Programme de khôlle n° 23

Semaine du 28 Avril

Cours

- **Chapitre 14 : Matrices et applications linéaires**
  - Représentation matricielle de vecteurs. Matrice représentative d'une application linéaire dans des bases.
  - Application $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, x \mapsto A(x)$ canoniquement associée à une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, représentée en colonnes par l'application $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \mapsto AX$
  - Image et noyau d'une matrice : $\operatorname{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}), AX = 0\}$ et $\operatorname{Im}(A) = \{AX, X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})\}$
  - $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_m)$ où $C_1, \dots, C_m$ sont les colonnes de A
  - f est injective (resp. surjective) si et seulement si sa matrice représentative dans des bases quelconques a ses colonnes libres (resp. génératrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$)
  - Opérations : matrice d'une somme d'applications linéaires, matrice d'une composée, matrice de f^n, matrice de f^{-1}.
  - Changement de base : matrice de passage, formules de changement de base pour une application linéaire (de $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ à $\mathcal{E}', \mathcal{F}'$) et pour un endomorphisme (de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$).
  - Matrices équivalentes, matrices semblables
  - Trace d'un endomorphisme
  - Rang : $\operatorname{rg}(A) = \dim(\operatorname{Im}(A))$, cette nouvelle définition coincide avec la précédente (nombre de lignes non nulles dans une forme échelonnée de A).

    Si P est inversible, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(PA) = \operatorname{rg}(AP)$
  - A est de rang r si et seulement si elle est équivalente à la matrice $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,m-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,m-r} \end{array}\right)$
  - Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.
  - Rang d'une famille de vecteurs.
  - Explication du pivot de Gauss en terme de multiplication par des matrices inversibles.
  - Théorème du rang pour les matrices

Questions de cours et exercice

- **Questions de cours**
  - Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$, $\mathcal{B}$ base de E, $\mathcal{B}'$ base de F et $\mathcal{B}''$ base de G, alors $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$
  - f est injective si et seulement si les colonnes de la matrice représentative de f dans des bases quelconques forment une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
  - Si $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, alors $\operatorname{rg}(AB) \leq \min(\operatorname{rg}(A), \operatorname{rg}(B))$.