⋆

Exercice 1 — Voir correction

On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y+z\ ,\ x-y+z\ ,\ z-2x) \end{array}$$

1) Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.
3) On considère la base $\mathcal{B} = ((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1))$.
   Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}(f)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0}(f)$, et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$

⋆

Exercice 2 — Voir correction

On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y, 2y-3x) \end{array}$$

1) Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$
3) On considère la base $\mathcal{B} = ((1,1),(0,2))$ de $\mathbb{R}^2$ et la base $\mathcal{B}' = ((1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)$ de $\mathbb{R}^3$.
   Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.
4) Montrer que f est injective.
5) Déterminer une base de $\mathrm{im}(f)$.

⋆

Exercice 3 — Voir correction

Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ données par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Vérifier que $A^2 = A$ et que $B^2 = B$
2) Déterminer le rang de A ainsi que la dimension du noyau de A
3) En notant I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que $I_2 - AB$ et que $A + B - AB$ sont inversibles.

⋆ ⋆

Exercice 4 — Voir correction

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme non nul. On suppose que $f^2 = 0$, c'est à dire que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $\mathrm{im}(f) \subset \ker(f)$
2) En déduire que $0 < \mathrm{rg}(f) \leq \dim(\ker(f)) < 3$
3) À l'aide du théorème du rang, déterminer $\mathrm{rg}(f)$ et $\dim(\ker(f))$.
4) Justifier qu'il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(u) \neq 0$.
5) On pose $v = f(u)$. Justifier qu'il existe $w \in \mathrm{Ker}(f)$ tel que (v,w) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
6) Montrer que (v,w,u) est une base de $\mathbb{R}^3$ qui répond au problème posé.

⋆

Exercice 5 — Voir correction

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que si f est une homothétie de E, alors la matrice représentative de f dans une base $\mathcal{B}$ de E ne dépend pas de la base choisie.

★
Exercice 6 — Voir correction

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que : $\forall \boldsymbol{x} \in E, \exists \lambda \in \mathbb{R}, f(\boldsymbol{x}) = \lambda \cdot \boldsymbol{x}$
Montrer que : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{x} \in E,\ f(\boldsymbol{x}) = \lambda \cdot \boldsymbol{x}$.

★ ★
Exercice 7 — Voir correction

On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y+z\ ,\ x-2y+z\ ,\ x+y\ ,\ 2x+z) \end{array}$$

1) Montrer que f est une application linéaire
2) Déterminer la matrice de f dans la base canonique
3) On pose :
$$\mathcal{B} = ((2,0,0),(0,2,0),(0,0,2)) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = ((1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(0,1,1,1))$$
Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$
4) Déterminer la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à la base canonique.
5) En déduire $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
6) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.

★
Exercice 8 — Voir correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient les matrices carrées de taille n suivante : $A = (2^{i+j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (i+j)_{1\leq i,j\leq n}$
1) Écrire A et B dans le cas $n = 5$
2) Déterminer le rang de A et le rang de B dans le cas général
3) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(A)$ et une base de $\mathrm{Ker}(B)$ dans le cas $n = 5$.

★ ★
Exercice 9 — Voir correction

Soit $n \geq 2$ un entier et soit $A = (\sin(i+j))_{1\leq i,j\leq n}$. Montrer que $\mathrm{rg}(A) \leq 2$.

★ ★
Exercice 10 — Voir correction

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
1) a) Calculer $(A-I)^2$
   b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.
2) On pose $u_1 = (f - \mathrm{Id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.
   a) Montrer que le rang de $(f - \mathrm{Id})$ est égal à 1. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
   b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$
3) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$
4) Déterminer la matrice T de f dans cette base.
5) Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible puis écrire la relation existant entre les matrices A, T, P et P^{-1}.

⋆ ⋆

Exercice 11 **Voir correction**

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée de taille n. On dit que A est une matrice stochastique si les deux conditions suivantes sont remplies :

- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j} \geq 0$
- $\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$

1) Soient A et B deux matrice stochastiques. Montrer que AB est stochastique.
2) On considère la matrice $A = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) Vérifier que A est stochastique.
   b) Justifier que A^n est stochastique.
   c) Calculer le rang de A.
   d) On pose $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (0,-1,1)$ et $e_3 = (-2,1,1)$ et X_1, X_2, X_3 les vecteurs colonnes correspondant. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$
   e) Exprimer AX_1, AX_2 et AX_3 en fonction de X_1, X_2 et X_3 et en déduire qu'il existe une matrice inversible P telle que :
   $$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} P^{-1}$$
   Préciser la matrice P et déterminer son inverse P^{-1}.
   f) Déterminer une expression de A^n en fonction de n.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 12 **Voir correction**

On veut démontrer dans cet exercice la formule d'inversion de Pascal : on suppose que (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$.

Le but de l'exercice est de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$$

1) Montrer que u définit bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Montrer que u est inversible d'inverse :
$$v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X-1) \end{array}$$
3) Exprimer les matrices de u et de v dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, \ldots, X^n)$.
4) On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$ et $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(v)$, et on note $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

   Montrer que $X^T = Y^T M$ et en déduire l'égalité voulue.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) Soient $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et $v=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ deux vecteurs, et soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
f(\lambda\cdot u+\mu\cdot v) &= f\big((\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z'\big)\\
&= \big((\lambda y+\mu y')+(\lambda z+\mu z')\ ,\ (\lambda x+\mu x')-(\lambda y+\mu y')+(\lambda z+\mu z')\ ,\ (\lambda z+\mu z')-2(\lambda x+\mu x')\big)\\
&= \big(\lambda y+\lambda z\ ,\ \lambda x-\lambda y+\lambda z\ ,\ \lambda z-2\lambda x\big)+\big(\mu y'+\mu z'\ ,\ \mu x'-\mu y'+\mu z'\ ,\ \mu z'-2\mu x'\big)\\
&= \lambda\cdot\big(y+z\ ,\ x-y+z\ ,\ z-2x\big)+\mu\cdot\big(y'+z'\ ,\ x'-y'+z'\ ,\ z'-2x'\big)\\
&= \lambda\cdot f(x,y,z)+\mu\cdot f(x',y',z')
\end{aligned}$$

Pour tout $u,v\in\mathbb{R}^3$, pour tout $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $f(\lambda\cdot u+\mu\cdot v)=\lambda\cdot f(u)+\mu\cdot f(v)$ donc f est une application linéaire.

2) Soient $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$f(e_1)=(0,1,-2)\qquad;\qquad f(e_2)=(1,-1,0)\qquad;\qquad f(e_3)=(1,1,1)$$

donc la matrice de f dans la base canonique est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0}(f)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-1&1\\-2&0&1\end{pmatrix}$$

3) Notons $f_1=(1,1,0)$, $f_2=(0,1,1)$ et $f_3=(1,0,1)$ les vecteurs de la base $\mathcal{B}$. On cherche à exprimer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base (f_1,f_2,f_3).
On a

$$f(e_1)=(0,1,-2)=x\cdot f_1+y\cdot f_2+z\cdot f_3\iff\left\{\begin{array}{rcl}0&=&x+z\\1&=&x+y\\-2&=&y+z\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcl}x&=&\frac{3}{2}\\y&=&-\frac{1}{2}\\z&=&-\frac{5}{2}\end{array}\right.\qquad L_1\leftarrow L_1+L_2-L_3$$

donc $f(e_1)=\dfrac{3}{2}\cdot f_1-\dfrac{1}{2}\cdot f_2-\dfrac{5}{2}\cdot f_3$
On a ensuite

$$f(e_2)=(1,-1,0)=x\cdot f_1+y\cdot f_2+z\cdot f_3\iff\left\{\begin{array}{rcl}1&=&x+z\\-1&=&x+y\\0&=&y+z\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcl}x&=&0\\y&=&-1\\z&=&1\end{array}\right.$$

donc $f(e_2)=-f_2+f_3$
On a enfin

$$f(e_3)=(1,1,1)=x\cdot f_1+y\cdot f_2+z\cdot f_3\iff\left\{\begin{array}{rcl}1&=&x+z\\1&=&x+y\\1&=&y+z\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcl}x&=&\frac{1}{2}\\y&=&\frac{1}{2}\\z&=&\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

donc $f(e_3) = \frac{1}{2} \cdot f_1 + \frac{1}{2} \cdot f_2 + \frac{1}{2} \cdot f_3$.
Finalement, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 2 :

1) Soient $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et soient λ et μ deux réels.

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) &= f\big((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')\big) \\ &= \big(\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' \ , \ \lambda x + \mu x' - \lambda y - \lambda y' \ , \ 2\lambda y + 2\mu y' - 3\lambda x - 3\mu x'\big) \\ &= (\lambda x + \lambda y \ , \ \lambda x - \lambda y \ , \ 2\lambda y - 3\lambda x) + (\mu x' + \mu y' \ , \ \mu x' - \mu y' \ , \ 2\mu y' - 3\mu x') \\ &= \lambda \cdot (x + y, x - y, 2y - 3x) + \mu \cdot (x' + y', x' - y', 2y' - 3x') \\ &= \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v) \end{aligned}$$

pour tout $u, v \in \mathbb{R}^2$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a $f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v)$ donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$.

2) $f(1, 0) = (1, 1, -3)$ et $f(0, 1) = (1, -1, 2)$ donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

3) $f(1, 1) = (2, 0, -1)$. On cherche à exprimer ce vecteur dans la base $\mathcal{B}'$:

$$(2, 0, -1) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 2, 0) + z \cdot (0, 0, 3) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2 & = & x \\ 0 & = & 2y \\ -1 & = & 3z \end{array} \right.$$

d'où $f(1, 1) = 2 \cdot (1, 0, 0) + 0 \cdot (0, 2, 0) - \frac{1}{3}(0, 0, 3)$
$f(0, 2) = (2, -2, 4)$. On cherche à exprimer ce vecteur dans la base $\mathcal{B}'$:

$$(2, -2, 4) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 2, 0) + z \cdot (0, 0, 3) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2 & = & x \\ -2 & = & 2y \\ 4 & = & 3z \end{array} \right.$$

d'où $f(0, 2) = 2 \cdot (1, 0, 0) - 1 \cdot (0, 2, 0) + \frac{4}{3} \cdot (0, 0, 3)$
On en déduit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

4) f est une application linéaire donc f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (0, 0, 0)$, alors $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ x - y & = & 0 \\ 2y - 3x & = & 0 \end{array} \right.$ En additionnant les deux premières lignes de ce système on obtient $x = 0$ et en les soustrayant on obtient $y = 0$, donc l'unique solution est $(x, y) = (0, 0)$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ donc que f est injective.

5) Dans la base canonique, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ donc dans l'image de f est Vect $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Ces deux vecteurs sont clairement non colinéaires donc $\big((1, 1, -3), (1, -1, 2)\big)$ forme une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Correction de l'exercice 3 :

1) Calculons A^2 :

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-1)\times(-1)+(-2)\times 1 & (-1)\times(-2)+(-2)\times 2 \\ 1\times(-1)+2\times 1 & 1\times(-2)+2\times 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= A
\end{aligned}$$

On a donc bien $A^2 = A$

Calculons B^2 :

$$\begin{aligned}
B^2 &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\times 2+(-2)\times 1 & 2\times(-2)+(-2)\times(-1) \\ 1\times 2+(-1)\times 1 & 1\times(-2)+(-1)\times(-1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= B
\end{aligned}$$

On a donc bien $B^2 = B$

2) Les deux colonnes de A sont colinéaires, donc $\text{rg}(A) \leq 1$. Or A est non nulle donc $\text{rg}(A) = 1$.
D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(A)) + \text{rg}(A) = 2$ donc $\dim(\text{Ker}(A)) = 2 - 1 = 1$.

3) Calculons $I_2 - AB$:

$$\begin{aligned}
I_2 - AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On a donc $\det(I_2 - AB) = 5 \times 5 - (-4) \times (-4) = 9 \neq 0$ donc $I_2 - AB$ est inversible.

Calculons $A + B - AB$:

$$\begin{aligned}
A + B - AB &= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc $\det(A + B - AB) = 5 \times 5 - (-2) \times (-8) = 9 \neq 0$ donc $A + B - AB$ est inversible.

Correction de l'exercice 4 :

1) $f^2 = 0$ donc pour tout $x \in E$, $f(f(x)) = 0_E$.
Soit $y \in \text{im}(f)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ainsi, $f(y) = f(f(x)) = f^2(x) = 0_E$, donc $y \in \ker(f)$.
Pour tout $y \in \text{im}(f)$, $y \in \ker(f)$ donc $\text{im}(f) \subset \ker(f)$.

2) On a $\text{im}(f) \subset \ker(f)$ donc $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\ker(f))$, c'est à dire $\text{rg}(f) \leq \dim(\ker(f))$.
De plus, $\text{rg}(f) > 0$ car f est non nulle. (si $\text{rg}(f) = 0$, alors $\text{Im}(f) = \{0_E\}$ donc $f = 0$).
Enfin, pour la même raison, $\dim(\text{Ker}(f)) < 3$. En effet, si on avait $\dim(\text{Ker}(f)) = 3$ alors on aurait $\text{Ker}(f) = E$ donc $f = 0$.
Finalement, on a bien $0 < \text{rg}(f) \leq \dim(\text{Ker}(f)) < 3$.

3) D'après la question précédente, on a $\mathrm{rg}(f) \in \{1, 2\}$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \in \{1, 2\}$.
D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E) = 3$.
Ainsi, $\mathrm{rg}(f) = 3 - \dim(\mathrm{Ker}(f))$. La seule solution possible est alors $\mathrm{rg}(f) = 1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$.

4) f est non nulle donc la proposition
$$\forall u \in \mathbb{R}^3, f(u) = 0$$
est fausse, ce qui signifie que la proposition contraire
$$\exists u \in \mathbb{R}^3, f(u) \neq 0$$
est vraie.

5) $v = f(u)$ donc $f(v) = f^2(u) = 0$. Ainsi, $v \in \mathrm{Ker}(f)$. On sait que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$ d'après la question 3 donc d'après le théorème de la base incomplète il existe un vecteur non nul $w \in \mathrm{Ker}(f)$ tel que (v, w) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

6) Les trois vecteurs v, w et u sont non nuls par construction.
Montrons que (v, w, u) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot w + \lambda_3 \cdot u = 0_E$.
Alors
$$f(\lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot w + \lambda_3 \cdot u) = f(0_E) = 0_E$$
donc
$$\lambda_1 \cdot f(v) + \lambda_2 \cdot f(w) + \lambda_3 \cdot f(u) = 0_E$$
et ainsi
$$\lambda_3 \cdot f(u) = 0_E$$
puisque $f(u) \neq 0$ on en déduit que $\lambda_3 = 0$.
On a donc $\lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot w = 0_E$, et comme v, w est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ c'est une famille libre, on en déduit que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
Finalement, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ donc (v, w, u) est une famille libre.
De plus, $f(v) = f(w) = 0$ et $f(u) = v$ donc la matrice de f dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 7 :

1) Soient (x, y, z) et (x', y', z') deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et soient λ et μ deux réels.
$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot (x, y, z) + \mu \cdot (x', y', z')) =& f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \\ =& (3\lambda x + 3\mu x' + \lambda y + \mu y' + \lambda z + \mu z', \lambda x + \mu x' - 2\lambda y - 2\mu y', \\ \lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y', 2\lambda x + 2\mu x' + \lambda z + \mu z') \\ =& \lambda \cdot (3x + y + z, x - 2y + z, x + y, 2x + z) + \mu \cdot (3x' + y' + z', x' - 2y' + z', x' + y' \\ =& \lambda \cdot f(x, y, z) + \mu \cdot f(x', y', z') \end{aligned}$$
donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$.

2) Dans la base canonique $\mathcal{B}_0$, la matrice de f est
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Pour tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a $(x, y, z) = \frac{x}{2} \cdot (2, 0, 0) + \frac{y}{2} \cdot (0, 2, 0) + \frac{z}{2} \cdot (0, 0, 2)$ donc $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
Montrons que $\mathcal{B}'$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que
$$\lambda_1 \cdot (1, 1, 1, 0) + \lambda_2 \cdot (1, 1, 0, 1) + \lambda_3 \cdot (1, 0, 1, 1) + \lambda_4 \cdot (0, 1, 1, 1)$$
donc $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ est solution du système $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \end{cases}$

$$\left\{\begin{array}{rcl}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &=& 0\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_4 &=& 0\\ \lambda_1+\lambda_3+\lambda_4 &=& 0\\ \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 &=& 0\end{array}\right. \underset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{\overset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcl}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &=& 0\\ -\lambda_3+\lambda_4 &=& 0\\ -\lambda_2+\lambda_4 &=& 0\\ \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 &=& 0\end{array}\right.$$

$$\overset{L_4\leftarrow L_4+L_3}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &=& 0\\ -\lambda_3+\lambda_4 &=& 0\\ -\lambda_2+\lambda_4 &=& 0\\ \lambda_3+2\lambda_4 &=& 0\end{array}\right.$$

$$\overset{L_4\leftarrow L_4+L_2}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &=& 0\\ -\lambda_3+\lambda_4 &=& 0\\ -\lambda_2+\lambda_4 &=& 0\\ 3\lambda_4 &=& 0\end{array}\right.$$

en remontant les équations on trouve $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$, donc $\mathcal{B}'$ est une famille libre à 4 éléments de $\mathbb{R}^4$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

4) La matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ est $P_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

Cherchons à exprimer les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$:
On remarque que

$$(1,1,1,0)+(1,1,0,1)+(1,0,1,1)=(3,2,2,2)$$

donc

$$(1,1,1,0)+(1,1,0,1)+(1,0,1,1)-2\cdot(0,1,1,1)=(3,0,0,0)$$

finalement,

$$(1,0,0,0)=\frac{1}{3}\cdot(1,1,1,0)+\frac{1}{3}\cdot(1,1,0,1)+\frac{1}{3}\cdot(1,0,1,1)-\frac{2}{3}\cdot(0,1,1,1)=(1,0,0,0)$$

De même, on a

$$\begin{aligned}(0,1,0,0)&=\frac{1}{3}\cdot(1,1,1,0)+\frac{1}{3}\cdot(1,1,0,1)+\frac{1}{3}(0,1,1,1)-\frac{2}{3}\cdot(1,0,1,1)\\ (0,0,1,0)&=\frac{1}{3}\cdot(1,1,1,0)+\frac{1}{3}\cdot(1,0,1,1)+\frac{1}{3}(0,1,1,1)-\frac{2}{3}\cdot(1,1,0,1)\\ (0,0,0,1)&=\frac{1}{3}\cdot(1,1,0,1)+\frac{1}{3}\cdot(1,0,1,1)+\frac{1}{3}(0,1,1,1)-\frac{2}{3}\cdot(1,1,1,0)\end{aligned}$$

donc la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à la base canonique est

$$P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_0}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\1&1&-2&1\\1&-2&1&1\\-2&1&1&1\end{pmatrix}$$

5) On utilise la même notation $\mathcal{B}_0$ pour la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et celle de $\mathbb{R}^4$ mais il n'y a pas d'ambiguité dans les notations des matrices de passage et on a d'après le cours :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)=P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_0}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0}(f)P_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}}$$

donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\1&1&-2&1\\1&-2&1&1\\-2&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\\1&-2&1\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & -6 & 6 \\ 8 & 12 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6) Intéressons-nous d'abord au rang de f, on cherche une matrice échelonnée équivalente à $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{\substack{L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3}L_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ est équivalente à une matrice de rang 3 donc est de rang 3. On en conclut que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$ donc d'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = 0$, ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

De plus, une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ est $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et puisque $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 3 cette famille est aussi une base de $\mathrm{Im}(f)$. Finalement, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left((3,1,1,2),(1,-2,1,0),(1,1,0,1)\right)$ et $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Correction de l'exercice 8 :

1) $A = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 & 2^6 \\ 2^3 & 2^4 & 2^5 & 2^6 & 2^7 \\ 2^4 & 2^5 & 2^6 & 2^7 & 2^8 \\ 2^5 & 2^6 & 2^7 & 2^8 & 2^9 \\ 2^6 & 2^7 & 2^8 & 2^9 & 2^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 16 & 32 & 64 \\ 8 & 16 & 32 & 64 & 128 \\ 16 & 32 & 64 & 128 & 256 \\ 32 & 64 & 128 & 256 & 512 \\ 64 & 128 & 256 & 512 & 1024 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

2) Étudions d'abord le cas $n = 5$.

En faisant les opérations $\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2^2 L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2^3 L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 2^4 L_1 \end{array}$, la matrice A est équivalente à la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 16 & 32 & 64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc A est de rang 1.
Dans le cas général, l'opération $L_i \leftarrow 2^{i-1}L_1$ annule la ligne i, donc A est équivalente à une matrice dont la première ligne est $\begin{pmatrix}2^2 & 2^3 & 2^4 & \cdots & 2^n\end{pmatrix}$ et toutes les autres lignes sont nulles, ainsi A est de rang 1 quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour la matrice B, dans le cas $n = 5$, on a les équivalence suivantes :

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10\end{pmatrix} \xleftrightarrow[L_5 \leftarrow 2L_5 - 6L_1]{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1\\ L_3 \leftarrow 2L_3 - 4L_1\\ L_4 \leftarrow 2L_4 - 5L_1}} \begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4\\ 0 & -2 & -4 & -6 & -8\\ 0 & -3 & -6 & -9 & -12\\ 0 & -4 & -8 & -12 & -16\end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[L_5 \leftarrow L_5 - 4L_2]{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2\\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2}} \begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

donc B est de rang 2.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, pour tout $i \geq 2$ entier, on fait $L_i \leftarrow 2L_i - (i+1)L_1$. Après ces opérations, la i-ème ligne est :

$$\begin{aligned} L_i &= \big(2(i+j) - (i+1)(1+j)\big)_{1 \leqslant j \leqslant n}\\ &= \big(i + j - ij - 1\big)_{1 \leqslant j \leqslant n}\\ &= \big((i-1)(1-j)\big)_{1 \leqslant j \leqslant n}\\ &= (i-1) \times \big(1-j\big)_{1 \leqslant j \leqslant n} \end{aligned}$$

donc $L_2 = \begin{pmatrix}0 & -1 & -2 & \cdots & -(n-1)\end{pmatrix}$, et pour tout $i \geqslant 3$, $L_i = (i-1) \times L_2$, donc les $(n-1)$ dernières lignes forment une famille de rang 1, ainsi B est de rang 2.
Autrement dit, on peut faire les opérations $L_i \leftarrow L_i - (i-1)L_2$ pour tout $i \geq 3$ et on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & \cdots & n+1\\ 0 & -1 & -2 & \cdots & -(n-1)\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

qui est de rang 2

3) Dans le cas $n = 5$, $\mathrm{rg}(A) = 1$ donc d'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 5 - 1 = 4$.

Soit $X = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\\ u\end{pmatrix}$ un vecteur colonne de taille 5.

$X \in \mathrm{Ker}(A) \iff \left\{\begin{array}{rcl} 4x + 8y + 16z + 32t + 64u &=& 0\\ 8x + 16y + 32z + 64t + 128u &=& 0\\ 16x + 32y + 64z + 128t + 256u &=& 0\\ 32x + 64y + 128z + 256t + 512u &=& 0\\ 64x + 128y + 256z + 512t + 1024u &=& 0 \end{array}\right. \iff 4x+8y+16z+32t+64u = 0$ d'après les opérations faites dans la question 2.

Ainsi, $X \in \mathrm{Ker}(A) \iff x = -2y - 4z - 8t - 32u \iff X = y \cdot \begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix}-4\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-8\\ 0\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix}-16\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

Ainsi, une base de $\mathrm{Ker}(A)$ est $\left(\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-8\\ 0\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-16\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right)$

De même,

$$
\begin{aligned}
X \in \operatorname{Ker}(B) &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y+4z+5t+6u &=& 0 \\ -y-2z-3t-4u &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -\frac{3}{2}y-2z-\frac{5}{2}t-3u \\ y &=& -2z-3t-4u \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& z+2t \\ y &=& -2z-3t-4u \end{array}\right. \\
&\iff (x,y,z,t,u) = z\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\\0\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}0\\-4\\0\\0\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

donc une base de $\operatorname{Ker}(B)$ est $\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-4\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

Correction de l'exercice 9 :

Pour tout couple d'entiers (i,j) on a $\sin(i+j) = \sin(i)\cos(j) + \sin(j)\cos(i)$.
Ainsi, la i-ème ligne de A définie par $L_i = (\sin(i+j))_{1\leqslant j\leqslant n}$ peut s'écrire :

$$L_i = \sin(i)\times L_c + \cos(i)\times L_s$$

avec $L_c = (\cos(j))_{1\leqslant j\leqslant n}$ et $L_s = (\sin(j))_{1\leqslant j\leqslant n}$.
Toutes les lignes de A peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de L_c et L_s, donc $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(\operatorname{Vect}(L_c, L_s))$, ainsi $\operatorname{rg}(A) \leq 2$.

Correction de l'exercice 10 :

1) a) $(A-I)^2 = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

b) $(A-I)^2 = A^2 - AI - IA + I^2 = A^2 - 2A + I$.
Or, d'après la question précédente, $(A-I)^2 = 0$ donc $A^2 - 2A + I = 0$. On en déduit que $2A - A^2 = I$ donc $A(2I - A) = I$.
Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = 2I - A$.

2) a) La matrice de $f - \operatorname{Id}$ est $A - I$.
Calculons le rang de $A - I$:

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix} \xleftrightarrow[L_3\leftarrow L_3+L_1]{L_2\leftarrow L_2-2L_1} \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

donc $A - I$ est de rang 1, ainsi, $\operatorname{rg}(f - \operatorname{Id}) = 1$.
D'après le théorème du rang $\dim(\operatorname{Ker}(f-\operatorname{Id})) = 3 - \operatorname{rg}(f-\operatorname{Id}) = 3 - 1 = 2$.

b) Montrons d'abord que $u_1 \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$ et $u_2 \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$.

$$
\begin{aligned}
(f-\operatorname{Id})(u_1) &= f(u_1) - u_1 \\
&= f(f-\operatorname{Id})(e_1) - (f-\operatorname{Id})(e_1) \\
&= f(f(e_1)) - e_1) - f(e_1) + e_1 \\
&= f(-2e_2 + e_3) - f(e_1) - (-2e_2 + e_3) + e_1 && \text{d'après la matrice de } f \text{ dans la base } \mathcal{B}. \\
&= -2f(e_2) + f(e_3) - (-2e_2 + e_3) + 2e_2 - e_3 + e_1 \\
&= -2(e_1 + 3e_2 - e_3) + e_1 + 2e_2 + 2e_2 - e_3 + 2e_2 - e_3 + e_1
\end{aligned}
$$

$= 0$

donc $u_1 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
De même :

$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id})(u_2) &= (f-\mathrm{Id})(e_1+e_3)\\ &= f(e_1)+f(e_3)-e_1-e_3\\ &= -2e_2+e_3+e_1+2e_2-e_1-e_3\\ &= 0\end{aligned}$$

donc $u_2 \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$. Puisque $\dim(\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}))$ est de dimension 2, il suffit de montrer soit que (u_1, u_2) est libre, soit que (u_1, u_2) est génératrice de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
Montrons que c'est une famille libre : on suppose qu'il existe deux réels λ et μ tels que $\lambda \cdot u_1 + \mu \cdot u_2 = 0$.
Alors $\lambda \cdot f(e_1) - \lambda \cdot e_1 + \mu \cdot e_1 + \mu \cdot e_3 = 0$ par définition de u_1 et de u_2.
Or, $f(e_1) = -2e_2 + e_3$ d'après la matrice de f dans la base canonique (e_1, e_2, e_3). Ainsi on a

$$\lambda \cdot (-2e_2 + e_3) - \lambda \cdot e_1 + \mu \cdot e_1 + \mu \cdot e_3 = 0$$

donc finalement

$$(\mu - \lambda) \cdot e_1 - 2\lambda \cdot e_2 + (\lambda + \mu) \cdot e_3$$

Puisque (e_1, e_2, e_3) est une base, c'est une famille libre donc $\left\{\begin{array}{rcl}\mu-\lambda &=& 0\\ -2\lambda &=& 0\\ \lambda+\mu &=& 0\end{array}\right.$. La seule solution de ce système est $(\lambda, \mu) = (0, 0)$, donc $\lambda = \mu = 0$, il en découle que la famille (u_1, u_2) est libre et donc que c'est une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.

3) Montrons que (u_1, u_2, e_1) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois réels tels que $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot e_1 = 0$. Alors

$$\lambda_1 \cdot (f(e_1) - e_1) + \lambda_2 \cdot (e_1 + e_3) + \lambda_3 \cdot e_1 = 0$$

donc

$$\lambda_1 \cdot (-2e_2 + e_3) - e_1) + \lambda_2 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_3 + \lambda_3 \cdot e_1 = 0$$

et finalement

$$(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \cdot e_1 + (-2\lambda_1) \cdot e_2 + (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot e_3 = 0$$

Comme (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est solution du système $\left\{\begin{array}{rcl}-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &=& 0\\ -2\lambda_1 &=& 0\\ \lambda_1+\lambda_2 &=& 0\end{array}\right.$
donc que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Ainsi, la famille (u_1, u_2, e_1) est une famille libre à 3 éléments de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

4) Dans cette base, $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_2$ puisque $u_1, u_2 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
De plus, $f(e_1) = u_1 + e_1$ car $u_1 = (f - \mathrm{Id})(e_1)$.
Ainsi, la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, e_1) est $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

5) On résout $PX = Y$ avec $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}PX = Y &\iff \left\{\begin{array}{rcl}-x+y+z &=& x'\\ -2x &=& y'\\ x+y &=& z'\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl}2y+z &=& x'+z'\\ x &=& -\frac{1}{2}y'\\ y &=& z'+\frac{1}{2}y'\end{array}\right.\end{aligned}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} z &=& x'-z'-y' \\ x &=& -\frac{1}{2}y' \\ y &=& z'+\frac{1}{2}y \end{array}\right.$$

donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, e_1)$. Ainsi, d'après le cours on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)P$$

d'où

$$T = P^{-1}AP$$

Correction de l'exercice 11 :

1) a) Supposons que A et B soient deux matrices stochastiques de taille n.
Alors pour tout i,j, $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k}B_{k,j}$, donc pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(AB)_{i,j} \geq 0$ comme produit de termes positifs.
De plus, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n (AB)_{i,j} &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{i,k}B_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n A_{i,k}B_{k,j}\right) && \text{car les sommes sont finies} \\
&= \sum_{k=1}^n \left(A_{i,k}\sum_{j=1}^n B_{k,j}\right) \\
&= \sum_{k=1}^n A_{i,k} && \text{car } B \text{ est stochastique} \\
&= 1 && \text{car } A \text{ est stochastique}
\end{aligned}$$

b) Tous les coefficients de A sont positifs.
$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$
$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{5}{8}=1$
$\frac{1}{4}+\frac{5}{8}+\frac{1}{8}=1$
donc A est stochastique.

c) D'après la question 1, le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique donc par récurrence immédiate A^n est stochastique quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

d) On a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}
&\xleftrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow 4L_1 \\ L_2 \leftarrow 8L_2 \\ L_3 \leftarrow 8L_3}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xleftrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xleftrightarrow{L3 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc A est de rang 3.

e) Montrons que (e_1, e_2, e_3) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois réels tels que $\lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \lambda_3 \cdot e_3 = (0,0,0)$.
Alors $\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{cases}$ On en déduit que $\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{cases}$ donc que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Ainsi, (e_1, e_2, e_3) est une famille libre de cardinale 3 de $\mathbb{R}^3$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

f) $AX_1 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = X_1$

$AX_2 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}X_2$

$AX_3 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}X_3$.

On en déduit que dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, l'application f canoniquement associée à A a pour matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

puisque $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = -\frac{1}{2}e_2$ et $f(e_3) = \frac{1}{4}e_3$.

Ainsi, si on note P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, on a $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}P^{-1}$.

Correction de l'exercice 12 :

1) Pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(X+1) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k$ est encore un polynôme de degré inférieur ou égal à n, donc $u(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
De plus, pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1 \\ &= \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q) \end{aligned}$$

donc u est linéaire, c'est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$u(v(P)) = u(P(X-1)) = P((X-1)+1) = P(X)$$

donc $u \circ v = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ donc u est inversible d'inverse v.

3) On a $u(1) = 1$, $u(X) = X+1$, $u(X^2) = (X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$, et pour tout $j \in [\![0, n]\!]$,

$$u(X^j) = (X+1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i$$

De même, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$,

$$v(X^j) = (X-1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i (-1)^{j-i}$$

Soit $M = (m_{i,j}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$ et $N = (n_{i,j}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(v)$. Alors M et N sont des matrices triangulaires supérieures et :

$$\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2, m_{i+1,j+1} = \begin{cases} \binom{j}{i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases} \quad \text{et} \quad n_{i+1,j+1} = \begin{cases} \binom{j}{i}(-1)^{j-i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

Par produit de matrices on a $Y^T M = \left(\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} b_i\right)_{0 \leq j \leq n} = (a_j)_{0 \leq j \leq n} = X^T$ par hypothèses sur (a_n) et (b_n).

En multipliant à droite par N on obtient donc $Y^T = X^T N$ donc $Y^T = \left(\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i}(-1)^{j-i}\right)_{0 \leq j \leq n}$ d'où $b_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(-1)^{n-i} a_i$, et ceci est vrai quel que soit $n \in \mathbb{N}$.