Calculs algébriques et équations

Propriétés. (Distributivité) Pour tous réels a, b, c, d :
- $(a+b)c = ac + bc = c(a+b)$

Pour multiplier une somme par un nombre c, on multiplie chaque terme de la somme par le nombre c.
- $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Le produit de <u>deux</u> sommes, est la somme de tous les <u>doubles</u> produits.

Exemple. $3(x+y-z) = 3x + 3y - 3z$

Exemple. $(a+5+g)(c+3+f) = ac + 3a + af + 5c + 15 + 5f + gc + 3g + gf$

Propriétés (Identité remarquables). Pour tous réels a, b, on a :
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Exemple. Développer $(-3+x)^2$. $(-3+x)^2 = ((-3)+x)^2 = (-3)^2 + 2\times(-3)\times x + x^2 = 9 - 6x + x^2$.

Exemple. Factoriser $x^2 - 2x + 1$. Dans la 2ème identité, on choisit $a = x$ et $b = 1$. $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.

Exemple. Factoriser $9 - x^2$. D'après la 3ème identité, $9 - x^2 = (3)^2 - x^2 = (3+x)(3-x)$.

Propriétés (Equations). Soit a, b, c des réels.
- Si $a = b$ alors $a + c = b + c$. Ajouter un même nombre aux 2 côtés d'une égalité conserve l'égalité
- Si $a = b$ alors $a - c = b - c$. Soustraire un même nombre aux 2 côtés d'une égalité conserve l'égalité
- Grâce aux 2 règles précédentes on a : $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$ et on a : $a = b \Leftrightarrow a - c = b - c$
- Si $a = b$ alors $ca = cb$. Multiplier par un même nombre les 2 côtés d'une égalité conserve l'égalité
- Si $a = b$ <u>et $c \neq 0$</u> alors $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$. Diviser une égalité par un nombre <u>non nul</u> conserve l'égalité
- Les règles précédentes se résument à une seule règle : Si $a = b$ et f est une fonction alors $f(a) = f(b)$

Deux choses identiques subissant une même transformation, donnent deux nouvelles choses identiques.

Exemple. Résoudre (E) : $5x - 8 = 0$ sur $\mathbb{R}$.

$(E) \Leftrightarrow 5x - 8 + 8 = 0 + 8 \Leftrightarrow 5x = 8 \Leftrightarrow \frac{5x}{5} = \frac{8}{5} \Leftrightarrow x = \frac{8}{5}$. L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{\frac{8}{5}\right\}$.

Exemple. Résoudre (E) : $3x - 2 = 6x + 9$ sur $\mathbb{R}$.

$(E) \Leftrightarrow 3x - 6x = 9 + 2 \Leftrightarrow -3x = 11 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{3}$. L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{-\frac{11}{3}\right\}$.

Propriété (Quotient nul). Pour tout $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$, $\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul.

Exemple. Résoudre (E) : $\frac{x+1}{x^2+1} = 0$ sur $\mathbb{R}$.

$(E) \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. L'ensemble des solutions de (E) est $\{-1\}$.

Propriété (Produit nul). Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ <u>ou</u> $b = 0$

Un produit est nul si et seulement si <u>au moins un</u> de ses facteurs est nul.

Exemple. Résoudre (E) : $(x+3)(2x-5) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

$(E) \Leftrightarrow x + 3 = 0$ <u>ou</u> $2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = \frac{5}{2}$. L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{-3; \frac{5}{2}\right\}$.

Exemple. Résoudre $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

$(E) \Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $x - 2 = 0$ ou $x - 3 = 0$ ou $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 3$ ou $x = 4$.

L'ensemble des solutions de (E) est $\{1; 2; 3; 4\}$.

Propriété. On considère l'équation $x^2 = k$ avec k appartenant à $\mathbb{R}$.
- Si $k < 0$, l'équation $x^2 = k$ n'a aucune solution réelle.
- Si $k = 0$, l'équation $x^2 = k$ a une seule solution réelle $x = 0$.
- Si $k > 0$, l'équation $x^2 = k$ a deux solutions réelles : $x = \sqrt{k}$ ou $x = -\sqrt{k}$

Exemple. Résoudre (E) : $x^2 = 5$ sur $\mathbb{R}$.

$(E) \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$. L'ensemble des solutions de (E) est $\{\sqrt{5}; -\sqrt{5}\}$.