Programme de khôlle de maths n$^{\text{o}}$ 27

Semaine du 2 juin

Cours

- **Chapitre 16 : Intégration**
  - Intégrale sur un intervalle fermé d'une fonction positive, d'une fonction de signe quelconque, aire algébrique
  - Propriétés des intégrales : relation de Chasles, l'intégrale d'une fonction positive est positive, linéarité de l'intégrale, $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$, inégalité triangulaire, inégalité de la moyenne, $f \geq 0$ et $\int f = 0 \Rightarrow f = 0$
  - Théorème fondamental : $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f
  - Définition d'une primitive, primitives usuelles.
  - $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$ si F est une primitive quelconque de f
  - Intégration par partie
  - Changement de variable : soit f une fonction continue sur un intervalle I et φ une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ avec $\varphi([a, b]) \subset I$, alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

  - Fonctions paires et fonctions impaires
  - Sommes de Riemann : si f est continue sur $[a, b]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

    Si f est continue sur $[0, 1]$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Questions de cours

- **Questions de cours**
  - Démonstration du théorème fondamental : si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur $[a, b]$.
  - Démonstration de la formule de changement de variable : si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et $\varphi : [a, b] \to I$ est $\mathcal{C}^1$, alors $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$
  - Démonstration de : $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour une fonction f impaire et $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ pour une fonction f paire.
  - Formule et démonstration de la propriété d'intégration par partie
  - Tableau de primitives usuelles à connaître par coeur.