Suites numériques

Idée. Une **suite** est une liste ordonnée et infinie de nombres, par exemple $(1; 3; 5; 7; 9; 11; \ldots)$.
Exemple. La liste des entiers naturels $(0; 1; 2; 3; 4; \ldots)$ est une suite.
Exemple. La liste des multiples de 3 supérieurs à 6 : $(6; 9; 12; 15; \ldots)$ est une suite.
Contre-Exemple. $(1; 2; 3; 4)$ n'est pas une suite car c'est une liste finie.

Notation. On note u_n **le terme de rang $\boldsymbol{n}$** d'une suite u
Exemple. Si $u = (1; 3; 5; 7; \ldots)$ est la suite des entiers impairs, alors $u_0 = 1$; $u_1 = 3$; $u_2 = 5$; $u_3 = 7$; …

Notation. Une suite u est aussi notée $\boldsymbol{(u_n)}$ voire $\boldsymbol{(u_n)_{n\geq 0}}$ quand on veut être précis.
Attention : Ne pas confondre u_n qui est un simple nombre et (u_n) qui désigne *toute* la suite u.

Remarque. Le rang initial est souvent 0. Mais on peut définir une suite $(u_n)_{n\geq k}$ avec un rang initial $k \geq 1$.

Vocabulaire. Une suite (u_n) est **définie explicitement** si on peut écrire u_n en fonction du *rang* n avec des fonctions bien connues.
Exemples. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $u = (-1; 0; 3; 8; 15; 24; \ldots)$
Soit la suite $(u_n)_{n\geq 6}$ définie à partir du rang 6 par $u_n = \frac{1}{n-5}$. On a $u = (u_6\,; u_7\,; u_8\,; \ldots) = \left(1\,; \frac{1}{2}\,; \frac{1}{3}\,; \frac{1}{4}\,; \ldots\right)$

Vocabulaire. Une suite (u_n) est **définie par récurrence** si :
- On donne une formule exprimant tout terme, en fonction d'un ou plusieurs *termes précédents*
- On donne un premier terme de la suite (voire plusieurs premiers termes)

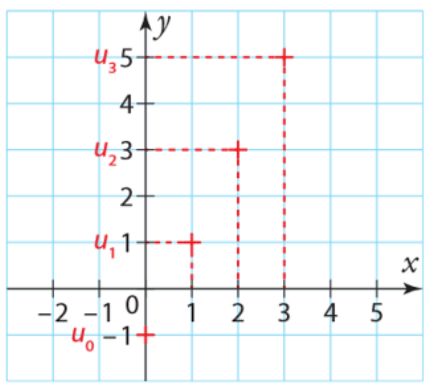
Exemple. Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -6 \\ u_{n+1} = 3u_n + 15 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ (suivant = 3 × courant + 15)
$u_1 = 3 \times (-6) + 15 = -3$ (autrement dit, on a remplacé n par 0 : $u_1 = u_{0+1} = 3u_0 + 15$)
$u_2 = 3 \times (-3) + 15 = 6$ (autrement dit, on a remplacé n par 1 : $u_2 = u_{1+1} = 3u_1 + 15$)
$u_3 = 3 \times (6) + 15 = 33$
Etc… $u = (-6; -3; 6; 33; \ldots)$ Pour calculer chaque terme, on doit connaître le précédent.

Vocabulaire. Si le terme **courant** est u_n, alors u_{n+1} est le terme **suivant**. u_{n-1} est le terme **précédent**.
Remarque. *Attention* à ne jamais confondre u_{n+1} (le terme suivant) et $u_n + 1$ (le terme courant + 1)
Exemple. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Alors $u_{n+1} = (n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n + 1 - 1 = n^2 + 2n$ mais $u_n + 1 = (n^2 - 1) + 1 = n^2$

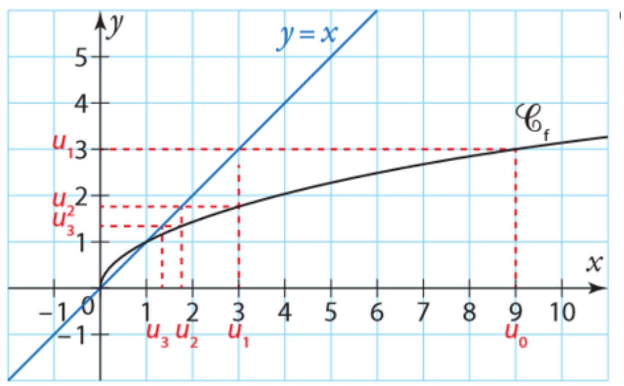
Méthode. Pour représenter une suite dans un repère (voir 1.), on place les points de coordonnées $(n; u_n)$.

Méthode. Si la suite (u_n) est *définie par récurrence*, ($u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$), alors (voir 2.) on peut construire les termes à l'aide de la courbe représentative de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$

1 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2n - 1$.



2 On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.



Définition. Une suite (u_n) est **croissante** ssi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$
Définition. Une suite (u_n) est **décroissante** ssi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$
Définition. Une suite (u_n) est **constante** ssi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$

Si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes, on parle de suite **strictement croissante** ou **strictement décroissante**.

Exemples. $(1; 3; 5; 19; 33; 200; \ldots)$ est le début d'une suite strictement croissante.
$(-11; -3; 5; 5; 5; 6; 8; 8; 10; 11; \ldots)$ est le début d'une suite croissante (mais pas strictement).
$(6; 2; 0; -1; -3; -10; \ldots)$ est le début d'une suite décroissante.
$(1; -1; 2; -2; 3; -3; \ldots)$ n'est ni croissante, ni décroissante.

Méthode. Pour étudier les variations d'une suite, on peut comparer $u_{n+1} - u_n$ à 0.
(u_n) est croissante ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$
(u_n) est décroissante ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$

Exemple. Etudier les variations de la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = ((n+1)^2 + 3) - (n^2 + 3) = (n+1)^2 + 3 - n^2 - 3 = (n^2 + 2n + 1) - n^2$
$u_{n+1} - u_n = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 \geq 1 > 0$. Donc la suite (u_n) est croissante (strictement).

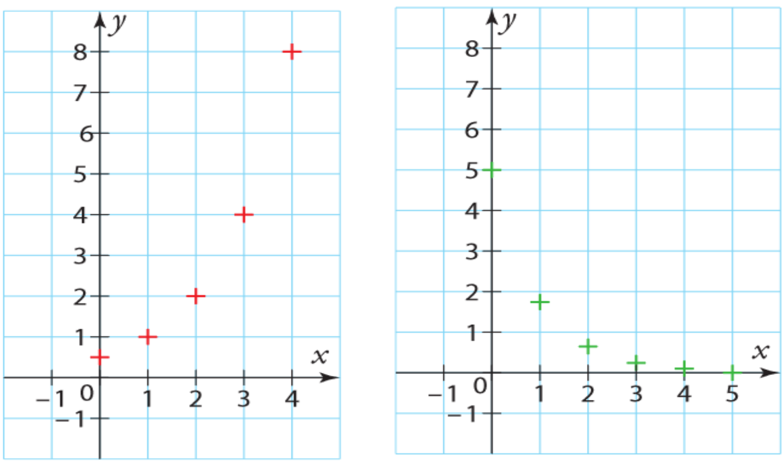
Méthode. Pour étudier les variations d'une suite *à valeurs positives,* on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

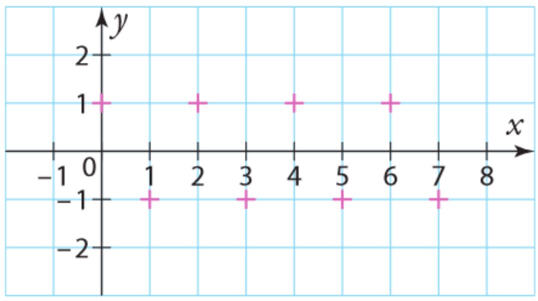
Exemple. La suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est croissante. En effet :
Soit $n \in \mathbb{N}$. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. (Donc $u_{n+1} > u_n$ puisque $u_n > 0$)

Méthode.
Pour montrer qu'une suite n'est pas croissante, il suffit de trouver un certain rang n tel que $u_n > u_{n+1}$
Pour montrer qu'une suite n'est pas décroissante, il suffit de trouver un certain n tel que $u_n < u_{n+1}$
En pratique, on peut calculer quelques premiers termes de la suite pour trouver un rang défaillant.

Exemple. On note $u_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. $(u_n) = (1; -1; 1; -1; 1; -1; 1; \ldots)$
(u_n) n'est pas croissante car pour $n = 0$ on a : $u_0 = 1 > u_1 = -1$
(u_n) n'est pas décroissante car pour $n = 1$ on a : $u_1 = -1 < u_2 = 1$

Exemples. Allure d'une suite croissante, d'une suite décroissante.



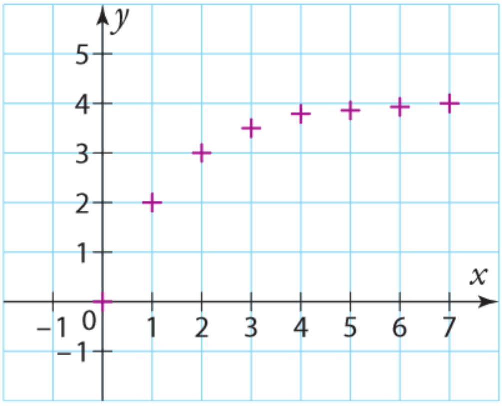


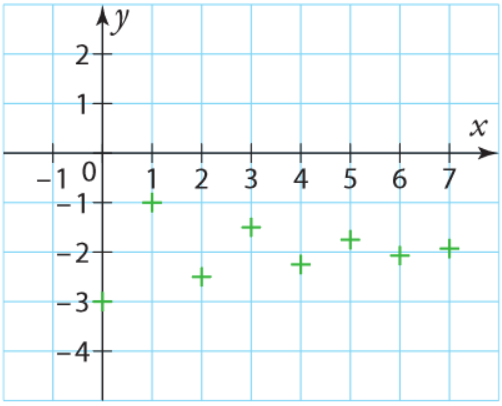
Remarque. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ n'est pas croissante ni décroissante

Suites et limites

Définition. Soit l un réel. Une suite (u_n) **a pour limite finie l** si les termes u_n deviennent tous aussi proches de l que l'on veut en prenant n suffisamment grand. On dit aussi que (u_n) **converge vers l**. On dit aussi que **u_n tend vers l quand n tend vers** $+\infty$. On écrit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$

Exemples.





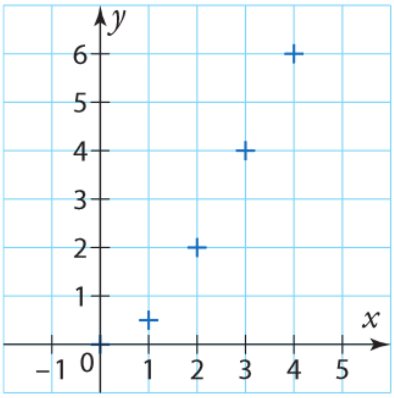
On observe que les termes successifs de (u_n) semblent se rapprocher de 4. On peut conjecturer que (u_n) converge vers 4.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 4$$

On observe que les termes successifs de (u_n) semblent se rapprocher de -2. On peut conjecturer que (u_n) converge vers -2.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = -2$$

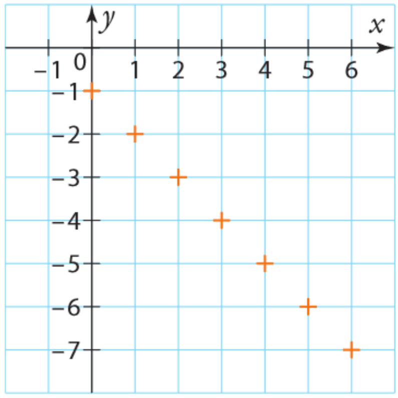
Définition.
Une suite (u_n) **a pour limite** $+\infty$ si les termes u_n deviennent tous aussi grands que l'on veut en prenant n suffisamment grand.



On dit aussi :
(u_n) diverge vers $+\infty$
u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$

On note : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

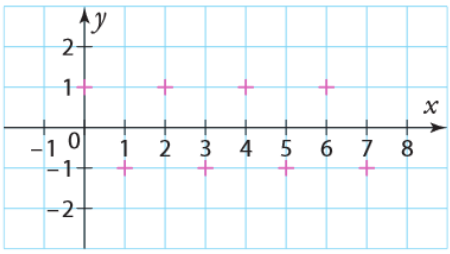
Définition.
Une suite (u_n) **a pour limite** $-\infty$ si les termes u_n deviennent tous aussi *négativement* grands que l'on veut en prenant n suffisamment grand.



On dit aussi :
(u_n) diverge vers $-\infty$
u_n tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$

On note : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$

Remarque. Une suite (u_n) peut n'avoir aucune limite.
$(-1)^n$ n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$.
Les termes ne deviennent ni de plus en plus grand, ni de plus en plus petits, ni ne se rapprochent d'un réel.



Suites arithmétiques et géométriques

Idée. Une suite (u_n) est **arithmétique** si on ajoute toujours le <u>même</u> nombre pour passer au terme suivant.

Exemple *a*. $(6; 11; 16; 21; 26; 31; \dots)$ est le début d'une suite arithmétique u, car on ajoute 5 à chaque fois.
Exemple *b*. $(7; 4; 1; -2; -5; -8; \dots)$ est le début d'une suite arithmétique v, car on ajoute -3 à chaque fois.

Définition. Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$
r est appelé **raison de la suite arithmétique** (u_n).

Exemple. Dans l'exemple *a*, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 5$. La raison de cette suite est $r = 5$.
Exemple. Dans l'exemple *b*, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 3$. La raison de cette suite est $r = -3$.

Méthode. Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on peut montrer que $u_{n+1} - u_n$ est constant (indépendant de n).

Exemple. Soit la suite définie par $w_n = 5 + 8n$. La suite (w_n) est-elle arithmétique ?
$w_{n+1} - w_n = \big(5 + 8(n+1)\big) - (5 + 8n) = 5 + 8n + 8 - 5 - 8n = 8$. Donc (w_n) est arithmétique de raison 8.

Propriété. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + r \times n$$

Idée. Deux termes distants de n rangs diffèrent de n fois la raison

Exemple. Dans l'exemple *a*, (u_n) est arithmétique de raison $r = 5$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6 + 5n$
Exemple. Dans l'exemple *b*, (v_n) est arithmétique de raison $r = -3$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 - 3n$

Remarque. Si le rang initial est 1 il faut adapter la formule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + r(n-1)$
Remarque. Si le rang initial est $p \in \mathbb{N}$ il faut adapter la formule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + r(n-p)$

Propriété. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
La suite est strictement croissante si $r > 0$, strictement décroissante si $r < 0$, et constante si $r = 0$.

Exemple. Dans l'exemple *a*, (u_n) est arithmétique de raison $r = 5 > 0$ donc (u_n) est croissante.

Idée. (u_n) est **géométrique** si on multiplie toujours par le <u>même</u> nombre pour passer au terme suivant.

Exemple *c*. $(3; 6; 12; 24; 48; 96; \dots)$ est le début d'une suite géométrique u, car on $\times$ 2 à chaque fois.
Exemple *d*. $(900; 90; 9; 0{,}9; 0{,}09; \dots)$ est le début d'une suite géométrique v, car on $\times \frac{1}{10}$ à chaque fois.

Définition. Une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel q, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$
q est appelé **raison de la suite géométrique** (u_n).

Exemple. Dans l'exemple *c*, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 \times u_n$. La raison de cette suite est $q = 2$.
Exemple. Dans l'exemple *d*, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{10} \times v_n$. La raison de cette suite est $q = \frac{1}{10}$.

Propriété. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n$$

Idée. Deux termes distants de n rangs, sont dans un rapport égal à la raison puissance n

Exemple. Dans l'exemple *a*, (u_n) est géométrique de raison $q = 2$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^n$
Exemple. Dans l'exemple *b*, on a $q = \frac{1}{10}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 900 \times \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{900}{10^n}$

Remarque. Si le rang initial est 1 il faut adapter la formule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 q^{n-1}$
Remarque. Si le rang initial est $p \in \mathbb{N}$ il faut adapter la formule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p q^{n-p}$

Somme de suites arithmétiques et géométriques

Propriété. Somme des n premiers entiers. Pour tout entier $n \geq 1$, on a $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Démonstration. Soit un entier $n \geq 1$. On note S la somme des n premiers entiers.
$S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$
$S = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$
Donc en sommant les deux égalités, on obtient :
$2S =$………………………………………………………=……………………………… Donc $S = \frac{n \times (n+1)}{2}$.

Propriété.
Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique = $\text{nombre de termes} \times \frac{(1^{\text{er}}\text{ terme} + \text{dernier terme})}{2}$

Démonstration. Symboliquement, il faut montrer que $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \frac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}$

$u_p + \cdots + u_n = (u_p) + (u_p + r) + (u_p + 2r) + \cdots + (u_p + (n-p)r)$
$u_p + \cdots + u_n = (n-p+1)u_p + r + 2r + 3r + \cdots + (n-p)r$
$u_p + \cdots + u_n = (n-p+1)u_p + r(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-p))$
$u_p + \cdots + u_n =$……………………………………………………………$= (n-p+1)\left(u_p + \frac{r(n-p)}{2}\right)$

$$u_p + \cdots + u_n = (n-p+1)\left(\frac{2u_p + r(n-p)}{2}\right) = (n-p+1)\left(\frac{u_p + \left(u_p + r(n-p)\right)}{2}\right) = \frac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}$$

Exemple. $10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 = 6 \times \frac{10+25}{2} = 105$

Propriété. Somme des n premières puissances d'un réel différent de 1.
Soit q un réel $\neq 1$. Pour tout entier $n \geq 1$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Démonstration. On note $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ $qS = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1}$
Donc $S - qS = 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \cdots + \cancel{q^n} - \cancel{q} - \cancel{q^2} - \cdots - \cancel{q^n} - q^{n+1}$
Donc $S(1-q) = 1 - q^{n+1}$. Comme $q \neq 1$, on peut diviser par $1-q$. $S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Propriété. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique = 1er terme $\times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$

Démonstration.
$u_p + \cdots + u_n = u_p + qu_p + q^2u_p + \cdots + q^{n-p}u_p = u_p($……………………………………………$) = u_p\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Exemple. $8 + 16 + 32 + 64 + 128 = 8 \times \frac{1-2^5}{1-2} = 8 \times \frac{-31}{-1} = 248$