★

Exercice 1 — Voir correction

Déterminer dans chaque cas la nature de la série de terme général u_n

1) $u_n = 5^{-2n}$
2) $u_n = 2^{-n}\sin n$
3) $u_n = \dfrac{n^3}{(n+2)!}$
4) $u_n = \dfrac{n}{2^n}$
5) $u_n = \dfrac{n^{2022}}{n!}$
6) $u_n = \dfrac{1}{n\cos^2(n)}$

★

Exercice 2 — Voir correction

Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

1) Montrer que $\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k))$
2) En déduire que la série de terme général u_n diverge.

★

Exercice 3 — Voir correction

Dans chaque cas, étudier la nature de la série de terme général $v_n = \ln(u_n)$ et calculer sa somme le cas échéant.

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$
2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$

★

Exercice 4 — Voir correction

Pour chacune des séries ci-dessous, déterminer pour quelle(s) valeurs de x elles convergent et calculer leur somme pour n allant de 0 à $+\infty$.

1) $\sum (4x)^n$
2) $\sum \mathrm{e}^{nx}$
3) $\sum (1-5x)^n$
4) $\sum \dfrac{x^{2n}}{e^{nx^2}}$
5) $\sum \dfrac{x^{n/2}}{n!}$, $x > 0$
6) $\sum \dfrac{(3x)^n}{2x^{2n}}$, $x \neq 0$

★ ★

Exercice 5 — Voir correction

Étudier la nature de la série de terme général u_n :

1) $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^\pi}$
2) $u_n = \dfrac{n^{\frac{5}{2}} + n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{1}{3}}}$
3) $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$
4) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-1/n^2}}$
5) $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
6) $u_n = 1 - \mathrm{e}^{-1/n}$

★

Exercice 6 — Voir correction

Justifier que les séries numériques suivantes convergent et calculer leur somme

1) $\sum_{n\geq 1} n \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
2) $\sum_{n\geq 2} n(n-1) \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$
3) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n^2}{5^n}$
4) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n^2}{n!}$

⋆

Exercice 7 — Voir correction

Montrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

1) $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^2-1}$ (*indication : écrire* $\dfrac{1}{n^2-1}$ *sous la forme* $\dfrac{a}{n-1}+\dfrac{b}{n+1}$)

2) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (*indication : écrire* $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ *sous la forme* $\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}+\dfrac{c}{n+2}$)

⋆

Exercice 8 — Voir correction

Montrer la convergence et calculer les sommes des séries suivantes :

1) $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n!}$

2) $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{2^{3n}}$

3) $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$

4) $\sum_{i\geq 0} \sum_{j\geq 0} \dfrac{1}{3^{i+2j}}$

5) $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n!}$

6) $\sum_{n\geq 0} \dfrac{\mathrm{e}^{2nx}}{n!}$

7) $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-x)^n}{4^n(n+2)!}$

8) $\sum_{n\geq 0} \dfrac{n^2+2n}{(n+2)!}$

9) $\sum_{n\geq 0} n^2 x^n$

10) $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

⋆ ⋆

Exercice 9 — Voir correction

Soit (u_n) une suite de réels positifs et (v_n) la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

⋆

Exercice 10 — Voir correction

Une **série de Bertrand** est une série dont le terme général est de la forme $\dfrac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ avec α et β des réels.

1) Montrer que si $\alpha \leq 0$, la série diverge.
2) Montrer que si $0 \leq \alpha < 1$, la série diverge.
3) Montrer que si $\alpha > 1$, la série converge.

On traitera le cas $\alpha = 1$ dans le chapitre 15

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 11 — Voir correction

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique positive. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Si la série $\sum u_n$ converge on note S sa somme et on définit par $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S - S_n$ la suite des restes de la série $\sum u_n$.
Enfin, soit (v_n) une suite positive telle que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$.

1) Montrer que si la série $\sum u_n$ diverge, alors $S_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$
2) Montrer que si la série $\sum v_n$ converge, alors $R_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.
3) Application : après avoir montré que $\dfrac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n+1)-\ln(n)$, déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ lorsque $n\to+\infty$.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) On considère la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n} 5^{-2k}$.
On a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{5^2}\right)^n \\ &= \frac{1-\left(\frac{1}{25}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{25}} \\ &= \frac{1-\left(\frac{1}{25}\right)^{n+1}}{\frac{24}{25}} \\ &= \frac{25}{24}\left(1-\left(\frac{1}{25}\right)^n\right) \end{aligned}$$

Or $0 \leq \dfrac{1}{25} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{25}\right)^n = 0$, on en déduit par opérations de limite que la suite des sommes partielles converge, donc la série de terme général u_n est convergente, et la somme de cette série est

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \frac{25}{24}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ donc $0 \leq |2^{-n}\sin(n)| \leq 2^{-n}$.
Or $2^{-n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente car $0 \leq \dfrac{1}{2} < 1$, donc par théorème de comparaison pour les séries on en déduit que la série de terme général u_n est absolument convergente donc convergente.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \neq 0$. On a

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^3}{(n+3)!} \times \frac{(n+2)!}{n^3} \\ &= \frac{1}{n+3} \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \\ &= \frac{1}{n+3} \times \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+3} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3 = 1$ par opérations, donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.
Or $0 < 1$, donc d'après le critère de D'Alembert on en déduit que la série de terme général u_n converge.
4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \neq 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)}{2^{n+1}} \times \dfrac{2^n}{n} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1}{2} \times \left(1+\dfrac{1}{n}\right)$
Aini, par opérations $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ donc d'après le critère de D'Alembert la série de terme général u_n converge.
5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \neq 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^{2022}}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{n^{2022}} = \dfrac{1}{n+1} \times \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2022}$
Par opérations, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ donc la série de terme général u_n converge d'après le critère de D'Alembert
6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \cos^2(n) < 1$ donc $\dfrac{1}{\cos^2(n)} > 1$ et ainsi $u_n > \dfrac{1}{n}$.
Or $\dfrac{1}{n}$ est le terme général de la série harmonique et on sait d'après le cours que cette série diverge, donc selon le théorème de comparaison pour les séries on en déduit que la série de terme général u_n diverge.

Correction de l'exercice 2 :

1) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) = \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$.
On a donc $\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1) - \ln(k))$.

2) On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k)\\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k)\\ &= \ln(n+1) - \ln(1)\\ &= \ln(n+1)\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ donc la série de terme général u_k diverge.

Correction de l'exercice 3 :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n+1-1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$.

Ainsi, $v_n = \ln(\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = \ln(n) - \ln(n+1)$.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} v_n = -\ln(n+1)$ (voir exercice précédent), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k = -\infty$, la série de terme général v_n diverge.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = \dfrac{n^2+2n}{(n+1)^2}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln(u_n) = \ln\left(\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$ donc $v_n = \ln(n) + \ln(n+2) - 2\ln(n+1)$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} v_k &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k) + \sum_{k=1}^{n} \ln(k+2) - 2\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k) + \sum_{k=3}^{n+2} \ln(k) - 2\sum_{k=2}^{n+1} \ln(k)\\ &= \ln(1) + \ln(2) + \ln(n+1) + \ln(n+2) - 2\ln(2) - 2\ln(n+1) + \underbrace{\sum_{k=3}^{n} (\ln(k) + \ln(k) - 2\ln(k))}_{=0}\\ &= \ln(n+2) - \ln(n+1) - \ln(2)\\ &= \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - \ln(2)\end{aligned}$$

Or $\dfrac{n+2}{n+1} \sim \dfrac{n}{n} \sim 1$ donc par composition de limites $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) = 0$.

On en déduit que la série de terme général v_n converge et que sa somme est $\sum_{k=1}^{+\infty} v_k = -\ln(2)$.

Correction de l'exercice 4 :

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de terme général $(4x)^n$ est une série géométrique de raison $4x$.

Elle converge si et seulement si $-1 < 4x < 1 \iff -\dfrac{1}{4} < x < \dfrac{1}{4}$.

Si $-\dfrac{1}{4} < x < \dfrac{1}{4}$, on a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} (4x)^n = \dfrac{1}{1-4x}$ d'après le cours.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n$. C'est le terme général d'une série géométrique qui converge si et seulement si $-1 < \mathrm{e}^x < 1 \iff x < 0$.

Pour tout $x < 0$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{e}^x)^n = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^x}$.

3) $(1-5x)^n$ est le terme général d'une série qui converge si et seulement si $-1 < 1-5x < 1 \iff -2 < -5x < 0 \iff 0 < x < \dfrac{2}{5}$.

Pour tout $x \in]0, \frac{2}{5}[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} (1-5x)^n = \dfrac{1}{1-(1-5x)} = \dfrac{1}{5x}$.

4) $\dfrac{x^2}{e^{nx^2}} = \left(\dfrac{x^2}{e^{x^2}}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique qui converge si et seulement si $-1 < \dfrac{x^2}{e^{x^2}} < 1$

On pose $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ et on étudie les variations de f. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x e^{-x^2} + x^2 \times (-2x) \times e^{-x^2} \\ &= e^{-x^2}\left(2x - 2x^3\right) \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2} > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $2x - x^3 = 2x(1 - x^2)$.
De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} X e^{-X} = 0$ par croissance comparée, donc par composition de limites on a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$.
On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Comme $0 < e^{-1} < 1$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x^2 e^{-x^2} < 1$ donc la série géométrique $\sum (x^2 e^{-x^2})^n$ converge, et $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{e^{nx^2}} = \dfrac{1}{1 - x^2 e^{-x^2}}$.

5) Pour tout $x > 0$, on a $x^{n/2} = (\sqrt{x})^n$. On a donc $\dfrac{x^{n/2}}{n!} = \dfrac{(\sqrt{x})^n}{n!}$. On reconnait le terme général d'une série exponentielle, qui converge pour tout $x > 0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{n/2}}{n!} = e^{\sqrt{x}}$.

6) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\dfrac{(3x)^n}{2x^{2n}} = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{3x}{x^2}\right)^n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{x}\right)^n$ car $x \neq 0$.

On reconnait le terme général d'une série géométrique, cette série converge si et seulement si $-1 < \dfrac{3}{x} < 1$, si et seulement si $x > 3$ ou $x < -3$, et dans ce cas on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3x)^n}{2x^{2n}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{x}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{3}{x}} = \frac{x}{x-3}$$

Correction de l'exercice 5 :

1) On a $n^2 u_n = \ln(n) n^{2-\pi}$, or $2 - \pi < 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n) n^{2-\pi} = 0$ par croissance comparée.

On a donc $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, or on sait que $\dfrac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente car $2 > 1$, donc on en conclut par comparaison que la série de terme général u_n converge.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n^{\frac{5}{2}}\left(1 + n^{\frac{1}{3} - \frac{5}{2}}\right)}{n^{\frac{2}{3}}\left(1 + n^{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}}\right)} \\ &= n^{\frac{5}{2} - \frac{2}{3}} \times \frac{1 + n^{-\frac{13}{6}}}{1 + n^{-\frac{1}{3}}} \\ &= n^{\frac{11}{6}} \times \frac{1 + n^{-\frac{13}{6}}}{1 + n^{-\frac{1}{3}}} \end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1+n^{-\frac{13}{6}}}{1+n^{-\frac{1}{3}}} = 1$ par opérations sur les limites et $\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{11}{6}} = +\infty$ car $\dfrac{11}{6} > 0$.
On en conclut que la série de terme général u_n diverge grossièrement car (u_n) ne converge pas vers 0.

3) On étudie la limite de $n^\alpha u_n$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} n^\alpha u_n &= \frac{n^\alpha}{\ln(n)^{\ln(n)}} \\ &= \frac{n^\alpha}{\mathrm{e}^{\ln(n)\ln(\ln(n))}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\alpha\ln(n)}}{\mathrm{e}^{\ln(n)\ln(\ln(n))}} \\ &= \mathrm{e}^{\alpha\ln(n)-\ln(n)\ln(\ln(n))} \\ &= \mathrm{e}^{\ln(n)(\alpha-\ln(\ln(n)))} \end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} \ln(\ln(n)) = +\infty$ par composition de limites. On en déduit que quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $\lim_{n\to+\infty} \alpha - \ln(\ln(n)) = -\infty$, donc par produit de limites $\lim_{n\to+\infty} \ln(n)(\alpha - \ln(\ln(n)) = -\infty$.
Par composition de limites, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\ln(n)(\alpha-\ln(\ln(n)))} = 0$ car $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.
Ainsi, pour $\alpha = 2$, on en déduit que $u_n = o(\dfrac{1}{n^\alpha})$, et $\dfrac{1}{n^\alpha}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente car $\alpha > 1$, donc on en conclut par comparaison que la série de terme général u_n converge.

4) On étudie la limite de $n^\alpha u_n$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} n^\alpha u_n &= \frac{n^\alpha}{\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-1/n^2}} \\ &= \frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^{-1/n^2}} \end{aligned}$$

Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on a $n^\alpha u_n = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-1/n^2}}$. Or, $\lim_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n^2} = 0$ donc par composition de limites $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{n^2}} = 1$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 1$, donc $u_n \sim \dfrac{1}{n^\alpha}$. Comme $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$, la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann divergente donc par comparaion on en déduit que la série de terme général u_n diverge.

Correction de l'exercice 6 :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{(n+1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \dfrac{n+1}{n}\times\dfrac{1}{2} \sim \dfrac{n}{n}\times\dfrac{1}{2}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \dfrac{1}{2}$.
Or $\dfrac{1}{2} < 1$ donc d'après le critère de d'Alembert la série de terme général $n \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ converge.
De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^N n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^N k\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$. On reconnait la somme partielle d'une série géométrique dérivée, donc en passant à la limite on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = \dfrac{1}{2}\times 4 = 2$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{(n+1)n\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}}{n(n-1)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} = \dfrac{n(n+1)}{n(n-1)}\times\dfrac{2}{3} \sim \dfrac{n}{n}\times\dfrac{2}{3}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)n\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}}{n(n-1)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} = \dfrac{2}{3}$.
Or $\dfrac{2}{3} < 1$ donc d'après le critère de d'Alembert la série de terme général $n(n-1)\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$ converge.
Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{n=2}^N n(n-1)\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\sum_{n=2}^N n(n-1)\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}$.
On reconnait la somme partielle d'une série géométrique dérivée seconde, donc en passant à la limite on obtient $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\dfrac{2}{(1-\frac{2}{3})^3} = \dfrac{8}{27}\times 54 = 16$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{(n+1)^2/5^{n+1}}{n^2/5^n} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2\times\dfrac{1}{5} \sim \dfrac{1}{5}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^2/5^{n+1}}{n^2/5^n} = \dfrac{1}{5}$.

Comme $\dfrac{1}{5} < 1$, on en conclut d'après le critère de d'Alembert que la série de terme général $\dfrac{n^2}{5^n}$ converge.
On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{5^n} &= \sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{5^n} - \frac{n}{5^n} + \frac{n}{5^n} \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{n(n-1)}{5^n} + \sum_{n\geq 1} \frac{n}{5^n} \\
&= \frac{1}{5^2} \sum_{n\geq 1} n(n-1)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2} + \frac{1}{5} \sum_{n\geq 1} n \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

On reconnait deux série géométrique dérivée première et seconde, donc on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{5^n} &= \frac{1}{25} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2} \\
&= \frac{2\times 5^3}{25\times 4^3} + \frac{25}{5\times 4^2} \\
&= \frac{5}{32} + \frac{5}{16} \\
&= \frac{15}{32}
\end{aligned}$$