

## TD 8 : Analyse réelle (Indications)

### Indications pour l'exercice 1 :

1. Composition de DL : si  $f(x) = P(x) + o(x^3)$  et  $g(x) = \sum_{k=0}^3 a_k x^k + o(x^3)$  avec  $P$  un polynôme de degré 3, alors  $g(f(x)) = \sum_{k=0}^3 a_k (P^k(x))_3 + o(x^3)$  où  $(P^k(x))_3$  est le polynôme  $P(X)^k$  dans lequel les termes de degré strictement plus grand que 3 sont tronqués.
2. Rappel : si  $a > 0$  et  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a^b := e^{b \ln(a)}$
3. Se ramener à une expression de la forme  $\frac{1}{1+f(x)}$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .
4. Remarquer que  $\frac{1}{e^x}$  peut s'écrire  $\frac{1}{1+f(x)}$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

### Indications pour l'exercice 2 :

1. Rappel : si  $a > 0$  et  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a^b := e^{b \ln(a)}$
2. Idem.
3. Poser le changement de variable  $u = x - 1$  pour se ramener à des DL en 0
4. Ramener le premier terme à une expression de la forme  $\frac{1}{1+f(x)}$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

### Indications pour l'exercice 3 :

Dans chaque cas il faut trouver un équivalent de la forme  $\frac{1}{n^\alpha}$  et comparer avec une série de Riemann.

### Indications pour l'exercice 4 :

1. Faire l'étude du dénominateur de  $f$
2. **Attention** : il faut partir d'un DL à l'ordre 4 des différentes fonctions qui composent  $f$
3. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$  à l'aide du DL précédent
4. Montrer que  $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$  admet une limite en 0 à l'aide du DL précédent.
5. Étudier le terme d'ordre 2 (s'il est nul le terme d'ordre 3, et ainsi de suite) du DL pour connaître la position relative au voisinage d'un point.

### Indications pour l'exercice 5 :

1. Justifier la continuité sur  $] -\infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$  et montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ .
2. Justifier la dérivabilité sur  $] -\infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$  et montrer que  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$  a une limite finie quand  $x$  tend vers 0.
3. Montrer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f'(x) \neq f'(0)$ .

### Indications pour l'exercice 6 :

1. Factoriser par  $x^2$  et utiliser un DL de  $\sqrt{1 - \frac{9}{x} + \frac{8}{x^2}}$ .
2. Trouver d'abord un développement limité de  $\exp\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right)$  en fonction de  $\frac{1}{x}$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

### Indications pour l'exercice 7 :

Déterminer une expression simplifiée de  $P'$  et montrer que  $P'$  n'a qu'une seule racine :  $-1$ .

Montrer que la suite définie par  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$  est à valeurs strictement négative (on peut par exemple étudier les suites définies par  $a_n = u_{2n}$  et  $b_n = u_{2n+1}$  et montrer qu'elles sont adjacentes).

### Indications pour l'exercice 8 :

1. Montrer que  $\overline{P(\lambda)} = P(\overline{\lambda})$  en posant les coefficients de  $P$ .
2. Utiliser le fait que  $P$  est scindé dans  $\mathbb{C}$ .

#### Indications pour l'exercice 9 :

1. Reconnaître une dérivée de la forme  $(e^{u(x)})'$
2. Faire une IPP en utilisant  $(1+t)' = 1$
3. Faire deux IPP successives
4. Reconnaître une dérivée de la forme  $(u(x)^n)'$ .
5. Reconnaître une dérivée de la forme  $\left(\frac{1}{v(x)}\right)'$ .
6. Reconnaître une dérivée de la forme  $(u \circ v)'(x)$  ou bien poser le changement de variable  $u = \sqrt{x}$ .

#### Indications pour l'exercice 10 :

1. Justifier l'existence de l'intégrale pour tout entier  $n$ , comparer les fonctions définies par  $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}}$  et  $f_{n+1}(x) = \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n+1}}$  et utiliser la croissance de l'intégrale.
2. Minorer  $e^{-x}$  pour l'une, majorer (bêtement)  $\frac{1}{x + \frac{1}{n}}$  pour l'autre.
3. Remarquer que  $u_n = v_n + w_n \geq v_n$
4. (a) Une seule impropriété en 0 résolue par un DL  
(b) S'obtient par une simple comparaison de fonctions à intégrer.  
(c) Montrer grâce à l'encadrement précédent que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ln(n+1)} = 1$ , et redémontrer que  $\ln(n+1) \sim \ln(n)$ .

#### Indications pour l'exercice 11 :

1. Pour que l'intégrale ait un sens, il faut que la fonction à intégrer soit bien définie sur le domaine d'intégration, et que l'intégrale converge si l'une des bornes n'est pas dans le domaine de définition.
2.  $f(x) = G(x^2) - G(x)$  pour toute primitive  $G$  de la fonction  $g : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ .
3. Montrer que  $t \mapsto \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}$  se prolonge par continuité en 1, puis déterminer une expression explicite de  $g(x)$ .
4. Utiliser à nouveau la fonction  $g$  en montrant que  $\frac{f(x) - g(x)}{x-1}$  et  $\frac{g(x) - f(1)}{x-1}$  admettent des limites. Quantifier au voisinage de 1 à l'aide de la limite précédente.

#### Indications pour l'exercice 12 :

1. Penser au théorème des bornes atteintes.
2. À cause de l'hypothèse sur  $f$ , si  $y = f(x)$ , alors  $f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$ .
3. Montrer que si  $a \in ]0; 1[$  alors  $f'(a) = 0$  et aboutir à une contradiction, raisonner de façon analogue pour  $b$ .
4. Si  $f$  est seulement continue, la condition de la question 2 est une condition suffisante.

#### Indications pour l'exercice 13 :

1. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ .
2. Opérations sur les fonctions  $\mathcal{C}^\infty$
3. Raisonner par récurrence, sans détailler l'expression du polynôme.
4. Montrer par récurrence la propriété  $\mathcal{P}(n)$  : «  $f^{(n)}$  est dérivable et  $f^{(n)}(0) = 0$  »

#### Indications pour l'exercice 14 :

1.  $u_0$  est un calcul direct et  $u_1$  nécessite une intégration par partie.
2. (a) Pour  $x \in [0; 1]$  on a  $1 \leq e^{1-x} \leq e$   
(b) Théorème d'encadrement.
3. (a) Faire une intégration par partie.  
(b) Par récurrence.
4. Étudier la suite  $(u_n - v_n)_{n \geq 0}$ .
5. (a) Exprimer  $u_{n+2}$  en fonction de  $u_n$  puis inverser la relation.  
(b) **Attention** : aussi tentant que cela puisse être on **n'additionne pas** des équivalents. Factoriser dans les fractions pour se ramener à des DL de la forme  $\frac{1}{1+x_n}$  avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ .

#### Indications pour l'exercice 15 :

1. Montrer que l'équation  $x^n = 2x + 1$  n'a pas de solution sur  $[0; 1[$  puis étudier la fonction définie par  $f_n(x) = x^n - 2x - 1$  sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ .
2. Étudier le signe de  $f_{n+1}(u_n)$
3. Raisonner par l'absurde en supposant que  $\ell > 1$ .
4. (a) Repartir de l'équation qui définit  $u_n$ .  
(b) Utiliser un équivalent simple de  $\ln(1 + \varepsilon_n)$ .

#### Indications pour l'exercice 16 :

1. Appliquer le TVI après avoir vérifié les hypothèses.
2. Étudier le signe de  $f_{n+1}(u_n)$  pour montrer ensuite que  $u_n \leq u_{n+1}$ . Raisonner ensuite par l'absurde pour montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
3. Poser  $g(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$  et montrer que  $g$  est constante.
4. Utiliser l'égalité précédente, l'égalité  $u_n - \arctan(u_n) - n^\alpha = 0$ , et l'équivalent  $\arctan(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ .