Dérivation

Rappels. Toute droite du plan d non verticale admet une équation de la forme " $y = mx + p$ " où m et p sont des constantes réelles. Dans ce cas l'expression " $y = mx + p$ " est **l'équation réduite de la droite d**

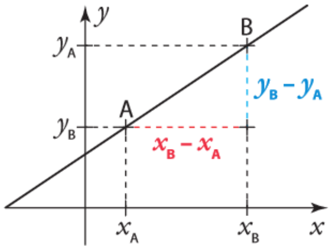
Exemple. $y = 3x + 6$ et $y = -17x - 30$ sont des équations réduites de droites.

Définitions. La pente (ou coefficient directeur) d'une droite non verticale, est le nombre m qui indique de combien d'unités la droite monte (ou descend si $m < 0$) lorsqu'on avance d'une unité vers la droite.
La pente d'une droite d'équation " $y = mx + p$ " est m. p s'appelle **l'ordonnée à l'origine** de d.

Exemple. La droite $y = 5x + 3$ a pour pente 5 et pour ordonnée à l'origine 3.

Exemple. La droite $y = -2x$ a pour pente -2 et pour ordonnée à l'origine 0.

Exemple. La droite $y = x - 1$ a pour pente 1 et pour ordonnée à l'origine -1.



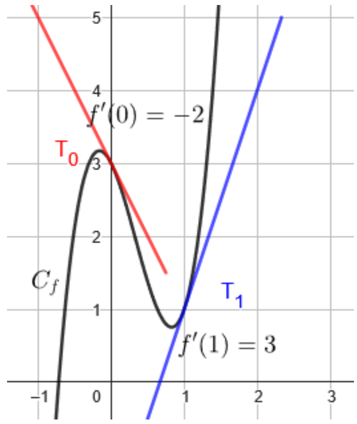
Propriété. Etant donnés $A = (x_A; y_A)$ et $B = (x_B; y_B)$ deux points du plan d'abscisses distinctes ($x_A \neq x_B$), alors la pente de la droite (AB) est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$$\text{pente} = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$$

Exemple. Donner la pente de la droite passant par $A = (1; 1)$ et $B = (2; 4)$.

La pente de cette droite est $m = \frac{4-1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$.

Idée principale. La dérivée d'une fonction en un point (de sa courbe) est la pente de la fonction en ce point.
C'est un nombre qui mesure la « vitesse de variation » de la fonction au point étudié. La notion de dérivée généralise la notion de pente à une fonction.
Contrairement aux droites : Elle dépend du point choisi. Elle n'existe pas toujours.



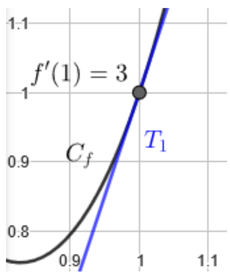
Exemple. Sur le graphe de f ci-contre, la dérivée de la fonction f en $x = 1$ est 3 car la droite T_1 tangente à C_f au point de C_f d'abscisse 1, a pour pente $m = 3$.

On écrit $f'(1) = 3$. La fonction « monte à une vitesse de 3 carreaux/unité » en 1.

Exemple. La dérivée de f en $x = 0$ est -2 car la tangente T_0 a pour pente -2.

On écrit $f'(0) = -2$. La fonction « descend à une vitesse de 2 carreaux/unité » en 0

Intuitions. On se place en un point d'abscisse a de la courbe d'une fonction f.
Si en faisant un zoom infini sur le point, la courbe se déforme et devient une droite (non verticale), alors :
- Cette droite est appelée **tangente à la courbe représentative de f en a**.
- La **dérivée de la fonction f en a**, notée **$f'(a)$** est la pente de la tangente à f en a.
- On dit que la fonction f est **dérivable en a**, (elle admet une dérivée en a).

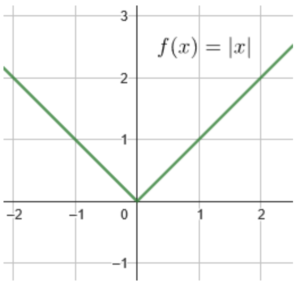


Exemple. Dans l'exemple précédent, si on zoome sur la courbe en $(1; 1)$, la courbe se déforme progressivement jusqu'à se confondre avec T_1.

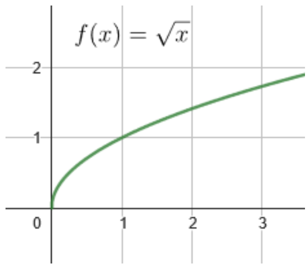
T_1 est donc la tangente à f en 1, et sa pente 3 est la dérivée de f en 1.

De même, T_0 est ce que l'on voit si on zoome très près de $(0; 3)$. T_0 est la tangente à f en 0.

Contre exemples. Il y a des fonctions qui ne sont pas dérivables en certains points.

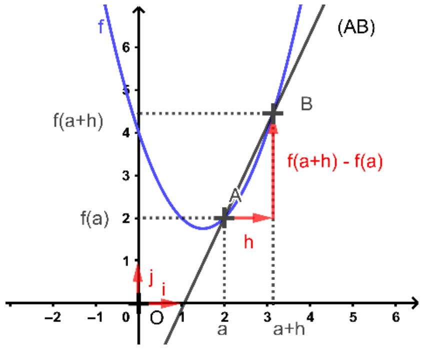


La valeur absolue $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0, car si on zoome sur l'origine, la fonction forme un pic infiniment pointu, et non une droite. Il n'y a pas de tangente en 0. (Elle est cependant dérivable partout ailleurs)



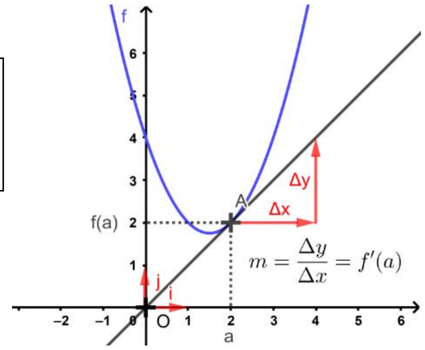
La racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0, car si on zoome sur l'origine, la tangente est verticale donc la dérivée en 0 n'est pas un nombre fini.

Remarque. Pour définir précisément la tangente et la dérivée, en un point A fixé sur la courbe d'une fonction f, la définition suivante exprime l'idée que :
- On visualise la droite (AB) où B est un point qui se déplace librement le long de la courbe, et situé à une distance horizontale h du point A.
- On rapproche le point B du point A, en diminuant la distance h vers 0.
- Quand B devient confondu avec A, la droite limite obtenue est la tangente, et la pente limite obtenue est la dérivée. La dérivée est la pente de la tangente.



Définition. Soit I un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Soit a et b des réels de l'intervalle I. On note $h = b - a$.

f* est dérivable en *a si $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est un nombre réel.
Dans ce cas on note $\boldsymbol{f'(a)} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. $f'(a)$ est la **dérivée de f en a.**



$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est appelé **taux d'accroissement de f entre a et b.**

Remarque. Dans la définition, $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ peut être écrit sous la forme $\lim\limits_{b\to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ou sous la forme $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ ce qui s'écrit aussi $\frac{df}{dx}$ en physique.

Exemple. Soit la fonction définie par $f(x) = x^2$
$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2-3^2}{h} = \frac{h^2+6h}{h} = h + 6$ si $h \neq 0$. Donc quand $h \to 0$, $\frac{f(3+h)-f(3)}{h} \to 6$ donc $f'(3) = 6$.

Définition (Tangente). Si f est dérivable en a, **la tangente à C_f en a** est la droite passant par $A = (a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.
Propriété. L'équation de la tangente à C_f en a est " $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ "

Exemple. Donner l'équation réduite de la tangente en 2 de la fonction f telle que $f(2) = 3$ et $f'(2) = -5$.
$y = (-5)(x-2) + (3) = -5x + 10 + 3 = -5x + 13$. La tangente a pour équation réduite $y = -5x + 13$.

Définition. *f* est dérivable sur un intervalle *I* si elle est dérivable en tout nombre réel x de I.
Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée de la fonction *f***, la fonction $f' : \begin{matrix} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{matrix}$

Remarque. La courbe d'une fonction dérivable sur tout un intervalle, a généralement un aspect lisse.
Les pics et changements abrupts de direction correspondent à des points de non-dérivabilité.
Table des dérivées. Pour déterminer une dérivée par le calcul, on utilise les tables ci-dessous.

Dérivées de référence. A chaque ligne, f est définie et vaut l'expression de la 2ème colonne *sur tout* D_f. On déduit : f est dérivable sur $D_{f'}$, et $f'(x)$ vaut l'expression dans la 3ème colonne *sur tout* $D_{f'}$

D_f	$f(x)$	$f'(x)$	$D_{f'}$	Conditions
$\mathbb{R}$	c	0	$\mathbb{R}$	$c \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x	1	$\mathbb{R}$	
$\mathbb{R}$	ax	a	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$ax+b$	a	$\mathbb{R}$	$a, b \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x^2	$2x$	$\mathbb{R}$	
$\mathbb{R}$	x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$	
$\mathbb{R}$	x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}, n > 0$
$\mathbb{R}^*$	x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$	$n \in \mathbb{Z}, n < 0$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$	
$\mathbb{R}$	e^x	e^x	$\mathbb{R}$	

Opérations sur les dérivées. A chaque ligne :
- On suppose que u et v sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, et dérivables sur un intervalle I.
- On déduit que f est définie et dérivable sur I.

f	f'	Conditions
$u+v$	$(u+v)' = u' + v'$	
$u-v$	$(u-v)' = u' - v'$	
$a \times u$	$(a \times u)' = a \times u'$	$a \in \mathbb{R}$
$u \times v$	$(uv)' = u'v + v'u$	
$\frac{1}{v}$	$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$	$v : I \to \mathbb{R}^*$ v ne s'annule pas sur I.
$\frac{u}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	$v : I \to \mathbb{R}^*$ v ne s'annule pas sur I.
e^u	$(e^u)' = u'e^u$	
$x \mapsto v(ax+b)$	$x \mapsto a \times v'(ax+b)$	$v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$