Probabilités conditionnelles

Hypothèses. Soit une expérience aléatoire d'univers Ω sur laquelle est définie une probabilité P.
Soit A et B deux évènements. On suppose $P(A) \neq 0$.

Définition. On appelle **probabilité conditionnelle de $\boldsymbol{B}$ sachant $\boldsymbol{A}$** la probabilité que l'évènement B se réalise sachant que l'évènement A est réalisé. Elle est notée $P_A(B)$ ou $P(B \mid A)$ et est définie par $\boldsymbol{P_A(B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

Exemple. On donne ci-contre la répartition des spectateurs sur une journée dans une salle de cinéma selon les séances et le tarif. On choisit un de ces spectateurs au hasard et on considère les événements :

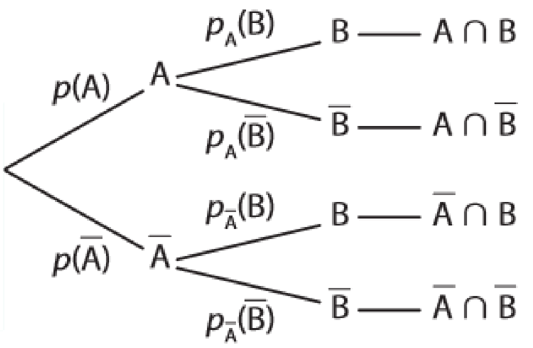
- M : « La personne a assisté à la séance du matin. »
- D : « La personne a payé demi-tarif. »

	Plein tarif	Demi-tarif	Total
Séance du matin	103	91	194
Séance du soir	280	26	306
Total	383	117	500

La probabilité que la personne ait assisté à la séance du matin sachant qu'elle a payé demi-tarif est $P_D(M) = \frac{91}{117}$ car parmi les 117 personnes ayant payé demi-tarif, 91 sont venues le matin.
De même, $P_M(D)$, la probabilité que la personne ait payé demi-tarif, sachant qu'elle a assisté à la séance du matin est $\frac{91}{194}$. Attention à ne pas confondre $P_D(M)$ et $P(D \cap M)$

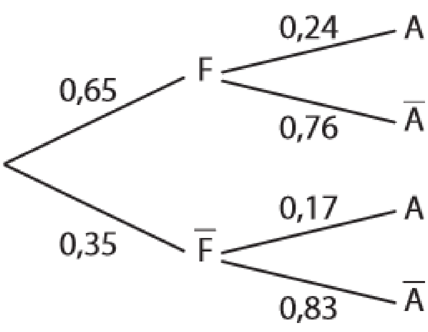
Propriété. Probabilité conditionnelle et intersection
On a, de manière équivalente, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ et $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

Propriété. Règle du produit
Soit un évènement A tel que $P(A) \neq 0$ et $P(\overline{A}) \neq 0$.
Dans l'arbre pondéré ci-contre, les probabilités des événements $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, et $\overline{A} \cap \overline{B}$ peuvent être obtenues en multipliant entre-elles les probabilités écrites sur les branches qui « mènent » à l'événement.



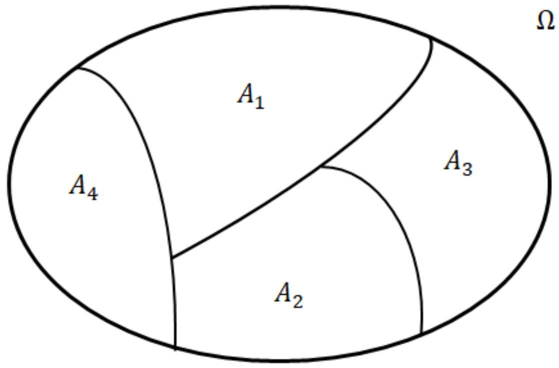
Exemple. Lors d'une colonie de vacances, il y a:
- 65 % de filles, dont 24 % souhaitent faire une randonnée.
- 35 % de garçons, dont 17 % souhaitent faire une randonnée.

On tire au sort un des enfants et on considère les événements F : « L'enfant est une fille. » et A : « L'enfant souhaite faire une randonnée. ». On peut représenter la situation par l'arbre pondéré ci-contre. La probabilité que l'enfant tiré au sort soit une fille qui souhaite faire une randonnée est $P(F \cap A) = P(F) \times P_F(A) = 0{,}65 \times 0{,}24 = 0{,}156$. La probabilité que l'enfant tiré au sort soit un garçon qui ne souhaite pas faire de randonnée est $P(\overline{F} \cap \overline{A}) = P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(\overline{A}) = 0{,}35 \times 0{,}83 = 0{,}2905$.



Définition. Partition de l'univers.
Soit $n \geq 2$ événements de probabilités non nulles $A_1, A_2, \dots, A_n$. Ces événements forment **une partition de l'univers Ω** si :
- Ils sont disjoints deux à deux, c'est-à-dire
- Leur union est l'univers, c'est-à-dire

Plus généralement, on dit que $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment **une partition d'un événement B** si ils sont disjoints deux à deux et leur union est égale à B.

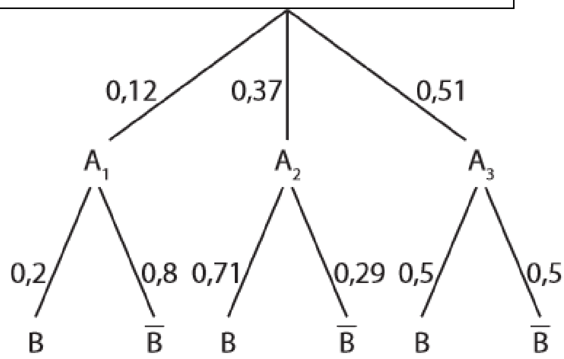


Remarque. Un événement A et son contraire $\overline{A}$ forment toujours une partition de l'univers Ω.

Propriété. Les probabilités d'une partition s'additionnent.
Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de l'univers Ω, alors $P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = P(\Omega) = 1$
Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition d'un événement B, alors $P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = P(B)$

Propriété. Dans un arbre pondéré, la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est donc toujours égale à 1.

Exemple. Soit A_1, A_2 et A_3 formant une partition de l'univers. Dans l'arbre ci-contre, les événements reliés à un même nœud (A_1, A_2 et A_3 d'une part et B et $\overline{B}$ d'autre part) forment des partitions de l'univers, c'est donc bien un arbre pondéré.
On peut y calculer par exemple :
$P(A_2 \cap \overline{B}) = P(A_2) \times P_{A_2}(\overline{B}) = 0{,}37 \times 0{,}29 = 0{,}1073$

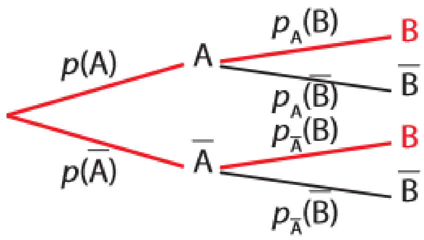


Propriété. Formule des probabilités totales
Soit A et B deux événements. On suppose que $P(A) \neq 0$ et $P(\overline{A}) \neq 0$. Alors :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$$

Remarque. Sur un arbre pondéré, on peut comprendre la formule des probabilités totales comme le fait que l'on additionne les probabilités $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ et $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$ associées aux « chemins » pour lesquels B est réalisé, représentés en rouge sur l'arbre ci-contre.

Exemple. On reprend l'exemple de la colonie de vacances. La probabilité qu'un enfant souhaite faire une randonnée est : $P(A) = P(F) \times P_F(A) + P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(A)$
$P(A) = 0{,}65 \times 0{,}24 + 0{,}35 \times 0{,}17 = 0{,}2155$.



Exemple. Pour l'arbre pondéré ci-dessous (on admet que A_1, A_2 et A_3 d'une part et B_1, B_2, B_3 et B_4 d'autre part forment 2 partitions),
$P(B_4) = P(A_1) \times P_{A_1}(B_4) + P(A_2) \times P_{A_2}(B_4) + P(A_3) \times P_{A_3}(B_4)$
$P(B_4) = 0{,}1 \times 0{,}3 + 0{,}4 \times 0{,}25 + 0{,}5 \times 0{,}15 = 0{,}205$.