

Logarithmes

Soit $a > 0$

Rappels. $a^x \times a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $(a^x)^y = a^{xy}$ $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$
 $a^0 = 1$ $a^1 = a$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$ $a^x > 0$

Définition. $\log(c)$ est la puissance de 10 qui donne c . C'est le nombre x tel que $10^x = c$.

Exemples. $\log(1000) = 3$ car $10^3 = 1000$. $\log(10) = 1$ car $10^1 = 10$. $\log(1) = 0$ car $10^0 = 1$. $\log(0,001) = -3$.

Propriété.

Si $c \leq 0$, l'équation $a^x = c$ n'a pas de solution.

Si $c > 0$, l'équation $a^x = c$ a une unique solution x .

Ce nombre est $x = \frac{\log c}{\log a}$

$$a^x = c \Leftrightarrow x = \frac{\log c}{\log a}$$

Exemple. Résoudre $2^x = 3$. On a $x = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1,585$.

Vérification : $2^{1,585} \approx 3$

Exemple. Résoudre $3^x = -10$. Il n'y a pas de solution car $-10 < 0$.

Exemple. Résoudre $7^x = 1000$. On a $x = \frac{\log 1000}{\log 7} = 3,55$ Vérification : $7^{3,55} \approx 1000$

Propriété. Si $c > 0$: $x^a = c \Leftrightarrow x = c^{\frac{1}{a}}$

Exemple. Résoudre $x^{10} = 3$. Alors $x = 3^{\frac{1}{10}}$

Propriété.

Si $c > 0$ et $a \geq 1$: $a^x < c \Leftrightarrow x < \frac{\log c}{\log a}$

$a^x > c \Leftrightarrow x > \frac{\log c}{\log a}$ (même sens)

Si $c > 0$ et $a < 1$: $a^x < c \Leftrightarrow x > \frac{\log c}{\log a}$

$a^x > c \Leftrightarrow x < \frac{\log c}{\log a}$ (sens contraire)

Exemple. Résoudre $5^x > 2$. Alors $x > \frac{\log(2)}{\log(5)}$

Exemple. Résoudre $0,5^x > 3$. Alors $x < \frac{\log(3)}{\log(0,5)}$ car $0,5 < 1$

Propriété. Si $c > 0$ et $x > 0$: $x^a < c \Leftrightarrow x < c^{\frac{1}{a}}$

Exemple. Résoudre $x^3 < 10$. Alors $x < 10^{\frac{1}{3}}$

Propriété. La fonction $\log:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est croissante sur $]0, \infty[$

Propriétés. Pour tous réels $x, y > 0$ et tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\log xy = \log x + \log y$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$

$$\log \frac{1}{x} = -\log x$$

$$\log 1 = 0$$

$$\log x^n = n \log x$$

Remarque. $\log(10^k) = k$ et $10^{\log(c)} = c$