

★

Exercice 1

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x+2}} dx$

d) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x} dx$

g) $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{x+1} dx$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+2)}} dx$

e) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x+1} dx$

h) $\int_0^{+\infty} \frac{x e^x + 1}{x e^{2x} + 1} dx$

c) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^5 + 1} dx$

f) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x e^x + 1} dx$

★

Exercice 2

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

a) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$

c) $\int_{-\infty}^0 \frac{\sin^3 x}{x^2} dx$

e) $\int_0^\pi \ln(2x + 3 \sin x) dx$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x^3 + 1}} dx$

d) $\int_{-\infty}^0 e^x \cos x dx$

f) $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2} dx$

★

Exercice 3

1) Montrer que pour tout réel $a > -1$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^a e^{-t} dt$ converge.

2) Montrer que pour tout réel $a > -1$, l'intégrale $\int_0^1 t^a \ln(t) dt$ converge.

3) Montrer que pour tout réel $a > -1$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{a-t} dt$ converge.

★

Exercice 4

Pour chacune des intégrale suivante montrer qu'elle converge et la calculer :

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} 2^{-|x|} dx$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx$

5) $\int_0^{+\infty} e^{-x}(1-e^{-x})^4 dx$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3}{4+x^2} dx$

4) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^7 e^{-x^2} dx$

6) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$

★ ★

Exercice 5

Le but de cet exercice est de démontrer la formule de Stirling : $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$ et $v_n = \ln u_n$.

1) a) À l'aide d'un développement limité, montrer que $v_n - v_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2} + \left(\frac{1}{n^2}\right)$.

b) En déduire que la suite (v_n) converge.

c) En déduire l'existence d'un réel $C > 0$ tel que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C \sqrt{n} \frac{n^n}{e^n}$.

2) Montrons dans cette question que $C = \sqrt{2\pi}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$ (intégrale de Wallis)

a) Calculer W_0 et W_1 .

b) Montrer que (W_n) converge.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$

d) En déduire W_2 .

- e) À l'aide d'une intégration par partie, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.
- f) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.
- g) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_n}{W_{n+1}} = 1$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
- h) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$.
- i) En déduire que $C = \sqrt{2\pi}$.

★ ★

Exercice 6

- 1) Montrer à l'aide du changement de variable $x = e^u$ que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(e^u) du$ converge.
- 2) Montrer à l'aide du changement de variable $t = u^{1/3}$ que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{2/3} + u^{4/3}}$ converge et la calculer.

★ ★

Exercice 7

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sin(n\theta) \neq 0$. On considère le polynôme $P(X) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^k$

- 1) Montrer que $P(X) = \frac{1}{2i}(1 + e^{i\theta} X)^n - \frac{1}{2i}(1 + e^{-i\theta} X)^n$
- 2) En déduire que λ est racine du polynôme P si et seulement si $\exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\lambda = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}}} e^{-i\theta}$.
- 3) Montrer que toutes les racines de P sont réelles.

★ ★

Exercice 8

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \left(\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\right)^2$.

Le but de cet exercice est de déterminer un équivalent de u_n lorsque $n \rightarrow +\infty$. On admet le théorème de Cesàro :

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \text{ avec } \ell \in \mathbb{R} \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \ell$$

- 1) Montrer que la suite (u_n) est bien définie.
- 2) Étudier le sens de variation de (u_n) puis montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- 3) Soit β un réel non nul. Montrer que $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta = \beta u_n^{\beta-3} + o(u_n^{\beta-3})$.
- 4) Déterminer une valeur de β telle que $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ converge vers une limite finie.
- 5) En déduire à l'aide du théorème admis que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}$.

★ ★

Exercice 9

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on appelle **fonction Gamma d'Euler** la fonction définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

- 1) Montrer que Γ est bien définie sur $]0; +\infty[$.
- 2) Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- 3) Calculer $\Gamma(1)$ puis en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$
- 4) Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ puis $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$. On pourra admettre la valeur de l'intégrale de Gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Le coin des Khûbes

★ ★

Exercice 10

(ENSAE 2013) Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. On suppose qu'il existe une constante $0 < c < 1$ telle que, pour tous x, y dans $[0, 1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$$

Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0, 1]$.

★ ★ ★

Exercice 11

(ENS 2016) Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(x)f(y) \leq f(xy)$ pour tout $x, y \geq 0$ et $f(1) = 1$.

- 1) Montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$
- 2) Montrer que $f(x) \geq f(x^{1/n})^n$ pour tout $x > 0$ et $n \geq 1$
- 3) En déduire qu'il existe un réel p tel que $f(x) \geq x^p$ pour tout $x \geq 0$
- 4) Montrer que $p \geq 0$
- 5) Montrer que $f(x) = x^p$ pour tout $x \geq 0$.

★ ★

Exercice 12

(ENS 2025)

Démontrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(at)}{t^2} dt$ est convergente, puis qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos(at)}{t^2} dt = c|a|$$