⋆

Exercice 1 — Voir correction

On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y+z\ ,\ x-y+z\ ,\ z-2x) \end{array}$$

1) Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.
3) On considère la base $\mathcal{B} = ((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1))$.
Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}(f)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0}(f)$, et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$

⋆

Exercice 2 — Voir correction

On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y, 2y-3x) \end{array}$$

1) Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$
3) On considère la base $\mathcal{B} = ((1,1),(0,2))$ de $\mathbb{R}^2$ et la base $\mathcal{B}' = ((1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)$ de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.
4) Montrer que f est injective.
5) Déterminer une base de $\mathrm{im}(f)$.

⋆

Exercice 3 — Voir correction

Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ données par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Vérifier que $A^2 = A$ et que $B^2 = B$
2) Déterminer le rang de A ainsi que la dimension du noyau de A
3) En notant I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que $I_2 - AB$ et que $A + B - AB$ sont inversibles.

⋆ ⋆

Exercice 4 — Voir correction

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme non nul. On suppose que $f^2 = 0$, c'est à dire que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $\mathrm{im}(f) \subset \ker(f)$
2) En déduire que $0 < \mathrm{rg}(f) \leq \dim(\ker(f)) < 3$
3) À l'aide du théorème du rang, déterminer $\mathrm{rg}(f)$ et $\dim(\ker(f))$.
4) Justifier qu'il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(u) \neq 0$.
5) On pose $v = f(u)$. Justifier qu'il existe $w \in \mathrm{Ker}(f)$ tel que (v, w) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
6) Montrer que (v, w, u) est une base de $\mathbb{R}^3$ qui répond au problème posé.

⋆

Exercice 5 — Voir correction

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que si f est une homothétie de E, alors la matrice représentative de f dans une base $\mathcal{B}$ de E ne dépend pas de la base choisie.

⋆

Exercice 6 — Voir correction

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que : $\forall \boldsymbol{x} \in E, \exists \lambda \in \mathbb{R}, f(\boldsymbol{x}) = \lambda \cdot \boldsymbol{x}$
Montrer que : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{x} \in E,\ f(\boldsymbol{x}) = \lambda \cdot \boldsymbol{x}$.

⋆ ⋆

Exercice 7 — Voir correction

On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+y+z\ ,\ x-2y+z\ ,\ x+y\ ,\ 2x+z) \end{array}$$

1) Montrer que f est une application linéaire
2) Déterminer la matrice de f dans la base canonique
3) On pose :
$$\mathcal{B} = ((2,0,0),(0,2,0),(0,0,2)) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = ((1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(0,1,1,1))$$
Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$
4) Déterminer la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à la base canonique.
5) En déduire $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
6) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.

⋆

Exercice 8 — Voir correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient les matrices carrées de taille n suivante : $A = (2^{i+j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (i+j)_{1\leq i,j\leq n}$
1) Écrire A et B dans le cas $n = 5$
2) Déterminer le rang de A et le rang de B dans le cas général
3) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(A)$ et une base de $\mathrm{Ker}(B)$ dans le cas $n = 5$.

⋆ ⋆

Exercice 9 — Voir correction

Soit $n \geq 2$ un entier et soit $A = (\sin(i+j))_{1\leq i,j\leq n}$. Montrer que $\mathrm{rg}(A) \leq 2$.

⋆ ⋆

Exercice 10 — Voir correction

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
1) a) Calculer $(A - I)^2$
   b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.
2) On pose $u_1 = (f - \mathrm{Id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.
   a) Montrer que le rang de $(f - \mathrm{Id})$ est égal à 1. En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
   b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$
3) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$
4) Déterminer la matrice T de f dans cette base.
5) Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible puis écrire la relation existant entre les matrices A, T, P et P^{-1}.

⋆⋆

Exercice 11 **Voir correction**

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée de taille n. On dit que A est une matrice stochastique si les deux conditions suivantes sont remplies :

- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j} \geq 0$
- $\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$

1) Soient A et B deux matrice stochastiques. Montrer que AB est stochastique.

2) On considère la matrice $A = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Vérifier que A est stochastique.
   b) Justifier que A^n est stochastique.
   c) Calculer le rang de A.
   d) On pose $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (0,-1,1)$ et $e_3 = (-2,1,1)$ et X_1, X_2, X_3 les vecteurs colonnes correspondant. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$
   e) Exprimer AX_1, AX_2 et AX_3 en fonction de X_1, X_2 et X_3 et en déduire qu'il existe une matrice inversible P telle que :
   $$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} P^{-1}$$
   Préciser la matrice P et déterminer son inverse P^{-1}.
   f) Déterminer une expression de A^n en fonction de n.

⋆⋆⋆

Exercice 12 **Voir correction**

On veut démontrer dans cet exercice la formule d'inversion de Pascal : on suppose que (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$.

Le but de l'exercice est de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$$

1) Montrer que u définit bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Montrer que u est inversible d'inverse :

$$v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X-1) \end{array}$$

3) Exprimer les matrices de u et de v dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, \ldots, X^n)$.

4) On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$ et $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(v)$, et on note $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

   Montrer que $X^T = Y^T M$ et en déduire l'égalité voulue.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

1) Soient $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ deux vecteurs, et soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) &= f\big((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z'\big) \\
&= \big((\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z')\ ,\ (\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z')\ ,\ (\lambda z + \mu z') - 2(\lambda x + \mu x')\big) \\
&= \big(\lambda y + \lambda z\ ,\ \lambda x - \lambda y + \lambda z\ ,\ \lambda z - 2\lambda x\big) + \big(\mu y' + \mu z'\ ,\ \mu x' - \mu y' + \mu z'\ ,\ \mu z' - 2\mu x'\big) \\
&= \lambda \cdot \big(y + z\ ,\ x - y + z\ ,\ z - 2x\big) + \mu \cdot \big(y' + z'\ ,\ x' - y' + z'\ ,\ z' - 2x'\big) \\
&= \lambda \cdot f(x, y, z) + \mu \cdot f(x', y', z')
\end{aligned}$$

Pour tout $u, v \in \mathbb{R}^3$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f(v)$ donc f est une application linéaire.

2) Soient $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$f(e_1) = (0, 1, -2) \quad ; \quad f(e_2) = (1, -1, 0) \quad ; \quad f(e_3) = (1, 1, 1)$$

donc la matrice de f dans la base canonique est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Notons $f_1 = (1, 1, 0)$, $f_2 = (0, 1, 1)$ et $f_3 = (1, 0, 1)$ les vecteurs de la base $\mathcal{B}$. On cherche à exprimer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base (f_1, f_2, f_3).
On a

$$f(e_1) = (0, 1, -2) = x \cdot f_1 + y \cdot f_2 + z \cdot f_3 \iff \begin{cases} 0 = x + z \\ 1 = x + y \\ -2 = y + z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{5}{2} \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 - L_3$$

donc $f(e_1) = \dfrac{3}{2} \cdot f_1 - \dfrac{1}{2} \cdot f_2 - \dfrac{5}{2} \cdot f_3$
On a ensuite

$$f(e_2) = (1, -1, 0) = x \cdot f_1 + y \cdot f_2 + z \cdot f_3 \iff \begin{cases} 1 = x + z \\ -1 = x + y \\ 0 = y + z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

donc $f(e_2) = -f_2 + f_3$
On a enfin

$$f(e_3) = (1, 1, 1) = x \cdot f_1 + y \cdot f_2 + z \cdot f_3 \iff \begin{cases} 1 = x + z \\ 1 = x + y \\ 1 = y + z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

donc $f(e_3) = \frac{1}{2}\cdot f_1 + \frac{1}{2}\cdot f_2 + \frac{1}{2}\cdot f_3$.
Finalement, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 2 :

1) Soient $u=(x,y)$ et $v=(x',y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et soient λ et μ deux réels.

$$\begin{aligned} f(\lambda\cdot u+\mu\cdot v) &= f\big((\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y')\big) \\ &= \big(\lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y'\ ,\ \lambda x+\mu x'-\lambda y-\lambda y'\ ,\ 2\lambda y+2\mu y'-3\lambda x-3\mu x'\big) \\ &= (\lambda x+\lambda y\ ,\ \lambda x-\lambda y\ ,\ 2\lambda y-3\lambda x)+(\mu x'+\mu y'\ ,\ \mu x'-\mu y'\ ,\ 2\mu y'-3\mu x') \\ &= \lambda\cdot(x+y, x-y, 2y-3x)+\mu\cdot(x'+y', x'-y', 2y'-3x') \\ &= \lambda\cdot f(u)+\mu\cdot f(v) \end{aligned}$$

pour tout $u,v\in\mathbb{R}^2$ et tout $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ on a $f(\lambda\cdot u+\mu\cdot v)=\lambda\cdot f(u)+\mu\cdot f(v)$ donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$.

2) $f(1,0)=(1,1,-3)$ et $f(0,1)=(1,-1,2)$ donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

3) $f(1,1)=(2,0,-1)$. On cherche à exprimer ce vecteur dans la base $\mathcal{B}'$:

$$(2,0,-1) = x\cdot(1,0,0)+y\cdot(0,2,0)+z\cdot(0,0,3) \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2 &=& x \\ 0 &=& 2y \\ -1 &=& 3z \end{array}\right.$$

d'où $f(1,1) = 2\cdot(1,0,0)+0\cdot(0,2,0)-\frac{1}{3}(0,0,3)$
$f(0,2)=(2,-2,4)$. On cherche à exprimer ce vecteur dans la base $\mathcal{B}'$:

$$(2,-2,4) = x\cdot(1,0,0)+y\cdot(0,2,0)+z\cdot(0,0,3) \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2 &=& x \\ -2 &=& 2y \\ 4 &=& 3z \end{array}\right.$$

d'où $f(0,2) = 2\cdot(1,0,0)-1\cdot(0,2,0)+\frac{4}{3}\cdot(0,0,3)$
On en déduit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

4) f est une application linéaire donc f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f)=\{0_{\mathbb{R}^2}\}$.
Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y)=(0,0,0)$, alors $\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 0 \\ x-y &=& 0 \\ 2y-3x &=& 0 \end{array}\right.$ En additionnant les deux premières lignes de ce système on obtient $x=0$ et en les soustrayant on obtient $y=0$, donc l'unique solution est $(x,y)=(0,0)$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$ donc que f est injective.

5) Dans la base canonique, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ donc dans l'image de f est Vect $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Ces deux vecteurs sont clairement non colinéaires donc $\big((1,1,-3),(1,-1,2)\big)$ forme une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Correction de l'exercice 3 :

1) Calculons A^2 :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)\times(-1)+(-2)\times 1 & (-1)\times(-2)+(-2)\times 2 \\ 1\times(-1)+2\times 1 & 1\times(-2)+2\times 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

On a donc bien $A^2 = A$

Calculons B^2 :

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\times 2+(-2)\times 1 & 2\times(-2)+(-2)\times(-1) \\ 1\times 2+(-1)\times 1 & 1\times(-2)+(-1)\times(-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= B \end{aligned}$$

On a donc bien $B^2 = B$

2) Les deux colonnes de A sont colinéaires, donc $\text{rg}(A) \leq 1$. Or A est non nulle donc $\text{rg}(A) = 1$.
D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(A)) + \text{rg}(A) = 2$ donc $\dim(\text{Ker}(A)) = 2 - 1 = 1$.

3) Calculons $I_2 - AB$:

$$\begin{aligned} I_2 - AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc $\det(I_2 - AB) = 5 \times 5 - (-4) \times (-4) = 9 \neq 0$ donc $I_2 - AB$ est inversible.
Calculons $A + B - AB$:

$$\begin{aligned} A + B - AB &= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $\det(A + B - AB) = 5 \times 5 - (-2) \times (-8) = 9 \neq 0$ donc $A + B - AB$ est inversible.

Correction de l'exercice 4 :

1) $f^2 = 0$ donc pour tout $x \in E$, $f(f(x)) = 0_E$.
Soit $y \in \text{im}(f)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Ainsi, $f(y) = f(f(x)) = f^2(x) = 0_E$, donc $y \in \ker(f)$.
Pour tout $y \in \text{im}(f)$, $y \in \ker(f)$ donc $\text{im}(f) \subset \ker(f)$.

2) On a $\text{im}(f) \subset \ker(f)$ donc $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\ker(f))$, c'est à dire $\text{rg}(f) \leq \dim(\ker(f))$.
De plus, $\text{rg}(f) > 0$ car f est non nulle. (si $\text{rg}(f) = 0$, alors $\text{Im}(f) = \{0_E\}$ donc $f = 0$).
Enfin, pour la même raison, $\dim(\text{Ker}(f)) < 3$. En effet, si on avait $\dim(\text{Ker}(f)) = 3$ alors on aurait $\text{Ker}(f) = E$ donc $f = 0$.
Finalement, on a bien $0 < \text{rg}(f) \leq \dim(\text{Ker}(f)) < 3$.

3) D'après la question précédente, on a $\mathrm{rg}(f) \in \{1, 2\}$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \in \{1, 2\}$.
   D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E) = 3$.
   Ainsi, $\mathrm{rg}(f) = 3 - \dim(\mathrm{Ker}(f))$. La seule solution possible est alors $\mathrm{rg}(f) = 1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$.
4) f est non nulle donc la proposition
$$\forall u \in \mathbb{R}^3, f(u) = 0$$
   est fausse, ce qui signifie que la proposition contraire
$$\exists u \in \mathbb{R}^3, f(u) \neq 0$$
   est vraie.
5) $v = f(u)$ donc $f(v) = f^2(u) = 0$. Ainsi, $v \in \mathrm{Ker}(f)$. On sait que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$ d'après la question 3 donc d'après le théorème de la base incomplète il existe un vecteur non nul $w \in \mathrm{Ker}(f)$ tel que (v, w) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
6) Les trois vecteurs v, w et u sont non nuls par construction.
   Montrons que (v, w, u) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot w + \lambda_3 \cdot u = 0_E$.
   Alors
$$f(\lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot w + \lambda_3 \cdot u) = f(0_E) = 0_E$$
   donc
$$\lambda_1 \cdot f(v) + \lambda_2 \cdot f(w) + \lambda_3 \cdot f(u) = 0_E$$
   et ainsi
$$\lambda_3 \cdot f(u) = 0_E$$
   puisque $f(u) \neq 0$ on en déduit que $\lambda_3 = 0$.
   On a donc $\lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot w = 0_E$, et comme v, w est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ c'est une famille libre, on en déduit que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
   Finalement, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ donc (v, w, u) est une famille libre.
   De plus, $f(v) = f(w) = 0$ et $f(u) = v$ donc la matrice de f dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 7 :

1) Soient (x, y, z) et (x', y', z') deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et soient λ et μ deux réels.
$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot (x, y, z) + \mu \cdot (x', y', z')) =& f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \\ =& (3\lambda x + 3\mu x' + \lambda y + \mu y' + \lambda z + \mu z', \lambda x + \mu x' - 2\lambda y - 2\mu y', \\ & \lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y', 2\lambda x + 2\mu x' + \lambda z + \mu z') \\ =& \lambda \cdot (3x + y + z, x - 2y + z, x + y, 2x + z) + \mu \cdot (3x' + y' + z', x' - 2y' + z', x' + y' \\ =& \lambda \cdot f(x, y, z) + \mu \cdot f(x', y', z') \end{aligned}$$
   donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$.
2) Dans la base canonique $\mathcal{B}_0$, la matrice de f est
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
3) Pour tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a $(x, y, z) = \frac{x}{2} \cdot (2, 0, 0) + \frac{y}{2} \cdot (0, 2, 0) + \frac{z}{2} \cdot (0, 0, 2)$ donc $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
   Montrons que $\mathcal{B}'$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que
$$\lambda_1 \cdot (1, 1, 1, 0) + \lambda_2 \cdot (1, 1, 0, 1) + \lambda_3 \cdot (1, 0, 1, 1) + \lambda_4 \cdot (0, 1, 1, 1)$$
   donc $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ est solution du système $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &= 0\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_4 &= 0\\ \lambda_1+\lambda_3+\lambda_4 &= 0\\ \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 &= 0 \end{cases} \xleftrightarrow[]{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}} \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &= 0\\ -\lambda_3+\lambda_4 &= 0\\ -\lambda_2+\lambda_4 &= 0\\ \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 &= 0 \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow[]{L_4\leftarrow L_4+L_3} \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &= 0\\ -\lambda_3+\lambda_4 &= 0\\ -\lambda_2+\lambda_4 &= 0\\ \lambda_3+2\lambda_4 &= 0 \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow[]{L_4\leftarrow L_4+L_2} \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &= 0\\ -\lambda_3+\lambda_4 &= 0\\ -\lambda_2+\lambda_4 &= 0\\ 3\lambda_4 &= 0 \end{cases}$$

en remontant les équations on trouve $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$, donc $\mathcal{B}'$ est une famille libre à 4 éléments de $\mathbb{R}^4$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

4) La matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ est $P_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

Cherchons à exprimer les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$:
On remarque que

$$(1,1,1,0)+(1,1,0,1)+(1,0,1,1)=(3,2,2,2)$$

donc

$$(1,1,1,0)+(1,1,0,1)+(1,0,1,1)-2\cdot(0,1,1,1)=(3,0,0,0)$$

finalement,

$$(1,0,0,0)=\frac{1}{3}\cdot(1,1,1,0)+\frac{1}{3}\cdot(1,1,0,1)+\frac{1}{3}\cdot(1,0,1,1)-\frac{2}{3}\cdot(0,1,1,1)=(1,0,0,0)$$

De même, on a

$$\begin{aligned}(0,1,0,0)&=\frac{1}{3}\cdot(1,1,1,0)+\frac{1}{3}\cdot(1,1,0,1)+\frac{1}{3}(0,1,1,1)-\frac{2}{3}\cdot(1,0,1,1)\\(0,0,1,0)&=\frac{1}{3}\cdot(1,1,1,0)+\frac{1}{3}\cdot(1,0,1,1)+\frac{1}{3}(0,1,1,1)-\frac{2}{3}\cdot(1,1,0,1)\\(0,0,0,1)&=\frac{1}{3}\cdot(1,1,0,1)+\frac{1}{3}\cdot(1,0,1,1)+\frac{1}{3}(0,1,1,1)-\frac{2}{3}\cdot(1,1,1,0)\end{aligned}$$

donc la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à la base canonique est

$$P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_0}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\1&1&-2&1\\1&-2&1&1\\-2&1&1&1\end{pmatrix}$$

5) On utilise la même notation $\mathcal{B}_0$ pour la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et celle de $\mathbb{R}^4$ mais il n'y a pas d'ambiguité dans les notations des matrices de passage et on a d'après le cours :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)=P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}_0}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0}(f)P_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}}$$

donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\1&1&-2&1\\1&-2&1&1\\-2&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\\1&-2&1\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & -6 & 6 \\ 8 & 12 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6) Intéressons-nous d'abord au rang de f, on cherche une matrice échelonnée équivalente à $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1]{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{\substack{L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3}L_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{Mat}_{\mathcal{B},}(f)$ est équivalente à une matrice de rang 3 donc est de rang 3. On en conclut que $\dim(\text{Im}(f)) = 3$ donc d'après le théorème du rang $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Im}(f)) = 0$, ainsi $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

De plus, une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ est $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et puisque $\text{Im}(f)$ est de dimension 3 cette famille est aussi une base de $\text{Im}(f)$. Finalement, $\text{Im}(f) = \text{Vect}\left((3,1,1,2),(1,-2,1,0),(1,1,0,1)\right)$ et $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

Correction de l'exercice 8 :

1) $A = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 & 2^6 \\ 2^3 & 2^4 & 2^5 & 2^6 & 2^7 \\ 2^4 & 2^5 & 2^6 & 2^7 & 2^8 \\ 2^5 & 2^6 & 2^7 & 2^8 & 2^9 \\ 2^6 & 2^7 & 2^8 & 2^9 & 2^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 16 & 32 & 64 \\ 8 & 16 & 32 & 64 & 128 \\ 16 & 32 & 64 & 128 & 256 \\ 32 & 64 & 128 & 256 & 512 \\ 64 & 128 & 256 & 512 & 1024 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

2) Étudions d'abord le cas $n = 5$.

En faisant les opérations $\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2^2 L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2^3 L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 2^4 L_1 \end{matrix}$, la matrice A est équivalente à la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 16 & 32 & 64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc A est de rang 1.
Dans le cas général, l'opération $L_i \leftarrow 2^{i-1}L_1$ annule la ligne i, donc A est équivalente à une matrice dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 2^2 & 2^3 & 2^4 & \cdots & 2^n \end{pmatrix}$ et toutes les autres lignes sont nulles, ainsi A est de rang 1 quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour la matrice B, dans le cas $n = 5$, on a les équivalence suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[L_5 \leftarrow 2L_5 - 6L_1]{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - 4L_1 \\ L_4 \leftarrow 2L_4 - 5L_1}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & -12 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 4L_2}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc B est de rang 2.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, pour tout $i \geq 2$ entier, on fait $L_i \leftarrow 2L_i - (i+1)L_1$. Après ces opérations, la i-ème ligne est :

$$\begin{aligned} L_i &= \big(2(i+j) - (i+1)(1+j)\big)_{1 \leqslant j \leqslant n} \\ &= \big(i + j - ij - 1\big)_{1 \leqslant j \leqslant n} \\ &= \big((i-1)(1-j)\big)_{1 \leqslant j \leqslant n} \\ &= (i-1) \times \big(1-j\big)_{1 \leqslant j \leqslant n} \end{aligned}$$

donc $L_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & \cdots & -(n-1) \end{pmatrix}$, et pour tout $i \geqslant 3$, $L_i = (i-1) \times L_2$, donc les $(n-1)$ dernières lignes forment une famille de rang 1, ainsi B est de rang 2.
Autrement dit, on peut faire les opérations $L_i \leftarrow L_i - (i-1)L_2$ pour tout $i \geq 3$ et on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 0 & -1 & -2 & \cdots & -(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 2

3) Dans le cas $n = 5$, $\mathrm{rg}(A) = 1$ donc d'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 5 - 1 = 4$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix}$ un vecteur colonne de taille 5.

$X \in \mathrm{Ker}(A) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 4x + 8y + 16z + 32t + 64u &=& 0 \\ 8x + 16y + 32z + 64t + 128u &=& 0 \\ 16x + 32y + 64z + 128t + 256u &=& 0 \\ 32x + 64y + 128z + 256t + 512u &=& 0 \\ 64x + 128y + 256z + 512t + 1024u &=& 0 \end{array} \right. \iff 4x+8y+16z+32t+64u = 0$ d'après les opérations faites dans la question 2.

Ainsi, $X \in \mathrm{Ker}(A) \iff x = -2y - 4z - 8t - 32u \iff X = y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, une base de $\mathrm{Ker}(A)$ est $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

De même,

$$X \in \operatorname{Ker}(B) \iff \begin{cases} 2x+3y+4z+5t+6u &= 0 \\ -y-2z-3t-4u &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= -\frac{3}{2}y-2z-\frac{5}{2}t-3u \\ y &= -2z-3t-4u \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= z+2t \\ y &= -2z-3t-4u \end{cases}$$

$$\iff (x,y,z,t,u) = z\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\\0\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}0\\-4\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

donc une base de $\operatorname{Ker}(B)$ est $\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-4\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

Correction de l'exercice 9 :

Pour tout couple d'entiers (i,j) on a $\sin(i+j)=\sin(i)\cos(j)+\sin(j)\cos(i)$.
Ainsi, la i-ème ligne de A définie par $L_i=(\sin(i+j))_{1\leqslant j\leqslant n}$ peut s'écrire :

$$L_i=\sin(i)\times L_c+\cos(i)\times L_s$$

avec $L_c=(\cos(j))_{1\leqslant j\leqslant n}$ et $L_s=(\sin(j))_{1\leqslant j\leqslant n}$.
Toutes les lignes de A peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de L_c et L_s, donc $\operatorname{rg}(A)=\operatorname{rg}(\operatorname{Vect}(L_c,L_s))$, ainsi $\operatorname{rg}(A)\leq 2$.

Correction de l'exercice 10 :

1) a) $(A-I)^2=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-2&2&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

b) $(A-I)^2=A^2-AI-IA+I^2=A^2-2A+I$.
Or, d'après la question précédente, $(A-I)^2=0$ donc $A^2-2A+I=0$. On en déduit que $2A-A^2=I$ donc $A(2I-A)=I$.
Ainsi, A est inversible et $A^{-1}=2I-A$.

2) a) La matrice de $f-\mathrm{Id}$ est $A-I$.
Calculons le rang de $A-I$:

$$\begin{pmatrix}-1&1&1\\-2&2&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}\xleftrightarrow[L_3\leftarrow L_3+L_1]{L_2\leftarrow L_2-2L_1}\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

donc $A-I$ est de rang 1, ainsi, $\operatorname{rg}(f-\mathrm{Id})=1$.
D'après le théorème du rang $\dim(\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id}))=3-\operatorname{rg}(f-\mathrm{Id})=3-1=2$.

b) Montrons d'abord que $u_1\in\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id})$ et $u_2\in\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id})$.

$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id})(u_1)&=f(u_1)-u_1\\&=f(f-\mathrm{Id})(e_1)-(f-\mathrm{Id})(e_1)\\&=f(f(e_1))-e_1)-f(e_1)+e_1\\&=f(-2e_2+e_3)-f(e_1)-(-2e_2+e_3)+e_1 &&\text{d'après la matrice de } f \text{ dans la base } \mathcal{B}.\\&=-2f(e_2)+f(e_3)-(-2e_2+e_3)+2e_2-e_3+e_1\\&=-2(e_1+3e_2-e_3)+e_1+2e_2+2e_2-e_3+2e_2-e_3+e_1\end{aligned}$$

$$= 0$$

donc $u_1 \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
De même :

$$\begin{aligned}
(f - \mathrm{Id})(u_2) &= (f - \mathrm{Id})(e_1 + e_3) \\
&= f(e_1) + f(e_3) - e_1 - e_3 \\
&= -2e_2 + e_3 + e_1 + 2e_2 - e_1 - e_3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc $u_2 \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$. Puisque $\dim(\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}))$ est de dimension 2, il suffit de montrer soit que (u_1, u_2) est libre, soit que (u_1, u_2) est génératrice de $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
Montrons que c'est une famille libre : on suppose qu'il existe deux réels λ et μ tels que $\lambda \cdot u_1 + \mu \cdot u_2 = 0$.
Alors $\lambda \cdot f(e_1) - \lambda \cdot e_1 + \mu \cdot e_1 + \mu \cdot e_3 = 0$ par définition de u_1 et de u_2.
Or, $f(e_1) = -2e_2 + e_3$ d'après la matrice de f dans la base canonique (e_1, e_2, e_3). Ainsi on a

$$\lambda \cdot (-2e_2 + e_3) - \lambda \cdot e_1 + \mu \cdot e_1 + \mu \cdot e_3 = 0$$

donc finalement

$$(\mu - \lambda) \cdot e_1 - 2\lambda \cdot e_2 + (\lambda + \mu) \cdot e_3$$

Puisque (e_1, e_2, e_3) est une base, c'est une famille libre donc $\begin{cases} \mu - \lambda &= 0 \\ -2\lambda &= 0 \\ \lambda + \mu &= 0 \end{cases}$. La seule solution de ce système est $(\lambda, \mu) = (0, 0)$, donc $\lambda = \mu = 0$, il en découle que la famille (u_1, u_2) est libre et donc que c'est une base de $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$.

3) Montrons que (u_1, u_2, e_1) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois réels tels que $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot e_1 = 0$. Alors

$$\lambda_1 \cdot (f(e_1) - e_1) + \lambda_2 \cdot (e_1 + e_3) + \lambda_3 \cdot e_1 = 0$$

donc

$$\lambda_1 \cdot (-2e_2 + e_3) - e_1) + \lambda_2 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_3 + \lambda_3 \cdot e_1 = 0$$

et finalement

$$(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \cdot e_1 + (-2\lambda_1) \cdot e_2 + (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot e_3 = 0$$

Comme (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est solution du système $\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ -2\lambda_1 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \end{cases}$ donc que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Ainsi, la famille (u_1, u_2, e_1) est une famille libre à 3 éléments de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

4) Dans cette base, $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_2$ puisque $u_1, u_2 \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$.
De plus, $f(e_1) = u_1 + e_1$ car $u_1 = (f - \mathrm{Id})(e_1)$.
Ainsi, la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, e_1) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5) On résout $PX = Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
PX = Y &\iff \begin{cases} -x + y + z &= x' \\ -2x &= y' \\ x + y &= z' \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2y + z &= x' + z' \\ x &= -\frac{1}{2}y' \\ y &= z' + \frac{1}{2}y' \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} z & = & x' - z' - y' \\ x & = & -\frac{1}{2}y' \\ y & = & z' + \frac{1}{2}y \end{array}\right.$$

donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, e_1)$. Ainsi, d'après le cours on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)P$$

d'où

$$T = P^{-1}AP$$

Correction de l'exercice 11 :

1) a) Supposons que A et B soient deux matrices stochastiques de taille n.
Alors pour tout i, j, $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}$, donc pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(AB)_{i,j} \geq 0$ comme produit de termes positifs.
De plus, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n}(AB)_{i,j} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}\right) && \text{car les sommes sont finies} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(A_{i,k}\sum_{j=1}^{n} B_{k,j}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} && \text{car } B \text{ est stochastique} \\ &= 1 && \text{car } A \text{ est stochastique} \end{aligned}$$

b) Tous les coefficients de A sont positifs.
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$
$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{5}{8} = 1$
$\frac{1}{4} + \frac{5}{8} + \frac{1}{8} = 1$
donc A est stochastique.

c) D'après la question 1, le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique donc par récurrence immédiate A^n est stochastique quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

d) On a

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow 4L_1 \\ L_2 \leftarrow 8L_2 \\ L_3 \leftarrow 8L_3}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{L3 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

donc A est de rang 3.

e) Montrons que (e_1, e_2, e_3) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois réels tels que $\lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \lambda_3 \cdot e_3 = (0,0,0)$.

Alors $\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{cases}$ On en déduit que $\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{cases}$ donc que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Ainsi, (e_1, e_2, e_3) est une famille libre de cardinale 3 de $\mathbb{R}^3$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

f) $AX_1 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = X_1$

$AX_2 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}X_2$

$AX_3 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}X_3$.

On en déduit que dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, l'application f canoniquement associée à A a pour matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

puisque $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = -\frac{1}{2}e_2$ et $f(e_3) = \frac{1}{4}e_3$.

Ainsi, si on note P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, on a $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}P^{-1}$.

Correction de l'exercice 12 :

1) Pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(X+1) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k$ est encore un polynôme de degré inférieur ou égal à n, donc $u(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

De plus, pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1 \\ &= \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q) \end{aligned}$$

donc u est linéaire, c'est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$u(v(P)) = u(P(X-1)) = P((X-1)+1) = P(X)$$

donc $u \circ v = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ donc u est inversible d'inverse v.

3) On a $u(1) = 1$, $u(X) = X+1$, $u(X^2) = (X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$, et pour tout $j \in [\![0, n]\!]$,

$$u(X^j) = (X+1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i$$

De même, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$,

$$v(X^j) = (X-1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i (-1)^{j-i}$$

Soit $M = (m_{i,j}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$ et $N = (n_{i,j}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(v)$. Alors M et N sont des matrices triangulaires supérieures et :

$$\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2, m_{i+1,j+1} = \begin{cases} \binom{j}{i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases} \quad \text{et} \quad n_{i+1,j+1} = \begin{cases} \binom{j}{i}(-1)^{j-i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

Par produit de matrices on a $Y^T M = \left(\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} b_i\right)_{0 \leq j \leq n} = (a_j)_{0 \leq j \leq n} = X^T$ par hypothèses sur (a_n) et (b_n).

En multipliant à droite par N on obtient donc $Y^T = X^T N$ donc $Y^T = \left(\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i}(-1)^{j-i}\right)_{0 \leq j \leq n}$ d'où $b_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(-1)^{n-i} a_i$, et ceci est vrai quel que soit $n \in \mathbb{N}$.