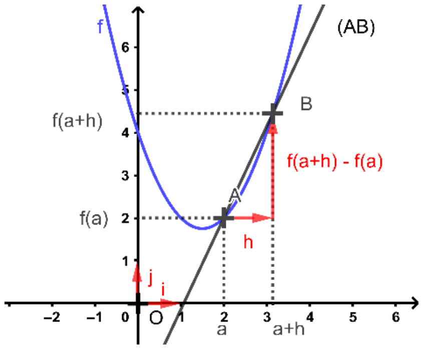
Dérivation

Rappels : La pente d'une droite (non verticale) est le nombre relatif m qui indique de combien d'unités la droite monte (ou descend si $m < 0$) lorsqu'on avance d'une unité vers la droite.
La pente d'une droite d'équation « $y = mx + p$ » est son coefficient directeur m.

Idée. La dérivée d'une fonction en un point (de sa courbe) est la pente de la fonction en ce point.
C'est un nombre qui mesure la vitesse de variation de la fonction au point considéré.
La dérivée généralise la notion de pente à une fonction. Elle dépend du point. Elle n'existe pas toujours.

Idée. On se place en un point d'abscisse a de la courbe représentative d'une fonction f.
Si en faisant un zoom infini sur le point, la courbe se déforme et devient une droite (non verticale), alors :
- Cette droite est appelée **tangente à la courbe représentative de f en a.**
- La **dérivée de la fonction f en a**, notée $f'(a)$ est la pente de la tangente à f en a.
- On dit que la fonction f est **dérivable en a**, (elle admet une dérivée en a).

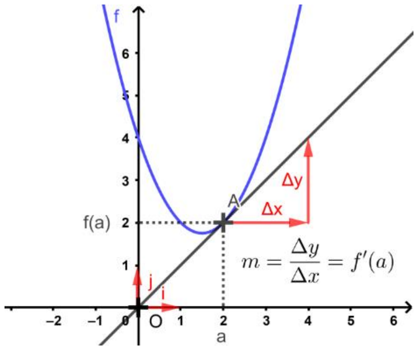


Définition précise. Soit I un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit a et b des réels de l'intervalle I. On note A et B les points de la courbe C_f d'abscisses respectives $x_A = a$ et $x_B = b$. Donc $A = \big(a\,;f(a)\big)$ et $B = \big(b\,;f(b)\big)$. On note $h = b - a$

f est dérivable en a ssi $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \in \mathbb{R}$.

Si f est dérivable en a, la **dérivée de f en a** est $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \in \mathbb{R}$

Déf. $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le **taux d'accroissement de f entre a et b.**



Définition (Tangente). Si f est dérivable en a, **la tangente à C_f en a** est la droite passant par $A = \big(a; f(a)\big)$ et de coefficient directeur $f'(a)$.
Propriété. L'équation de cette droite est : « $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ »

Définition. f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I.
Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée de la fonction f**,
la fonction $f' : I \to \mathbb{R} : x \mapsto f'(x)$

Contre-exemple. Les fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ ne sont pas dérivables en 0

Dérivées usuelles. A chaque ligne, f est définie et vaut l'expression de la colonne à gauche sur tout D_f. On déduit que f est dérivable sur $D_{f'}$, et $f'(x)$ vaut l'expression dans la dernière colonne sur tout $D_{f'}$.

$f(x)$	Conditions	D_f	$D_{f'}$	$f'(x)$
c	$c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	1
ax	$a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
$ax+b$	$a, b \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
x^2		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
x^3		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$3x^2$
x^n	$n \in \mathbb{Z}, n > 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
x^n	$n \in \mathbb{Z}, n < 0$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
x^r	$r \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	rx^{r-1}
$\frac{1}{x}$		$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$		$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x

Opérations sur les dérivées. A chaque ligne :
- On suppose que u et v sont dérivables.
- On déduit que f est dérivable sur I.

f	Conditions	f'
$u+v$	$u, v : I \to \mathbb{R}$	$u'+v'$
$u-v$	$u, v : I \to \mathbb{R}$	$u'-v'$
$a \times u$	$a \in \mathbb{R},\ u : I \to \mathbb{R}$	au'
$u \times v$	$u, v : I \to \mathbb{R}$	$u'v+v'u$
$\frac{1}{v}$	$v : I \to \mathbb{R}^*$ v ne s'annule pas sur I.	$\frac{-v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$u : I \to \mathbb{R}$ $v : I \to \mathbb{R}^*$ v ne s'annule pas sur I.	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$
e^u	$u : I \to \mathbb{R}$	$u'e^u$
$x \mapsto v(ax+b)$	$v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$x \mapsto av'(ax+b)$