Dérivation et composées

Exercice 1.
Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la fonction dérivée.

1. $f_1(x) = (-3x+8)^7$
2. $f_2(x) = e^{2x+3}$
3. $f_3(x) = 10e^{-5x+5}$
4. $f_4(x) = \sqrt{5x-7}$
5. $f_5(x) = (1+\sqrt{x})^5$
6. $f_6(x) = e^{\sqrt{3x+1}}$
7. $f_7(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (par 2 façons différentes)

Exercice 2.
On éteint le chauffage dans une pièce d'habitation à 22h. La température y est alors de 20 $^\circ$C.
Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution de la température de la pièce entre 22h et 7h le lendemain matin.
On suppose que la température extérieur est constante et égale à 11 $^\circ$C.
On désigne par t le temps écoulé depuis 22h, exprimé en heure, et par $f(t)$ la température de la pièce exprimée en $^\circ$C. La température est donc modélisée par une fonction f définie sur $[0;9]$.

1. Prévoir le sens de variation de la fonction f sur $[0;9]$.
2. On admet désormais que la fonction f est définie par :

$$f(t) = 9e^{-0{,}12t} + 11$$

   (a) Donner une justification mathématique au sens de variation trouvé dans la question 1.
   (b) Calculer une valeur approchée, à 10^{-2} près, de $f(9)$ et interpréter ce résultat.
   (c) À l'aide de la calculatrice, représenter la fonction f et déterminer l'heure à partir de laquelle la température est inférieur à 15 $^\circ$C.

Exercice 3.
Pour un individu A, on enregistre la fréquence cardiaque pendant la phase de récupération après un test d'effort de 8 minutes.
On admet que cette fréquence peut être modélisée par la fonction g définie sur $[8;13]$ par :

$$g(t) = 660e^{-0{,}163t}$$

où le temps t est donné en minutes (min) et $g(t)$ en battements par minute.

1. On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de g.
   Justifier que la fonction g est décroissante.
2. À l'aide de la calculatrice, tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}$.
3. En déduire, par lecture graphique, le temps de récupération, exprimé en minutes et seconde, à partir duquel la fréquence cardiaque est inférieur ou égale à 115 battements par minutes.
4. L'étude de l'évolution de la fréquence cardiaque après un test d'effort donne des renseignements sur le profil cardio-vasculaire d'un individu.
   Ainsi, une diminution de la fréquence cardiaque inférieur à 12 battements lors de la première minute est considérée comme anormale et peut indiquer un problème d'ordre médial.
   La fréquence cardiaque de récupération de l'individu A peut-elle être considérée comme anormale ?

Exercice 4.
Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. Montrer que pour tout réel x on a $f'(x) = g(x)$ et $g'(x) = f(x)$.
2. En déduire le tableau de variation de la fonction g.
3. Résoudre l'équation $g(x) = 0$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
5. Montrer que pour tout réel x on a : $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$

Exercice 5.
Soit f la fonction définie sur $[2;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2\sqrt{2x-4}$$

1. Reconnaître les fonctions u et v pour que f soit de la forme $u \times v$.
2. déterminer leurs ensemble de dérivabilité puis calculer les fonction $u'(x)$ et $v'(x)$.
3. En déduire l'ensemble de dérivabilité de f.
4. Montrer que $f'(x) = \dfrac{5x^2-8x}{\sqrt{2x-4}}$ pour tout x de l'ensemble de dérivabilité.
5. En déduire le tableau de variation de f sur $[2;+\infty[$.