A. Déterminer si un entier est multiple d'un autre.

Définition. Un nombre entier a est un **multiple** d'un nombre entier b si $\frac{a}{b}$ est un entier relatif (dans $\mathbb{Z}$).
On dit aussi « a est **divisible** par b » ou « b est un **diviseur** de a »

Exemple 1 : 35 est-il un multiple de 7 ?

$\frac{35}{7} = 5$ est un entier donc 35 est un multiple de 7.

Exemple 2 : 42 est-il divisible par 10 ?

$\frac{42}{10} = 4{,}2 \notin \mathbb{Z}$ donc 42 n'est pas un multiple de 10.

Exemple 3 : 30 est-il un diviseur de 90 ?

$\frac{90}{30} = 3$ est un entier donc 30 est un diviseur de 90.

Exemple 4 : 364 est-il un multiple de 13 ?

Exemple 5 : 17 est-il un diviseur de 205 ?

Exemple 6 : 17 est-il divisible par 204 ?

Exemple 7 : Quels sont les diviseurs de 10 ?

B. Déterminer si un entier est premier.

Définition. Un entier *supérieur à un*, est **premier** si on ne peut pas l'obtenir en multipliant deux entiers naturels plus petits. Autrement dit, il n'a pas d'autres diviseurs que 1 et lui-même.

- 1 n'est pas considéré premier. Cela garantit l'unicité de la décomposition en facteurs premiers.
- La liste des nombres premiers commence par $\mathbf{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29, \ldots}$

Méthode. Pour déterminer si un entier est premier, on essaye de diviser cet entier par 2, puis 3, puis 4, etc. jusqu'à trouver un résultat entier. Si on n'y arrive pas avant l'entier lui-même, alors il est premier.

Exemple 1 : Déterminer si 35 est un nombre premier.

$\frac{35}{2} = 17{,}5 \notin \mathbb{Z}$. $\frac{35}{3} \approx 11{,}67 \notin \mathbb{Z}$. $\frac{35}{4} = 8{,}75 \notin \mathbb{Z}$. $\frac{35}{5} = 7 \in \mathbb{Z}$. Donc $35 = 5 \times 7$. 35 *n'est pas* premier.

- Si un entier n'a aucun diviseur compris entre 2 et sa racine carrée, alors il est premier.
- Au lieu de tester tous les diviseurs, on peut se limiter aux diviseurs premiers $2; 3; 5; 7; 11;$ ...

Exemple 2 : Déterminer si 47 est un nombre premier.

$\sqrt{47} \approx 6{,}9$. Il suffit de tester la division par les premiers compris entre 2 et 6. C'est-à-dire 2 ; 3 et 5.
$\frac{47}{2} = 23{,}5 \notin \mathbb{Z}$. $\frac{47}{3} \approx 15{,}67 \notin \mathbb{Z}$. $\frac{47}{5} = 9{,}4 \notin \mathbb{Z}$. Donc 47 *est* premier.

Exemple 3 : Déterminer si 77 est un nombre premier.
Exemple 4 : Déterminer si 79 est un nombre premier.
Exemple 5 : Déterminer si 377 est un nombre premier.
Exemple 6 : Déterminer si 269 est un nombre premier.

C. Décomposer un entier en produit de facteurs premiers.

Théorème.
Tout entier naturel peut s'écrire comme un produit d'entiers premiers de façon unique à l'ordre près.

Méthode. Pour décomposer un nombre en produit de facteurs premiers :
- On divise par 2 tant que le résultat reste entier. Puis on divise par 3 autant que possible, puis par 4, etc…
- Au bout d'un moment le résultat est 1. La décomposition est donnée par les diviseurs qui ont fonctionné.

Exemple 1 : Décomposer 693 en produit de facteurs premiers.

$\frac{693}{2} \notin \mathbb{Z}$. $\frac{693}{3} = 231$. $\frac{231}{3} = 77$. $\frac{77}{3} \notin \mathbb{Z}$. $\frac{77}{4} \notin \mathbb{Z}$. $\frac{77}{5} \notin \mathbb{Z}$. $\frac{77}{6} \notin \mathbb{Z}$. $\frac{77}{7} = 11$. $\frac{11}{7} \notin \mathbb{Z}$. $\frac{11}{8} \notin \mathbb{Z}$. $\frac{11}{9} \notin \mathbb{Z}$. $\frac{11}{10} \notin \mathbb{Z}$. $\frac{11}{11} = 1$.
Donc $693 = 3 \times 3 \times 7 \times 11$. Donc $693 = 3^2 \times 7 \times 11$

- Au lieu de tester tous les diviseurs, on peut se limiter aux diviseurs premiers 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; ...
- On peut s'arrêter dès que le carré du diviseur actuel est plus grand que le résultat actuel.

Exemple 2 : Décomposer 693 en produit de facteurs premiers.

$\frac{693}{2} \notin \mathbb{Z}$. $\frac{693}{3} = 231$. $\frac{231}{3} = 77$. $\frac{77}{3} \notin \mathbb{Z}$. $\frac{77}{5} \notin \mathbb{Z}$. $\frac{77}{7} = 11$. $7^2 > 11$ donc on s'arrête. $693 = 3^2 \times 7 \times 11$

Exemple 3 : Décomposer 84 en produit de facteurs premiers.

Exemple 4 : Décomposer 13000 en produit de facteurs premiers.

Exemple 5 : Décomposer 299 en produit de facteurs premiers.

Exemple 6 : Décomposer 4095 en produit de facteurs premiers.

D. Raisonner sur un problème de parité.

Définition. Un entier n est **pair** ssi il existe un entier relatif k tel que $n = 2k$.
Définition. Un entier n est **impair** ssi il existe un entier relatif k tel que $n = 2k + 1$.

Exemple 1 : Montrer que la somme de deux entiers pairs est toujours paire.

Soit a et b deux entiers pairs. Montrons que $a + b$ est pair.
a est pair donc il existe un entier k tel que $a = 2k$.
b est pair donc il existe un entier l tel que $b = 2l$.
Montrons que $2k + 2l$ est pair.
$2k + 2l = 2(k + l)$ or $(k + l)$ est un entier. Donc $2k + 2l$ est pair.

Exemple 2 : Montrer que la somme de deux entiers *impairs* est toujours paire.

Soit a et b deux entiers impairs. Montrons que $a + b$ est pair.
a est impair donc il existe un entier k tel que $a = 2k + 1$.
b est impair donc il existe un entier l tel que $b = 2l + 1$.
Montrons que $2k + 1 + 2l + 1$ est pair.
$2k + 1 + 2l + 1 = 2k + 2l + 2 = 2(k + l + 1)$ or $(k + l + 1)$ est un entier. Donc $2k + 1 + 2l + 1$ est pair.

Exemple 3 : Montrer que le produit de deux entiers pairs est pair.
Exemple 4 : Montrer que le produit de deux entiers impairs est impair.
Exemple 5 : Montrer que la différence de deux entiers pairs est paire.

Exercice 1. $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Un nombre x est rationnel s'il peut s'écrire sous la forme $x = \frac{a}{b}$ avec a, b des entiers, et $b \neq 0$.

On veut montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel en raisonnant par l'absurde.

On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel. On peut donc écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

1) Montrer que $2b^2 = a^2$
2) On décompose a en produit de facteurs premiers.
   Si a s'écrit $a = 2^i \times 3^j \times 5^k \times \ldots \times p^n$, alors comment s'écrit a^2 ? Rappel : $(uv)^2 = u^2v^2$ et $\left(u^k\right)^2 = u^{2k}$
3) Quelle est la parité de l'exposant de 2 dans l'unique décomposition en facteurs premiers de a^2 ?
4) Quelle est la parité de l'exposant de 2 dans l'unique décomposition en facteurs premiers de b^2 ?
5) Même question pour $2b^2$?
6) Mettre en évidence une contradiction.
7) Conclure.