Variables aléatoires

Hypothèse. Soit une expérience aléatoire et Ω l'univers (l'ensemble des issues possibles).

Définition. Une **variable aléatoire réelle X** est une fonction qui à chaque issue associe un nombre réel.

Exemple. La température qu'il fera demain à midi, peut se modéliser avec une variable aléatoire réelle.
Contre-exemple. Le temps qu'il fera demain à midi, est une variable qui ne prend pas des valeurs réelles.

Définition. Une variable aléatoire réelle X est dite **discrète** si elle ne peut prendre qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs. Elle est dite **continue** dans le cas contraire.

Exemples. Le résultat du jet d'un dé cubique est une variable discrète, car il y a seulement 6 valeurs possibles. La température qu'il fera demain à midi, est une variable continue, car elle peut varier dans un intervalle continu.

Hypothèse. Dans toute la suite, on suppose que X est une variable aléatoire réelle discrète.

Notations. On note généralement $\boldsymbol{x_1, \dots, x_n}$ les valeurs que peut prendre X et $\boldsymbol{p_1, \dots, p_n}$ leurs probabilités respectives. On note aussi $\boldsymbol{P(X = x_i)}$ la probabilité que X prenne la valeur x_i. Donc $p_i = P(X = x_i)$

Définition. **La loi de probabilité de X** est la fonction qui à chaque valeur possible x_i associe sa proba. p_i

Remarque. La loi de probabilité de X peut se présenter sous la forme d'un tableau.
Remarque. La somme des probabilités de toutes les valeurs possibles est 1. $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Notation. $\{X = a\}$ désigne l'événement où X prend la valeur a.
Notation. $\{X \leq a\}$ désigne l'événement où X prend une valeur $\leq a$.

Exemple. Si X est à valeurs dans $\{1; 3; 5; 7; 9\}$, alors $\{X \leq 4\} = \{X = 1\} \cup \{X = 3\}$ et $P(X \leq 4) = p_1 + p_3$.

Définition. **L'espérance de X** est le réel $\boldsymbol{E(X)}$ défini par $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$.
Si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire, la moyenne empirique des valeurs prises par X sera proche de son espérance $E(X)$.

Définition. **La variance de X** est le réel $\boldsymbol{V(X)} = p_1\big(x_1 - E(X)\big)^2 + p_2\big(x_2 - E(X)\big)^2 + \cdots + p_n\big(x_n - E(X)\big)^2$.

Propriété. En pratique la variance se calcule avec cette formule alternative plus simple :

$$\boldsymbol{V(X)} = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \cdots + p_nx_n^2 - E(X)^2$$

Définition. **L'écart type de X** est le réel $\boldsymbol{\sigma(X)}$ défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \cdots + p_nx_n^2 - E(X)^2}$$

Propriétés. Pour tout réels a, b on a

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$
$$V(aX + b) = a^2V(X)$$
$$\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$$