Fonctions trigonométriques

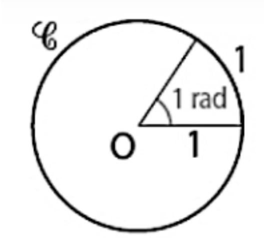
1. Cercle trigonométrique

Hypothèse. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère un cercle de rayon <u>fixé à 1</u> appelé cercle trigonométrique.

Remarque. Un angle en degrés, est proportionnel à la longueur de l'arc de cercle qu'il délimite.

Exemples. Le cercle est de longueur 2π, ce qui correspond à un angle de $360°$.
Un arc de de cercle de longueur π correspond à la moitié d'un cercle, et donc à un angle de $180°$.

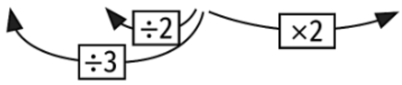
Idée. On définit une nouvelle unité, le radian, qui est directement égal à la longueur de l'arc de cercle qu'il délimite.



Définition. **1 radian** est la mesure d'un angle qui délimite un arc de longueur 1, dans un cercle de rayon 1. L'unité notée rad, n'est souvent pas précisée. L'usage du radian comme unité d'angle est la norme chez les mathématiciens.

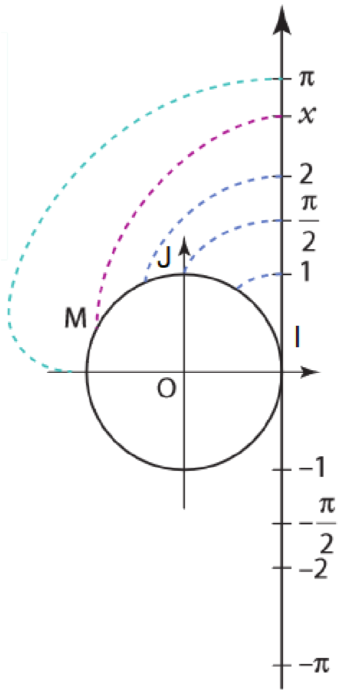
Propriétés. $1\ \mathrm{rad} = \frac{180}{\pi}\ ° \approx 57{,}3\ °$. $\quad x\ ° = x \times \frac{\pi}{180}\ \mathrm{rad} = x \times \frac{\pi}{180}$

Angle en degré	0	30	45	60	90	180	270	360
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π



Définition. Le **sens direct** ou **sens trigonométrique** est le sens <u>contraire</u> de rotation des aiguilles d'une montre.

Définition. On enroule autour du cercle trigonométrique, dans le sens direct, un axe vertical orienté vers le haut. On peut associer à chaque réel x de l'axe vertical le **point image de x**, parfois noté M_x sur le cercle $\mathcal{C}$.



Définitions. **L'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$** est la longueur de l'arc de cercle $\widehat{IM}$, comptée positivement dans le sens direct, négativement dans le sens indirect. L'unité associée à cette mesure est le **radian** noté $\boldsymbol{rad}$.

Exemple. Le point-image de $\frac{\pi}{2}$ est J.

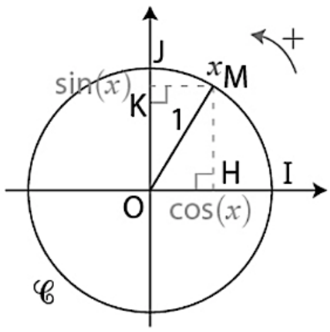
Autrement dit, une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est $\frac{\pi}{2}$.

Exemple. Le point-image de 2π est I.

Autrement dit, une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OI})$ est 2π.

Remarque et définition. Tout point sur le cercle trigonométrique correspond à plusieurs nombres, tous distants d'un multiple de 2π (le périmètre du cercle), selon le nombre de tours complets de l'enroulement de l'axe. Autrement dit, un angle orienté donné a plusieurs mesures possibles (une infinité) toutes distantes de 2π. La **mesure principale** est celle comprise dans $]-\pi; \pi]$

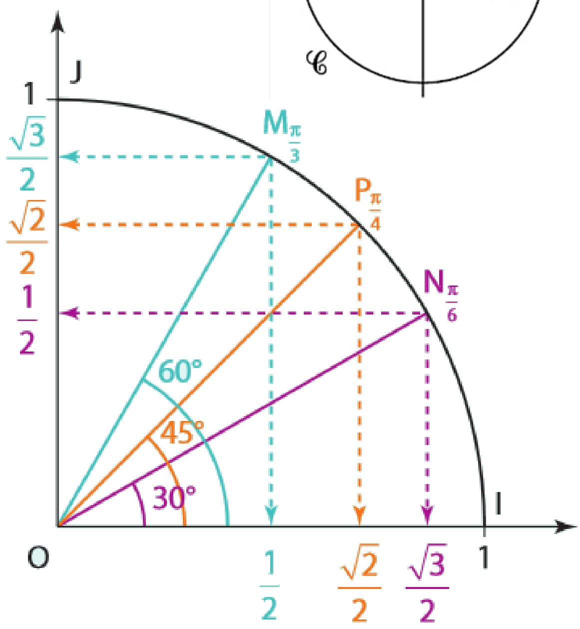
2. Coordonnées d'un point du cercle trigonométrique



Définition. Pour tout réel x, on appelle **cosinus de x** et **sinus de x**, notés $\mathbf{cos}(x)$ et $\mathbf{sin}(x)$ les coordonnées du point image de x.
$\cos(x)$ est l'abscisse de M, et $\sin(x)$ est l'ordonnée de M.

Propriétés. Pour tout nombre réel x,
$(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$

$-1 \leq \cos(x) \leq 1$	$-1 \leq \sin(x) \leq 1$
$\cos(-x) = \cos(x)$	$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$	$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$



Notation. On note parfois $\mathbf{cos^2}(x)$ au lieu de $(\cos(x))^2$ et $\mathbf{sin^2}(x)$ au lieu de $(\sin(x))^2$.

Propriété. Valeurs remarquables

Angle $\widehat{IOM}$ en °	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Angle x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x) = \cos(\widehat{IOM})$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x) = \sin(\widehat{IOM})$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

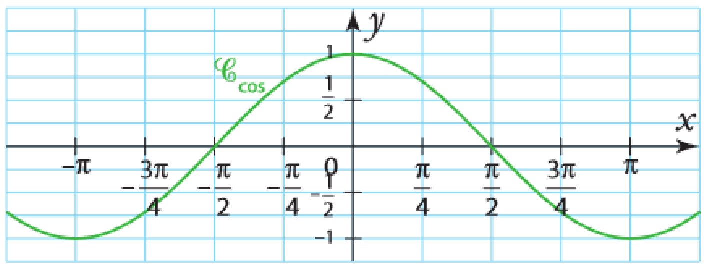
3. Fonctions cosinus et sinus

Définition. La fonction cosinus, notée ***cos***, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathbf{cos}: x \mapsto \cos(x)$
Définition. La fonction sinus, notée ***sin***, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathbf{sin}: x \mapsto \sin(x)$

Propriété (admis). Les fonctions cosinus et sinus ont les variations suivantes sur $[-\pi ; \pi]$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
cos	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1
sin	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

Graphes. Fonctions cosinus et sinus.



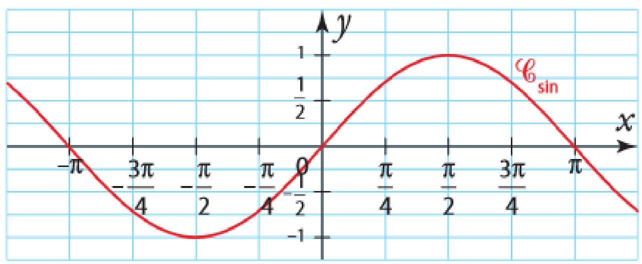


Table des valeurs du cosinus et du sinus autour du cercle trigonométrique.

$\widehat{IOM}$ (°)	-150	-135	-120	-90	-60	-45	-30	0	30	45	60	90	120	135	150	180
x	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(x)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0