★ ★
Exercice 1 — Voir correction

Calculer à l'aide d'un ou plusieurs changement d'indice :

1) $\sum_{k=2}^{n} x^{k-2}$
2) $\sum_{k=3}^{n} (n-k)^2$
3) $\prod_{k=1}^{n} 2^{k-1}$
4) $\sum_{k=10}^{55} (k-10)$
5) $\sum_{k=2}^{11} \ln\left(\frac{2^k}{4}\right)$
6) $\prod_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2k-n}$
7) $\sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \sum_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
8) $\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

★ ★
Exercice 2 — Voir correction

Calculer les sommes suivantes :

1) $\sum_{k=2}^{n} 3^k$
2) $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{kx}$, avec $x \in \mathbb{R}$.
3) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{2^k}}$
4) $\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{3k}}{2^k}$
5) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$
6) $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$

★ ★ ★
Exercice 3 — Voir correction

Calculer les sommes doubles suivantes :

1) $\sum_{0\leq i,j\leq n} 2^{i+3j}$
2) $\sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i,j)$
3) $\sum_{1\leq i,j\leq n} |i-j|$

★
Exercice 4 — Voir correction

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{20x}{25-x}$
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

1) Montrer que l'intervalle $[0,5]$ est stable par f, c'est à dire montrer que

$$\forall x \in [0,5], \quad f(x) \in [0,5]$$

2) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 5$.
3) En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.

★
Exercice 5 — Voir correction

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n+1}$.
En vous inspirant de l'exercice précédant, étudier la convergence de la suite (u_n). On pourra commencer par montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$.

★ ★
Exercice 6 — Voir correction

Soit $a \in [-\pi/2, \pi/2]$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2\cos a$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)$.

★
Exercice 7 — Voir correction

On considère la suite (S_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

1) Étudier le sens de variation de la suite (S_n)
2) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$
3) En déduire que (S_n) converge et préciser sa limite.

★

Exercice 8 — Voir correction

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n}(2k)^2$ et $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)^2$.

★ ★

Exercice 9 — Voir correction

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

puis calculer

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1)^3$$

★ ★

Exercice 10 — Voir correction

Simplifier l'expression suivante :

$$f(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

★

Exercice 11 — Voir correction

La suite de Fibonacci est la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

★

Exercice 12 — Voir correction

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$, $u_1 = 21$ et $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n(5+2n)$.

★ ★

Exercice 13 — Voir correction

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3}u_n$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$.
2) En déduire la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

$\star\star$

Exercice 14 — **Voir correction**

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application injective telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leq n$. Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$

$\star\star$

Exercice 15 — **Voir correction**

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_1 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = 3n + 3 + \frac{6}{2n+1} \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $u_n = 3n^2$.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} x^{k-2} &= \sum_{k'=0}^{n-2} x^{k'}\\ &= \frac{x^{n-2+1}-1}{x-1}\\ &\boxed{= \frac{x^{n-1}-1}{x-1}}\end{aligned}$$

2) On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n}(n-k)^2 &= \sum_{i=0}^{n-3} i^2 && \text{en posant } i=n-k\\ &= \frac{(n-3)(n-3+1)(2n-6+1)}{6}\\ &= \frac{(n-3)(n-2)(2n-5)}{6}\end{aligned}$$

3) On a

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} 2^{k-1} &= \prod_{k'=0}^{n-1} 2^{k'}\\ &= 2^{\sum_{k'=0}^{n-1} k'}\\ &\boxed{= 2^{\frac{(n-1)n}{2}}}\end{aligned}$$

4) On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=10}^{55}(k-10) &= \sum_{k'=0}^{45} k'\\ &= \frac{45\times 46}{2}\\ &\boxed{= 1035}\end{aligned}$$

5) On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{11}\ln\left(\frac{2^k}{4}\right) &= \sum_{k=2}^{11}\ln\left(\frac{2^k}{2^2}\right)\\ &= \sum_{k=2}^{11}\ln(2^{k-2})\\ &= \sum_{k'=0}^{9}\ln(2^{k'})\\ &= \sum_{k'=0}^{9} k'\ln(2)\\ &= \ln(2)\times\frac{9\times 10}{2}\\ &\boxed{= 45\ln(2)}\end{aligned}$$

6) On peut faire sans changement d'indice : pour tout $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2k-n} &= \exp\left(\sum_{k=0}^{n}(2k-n)\right) && \text{par propriété de l'exponentielle} \\
&= \exp\left(2\sum_{k=0}^{n} k - n(n+1)\right) \\
&= \exp(n(n+1) - n(n+1)) \\
&= \exp(0) \\
&\boxed{= 1}
\end{aligned}$$

mais on peut aussi remarquer que :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2k-n} &= \prod_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{k} \prod_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-(n-k)} \\
&= \prod_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{k} \times \prod_{j=0}^{n} \mathrm{e}^{-j} \\
&= \frac{\prod_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{k}}{\prod_{j=0}^{n} \mathrm{e}^{j}} \\
&\boxed{= 1}
\end{aligned}$$

7) Pour $n \geq 2$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \sum_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) &= \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \sum_{j=1}^{n-1} \sin\left(\frac{(j+n)\pi}{n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \sum_{j=1}^{n-1} \sin\left(\frac{j\pi}{n} + \pi\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) - \sum_{j=1}^{n-1} \sin\left(\frac{j\pi}{n}\right) \\
&\boxed{= 0}
\end{aligned}$$

8)

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{(k+1)(k-1)}{k^2}\right)$$

Or $\ln\left(\frac{(k+1)(k-1)}{k^2}\right) = \ln(k+1) + \ln(k-1) - 2\ln(k)$ donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) + \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln(k) \\
&= \sum_{i=3}^{n+1} \ln(i) + \sum_{j=1}^{n-1} \ln(j) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln(k) && \text{en posant } i = k+1 \text{ e} \\
&= \ln(n) + \ln(n+1) + \ln(1) + \ln(2) - 2\ln(2) - 2\ln(n) + \sum_{k=3}^{n-1} \big(\underbrace{\ln(k) + \ln(k) - 2\ln(k)}_{=0}\big) \\
&= \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 :

1) On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} 3^k &= 3^2 \sum_{k=2}^{n} 3^{k-2} \\
&= 3^2 \sum_{k'=0}^{n-2} 3^{k'} \\
&= 3^2 \frac{3^{n-1}-1}{3-1} \\
&\boxed{= \frac{9}{2}(3^{n-1}-1)}
\end{aligned}$$

2) On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{kx} &= \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{e}^{x})^k \\
&= \mathrm{e}^{x} \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{e}^{x})^{k-1} \\
&= \mathrm{e}^{x} \sum_{k'=0}^{n-1} (\mathrm{e}^{x})^{k'} \\
&= \mathrm{e}^{x} \frac{(\mathrm{e}^{x})^n - 1}{\mathrm{e}^{x} - 1} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{e}^{nx} - \mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x} - 1} \\
&\boxed{= \frac{\mathrm{e}^{(n+1)x} - \mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x} - 1}}
\end{aligned}$$

3) On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{2}^k} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \\
&= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n} - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \\
&= \frac{\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n} - \sqrt{2}\right)(1+\sqrt{2})}{1-2} \\
&\boxed{= -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} + \sqrt{2} + 2}
\end{aligned}$$

4) On a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{3k}}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\mathrm{e}^{3}}{2}\right)^k$$

$$= \frac{\left(\frac{\mathrm{e}^3}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{\mathrm{e}^3}{2} - 1}$$

$$\boxed{= \frac{\mathrm{e}^{3n+3} - 2^{n+1}}{2^n \mathrm{e}^3 - 2^{n+1}}}$$

5) On a pour tout $n \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k}$$

$$= (1-1)^n$$

$$\boxed{= 0}$$

donc $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

6) Pour tout $n \geq 1$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{kn!}{k!(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} n \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \qquad \text{par changement d'indice}$$

$$\boxed{= n2^{n-1}}$$

Correction de l'exercice 3 :

1) Pour tout $n \geq 0$ on a

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} 2^{i+3j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 2^i \times 2^{3j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 2^i \times 8^j$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} 2^i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} 8^j\right)$$

$$= \frac{2^{n+1}-1}{2-1} \times \frac{8^{n+1}-1}{8-1}$$

$$= \frac{16^{n+1} - 8^{n+1} - 2^{n+1} + 1}{7}$$

2) Pour tout $n \geq 1$ on a

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \max(i,j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \max(i,j)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\max(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n}\max(i,j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} i + \sum_{j=i+1}^{n} j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} j \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} j \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \sum_{j=2}^{n} j(j-1) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1\right) - \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) \\
&= \frac{2n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1)}{6} \\
&\boxed{= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}}
\end{aligned}
$$

3) Pour tout $n \geq 1$ on a

$$
\begin{aligned}
\sum_{1\leq i,j\leq n} |i-j| &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |i-j| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1}(i-j) + \sum_{j=i+1}^{n}(j-i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j'=1}^{i-1} j' + \sum_{j''=1}^{n-i} j''\right) && \text{en posant } j' = i-j \text{ et } j'' = j-i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(i-1)i}{2} + \frac{(n-i)(n-i+1)}{2}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)i}{2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{(n-i)(n-i+1)}{2} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)i}{2} + \sum_{i'=1}^{n}\frac{(i'-1)i'}{2} && \text{en posant } i' = n-i+1 \\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i-1)}{2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(2n-2)}{6}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{= \frac{n(n+1)(n-1)}{3}}$$

Correction de l'exercice 4 :

1) On étudie la fonction f : f est dérivable sur $[0,5]$ et $f'(x) = \dfrac{20(25-x)+20x}{(25-x)^2} = \dfrac{500}{(25-x)^2}$. Pour tout $x \in [0,5]$, $(25-x)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$. On en déduit que f est strictement croissante sur $[0,5]$.
De plus, $f(0) = 0$ et $f(5) = 5$, donc pour tout x tel que $0 \leq x \leq 5$, on a $f(0) \leq f(x) \leq f(5)$ donc $0 \leq f(x) \leq 5$.
$\boxed{\text{On a montré que } [0,5] \text{ est stable par } f.}$

2) On pose $\mathcal{P}(n)$: "$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 5$" et on raisonne par récurrence.
   - **Initialisation :** On a $u_0 = 3$ et $u_1 = \dfrac{20 \times 3}{25-3} = \dfrac{60}{22} < 3$, donc $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 5$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - **Hérédité :** Supposons que $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 5$ pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$.
     Alors, comme f est croissante sur $[0,5]$, on a
     $$f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(5)$$
     $$0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 5$$
     donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - **Conclusion :** par principe de récurrence on en conclut que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel ℓ.

Correction de l'exercice 5 : En posant $f(x) = \dfrac{3x}{x+1}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
On remarque également que $f(2) = 2$, on va donc démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = 2$.

- **Initialisation :** $u_0 = 2$
- **Hérédité :** Si $u_n = 2$, alors $u_{n+1} = f(u_n) = f(2) = 2$
- **Conclusion :** Par principe de récurrence, on en conclut que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2$

ainsi, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 2.}$

Correction de l'exercice 6 : On raisonne par récurrence

- **Initialisation :** $u_0 = 2\cos a$ et $2\cos(\frac{a}{2^0}) = 2\cos a$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$
- **Hérédité :** Supposons que $u_n = 2\cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right)$ pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$.
  Alors
  $$\begin{aligned}
  u_{n+1} &= \sqrt{2+u_n} \\
  &= \sqrt{2+2\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)} \\
  &= \sqrt{2+2\cos\left(2\frac{a}{2^{n+1}}\right)} \\
  &= \sqrt{2+2\left(\cos^2\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)-\sin^2\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)\right)} \\
  &= \sqrt{2+2\left(2\cos^2\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)-1\right)} \\
  &= \sqrt{4\cos^2\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)} \\
  &= 2\left|\cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)\right| \\
  &= 2\cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)
  \end{aligned}$$
  car $a \in [-\pi/2, \pi/2]$ donc $a/2^{n+1} \in [-\pi/2, \pi/2]$ et donc $\cos\left(\dfrac{a}{2^{n+1}}\right) \geq 0$.
  Finalement, la propriété est vraie au rang $n+1$

— **Conclusion :** Par principe de récurrence, on en déduit que $\boxed{u_n = 2\cos\left(\frac{a}{2^n}\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

Correction de l'exercice 7 :

1) $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \geq 0$ car $n \geq 0$.

Ainsi, $\boxed{(S_n) \text{ est croissante.}}$

2) On note $\mathcal{P}(n) : S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ et on raisonne par récurrence.

— **Initialisation :** $S_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1(1+1)(1+2)} = \frac{1}{6}$ d'une part, et
$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2(1+1)(1+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$
d'autre part. Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

— **Hérédité :** Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$.
Alors

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} && \text{par hypothèse de récurrence.} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{n+3}{2(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{2}{2(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{n+1}{2(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+2)(n+3)}
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— **Conclusion :** Par principe de récurrence, on en conclut que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.}$

3) On a $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+2) = +\infty$ donc par produit de limites $\lim\limits_{n\to+\infty}(2(n+1)(n+2)) = +\infty$ et donc par quotient de limites $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+1)(n+2)} = 0$.

On en déduit, par somme de limites, que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{4}.}$

Correction de l'exercice 8 :

1) On note $\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et on raisonne par récurrence.

— **Initialisation :** $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1$ et $\frac{1(1+1)(2\times 1+2)}{6} = 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

— **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$.
Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right]}{6}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6}{6}$$

d'autre part, on a $\dfrac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \dfrac{(n+1)(2n^2+7n+6}{6}$ donc on en déduit :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1}{6}$$

et ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— **Conclusion :** Par principe de récurrence, on en conclut que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

2) On en déduit que $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k)^2 = 4\sum_{k=1}^{n} k^2 = 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{4}}$.

On remarque que

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(2k)^2}_{\text{termes pairs}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(2k+1)^2}_{\text{termes impairs}} = \sum_{k'=2}^{2n+1} k'^2$$

Ainsi

$$\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} + \sum_{k=1}^{n}(2k+1)^2 = \frac{(2n+1)(2n+2)(2(2n+1)+1}{6} - 1 = \frac{(2n+1)(2n+2)(4n+3)-6}{6}$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(2k+1)^2 = \frac{(2n+1)(2n+2)(4n+3)-4n(n+1)(2n+1)-6}{6}}$$

Correction de l'exercice 9 : On note $\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ et on raisonne par récurrence

— **Initialisation :** $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1$ d'une part, et $\dfrac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$ d'autre part, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

— **Hérédité :** Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$.
Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= \frac{(n+1)^2[n^2+4(n+1)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+1)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— **Conclusion :** Par principe de récurrence, on en conclut que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}}$.

On a donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(2k)^3 = 8\sum_{k=1}^{n}k^3 = 2n^2(n+1)^2}$$

et en raisonnant comme dans l'exercice précédent :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(2k)^3 + \sum_{k=1}^{n}(2k+1)^3 &= \sum_{k'=2}^{2n+1}k'^3 \\
2n^2(n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n}(2k+1)^3 &= \frac{(2n+1)^2(2n+2)^2}{4} - 1 \\
\sum_{k=1}^{n}(2k+1)^3 &= \frac{(2n+1)^2(2n+2)^2}{4} - 2n^2(n+1)^2 - 1 \\
\sum_{k=1}^{n}(2k+1)^3 &= \frac{(n+1)^2[4(2n+1)^2-8n^2]-4}{4} \\
\sum_{k=1}^{n}(2k+1)^3 &\boxed{= \frac{(n+1)^2(16n+4)-4}{4}}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 10 : Pour tout $k\in\mathbb{N}$ on a $\sin\left(\frac{x}{2^k}\right) = \sin\left(2\frac{x}{2^{k+1}}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\cos\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)$ donc :

$$\cos\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) &= \prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)} \\
&= \frac{1}{2^n}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}{\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)} \\
&= \frac{1}{2^n}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)} \\
&= \frac{\sin x}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 11 : On note $\mathcal{P}(n)$: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ et on raisonne par récurrence double.

— **Initialisation :** On a $F_0 = 0$ d'une part, et $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right) = 0$ d'autre part, donc $\mathcal{P}(0$ est vraie.

On a $F_1 = 1$ d'une part et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

d'autre part, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie aussi.

— **Hérédité :** Supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$.
Alors

$$\begin{aligned}
F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Or, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Ainsi,

$$F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right)$$

— **Conclusion :** Par principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)$.

Correction de l'exercice 12 : On note $\mathcal{P}(n) : u_n = 3^n(5+2n)$ et on raisonne par récurrence double.

— **Initialisation :** $u_0 = 5$ d'une part et $3^0(5+2\times 0) = 5$ d'autre part, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
$u_1 = 21$ d'une part et $3^1(5+2\times 1) = 21$ d'autre part, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

— **Hérédité :** Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 6u_{n+1} - 9u_n \\
&= 6\times 3^{n+1}(5+2(n+1)) - 9\times 3^n(5+2n) \\
&= 2\times 3^{n+2}(7+2n) - 3^{n+2}(5+2n) \\
&= 3^{n+2}(14+4n-5-2n) \\
&= 3^{n+2}(9+2n) \\
&= 3^{n+2}(5+2(n+2))
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

— **Conclusion :** Par principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n(5+2n)$.

Correction de l'exercice 13 :

1) On note $\mathcal{P}(n) : u_n \leq \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ et on raisonne par récurrence.

— **Initialisation :** $u_1 = 1$ d'une part, et $\left(\frac{5}{6}\right)^{1-1} = 1$ d'autre part, donc $u_1 \leq \left(\frac{5}{6}\right)^{1-1}$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_0 = \frac{2}{3}$.
Or, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} < \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^{2-1}$ donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

— **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3}u_n \\ &\leq \frac{1}{3} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\ &\leq \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{3}\right) \\ &\leq \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{11}{18} \\ &\leq \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{22}{36} \\ &\leq \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{25}{36} \\ &\leq \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{2} \\ &\leq \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

— **Conclusion :** Par principe de récurrence double, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leq \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$.

2) Comme $0 < \frac{5}{6} < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$.
Par une récurrence immédiate, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n \leq \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$, donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Correction de l'exercice 14 : Montrons par récurrence forte sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f(n) = n$.

— **Initialisation :** $f(0) \leq 0$ et $f(0) \in \mathbb{N}$ donc $f(0) = 0$. Ainsi la propriété est vraie pour $n = 0$

— **Hérédité :** Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq n$ on a $f(k) = k$.
On a $f(n+1) \leq n+1$ par hypothèse, donc $f(n+1) \in [\![0, n+1]\!]$. Supposons que $f(n+1) = k$ avec $k \in [\![1, n]\!]$, alors l'injectivité de f imposerait que $n+1 = k$ ce qui est absurde. On en conclut que $f(n+1) \notin [\![1, n]\!]$, donc $f(n+1) = n+1$ est la seule possibilité restante.

— **Conclusion :** Par principe de récurrence forte on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f(n) = n$, donc $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Correction de l'exercice 15 : L'égalité est vrai pour $n = 1$ par hypothèse.
Supposons que pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\forall k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n,\ u_k = 3k^2$.
Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3n + 3 + \frac{6}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} u_k \\ &= 3n + 3 + \frac{6}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} 3k^2 && \text{par hypothèse de récurrence forte} \\ &= 3n + 3 + \frac{6}{2n+1} \times 3\sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= 3n + 3 + \frac{6}{2n+1} \times \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= 3n + 3 + 3n(n+1) \\ &= 3n^2 + 6n + 3 \end{aligned}$$

$$= 3(n+1)^2$$

donc l'égalité est vraie au rang $n+1$. Par principe de récurrence forte on en conclut qu'on a bien : $\forall n \geq 1,\ u_n = 3n^2$