Objectif. Calculer des produits scalaires

Exercice 1. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calculer

$$\vec{u} + \vec{v} \qquad \vec{u} - \vec{v}$$
$$3\vec{u} \qquad \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Exercice 2. Calculer :

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -2{,}1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{v} \cdot \vec{u}$. Que remarque-t-on ?
2. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{w}$, $\vec{v} \cdot \vec{w}$ puis $\vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
3. Calculer $\vec{u} + \vec{v}$, puis $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$

Exercice 4. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Calculer :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \qquad (-2\vec{u}) \cdot \vec{v}$$
$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{u} \qquad (5\vec{u}) \cdot (3\vec{v})$$

Exercice 5. Calculer :

$$A = \left\| \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| \qquad B = \left\| \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\|^2$$
$$C = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$E = 6\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad F = \sqrt{\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}}$$

Exercice 6.
On donne $\|\vec{u}\| = 3$; $\|\vec{v}\| = 8$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -12$.

1. Calculer $A = (2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (-5\vec{u} + 2\vec{v})$

Exercice 7. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\vec{u} + \vec{v}$ puis $A = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$
2. Calculer $\|\vec{u}\|^2$, $\|\vec{v}\|^2$, $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
3. Calculer $B = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
4. Que remarque-t-on ?

Exercice 8. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ puis développer le plus possible.
2. Calculer $B = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
3. Conclure.

Objectif. Montrer l'orthogonalité de vecteurs.

Exercice 9. Montrer que les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

Exercice 10. Soit $A = (-2; 1)$, $B = (-3; 2)$, $C = (0; 3)$ dans un repère orthonormé.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
2. Que peut-on dire des droites (AB) et (AC) ?

Exercice 11. On donne les points $A = (3; 1)$, $B = (0; -2)$, $C = (-1; 1)$ et $D = (3; -3)$.

1. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 12. Le triangle ABC où $A = (0; -2)$, $B = (-1; 1)$ et $C = (2; 2)$ est-il un triangle rectangle ? Si oui, en quel point ?

Objectif. Décrire un lieu géométrique

Exercice 13. Soit deux points A et B tels que $AB = 10$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.

a. Pour $k = 5$ b. Pour $k = -25$ c. Pour $k = -60$

Exercice 14. Soit deux points A et B, on note I le milieu de $[AB]$.

1. Compléter :

$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \ldots$ (d'après la relation de …………….)
$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \ldots$ (d'après la relation de …………….)
$\overrightarrow{IA} = \ldots\ \overrightarrow{IB}$ (car ………………………)
$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IA} = \| \qquad \|^2 = IA^2$
$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA} \cdot (\ldots\ldots) = -\ldots\ldots$

2. Montrer : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$
3. Que peut-on dire sur M si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$?

Objectif. Vecteur normal et projeté orthogonal

Exercice 15. Donner une équation de la droite d passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$:

1. $A = (2; 1)$; $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 2. $A = (-8; -4)$; $\vec{n} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$

Exercice 16. Déterminer une équation de la droite Δ perpendiculaire à d et passant par A :

1. $(d) : x + y - 5 = 0$ et $A = (1; 1)$ 2. $(d) : x = 5$ et $A = (2; 4)$

Exercice 17. Soit $A = (-2; -1)$, $B = (6; 3)$, et $C = (2; 6)$.

1. Déterminer le projeté orthogonal H du point C sur la droite (AB).