Correction de Maths E - HEC - 2018

Exercice

1. (a) M est triangulaire et il n'y a que des zéros sur la diagonale donc $\boxed{sp(M) = \{0\}}$. Si M était diagonalisable elle serait semblable à la matrice nulle donc nulle. Or $M \neq 0$ donc M n'est pas diagonalisable.

   (b) $\boxed{rg(M) = 2}$ et $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\text{rg}(M^2) = 1}$.

   (c) On remarque que $M^3 = 0$ donc

$$aM^3 + bM^2 + cM + dI = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & c & b \\ 0 & 0 & d & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow b = c = d = 0$$

$\boxed{\text{donc les seuls polynômes annulateurs de } M \text{ de degré 3 sont ceux de la forme } aX^3 \text{ avec } a \in \mathbb{R}.}$

2. (a) $f^0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ donc $\boxed{r_0 = \text{rg}(\text{Id}_{\mathbb{R}^n}) = n}$

   $f^n = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ donc $\boxed{r_n = \text{rg}(0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}) = 0}$.

   (b) i. $\text{Im}(g_j) = \{g_j(x) \mid x \in F_j\} = \{f(x) \mid x \in F_j\} = \{f(f^j(x')) \mid x' \in R^n\} = \text{Im}(f^{j+1})$ donc $\boxed{\text{rg}(g_j) = r_{j+1}}$.

   ii. D'après le théorème du rang :

$$\text{rg}(g_j) + \dim(\text{Ker}(g_j)) = \dim(F_j)$$

   Or $\text{rg}(g_j) = r_{j+1}$ d'après la question précédente, $\dim(F_j) = r_j$ et $\text{Ker}(g_j) = \{x \in F_j \mid f(x) = 0\} = \text{Ker}(f) \cap F_j$ d'où :

$$\boxed{r_j - r_{j+1} = \dim(\text{Ker}(f) \cap F_j)}$$

   (c) Comme $r_0 = n$ et $r_n = 0$, la première et la dernière inégalité sont évidentes.

   Pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq n-2$, $\text{Im}(f^{j+1}) = f^{j+1}(\mathbb{R}^n) = f^j(f(\mathbb{R}^n)) \subset \text{Im}(f^j)$ donc $F_{j+1} \subset F_j$. On en déduit que $\text{Ker}(f) \cap F_{j+1} \subset \text{Ker}(f) \cap F_j$ donc que $\dim(\text{Ker}(f) \cap F_{j+1}) \leq \dim(\text{Ker}(f) \cap F_j)$. D'après la question 2.b)(ii) on a donc $r_j - r_{j+1} \leq r_{j+1} - r_{j+2}$ d'où le résultat.

3. (a) On a : $\sum_{j=0}^{n-1}(r_j - r_{j+1}) = r_0 - r_n = n$

   Or si on regroupe dans la somme les termes de même valeur :

$$\sum_{j=0}^{n-1}(r_j - r_{j+1}) = \sum_{i=0}^{n} i\text{card}(\{j \in [\![0, n-1$$

$$rrbracket, r_j - r_{j+1} = i\}) = \sum_{i=0}^{n} ix_i = \sum_{i=1}^{n} ix_i$$

$\boxed{\text{donc } x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = n \text{ et donc } (x_1, ..., x_n) \in P(n)}$

   (b) i. On a déjà vu que $\text{rg}(f) = 2$, $\text{rg}(f^2) = 1$ et $\text{rg}(f^3) = 0$ donc :

$$r_0 - r_1 = 4-2 = 2 \quad ; \quad r_1 - r_2 = 2-1 = 1 \quad ; \quad r_2 - r_3 = 1-0 = 1$$

et donc :

$$\boxed{x_1 = 2 \quad ; \quad x_2 = 1 \quad ; \quad x_3 = 0 \quad ; \quad x_4 = 0}$$

ii. Raisonnons par analyse synthèse : soit $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in P(4)$. Alors $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4$.

- Si $x_4 \neq 0$, alors $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq 4$ avec égalité si et seulement si $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, donc l'unique solution est $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 1)$.
- Si $x_4 = 0$, alors si $x_3 \neq 0$ l'unique solution est $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0)$.
- Si $x_3 = x_4 = 0$, alors si $x_2 \neq 0$ on a deux solutions : $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 2, 0, 0)$ et $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 1, 0, 0)$.
- Si $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, alors on a une unique solution : $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 0, 0, 0)$.

$\boxed{\text{On dénombre 5 solutions en tout donc } p(4) = 5.}$

iii. On cherche 5 endomorphismes :

- L'endomorphisme associé à la matrice M de la question 1 vérifie $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 1, 0, 0)$ d'après question 3.b)i.
- L'endomorphisme nul vérifie $r_1 = 0$ donc $r_0 - r_1 = 4$ donc $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 1)$.
- Pour l'endomorphisme associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a $r_0 = 4$, $r_1 = 2$, $r_2 = 0$, $r_3 = 0$ donc $(r_0 - r_1, r_1 - r_2, r_2 - r_3, r_3 - r_4) = (2, 2, 0, 0)$ donc $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 2, 0, 0)$.
- Pour l'endomorphisme associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a $r_0 = 4$, $r_1 = 1$, $r_2 = 0$, $r_3 = 0$, $r_4 = 0$ donc $(r_0 - r_1, r_1 - r_2, r_2 - r_3, r_3 - r_4) = (3, 1, 0, 0)$ donc $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 1, 0, 0)$.
- Pour l'endomorphisme associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a $r_0 = 4$, $r_1 = 3$, $r_2 = 2$, $r_3 = 1$, $r_4 = 0$ donc $(r_0 - r_1, r_1 - r_2, r_2 - r_3, r_3 - r_4) = (1, 1, 1, 1)$ donc $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 0, 0, 0)$.

4. (a) i. Si $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in Q(1, k)$ alors $x_1 + \cdots + x_k \leq 1$, donc soit les $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$ sont tous nuls, soit l'un d'entre eux vaut 1 et les autres sont nuls.

S'ils sont tous nuls, on ne peut pas avoir $x_1 + 2x_2 + \cdots + kx_k = k$, donc $(0, \ldots, 0) \notin Q(1, k)$.

Si $i_0 \in [\![1, k]\!]$ est l'indice de l'unique x_i non nul, alors $\sum_{i=1}^{k} ix_i = i_0 x_{i_0} = i_0$ donc $(x_1, \ldots, x_k) \in P(k)$ si et seulement si $i_0 = k$.

On en conclut que $Q(1, k)$ ne contient qu'un seul k-uplet : $\boxed{Q(1, k) = \{(0, \ldots, 1)\}}$.

ii. Si $\ell \geq k$, montrons l'égalité par double inclusion.

On a $Q(\ell, k) \subset P(k)$ par définition.

Réciproquement, si $(x_1, \ldots, x_k) \in P(k)$ on a $x_1 + x_2 + \cdots + kx_k \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_k = k \leq \ell$ donc $(x_1, \ldots, x_k) \in Q(\ell, k)$.

Finalement : $\boxed{Q(\ell, k) = P(k)}$.

(b) Montrons qu'il existe une bijection entre $Q(\ell, k - \ell)$ et $R_{k,\ell} = \{(x_1, x_2, ..., x_k) \in P(k); x_1 + x_2 + \cdots + x_k = \ell\}$.

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in R_{k,\ell}$, alors $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + \cdots + kx_k & = & k \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_k & = & \ell \end{array} \right.$ donc en faisant $L_1 - L_2$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_2 + 2x_3 + \cdots + (k-1)x_k & = & k - \ell \\ x_1 + \cdots + x_k & = & \ell \end{array} \right.$$

Dans la première somme, les termes $(k - \ell + 1)x_{k-\ell+2}, (k - \ell + 2)x_{k-\ell+3}, ..., (k-1)x_k$ sont nuls sinon la somme dépasserait $k - \ell$, donc :

$$x_{k-\ell+2} = x_{k-\ell+3} = \cdots = x_k = 0$$

On pose donc $(y_1, \ldots, y_{k-\ell}) = (x_2, \ldots, x_{k-\ell+1})$ de sorte que :

$$y_1 + 2y_2 + \cdots + (k-\ell)y_{k-\ell} = x_2 + 2x_3 + \cdots + (k-\ell)x_{k-\ell+1} = k - \ell$$

et

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{k-\ell} = x_2 + x_3 + \cdots + x_{k-\ell+1} \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_k = \ell$$

donc $(y_1, y_2, \ldots, y_\ell) \in Q(\ell, k-\ell)$. Posons φ l'application de $R_{k,\ell}$ dans $Q(\ell, k-\ell)$ qui à $(x_1, ..., x_k)$ associe $(y_1, ..., y_{k-\ell})$ et montrons que φ est bijective.

- $\boxed{\text{Par construction } \varphi \text{ est injective.}}$
- Si $(y_1, y_2, \ldots, y_{k-\ell}) \in Q(\ell, k-\ell)$, on pose $(x_2, \ldots, x_{k-\ell+1}) = (y_1, y_2, \ldots, y_{k-\ell})$ puis on pose $x_1 = \ell - x_2 - x_3 - \cdots - x_{k-\ell+1}$ et $x_{k-\ell+2} = x_{k-\ell+3} = \cdots = x_k = 0$ de sorte que $(x_1, \ldots, x_k) \in R_{k,\ell}$ et $\varphi(x_1, \ldots, x_k) = (y_1, \ldots, y_{k-\ell})$. $\boxed{\varphi \text{ est donc surjective}}$

(c) i. Pour chaque $(x_1, \ldots, x_k) \in Q(\ell, k)$, il y a deux cas possible :

- Ou bien $x_1 + \cdots + x_k \leq \ell - 1$, dans ce cas $(x_1, \ldots, x_k) \in Q(\ell - 1, k)$
- Ou bien $x_1 + \cdots + x_k = \ell$, dans ce cas $(x_1, ..., x_k) \in R_{k,\ell}$ défini à la question précédente.

On a donc $\boxed{q(\ell, k) = q(\ell - 1, k) + \text{card}(R_{k,\ell}) = q(\ell - 1, k) + q(\ell, k - \ell)}$.

ii. $q(\ell, \ell) - q(\ell - 1, \ell) = \text{card}(R_{\ell,\ell})$ (notons que les formules précédentes ne s'appliquent pas car on n'a pas $\ell > \ell$).

$(x_1, \ldots, x_\ell) \in R_{\ell,\ell} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + \cdots + \ell x_\ell & = & \ell \\ x_1 + \cdots + x_\ell & = & \ell \end{array} \right.$ donc en faisant $L_1 - L_2$ on trouve $x_2 + \cdots + (\ell-1)x_\ell = 0$ d'où $x_2 = x_3 = \cdots = x_\ell = 0$ et $x_1 = \ell$. On en conclut que $\boxed{q(\ell, \ell) - q(\ell - 1, \ell) = 1}$.

Problème

1. (a) i. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes alors $\text{Cov}(X_k, X_\ell) = 0$ donc $r = 0$ et

$$\boxed{V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = np(n-p)}$$

et de plus $\sum_{k=1}^{n} X_k$ suit la loi binomiale de paramètres (n, p).

ii. Si $X_1 = \cdots = X_n$, alors $r = 1$ et

$$\boxed{V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = V(nX_1) = n^2 V(X_1) = n^2 p(n-p)}$$

et de plus $\sum_{k=1}^{n} X_k = nX_1$ est une variable qui vaut n avec probabilité p et 0 avec probabilité $1 - p$.

(b) Pour $i \neq j$ on a $\text{Cov}(X_i, X_j) = r\sqrt{V(X_i)V(X_j)} = r\sqrt{p^2(1-p)^2} = rp(1-p)$. On a donc :

$$\begin{aligned} V\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) &= \sum_{i=1}^{k} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= kp(1-p) + rp(1-p)\text{card}(\{(i,j) \in [\![1, k]\!], i < j\}) \\ &= kp(1-p) + 2\frac{rk(k-1)}{2}p(1-p) \\ &= \big(1 + r(k-1)\big)kp(1-p) \end{aligned}$$

(c) La variance est toujours positive donc pour $k = n$:

$$np(1-p)(1+(n-1)r) \geq 0 \iff 1+(n-1)r \geq 0$$
$$\iff r \geq \frac{-1}{n-1}$$

2. (a) On a $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) = \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) - p^2$ donc si $r = -1$ on a :

$$\frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{V(X_1)V(X_2)}} = -1 \iff \frac{\mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) - p^2}{p(1-p)} = -1$$

donc

$$\boxed{\mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = p^2 - p(1-p) = p(2p-1)}$$

(b) On sait que $\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_2 = 0) = 1 - p$ et que $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 1) - \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = p - p(2p-1)$ donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = 1 - p - (p - p(2p-1)) = 1 - 2p + 2p^2 - p = (1-p)(1-2p)}$$

(c) D'après la question 1.b), si $r = -1$ alors $V(X_1 + X_2) = 0$ donc $X_1 + X_2$ est constante avec probabilité 1.

$\mathbb{P}(X_1 + X_2) = 0 = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) < 1$ et $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) < 1$, donc la seule possibilité est $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 1) = 1$.

Or $\mathbb{P}(X_1+X_2 = 1) = 1-\mathbb{P}(X_1+X_2 = 2)-\mathbb{P}(X_1+X_2 = 0) = 1-p(2p-1)-(1-p)(1-2p) = -2p^2+p+3p-2p^2 = 4p(1-p)$ et l'équation $4p(1-p) = 1$ admet pour unique solution $p = \dfrac{1}{2}$.

3. (a) Puisque $\sum_{k=1}^n X_k$ est constante avec probabilité 1, sa variance est nulle donc

$$np(1-p)(1+(n-1)r) = 0$$

d'où $r = \dfrac{-1}{n-1}$ et comme $\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = np$ on a $np = 1$ donc $p = \dfrac{1}{n}$.

(b) $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k = x_k]\right) > 0$ si et seulement si un seul des x_k vaut 1 et les autres sont nuls.

Pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, posons $u_k = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ avec un 1 en k-ème position. On sait que $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$ et d'après la formule des probabilités totales :

$$p = \mathbb{P}(X_k = 1) = \sum_{(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n)\in\{0,1\}^{n-1}} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_k = 1, \ldots, X_n = x_n)$$

or tous les termes de la somme sont nuls sauf $\mathbb{P}(X_1 = 0, \ldots, X_{k-1} = 0, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \ldots, X_n = 0)$ d'où

$$\mathbb{P}(X_1 = 0, \ldots, X_{k-1} = 0, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \ldots, X_n = 0) = p = \frac{1}{n}$$

4. (a) L'intégrale a une impropriété en 0 et $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim t^{x-1} \sim \dfrac{1}{t^{1-x}}$ donc par TCSP avec une intégrale de Riemann, l'intégrale converge si et seulement si $1 - x < 1$, si et seulement si $x > 0$.

(b) En posant $u = 1 - t$ on a $\mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}t$ donc :

$$\int_{1/2}^{1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \int_{1/2}^{\varepsilon} (1-u)^{x-1}u^{y-1}(-\,\mathrm{d}u)$$
$$= \int_{\varepsilon}^{1/2} u^{y-1}(1-u)^{x-1}\,\mathrm{d}u$$

(c) Dans l'égalité précédente l'intégrale de droite converge si et seulement si $y > 0$ d'après la première question. On en déduit que $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ converge en 0 si et seulement si $x > 0$ et converge en 1 si et seulement si $y > 0$.

5. (a) Voir exercice 2 du TD n°12.

   (b) Idem

6. Soit (k,ℓ) couple d'entier tel que $0 \leq k \leq \ell$. On a d'après la question 5.a :

$$B(x+k, y+\ell-k) = \frac{x+k-1}{y+\ell-k} B(x+k-1, y+\ell-k+1)$$

donc par récurrence immédiate :

$$B(x+k, y+\ell-k) = \frac{(x+k-1)(x+k-2)\cdots x}{(y+\ell-k)(y+\ell-k+1)\cdots(y+\ell-1)} B(x, y+\ell-1)$$

Puis en utilisant le résultat de la question 5.a :

$$B(x, y+\ell) = \frac{y+\ell-1}{x+y+\ell-1} B(x, y+\ell-1)$$

donc par récurrence immédiate :

$$B(x, y+\ell) = \frac{(y+\ell-1)(y+\ell-2)\cdots y}{(x+y+\ell-1)(x+y+\ell-2)\cdots(x+y)} B(x,y)$$

donc en combinant ces égalités :

$$\begin{aligned} B(x+k, y+\ell-k) &= \frac{(x)^{[k]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times \frac{\cancel{(y+\ell-1)}\cancel{(y+\ell-2)}\cdots\cancel{(y+\ell-k)}(y+\ell-k-1)\cdots y}{\cancel{(y+\ell-k)}\cancel{(y+\ell-k+1)}\cdots\cancel{(y+\ell-1)}} \\ &\boxed{= \frac{(x)^{[k]} y^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}}} \end{aligned}$$

7. (a) On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} p_k &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{B(x+k, u+n-k)}{B(a,b)} \\ &= \frac{1}{B(a,b)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 t^{x+k-1}(1-t)^{y+n-k-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}}_{=(t+1-t)^n=1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{B(a,b)} \underbrace{\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t}_{=B(a,b)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

   (b) Si $S \hookrightarrow B(n,1,1)$ on a pour tout $k \in [\![0,n]\!]$:

$$\mathbb{P}(S=k) = \binom{n}{k} \frac{(1)^{[k]}(1)^{[n-k]}}{(2)^{[n]}}$$

or $(1)^{[k]} = k!$, $(1)^{[n-k]} = (n-k)!$ et $(2)^{[n]} = 2 \times (2+1) \times \cdots (2+n-1) = (2+n-1) = (n+1)!$ donc :

$$\mathbb{P}(S = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

donc S suit une loi uniforme : $S \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n]\!]$

(c) On peut utiliser la formule $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(S = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \frac{(a)^{[k]}(b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} \frac{(a)^{[k]}(b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}} \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{(a)^{[k+1]}(b)^{[n-1-k]}}{(a+b)^{[n]}}
\end{aligned}$$

Or on peut remarquer que pour tout $z \in \mathbb{R}$ et tout entier naturel k on a $(z)^{[k+1]} = (z+k)(z+k-1)\cdots z = (z+1)^{[k]} \times z$ donc $(a)^{[k+1]} = a(a+1)^{[k]}$ et $(a+b)^{[n]} = (a+b)(a+b+1)^{[n-1]}$ donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S) &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{a(a+1)^{[k]}(b)^{[n-1-k]}}{(a+b)(a+b+1)^{[n-1]}} \\
&= \frac{na}{a+b} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{(a+1)^{[k]}(b)^{[n-1-k]}}{(a+b+1)^{[n-1]}} \\
&= \frac{na}{a+b} \sum_{k=0}^{n-1} p'_k
\end{aligned}$$

avec $(p'_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ les probabilités de la loi bêta-binomiale $B(n-1, a+1, b)$, dont la somme vaut 1, d'où :

$$\mathbb{E}(S) = \frac{na}{a+b}$$

8. (a) On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) \\
&= \frac{1}{B(a,b)} \left(B(a+1, b+2-1) + B(a+2, b+2-2)\right) \\
&= \frac{1}{B(a,b)} \left(B(a+1, b+1) + B(a+2, b)\right) \\
&= \frac{B(a+1, b+1)}{B(a,b)} + \frac{B(a+2, b)}{B(a,b)} \\
&= \frac{(a)^{[1]}(b)^{[1]}}{(a+b)^{[2]}} + \frac{(a)^{[2]}(b)^{[0]}}{(a+b)^{[2]}} \qquad = \frac{ab + a(a+1)}{(a+b+1)(a+b)} \\
&= \frac{a}{a+b}
\end{aligned}$$

et de même $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \dfrac{a}{a+b}$.

(b) En posant $S = X_1 + X_2$ on a $S(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et :

$$\mathbb{P}(S = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{B(a, b+2)}{B(a, b)} = \binom{2}{0} \frac{a^{[0]}(b)^{[2]}}{(a+b)^{[2]}}$$

puis

$$\mathbb{P}(S = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{B(a+2, b)}{B(a, b)} = \binom{2}{2} \frac{(a)^{[2]}(b)^{[0]}}{(a+b)^{[2]}}$$

et

$$\mathbb{P}(S = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) = 2\frac{B(a+1, b+1)}{B(a, b)} = \binom{2}{1} \frac{(a)^{[1]}(b)^{[1]}}{(a+b)^{[2]}}$$

donc $S \hookrightarrow B(2, a, b)$

(c) $\mathbb{P}_{[X_1=1]}(X_2 = 1) = \dfrac{\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1)}{\mathbb{P}(X_1 = 1)} = \dfrac{a(a+1)/((a+b+1)(a+b))}{a/(a+b)} = \dfrac{a+1}{a+b+1}$