Probabilités conditionnelles et indépendance

Hypothèses. Soit une expérience aléatoire, d'univers Ω et de loi de probabilité P.

Définition. Soit A et B deux événements, avec B de probabilité non nulle.
On appelle **probabilité de A *sachant* B** la probabilité que A se réalise *sachant* que B s'est réalisé.

$$\boldsymbol{P_B(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemple. On donne ci-contre la répartition des spectateurs sur une journée dans une salle de cinéma selon les séances et le tarif. On choisit un de ces spectateurs au hasard et on considère les événements :

	Plein tarif	Demi-tarif	Total
Séance du matin	103	91	194
Séance du soir	280	26	306
Total	383	117	500

- D : « La personne a payé demi-tarif. »
- M : « La personne a assisté à la séance du matin. »

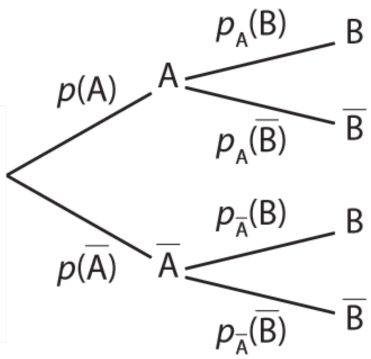
La probabilité que la personne ait assisté à la séance du matin sachant qu'elle a payé demi-tarif est $P_D(M) = \frac{91}{117}$ car parmi les 117 personnes ayant payé demi-tarif, 91 sont venues le matin.
De même, $P_M(D)$, la probabilité que la personne ait payé demi-tarif, sachant qu'elle a assisté à la séance du matin est $\frac{91}{194}$. Attention à ne pas confondre $P_D(M)$ et $P(D \cap M)$

Propriété. Soit A et B deux événements de probabilité $\neq 0$. Puisque $A \cap B = B \cap A$ alors :

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$
$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Exemple. Si la probabilité d'être fumeur est $P(F) = 0{,}3$; si la probabilité d'être fumeur *sachant* qu'on a le cancer est $P_C(F) = 0{,}9$; et si la probabilité d'avoir le cancer est $P(C) = 0{,}1$; Alors :
La probabilité qu'un fumeur ait le cancer est $P_F(C) = \frac{P(C \cap F)}{P(F)} = \frac{P_C(F) \times P(C)}{P(F)} = \frac{0{,}9 \times 0{,}1}{0{,}3} = 0{,}3 = 30\ \%$

Représentation. Dans un **arbre pondéré**, on représente les probabilités conditionnelles comme ci-contre.

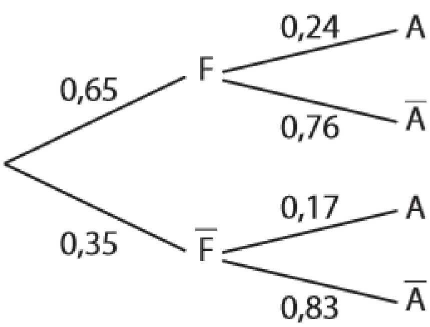


Propriété. Dans un arbre pondéré, la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est toujours égale à 1.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \qquad P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$$

Exemple. Lors d'une colonie de vacances, il y a :
- 65 % de filles, dont 24 % font de la randonnée.
- 35 % de garçons, dont 17 % font de la randonnée.

On choisit un enfant au hasard.
On note F l'événement « L'enfant est une fille. »
On note A l'événement « L'enfant fait de la randonnée. »
On a $P(F) = 0{,}65$. Donc $P(\bar{F}) = 1 - P(F) = 0{,}35$.
On a $P_F(A) = 0{,}24$. Donc $P_F(\bar{A}) = 1 - P_F(A) = 0{,}76$.
On a $P_{\bar{F}}(A) = 0{,}17$. Donc $P_{\bar{F}}(\bar{A}) = 1 - P_{\bar{F}}(A) = 0{,}83$.



Méthode. Dans un arbre pondéré, on peut calculer $P(A \cap B)$ en multipliant les probabilités le long du chemin qui contient A et B.

Ex. La probabilité que l'enfant soit une fille qui fait de la randonnée est $P(F \cap A) = 0{,}65 \times 0{,}24 = 0{,}156$.
La probabilité que l'enfant soit un garçon qui ne fait pas de randonnée est $P(\bar{F} \cap \bar{A}) = 0{,}35 \times 0{,}83 = 0{,}2905$.

Définition. Une **partition** d'un événement B est un ensemble de n événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ tels que:
- Ils sont tous de probabilités non nulles $P(A_i) \neq 0$
- Ils sont disjoints deux à deux, c'est-à-dire $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$
- Leur union est l'univers, c'est-à-dire $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = B$.

Idée. Une **partition** d'un événement est une classification de <u>toutes</u> ses issues en n catégories <u>séparées.</u>

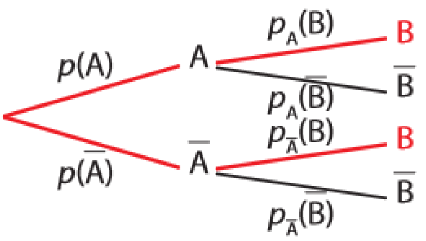
Exemples. On choisit un être humain au hasard parmi l'ensemble Ω des êtres humains.
{ "Vit dans l'hémisphère nord" ; "Vit dans l'hémisphère sud" } est une partition de Ω.
{ "Age < 18 ans" ; "18 ans ≤ Age < 50 ans " ; "Age ≥ 50 ans" } est une partition de Ω.
{"A les yeux verts" ; "A les yeux marrons"} n'est pas un partition de Ω car il existe des gens aux yeux bleus.

Propriété. Les probabilités d'une partition s'additionnent.
Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition d'un événement B, alors $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = P(B)$
Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de l'univers Ω, alors $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = P(\Omega) = 1$

Remarque. Un événement A et son contraire $\overline{A}$ forment une partition de l'univers d'où $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

Propriété. Dans un arbre pondéré, la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est toujours égale à 1. (Car ces événements forment une partition de l'événement associé au nœud.)

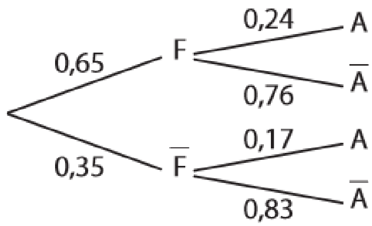
Propriété. Formule des probabilités totales (cas particulier)



$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$$

Méthode. Dans un arbre pondéré, pour calculer $P(B)$:
- On repère tous les chemins qui mènent à B
- On multiplie les probabilités le long de chaque chemin
- On ajoute les probabilités obtenues

Exemple. On reprend l'exemple de la colonie de vacances.
La probabilité qu'un enfant fasse de la randonnée est :
$P(A) = 0{,}65 \times 0{,}24 + 0{,}35 \times 0{,}17 = 0{,}2155$.

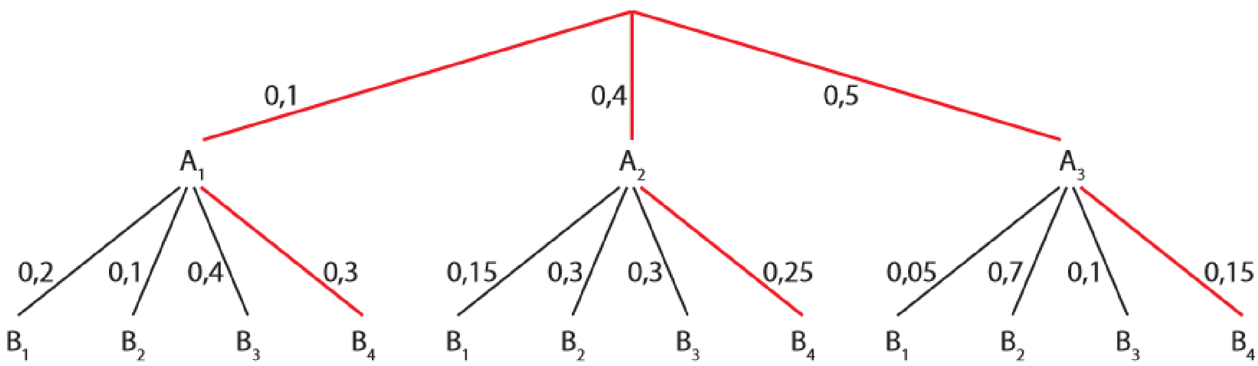


Propriété. Formule des probabilités totales (cas général).
Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ formant une partition de l'univers. Soit B un événement.
Alors $A_1 \cap B$, $A_2 \cap B$, $\dots$, $A_n \cap B$ forment une partition de l'événement B et

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

Exemple. Pour l'arbre pondéré ci-dessous

$$P(B_4) = P(A_1) \times P_{A_1}(B_4) + P(A_2) \times P_{A_2}(B_4) + P(A_3) \times P_{A_3}(B_4)$$
$$P(B_4) = 0{,}1 \times 0{,}3 + 0{,}4 \times 0{,}25 + 0{,}5 \times 0{,}15 = 0{,}205$$



Indépendance de deux évènements

Définition. On dit que deux événements A et B de probabilités non nulles, sont **indépendants** si :

$$P(B) = P_A(B)$$

Le fait que A soit réalisé ou non n'a pas d'influence sur la probabilité de réalisation de B.
De manière symétrique, on a alors également $P(A) = P_B(A)$

Exemple. On observe le résultat d'un lancer de dé équilibré, et on observe le temps qu'il fait aujourd'hui.
Savoir si A = " Il pleut ", n'a aucune influence, sur la probabilité de B = " Obtenir le numéro 6 ".
La probabilité d'obtenir 6 sachant qu'il pleut, est identique à la probabilité d'obtenir 6. $P_A(B) = P(B)$
" Il pleut " et " Obtenir le numéro 6 " sont des événements indépendants.

Contre-Exemple. On jette un dé équilibré. On note A = " le résultat est pair " et B = " le résultat est 6 "
$P_A(B) = \frac{1}{3}$ mais $P(B) = \frac{1}{6}$ donc A et B ne sont pas indépendants.

Exemple. On donne la répartition des licenciés dans un club. On tire au sort une personne de ce club pour une tombola et on considère les événements A : « La personne est adulte. » et B : « La personne pratique le basket-ball. ».
$P(A) = \frac{132}{528} = 0{,}25$ et $P_B(A) = \frac{45}{180} = 0{,}25$.
Ainsi $P(A) = P_B(A)$ donc A et B sont indépendants.

	Adulte	Enfant	Total
Handball	73	174	247
Basket-ball	45	135	180
Gymnastique	14	87	101
Total	132	396	528

Propriété. Soit deux événements A et B de probabilités non nulles.
A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Exemple. On observe le résultat d'un lancer de dé équilibré, et on observe le temps qu'il fait aujourd'hui.
On note A = " Il pleut ", et B = " Obtenir le numéro 6 ". On suppose que $P(A) = \frac{1}{3}$.
Il est raisonnable de supposer que A et B sont indépendants car ils n'ont pas d'influence l'un sur l'autre.
On en déduit que $P($" Il pleut et on obtient le numéro 6 "$) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$

Preuve. A et B indépendants $\Leftrightarrow P(B) = P_A(B) \Leftrightarrow P(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$

Remarque. Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont, A et $\overline{B}$ le sont, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont.