Suites numériques

Définition. Une **suite** est une liste ordonnée et infinie de nombres

Exemples.
La liste des entiers naturels $(0; 1; 2; 3; 4; \dots)$ est une suite.
La liste des multiples de 3 supérieurs à 6 : $(6; 9; 12; 15; \dots)$ est une suite.
$(1; 2; 3; 4)$ n'est pas une suite car c'est une liste finie.

Notation. On note u_n **le terme de rang n** d'une suite u

Exemple. Si $u = (1; 3; 5; 7; \dots)$ est la suite des entiers impairs, alors $u_0 = 1$; $u_1 = 3$; $u_2 = 5$; $u_3 = 7$; …

Vocabulaire. Une suite (u_n) est **définie explicitement** si on peut écrire u_n en <u>fonction du *rang* n</u>

Exemples. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $u = (-1; 0; 3; 8; 15; 24; \dots)$

Vocabulaire. Une suite (u_n) est **définie par récurrence** si :
- On donne une formule exprimant tout terme, en <u>fonction d'un ou plusieurs *termes précédents*</u>
- On donne un premier terme de la suite (voire plusieurs premiers termes)

Exemple. Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -6 \\ u_{n+1} = 3u_n + 15 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ (suivant = 3 × courant + 15)

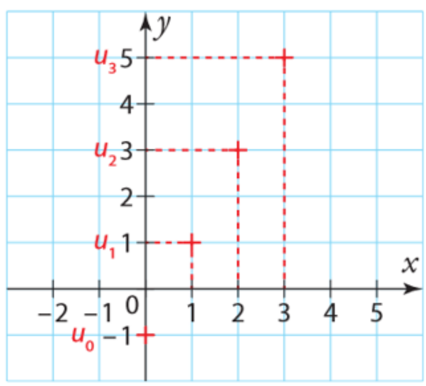
$u_1 = 3 \times (-6) + 15 = -3$ (autrement dit, on a remplacé n par 0 : $u_1 = u_{0+1} = 3u_0 + 15$)
$u_2 = 3 \times (-3) + 15 = 6$ (autrement dit, on a remplacé n par 1 : $u_2 = u_{1+1} = 3u_1 + 15$)
$u_3 = 3 \times (6) + 15 = 33$
Etc… $u = (-6; -3; 6; 33; \dots)$ Pour calculer chaque terme, on doit connaître le précédent.

Vocabulaire. Si le terme **<u>courant</u>** est u_n, alors u_{n+1} est le terme **<u>suivant</u>**. u_{n-1} est le terme **<u>précédent</u>**.
Remarque. <u>*Attention*</u> à ne jamais confondre u_{n+1} (le terme suivant) et $u_n + 1$ (le terme courant + 1)

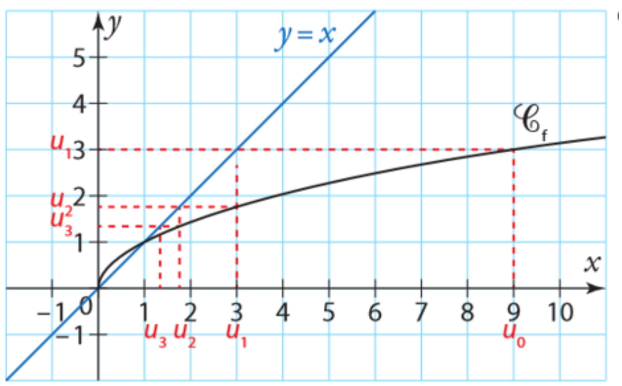
Méthode. Pour représenter une suite dans un repère (voir 1.), on place les points de coordonnées $(n; u_n)$.

Méthode. <u>Si la suite (u_n) est *définie par récurrence*</u>, ($u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$), alors (voir 2.) on peut construire les termes à l'aide de la courbe représentative de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$

1 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2n - 1$.



2 On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.



Suites arithmétiques et géométriques

Idée. Une suite (u_n) est **arithmétique** si on ajoute toujours le <u>même</u> nombre pour passer au terme suivant.

Exemple *a*. $(6; 11; 16; 21; 26; 31; \dots)$ est le début d'une suite arithmétique u, car on ajoute 5 à chaque fois.
Exemple *b*. $(7; 4; 1; -2; -5; -8; \dots)$ est le début d'une suite arithmétique v, car on ajoute -3 à chaque fois.

Définition. Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$
r est appelé **raison de la suite arithmétique** (u_n).

Exemple. Dans l'exemple *a*, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 5$. La raison de cette suite est $r = 5$.
Exemple. Dans l'exemple *b*, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 3$. La raison de cette suite est $r = -3$.

Propriété. Soit (u_n) une suite <u>arithmétique</u> de raison r.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_0 + r \times n$$

Exemple. Dans l'exemple *a*, (u_n) est arithmétique de raison $r = 5$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6 + 5n$
Exemple. Dans l'exemple *b*, (v_n) est arithmétique de raison $r = -3$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 - 3n$

Remarque. Si le rang initial est 1 il faut adapter la formule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + r(n-1)$
Remarque. Si le rang initial est $p \in \mathbb{N}$ il faut adapter la formule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + r(n-p)$

Idée. (u_n) est **géométrique** si on multiplie toujours par le <u>même</u> nombre pour passer au terme suivant.

Exemple *c*. $(3; 6; 12; 24; 48; 96; \dots)$ est le début d'une suite géométrique u, car on $\times\, 2$ à chaque fois.
Exemple *d*. $(900; 90; 9; 0{,}9; 0{,}09; \dots)$ est le début d'une suite géométrique v, car on $\times \frac{1}{10}$ à chaque fois.

Définition. Une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel q, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$
q est appelé **raison de la suite géométrique** (u_n).

Exemple. Dans l'exemple *c*, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 \times u_n$. La raison de cette suite est $q = 2$.
Exemple. Dans l'exemple *d*, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{10} \times v_n$. La raison de cette suite est $q = \frac{1}{10}$.

Propriété. Soit (u_n) une suite <u>géométrique</u> de raison q.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_0 \times q^n$$

Exemple. Dans l'exemple *a*, (u_n) est géométrique de raison $q = 2$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^n$
Exemple. Dans l'exemple *b*, on a $q = \frac{1}{10}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 900 \times \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{900}{10^n}$

Remarque. Si le rang initial est 1 il faut adapter la formule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 q^{n-1}$
Remarque. Si le rang initial est $p \in \mathbb{N}$ il faut adapter la formule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p q^{n-p}$