

Produit scalaire algébrique

Définition (Produit scalaire). Dans un repère orthonormé, si $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors on appelle **produit scalaire de \vec{u} et \vec{v}** et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le nombre défini par $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Exemple. Le produit scalaire de $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ est $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2) \times (-3) + (3) \times (-5) = -21$

Attention le produit scalaire \cdot n'est pas une multiplication \times . \vec{u} et \vec{v} sont des vecteurs et pas des nombres.

Exemple. $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = (5) \times (3) + (-1) \times (-2) = 15 + 2 = 17$

Hypothèses. Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs du plan, et k un réel.

Propriété. Le produit scalaire est commutatif. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Exemple. $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2,5 \\ -1 \end{pmatrix} = (-4)(2,5) + (3)(-1) = -13$ $\begin{pmatrix} 2,5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = (2,5)(-4) + (-1)(3) = -13$

Propriété. Le produit scalaire \cdot est distributif sur $+$. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d}$

Exemple. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 + 0 + 6 - 6 = 2$

Propriété. Dans un produit scalaire, les constantes peuvent être sorties devant

$$\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Exemple. $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot 5 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 5 \left(\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = 5 \times ((5)(3) + (-1)(-2)) = 5(17) = 85$

Rappel. La norme (ou longueur) d'un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, est définie par $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exemple. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$. \vec{u} est de longueur 5.

Propriété. Le carré scalaire est égal au carré de la norme. $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 = \|\vec{u}\|^2$

Exemple. $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = (4)(4) + (-3)(-3) = 25$. Aussi $\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|^2 = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2}^2 = (4)^2 + (-3)^2 = 25$

Attention : $\|\vec{u}\|$ est un nombre donc $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\|$. Mais dans $\vec{u} \cdot \vec{u}$ il s'agit du produit scalaire et pas \times .

Corollaire. La norme d'un vecteur est la racine de son carré scalaire. $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Propriété. 1^{ère} identité remarquable vectorielle. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

Propriété. 2^{ème} identité remarquable vectorielle. $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

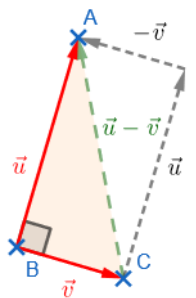
Preuve. $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix} \right\|^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - 2xx' - 2yy'$

Propriété. Dans un repère orthonormé, deux vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul.

\vec{u} et \vec{v} orthogonaux $\Leftrightarrow \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

Exemple. Montrer que $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

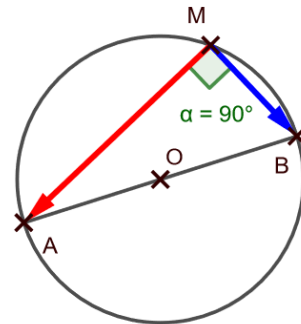
$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2) \times (-3) + (-3) \times (-2) = -6 + 6 = 0$ donc les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.



Propriété. Soit A, B deux points distincts. Soit M un point.

M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ ssi $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ ssi ABM est rectangle en M (quand $M \neq A, B$)

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.



Exemple. Si $A = (5; 4)$ et $B = (1; 2)$, donner une équation du cercle de diamètre $[AB]$
On note C ce cercle. Soit $M = (x; y)$ un point du plan.

$$M \in C \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5-x \\ 4-y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-x \\ 2-y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (5-x)(1-x) + (4-y)(2-y) = 0$$

$$M \in C \Leftrightarrow 5 - 5x - x + x^2 + 8 - 4y - 2y + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 6y + 13 = 0$$

Propriété. Etant donné deux points A et B et leur milieu I , on a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

Exemple. Soit $A = (5; 4)$ et $B = (1; 2)$, déterminer l'ensemble (E) des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 8$.

On note I le milieu de $[AB]$. On a $I = \left(\frac{5+1}{2}; \frac{4+2}{2}\right) = (3; 3)$.

$$\text{De plus } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$$

Soit $M = (x; y)$ un point du plan.

$$M \in (E) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 8 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 8 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{1}{4} \times 20 = 8 \Leftrightarrow MI^2 - 5 = 8 \Leftrightarrow MI^2 = 13 \Leftrightarrow MI = \sqrt{13}$$

(E) est un cercle de centre $I = (3; 3)$ et de rayon $\sqrt{13}$.

Définition. \vec{u} est un **vecteur normal à la droite (AB)** ssi \vec{u} est orthogonal à \overrightarrow{AB} ssi $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

Propriété. Un vecteur normal à une droite d'équation cartésienne " $ax + by + c = 0$ " est $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Exemple. Déterminer une équation de la droite (d) de vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et passant par $A = (1; 0)$.

Soit $M = (x; y)$ un point du plan.

$$M \in (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2) + (y)(-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y - 2 = 0$$

Rappel. \vec{u} est un **vecteur directeur de la droite (AB)** ssi \vec{u} est colinéaire à \overrightarrow{AB} ssi $\det(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = 0$

Propriété. Un vecteur directeur d'une droite d'équation cartésienne " $ax + by + c = 0$ " est $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Exemple. Déterminer une équation de la droite (d) de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ passant par $A = (1; 0)$.

Soit $M = (x; y)$ un point du plan.

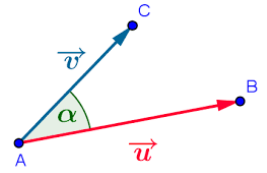
$$M \in (d) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ y-0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(-3) - (y)(2) = 0 \Leftrightarrow -3x + 3 - 2y = 0$$

Produit scalaire géométrique

Définition. L'angle géométrique entre deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} noté $(\vec{u}; \vec{v})$ est défini comme la longueur, le long du cercle \mathcal{C} de centre $O = (0; 0)$ de rayon 1, de l'arc le plus court possible entre A et B , les points de \mathcal{C} définis par $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \overrightarrow{OA}$ et $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \overrightarrow{OB}$.

Idée. $(\vec{u}; \vec{v})$ correspond à l'angle saillant que l'on mesure directement au rapporteur entre \vec{u} et \vec{v} si on les fait partir d'un même point.

Remarque. $(\vec{u}; \vec{v})$ est un nombre qui appartient toujours à l'intervalle $[0; \pi]$



Définition. Deux vecteurs $\vec{u}; \vec{v}$ non nuls sont **orthogonaux**, s'ils forment un angle droit. $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$

Définition. Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires**, s'ils forment un angle valant 0 ou π . $(\vec{u}; \vec{v}) \in \{0; \pi\}$

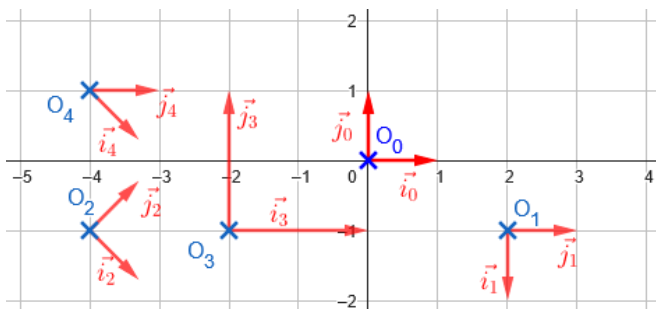
Propriété. Deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires ssi il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Propriété. Deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires ssi $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$

Définition. Un **repère** $R = (O; \vec{i}; \vec{j})$ désigne la donnée d'un point O et de vecteurs \vec{i} et \vec{j} non colinéaires.

Déf. $R_0 = \left((0; 0); \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est le **repère canonique**. Il sert de référence pour les repères orthonormés.

Définition. Un **repère** $R = (O; \vec{i}; \vec{j})$ est **orthonormé** si \vec{i} et \vec{j} sont orthogonaux et de longueur 1 (dans R_0).



Exemples. Ici R_0 est le repère de référence.

Ci-contre, les repères R_0, R_1 et R_2 sont orthonormés.

Les longueurs ont donc la même mesure dans R_0, R_1, R_2 .

R_3 n'est pas orthonormé car ses vecteurs sont de longueur 2 (en les mesurant dans R_0).

R_4 n'est pas orthonormé car ses vecteurs ne sont pas orthogonaux (au sens de R_0).

Propriété. Soit $R = (O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit un vecteur \vec{u} . Il existe d'unique $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Définition. x et y sont les **coordonnées du vecteur \vec{u} dans le repère R** . On note souvent $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_R$

Propriété. Soit $R = (O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit un point M . Il existe d'unique $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Définition. x et y sont les **coordonnées du point M dans le repère R** . On note souvent $M = (x; y)_R$

Remarque. Quand on change de repère R , les coordonnées d'un vecteur ou d'un point changent.

Cependant, la plupart des formules vectorielles restent valables, si on les écrit dans un même repère R .

Propriété. Les longueurs et angles géométriques ne changent pas si on change de repère orthonormé

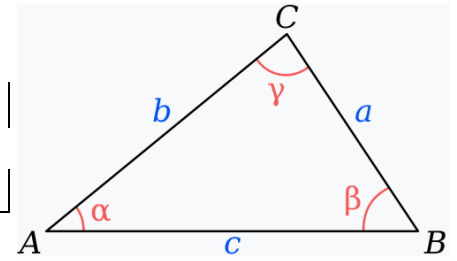
Théorème. Loi des cosinus, ou formule d'Al-Kashi

Dans un triangle ABC quelconque, on a, par exemple :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

En posant $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\alpha = \widehat{BAC}$, on peut écrire :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$



Exemple. Soit un triangle ABC tel que $AB = 8$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 50^\circ$.

Calculer la longueur BC .

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 64 + 16 - 2 \times 8 \times 4 \times \cos(50^\circ) \approx 38,86 \text{ et donc } BC \approx 6,23$$

Hypothèse. On se place dans un repère orthonormé R fixé. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls

Rappel. Produit scalaire (algébrique). $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Rappel. (2^{ème} identité remarquable).

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

Propriété. Reformulation vectorielle d'Al-Kashi.

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\widehat{(\vec{u}; \vec{v})})$$

Propriété. Produit scalaire (géométrique). $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\widehat{(\vec{u}; \vec{v})})$

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

Exemple. Soit deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} tels que $AB = 2$ et $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 30^\circ$.

Leur produit scalaire vaut $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

Corollaire. Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est un nombre qui ne dépend pas du repère orthonormé R choisi.

Quand on utilise $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_R \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_R = xx' + yy'$, on peut choisir un repère orthonormé R qui nous arrange.

Corollaire. \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (Car $(\widehat{(\vec{u}; \vec{v})}) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos(\widehat{(\vec{u}; \vec{v})}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$)

Corollaire. \vec{u} et \vec{v} colinéaires de même sens $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ (Car $(\widehat{(\vec{u}; \vec{v})}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\widehat{(\vec{u}; \vec{v})}) = 1$)

Corollaire. \vec{u} et \vec{v} colinéaires de sens opposés $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ (Car $(\widehat{(\vec{u}; \vec{v})}) = \pi \Leftrightarrow \cos(\widehat{(\vec{u}; \vec{v})}) = -1$)

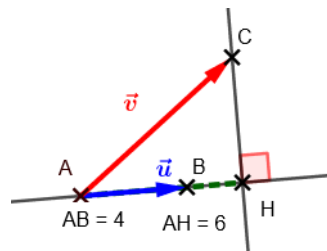
Propriété (Interprétation géométrique). Soit trois points A, B, C (ou deux vecteurs \vec{u}, \vec{v} qu'on fait partir d'un même point A). Alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \pm AB \times AH$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB) .

Le signe est $+$ si \overrightarrow{AH} est de même sens que \overrightarrow{AB} , et $-$ sinon.

Exemple.

Ici $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et \overrightarrow{AH} sont dans le même sens, donc

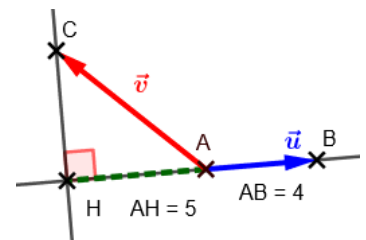
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = +4 \times 6 = +24$$



Exemple.

Ici $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et \overrightarrow{AH} sont dans des sens opposés, donc

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -4 \times 5 = -20$$



Méthode. Pour déterminer la composante d'un vecteur \vec{v} dans une direction donnée, on « projette » sur un vecteur directeur unitaire \vec{u} dans la direction souhaitée. (On calcule $\vec{v} \cdot \vec{u}$)

Exemple. Une piste de ski est représentée par une droite qui descend avec une pente de 45° .

La piste est donc dirigée par le vecteur unitaire $\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) \end{pmatrix}$. Un skieur de 70 kg, subit son poids

comme une force \vec{F} d'environ 700 N vers le bas, donc $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -700 \end{pmatrix}$. La composante du poids du skieur le

long de la piste est donc $\vec{F} \cdot \vec{u} = (-700)(\sin(-45^\circ)) = 700 \sin(45^\circ) \approx 500$ N.

Pour aller plus loin...

Changements de repère.

Propriété. Dans tout repère orthonormé $R = (O; \vec{i}; \vec{j})$,

Les coordonnées d'un vecteur \vec{v} dans R peuvent s'obtenir en calculant $x_{\vec{v}}^R = \vec{v} \cdot \vec{i}$ et $y_{\vec{v}}^R = \vec{v} \cdot \vec{j}$.

Les coordonnées d'un point M dans R peuvent s'obtenir en calculant $x_M^R = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{i}$ et $y_M^R = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{j}$.

Exemple. On note $R = (O; \vec{i}; \vec{j})$ et $R' = (O'; \vec{i}'; \vec{j}')$.

On a $A = (2; 0)_R$.

Calculer les coordonnées de A dans R' .

$$x_{\vec{i}'} = \vec{i}' \cdot \vec{i} = \|\vec{i}'\| \|\vec{i}\| \cos(\vec{i}', \vec{i}) = \cos(\vec{i}', \vec{i}) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_{\vec{i}'} = \vec{i}' \cdot \vec{j} = \cos(\vec{i}', \vec{j}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Donc } \vec{i}' = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}_R. \text{ Par des calculs similaires } \vec{j}' = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}_R$$

$$\text{Ainsi dans } R', \quad x_A = \overrightarrow{O'A} \cdot \vec{i}' = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_R \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}_R = -\sqrt{2} \quad \text{et} \quad y_A = \overrightarrow{O'A} \cdot \vec{j}' = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_R \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}_R = 0$$

$$\text{Donc } A = (-\sqrt{2}; 0)_{R'}$$

