★

Exercice 1 — Voir correction

Soient B_1 et B_2 deux variables de Bernoulli indépendantes avec B_1 de paramètre p et B_2 de paramètre $q = 1 - p$.
On pose $X = B_1 + 2B_2$ et $Y = 6B_1 - 3B_2$.

1) Calculer la covariance de X et Y
2) Déterminer les lois de X et Y, et la loi du couple (X, Y).
3) X et Y sont-elles indépendantes ?

★

Exercice 2 — Voir correction

Soit $p \in]0\,;1[$, et soient X_1, X_2, X_3, X_4 quatre variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$, et les événements A : « M est la matrice nulle », B : « M est inversible », C : « La trace de M est non nulle ». Calculer la probabilité de A, B et C.

★

Exercice 3 — Voir correction

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de X sachant $X + Y = n$, c'est à dire déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k \mid X + Y = n)$.

★

Exercice 4 — Voir correction

Vrai ou faux ? Justifier

1) Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes
   Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de Bernoulli, alors $X + Y$ suit une loi de Bernoulli
2) Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi uniforme, alors $X + Y$ suit une loi uniforme.
3) Si X, Y et Z sont trois variables aléatoires indépendantes, alors $\mathrm{e}^{|Z|}$ et $\sin(X^2 + Y^2)$ sont indépendantes.

★ ★

Exercice 5 — Voir correction

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi géométrique de paramètre p
On pose $S = X + Y$, $U = \min(X, Y)$ et $V = X - Y$

1) Déterminer la loi de S
2) Montrer que S admet une espérance et la calculer.
3) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(U > k) = (1 - p)^{2k}$. En déduire la loi de U.
4) Soit $\ell \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{P}(V = \ell, Y = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que $\mathbb{P}(V = \ell) = \dfrac{p(1-p)^{\ell}}{2-p}$.
5) En déduire la loi de V.
6) Montrer que les variables aléatoires S et U ne sont pas indépendantes.
7) Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

★ ★

Exercice 6 — Voir correction

On lance indéfiniment une pièce truquée amenant Pile avec la probabilité $p \in]0\,;1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On appelle **série** une succession de Pile ou de Face interrompue par l'événement contraire ; par exemple, dans la suite (Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face) il y a quatre séries successives dont deux séries de Pile de longueurs 1 et 3 et deux séries de Face de longueur 2 et 1.
On note L_1 et L_2 les longueurs aléatoires de la première et de la seconde série.

1) Déterminer la loi de L_1 ainsi que son espérance et sa variance (si elles existent).
2) Déterminer la loi du couple (L_1, L_2) et en déduire la loi marginale de L_2.
3) Déterminer l'espérance de L_2.
4) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur p pour que les variables aléatoires L_1 et L_2 soient indépendantes.

⋆ ⋆

Exercice 7 — Voir correction

Soit $n \geq 2$ un entier. Dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, on tire les boules une à une et sans remise. On note X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la boule portant le numéro i sort au i-ème tirage, et 0 sinon. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1) Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, donner la loi de X_i, préciser son espérance et sa variance.
2) Pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$ tel que $i \neq j$, donner la loi de X_iX_j, préciser son espérance.
3) Calculer l'espérance de S_n
4) Calculer la variance de S_n.

⋆ ⋆

Exercice 8 — Voir correction

Une banque comporte deux guichets, notés A et B. Chaque personne entrant dans la banque va faire la queue au guichet A avec probabilité p, ou bien au guichet B avec probabilité $1-p$.
Le nombre de personne qui entrent dans cette banque en une heure est modélisée par une variable aléatoire N suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On considère la suite de variable aléatoire $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par $X_k = 1$ si la k-ème personne va au guichet A, et $X_k = 0$ sinon. On considère que les variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes entre elles et indépendantes de N.
Soit S définie sur Ω par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = \sum_{i=0}^{N(\omega)} X_i(\omega)$$

On admet que S est une variable aléatoire.

1) Expliquer pourquoi S modélise le nombre de personne qui se sont présenté au guichet A en une heure.
2) Pour $k \geq 0$ et $n \geq 0$, exprimer la probabilité conditionnelle de $\{S = k\}$ sachant que $\{N = n\}$. On distinguera le cas $k \leq n$ et le cas $k > n$.
3) En déduire la loi du couple (S, N).
4) En déduire la loi de S. On montrera que S suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 9 — Voir correction

Soient $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ des nombres réels tels que $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 1$ et $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \dfrac{1}{2}$. On pose

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $c > 0$, $\mathbb{P}(|S| > c) \leq 2\,\mathrm{e}^{-\frac{c^2}{2}}$.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \leq \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$. *Indication :* on pourra utiliser le fait que $\mathrm{e}^u = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{u^i}{i!}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.
2) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, e^{tS} admet une espérance et que $\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{tS}\right] \leq \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$.
3) Montrer que pour tout $c > 0$, on a $\mathbb{P}(S \geq c) \leq \mathrm{e}^{-\frac{c^2}{2}}$.
4) En déduire que $\mathbb{P}(|S| \geq c) \leq 2\,\mathrm{e}^{-\frac{c^2}{2}}$.

⋆⋆⋆

Exercice 10 — Voir correction

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p, avec $0 < p < 1$. On effectue une succession indéfinie de tirages d'une boule de cette urne, les tirages ayant lieu avec remise.

1) On note V (respectivement B) le nombre aléatoire de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte (respectivement blanche).
   a) Quelles sont les lois respectives de V et B ?
   b) Les variables aléatoires V et B sont-elles indépendantes ?
2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages à partir du premier amenant le même résultat que le premier résultat et Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages amenant alors le résultat contraire.
   Par exemple, et avec des notations évidentes, si on obtient la succession de résultats $VVVVBBV...$, on réalise l'événement $(X = 4)$ et l'événement $(Y = 2)$.
   a) Déterminer la loi de X. Montrer que X admet une espérance que l'on calculera. Quand cette espérance est-elle minimale ? Admet-elle un maximum ?
   b) Déterminer la loi de Y. Montrer que Y admet une espérance que l'on calculera.
   c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

⋆⋆⋆

Exercice 11 — Voir correction

Soit n un entier naturel non nul. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et n boules noires indiscernables. On tire n boules simultanément.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k la variables aléatoire égale à 1 si la boule numéro k a été obtenue et 0 sinon.

1) a) Déterminer la loi de X_k
   b) Calculer l'espérance et la variance de X_k
2) a) Montrer que pour tout couple (i, j) de $[\![1\,;n]\!]^2$ avec $i \neq j$, on a :
   $$\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \frac{n-1}{2(2n-1)}$$
   b) En déduire que $\text{Cov}(X_i, X_j) = -\dfrac{1}{4(2n-1)}$
3) On pose $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer l'espérance et la variance de X.
4) Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre de points obtenus en sommant les numéros des boules blanches tirées. Déterminer l'espérance de Y.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) $\text{Cov}(X,Y) = \text{Cov}(B_1+2B_2, 6B_1-3B_2) = 6\text{Cov}(B_1,B_1) - 3\text{Cov}(B_1,B_2) + 12\text{Cov}(B_2,B_1) - 6\text{Cov}(B_2,B_2)$ par linéarité. Or $\text{Cov}(B_1,B_2) = \text{Cov}(B_2,B_1) = 0$ car B_1 et B_2 sont indépendantes, et $\text{Cov}(B_1,B_1) = V(B_1) = p(1-p)$ et $\text{Cov}(B_2,B_2) = V(B_2) = q(1-q)$ donc $\text{Cov}(X,Y) = 6p(1-p) - 6q(1-q) = 0$ car $q = 1-p$.
2) $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$, avec par indépendance de B_1 et B_2 :
   - $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(B_1=0, B_2=0) = (1-p)(1-q) = qp$
   - $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(B_1=1, B_2=0) = p(1-q) = p^2$
   - $\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(B_1=0, B_2=1) = (1-p)q = q^2$
   - $\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(B_1=1, B_2=1) = pq$

   De même, $Y(\Omega) = \{-3,0,3,6\}$ avec :

   - $\mathbb{P}(Y=-3) = \mathbb{P}(B_1=0, B_2=1) = (1-p)q = q^2$
   - $\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(B_1=0, B_2=0) = (1-p)(1-q) = qp$
   - $\mathbb{P}(Y=3) = \mathbb{P}(B_1=1, B_2=1) = pq$
   - $\mathbb{P}(Y=6) = \mathbb{P}(B_1=1, B_2=0) = p(1-q) = p^2$

   Le couple (X,Y) ne peut prendre que 4 valeurs possibles selon les valeurs de B_1 et B_2 (et non pas $4\times 4 = 16$) :

B_1 \ B_2	0	1
0	$(X,Y) = (0,0)$	$(X,Y) = (2,-3)$
1	$(X,Y) = (1,6)$	$(X,Y) = (3,3)$

   avec $\mathbb{P}(X=0, Y=0) = (1-p)(1-q) = qp$, $\mathbb{P}(X=2, Y=-3) = (1-p)q = q^2$, $\mathbb{P}(X=1, Y=6) = p(1-q) = p^2$ et $\mathbb{P}(X=3, Y=3) = pq$:

X \ Y	-3	0	3	6
0	0	pq	0	0
1	0	0	0	p^2
2	q^2	0	0	0
3	0	0	pq	0

3) X et Y ne sont pas indépendantes car $\mathbb{P}(X=0, Y=0) = 0$ alors que $\mathbb{P}(X=0) \neq 0$ et $\mathbb{P}(Y=0) \neq 0$, donc $\mathbb{P}(X=0, Y=0) \neq \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0)$.

Correction de l'exercice 2 :

1) M est la matrice nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
   $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X_1=0, X_2=0, X_3=0, X_4=0) = \mathbb{P}(X_1=0)\mathbb{P}(X_2=0)\mathbb{P}(X_3=0)\mathbb{P}(X_4=0)$ car X_1, X_2, X_3, X_4 sont indépendantes.
   On a donc $\mathbb{P}(A) = p^4$.
2) Calculons la probabilité de $\overline{B}$, c'est à dire la probabilité que M ne soit pas inversible.
   M n'est pas inversible si et seulement si $\det(M) = 0$, si et seulement si $X_1X_4 - X_3X_2 = 0$.
   X_1X_4 et X_2X_3 sont à valeurs dans $\{0,1\}$ (ce sont donc des variables de Bernoulli). Ainsi, $X_1X_4 = X_2X_3$ si et seulement si $X_1X_4 = X_2X_3 = 1$ ou $X_1X_4 = X_2X_3 = 0$
   Or, pour tout $i,j \in \{1,2,3,4\}$, $X_iX_j = 1 \iff X_i = X_j = 1$ donc on a

$$\boxed{(X_1X_4 = 1, X_2X_3 = 1) = (X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 1)}$$

   De plus, pour tout $i,j \in \{1,2,3,4\}$, $X_iX_j = 0 \iff X_i = 0 \quad \text{ou} \quad X_j = 0$. Or, $(X_i = 0) \cup (X_j = 0)$ est le contraire de $(X_i = 1) \cap (X_j = 1)$. On a donc

$$(X_1X_4 = 0) = \overline{(X_1 = 1, X_4 = 1)} \quad \text{et} \quad (X_2X_3 = 0) = \overline{(X_2 = 1, X_3 = 1)}$$

donc finalement

$$\boxed{(X_1X_4=0,X_2X_3=0)=\overline{(X_1=1,X_4=1)}\bigcap\overline{(X_2=1,X_3=1)}}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{B}) &= \mathbb{P}\big((X_1X_4=1,X_2X_3=1)\cup(X_1X_4=0,X_2X_3=0)\big)\\
&= \mathbb{P}(X_1X_4=1,X_2X_3=1)+\mathbb{P}(X_1X_4=0,X_2X_3=0) && \text{car l'union est disjointe}\\
&= \mathbb{P}(X_1=1,X_2=1,X_3=1,X_4=1)+\mathbb{P}(\overline{(X_1=1,X_4=1)}\cap\overline{(X_2=1,X_3=1)})\\
&= \underbrace{P(X_1=1)\mathbb{P}(X_2=1)\mathbb{P}(X_3=1)\mathbb{P}(X_4=1)}_{\text{car } X_1,X_2,X_3,X_4 \text{ indépendantes}}+\underbrace{\mathbb{P}(\overline{(X_1=1,X_4=1)})\mathbb{P}(\overline{(X_2=1,X_3=1)})}_{\text{car } A,B \text{ indépendants} \Rightarrow \overline{A},\overline{B} \text{ indépendants}}\\
&= \mathbb{P}(X_1=1)^4+(1-\mathbb{P}(X_1=1)\mathbb{P}(X_4=1))(1-\mathbb{P}(X_2=1)\mathbb{P}(X_3=1))\\
&= p^4+(1-p^2)^2\\
&= 2p^4-2p^2+1
\end{aligned}$$

Finalement, $\mathbb{P}(B)=1-\mathbb{P}(\overline{B})=2p^2-2p^4=2p^2(1-p^2)$

3) Calculons la probabilité de $\overline{C}$: "la trace de M est nulle".
$\mathbb{P}(\overline{C})=\mathbb{P}(X_1+X_4=0)=\mathbb{P}(X_1=0,X_4=0)=\mathbb{P}(X_1=0)\mathbb{P}(X_4=0)$ car X_1 et X_4 sont indépendantes.
$\mathbb{P}(\overline{C})=(1-p)^2=1-2p+p^2$ donc $\mathbb{P}(C)=1-\mathbb{P}(\overline{C})=2p-p^2=p(2-p)$.

Correction de l'exercice 3 : Soit $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{N}$. Si $k>n$, alors les événements $X=k$ et $X+Y=n$ sont incompatibles donc :

$$\mathbb{P}(X=k\mid X+Y=n)=0$$

Si $k\leq n$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k\mid X+Y=n) &= \frac{\mathbb{P}(X=k\ ,\ X+Y=n)}{X+Y=n}\\
&= \frac{\mathbb{P}(X=k,Y=n-k}{X+Y=n}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}}{\mathrm{e}^{-2\lambda}\,\frac{(2\lambda)^n}{n!}} && \text{car } X+Y\sim\mathcal{P}(2\lambda) \text{ d'après le résultat de l'exercice 3}\\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{2^n}\\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

donc la loi de X sachant $X+Y=n$ est une loi binomiale de paramètre n et $p=\dfrac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 4 :

1) FAUX. Supposons que X et Y suivent une loi de Benoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}\in]0,1[$ et soient indépendantes.
$\mathbb{P}(X+Y=2)=\mathbb{P}(X=1,Y=1)=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(X-Y=0)=\mathbb{P}(X=1,Y=1)+\mathbb{P}(X=0,Y=0)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$.
De plus, $\mathbb{P}(X+Y=2,X-Y=0)=\mathbb{P}(X=1,Y=1)=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}\neq\mathbb{P}(X+Y=2)\mathbb{P}(X-Y=0)$ donc $X+Y$ et $X-Y$ ne sont pas indépendantes.
2) FAUX, $X+Y$ prend ses valeurs dans $0,1,2$
3) FAUX, voir exercice 2 par exemple
4) VRAI d'après le lemme des coalitions.

Correction de l'exercice 5 :

1) X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ donc $X+Y$ est à valeurs dans $[\![2,+\infty[\![$.
Soit $k \in [\![2,+\infty[\![$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S=k) &= \mathbb{P}(X+Y=k)\\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X=i, Y=k-i)\\ &= \sum_{i=1}^{k-1} p(1-p)^{i-1}p(1-p)^{k-i-1}\\ &= \sum_{i=1}^{k-1} p^2(1-p)^{k-2}\\ &= (k-1)p^2(1-p)^{k-2}\end{aligned}$$

2) S admet une espérance si et seulement si la série de terme général $k \times (k-1)p^2(1-p)^{k-2}$ converge.
Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=1}^{N} k^2p^2(1-p)^{k-2} = p^2 \sum_{k=1}^{N} k(k-1)(1-p)^{k-2}$$

on reconnaît une série géométrique dérivée double convergente car $0 < 1-p < 1$, donc cette somme converge et $\mathbb{E}[S] = p^2 \times \dfrac{2}{(1-(1-p))^3} = \dfrac{2p^2}{p^3} = \dfrac{2}{p}$
On peut retrouver ce résultat plus simplement : $S = X+Y$ et $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $Y \sim \mathcal{G}(p)$ admettent chacune pour espérance $\dfrac{1}{p}$, donc S admet une espérance et $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{2}{p}$.

3) $U = \min(X,Y)$ est *a priori* à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U>k) &= \mathbb{P}(X>k, Y>k)\\ &= \mathbb{P}(X>k)\mathbb{P}(Y>k)\\ &= (1-p)^k(1-p)^k && \text{voir propriétés de la loi géométrique}\\ &= (1-p)^{2k}\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U=k) &= \mathbb{P}(U \geq k) - \mathbb{P}(U>k)\\ &= \mathbb{P}(U>k-1) - \mathbb{P}(U>k)\\ &= (1-p)^{2k-2} - (1-p)^{2k}\\ &= (1-p)^{2k-2}(1-(1-p)^2)\\ &= q(1-q)^{k-1}\end{aligned}$$

avec $q = 1-(1-p)^2$. AInsi, U suit une loi géométrique de paramètre $1-(1-p)^2$.

4) $\mathbb{P}(S=2, U=1) = \mathbb{P}(X=1, Y=1) = p^2$ d'une part, et d'autre part :

$$\mathbb{P}(S=2)\mathbb{P}(U=1) = \mathbb{P}(X=1,Y=1)\mathbb{P}(U=1) = p^2(1-(1-p)^2) = p^2(2p-p^2)$$

Or, $2p - p^2 = 1 \iff 1-2p+p^2 = 0 \iff (1-p)^2 = 0 \iff p = 1$, or $p \in]0,1[$ donc $2p-p^2 \neq 1$ et ainsi $\mathbb{P}(S=2, U=1) \neq \mathbb{P}(S=2)\mathbb{P}(U=1)$. Les variables U et S ne sont donc pas indépendantes.

Correction de l'exercice 6 :

1) $L_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons F_n l'événement « le n-ème lancer est face » et P_n l'événelent « le n-ème lancer est pile ».

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(L_1 = k) &= \mathbb{P}(F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1}) + \mathbb{P}(P_1 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}) \\ &= q^k p + p^k q \\ &= pq(q^{k-1} + p^{k-1})\end{aligned}$$

kq^{k-1} et kp^{k-1} sont les termes généraux de séries géomériques dérivées convergentes car $0 < q < 1$ et $0 < p < 1$ donc L_1 admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(L_1) = \sum_{k \geq 1} pq(kq^{k-1} + kp^{k-1}) = pq \sum_{k \geq 1} kq^{k-1} + pq \sum_{k \geq 1} kp^{k-1} = \frac{pq}{(1-q)^2} + \frac{pq}{(1-p)^2} = \frac{pq}{p^2} + \frac{pq}{q^2} = \frac{q}{p} + \frac{p}{q}$$

De même, $k(k-1)q^{k-2}$ et $k(k-1)p^{k-2}$ sont les termes généraux de séries convergentes donc :

$$\mathbb{E}(L_1(L_1 - 1)) = pq^2 \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} + p^2 q \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)p^{k-2} = \frac{2pq^2}{(1-q)^3} + \frac{2p^2 q}{(1-p)^3} = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{2p^2}{q^2}$$

d'où

$$\begin{aligned}V(L_2) = \mathbb{E}(L_1^2) - \mathbb{E}(L_1)^2 \\ &= \mathbb{E}(L_1(L_1 - 1)) + \mathbb{E}(L_1) - \mathbb{E}(L_1)^2 \\ &= \frac{pq^2}{p^2} + \frac{2p^2}{q^2} + \frac{q}{p} + \frac{p}{q} - \frac{q^2}{p^2} - \frac{p^2}{q^2} - \frac{2pq}{qp} \\ &= \frac{q^2}{p^2} + \frac{p^2}{q^2} + \frac{q}{p} + \frac{p}{q} - 2 \\ &= \frac{q(q+p)}{p^2} + \frac{p(p+q)}{q^2} - 2 \\ &= \frac{q}{p^2} + \frac{p}{q^2} - 2\end{aligned}$$

2) $L_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_1 = i, L_2 = j) &= \mathbb{P}(F_1 \cap \cdots \cap F_i \cap P_{i+1} \cap \cdots \cap P_{i+j} \cap F_{i+j+1}) + \mathbb{P}(P_1 \cap \cdots \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \cdots \cap F_{i+j} \cap P_{i+j+1}) \\ &= q^i p^j q + p^i q^j p \\ &= q^{i+1} p^j + p^{i+1} q^j\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_2 = j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N_1 = i, N_2 = j) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} (q^{i+1} p^j + p^{i+1} q^j) \\ &= p^j q^2 \sum_{i=1}^{+\infty} q^{i-1} + p^2 q^j \sum_{i=1}^{+\infty} p^{i-1} \\ &= \frac{p^j q^2}{1-q} + \frac{p^2 q^j}{1-p} \\ &= q^2 p^{j-1} + p^2 q^{j-1}\end{aligned}$$

3) jp^{j-1} et jq^{j-1} sont les termes généraux de séries géométriques dérivées convergentes donc L_2 admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(L_2) = q^2 \sum_{j=1}^{+\infty} jp^{j-1} + p^2 \sum_{j=1}^{+\infty} jq^{j-1} = \frac{q^2}{(1-p)^2} + \frac{p^2}{(1-q)^2} = 2$$

4) Supposons que L_1 et L_2 sont indépendantes. Alors

$$\mathbb{P}(L_1 = 1, L_2 = 1) = \mathbb{P}(L_1 = 1)\mathbb{P}(L_2 = 1)$$

donc

$$q^2p + p^2q = 2pq(q^2 + p^2)$$

et donc

$$p(1-p)^2 + p^2(1-p) = 2p(1-p)((1-p)^2 + p^2)$$

d'où

$$p(1-p)[2(1-2p+2p^2) - ((1-p)+p)] = 0$$

comme $p(1-p) \neq 0$ cela donne $4p^2 - 4p + 1 = 0$ c'est à dire $(2p-1)^2 = 0$ donc $p = \dfrac{1}{2}$.

Réciproquement, si $p = \dfrac{1}{2}$, alors

$$\begin{aligned}\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathbb{P}(L_1 = i)\mathbb{P}(L_2 = j) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^{i-1}}\right) \times \left(\frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2^{j-1}} + \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2^{j-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^i} \times \frac{1}{2^j}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathbb{P}(L_1 = i, L_2 = j) &= \frac{1}{2^{i+1}} \times \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{i+1}} \times \frac{1}{2^j} \\ &= \frac{1}{2^{i+j+1}} + \frac{1}{2^{i+j+1}} \\ &= \frac{1}{2^{i+j}} \\ &= \frac{1}{2^i} \times \frac{1}{2^j}\end{aligned}$$

donc $\mathbb{P}(L_1 = i, L_2 = j) = \mathbb{P}(L_1 = i)\mathbb{P}(L_2 = j)$, les variables L_1 et L_2 sont donc indépendantes si et seulement si $p = \dfrac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 7 :

1) La liste des boules tirées correspond à une permutation de $(1, \ldots, n)$ et il y a $n!$ permutations possibles.
Parmi elles, il y en a $(n-1)!$ qui laissent i invariant (ce sont les permutations de $(1, ..., i-1, i+1, ..., n)$). Ainsi, pour tout entier $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathbb{P}(X_i = 1) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$.
On en conclut que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n}$ et $V(X_i) = \frac{1}{n}\left(1 - frac1n\right)$

2) Pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $i \neq j$, X_iX_j est un produit de deux variables de Bernoulli donc prend des valeurs dans $\{0, 1\}$. C'est donc aussi une variable de Bernoulli, et $\mathbb{P}(X_iX_j = 1) = \mathbb{P}((X_i = 1) \cap (X_j = 1))$.
Il y a $(n-2)!$ permutations qui laissent invariant les numéros i et j, donc $\mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)}$.
$X_iX_j \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{n(n-1)}\right)$ donc $\mathbb{E}(X_iX_j) = \dfrac{1}{n(n-1)}$.

3) $\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^n \dfrac{1}{n} = 1$

4) $V(S_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Cov}(X_iX_j)$.
Or, $\mathrm{Cov}(X_iX_j) = \mathbb{E}(X_iX_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = \dfrac{1}{n(n-1)} - \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n^2(n-1)}$ donc

$$V(S_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \sum_{i<j} \frac{1}{n^2(n-1)} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{1}{n^2(n-1)} = 1 - \frac{1}{2n}$$

Correction de l'exercice 8 :

1) $X_i(\omega)$ vaut 1 si la i-ème personne va au guichet A et 0 sinon, ainsi $\sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$ représente le nombre de personnes qui vont au guichet A sur les $N(\omega)$ personnes qui se sont présentées lors de la première heure.
2) Soient n et k deux entiers naturels. Sachant que l'événement $\{N = n\}$ est réalisé, S est une somme de n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p donc S suit une loi binomiale de paramètres (n, p), c'est à dire :
   - Si $k > n$, $\sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega) = \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) \leq n < k$ donc $\mathbb{P}(S = k|N = n) = 0$.
   - Si $k \leq n$, alors :
   $$\mathbb{P}(S = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
3) Pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$,
$$\mathbb{P}(S = k, N = n) = \mathbb{P}(S = k|N = n) \times \mathbb{P}(N = n) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
4) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a donc
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S = k) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(S = k, N = n) \\
&= \sum_{n \geq k} \mathbb{P}(S = k, N = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n (1-p)^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n'}}{(n')!} && \text{en posant } n' = n - k \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \times \mathrm{e}^{\lambda - p\lambda} \\
&= \mathrm{e}^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!}
\end{aligned}$$
   ainsi, S suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

Correction de l'exercice 9 :

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!} + \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-x)^i}{i!}\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i + (-x)^i}{i!}
\end{aligned}$$
   Or, $\dfrac{x^i + (-x)^i}{i!} = \begin{cases} \frac{2x^i}{i!} & \text{si } i \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$, donc
$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2x^{2k}}{(2k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

On veut comparer cela à $\mathrm{e}^{x^2/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(x^2/2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2k}}{2^k k!}$. Or pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(2k)! = 1 \times 2 \times \cdots \times k \times (k+1) \times \cdots \times 2k \geq (2 \times 1) \times (2 \times 2) \times \cdots \times (2 \times k)$ car pour tout $1 \leq i \leq k$, $k + i \geq 2i$.

Ainsi, $(2k)! \geq 2^k k!$ donc $\dfrac{x^{2k}}{(2k)!} \leq \dfrac{x^{2k}}{2^k k!}$ (car $x^{2k} = (x^k)^2 \geq 0$), et l'inégalité est vraie aussi pour $k = 0$ donc par somme d'inégalités :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2^k k!}$$

d'où

$$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \leq \mathrm{e}^{x^2/2}$$

2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,e^{tS} est une variable aléatoire finie car S est finie donc admet une espérance, et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tS}) &= \mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{n} t a_i X_i\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \exp(t a_i X_i)\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\exp(t a_i X_i)) && \text{car les variables } \exp(t a_i X_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ sont indépendantes} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(\exp(t a_i) + \exp(-t a_i)) \\
&\leq \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{t^2 a_i^2/2} && \text{d'après la question précédente} \\
&\leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \\
&\leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) && \text{car } \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1
\end{aligned}$$

3) Pour tout $c > 0$ et pour tout $t > 0$ on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S \geq c) &= \mathbb{P}(tS \geq tc) \\
&= \mathbb{P}(\mathrm{e}^{tS} \geq \mathrm{e}^{tc}) && \text{car la fonction exp est croissante} \\
&\leq \frac{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tS})}{\mathrm{e}^{tc}} && \text{d'après l'inégalité de Markov} \\
&\leq \frac{\mathrm{e}^{t^2/2}}{\mathrm{e}^{tc}} \\
&\leq \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2} - tc}
\end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \frac{t^2}{2} - tc$ atteint un minimum en $t = c$ pour, en prenant $t = c$ on obtient :

$$\mathbb{P}(S \geq c) \leq \mathrm{e}^{-\frac{c^2}{2}}$$

4) On a $\mathbb{P}(-S \geq c) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(-X_i) \geq c\right)$. Or pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $-X_i$ suit la même loi que X_i donc les résultats précédents s'appliquent encore et on obtient $\mathbb{P}(-S \geq c) \leq \mathrm{e}^{-c^2/2}$. Finalement

$$\mathbb{P}(|S| \geq c) = \mathbb{P}(S \geq c) + \mathbb{P}(-S \geq c) \leq 2\,\mathrm{e}^{-c^2/2}$$

Correction de l'exercice 10 :

1) a) V suit la loi $\mathcal{G}(p)$, B suit la loi $\mathcal{G}(q)$ avec $q = 1-p$.

b) $\underline{V \text{ et } B \text{ ne sont pas indépendantes}}$: $\mathbb{P}(V=1, B=1) = 0$ car la première boule tirée ne peut pas être à la fois verte et blanche, mais $\mathbb{P}(V=1)\mathbb{P}(B=1) = pq \neq 0$ donc $\mathbb{P}(V=1, B=1) \neq \mathbb{P}(V=1)\mathbb{P}(B=1)$.

2) a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons V_k l'événement « la k-ème boule tirée est verte » et B_k l'événement « la k-ème boule tirée est blanche ».

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=n) &= \mathbb{P}(V_1 \cap \cdots \cap V_n \cap B_{n+1}) + \mathbb{P}(B_1 \cap \cdots \cap B_n \cap V_{n+1}) \\ &\boxed{= p^n q + q^n p} \qquad \text{par indépendance}\end{aligned}$$

X admet une espérance si et seulement si la série $\sum n(p^n q + q^n p)$ converge. Or, $p, q \in]0\,;1[$ donc les séries $\sum np^{n-1}$ et $\sum nq^{n-1}$ sont des séries géométriques dérivées convergentes, on en déduit que X admet une espérance et que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=1}^{\infty} np^n q + nq^n p \\ &= pq\sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1} + pq\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} \\ &= \frac{pq}{(1-p)^2} + \frac{pq}{(1-q)^2} \\ &\boxed{= \frac{p}{q} + \frac{q}{p}}\end{aligned}$$

Lorsque $p \to 1$, on a $\lim\limits_{p\to1} q = 0$ donc $\lim\limits_{p\to1} \dfrac{p}{q} = +\infty$ et comme $\mathbb{E}(X) \geq \dfrac{p}{q}$ on en déduit que $\lim\limits_{p\to1} \mathbb{E}(X) = +\infty$, ainsi $\mathbb{E}(X)$ n'admet pas de maximum.

Posons $f(x) = x + \frac{1}{x}$ (de sorte que $\mathbb{E}(X) = f(p/q)$), f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ d'où :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

donc $\mathbb{E}(X)$ admet pour minimum 2, ce minimum est atteint lorsque $\frac{p}{q} = 1$ c'est à dire lorsque $p = q = \frac{1}{2}$.

b) $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et en reprenant les notations de la question précédente on a pour tout $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k, Y=n) &= \mathbb{P}(V_1 \cap \cdots \cap V_k \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_{k+n} \cap V_{k+n+1}) + \mathbb{P}(B_1 \cap \cdots \cap B_k \cap V_{k+1} \cap \cdots \cap V_{k+n} \cap B_{k+n+1}) \\ &= p^k q^n p + q^k p^n q \\ &\boxed{= p^{k+1} q^n + q^{k+1} p^n}\end{aligned}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(X=k)_{k\in\mathbb{N}^*}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=n) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=k, Y=n) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} p^{k+1} q^n + q^{k+1} p^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p^2q^n\sum_{k=1}^{\infty}p^{k-1}+q^2p^n\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}\\
&= p^2q^n\sum_{k=0}^{\infty}p^{k}+q^2p^n\sum_{k=0}^{\infty}q^{k}\\
&= \frac{p^2q^n}{1-p}+\frac{q^2p^n}{1-q}\\
&\boxed{= p^2q^{n-1}+q^2p^{n-1}}
\end{aligned}$$

Les séries $\sum nq^{n-1}$ et $\sum np^{n-1}$ sont des séries géométriques dérivées convergentes donc Y admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= p^2\sum_{n=1}^{+\infty}nq^{n-1}+q^2\sum_{n=1}^{\infty}np^{n-1}\\
&= \frac{p^2}{(1-q)^2}+\frac{q^2}{(1-p)^2}\\
&\boxed{=2}
\end{aligned}$$

on remarque que $\mathbb{E}(Y)\leq\mathbb{E}(X)$ quel que soit la valeur de $p\in]0\,;1[$.

c) Considérons les événements $[X=1]$ et $[Y=1]$. D'une part on a :

$$\mathbb{P}(X=1,Y=1)=p^2q+q^2p=pq(p+q)=pq=p(1-p)$$

et d'autre part :

$$\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)=(pq+qp)(p^2+q^2)=2p(1-p)(p^2+(1-p)^2)$$

Ainsi, $\mathbb{P}(X=1,Y=1)=\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)\iff p(1-p)=2p(1-p)(p^2+(1-p)^2)\iff 2(p^2+(1-p)^2)=1\iff 2p^2-2p+1=\frac{1}{2}$. La seule solution à cette équation est $p=\frac{1}{2}$, donc si X et Y sont indépendante alors $p=\frac{1}{2}$.
Réciproquement, si $p=\frac{1}{2}$, on a d'une part :

$$\forall(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2,\quad \mathbb{P}(X=k,Y=n)=\frac{1}{2^{n+k+1}}+\frac{1}{2^{n+k+1}}=\frac{1}{2^{n+k}}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
\forall(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2,\quad \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n)&=\left(\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}\right)\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\\
&=\frac{1}{2^k}\times\frac{1}{2^n}\\
&=\frac{1}{2^{n+k}}
\end{aligned}$$

donc X et Y sont indépendantes.
En conclusion, X et Y sont indépendantes si et seulement si $p=\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 11 :

1) a) X_k suit une loi de Bernoulli et $\mathbb{P}(X_k=1)$ est la probabilité d'avoir obtenu la boule numéro k lors du tirage.
Il y a $\binom{2n}{n}$ tirages possibles, et parmi eux il y en a $\binom{2n-1}{n-1}$ qui contiennent la boule k (c'est le nombre de façons de choisir les $n-1$ autres boules parmi celles qui ne porte pas le numéro k).
Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_k=1)=\frac{\binom{2n-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}\times\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$$

b) $\mathbb{E}(X_k) = \dfrac{1}{2}$, $V(X_k) = \dfrac{1}{4}$ (espérance et variance d'une variable de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$

2) a) Le nombre de tirages de n boules contenant la boule i et la boule j est $\binom{2n-2}{n-2}$ (c'est le nombre de façons de choisir les $n-2$ autres boules parmi celles qui ne portent pas le numéros i et j). Ainsi

$$\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \frac{\binom{2n-2}{n-2}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n-2)!}{(n-2)!n!} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)} = \frac{n-1}{2(2n-1)}$$

b) X_iX_j est à valeurs dans $\{0,1\}$, avec $\mathbb{P}(X_iX_j = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \dfrac{n-1}{2(2n-1)}$. C'est donc une variable de Bernoulli de paramètre $\dfrac{n-1}{2(2n-1)}$, ainsi

$$\mathbb{E}(X_iX_j) = \frac{n-1}{2(2n-1)}$$

et donc d'après la formule de Koenig-Huygens pour la covariance :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_i, X_j) &= \mathbb{E}(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) \\
&= \frac{n-1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{2n-2-(2n-1)}{4(2n-1)} \\
&\boxed{= \frac{-1}{4(2n-1)}}
\end{aligned}$$

3) Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \frac{n}{2}$$

et par propriété :

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{-1}{4(2n-1)}
\end{aligned}$$

Or il y a $\dfrac{n(n-1)}{2}$ couples (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ tels que $i < j$ donc :

$$\begin{aligned}
&= \frac{n}{4} + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{-1}{4(2n-1)} \\
&= \frac{n(2n-1) - n(n-1)}{4(2n-1)} \\
&= \frac{n^2}{4(2n-1)}
\end{aligned}$$

4) $Y = \sum_{i=1}^{n} iX_i$ donc $\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{n} iE(X_i)$ par linéarité de l'espérance.

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$$