Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}}(f)$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_0}(f)$, et $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$

★

Exercice 2

Voir correction

On considère l'application suivante :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto (x + y, x - y, 2y - 3x)$$

- 1) Montrer que f est une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 .
- 2) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3
- 3) On considère la base $\mathcal{B} = ((1, 1), (0, 2))$ de \mathbb{R}^2 et la base $\mathcal{B}' = ((1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3))$ de \mathbb{R}^3 .
Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$.
- 4) Montrer que f est injective.
- 5) Déterminer une base de $\text{im}(f)$.

★

Exercice 3

Voir correction

Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ données par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- 1) Vérifier que $A^2 = A$ et que $B^2 = B$
- 2) Déterminer le rang de A ainsi que la dimension du noyau de A
- 3) En notant I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que $I_2 - AB$ et que $A + B - AB$ sont inversibles.

★ ★

Exercice 4

Voir correction

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme non nul. On suppose que $f^2 = 0$, c'est à dire que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de f est $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que $\text{im}(f) \subset \ker(f)$
- 2) En déduire que $0 < \text{rg}(f) \leq \dim(\ker(f)) < 3$
- 3) À l'aide du théorème du rang, déterminer $\text{rg}(f)$ et $\dim(\ker(f))$.
- 4) Justifier qu'il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(u) \neq 0$.
- 5) On pose $v = f(u)$. Justifier qu'il existe $w \in \ker(f)$ tel que (v, w) est une base de $\ker(f)$.
- 6) Montrer que (v, w, u) est une base de \mathbb{R}^3 qui répond au problème posé.

★

Exercice 5

Voir correction

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que si f est une homothétie de E , alors la matrice représentative de f dans une base \mathcal{B} de E ne dépend pas de la base choisie.

★

Exercice 6

Voir correction

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que : $\forall \mathbf{x} \in E, \exists \lambda \in \mathbb{R}, f(\mathbf{x}) = \lambda \cdot \mathbf{x}$
 Montrer que : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in E, f(\mathbf{x}) = \lambda \cdot \mathbf{x}$.

★★

Exercice 7

Voir correction

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) &\longmapsto (3x + y + z, x - 2y + z, x + y, 2x + z) \end{aligned}$$

- 1) Montrer que f est une application linéaire
- 2) Déterminer la matrice de f dans la base canonique
- 3) On pose :

$$\mathcal{B} = ((2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = ((1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1))$$

Montrer que \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 et que \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^4

- 4) Déterminer la matrice de passage de la base canonique à \mathcal{B} et la matrice de passage de \mathcal{B}' à la base canonique.
- 5) En déduire $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ la matrice de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' .
- 6) Déterminer $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$.

★

Exercice 8

Voir correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient les matrices carrées de taille n suivante : $A = (2^{i+j})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (i+j)_{1 \leq i, j \leq n}$

- 1) Écrire A et B dans le cas $n = 5$
- 2) Déterminer le rang de A et le rang de B dans le cas général
- 3) Déterminer une base de $\text{Ker}(A)$ et une base de $\text{Ker}(B)$ dans le cas $n = 5$.

★★

Exercice 9

Voir correction

Soit $n \geq 2$ un entier et soit $A = (\sin(i+j))_{1 \leq i, j \leq n}$. Montrer que $\text{rg}(A) \leq 2$.

★★

Exercice 10

Voir correction

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

- 1) a) Calculer $(A - I)^2$
 b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A .
- 2) On pose $u_1 = (f - \text{Id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.
 a) Montrer que le rang de $(f - \text{Id})$ est égal à 1. En déduire la dimension de $\text{Ker}(f - \text{Id})$.
 b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\text{Ker}(f - \text{Id})$.
- 3) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de \mathbb{R}^3
- 4) Déterminer la matrice T de f dans cette base.
- 5) Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible puis écrire la relation existant entre les matrices A, T, P et P^{-1} .

★ ★
Exercice 11

— Voir correction —

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée de taille n . On dit que A est une matrice stochastique si les deux conditions suivantes sont remplies :

- $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \geq 0$
- $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$

1) Soient A et B deux matrice stochastiques. Montrer que AB est stochastique.

2) On considère la matrice $A = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Vérifier que A est stochastique.
- b) Justifier que A^n est stochastique.
- c) Calculer le rang de A .
- d) On pose $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (0, -1, 1)$ et $e_3 = (-2, 1, 1)$ et X_1, X_2, X_3 les vecteurs colonnes correspondant. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{R}^3 .
- e) Exprimer AX_1, AX_2 et AX_3 en fonction de X_1, X_2 et X_3 et en déduire qu'il existe une matrice inversible P telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Préciser la matrice P et déterminer son inverse P^{-1} .

f) Déterminer une expression de A^n en fonction de n .

★ ★ ★
Exercice 12

— Voir correction —

On veut démontrer dans cet exercice la formule d'inversion de Pascal : on suppose que (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k$.

Le but de l'exercice est de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) &\longmapsto P(X+1) \end{aligned}$$

- 1) Montrer que u définit bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2) Montrer que u est inversible d'inverse :

$$\begin{aligned} v : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) &\longmapsto P(X-1) \end{aligned}$$

3) Exprimer les matrices de u et de v dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, \dots, X^n)$.

4) On note $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$ et $N = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(v)$, et on note $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Montrer que $X^T = Y^T M$ et en déduire l'égalité voulue.

Correction des exercices

Correction de l'exercice 1 :

- 1) Soient $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ deux vecteurs, et soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
 f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) &= f((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')) \\
 &= ((\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z'), (\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z'), (\lambda z + \mu z') - 2(\lambda x + \mu x')) \\
 &= (\lambda y + \lambda z, \lambda x - \lambda y + \lambda z, \lambda z - 2\lambda x) + (\mu y' + \mu z', \mu x' - \mu y' + \mu z', \mu z' - 2\mu x') \\
 &= \lambda \cdot (y + z, x - y + z, z - 2x) + \mu \cdot (y' + z', x' - y' + z', z' - 2x') \\
 &= \lambda \cdot f(x, y, z) + \mu \cdot f(x', y', z')
 \end{aligned}$$

Pour tout $u, v \in \mathbb{R}^3$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v)$ donc f est une application linéaire.

- 2) Soient $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^3 . On a

$$f(e_1) = (0, 1, -2) \quad ; \quad f(e_2) = (1, -1, 0) \quad ; \quad f(e_3) = (1, 1, 1)$$

donc la matrice de f dans la base canonique est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 3) Notons $f_1 = (1, 1, 0)$, $f_2 = (0, 1, 1)$ et $f_3 = (1, 0, 1)$ les vecteurs de la base \mathcal{B} . On cherche à exprimer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base (f_1, f_2, f_3) .

On a

$$\begin{aligned}
 f(e_1) = (0, 1, -2) = x \cdot f_1 + y \cdot f_2 + z \cdot f_3 &\iff \begin{cases} 0 &= x + z \\ 1 &= x + y \\ -2 &= y + z \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x &= \frac{3}{2} \\ y &= -\frac{1}{2} \\ z &= -\frac{5}{2} \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 - L_3
 \end{aligned}$$

$$\text{donc } f(e_1) = \frac{3}{2} \cdot f_1 - \frac{1}{2} \cdot f_2 - \frac{5}{2} \cdot f_3$$

On a ensuite

$$\begin{aligned}
 f(e_2) = (1, -1, 0) = x \cdot f_1 + y \cdot f_2 + z \cdot f_3 &\iff \begin{cases} 1 &= x + z \\ -1 &= x + y \\ 0 &= y + z \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= -1 \\ z &= 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\text{donc } f(e_2) = -f_2 + f_3$$

On a enfin

$$\begin{aligned}
 f(e_3) = (1, 1, 1) = x \cdot f_1 + y \cdot f_2 + z \cdot f_3 &\iff \begin{cases} 1 &= x + z \\ 1 &= x + y \\ 1 &= y + z \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x &= \frac{1}{2} \\ y &= \frac{1}{2} \\ z &= \frac{1}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

donc $f(e_3) = \frac{1}{2} \cdot f_1 + \frac{1}{2} \cdot f_2 + \frac{1}{2} \cdot f_3$.

Finalement, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 2 :

- 1) Soient $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ deux vecteurs de \mathbb{R}^2 et soient λ et μ deux réels.

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) &= f((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')) \\ &= (\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y', \lambda x + \mu x' - \lambda y - \mu y', 2\lambda y + 2\mu y' - 3\lambda x - 3\mu x') \\ &= (\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y, 2\lambda y - 3\lambda x) + (\mu x' + \mu y', \mu x' - \mu y', 2\mu y' - 3\mu x') \\ &= \lambda \cdot (x + y, x - y, 2y - 3x) + \mu \cdot (x' + y', x' - y', 2y' - 3x') \\ &= \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v) \end{aligned}$$

pour tout $u, v \in \mathbb{R}^2$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a $f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v)$ donc f est une application linéaire de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^3 .

- 2) $f(1, 0) = (1, 1, -3)$ et $f(0, 1) = (1, -1, 2)$ donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

- 3) $f(1, 1) = (2, 0, -1)$. On cherche à exprimer ce vecteur dans la base \mathcal{B}' :

$$(2, 0, -1) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 2, 0) + z \cdot (0, 0, 3) \iff \begin{cases} 2 = x \\ 0 = 2y \\ -1 = 3z \end{cases}$$

$$\text{d'où } f(1, 1) = 2 \cdot (1, 0, 0) + 0 \cdot (0, 2, 0) - \frac{1}{3}(0, 0, 3)$$

$f(0, 2) = (2, -2, 4)$. On cherche à exprimer ce vecteur dans la base \mathcal{B}' :

$$(2, -2, 4) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 2, 0) + z \cdot (0, 0, 3) \iff \begin{cases} 2 = x \\ -2 = 2y \\ 4 = 3z \end{cases}$$

$$\text{d'où } f(0, 2) = 2 \cdot (1, 0, 0) - 1 \cdot (0, 2, 0) + \frac{4}{3} \cdot (0, 0, 3)$$

On en déduit :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

- 4) f est une application linéaire donc f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (0, 0, 0)$, alors $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ 2y - 3x = 0 \end{cases}$ En additionnant les deux premières lignes de ce système on obtient $x = 0$ et en les soustrayant on obtient $y = 0$, donc l'unique solution est $(x, y) = (0, 0)$. On en déduit que $\text{Ker}(f) = \{0\}$ donc que f est injective.

- 5) Dans la base canonique, $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ donc dans l'image de f est $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Ces deux vecteurs sont clairement non colinéaires donc $((1, 1, -3), (1, -1, 2))$ forme une base de $\text{Im}(f)$.

Correction de l'exercice 3 :

1) Calculons A^2 :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1) \times (-1) + (-2) \times 1 & (-1) \times (-2) + (-2) \times 2 \\ 1 \times (-1) + 2 \times 1 & 1 \times (-2) + 2 \times 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

On a donc bien $A^2 = A$

Calculons B^2 :

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 2 + (-2) \times 1 & 2 \times (-2) + (-2) \times (-1) \\ 1 \times 2 + (-1) \times 1 & 1 \times (-2) + (-1) \times (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= B \end{aligned}$$

On a donc bien $B^2 = B$

2) Les deux colonnes de A sont colinéaires, donc $\text{rg}(A) \leq 1$. Or A est non nulle donc $\text{rg}(A) = 1$.

D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(A)) + \text{rg}(A) = 2$ donc $\dim(\text{Ker}(A)) = 2 - 1 = 1$.

3) Calculons $I_2 - AB$:

$$\begin{aligned} I_2 - AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc $\det(I_2 - AB) = 5 \times 5 - (-4) \times (-4) = 9 \neq 0$ donc $I_2 - AB$ est inversible.

Calculons $A + B - AB$:

$$\begin{aligned} A + B - AB &= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $\det(A + B - AB) = 5 \times 5 - (-2) \times (-8) = 9 \neq 0$ donc $A + B - AB$ est inversible.

Correction de l'exercice 4 :

1) $f^2 = 0$ donc pour tout $x \in E$, $f(f(x)) = 0_E$.

Soit $y \in \text{im}(f)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ainsi, $f(y) = f(f(x)) = f^2(x) = 0_E$, donc $y \in \text{ker}(f)$.

Pour tout $y \in \text{im}(f)$, $y \in \text{ker}(f)$ donc $\text{im}(f) \subset \text{ker}(f)$.

2) On a $\text{im}(f) \subset \text{ker}(f)$ donc $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\text{ker}(f))$, c'est à dire $\text{rg}(f) \leq \dim(\text{ker}(f))$.

De plus, $\text{rg}(f) > 0$ car f est non nulle. (si $\text{rg}(f) = 0$, alors $\text{Im}(f) = \{0_E\}$ donc $f = 0$).

Enfin, pour la même raison, $\dim(\text{Ker}(f)) < 3$. En effet, si on avait $\dim(\text{Ker}(f)) = 3$ alors on aurait $\text{Ker}(f) = E$ donc $f = 0$.

Finalement, on a bien $0 < \text{rg}(f) \leq \dim(\text{Ker}(f)) < 3$.

3) D'après la question précédente, on a $\text{rg}(f) \in \{1, 2\}$ et $\dim(\text{Ker}(f)) \in \{1, 2\}$.

D'après le théorème du rang, $\text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E) = 3$.

Ainsi, $\text{rg}(f) = 3 - \dim(\text{Ker}(f))$. La seule solution possible est alors $\text{rg}(f) = 1$ et $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$.

4) f est non nulle donc la proposition

$$\forall u \in \mathbb{R}^3, f(u) = 0$$

est fausse, ce qui signifie que la proposition contraire

$$\exists u \in \mathbb{R}^3, f(u) \neq 0$$

est vraie.

5) $v = f(u)$ donc $f(v) = f^2(u) = 0$. Ainsi, $v \in \text{Ker}(f)$. On sait que $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$ d'après la question 3 donc d'après le théorème de la base incomplète il existe un vecteur non nul $w \in \text{Ker}(f)$ tel que (v, w) est une base de $\text{Ker}(f)$.

6) Les trois vecteurs v, w et u sont non nuls par construction.

Montrons que (v, w, u) est une famille libre de \mathbb{R}^3 . Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot w + \lambda_3 \cdot u = 0_E$.

Alors

$$f(\lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot w + \lambda_3 \cdot u) = f(0_E) = 0_E$$

donc

$$\lambda_1 \cdot f(v) + \lambda_2 \cdot f(w) + \lambda_3 \cdot f(u) = 0_E$$

et ainsi

$$\lambda_3 \cdot f(u) = 0_E$$

puisque $f(u) \neq 0$ on en déduit que $\lambda_3 = 0$.

On a donc $\lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot w = 0_E$, et comme v, w est une base de $\text{Ker}(f)$ c'est une famille libre, on en déduit que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Finalement, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ donc (v, w, u) est une famille libre.

De plus, $f(v) = f(w) = 0$ et $f(u) = v$ donc la matrice de f dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 7 :

1) Soient (x, y, z) et (x', y', z') deux vecteurs de \mathbb{R}^3 et soient λ et μ deux réels.

$$f(\lambda \cdot (x, y, z) + \mu \cdot (x', y', z')) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$$

$$= (3\lambda x + 3\mu x' + \lambda y + \mu y' + \lambda z + \mu z', \lambda x + \mu x' - 2\lambda y - 2\mu y',$$

$$\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y', 2\lambda x + 2\mu x' + \lambda z + \mu z')$$

$$= \lambda \cdot (3x + y + z, x - 2y + z, x + y, 2x + z) + \mu \cdot (3x' + y' + z', x' - 2y' + z', x' + y'$$

$$= \lambda \cdot f(x, y, z) + \mu \cdot f(x', y', z')$$

donc f est une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^4 .

2) Dans la base canonique \mathcal{B}_0 , la matrice de f est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Pour tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a $(x, y, z) = \frac{x}{2} \cdot (2, 0, 0) + \frac{y}{2} \cdot (0, 2, 0) + \frac{z}{2} \cdot (0, 0, 2)$ donc \mathcal{B} est une famille génératrice de trois vecteurs de \mathbb{R}^3 , c'est donc une base de \mathbb{R}^3 .

Montrons que \mathcal{B}' est une famille libre de \mathbb{R}^4 . Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \cdot (1, 1, 1, 0) + \lambda_2 \cdot (1, 1, 0, 1) + \lambda_3 \cdot (1, 0, 1, 1) + \lambda_4 \cdot (0, 1, 1, 1)$$

$$\text{donc } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \text{ est solution du système } \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{array} \right. & \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}} \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{array} \right. \\
& \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \end{array} \right. \\
& \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + L_2} \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_4 = 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

en remontant les équations on trouve $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, donc \mathcal{B}' est une famille libre à 4 éléments de \mathbb{R}^4 , c'est donc une base de \mathbb{R}^4 .

- 4) La matrice de passage de la base canonique à \mathcal{B} est $P_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Cherchons à exprimer les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^4 en fonction des vecteurs de la base \mathcal{B}' :

On remarque que

$$(1, 1, 1, 0) + (1, 1, 0, 1) + (1, 0, 1, 1) = (3, 2, 2, 2)$$

donc

$$(1, 1, 1, 0) + (1, 1, 0, 1) + (1, 0, 1, 1) - 2 \cdot (0, 1, 1, 1) = (3, 0, 0, 0)$$

finalement,

$$(1, 0, 0, 0) = \frac{1}{3} \cdot (1, 1, 1, 0) + \frac{1}{3} \cdot (1, 1, 0, 1) + \frac{1}{3} \cdot (1, 0, 1, 1) - \frac{2}{3} \cdot (0, 1, 1, 1) = (1, 0, 0, 0)$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
(0, 1, 0, 0) &= \frac{1}{3} \cdot (1, 1, 1, 0) + \frac{1}{3} \cdot (1, 1, 0, 1) + \frac{1}{3} \cdot (0, 1, 1, 1) - \frac{2}{3} \cdot (1, 0, 1, 1) \\
(0, 0, 1, 0) &= \frac{1}{3} \cdot (1, 1, 1, 0) + \frac{1}{3} \cdot (1, 0, 1, 1) + \frac{1}{3} \cdot (0, 1, 1, 1) - \frac{2}{3} \cdot (1, 1, 0, 1) \\
(0, 0, 0, 1) &= \frac{1}{3} \cdot (1, 1, 0, 1) + \frac{1}{3} \cdot (1, 0, 1, 1) + \frac{1}{3} \cdot (0, 1, 1, 1) - \frac{2}{3} \cdot (1, 1, 1, 0)
\end{aligned}$$

donc la matrice de passage de \mathcal{B}' à la base canonique est

$$P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 5) On utilise la même notation \mathcal{B}_0 pour la base canonique de \mathbb{R}^3 et celle de \mathbb{R}^4 mais il n'y a pas d'ambiguïté dans les notations des matrices de passage et on a d'après le cours :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_0} \text{Mat}_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_0}(f) P_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}}$$

donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & -6 & 6 \\ 8 & 12 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

6) Intéressons-nous d'abord au rang de f , on cherche une matrice échelonnée équivalente à $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\xleftrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xleftrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xleftrightarrow{\begin{matrix} L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3}L_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est équivalente à une matrice de rang 3 donc est de rang 3. On en conclut que $\dim(\text{Im}(f)) = 3$ donc d'après le théorème du rang $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Im}(f)) = 0$, ainsi $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

De plus, une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ est $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et puisque $\text{Im}(f)$ est de dimension 3 cette famille est aussi une base de $\text{Im}(f)$. Finalement, $\text{Im}(f) = \text{Vect}((3, 1, 1, 2), (1, -2, 1, 0), (1, 1, 0, 1))$ et $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

Correction de l'exercice 8 :

$$1) A = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 & 2^6 \\ 2^3 & 2^4 & 2^5 & 2^6 & 2^7 \\ 2^4 & 2^5 & 2^6 & 2^7 & 2^8 \\ 2^5 & 2^6 & 2^7 & 2^8 & 2^9 \\ 2^6 & 2^7 & 2^8 & 2^9 & 2^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 16 & 32 & 64 \\ 8 & 16 & 32 & 64 & 128 \\ 16 & 32 & 64 & 128 & 256 \\ 32 & 64 & 128 & 256 & 512 \\ 64 & 128 & 256 & 512 & 1024 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

2) Étudions d'abord le cas $n = 5$.

En faisant les opérations $\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2^2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2^3L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 2^4L_1 \end{matrix}$, la matrice A est équivalente à la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 16 & 32 & 64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc A est de rang 1.

Dans le cas général, l'opération $L_i \leftarrow 2^{i-1}L_1$ annule la ligne i , donc A est équivalente à une matrice dont la première ligne est $(2^2 \ 2^3 \ 2^4 \ \dots \ 2^n)$ et toutes les autres lignes sont nulles, ainsi A est de rang 1 quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour la matrice B , dans le cas $n = 5$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - 4L_1 \\ L_4 \leftarrow 2L_4 - 5L_1 \\ L_5 \leftarrow 2L_5 - 6L_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & -12 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 4L_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc B est de rang 2.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, pour tout $i \geq 2$ entier, on fait $L_i \leftarrow 2L_i - (i+1)L_1$. Après ces opérations, la i -ème ligne est :

$$\begin{aligned} L_i &= (2(i+j) - (i+1)(1+j))_{1 \leq j \leq n} \\ &= (i+j - ij - 1)_{1 \leq j \leq n} \\ &= ((i-1)(1-j))_{1 \leq j \leq n} \\ &= (i-1) \times (1-j)_{1 \leq j \leq n} \end{aligned}$$

donc $L_2 = (0 \ -1 \ -2 \ \dots \ -(n-1))$, et pour tout $i \geq 3$, $L_i = (i-1) \times L_2$, donc les $(n-1)$ dernières lignes forment une famille de rang 1, ainsi B est de rang 2.

Autrement dit, on peut faire les opérations $L_i \leftarrow L_i - (i-1)L_2$ pour tout $i \geq 3$ et on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \dots & n+1 \\ 0 & -1 & -2 & \dots & -(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 2

3) Dans le cas $n = 5$, $\text{rg}(A) = 1$ donc d'après le théorème du rang $\dim(\text{Ker}(A)) = 5 - 1 = 4$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix}$ un vecteur colonne de taille 5.

$$X \in \text{Ker}(A) \iff \begin{cases} 4x + 8y + 16z + 32t + 64u = 0 \\ 8x + 16y + 32z + 64t + 128u = 0 \\ 16x + 32y + 64z + 128t + 256u = 0 \\ 32x + 64y + 128z + 256t + 512u = 0 \\ 64x + 128y + 256z + 512t + 1024u = 0 \end{cases} \iff 4x + 8y + 16z + 32t + 64u = 0 \text{ d'après les opérations}$$

faites dans la question 2.

$$\text{Ainsi, } X \in \text{Ker}(A) \iff x = -2y - 4z - 8t - 32u \iff X = y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi, une base de } \text{Ker}(A) \text{ est } \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

De même,

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(B) &\iff \begin{cases} 2x + 3y + 4z + 5t + 6u = 0 \\ -y - 2z - 3t - 4u = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -\frac{3}{2}y - 2z - \frac{5}{2}t - 3u \\ y = -2z - 3t - 4u \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = z + 2t \\ y = -2z - 3t - 4u \end{cases} \\ &\iff (x, y, z, t, u) = z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc une base de $\text{Ker}(B)$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Correction de l'exercice 9 :

Pour tout couple d'entiers (i, j) on a $\sin(i + j) = \sin(i) \cos(j) + \sin(j) \cos(i)$.

Ainsi, la i -ème ligne de A définie par $L_i = (\sin(i + j))_{1 \leq j \leq n}$ peut s'écrire :

$$L_i = \sin(i) \times L_c + \cos(i) \times L_s$$

avec $L_c = (\cos(j))_{1 \leq j \leq n}$ et $L_s = (\sin(j))_{1 \leq j \leq n}$.

Toutes les lignes de A peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de L_c et L_s , donc $\text{rg}(A) = \text{rg}(\text{Vect}(L_c, L_s))$, ainsi $\text{rg}(A) \leq 2$.

Correction de l'exercice 10 :

$$1) \quad a) \quad (A - I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad (A - I)^2 = A^2 - AI - IA + I^2 = A^2 - 2A + I.$$

Or, d'après la question précédente, $(A - I)^2 = 0$ donc $A^2 - 2A + I = 0$. On en déduit que $2A - A^2 = I$ donc $A(2I - A) = I$.

Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = 2I - A$.

$$2) \quad a) \quad \text{La matrice de } f - \text{Id} \text{ est } A - I.$$

Calculons le rang de $A - I$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $A - I$ est de rang 1, ainsi, $\text{rg}(f - \text{Id}) = 1$.

D'après le théorème du rang $\dim(\text{Ker}(f - \text{Id})) = 3 - \text{rg}(f - \text{Id}) = 3 - 1 = 2$.

b) Montrons d'abord que $u_1 \in \text{Ker}(f - \text{Id})$ et $u_2 \in \text{Ker}(f - \text{Id})$.

$$(f - \text{Id})(u_1) = f(u_1) - u_1$$

$$= f(f - \text{Id})(e_1) - (f - \text{Id})(e_1)$$

$$= f(f(e_1)) - e_1 - f(e_1) + e_1$$

$$= f(-2e_2 + e_3) - f(e_1) - (-2e_2 + e_3) + e_1$$

d'après la matrice de f dans la base \mathcal{B} .

$$= -2f(e_2) + f(e_3) - (-2e_2 + e_3) + 2e_2 - e_3 + e_1$$

$$= -2(e_1 + 3e_2 - e_3) + e_1 + 2e_2 + 2e_2 - e_3 + 2e_2 - e_3 + e_1$$

$$= 0$$

donc $u_1 \in \text{Ker}(f - \text{Id})$.

De même :

$$\begin{aligned}(f - \text{Id})(u_2) &= (f - \text{Id})(e_1 + e_3) \\ &= f(e_1) + f(e_3) - e_1 - e_3 \\ &= -2e_2 + e_3 + e_1 + 2e_2 - e_1 - e_3 \\ &= 0\end{aligned}$$

donc $u_2 \in \text{Ker}(f - \text{Id})$. Puisque $\dim(\text{Ker}(f - \text{Id}))$ est de dimension 2, il suffit de montrer soit que (u_1, u_2) est libre, soit que (u_1, u_2) est génératrice de $\text{Ker}(f - \text{Id})$.

Montrons que c'est une famille libre : on suppose qu'il existe deux réels λ et μ tels que $\lambda \cdot u_1 + \mu \cdot u_2 = 0$.

Alors $\lambda \cdot f(e_1) - \lambda \cdot e_1 + \mu \cdot e_1 + \mu \cdot e_3 = 0$ par définition de u_1 et de u_2 .

Or, $f(e_1) = -2e_2 + e_3$ d'après la matrice de f dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) . Ainsi on a

$$\lambda \cdot (-2e_2 + e_3) - \lambda \cdot e_1 + \mu \cdot e_1 + \mu \cdot e_3 = 0$$

donc finalement

$$(\mu - \lambda) \cdot e_1 - 2\lambda \cdot e_2 + (\lambda + \mu) \cdot e_3$$

Puisque (e_1, e_2, e_3) est une base, c'est une famille libre donc $\begin{cases} \mu - \lambda = 0 \\ -2\lambda = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases}$. La seule solution de ce système est $(\lambda, \mu) = (0, 0)$, donc $\lambda = \mu = 0$, il en découle que la famille (u_1, u_2) est libre et donc que c'est une base de $\text{Ker}(f - \text{Id})$.

- 3) Montrons que (u_1, u_2, e_1) est une famille libre de \mathbb{R}^3 . Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois réels tels que $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot e_1 = 0$. Alors

$$\lambda_1 \cdot (f(e_1) - e_1) + \lambda_2 \cdot (e_1 + e_3) + \lambda_3 \cdot e_1 = 0$$

donc

$$\lambda_1 \cdot (-2e_2 + e_3 - e_1) + \lambda_2 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_3 + \lambda_3 \cdot e_1 = 0$$

et finalement

$$(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \cdot e_1 + (-2\lambda_1) \cdot e_2 + (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot e_3 = 0$$

Comme (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{R}^3 , on en déduit que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est solution du système $\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$ donc que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Ainsi, la famille (u_1, u_2, e_1) est une famille libre à 3 éléments de \mathbb{R}^3 , c'est donc une base de \mathbb{R}^3 .

- 4) Dans cette base, $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_2$ puisque $u_1, u_2 \in \text{Ker}(f - \text{Id})$. De plus, $f(e_1) = u_1 + e_1$ car $u_1 = (f - \text{Id})(e_1)$.

Ainsi, la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, e_1) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- 5) On résout $PX = Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}PX = Y &\iff \begin{cases} -x + y + z = x' \\ -2x = y' \\ x + y = z' \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2y + z = x' + z' \\ x = -\frac{1}{2}y' \\ y = z' + \frac{1}{2}y' \end{cases}\end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} z &= x' - z' - y' \\ x &= -\frac{1}{2}y' \\ y &= z' + \frac{1}{2}y' \end{cases}$$

donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, e_1)$. Ainsi, d'après le cours on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(f) = P^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) P$$

d'où

$$T = P^{-1}AP$$

Correction de l'exercice 11 :

- 1) a) Supposons que A et B soient deux matrices stochastiques de taille n .

Alors pour tout i, j , $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j}$, donc pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $(AB)_{i,j} \geq 0$ comme produit de termes positifs.

De plus, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (AB)_{i,j} &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n A_{i,k} B_{k,j} \right) && \text{car les sommes sont finies} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(A_{i,k} \sum_{j=1}^n B_{k,j} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n A_{i,k} && \text{car } B \text{ est stochastique} \\ &= 1 && \text{car } A \text{ est stochastique} \end{aligned}$$

- b) Tous les coefficients de A sont positifs.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{5}{8} = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{5}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

donc A est stochastique.

- c) D'après la question 1, le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique donc par récurrence immédiate A^n est stochastique quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
d) On a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 4 & 8 & 8 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix} &\xleftrightarrow[L_3 \leftarrow 8L_3]{L_1 \leftarrow 4L_1, L_2 \leftarrow 8L_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xleftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xleftrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc A est de rang 3.

- e) Montrons que (e_1, e_2, e_3) est une famille libre de \mathbb{R}^3 . Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois réels tels que $\lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \lambda_3 \cdot e_3 = (0, 0, 0)$.

$$\text{Alors } \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \text{ On en déduit que } \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \text{ donc que } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Ainsi, (e_1, e_2, e_3) est une famille libre de cardinale 3 de \mathbb{R}^3 donc c'est une base de \mathbb{R}^3 .

$$\text{f) } AX_1 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = X_1$$

$$AX_2 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}X_2$$

$$AX_3 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}X_3.$$

On en déduit que dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, l'application f canoniquement associée à A a pour matrice

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

puisque $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = -\frac{1}{2}e_2$ et $f(e_3) = \frac{1}{4}e_3$.

Ainsi, si on note P la matrice de passage de la base canonique à la base \mathcal{B} , on a $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} P^{-1}$.

Correction de l'exercice 12 :

- 1) Pour tout $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(X+1) = \sum_{k=0}^n a_k (X+1)^k$ est encore un polynôme de degré inférieur ou égal à n , donc $u(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

De plus, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) \\ &= \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q) \end{aligned}$$

donc u est linéaire, c'est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- 2) Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$u(v(P)) = u(P(X-1)) = P((X-1)+1) = P(X)$$

donc $u \circ v = \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ donc u est inversible d'inverse v .

- 3) On a $u(1) = 1$, $u(X) = X+1$, $u(X^2) = (X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$, et pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$u(X^j) = (X+1)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i$$

De même, pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$v(X^j) = (X-1)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i (-1)^{j-i}$$

Soit $M = (m_{i,j}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$ et $N = (n_{i,j}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(v)$. Alors M et N sont des matrices triangulaires supérieures et :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, m_{i+1, j+1} = \begin{cases} \binom{j}{i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases} \quad \text{et} \quad n_{i+1, j+1} = \begin{cases} \binom{j}{i} (-1)^{j-i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

Par produit de matrices on a $Y^T M = \left(\sum_{i=0}^j \binom{j}{i} b_i \right)_{0 \leq j \leq n} = (a_j)_{0 \leq j \leq n} = X^T$ par hypothèses sur (a_n) et (b_n) .

En multipliant à droite par N on obtient donc $Y^T = X^T N$ donc $Y^T = \left(\sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-1)^{j-i} \right)_{0 \leq j \leq n}$ d'où $b_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} a_i$, et ceci est vrai quel que soit $n \in \mathbb{N}$.