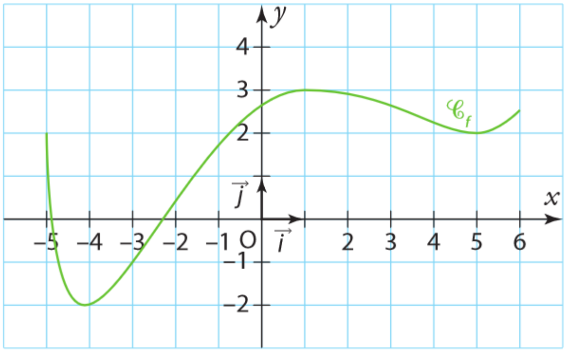
Objectif. Etudier les variations d'une fonction en utilisant la dérivée

Exercice 1. Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-5; 6]$. La courbe représentative de f est tracée ci-dessous.



1. Décrire les variations de f sur $[-5; 6]$
2. En déduire le tableau de signes de la fonction dérivée f' sur $[-5; 6]$

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 4$
1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée f'.
2. Etudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$
3. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 3. Même exercice avec la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 7x - 1$

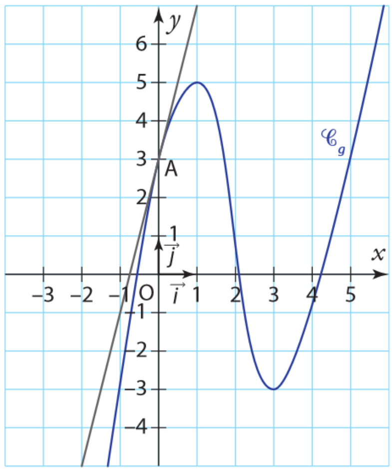
Exercice 4. Même exercice avec la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 8x + 3$

Exercice 5. Même exercice avec la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 - x$

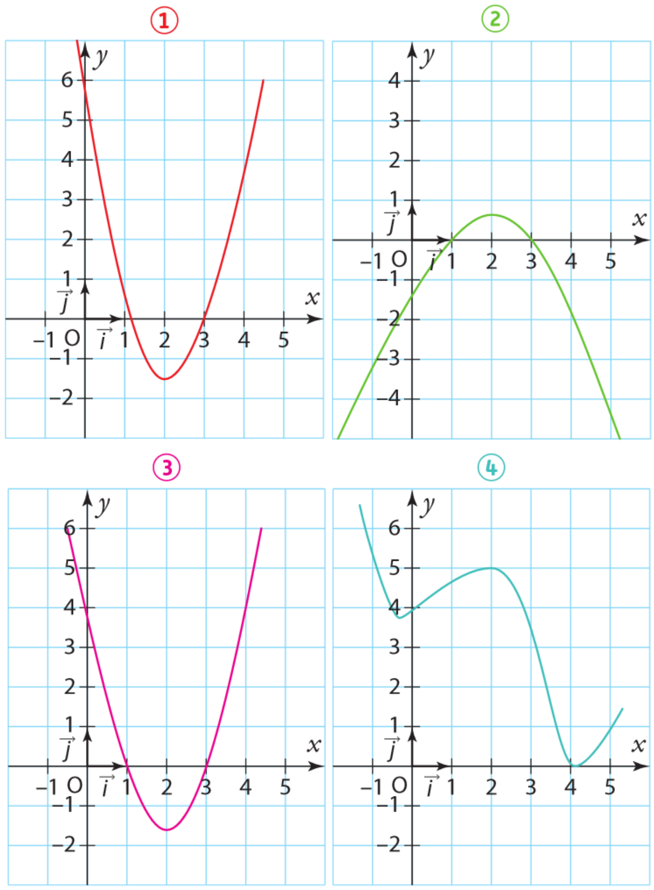
Exercice 6. Même exercice avec la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x$

Exercice 7. Même exercice avec la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 + x^2 + 8x - 7$

Exercice 8. On a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$, ainsi que la tangente à C_g au point A d'abscisse 0.



Parmi les 4 graphiques ci-dessous, déterminer celui qui correspond à g'.



Exercice 9.
Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2x+5}$
1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f puis l'ensemble de dérivabilité $D_{f'}$ de f
2. Déterminer f'.
3. Dans un tableau étudier le signe de f', puis les variations de f.

Exercice 10. Même exercice avec la fonction définie par $f(x) = \frac{7}{3} - \frac{100}{1-4x}$

Exercice 11. Même exercice avec la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{8}$

Exercice 12. Même exercice avec la fonction définie par $f(x) = \frac{6-x}{x^2+13}$

Exercice 13. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax$ où a est réel.
Pour quelles valeurs de a la fonction f est-elle croissante sur $\mathbb{R}$?

Objectif. Résoudre des inéquations

Exercice 14. Soient x et y deux nombres strictement négatifs tels que $x < y$. Pour chaque inégalité ci-dessous, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant. (Penser à la définition d'une fonction croissante / décroissante)

1. $x^2 > y^2$
2. $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$
3. $x^3 < y^3$
4. $-y < -x$

Exercice 15. Soit f définie sur $I = [0; 1]$ par $f(x) = 4x^2 - 12x + 1$.
Etudier les variations de f sur I puis en déduire que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq -7$.

Exercice 16. Démontrer que pour tout réel x tel que $3 \leq x \leq 5$, alors $0 \leq (3-x)^2 \leq 4$

Exercice 17. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$

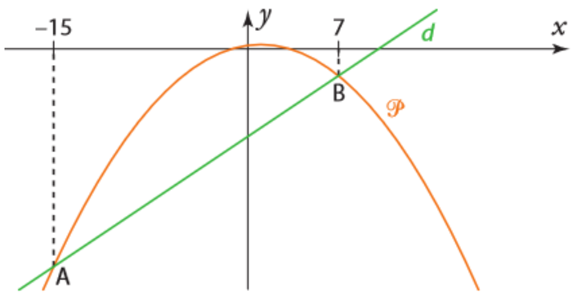
1. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$
2. En déduire que pour $a, b \in [-1; 1]$, si $a < b$ alors $a^3 - b^3 > 3(a-b)$

Exercice 18. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ et $g(x) = -3x^2 + 9x + 1$
On cherche à démontrer que pour tout $x \geq 2$, $f(x) \geq g(x)$
Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

1. Déterminer h'.
2. Etudier le signe de h' sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que h est croissante sur $[2; +\infty[$
4. Calculer $h(2)$. Conclure.

Objectif. Etudier la position relative de 2 courbes

Exercice 19. Dans ce repère, la parabole $\mathcal{P}$ est la courbe représentative d'une fonction f et la droite d est la courbe représentative d'une fonction affine g.



1. Étudier la position relative de la parabole $\mathcal{P}$ et de la droite d
2. En déduire les solutions des inéquations suivantes $(A): f(x) > g(x)$ et $(B): f(x) < g(x)$

Exercice 20. Soit f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 7$ et $g(x) = 5x - 9$

1. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x)$
2. Etudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$
3. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

Exercice 21. Même exercice avec f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = -3x^2 + 7$ et $g(x) = x^2 - 1$

Objectif. Résoudre un problème d'optimisation, rechercher un extremum

Exercice 22. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne le tableau de signes de f'.

x	$-\infty$	5	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$

f admet-elle un extremum local ? Si oui, est-ce un maximum ou un minimum ?

Exercice 23. Soit g une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$. On donne le tableau de signes de g'.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	$+$	0	$-$

g admet-elle un extremum local ? Si oui, est-ce un maximum ou un minimum ?

Exercice 24. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne le tableau de signes de f'.

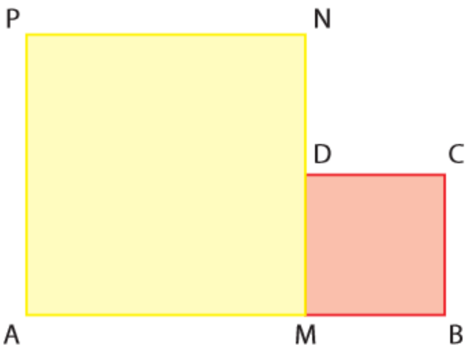
x	$-\infty$	5	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$

1. f admet-elle un minimum local ? Si oui, en quelle valeur ?
2. f admet-elle un maximum local ? Si oui, en quelle valeur ?

Exercice 25. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 15x + 100$.
1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x
2. Dresser le tableau de signe de f' sur $\mathbb{R}$
3. En déduire que f admet un extremum local en une valeur à déterminer.

Exercice 26. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^3 + 9x$.
1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x
2. Dresser le tableau de signe de f' sur $\mathbb{R}$
3. En déduire que f admet un maximum local en une valeur à déterminer, et un minimum local en une valeur à déterminer.

Exercice 27. Soit la figure ci-dessous :



On note $x = AM$. On suppose $AB = 10$.
On note $f(x)$ l'aire totale des 2 carrés en fonction de x.
1. A quel intervalle I appartient le réel x
2. Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) = 2x^2 - 20x + 100$
3. Justifier que f est dérivable sur I et déterminer f'
4. En déduire les variations de f sur I et la valeur de x pour laquelle l'aire du domaine est minimale.

Exercice 28. Voici un programme de calcul :

Choisir un nombre positif Ajouter $\frac{1}{2}$ Mettre au carré Soustraire le cube du nombre initial

Quel nombre choisir au départ afin que le résultat trouvé soit le plus grand possible ?

Exercice 29. Déterminer deux nombres réels non nuls tels que leur produit soit minimal, sachant que leur différence est égale à 100.

Exercice 30. Une coopérative fabrique du jus de pomme. Elle produit entre 0 et 200 litres de jus. Elle a établi que ses coûts de production, en euros, de x litres de jus de pommes étaient donnés par la fonction $C: x \mapsto 100x^2 - 10x + 10$
Chaque litre produit sera vendu $1{,}9$€.
1. Quel est l'ensemble de définition de C ?
2. On appelle $R(x)$ la recette gagnée par la coopérative pour x litres vendus. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
3. On appelle $B(x) = R(x) - C(x)$ le bénéfice réalisé par la coopérative lorsqu'elle produit et vend x litres de jus de pomme.
Calculer $B(x)$ pour $x \in [0; 200]$
4. Etudier les variations de B sur $[0; 200]$
5. En déduire le nombre de litres à produire pour obtenir un bénéfice maximum.

Exercice 31. Un rectangle a pour périmètre 50cm. On note x sa largeur.
1. Exprimer sa longueur en fonction de x.
2. Exprimer son aire en fonction de x.
3. En déduire l'aire maximum de ce rectangle.

Exercice 32. Un mobile se déplace sur un axe $[Ox)$ gradué en cm. On observe son déplacement pendant une durée de 6s. Sa position sur l'axe est donnée, en fonction du temps t (en s), par la fonction $f(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 9t$.
1. Etudier les variations de la fonction f sur $[0; 6]$
2. Décrire le mouvement du mobile sur son axe.
3. La vitesse instantanée du mobile à un instant t est égale à $f'(t)$ et est exprimée en cm/s.
a) Quelle est sa vitesse initiale ?
b) A quels instants sa vitesse est-elle inférieure à 1 cm/s ?

Exercice 33. Soit ABC un triangle isocèle en A de périmètre p donné. On cherche à construire ce triangle de façon à maximiser son aire.
Plus précisément, on cherche la valeur de $x = BC$ qui maximise l'aire $A(x)$ de ABC.
On note $[AH]$ la hauteur issue de A dans ABC.
1. Justifier que $0 \leq x < \frac{p}{2}$
2. Exprimer AH en fonction de x
3. En déduire que l'aire du triangle vérifie :
$A(x) = \frac{x}{2}\sqrt{p^2 - \frac{p}{2}x}$
4. Justifier que A est dérivable sur $[0; \frac{p}{2}[$ et déterminer A' sur cet intervalle.
5. Répondre au problème posé.