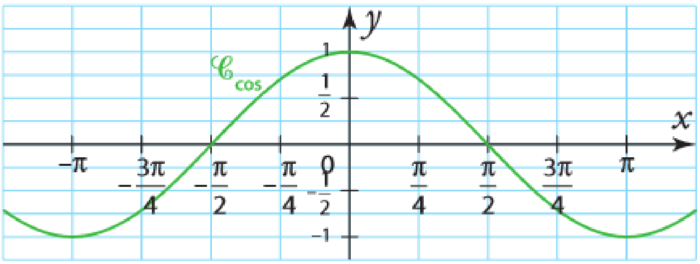
Fonctions cosinus et sinus

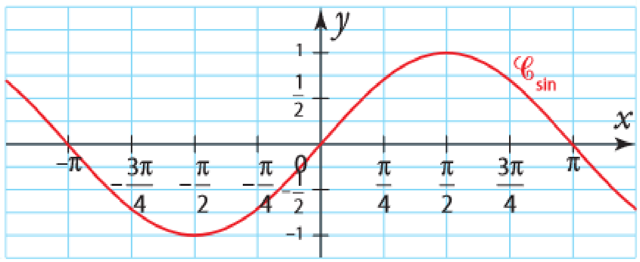
Rappels. Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$, on appelle <u>cercle trigonométrique</u> le cercle $\mathcal{C}$ de centre l'origine O du repère et de rayon $OI = 1$. Etant donné un réel x, on parcourt une distance x le long de $\mathcal{C}$ dans le sens contraire (si $x > 0$) des aiguilles d'une montre, et on note M_x le point image où on atterrit sur $\mathcal{C}$.

Définition. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\mathbf{cos}(\boldsymbol{x})\,;\mathbf{sin}(\boldsymbol{x}))$ sont définis comme les coordonnées du point image M_x sur $\mathcal{C}$. De plus quand $\cos(x) \neq 0$, on définit $\mathbf{tan}(\boldsymbol{x}) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Propriété. Considérant un angle x non droit d'un triangle rectangle d'hypoténuse H, de côté adjacent A, de côté opposé O, on a : $\sin(x) = \frac{O}{H}$ $\cos(x) = \frac{A}{H}$ $\tan(x) = \frac{O}{A}$ (SOH CAH TOA)

Définition. On définit la fonction $cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto \cos(x)$ et la fonction $sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto \sin(x)$





(Connaitre l'allure et les sens de variations de cos et de sin)

Rappels des valeurs remarquables.

x	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(x)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Propriété. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$
Propriété. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

Propriété de $\boldsymbol{2\pi}$-périodicité. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
Propriété. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$ (cos est paire)
Propriété. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$ (sin est impaire)

Propriété. cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$
Propriété. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) = \cos'(x)$ (dériver cos c'est tourner d'un angle de $\frac{\pi}{2}$)
Propriété. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) = \sin'(x)$ (dériver sin c'est tourner d'un angle de $\frac{\pi}{2}$)

Astuce. Pour résoudre une équation du type $\cos(x) = \cos(a)$ ou $\sin(x) = \sin(a)$ on s'appuie sur le cercle trigonométrique pour ne pas oublier de solutions. (Idem pour les inéquations trigonométriques)
Propriété (résolution d'une équation trigonométrique). Soit $a, x \in \mathbb{R}$.
$\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi \Leftrightarrow x \in \{a + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-a + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
$\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi \Leftrightarrow x \in \{a + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - a + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
Propriété (résolution d'une inéquation trigonométrique). Soit $a, x \in \mathbb{R}$.
$\cos(x) \leq \cos(a) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, a + 2k\pi \leq x \leq 2\pi - a + 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x \in [a + 2k\pi; 2\pi - a + 2k\pi]$
$\sin(x) \leq \sin(a) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, -\pi - a + 2k\pi \leq x \leq a + 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x \in [-\pi - a + 2k\pi; a + 2k\pi]$