★
## Exercice 1 — Voir correction

Soit $F$ le sous espace de $\mathbb{R}^5$ engendré par $u = (1, 2, 3, -1, 2)$ et $v = (2, 4, 7, 2, -1)$. Trouver une base de l'orthogonal $F^{\perp}$ de $F$.

★
## Exercice 2 — Voir correction

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ ainsi que le vecteur $u = (-5, 3, 1) \in E$ et le sous-espace $F = \text{Vect}\,(u)$. Soit $p$ le projeté orthogonal sur $F$. Déterminer la matrice de $p$ dans la base canonique.

★ ★
## Exercice 3 — Voir correction

Dans cet exercice on se place dans l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique qui à deux vecteurs $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots, x_n)$ et $\boldsymbol{y} = (y_1,\dots, y_n)$ associe $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$. On note $\|x\|$ la norme d'un vecteur $x$ et on note $(e_1,\dots, e_n)$ la base canonique (orthonormée) de $\mathbb{R}^n$.

1) Dans cette question, $u$ désigne un endomorphisme de $E$. On cherche à démontrer qu'il existe un unique endomorphisme de $E$, noté $u^*$, vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

   a) Montrer que si $u^*$ existe, alors :

$$\forall y \in E, \quad u^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i$$

   b) En déduire que si $u^*$ existe alors $u^*$ est unique.
   c) Vérifier que l'application définie à la question 1)a) est effectivement un endomorphisme de $E$ et conclure.

2) On appelle endomorphisme **adjoint** de $u$ l'endomorphisme $u^*$ défini dans la question précédente. Dans cette question, on étudie les endomorphismes **normaux**, c'est à dire les endomorphismes qui vérifient :

$$u \circ u^* = u^* \circ u$$

   a) Soit $f$ un endomorphisme symétrique de $E$. Donner son adjoint et vérifier que $f$ est normal.

   **Dans la suite $u$ désigne un endomorphisme normal.**

   b) Montrer que : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$
   c) En déduire que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^*)$.
   d) Montrer que si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $u$, alors $F^{\perp}$ est stable par $u^*$.
   e) On suppose que $u$ possède une valeur propre $\lambda$ et on note $E_\lambda$ le sous-espace propre associé. Montrer que $E_\lambda$ est stable par $u^*$.
   f) Établir que $(u^*)^* = u$ puis en déduire que $E_\lambda^{\perp}$ est stable par $u$.

★
## Exercice 4 — Voir correction

On munit $E = \mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique et de sa norme associée. Soit $(u_1, u_2)$ une famille libre de $E$. On note $H = \text{Vect}\,(u_1, u_2)$ et on définie $f : E \to E$ par

$$\forall u \in E, f(u) = \langle u, u_1\rangle u_2 + \langle u, u_2\rangle u_1$$

1) Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
2) Montrer que $\text{Im} f = H$ et $\text{Ker} f = H^{\perp}$
3) On pose $v_1 = ||u_1||u_2 - ||u_2||u_1$, $v_2 = ||u_1||u_2 + ||u_2||u_1$ et on prend $v_3 \in H^{\perp}$ quelconque tel que $v_3 \neq 0$. Montrer que $v_1, v_2, v_3$ est une base orthogonale de $E$.
4) Donner la matrice de $f$ dans cette base.
5) En déduire que $f$ est diagonalisable avec une valeur propre strictement positive, une strictement négative, et une nulle.

⋆

## Exercice 5 — Voir correction

Soit $(x_1, x_2,..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que $x_1 + x_2 + \cdots x_n = 1$. Démontrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$

⋆

## Exercice 6 — Voir correction

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. L'objectif de cet exercice est de trouver une matrice colonne $X$ telle que $||AX - B||$ soit minimal.

1) Vérifier que $\text{Im}A$ est un plan et donner une équation cartésienne de ce plan.
2) Construire une base orthonormée de ce plan.
3) Calculer $Y$ projection orthogonale de $B$ sur ce plan, et conclure.

⋆ ⋆

## Exercice 7 — Voir correction

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang $p$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On cherche à minimiser $||AX - B||$ où $X \in \mathcal{M}_{p,1}$.

1) Si $n = p$, résoudre le problème.
2) On revient au cas général. Montrer que $AX = 0 \Rightarrow X = 0$, et en déduire que $C = A^T A$ est inversible.
3) Soit $H = \{AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$. Vérifier que $H$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et interpréter le problème posé en termes de distance et de projection orthogonale.
4) Soit $Y = AX_0$ le projeté orthogonal de $B$ sur $H$. Montrer que
$$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}, \quad X^T A^T B - X^T A^T A X_0 = 0$$
5) En déduire que $Y = AC^{-1}A^T B$
6) Application avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour retrouver le résultat de l'exercice précédent.

⋆

## Exercice 8 — Voir correction

**(D'après oral INSEE 2019)** On considère l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique et de la norme associée $|| \cdot ||$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2,..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice symétrique réelle et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé.
On admet que $A$ est diagonalisable et on note $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ ses valeurs propres. On admet aussi qu'il existe une base orthonormale $(\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$, constitués de vecteurs propres de $f$ tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$.
Le but de cet exercice est d'établir le résultat suivant :
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{k} a_{j,j} \leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda_j$$

1) Étudier le cas $k = n$.
2) Soit maintenant $k \in [\![1, n]\!]$. Établir que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a
$$a_{j,j} \leqslant \sum_{i=1}^{k} \langle e_j, \varepsilon_i \rangle^2 \lambda_i + \lambda_k \sum_{i=k+1}^{n} \langle e_j, \varepsilon_i \rangle^2$$
*(Indication : montrer que $a_{j,j} = \langle f(e_j), e_j \rangle$)*
3) En déduire, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, l'inégalité suivante :
$$a_{j,j} \leqslant \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_k) \langle e_j, \varepsilon_i \rangle^2 + \lambda_k$$
*(Indication : considérer la matrice $A' = A - \lambda_k I_n$)*
4) Conclure

⋆ ⋆

## Exercice 9 — Voir correction

Soit $p$ un projecteur orthogonal de $E = \mathbb{R}^n$ et soit $A$ la matrice représentative de $p$ dans la base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
Le but de cet exercice est de montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \operatorname{tr}\left({}^tAA\right) = \operatorname{rg}(A)$

1) Pour $i \in [\![1, n]\!]$, exprimer $p(e_i)$ dans la base canonique.
2) Soit $p = \operatorname{rg}(A)$ et soit $f_1, \ldots, f_p$ une base orthonormée de $\operatorname{Im}A$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, exprimer $p(e_i)$ dans la base $f_1, \ldots, f_p$
3) En déduire deux façons différentes d'exprimer $||p(e_i)||^2$.
4) Conclure

⋆ ⋆ ⋆

## Exercice 10 — Voir correction

1) a) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$. Résoudre $AX = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

   b) Un calcul donne $A\begin{pmatrix} 0.2 \\ 4.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \end{pmatrix}$. En quoi cela peut-il paraître surprenant ?

2) Soit maintenant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont tous non nuls. Soient deux matrice colonnes $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $X$ et $\tilde{X}$ les solutions de $AX = B$ et $A\tilde{X} = B + R$.

   Pour une matrice colonne $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ quelconque, on note $\|Y\| = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$.

   a) Montrer que $\displaystyle\max_{1 \le k \le n} \frac{1}{|\lambda_k|} = \frac{1}{\displaystyle\min_{1 \le k \le n} |\lambda_k|}$.

   b) Montrer que $\displaystyle\frac{\|\tilde{X} - X\|\|B\|}{\|R\|\|X\|} \le \frac{\displaystyle\max_{1 \le k \le n} |\lambda_k|}{\displaystyle\min_{1 \le k \le n} |\lambda_k|}$

   c) La matrice $A$ étant fixée, construire explicitement $B$ et $R$ pour qu'il y ait égalité dans l'inégalité précédente.

⋆

## Exercice 11 — Voir correction

Soit $n \ge 1$ un entier et $A$ est une matrice carrée à coefficients réels d'ordre $n$ symétrique : ${}^tA = A$. On note $E$ l'espace vectoriel des matrices colonnes à $n$ lignes à coefficients réels et on fixe un vecteur non nul $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ de $E$. Pour tout $x$ de $E$, on pose :

$$q_A(x) = {}^txAx \quad \text{et} \quad c(x) = {}^tx\omega - 1$$

et on suppose que pour tout vecteur $x$ non nul de $E$, $q_A(x) > 0$. Enfin, on désigne par $C$ l'ensemble $C = \{x \in E \,;\, c(x) = 0\}$. Toute matrice carrée d'ordre 1 sera confondue avec le réel la constituant. Le but de cet exercice est d'étudier l'existence du minimum de $q_A$ sur l'ensemble $C$.

1) Vérifier que si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a $q_A(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j$ et $c(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i x_i - 1$.
2) En résolvant l'équation $Ax = 0$ pour $x$ inconnue de $E$, montrer que la matrice $A$ est inversible.
3) Montrer que $A^{-1} = {}^t(A^{-1})$.
4) Montrer que pour tout vecteur $x$ non nul de $E$, on a ${}^txA^{-1}x > 0$.
5) Montrer que pour tout vecteur $x$ de $E$, il existe un réel $\lambda$ unique et un vecteur $h$ de $E$ unique tels que $x = \lambda A^{-1}\omega + h$ et ${}^t\omega h = 0$.
6) Montrer alors que si $x$ vérifie $c(x) = 0$, on a $q_A(x) = \dfrac{1}{{}^t\omega A^{-1}\omega} + {}^thAh$.
7) En déduire que $q_A$ admet un minimum sur $C$ atteint uniquement en $x_0$ vérifiant $Ax_0 = \lambda_0\omega$ avec $\lambda_0 = \dfrac{1}{{}^t\omega A^{-1}\omega}$.

## Correction des exercice

**Correction de l'exercice 1 :** Puisque $F \oplus F^{\perp} = \mathbb{R}^5$ on doit avoir $\dim(F^{\perp}) = 3$.
Soit $w = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. $w \in F^{\perp} \iff \langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle = 0$. On a donc :

$$\begin{aligned}
w \in F^{\perp} &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 &=& 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 - x_5 &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 &=& 0 \\ x_3 + 4x_4 - 5x_5 &=& 0 \end{array}\right. && \text{en faisant } L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& -2x_2 - 3(-4x_4 + 5x_5) + x_4 - 2x_5 \\ x_3 &=& -4x_4 + 5x_5 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& -2x_2 + 13x_4 - 17x_5 \\ x_3 &=& -4x_4 + 5x_5 \end{array}\right. \\
&\iff w = (-2x_2 + 13x_4 - 17x_5, x_2, -4x_4 + 5x_5, x_4, x_5) \\
&\iff w = x_2 \cdot (-2, 1, 0, 0, 0) + x_4 \cdot (13, 0, -4, 1, 0) + x_5 \cdot (-17, 0, 5, 0, 1)
\end{aligned}$$

donc $F^{\perp} = \mathrm{Vect}\left((-2, 1, 0, 0, 0), (13, 0, -4, 1, 0), (-17, 0, 5, 0, 1)\right)$.

**Correction de l'exercice 2 :** $\|u\| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{35}$. Le vecteur $u' = \dfrac{u}{\|u\|}$ est une base orthonormée de $F$. Calculons $p(e_1)$, $p(e_2)$ et $p(e_3)$ :

$$p(e_1) = \frac{\langle e_1, u\rangle}{\|u\|^2} u = \frac{-5}{35} u = \begin{pmatrix} 5/7 \\ -3/7 \\ -1/7 \end{pmatrix}$$

$$p(e_2) = \frac{\langle e_1, u\rangle}{\|u\|^2} u = \frac{3}{35} u = \begin{pmatrix} -3/7 \\ 9/35 \\ 3/35 \end{pmatrix}$$

$$p(e_2) = \frac{\langle e_1, u\rangle}{\|u\|^2} u = \frac{1}{35} u = \begin{pmatrix} -1/7 \\ 3/35 \\ 1/35 \end{pmatrix}$$

donc finalement

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 25 & -15 & -5 \\ -15 & 9 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

**Correction de l'exercice 3 :**

1) a) Supposons que $u^*$ existe et soit $y \in E$ un vecteur quelconque. Il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que dans la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$, $u^*(y)$ s'écrit :

$$u^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on a :

$$\lambda_i = \langle e_i, u^*(y)\rangle = \langle u(e_i), y\rangle$$

d'où :

$$u^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i$$

b) Pour tout $y \in E$, $\sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i$ est entièrement déterminé par $y$, donc si $u^*$ existe il est unique.

c) Réciproquement posons $u^*(x) = \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), x\rangle e_i$ pour tout $x \in E$. Alors, pour tout $(x,y) \in E^2$, pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} u^*(\lambda x+\mu y) &= \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), \lambda x+\mu y\rangle e_i \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), x\rangle e_i + \mu \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), y\rangle e_i \quad \text{par linéarité à droite du produit scalaire et linéarité de la somme} \\ &= \lambda u^*(x) + \mu u^*(y) \end{aligned}$$

ainsi définie, $u^*$ est bien un endomorphisme de $E$.

2) a) Si $f$ est symétrique, alors pour tout $(x,y) \in E^2$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$. On a donc $f^* = f$ par unicité de l'endomorphisme adjoint.
Comme $f$ commute avec lui-même on a bien $f \circ f^* = f \circ f = f^* \circ f$ donc $f$ est normal.

b) Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} \|u(x)\| &= \sqrt{\langle u(x), u(x)\rangle} \\ &= \sqrt{\langle x, u^*(u(x))\rangle} \\ &= \sqrt{\langle x, u(u^*(x))\rangle} && \text{car } u \text{ est normal} \\ &= \sqrt{\langle u^*(x), u^*(x)\rangle} \\ &= \|u^*(x)\| \end{aligned}$$

c) Pour tout vecteur $x \in E$, $u(x) = 0 \iff \|u(x)\| = 0 \iff \|u^*(x)\| = 0 \iff u^*(x) = 0$, donc $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^*)$.

d) Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $u$. Montrons que $F^\perp$ est stable par $u^*$ : soit $x \in F^\perp$, alors pour tout $y \in F$ on a :

$$\langle u^*(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = 0$$

car $u(y) \in F$ comme $F$ est stable par $u$, et $x \in F^\perp$ par hypothèse. Ainsi $u^*(x) \in F^\perp$ donc $F^\perp$ est stable par $u^*$.

e) Soit $x \in E_\lambda$. On a $u(u^*(x)) = u^*(u(x)) = u^*(\lambda x) = \lambda u^*(x)$ donc on a bien $u^*(x) \in E_\lambda$. On a montré que $E_\lambda$ est stable par $u^*$.

f) Pour tout $(x,y) \in E^2$, $\langle u^*(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$ par symétrie du produit scalaire, donc $u$ est l'endomorphisme adjoint de $u^*$ comme celui-ci est unique, c'est à dire $(u^*)^* = u$. Comme $E_\lambda$ est stable par $u^*$ on en déduit d'après la question 2)d) que $E_\lambda^\perp$ est stable par $(u^*)^*$ donc par $u$.

**Correction de l'exercice 4 :**

1) $f$ est bien à valeurs dans $E$, et pour tout $(u,v) \in E^2$ et tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned} f(\lambda u+\mu v) &= \langle \lambda u+\mu v u_1\rangle u_2 + \langle \lambda u+\mu v, u_2\rangle u_1 \\ &= \lambda\langle u,u_1\rangle u_2 + \mu\langle v,u_1\rangle u_2 + \lambda\langle u,u_2\rangle u_1 + \mu\langle v,u_2\rangle u_1 && \text{par bilinéarité du produit scalaire} \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v) \end{aligned}$$

donc $f \in \mathcal{L}(E)$.

2) Soit $x \in \mathrm{Ker} f$, alors $f(x) = 0 = \langle x, u_1\rangle u_2 + \langle x, u_2\rangle u_1$.
Or, $(u_1, u_2)$ est une famille libre, donc $\langle x, u_1\rangle = \langle x, u_2\rangle = 0$. On en conclut que $x \in H^\perp$.
Réciproquement, si $x \in H^\perp$, on a bien $f(x) = 0$, donc $\mathrm{Ker} f = H^\perp$.
Comme $\dim H = 2$, $\dim H^\perp = 1$. D'après le théorème du rang, on a donc $\mathrm{rg} f = 2$.
Il est évident que $\mathrm{Im} f \subset H$, donc par égalité des dimension a finalement $\mathrm{Im} f = H$.

3) Comme $v_1$ et $v_2$ sont des combinaisons linéaires de $u_1$ et $u_2$, il est évident que $v_3$ est orthogonal à $v_1$ et $v_2$.
Montrons que $v_1$ et $v_2$ sont orthogonaux entre eux :

$$\begin{array}{rcl} \langle v_1, v_2\rangle &=& \langle ||u_1||u_2 - ||u_2||u_1, ||u_1||u_2 + ||u_2||u_1\rangle \\ &=& ||u_1||^2 \times \langle u_2, u_2\rangle + ||u_1|| \times ||u_2|| \times \langle u_2, u_1\rangle - ||u_2|| \times ||u_1|| \times \langle u_1, u_2\rangle - ||u_2||^2 \times \langle u_1, u_1\rangle \\ &=& ||u_1||^2||u_2||^2 - ||u_2||^2||u_1||^2 \\ &=& 0 \end{array}$$

car $\langle u_2, u_1\rangle = \langle u_1, u_2\rangle$.
Finalement, $v_1$,$v_2$ et $v_3$ sont deux à deux orthogonaux. C'est donc une famille libre de $\mathbb{R}^3$, donc une base de $\mathbb{R}^3$.

4) Posons $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ et calculons $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$. On remarque que $v_1 + v_2 = 2||u_1||u_2$ et $v_2 - v_1 = 2||u_2||u_1$

$$\begin{aligned} f(v_1) &= \langle v_1, u_1\rangle u_2 + \langle v_1, u_2\rangle u_1 \\ &= (||u_1||\langle u_2, u_1\rangle - ||u_2||\langle u_1, u_1\rangle)u_2 + (||u_1||\langle u_2, u_2\rangle - ||u_2||\langle u_1, u_2\rangle)u_1 \\ &= \langle u_1, u_2\rangle(||u_1||u_2 - ||u_2||u_1) - ||u_2|| \times ||u_1||^2 \times u_2 + ||u_1|| \times ||u_2||^2 \times u_1 \\ &= \left(\langle u_1, u_2\rangle - \|u_2\|\|u_1\|\right) v_1 \end{aligned}$$

.

$$\begin{aligned} f(v_2) &= \langle v_1, u_1\rangle u_2 + \langle v_1, u_2\rangle u_1 \\ &= (||u_1||\langle u_2, u_1\rangle + ||u_2||\langle u_1, u_1\rangle)u_2 + (||u_1||\langle u_2, u_2\rangle + ||u_2||\langle u_1, u_2\rangle)u_1 \\ &= \langle u_1, u_2\rangle(||u_1||u_2 + ||u_2||u_1) + ||u_2|| \times ||u_1||^2 \times u_2 + ||u_1|| \times ||u_2||^2 \times u_1 \\ &= \left(\|u_2\|\|u_1\| - \langle u_1, u_2\rangle\right) v_2 \end{aligned}$$

et $f(v_3) = 0$ car $v_3 \in H^\perp$ et $v_1, v_2 \in H$.
Finalement, la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \langle u_1, u_2\rangle - \|u_2\|\|u_1\| & 0 & 0 \\ 0 & \|u_2\|\|u_1\| - \langle u_1, u_2\rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale et ses valeurs propres sont 0, $\langle u_1, u_2\rangle - \|u_2\|\|u_1\|$ et $\|u_2\|\|u_1\| - \langle u_1, u_2\rangle$.
On a $\|u_2\|\|u_1\| - \langle u_1, u_2\rangle \geq 0$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et même $\|u_2\|\|u_1\| - \langle u_1, u_2\rangle > 0$ car $u_1$ et $u_2$ ne sont pas liés. Ainsi, une valeur propre de $f$ est nulle, une est strictement positive, et la troisième strictement négative.

**Correction de l'exercice 5 :** Considérons les vecteurs $u = (\sqrt{x_1},..., \sqrt{x_n})$ et $v = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, ..., \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$.
On a $\langle u, v\rangle = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$, et par hypothèse $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.
Ainsi, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\langle u, v\rangle \leq \|u\|\|v\|$$

$$n \leq 1 \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

d'où

$$n^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$$

**Correction de l'exercice 6 :**

1) $A$ est de rang 2 donc $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 2$, $\mathrm{Im}(A)$ est donc un plan de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(A) \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& a + 2b \\ y &=& -a + b \\ z &=& 2a + b \end{array} \right.$$

$$\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& a + 2b \\ x + y &=& 3b \\ z &=& 2a + b \end{array} \right.$$

$$\iff \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{rcl} x &=& a+\frac{2}{3}(x+y)\\ b &=& \frac{1}{3}(x+y)\\ z &=& 2a+b\end{array}\right.$$

$$\iff \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2, \left\{\begin{array}{rcl} a &=& \frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y\\ b &=& \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y\\ z &=& x-y\end{array}\right.$$

donc l'équation $x-y-z=0$ est une équation cartésienne de $\text{Im}(A)$.

2) On a déjà une base de $\text{Im}(A)$ donnée par les deux colonnes de $A$ : posons $X_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$. On a $\|X_1\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{6}$, et $\|X_2\| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}$.
Posons $X_1' = \dfrac{X_1}{\|X_1\|}$ et $X_2' = \dfrac{X_2 -^t X_2X_1'\cdot X_1'}{\|X_2 -^t X_2X_1'\cdot X_1'\|}$. Alors $\|X_1'\| = 1$ et ${}^tX_2'X_1' = \dfrac{1}{\|X_2 -^t X_2X_1'\cdot X_1'\|}{}^t(X_2 -^t X_2X_1'\cdot X_1')X_1' = \dfrac{1}{\|X_2 -^t X_2X_1'\cdot X_1'}({}^tX_2XX_1' -^t X_2X_1'\|X_1'|^2) = 0$ donc $X_1'$ et $X_2'$ sont orthogonaux et $\|X_2'\|^2 = 1$ par construction. Ainsi, $(X_1', X_2')$ est une base orthonormée de $\text{Im}(A)$.
On calcule

$$X_1' = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} X_2 -^t X_2X_1'\cdot X_1' &= \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{3}{\sqrt{6}}\times\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}3/2\\3/2\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

et $\|X_2 -^t X_2X_1'\| = \sqrt{(3/2)^2+(3/2)^2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ donc finalement :

$$X_2' = \frac{2}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3/2\\3/2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2\\0\end{pmatrix}$$

La projection orthogonale de $B$ sur $\text{Im}(A)$ est ${}^tBX_1'X_1' +^t BX_2'X_2'$.

$${}^tBX_1'X_1' = \frac{1}{\sqrt{6}}\times(1\times1+1\times(-1)+(-1)\times2)\times\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix}$$

et

$${}^tBX_2'X_2' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times1+\frac{\sqrt{2}}{2}\times1\right)\times\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

donc finalement, la projection orthogonale de $B$ sur $\text{Im}(A)$ est $\begin{pmatrix}-1/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3\\4/3\\-2/3\end{pmatrix}$

On trouve $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ en résolvant $AX = Y$ c'est à dire $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y &=& 2/3\\ -x+y &=& 4/3\\ 2x+y &=& -2/3\end{array}\right.$. On trouve que $X = \begin{pmatrix}-2/3\\2/3\end{pmatrix}$ est solution.

**Correction de l'exercice 7 :**

1) Si $n=p$, alors $\text{rg}(A) = n$ et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $A$ est inversible. On en déduit qu'il existe $Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AY = B$ donc $\|AY-B\| = 0$ et $Y$ minimise donc $\|AX-B\|$.

2) $A$ est de rang $p$ donc d'après le théorème du rang $\text{Ker}(A) = p - \text{rg}(A) = 0$. Ainsi $A$ est injective, autrement dit $AX = 0 \Rightarrow X = 0$.
La matrice $A^TA$ est une matrice carrée de taille $p$, et pour tout $X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned} A^TAX = 0 &\Longrightarrow X^TA^TAX = 0 \\ &\Longrightarrow (AX)^T(AX) = 0 \\ &\Longrightarrow \|AX\|^2 = 0 \\ &\Longrightarrow AX = 0 \\ &\Longrightarrow X = 0 \end{aligned}$$

d'après ce qu'on vient de dire. Ainsi, $A^TA$ est injective donc inversible car elle est carrée.

3) $H = \text{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ (cours). Ainsi, le vecteur $X$ qui minimise $\|AX - B\|$ minimise la distance entre $B$ et $H$, autrement dit $X$ répond au problème posé si et seulement si $AX$ est le projeté orthogonal de $B$ sur $H$.

4) Pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$$X^TA^TB - X^TA^TAX_0 = (AX)^T(B - AX_0)$$

or $AX \in H$ et $AX_0$ est le projeté orthogonal de $B$ sur $H$ donc $B - AX_0 \in H^\perp$, d'où $(AX)^T(B - AX_0) = 0$.

5) On en déduit que pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $X^T(A^TX_0) = X^T(A^TB)$ donc $A^TAX_0 = A^TB$ c'est à dire $CX_0 = A^TB$. Puisque $C$ est inversible on en déduit que $X_0 = C^{-1}A^TB$ donc finalement $Y = AX_0 = AC^{-1}A^TB$.

6) Pour ces valeurs de $A$ et $B$ on a $C = A^TA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. On cherche $C^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2]{L_1 \leftarrow \frac{1}{6}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$, et on a $Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$. On retrouve la solution de l'exercice précédent.

**Correction de l'exercice 8 :**

1) Pour $k = n$, $\sum_{j=1}^n a_{j,j} = \text{tr}(A) = \text{tr}(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j$ car la trace ne dépend pas de la base choisie. L'égalité est donc vraie dans ce cas.

2) Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\langle f(e_j), e_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \langle e_i, e_j \rangle = a_{j,j}$
En décomposant $e_j$ dans la base $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ on a $e_j = \sum_{i=1}^n \langle e_j, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$ donc $f(e_j) = \sum_{i=1}^n \langle e_j, \varepsilon_i \rangle f(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^n \langle e_j, \varepsilon_i \rangle \lambda_i \varepsilon_i$.
On a ainsi :

$$\begin{aligned} a_{j,j} &= \langle f(e_j), e_j \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \langle e_j, \varepsilon_i \rangle \lambda_i \varepsilon_i, e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle e_j, \varepsilon_i \rangle \lambda_i \langle \varepsilon_i, e_j \rangle \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle e_j, \varepsilon_i \rangle^2 \lambda_i$$

Or pour $k \in [\![1, n]\!]$ fixé, on a $\lambda_k \geq \lambda_{k+1} \leq \cdots \leq \lambda_n$ donc $\sum_{i=k+1}^{n} \langle e_j, \varepsilon_i \rangle^2 \lambda_i \leq \lambda_k \sum_{i=k+1}^{n} \langle e_j, \varepsilon_i \rangle^2$, d'où finalement :

$$a_{j,j} \leq \sum_{i=1}^{k} \langle e_j, \varepsilon_i \rangle^2 \lambda_i + \lambda_k \sum_{i=k+1} \langle e_j, \varepsilon_i \rangle^2$$

3) Considérons la matrice $A' = A - \lambda_k I_n$ et l'application $g$ associée dans la base canonique. La matrice $A'$ est diagonalisable et la base $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ est encore une base de vecteurs propres, avec $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $g(\varepsilon_i) = \lambda_i' = (\lambda_i - \lambda_k)\varepsilon_i$ tels que

$$\lambda_1 - \lambda_k \geq \lambda_2 - \lambda_k \geq \cdots \geq \lambda_{k-1} - \lambda_k \geq 0 \geq \lambda_{k+1} - \lambda_k \geq \cdots \geq \lambda_n - \lambda_k$$

donc

$$\lambda_1' \geq \lambda_2' \geq \cdots \geq \lambda_n'$$

et $\lambda_k' = 0$.
D'après la question précédente appliquée à $g$ on a donc :

$$a_{j,j}' \leq \sum_{i=1}^{k} \langle e_j, \varepsilon_i \rangle^2 \lambda_i' + \underbrace{\lambda_k'}_{=0} \sum_{i=k+1}^{n} \langle e_j, \varepsilon_i \rangle^2$$

donc

$$a_{j,j} - \lambda_k \leq \sum_{i=1}^{k} \langle e_j, \varepsilon_i \rangle^2 (\lambda_i - \lambda_k)$$

d'où le résultat :

$$a_{j,j} \leq \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_k) \langle e_j, \varepsilon_i \rangle^2 + \lambda_k$$

4) En sommant l'inégalité obtenue à la question précédente pour $j$ allant de 1 à $k$ on obtient :

$$\sum_{j=1}^{k} a_{j,j} \leq \sum_{j=1}^{k} \left( \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_k) \langle e_j, \varepsilon_i \rangle^2 + \lambda_k \right)$$
$$\leq k\lambda_k + \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_k) \sum_{j=1}^{k} \langle e_j, \varepsilon_i \rangle^2$$

Or, $\sum_{j=1}^{n} \langle e_j, \varepsilon_i \rangle^2 = \|\varepsilon_i\|$ en décomposant $\varepsilon_i$ dans la base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$. Ainsi, $\sum_{j=1}^{n} \langle e_j, \varepsilon_i \rangle^2 = 1$ et donc $\sum_{j=1}^{k} \langle e_j, \varepsilon_i \rangle^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, \varepsilon_i \rangle^2 \leq 1$. Comme $\forall i \in [\![1, k]\!],\ \lambda_i - \lambda_k \geq 0$ on obtient finalement :

$$\sum_{j=1}^{k} a_{j,j} \leq k\lambda_k + \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_k)$$
$$\leq k\lambda_k - k\lambda_k + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$$
$$\leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$$

**Correction de l'exercice 9 :**

1) $p(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} e_j$ par définition d'une matrice représentative.
2) $p(e_i) = \sum_{k=1}^{p} \langle e_i, f_k \rangle f_k$ car $p$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(p)$ dont $(f_1, ..., f_p)$ est une base.
3) La base canonique étant une base orthonormée, on a d'après la question 1 : $\|p(e_i)\|^2 = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2$.
La base $f_1, f_2, ..., f_p$ étant orthonormée, on a également $\|p(e_i)\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \langle e_i, f_k \rangle^2$.

4) Notons que $\mathrm{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2$ (exercice classique sur la trace). Or d'après la question précédente on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 &= \sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p \langle e_i, f_k\rangle^2 \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^n \langle e_i, f_k\rangle^2\end{aligned}$$

Or pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, en décomposant $f_k$ dans la base orthonormée $(e_1,..., e_n)$ on a $1 = \|f_k\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle f_k, e_i\rangle^2 = \sum_{i=1}^n \langle e_i, f_k\rangle^2$ donc finalement :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^p 1 = p$$

d'où le résultat.

**Correction de l'exercice 10 :**

1) a) On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} AX = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} 10x + 7y &= 32 \\ 7x + 5y &= 23 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 70x + 49y &= 224 \\ 70x + 50y &= 230 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 70x + 49y &= 224 \\ y &= 6 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 6 \end{cases} \end{aligned}$$

donc $AX = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \end{pmatrix} \iff X = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) La solution de $AX = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \end{pmatrix}$ semble assez éloignée de la solution de $AX = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \end{pmatrix}$ alors que $\begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \end{pmatrix}$ est proche de $\begin{pmatrix} 32 \\ 23 \end{pmatrix}$.

Plus précisément,

$$\left\| \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{0.1^2 + 0.1^2} = \sqrt{0.02}$$

tandis que

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.2 \\ 4.3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{0.8^2 + 1.7^2} = \sqrt{3.53}$$

2) a) Soit $k_0 \in [\![1, ]\!]$ tel que $|\lambda_{k_0}| = \min_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|$. Alors $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $|\lambda_k| \geq |\lambda_{k_0}| > 0$ (car les $\lambda_k$ sont tous non nuls), donc en passant à l'inverse on obtient :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \frac{1}{|\lambda_k|} \leq \frac{1}{|\lambda_{k_0}|}$$

avec égalité pour $k = k_0$. Ainsi, $\max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{|\lambda_k|} = \frac{1}{|\lambda_{k_0}|} = \frac{1}{\min_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|}$.

b) Pour tout vecteur $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a $\|AY\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\lambda_i y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 y_i^2}$.

Soient $k_0$ et $k_1$ tels que $|\lambda_{k_0}| = \min\limits_{1\leq k\leq n} |\lambda_k|$ et $|\lambda_{k_1}| = \max\limits_{1\leq k\leq n} |\lambda_k|$, alors :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ |\lambda_{k_0}| \leq |\lambda_i| \leq |\lambda_{k_1}|$$

donc

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_{k_0}^2 \leq \lambda_i^2 \leq \lambda_{k_1}^2$$

donc par somme d'inégalités :

$$\sqrt{\lambda_{k_0}^2 \sum_{i=1}^n y_i^2} \leq \|AY\| \leq \sqrt{\lambda_{k_1}^2 \sum_{i=1}^n y_i^2}$$

d'où

$$|\lambda_{k_0}|\|Y\|| \leq \|AY\| \leq |\lambda_{k_1}|\|Y\|$$

donc si $\|Y\| \neq 0$ on a

$$|\lambda_{k_0}| \leq \frac{\|AY\|}{\|Y\|} \leq |\lambda_{k_1}|$$

Remarquons que $\|B\| = \|AX\|$, et $\|R\| = \|AX - A\tilde{X}\| = \|A(\tilde{X} - X)\|$

Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \tilde{X} - X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{\|\tilde{X} - X\|\|B\|}{\|R\|\|X\|} &= \frac{\|\tilde{X} - X\|\|AX\|}{\|A(\tilde{X} - X)\|\|X\|} \\ &= \frac{\|Y\|}{\|AY\|} \times \frac{\|AX\|}{\|X\|} \end{aligned}$$

Or d'après l'inégalité précédemment obtenue, $|\lambda_{k_0}| \leq \dfrac{\|AX\|}{\|X\|} \leq |\lambda_{k_1}|$ et $\dfrac{1}{|\lambda_{k_1}|} \leq \dfrac{\|Y\|}{\|AY\|} \leq \dfrac{1}{|\lambda_{k_0}|}$.

d'où par produit d'inégalités :

$$\frac{|\lambda_{k_0}|}{|\lambda_{k_1}|} \leq \frac{\|\tilde{X} - X\|\|B\|}{\|R\|\|X\|} \leq \frac{|\lambda_{k_1}|}{|\lambda_{k_0}|}$$

qui est le résultat souhaité.

c) Il y a égalité dans l'inégalité précédente si toutes les égalités obtenues dans la question précédente sont des égalités, c'est à dire si $\|AX\| = |\lambda_{k_1}|\|X|$ et $\|AY\| = |\lambda_{k_0}|\|Y\|$
C'est le cas lorsque $X$ a tous ses coefficients nuls sauf celui de la $k_1$-ème ligne, et que $Y = \tilde{X} - X$ a tous ses coefficients nuls sauf celui de la $k_0$-ème ligne. Il suffit donc de définir la matrice $B$ comme étant la $k_1$-ème colonne de $A$, et $R$ comme étant la $k_0$-ème colonne de $A$, avec $k_0$ et $k_1$ définis comme dans la question précédente. On peut poser par exemple :

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k_1\text{-ème ligne} \qquad \text{et} \qquad R = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k_0\text{-ème ligne}$$

**Correction de l'exercice 11 :**

1) On a $Ax = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1,j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{n,j}x_j \end{pmatrix}$ donc ${}^t xAx = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_i x_j$.
De plus, $c(x) = {}^t x\omega - 1 = x_1\omega_1 + \cdots + x_n\omega_n - 1 = \sum_{i=1}^n \omega_i x_i - 1$.
2) Soit $x_0 \in E$ tel que $Ax_0 = 0$. Alors ${}^t x_0 Ax_0 = 0$ donc $q_A(x_0) = 0$. Or pour tout $x$ non nul $q_A(x) > 0$donc $x_0 = 0$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ donc $A$ est inversible.

3) Comme $AA^{-1} = I$ et que ${}^tI = I$ on a ${}^t(AA^{-1}) = I$ donc ${}^t(A^{-1})^tA = I$ donc ${}^t(A^{-1})A = I$ car $A$ est symétrique. Ainsi on a bien $A^{-1} = {}^t(A^{-1})$.
4) Soit $x$ un vecteur non nul de $E$. Posons $y = A^{-1}x$, $y$ est non nul donc $q_A(y) > 0$. Or $q_A(y) = {}^tyAy = {}^tx^t(A^{-1})AA^{-1}x = {}^txA^{-1}AA^{-1}x = {}^txA^{-1}x$. On a donc montré que ${}^txA^{-1}x > 0$.
5) Soit $F = \text{Vect}\left(A^{-1}\omega\right)$ et $G = \text{Vect}\left(\omega\right)^\perp$. Il suffit de montrer que $F \oplus G = E$.
$\omega$ est un vecteur non nul donc ${}^t\omega A^1\omega > 0$. On en déduit que $A^{-1}\omega$ n'est pas orthogonal à $\omega$ donc que $F \cap G = \{0\}$.
De plus, $\dim(F) = 1$ et $\dim(G) = n - 1$ donc $\dim(F \oplus G) = 1 + n - 1 = n$, donc on en conclut que $F \oplus G = E$ d'où le résultat.
6) Soit $x$ un vecteur (nécessairement non nul) vérifiant $c(x) = 0$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $h \in E$ tel que ${}^t\omega h = 0$ et tels que $x = \lambda A^{-1}\omega + h$ (d'après la question précédente).
On a donc :

$$\begin{aligned}
q_A(x) &= {}^t(\lambda A^{-1}\omega + h)A(\lambda A^{-1}\omega + h) \\
&= \lambda^2({}^t\omega A^{-1}AA^{-1}\omega) + \lambda({}^thAA^{-1}\omega) + \lambda({}^t\omega A^{-1}Ah) + {}^thAh \\
&= \lambda^2({}^t\omega A^{-1}\omega) + \lambda \underbrace{({}^th\omega)}_{=0} + \lambda \underbrace{({}^t\omega h)}_{=0} + {}^thAh \\
&= \lambda^2({}^t\omega A^{-1}\omega) + {}^thAh
\end{aligned}$$

Il suffit de montrer que $\lambda = \dfrac{1}{{}^t\omega A^{-1}\omega}$ pour avoir le résultat souhaité. Or, en partant de l'égalité $x = \lambda A^{-1}\omega + h$ on obtient ${}^t\omega x = \lambda({}^t\omega A^{-1}\Omega + {}^t\omega h$. Or ${}^t\omega x = 1$ car $c(x) = 0$ par hypothèse, et ${}^t\omega h = 0$, d'où finalement $\lambda = \dfrac{1}{{}^t\omega A^{-1}\omega}$.
7) D'après la question précédente, si $x \in C$ on a $q_A(x) = \dfrac{1}{{}^t\omega A^{-1}\omega} + {}^thAh$, avec ${}^thAh = q_A(h) \geq 0$, donc $q_A(x) \geq \dfrac{1}{{}^t\omega A^{-1}\omega}$ avec égalité si et seulement si $q_A(h) = 0$, si et seulement si $h = 0$, si et seulement si $x = \lambda_0 A^{-1}\omega$ avec $\lambda_0 = \dfrac{1}{{}^t\omega A^{-1}\omega}$, si et seulement si $Ax_0 = \lambda_0\omega$.