

Suites numériques

Idée. Une **suite** est une liste ordonnée et infinie de nombres, par exemple $(1; 3; 5; 7; 9; 11; \dots)$.

Exemple. La liste des entiers naturels $(0; 1; 2; 3; 4; \dots)$ est une suite.

Exemple. La liste des multiples de 3 supérieurs à 6 : $(6; 9; 12; 15; \dots)$ est une suite.

Contre-Exemple. $(1; 2; 3; 4)$ n'est pas une suite car c'est une liste finie.

Notation. On note u_n le **terme de rang n** d'une suite u

Exemple. Si $u = (1; 3; 5; 7; \dots)$ est la suite des entiers impairs, alors $u_0 = 1; u_1 = 3; u_2 = 5; u_3 = 7; \dots$

Attention : Ne pas confondre u_n qui est un simple **nombre** et (u_n) qui désigne **toute la suite u** .

Remarque. Le rang initial est souvent 0. Mais on peut définir une suite $(u_n)_{n \geq k}$ avec un rang initial $k \geq 1$.

Vocabulaire. Une suite (u_n) est **définie explicitement** si on peut écrire u_n en **fonction du rang n**

Exemples. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $u = (-1; 0; 3; 8; 15; 24; \dots)$

Soit la suite $(u_n)_{n \geq 6}$ définie à partir du rang 6 par $u_n = \frac{1}{n-5}$. On a $u = (u_6; u_7; u_8; \dots) = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots\right)$

Vocabulaire. Une suite (u_n) est **définie par récurrence** si :

- On donne une formule exprimant tout terme, en **fonction d'un ou plusieurs termes précédents**
- On donne un premier terme de la suite (voire plusieurs premiers termes)

Exemple. Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -6 \\ u_{n+1} = 3u_n + 15 \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$ (suivant = $3 \times$ courant + 15)

$u_1 = 3 \times (-6) + 15 = -3$ (autrement dit, on a remplacé n par 0 : $u_1 = u_{0+1} = 3u_0 + 15$)

$u_2 = 3 \times (-3) + 15 = 6$ (autrement dit, on a remplacé n par 1 : $u_2 = u_{1+1} = 3u_1 + 15$)

$u_3 = 3 \times (6) + 15 = 33$

Etc... $u = (-6; -3; 6; 33; \dots)$ Pour calculer chaque terme, on doit connaître le précédent.

Vocabulaire. Si le terme **courant** est u_n , alors u_{n+1} est le terme **suivant**. u_{n-1} est le terme **précédent**.

Remarque. **Attention** à ne jamais confondre u_{n+1} (le terme suivant) et $u_n + 1$ (le terme courant + 1)

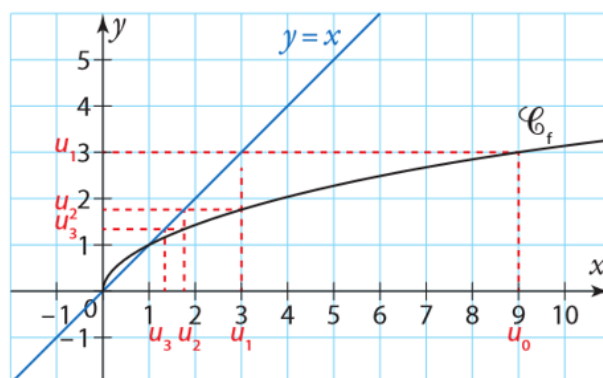
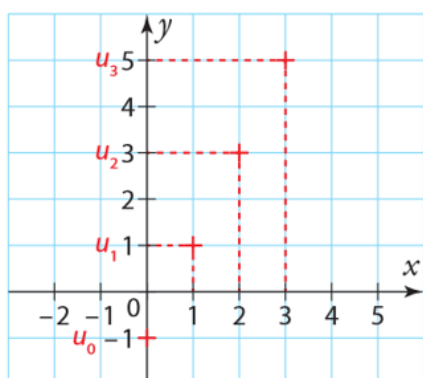
Exemple. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors $u_{n+1} = (n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n + 1 - 1 = n^2 + 2n$ **mais** $u_n + 1 = (n^2 - 1) + 1 = n^2$

Méthode. Pour représenter une suite dans un repère (voir 1.), on place les points de coordonnées $(n; u_n)$.

Méthode. Si la suite (u_n) est **définie par récurrence**, ($u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$), alors (voir 2.) on peut construire les termes à l'aide de la courbe représentative de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$

- ① On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2n - 1$. ② On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.



Suites arithmétiques et géométriques

Idée. Une suite (u_n) est **arithmétique** si on ajoute toujours le même nombre pour passer au terme suivant.

Exemple a. (6; 11; 16; 21; 26; 31; ...) est le début d'une suite arithmétique u , car on ajoute 5 à chaque fois.

Exemple b. (7; 4; 1; -2; -5; -8; ...) est le début d'une suite arithmétique v , car on ajoute -3 à chaque fois.

Définition. Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r , tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$
 r est appelé **raison de la suite arithmétique** (u_n) .

Exemple. Dans l'exemple a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 5$. La raison de cette suite est $r = 5$.

Exemple. Dans l'exemple b, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 3$. La raison de cette suite est $r = -3$.

Propriété. Soit (u_n) une suite **arithmétique** de raison r .

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + r \times n$$

Exemple. Dans l'exemple a, (u_n) est arithmétique de raison $r = 5$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6 + 5n$

Exemple. Dans l'exemple b, (v_n) est arithmétique de raison $r = -3$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 - 3n$

Remarque. Si le rang initial est 1 il faut adapter la formule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + r(n - 1)$

Remarque. Si le rang initial est $p \in \mathbb{N}$ il faut adapter la formule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + r(n - p)$

Idée. (u_n) est **géométrique** si on multiplie toujours par le même nombre pour passer au terme suivant.

Exemple c. (3; 6; 12; 24; 48; 96; ...) est le début d'une suite géométrique u , car on $\times 2$ à chaque fois.

Exemple d. (900; 90; 9; 0,9; 0,09; ...) est le début d'une suite géométrique v , car on $\times \frac{1}{10}$ à chaque fois.

Définition. Une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel q , tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$
 q est appelé **raison de la suite géométrique** (u_n) .

Exemple. Dans l'exemple c, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 \times u_n$. La raison de cette suite est $q = 2$.

Exemple. Dans l'exemple d, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{10} \times v_n$. La raison de cette suite est $q = \frac{1}{10}$.

Propriété. Soit (u_n) une suite **géométrique** de raison q .

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n$$

Exemple. Dans l'exemple a, (u_n) est géométrique de raison $q = 2$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^n$

Exemple. Dans l'exemple b, on a $q = \frac{1}{10}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 900 \times \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{900}{10^n}$

Remarque. Si le rang initial est 1 il faut adapter la formule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 q^{n-1}$

Remarque. Si le rang initial est $p \in \mathbb{N}$ il faut adapter la formule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p q^{n-p}$