★

Exercice 1 — Voir correction

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 (t^3+4t)\,\mathrm{d}t$

b) $\displaystyle\int_{-3}^4 \mathrm{e}^{5u}\,\mathrm{d}u$

c) $\displaystyle\int_2^0 \frac{1}{3+2x}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{e}^{3t}}{6+\mathrm{e}^{3t}}$

e) $\displaystyle\int_{-1}^0 5u\,\mathrm{e}^{u^2+2}\,\mathrm{d}u$

f) $\displaystyle\int_{-2}^3 \cos(\pi x)\,\mathrm{d}x$

★

Exercice 2 — Voir correction

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{-2}^2 |x|\times(x^2+1)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{8x+4}{(x^2+x)^2}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(u+1)^3}\,\mathrm{d}u$

d) $\displaystyle\int_0^{\ln(3)} \frac{3\,\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 2\cos t(\sin t)^4\,\mathrm{d}t$

f) $\displaystyle\int_0^1 (6x^2-4x-3)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Pour la dernière intégrale, on pourra chercher une primitive de la fonction à intégrer sous la forme $F(x)=(ax+b)\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

★

Exercice 3 — Voir correction

On considère les intégrales $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x$ et $J=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x$.

1) Calculer $I+J$ et $I-J$
2) En déduire les valeurs de I et J

★

Exercice 4 — Voir correction

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+2}$.

1) Déterminer a et b tels que $f(x)=a\,\mathrm{e}^x+\dfrac{b\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2}$ pour tout réel x.
2) En déduire $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$

★

Exercice 5 — Voir correction

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n=\displaystyle\int_0^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. On ne cherchera pas à calculer u_n.

1) Montrer que (u_n) est croissante
2) Démontrer que pour tout réel $x\geq 0$, on a : $-x^2\leq -2x+1$, puis $\mathrm{e}^{-x^2}\leq \mathrm{e}^{-2x+1}$
3) En déduire que pour tout entier naturel n on a $u_n\leq \dfrac{\mathrm{e}}{2}$
4) Démontrer que la suite u_n est convergente. On ne cherchera pas à calculer sa limite.

★

Exercice 6 — Voir correction

Soit I_n définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1) Sans chercher à calculer I_n , montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n=0$
2) Calculer I_n+I_{n+1}
3) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

★
Exercice 7 — Voir correction

Soient f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - x}$, et la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$. On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

1) Étudier la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - x}$ sur $[0;+\infty[$ et en déduire son signe.
2) Montrer que la suite (I_n) est croissante
3) On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, $\mathrm{e}^x - x \geq \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$.
   a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n \leq \displaystyle\int_0^n 2x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
   b) Soit H la fonction définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ telle que $H(x) = (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$.
      Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $I_n \leq 2$
4) Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

★ ★
Exercice 8 — Voir correction

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$. Montrer que

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b (g(x))^2\,\mathrm{d}x\right)$$

Indication : considérer le signe de $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2\,\mathrm{d}x$ *en fonction de* λ.

★ ★
Exercice 9 — Voir correction

Calculer la dérivée de $f : x \longmapsto \displaystyle\int_{x^2}^{x^4} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Indication : on pourra considérer une primitive F *de* $x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ *sans chercher de formule explicite pour cette fonction.*

★ ★
Exercice 10 — Voir correction

(Inégalité de Young) Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et strictement croissante telle que $f(0) = 0$.

1) Pour tout $x > 0$, montrer que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = xf(x)$
2) En déduire que $\forall a, b > 0$, $\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^b f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t \geq ab$.

★ ★ ★
Exercice 11 — Voir correction

(D'après Oraux ENS 2019) Pour tout $x \in [0,1]$, on définit la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante. On définit la fonction $f_0 : x \in [0,1] \longmapsto 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$,

$$f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t$$

1) Déterminer les fonctions f_1 et f_2
2) Soit $x \in [0,1]$ fixé. Étudier le sens de variation de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.
3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0,1]$, $1 + x \leq f_n(x) \leq \mathrm{e}^x$.
4) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on notera $f(x)$.
5) Montrer que $\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq \mathrm{e}\,|x - y|$
6) En déduire que la fonction $x \mapsto f(x)$ est continue sur $[0,1]$.

Intégration par partie

⋆

Exercice 12 **Voir correction**

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par partie :

a) $\displaystyle\int_0^1 (x+1)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^3 \ln x\,\mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x$ d) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} (x^2+3x)\,\mathrm{e}^x$ f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$

⋆ ⋆

Exercice 13 **Voir correction**

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par partie :

a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2$ c) $\displaystyle\int_0^1 \arctan(u)\,\mathrm{d}u$

⋆ ⋆

Exercice 14 **Voir correction**

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $I_n = \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$.

1) À l'aide d'une intégration par partie, montrer que $I_n = u_n + \dfrac{1}{n}J_n$ où u_n est une suite qui tend vers 0 et $J_n = \displaystyle\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$
2) Montrer que la suite (J_n) est bornée.
3) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

⋆

Exercice 15 **Voir correction**

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 u^n\,\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$.

1) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
3) Trouver un équivalent simple de I_n lorsque l'entier n tend vers l'infini.

⋆

Exercice 16 **Voir correction**

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $M = \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|$, c'est à dire un réel tel que $\forall t \in [a,b]$, $|f'(t)| \leq M$.

1) Montrer que $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \dfrac{(b-a)^2}{4}M$
2) Déterminer dans quel(s) cas l'égalité précédente est une égalité.

Changement de variables

⋆

Exercice 17 **Voir correction**

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t\ln(t^2+1)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t, \quad u = t^2+1$

2) $\displaystyle\int_1^8 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{t}+t}, \quad u = \sqrt[3]{t} = t^{1/3}$

3) $\displaystyle\int_{1/8}^{1/3} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t}}, \quad u = \frac{1}{t}$

4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}, \quad u = \mathrm{e}^t$

⋆ ⋆

Exercice 18 — **Voir correction**

Soit $T > 0$ un réel et soit f une fonction périodique de période T sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x$$

⋆

Exercice 19 — **Voir correction**

1) À l'aide du changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$, démontrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin(t)+\cos(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sin(t)+\cos(t)}$$

2) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sin(t)+\cos(t)} = \frac{\pi}{4}$, puis en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}+x}$
Indication : on pourra utiliser le changement de variable $x = \sin(t)$

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 20 — **Voir correction**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$, appelée **intégrale de Wallis**.
Le but de cet exercice est d'étudier la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où

1) Calculer W_0 et W_1.
2) Montrer que (W_n) converge.
3) En posant $t = \frac{\pi}{2} - x$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$
4) En déduire W_2.
5) À l'aide d'une intégration par partie, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.
6) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.
7) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} W_n = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_n}{W_{n+1}} = 1$, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
8) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

Sommes de Riemann

⋆

Exercice 21 — **Voir correction**

1) À l'aide du changement de variable $\sin(t) = x$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t$
2) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2}$

⋆

Exercice 22 — **Voir correction**

1) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$
2) En déduire, à l'aide d'une somme de Riemann, la limite de (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 :

a)

$$\int_0^1 (t^3+4t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^4}{4}+2t^2\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{4}+2$$
$$\boxed{= \frac{9}{4}}$$

b)

$$\int_{-3}^4 \mathrm{e}^{5u}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{\mathrm{e}^{5u}}{5}\right]_{-3}^4$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{5\times 4}}{5} - \frac{\mathrm{e}^{-5\times 3}}{5}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{20}-\mathrm{e}^{-15}}{5}$$
$$\boxed{= \frac{\mathrm{e}^{35}-1}{5\,\mathrm{e}^{15}}}$$

c) La dérivée de $x \mapsto \ln(3+2x)$ est $x \mapsto \dfrac{2}{3+2x}$ donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{3+2x}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(3+2x)$

$$\int_2^0 \frac{1}{3+2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(3+2x)\right]_2^0$$
$$= \frac{1}{2}\ln(3+2\times 0) - \frac{1}{2}\ln(3+2\times 2)$$
$$= \frac{1}{2}(\ln(3)-\ln(7))$$
$$\boxed{= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{7}\right)}$$

d) La dérivée de $t \mapsto \ln(6+\mathrm{e}^{3t})$ est $t \mapsto \dfrac{3\,\mathrm{e}^{3t}}{6+\mathrm{e}^{3t}}$ donc une primitive de $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{3t}}{6+\mathrm{e}^{3t}}$ est $t \mapsto \dfrac{1}{3}\ln(6+\mathrm{e}^{3t})$

$$\int_0^2 \frac{\mathrm{e}^{3t}}{6+\mathrm{e}^{3t}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}\ln(6+\mathrm{e}^{3t})\right]_0^2$$
$$= \frac{1}{3}(\ln(6+\mathrm{e}^{6}) - \ln(6+\mathrm{e}^{0}))$$
$$\boxed{= \frac{1}{3}\ln\left(\frac{6+\mathrm{e}^6}{7}\right)}$$

e) La dérivée de $u \mapsto \mathrm{e}^{u^2+2}$ est $u \mapsto 2u\,\mathrm{e}^{u^2+2}$, donc une primitive de $u \mapsto 5u\,\mathrm{e}^{u^2+2}$ est $u \mapsto \dfrac{5}{2}\,\mathrm{e}^{u^2+2}$.

$$\int_{-1}^0 5u\,\mathrm{e}^{u^2+2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{5}{2}\,\mathrm{e}^{u^2+2}\right]_{-1}^0$$
$$\boxed{= \frac{5}{2}(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^3)}$$

f)

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{3} \cos(\pi x) &= \left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_{-2}^{3}\\ &= \frac{1}{\pi}(\sin(3\pi) - \sin(-2\pi))\\ &\boxed{= 0}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2 :

a)

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} |x|(x^2+1)\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{0} |x|(x^2+1)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} |x|(x^2+1)\,\mathrm{d}x && \text{d'après la relation de Chasles}\\ &= \int_{-2}^{0} (-x(x^2+1))\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} x(x^2+1)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

car sur l'intervalle $[-2,0]$ on a $|x| = -x$ et sur l'intervalle $[0,2]$ on a $|x| = x$.

$$\begin{aligned}&= \int_{-2}^{0} (-x^3 - x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} (x^3 + x)\,\mathrm{d}x\\ &= \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2}\\ &= -\left(-\frac{(-2)^4}{4} - \frac{(-2)^2}{2}\right) + \frac{2^4}{4} + \frac{2^2}{2}\\ &\boxed{= 12}\end{aligned}$$

b) La dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x}$ est $x \mapsto -\dfrac{2x+1}{(x^2+x)^2}$

$$\begin{aligned}\int_{1}^{2} \frac{8x+4}{(x^2+x)^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{-4}{x^2+x}\right]_{1}^{2}\\ &= \frac{-4}{2^2+2} - \frac{-4}{1^2+1}\\ &= \frac{-2}{3} + 2\\ &\boxed{= \frac{4}{3}}\end{aligned}$$

c) La dérivée de $u \mapsto \dfrac{1}{(u+1)^2} = (u+1)^{-2}$ est $u \mapsto -2(u+1)^{-3} = \dfrac{-2}{(u+1)^3}$.

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2} \frac{1}{(u+1)^3}\,\mathrm{d}u &= \left[\frac{-1}{2} \times \frac{1}{(u+1)^2}\right]_{0}^{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(0+1)^2} - \frac{1}{(2+1)^2}\right)\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{8}{9}\\ &\boxed{= \frac{4}{9}}\end{aligned}$$

d) La dérivée de $x \mapsto \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}$ est $x \mapsto \dfrac{2\,\mathrm{e}^{2x}}{2\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$.

On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln(3)} \frac{3\,\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}\,\mathrm{d}x &= \left[3\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\right]_0^{\ln(3)}\\ &= 3(\sqrt{1+\mathrm{e}^{2\ln(3)}}-\sqrt{1+\mathrm{e}^{0}})\\ &= 3(\sqrt{1+3^2}-\sqrt{1+1})\\ &= 3\sqrt{10}-3\sqrt{2}\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} 2\cos t(\sin t)^4\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{2(\sin t)^5}{5}\right]_{-\pi}^{\pi}\\ &= \frac{2}{5}((\sin\pi)^5-(\sin(-\pi))^5)\\ &= 0\end{aligned}$$

f) On suite l'indication de l'énoncé, et on cherche une primitive de $f : x \mapsto (6x^2-4x-3)\,\mathrm{e}^{-x^2}$ sous la forme $F : x \mapsto (ax+b)\,\mathrm{e}^{-x^2}$.
Soient a et b deux réels, et soit $F : x \longmapsto (ax+b)\,\mathrm{e}^{-x^2}$. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}F'(x) &= a\,\mathrm{e}-x^2-2x(ax+b)\,\mathrm{e}^{-x^2}\\ &= (-2ax^2-2bx+a)\,\mathrm{e}^{-x^2}\end{aligned}$$

Par identification des coefficients, F est une primitive de f si $\left\{\begin{array}{rcl}-2a &=& 6\\ -2b &=& -4\\ a &=& -3\end{array}\right.$, ce qui est vrai avec $a=-3$ et $b=2$.
Ainsi, $F : x \longmapsto (-3x+2)\,\mathrm{e}^{-x^2}$ est une primitive de f. On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 (6x^2-4x-3)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[(-3x+2)\,\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^1\\ &= -\mathrm{e}^{-1}-2\,\mathrm{e}^{0}\\ &= -\mathrm{e}^{-1}-2\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3 :

1) On a d'une part :

$$\begin{aligned}I+J &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+2}+\frac{1}{\mathrm{e}^x+2}\right)\mathrm{d}x && \text{car on intègre sur le même intervalle}\\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x+2}{\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 1\,\mathrm{d}x\\ &\boxed{=1}\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
I - J &= \int_0^1 \left(\frac{e^x + 1}{e^x + 2} - \frac{1}{e^x + 2} \right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 2}\, dx \\
&= [\ln(e^x + 2)]_0^1 \\
&= \ln(e + 2) - \ln(3) \\
&\boxed{= \ln\left(\frac{e+2}{3}\right)}
\end{aligned}$$

2) On résout le système $\begin{cases} I + J &= 1 \\ I - J &= \ln\left(\frac{e+3}{3}\right) \end{cases}$

$$\begin{cases} I + J &= 1 \\ I - J &= \ln\left(\frac{e^2+2}{3}\right) \end{cases} \iff \begin{cases} 2I &= 1 + \ln\left(\frac{e+2}{3}\right) \\ 2J &= 1 - \ln\left(\frac{e+2}{3}\right) \end{cases}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} I &= \frac{1}{2}\left(1 + \ln\left(\frac{e+2}{3}\right)\right) \\ J &= \frac{1}{2}\left(1 - \ln\left(\frac{e+2}{3}\right)\right) \end{cases}}$$

Correction de l'exercice 4 :

1) Soient a et b deux réels. On a

$$\begin{aligned}
a e^x + \frac{b e^x}{e^x + 2} &= \frac{a e^x (e^x + 2) + b e^x}{e^x + 2} \\
&= \frac{a e^{2x} + (2a + b) e^x}{e^x + 2}
\end{aligned}$$

donc une condition suffisante pour avoir $f(x) = a e^x + \frac{b e^x}{e^x + 2}$ est que a et b soient solution du système $\begin{cases} a &= 1 \\ 2a + b &= 0 \end{cases}$ par identification des coefficients.

$$\begin{cases} a &= 1 \\ 2a + b &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 1 \\ b &= -2 \end{cases}$$

donc $f(x) = e^x - \frac{2 e^x}{e^x + 2}$.

2)

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^0 f(x)\, dx &= \int_{-1}^0 \left(e^x - \frac{2 e^x}{e^x + 2} \right) dx && \text{d'après la question précédente} \\
&= [e^x - 2\ln(e^x + 2)]_{-1}^0 \\
&= \left(e^0 - 2\ln(e^0 + 2)\right) - \left(e^{-1} - 2\ln(e^{-1} + 2)\right) \\
&= 1 - 2\ln(3) - e^{-1} + 2\ln(e^{-1} + 2) \\
&= 2\ln\left(\frac{e^{-1} + 2}{3}\right) + 1 - e^{-1} \\
&= 2\ln\left(\frac{1 + 2e}{3e}\right) + 1 - e^{-1}
\end{aligned}$$

$$= 2\ln(1+2\,\mathrm{e}) - \ln(9) - 2 + 1 - \mathrm{e}^{-1}$$

$$\boxed{= 2\ln(1+2\,\mathrm{e}) - \ln(9) - 1 - \mathrm{e}^{-1}}$$

Correction de l'exercice 5 :

1) Pour tout entier naturel n, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^{n+1} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^{n} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Or, $\forall x \in [n, n+1],\ \mathrm{e}^{-x^2} > 0$ donc $\displaystyle\int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x > 0$.

On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

2) Pour tout réel x, $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$, donc $-x^2 \leq -2x+1$.

La fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\mathrm{e}^{-x^2} \leq \mathrm{e}^{-2x+1}$.

3) Pour tout entier naturel n, on a

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^n \mathrm{e}^{-2x+1}\,\mathrm{d}x && \text{car } \forall x \in [0,n],\ \mathrm{e}^{-x^2} \leq \mathrm{e}^{-2x+1} \text{ d'après la question précédente.} \\ &\leq \left[-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x+1}\right]_0^n \\ &\leq \frac{-\,\mathrm{e}^{-2n+1}}{2} - \left(-\frac{\mathrm{e}}{2}\right) \\ &\leq \frac{\mathrm{e}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-2n+1}}{2} \\ &\leq \frac{\mathrm{e}}{2} && \text{car } \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{\mathrm{e}^{-2n+1}}{2} > 0 \end{aligned}$$

4) La suite (u_n) est croissante d'après la question 1 et majorée par $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ d'après la question 3, on en déduit donc que (u_n) converge.

Correction de l'exercice 6 :

1) Pour tout $x \in [0,1]$, $1 + x \geq 1$ donc $\dfrac{1}{1+x} \leq 1$.

On en déduit que $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{x^n}{1+x} \leq x^n$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ I_n &\leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \\ &\leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ &\leq \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

De plus, pour tout $x \in [0,1]$, $\dfrac{x^n}{1+x} \geq 0$ donc $I_n \geq 0$ comme intégrale d'une fonction positive.

Finalement, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on en déduit par encadrement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2) Pour tout entier n, on a

$$\begin{aligned}
I_n + I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x^n}{1+x} + \frac{x^{n+1}}{1+x}\right)\mathrm{d}x && \text{car on intègre sur le même intervalle} \\
&= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^n \frac{1+x}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \\
&\boxed{= \frac{1}{n+1}}
\end{aligned}$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} - I_n$. On a donc

$$\begin{aligned}
I_1 &= 1 - I_0 \\
I_2 &= \frac{1}{2} - I_1 \\
&= \frac{1}{2} - 1 + I_0 \\
I_3 &= \frac{1}{3} - I_2 \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - I_0 \\
I_4 &= \frac{1}{4} - I_3 \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 + I_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = I_0 + (-1)^{n+1} I_n$.

- **Initialisation :** $S_1 = \dfrac{(-1)^2}{1} = 1$ d'une part, et d'autre part $I_0 + (-1)^{1+1} I_1 = I_0 + I_1 = 1$ d'après la question 2.
- **Hérédité :** Supposons que la relation soit vraie pour un certain entier $n \in N^*$.
  Alors $S_n = I_0 + (-1)^{n+1} I_n$.
  En ajoutant $\dfrac{(-1)^{n+2}}{n+1}$ de chaque côté, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= I_0 + (-1)^{n+1} I_n + \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \\
S_{n+1} &= I_0 + (-1)^n(-I_n + \frac{(-1)^2}{n+1}) \\
S_{n+1} &= I_0 + (-1)^n I_{n+1} \\
S_{n+1} &= I_0 + (-1)^{n+2} I_{n+1}
\end{aligned}$$

donc la relation est vraie au rang $n+1$.

— **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_n = I_0 + (-1)^{n+1} I_n$.

De plus, on a $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^0}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ d'après la question 1, on en déduit que S_n converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = I_0 = \ln(2)$.

Correction de l'exercice 7 :

1) On admet que f est définie sur $[0,+\infty[$, elle est donc dérivable comme quotient de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{e}^x - x - x(\mathrm{e}^x - 1)}{(\mathrm{e}^x - x)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x(1-x)}{(\mathrm{e}^x - x)^2} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in [0;+\infty[$, $\mathrm{e}^x > 0$ et $(\mathrm{e}^x - x)^2 \geq 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $1-x$.
De plus, $f(0) = 0$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ par croissance comparée.
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$	$\searrow$	0

ainsi, $\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) \geq 0$.

2) Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\geq 0 && \text{car } \forall x \in [n, n+1], f(x) \geq 0 \text{ d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

La suite (I_n) est donc croissante.

3) a) On admet que $\forall x \in [0;+\infty[,\ \mathrm{e}^x - x \geq \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$. On a donc $\forall x \in [0;+\infty[,\ \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - x} \leq \dfrac{2}{\mathrm{e}^x} = 2\,\mathrm{e}^{-x}$ donc $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x - x} \leq 2x\,\mathrm{e}^{-x}$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leq \displaystyle\int_0^n 2x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ par croissance de l'intégrale.

b) H est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables et $H'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x} = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

c) On déduit de la question précédente que $2H$ est une primitive de $x \mapsto 2x\,\mathrm{e}^{-x}$, donc

$$\begin{aligned} \int_0^n 2x\,\mathrm{e}^{-x} &= \left[2(-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^n \\ &= 2(-n-1)\,\mathrm{e}^{-n} + 2 \\ &\leq 2 && \text{car } \forall n \in \mathbb{N},\ 2(-n-1)\,\mathrm{e}^{-n} \leq 0 \end{aligned}$$

ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leq \displaystyle\int_0^n 2x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leq 2$

d) (I_n) est croissante d'après la question 2 et (I_n) est majorée par 2 d'après la question 3.c, on en déduit donc que (I_n) converge.

Correction de l'exercice 8 : On étudie la fonction $\varphi : \lambda \longmapsto \int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2 \,\mathrm{d}x$.
Pour tout $x \in [a,b]$, $(\lambda f(x) + g(x))^2 \geq 0$, donc $\varphi(x) \geq 0$.
De plus,

$$\begin{aligned}
\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda) &= \int_a^b (\lambda^2 (f(x))^2 + 2\lambda f(x)g(x) + (g(x))^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \lambda^2 \int_a^b (f(x))^2 \,\mathrm{d}x + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b (g(x))^2\,\mathrm{d}x \qquad \text{par linéarité de l'intégrale}
\end{aligned}$$

On en déduit que φ est une fonction polynôme de degré 2 qui est toujours positive d'après la première remarque.
Ainsi, le discriminant de φ est nécessairement négatif (ou nul).
On a donc

$$\begin{aligned}
4\left(\int_a^b f(x)g(x)\right)^2 - 4\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x \int_a^b (g(x))^2 &\leq 0 \\
4\left(\int_a^b f(x)g(x)\right)^2 &\leq 4\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x \int_a^b (g(x))^2\,\mathrm{d}x \\
\left(\int_a^b f(x)g(x)\right)^2 &\leq \int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x \int_a^b (g(x))^2\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

d'où le résultat demandé.
Correction de l'exercice 9 : $t \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$ est une fonction continue donc elle admet une primitive.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

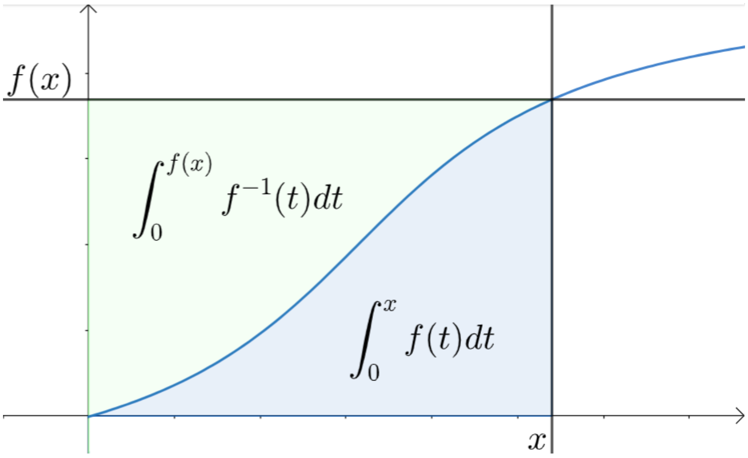
$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{x^2}^{x^4} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\
&= F(x^4) - F(x^2)
\end{aligned}$$

où F est une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$.
Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) &= 4x^3F'(x^4) - 2xF'(x^2) \\
&= 4x^3\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x^4}} - 2x\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2}} \\
&= 4x^3\,\mathrm{e}^{-|x|^2} - 2x\,\mathrm{e}^{-|x|}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 10 :

1) Dans la figure ci-dessous, on représenta la fonction f. L'intégrale $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est colorée en bleu et l'intégrale $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$ est colorée en vert. En effet, la courbe de f^{-1} s'obtient par symétrie axiale par rapport à la droite $y = x$, et cette dernière intégrale est donc l'aire entre la courbe de f et l'axe des ordonnées. La somme de ces deux aires est alors égale à celle du rectangle de côté x et $f(x)$.



Pour démontrer ce résultat par le calcul, on pose pour tout $x \geq 0$, $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t - xf(x)$.
D'après le théorème fondamental, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable et sa dérivée est $x \mapsto f(x)$.
De plus, f est continue (car dérivable) et strictement croissante, donc elle admet une bijection réciproque continue $f^{-1} : f(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{R}^+$. De plus, puisque f est croissante et que $f(0) = 0$, on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \geq 0$.

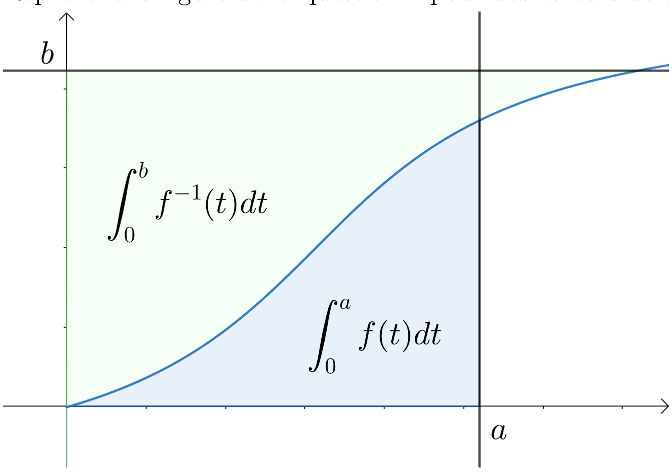
$$\forall x \geq 0, \int_0^f (x) f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = F(f(x)) - F(0)$$

où F est une primitive de f^{-1}. La dérivée de $x \mapsto \displaystyle\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$ est donc $x \mapsto f'(x)F'(f(x)) = f'(x)f^{-1}(f(x)) = xf'(x)$.
Enfin, $x \mapsto xf(x)$ est dérivable et sa dérivée est $f(x) + xf'(x)$.
On en déduit que φ est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que

$$\forall x \geq 0, F'(x) = f(x) + xf'(x) - x - xf'(x) = 0$$

Ainsi, φ est constante sur $[0;+\infty[$, et comme $F(0) = \displaystyle\int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(0)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t - 0 = 0$ car $f(0) = 0$ d'après l'énoncé, on en déduit que F est constante égale à 0, d'où l'égalité voulue.

2) Soit $(a,b) \in]0,+\infty[^2$.
Reprenons la figure de la question 1 pour des valeurs de a et b quelconque :



On comprend pourquoi la somme des deux intégrales excède l'aire du rectangle d'aire $a \times b$.
On raisonne par disjonction de cas selon que $b \geq f(a)$ ou $b < f(a)$.

- ▷ Supposons que $b \geq f(a)$ (cas représenté sur la figure ci-dessus). Alors, $\forall t \geq f(a)$, $f^{-1}(t) \geq a$ car f^{-1} est croissante.
  Alors, $\displaystyle\int_0^b f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_0^{f(a)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{f(a)}^b a\,\mathrm{d}t$.

$$\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^b f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(a)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t + a(b - f(a))$$

$$\geq af(a) + a(b - f(a)) \qquad \text{d'après la question précédente}$$
$$\geq ab$$

▷ <u>Supposons que $b \leq f(a)$</u>. Alors, $\forall t \geq f^{-1}(b),\ f(t) \geq b$ car f est croissante.
On a donc

$$\begin{aligned}
\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{f^{-1}(b)} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{f^{-1}(b)}^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t \\
&\geq \int_0^{f^{-1}(b)} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{f^{-1}(b)}^a b\,\mathrm{d}t + \int_0^b f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t \\
&\geq \int_0^{f^{-1}(b)} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^b f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t + b(a - f^{-1}(b)) \\
&\geq f^{-1}(b)f(f^{-1}(b) + b(a - f^{-1}(b)) && \text{d'après la question précédente} \\
&\geq bf^{-1}(b) + ab - bf^{-1}(b)
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 11 :

1) Pour tout $t \in [0,1],\ f_0(t - t^2) = 1$

Pour tout $x \in [0,1],\ f_1(x) = 1 + \int_0^x f_0(t - t^2)\,\mathrm{d}t = 1 + \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = 1 + x$

Pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= 1 + \int_0^x f_1(t - t^2)\,\mathrm{d}t \\
&= 1 + \int_0^x (1 + t - t^2)\,\mathrm{d}t \\
&= 1 + \left[t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^x \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}
\end{aligned}$$

2) Pour tout entier n, $f_n \geq 0$ entraîne $f'_{n+1} \geq 0$ donc f_{n+1} croissante. Si f_{n+1} est croissante, comme $f_{n+1}(0) = 1$ on en déduit que f_{n+1} est positive. Puisque $f_0 \geq 0$ on en déduit par récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est croissante et positive.

Soit $x \in [0,1]$ fixé. D'après la question précédente, on conjecture que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Montrons par récurrence que pour tout entier n on a $\forall x \in [0,1],\ f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$

— **Initialisation :** $\forall x \in [0,1],\ f_1(x) - f_0(x) = 1 + x - 1 = x \geq 0$.

— **Hérédité :** Supposons que $\forall x \in [0,1],\ f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$.
Alors,

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0,1],\ f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x) &= \left(1 + \int_0^x f_{n+1}(t - t^2)\,\mathrm{d}t\right) - \left(1 + \int_0^x f_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \int_0^x (f_{n+1}(t - t^2) - f_n(t - t^2))\,\mathrm{d}t \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

car $\forall t \in [0,1], f_{n+1}(t - t^2) - f_n(t - t^2) \geq 0$ par hypothèse de récurrence

— **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\forall x \in [0,1],\ f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$.

On en déduit que quel que soit $x \in [0,1]$ fixé, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3) On raisonne par récurrence, on note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n) : \forall x \in [0,1],\ 1+x \leq f_n(x) \leq \mathrm{e}^x$.

— **Initialisation :** On a déjà montré que $\forall x \in [0,1], f_1(x) = 1+x \geq 1+x$, et on sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geq 1+x$ (par étude de la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^x - x - 1$ par exemple).
Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

— **Hérédité :** Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vrai pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors, $\forall x \in [0,1],\ 1+x \leq f_n(x) \leq \mathrm{e}^x$.
On a donc, $\forall t \in [0,1], 1+t-t^2 \leq f_n(t-t^2) \leq \mathrm{e}^{t-t^2}$.
Le polynôme $t-t^2$ a deux racines, 0 et 1, on en déduit ses variations :

t	0	$\frac{1}{2}$	1
$t-t^2$	0 $\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$ 0

Ainsi, on a déjà $\forall t \in [0,1], 1 \leq f_n(t-t^2)$. On en déduit que $\forall x \in [0,1],\ 1+\displaystyle\int_0^x f_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t \geq 1+\int_0^x 1\,\mathrm{d}t \geq 1+x$.
Ainsi, $f_{n+1}(x) \geq 1+x$.
Pour démontrer l'autre inégalité, on utilise le fait que $\forall t \in [0,1], t-t^2 \leq t$ donc $\mathrm{e}^{t-t^2} \leq \mathrm{e}^t$. En intégrant l'inégalité $f_n(t-t^2) \leq \mathrm{e}^{t-t^2}$ sur $[0,x]$, on obtient

$$\int_0^x f_n(t-t^2) \leq \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0$$

Ainsi, $f_{n+1}(x) = 1+\displaystyle\int_0^x f_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t \leq 1+\mathrm{e}^x - 1 \leq \mathrm{e}^x$.

— **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\forall x \in [0,1],\ 1+x \leq f_n(x) \leq \mathrm{e}^x$.

4) Pour un réel x fixé, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante d'après la question 2 et majorée par e^x, donc cette suite converge. On note $f(x)$ la limite.

5) Par récurrence immédiate, pour tout entier n, f_n est dérivable.
D'après le théorème fondamental, $\forall x \in [0,1],\ f'_{n+1}(x) = f_n(x-x^2) \leq \mathrm{e}^{x-x^2} \leq \mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}$ car $x \in [0,1]$.
Ainsi, e est un majorant de $|f'_{n+1}(x)|$ sur $[0,1]$. Soient $(x,y) \in [0,1]^2$, d'après l'inégalité des accroissements finis on a $|f_{n+1}(x) - f_{n+1}(y)| \leq \mathrm{e}\,|x-y|$
Puisque les suites $(f_{n+1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_{n+1}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $f(x)$ et $f(y)$, on en déduit par passage à la limite que $|f(x)-f(y)| \leq \mathrm{e}\,|x-y|$.

6) Montrons que pour tout $a \in [0,1]$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Soit donc $a \in [0,1]$ fixé et soit $\varepsilon > 0$.
Pour tout $x \in [0,1]$, $|f(x)-f(a)| \leq \mathrm{e}\,|x-a|$.
On pose $\mu = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}\varepsilon$. Alors pour tout $x \in]a-\mu, a+\mu[$,

$$\begin{aligned}|f(x)-f(a)| &\leq \mathrm{e}\,|x-a| \\ &\leq \mathrm{e} \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}\varepsilon \\ &\leq \frac{1}{2}\varepsilon \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

On a donc montré que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, donc f est continue en a. Le raisonnement ci-dessus étant valable quel que soit $a \in [0,1]$, f est finalement continue sur $[0,1]$.

Correction de l'exercice 12 :

a)

$$\int_0^1 (x+1)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [(x+1)\,\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\,\mathrm{e} - 1 - [\mathrm{e}^x]_0^1$$
$$= 2\,\mathrm{e} - 1 - \mathrm{e} + 1$$
$$\boxed{= \mathrm{e}}$$

b)

$$\int_0^\pi x\sin x = [-x\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos x\,\mathrm{d}x$$
$$= -\pi(-1) + 0 + [\sin x]_0^\pi$$
$$\boxed{= \pi}$$

c)

$$\int_1^{\mathrm{e}} x^3\ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\ln(x)\right] - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^4}{4}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\mathrm{e}^4}{4}\ln(\mathrm{e}) - \frac{\mathrm{e}^4}{4}\ln(1) - \int_1^{\mathrm{e}}\frac{x^3}{4}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\mathrm{e}^4}{4} - \left[\frac{x^4}{16}\right]_1^{\mathrm{e}}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^4}{4} - \frac{\mathrm{e}^4}{16} + \frac{1}{16}$$
$$\boxed{= \frac{3\,\mathrm{e}^4 + 1}{16}}$$

d)

$$\int_0^{\ln(2)} (x^2+3x)\,\mathrm{e}^x = \left[(x^2+3x)\,\mathrm{e}^x\right]_0^{\ln(2)} - \int_0^{\ln(2)} (2x+3)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$
$$= ((\ln(2))^2 + 3\ln(2))\,\mathrm{e}^{\ln(2)} - 0 - \left([(2x+3)\,\mathrm{e}^x]_0^{\ln(2)} - \int_0^{\ln(2)} 2\,\mathrm{e}^x\right)$$
$$= 2(\ln(2))^2 + 6\ln(2) - (2(2\ln(2)+3) - 3) + [2\,\mathrm{e}^x]_0^{\ln(2)}$$
$$= 2(\ln(2))^2 + 6\ln(2) - 4\ln(2) - 6 + 3 + 4 - 2$$
$$\boxed{= 2(\ln(2))^2 + 2\ln(2) - 1}$$

e)

$$\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[(\ln(t))^2\right]_1^{\mathrm{e}^2} - \int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$
$$2\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{\ln(t)}{t} = (\ln(\mathrm{e}^2))^2 - (\ln(1))^2$$
$$\int_1^{\mathrm{e}^2} \boxed{= \frac{(\ln(e^2))^2}{2} = 2}$$

f)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^\theta \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \left[-\mathrm{e}^\theta\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\mathrm{e}^\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$= -\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\cos(\frac{\pi}{2}) - (-1\cos(0)) + \left[\mathrm{e}^\theta\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta = 1 + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\pi/2) - 0$$

donc $\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\right)}$

Correction de l'exercice 13 :

1)

$$\begin{aligned}
\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x &= \int_1^{\mathrm{e}} 1 \times \ln x \,\mathrm{d}x \\
&= [x\ln(x)]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e} - 0 - (\mathrm{e} - 1) \\
&\boxed{= 1}
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^2 &= \left[x(\ln(x))^2\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} 2x\ln x \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e} - 0 - \int_1^{\mathrm{e}} 2\ln(x) \\
&= \mathrm{e} - 2[x\ln x - x]_1^{\mathrm{e}} \\
&= \mathrm{e} - 2(\mathrm{e} - \mathrm{e} - (0 - 1)) \\
&\boxed{= \mathrm{e} - 2}
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \arctan(u)\,\mathrm{d}u &= [u\arctan u]_0^1 - \int_0^1 \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \arctan(1) - \left[\frac{1}{2}\ln(1+u^2)\right]_0^1 \\
&\boxed{= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 14 :

1) Par intégration par partie, comme f est $\mathcal{C}^1$, on a

$$\begin{aligned}
I_n &= \left[-\frac{1}{n}f(t)\cos(nt)\right]_a^b + \int_a^b \frac{1}{n}f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{f(a)\cos(na) - f(b)\cos(nb)}{n} + \frac{1}{n}J_n
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{f(a)\cos(na) - f(b)\cos(nb)}{n}$ tend vers 0.
f est continue sur $[a,b]$. Une fonction continue sur un segment est bornée. Il existe un réel M tel que pour tout $x \in [a,b]$, $|f(x)| \leq M$. De plus, $\forall x \in [a,b], |\cos(nx)| \leq 1$.
On en déduit que $|f(a)\cos(na) - f(b)\cos(nb)| \leq |f(a)| \times |\cos(na)| + |f(b)| \times |\cos(nb)| \leq 2M$
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \dfrac{2M}{n}$ donc $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2) f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ donc f' est continue sur $[a,b]$. Une fonction continue sur un segment est bornée donc il existe $Q \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [a,b]$, $|f'(x)| \leq Q$.

Alors,

$$\begin{aligned}|J_n| &= \left|\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \int_a^b |f'(t)\cos(nt)|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_a^b M\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

car $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a,b],\ |\cos(nt)| \leq 1$.

$$\leq M(b-a)$$

Donc $|J_n|$ est majoré par $M(b-a)$ donc J_n est bornée.

3) Comme J_n est bornée on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}J_n = 0$ donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ par somme de limites.

Correction de l'exercice 15 :

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in [0,1],\ 0 \leq u^n\,\mathrm{e}^u \leq u^n\,\mathrm{e}$ donc $0 \leq I_n \leq \mathrm{e}\displaystyle\int_0^1 u^n\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}\left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}}{n+1}$.

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}}{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2) Par intégration par partie, pour tout entier naturel n on a

$$\begin{aligned}I_n &= \left[\frac{u^{n+1}\,\mathrm{e}^u}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{u^{n+1}\,\mathrm{e}^u}{n+1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\mathrm{e}}{n+1} - \frac{1}{n+1}I_{n+1}\end{aligned}$$

3) D'après la question précédente, $(n+1)I_n = \mathrm{e} - I_{n+1}$ et $I_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)I_n = \mathrm{e}$.

   Ainsi, $I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}}{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}}{n}$.

Correction de l'exercice 16 :

1) f est de classe $\mathcal{C}^1$ et M est un majorant de $|f'(t)|$ sur $[a,b]$. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $t \in [a,b]$ on a $|f(t) - f(a)| \leq M|t-a|$ et $|f(b) - f(t)| \leq M|b-t|$ donc $|f(t)| \leq M(t-a)$ et $|f(t)| \leq M(b-t)$. Le problème est symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$, on sépare l'intégrale en deux :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} M(t-a)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-t)\,\mathrm{d}t \\ &\leq M\left[\frac{(t-a)^2}{2}\right]_a^{\frac{a+b}{2}} - M\left[\frac{(b-t)^2}{2}\right]_{\frac{a+b}{2}}^b \\ &\leq \frac{M}{2}\left(\left(\frac{a+b}{2} - a\right)^2\right) + \frac{M}{2}\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2\end{aligned}$$

$$\leq \frac{M}{2}\left(\frac{(b-a)^2}{4}+\frac{(b-a)^2}{4}\right)$$

$$\boxed{\leq \frac{M(b-a)^2}{4}}$$

2) L'inégalité précédente est une égalité si et seulement si chacune des inégalité utilisées sont des égalités. Ainsi, pour tout $t \in [a, \frac{a+b}{2}]$, $|f(t)| = M(t-a)$ et pour tout $t \in [\frac{a+b}{2}, b]$, $|f(t)| = M(b-t)$.
   On a donc $\forall t \in [a, \frac{a+b}{2}],\ f(t)^2 = M^2(t-a)^2$ et $\forall t \in [\frac{a+b}{2}, b],\ f(t)^2 = M^2(b-t)^2$.
   Or f^2 est dérivable comme carré d'une fonction dérivable. Sur $[a, \frac{a+b}{2}]$ on a $f'(t) = 2M^2(t-a)$ et sur $[\frac{a+b}{2}, b]$ on a $f'(t) = -2M^2(b-t)$. Ainsi, $f'(\frac{a+b}{2}) = 2M^2\dfrac{b-a}{2} = -2M^2\dfrac{b-a}{2}$, ce qui n'est possible que si $M=0$, donc f est la fonction nulle.

Correction de l'exercice 17 :

1) $u = t^2+1 \iff t = \sqrt{u-1}$
   $\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2t\ln(t^2+1)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t &= \int_{0^2+1}^{1^2+1} \frac{\ln(u)}{u}\,\mathrm{d}u\\ &= \left[\frac{(\ln(u))^2}{2}\right]_1^2\\ &= \frac{(\ln(2))^2}{2}\end{aligned}$$

2) $u = t^{1/3} \iff t = u^3$
   $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{3}t^{-2/3}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{3(\sqrt[3]{t})^2}\,\mathrm{d}t$ donc $\mathrm{d}t = 3u^2\,\mathrm{d}u$.

$$\begin{aligned}\int_1^8 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{t}+t} &= \int_{\sqrt[3]{1}}^{\sqrt[3]{8}} \frac{3u^2\,\mathrm{d}u}{u+u^3}\\ &= \int_1^2 \frac{3u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\\ &= \left[\frac{3}{2}\ln(1+u^2)\right]_1^2\\ &= \frac{3}{2}\ln(5) - \frac{3}{2}\ln(2)\\ &= \frac{3}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)\end{aligned}$$

3) $u = \dfrac{1}{t} \iff t = \dfrac{1}{u}$
   $\mathrm{d}u = -\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -u^2\,\mathrm{d}t$ donc $\mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2}$.

$$\begin{aligned}\int_{1/8}^{1/3} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t}} &= \int_2^1 \frac{u}{\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}}} \times \left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right)\\ &= \int_3^8 \frac{-\,\mathrm{d}u}{u\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}}}\\ &= \int_3^8 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u}}\\ &= \left[2\sqrt{1+u}\right]_3^8\end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{9} - 2\sqrt{4}$$
$$= 2$$

4) $u = \mathrm{e}^t$

$\mathrm{d}u = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = u\,\mathrm{d}t$ donc $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{u}$

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln(\sqrt{3})} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}u}{u\left(u + \frac{1}{u}\right)} \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} \\ &= \arctan(\sqrt{3}) - \arctan(1) \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 18 : D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b+T}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(u+T)\,\mathrm{d}u && \text{en posant } u = x - T,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(u)\,\mathrm{d}u && \text{car } f \text{ est } T\text{-périodique} \\ &= int_b^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x && \text{d'après la relation de Chasles} \\ &\boxed{= \int_b^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 19 :

1) On pose $u = \dfrac{\pi}{2} - t$ donc $\mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}t$. Ainsi on a

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin(t)+\cos(t)} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}\,\mathrm{d}u \\ &\boxed{= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{\cos u + \sin u}\,\mathrm{d}u} && \text{par application des formules de trigonométrie.}\end{aligned}$$

2) On en déduit que $2 \times \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t + \sin t}{\sin t + \cos t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$, d'où $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$.

En posant $x = \sin t$, on a $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ et $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1-x^2}$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin t + \cos t} &= \int_{\sin(0)}^{\sin(\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x + \sqrt{1-x^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}+x}\end{aligned}$$

on en conclut que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}+x} = \frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 20 :

1)

$$\begin{aligned} W_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x \\ &\boxed{= \frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \geq 0$ car c'est l'intégrale d'une fonction positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
De plus, (W_n) est une suite décroissante. En effet, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin(x) \leq 1$ donc $\sin^{n+1}(x) \leq \sin^n(x)$. Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq W_n \end{aligned}$$

(W_n) est donc une suite décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel $\ell \geq 0$.

3) On pose le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - x$, donc $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x$.
On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{\pi}{2}-0}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}} \sin^n(\frac{\pi}{2} - t)(-\,\mathrm{d}t) \\ &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t \\ &\boxed{= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

4) On en déduit que $W_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$.
donc

$$\begin{aligned} 2W_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(x) + \cos^2(x))\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, \mathrm{d}x$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

On en déduit que $\boxed{W_2 = \frac{\pi}{4}}$.

5) Pour tout entier naturel n, on a par intégration par partie

$$\begin{aligned}
W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x) \, \mathrm{d}x &= \left[-\cos(x)\sin^{n+1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x) \times (n+1)\cos(x)\sin^n(x) \, \mathrm{d}x \\
&= 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin^n(x) \, \mathrm{d}x \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(x))\sin^n(x) \, \mathrm{d}x \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \, \mathrm{d}x - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x) \, \mathrm{d}x \\
&= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}
\end{aligned}$$

On en déduit donc

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$$
$$\boxed{W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n}$$

6) Montrons que la suite $\left((n+1)W_nW_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = (n+1)W_nW_{n+1}$. Alors

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} &= (n+2)W_{n+1}W_{n+2} \\
&= (n+2)W_{n+1}\frac{n+1}{n+2}W_n && \text{d'après la question 5} \\
&= (n+1)W_nW_{n+1} \\
&= V_n
\end{aligned}$$

donc (V_n) est bien une suite constante, et de plus $V_0 = (0+1)W_0W_1 = 1 \times \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2}$ d'après la question 1.
Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{\pi}{2}$ donc $(n+1)W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

7) On a montré à la question 2 que (W_n) convergeait vers un réel ℓ.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$ d'après la question précédente. Or $\lim_{n\to+\infty} W_n = \lim_{n\to+\infty} W_{n+1} = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2(n+1)} = 0$ donc par passage à la limite on obtient $\ell^2 = 0$ donc $\boxed{\ell = 0}$.
Intéressons nous maintenant à la suite $\frac{W_n}{W_{n+1}}$.
On a montré à la question 2 que (W_n) était décroissante, ainsi pour tout entier n on a $W_{n+1} \leq W_n$ et $W_{n+2} \leq W_{n+1}$.
Ainsi, $\frac{W_n}{W_{n+1}} \geq 1$ et de plus, $\frac{n+2}{n+1} = \frac{W_n}{W_{n+2}} \geq \frac{W_n}{W_{n+1}} \geq 1$ car $W_n > 0$.
Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, on en déduit par théorème d'encadrement que $\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.
On a ainsi $W_n \underset{n\to\infty}{\sim} W_{n+1}$, donc d'après la question précédente $\frac{\pi}{2} = (n+1)W_nW_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} nW_n^2$. Ainsi, $\sqrt{n}W_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

8) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la question 5, on a

$$\begin{aligned}
W_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} W_{2n-2} \\
&= \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)} W_{2n-4} \\
&= \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 1}{2n \times (2n-2) \times \cdots \times 2} \times W_0 \\
&= \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 1}{2n \times (2n-2) \times \cdots \times 2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{((2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 1) \times (2n \times (2n-2) \times \cdots \times 2}{(2n \times (2n-2) \times \cdots \times 2)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n \times (n-1) \times \cdots \times 1)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Pour le rédiger plus rigoureusement, on raisonne par récurrence :

— **Initialisation :** Pour $n = 0$, $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{0!}{2^0 \times 0!^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, donc l'égalité est vraie au rang 0.

— **Hérédité :** Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$, et montrons que $W_{2n+2} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!^2} \frac{\pi}{2}$.
Alors,

$$\begin{aligned}
W_{2(n+1)} &= W_{2n+2} \\
&= \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} && \text{d'après la question 5} \\
&= \frac{(2n+1)(2n)!}{(2n+2)2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{(2n+2)!}{(2n+2)^2 2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2} && \text{en multipliant par } \frac{2n+2}{2n+2} \\
&= \frac{(2n+2)!}{2^2(n+1)^2 2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

donc l'égalité est vraie au rang $n+1$

— **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 21 :

1) On fait le changement de variable $x = \sin t$, donc $\mathrm{d}x = \cos t \, \mathrm{d}t$.
On a donc

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x = \int_{\sin(0)}^{\sin(\frac{\pi}{2})} \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos t \, \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos(t)\, \mathrm{d}t$$

car sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ on a $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2t)}{2} \, \mathrm{d}t \qquad \text{d'après la formule de linéarisation du cosinus}$$

2) Notons pour tout entier naturel non nul n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2}$.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n\sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}}}{n^2} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad \text{avec } f : x \longmapsto \sqrt{1 - x^2}.
\end{aligned}$$

Or f est une fonction continue sur $[0, 1]$ donc d'après la propriété des sommes de Riemann, S_n converge et

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} S_n &= \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On calcule cette intégrale à l'aide de la question précédente :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, \mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2t)}{2} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \, \mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t)}{2} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{4} + \left[\frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{\sin(\pi)}{4} - \frac{\sin 0}{4} \qquad \boxed{= \frac{\pi}{4}}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2 - k^2}{n^2} = \frac{\pi}{4}}$

Correction de l'exercice 22 :

1) Par intégration par partie :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln(1 + x) \, \mathrm{d}x &= [(1 + x) \ln(1 + x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{1 + x}{1 + x} \, \mathrm{d}x \\
&= \boxed{2 \ln(2) - 1}
\end{aligned}$$

Remarque : on pouvait aussi faire le changement de variable $u = x + 1$ et utiliser la primitive $x \mapsto x \ln x - x$ de $x \mapsto \ln x$.

2) u_n n'est pas sous forme de somme, on s'intéresse à la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \ln(u_n)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n} \left(\ln((2n)!) - \ln(n^n) - \ln(n!)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n} \ln k - n\ln n - \sum_{k=1}^{n} \ln\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=n+1}^{2n} \ln k - n\ln n\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \ln(n+j) - n\ln n\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} (\ln(n+j) - \ln n)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln\left(1+\frac{j}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)
\end{aligned}
$$

avec $f : x \longmapsto \ln(1+x)$ continue sur $[0,1]$

Ainsi, d'après la propriété des sommes de Riemann, (v_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\ln(2)-1$ d'après la question précédente.
Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathrm{e}^{v}_{n}$, on en déduit que (u_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}^{2\ln(2)-1}$ par composition de limites.

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = (\mathrm{e}^{\ln(2)})^2\,\mathrm{e}^{-1} = 4\,\mathrm{e}^{-1}}$