Dérivées - 1

A. Déterminer graphiquement la dérivée d'une fonction en un point.

Idée. La dérivée d'une fonction en un point de sa courbe est la pente de la fonction en ce point.

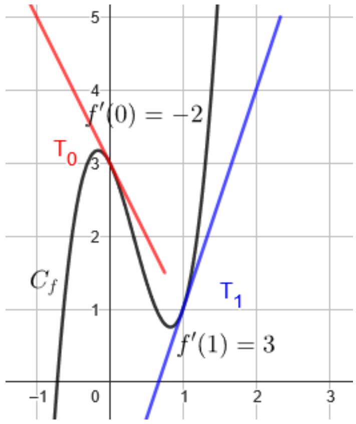
C'est un nombre qui mesure la vitesse de variation de la fonction au point considéré.

Idée. La tangente d'une fonction en un point de sa courbe est la droite, qui approche au mieux la courbe si on fait un zoom infini sur le point considéré.

Propriété. La dérivée, d'une fonction en un point, est la pente de la tangente, à la fonction en ce point.

Méthode. Pour déterminer la dérivée $f'(x)$ d'une fonction f en un point x, dont la courbe et la tangente sont tracées :

- On détermine graphiquement la pente de la tangente, qui est la dérivée.



Exemple. Calculer la dérivée de f en 1, c'est-à-dire $f'(1)$.

En $x = 1$, la tangente T_1 à C_f a pour pente $m =$

Donc $f'(1) =$

La fonction monte à une vitesse de carreaux/unité en 1.

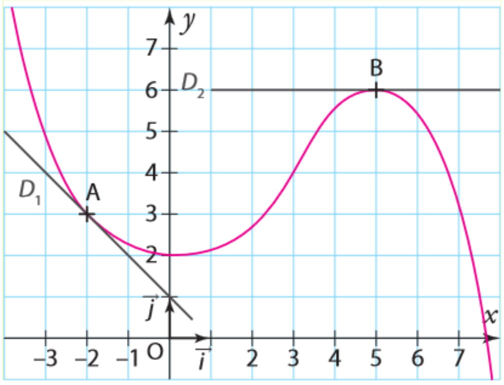
Exemple. Calculer $f'(0)$.

En $x = 0$, la tangente T_0 à C_f a pour pente $m =$

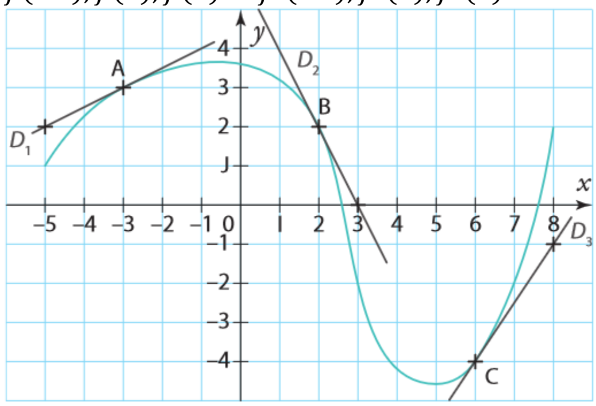
Donc $f'(0) =$

La fonction descend à une vitesse de carreaux/unité en 0.

Exercice A1. Déterminer graphiquement $f'(-2)$; $f'(5)$; $f(-2)$; $f(5)$



Exercice A2. Déterminer graphiquement $f(-3), f(2), f(6)$ et $f'(-3), f'(2), f'(6)$.



Dérivées - 2

B. Calculer une dérivée

Dérivées usuelles.

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	nx^{n-1}

Opérations sur les dérivées.

f	f'
$u+v$	$(u+v)'=u'+v'$
$u-v$	$(u-v)'=u'-v'$
$c\times u$	$(c\times u)'=c\times u'$

Exemples.

$(5x^3)'=5(x^3)'=5\times 3x^2=15x^2$

$(3x^2+5x)'=(3x^2)'+(5x)'=3(x^2)'+5(x)'=3\times(2x)+5\times(1)=6x+5$

$(2x-3x^3)'=(2x)'-(3x^3)'=2(x)'-3(x^3)'=2\times(1)-3\times(3x^2)=2-9x^2$

Exercice B1. Pour chaque fonction déterminer f'

1. $f(x)=x^4$ 2. $f(x)=x^{12}$
3. $f(x)=x^{-1}$ 4. $f(x)=x^{-3}$
5. $f(x)=5$

Exercice B2. Pour chaque fonction déterminer f'

1. $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 2. $f(x)=\frac{2}{7}x$
3. $f(x)=4x^3$ 4. $f(x)=7x^3$
5. $f(x)=3x+5$ 6. $f(x)=8x^2-9$

Exercice B3. Pour chaque fonction déterminer f'

a) $f(x)=-2x^2+3x-5$
b) $f(x)=\frac{3}{4}x^4+\frac{7}{9}x^3$
c) $f(x)=9-6x$

Exercice B4. Pour chaque fonction déterminer f'

(a) $f(x)=9x^3$ (b) $f(x)=\frac{3}{4}x-7$
(c) $f(x)=5x^2-3x+2$ (d) $f(x)=10+3x$
(e) $f(x)=7x^{10}$ (f) $f(x)=\frac{3}{5}x-\frac{1}{9}x^3-\frac{11}{2}$
(g) $f(x)=x(11-6x)$ (h) $f(x)=-x^4+7x^3-x$

Exercice B5. On appelle « dérivée seconde » et on note f'' la fonction dérivée de la fonction f' qui est elle-même la fonction dérivée de la fonction f. Calculer la dérivée seconde des fonctions suivantes.

(1) $f(x)=x^2$
(2) $g(x)=x^3$
(3) $h(x)=2x^3-7x^2+15x-50$

Exercice B1. Pour chaque fonction déterminer f'

1. $f(x)=x^4$ 2. $f(x)=x^{12}$
3. $f(x)=x^{-1}$ 4. $f(x)=x^{-3}$
5. $f(x)=5$

Exercice B2. Pour chaque fonction déterminer f'

1. $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 2. $f(x)=\frac{2}{7}x$
3. $f(x)=4x^3$ 4. $f(x)=7x^3$
5. $f(x)=3x+5$ 6. $f(x)=8x^2-9$

Exercice B3. Pour chaque fonction déterminer f'

a) $f(x)=-2x^2+3x-5$
b) $f(x)=\frac{3}{4}x^4+\frac{7}{9}x^3$
c) $f(x)=9-6x$

Exercice B4. Pour chaque fonction déterminer f'

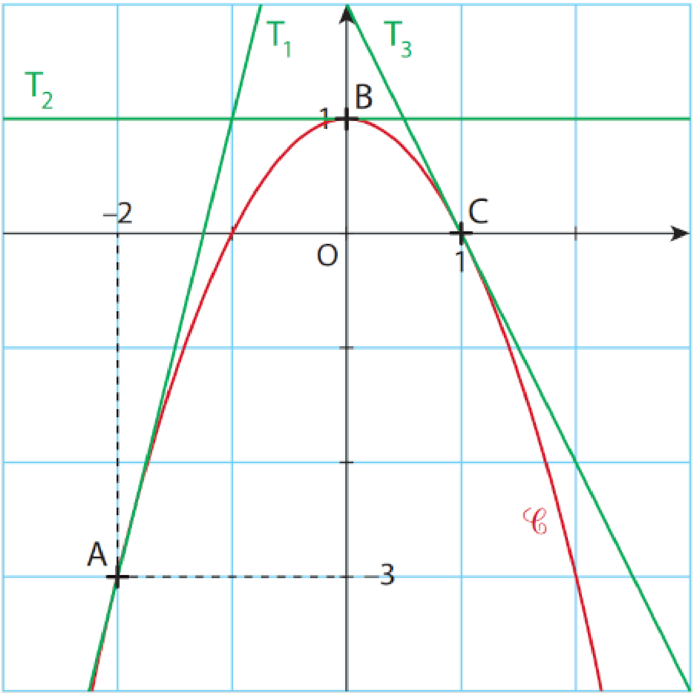
(a) $f(x)=9x^3$ (b) $f(x)=\frac{3}{4}x-7$
(c) $f(x)=5x^2-3x+2$ (d) $f(x)=10+3x$
(e) $f(x)=7x^{10}$ (f) $f(x)=\frac{3}{5}x-\frac{1}{9}x^3-\frac{11}{2}$
(g) $f(x)=x(11-6x)$ (h) $f(x)=-x^4+7x^3-x$

Exercice B5. On appelle « dérivée seconde » et on note f'' la fonction dérivée de la fonction f' qui est elle-même la fonction dérivée de la fonction f. Calculer la dérivée seconde des fonctions suivantes.

(1) $f(x)=x^2$
(2) $g(x)=x^3$
(3) $h(x)=2x^3-7x^2+15x-50$

Exercice 1 (4 points)

Soit la fonction suivante :



1) Déterminer $f(-2) =$ $f(0) =$ $f(1) =$

2) Déterminer $f'(-2) =$ $f'(0) =$ $f'(1) =$

Exercice 2 Déterminer les dérivées suivantes :

$f(x)$	$f'(x)$
c	
x	
x^2	
x^3	
x^n	

1) $f(x) = -5x^2$ $f'(x) =$

2) $f(x) = 7x^3$ $f'(x) =$

3) $f(x) = -x^6$ $f'(x) =$

4) $f(x) = -7x^3 + 5x^2 - 8x$ $f'(x) =$

5) $f(x) = 6x^8 - 4x^6 + 3x^3$ $f'(x) =$

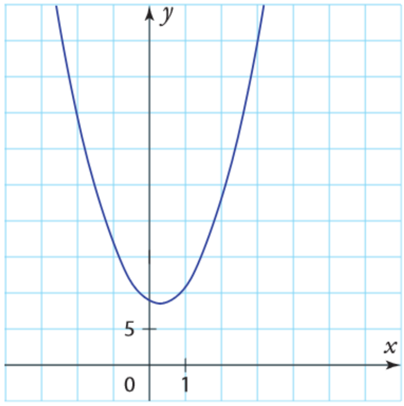
Dérivées - 4

- Rappels sur les tableaux de signes

Rappels sur les tableaux de variations

Théorème (admis). Etudier les variations d'une fonction f, c'est étudier le signe de sa dérivée.
f est croissante sur I si et seulement si, $f' \geq 0$ sur I.
f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f' \leq 0$ sur I.
f est constante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f' = 0$ sur I.

Exemple. Soit f la fonction définie par $f(x) = 5x^2 - 3x + 9$.



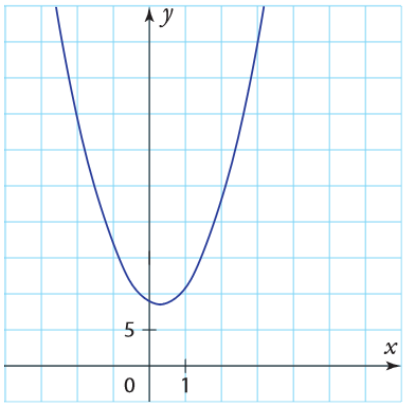
Dans l'ordre :
- On calcule $f'(x) = 5 \times 2x - 3 \times 1 + 0 = 10x - 3$.
- On trace le tableau de signes de f'
- On trace le tableau de variations de f

x	$-\infty$		$0{,}3 = -\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	8,1	$\nearrow$	

Rappels sur les tableaux de variations

Théorème (admis). Etudier les variations d'une fonction f, c'est étudier le signe de sa dérivée.
f est croissante sur I si et seulement si, $f' \geq 0$ sur I.
f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f' \leq 0$ sur I.
f est constante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f' = 0$ sur I.

Exemple. Soit f la fonction définie par $f(x) = 5x^2 - 3x + 9$.



Dans l'ordre :
- On calcule $f'(x) = 5 \times 2x - 3 \times 1 + 0 = 10x - 3$.
- On trace le tableau de signes de f'
- On trace le tableau de variations de f

x	$-\infty$		$0{,}3 = -\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	8,1	$\nearrow$	

Dérivées et variations.

Exercice 1. Pour chaque fonction :

- Calculer la dérivée
- Donner le tableau de signes de la dérivée
- Donner le tableau de variations de la fonction

1. $f(x) = x^2 + 3x + 1$
2. $g(x) = -3x^2 - 6x + 10$
3. $h(x) = -8x^2 + 4x$

Exercice 2. On suppose que le bénéfice B d'une entreprise en fonction du prix x d'un produit est donné par $B(x) = -8x^3 + 36x^2 - 30x$

a) Calculer la dérivée B'.

b) Montrer que $B'(x) = (2x - 5)(-12x + 6)$

c) Le prix x du produit varie entre 0 et 5.

Donner le tableau de signes de B' puis le tableau de variations de B.

d) Déterminer le prix x qui maximise le bénéfice, ainsi que la valeur de ce bénéfice maximal.

Exercice 3. On suppose que le bénéfice B d'une entreprise en fonction du prix x d'un produit est donné par $B(x) = 16x^3 - 60x^2 + 48x$

a) Calculer la dérivée B'.

b) Montrer que $B'(x) = (16x - 8)(3x - 6)$

c) Le prix x du produit varie entre 0 et 3.

Donner le tableau de signes de B' puis le tableau de variations de B.

d) Déterminer le prix x qui maximise le bénéfice, ainsi que la valeur de ce bénéfice maximal.

Exercice 4. On suppose que le bénéfice B d'une entreprise en fonction du prix x d'un produit est donné par $B(x) = -0{,}02x^3 + 5{,}4x^2 - 192x$

a) Calculer la dérivée B'.

b) Montrer que $B'(x) = (-0{,}06x + 1{,}2)(x - 160)$

c) Le prix x du produit varie entre 0 et 200.

Donner le tableau de signes de B' puis le tableau de variations de B.

d) Déterminer le prix x qui maximise le bénéfice, ainsi que la valeur de ce bénéfice maximal.

Exercice 5. On suppose que le coût C de production en fonction de la quantité x d'un produit est donné par $C(x) = 0.1\,x^3 - 2\,x^2 + 10\,x + 5$

a) Calculer la dérivée C'.

b) Montrer que $C'(x) \approx (0{,}3x - 1)(x - 10)$

c) Le quantité x du produit varie entre 1 et 12.

Donner le tableau de signes de C' puis le tableau de variations de C.

d) Déterminer quantité x qui minimise le coût, ainsi que la valeur de ce coût minimal.