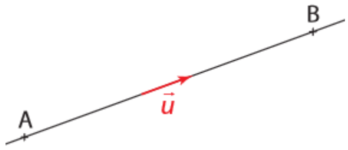
Système d'équations

Idée. Un **vecteur directeur d'une droite** d est un vecteur aligné avec la droite dans un sens ou l'autre.

Remarque. $\vec{u}$ est un **vecteur directeur de la droite** (AB) si $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.



Propriété. Un vecteur directeur d'une droite d d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ est $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

Exemple. Donner un vecteur directeur de la droite $-2x+3y+16=0$. Un vecteur directeur est $\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$.

Définition. Si a, b, c, a', b', c' sont des constantes réelles,

$\begin{cases} ax+by+c=0\\ a'x+b'y+c'=0\end{cases}$ est un **système de 2 équations linéaires à 2 inconnues (x et y).**

Exemple. $\begin{cases}-2x+3y+16=0\\ 4x+2y-16=0\end{cases}$ est un système de 2 équations linéaires à 2 inconnues.

Propriété. Un tel système a : soit une seule solution, soit aucune solution, soit une infinité de solutions.
Résoudre un tel système revient à déterminer l'intersection de deux droites.

- Le système admet un seul couple solution ssi les deux droites sont sécantes ssi $\begin{vmatrix}-b & -b'\\ a & a'\end{vmatrix}\neq 0$
- Le système admet aucune solution ssi les deux droites sont parallèles strictement.
- Le système admet une infinité de solutions ssi les deux droites sont confondues.

Exemple. Les droites suivantes $\begin{cases}-2x+3y+16=0\\ 4x+2y-16=0\end{cases}$ sont-elles sécantes ?

La droite d'équation $-2x+3y+16=0$ a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$.

La droite d'équation $4x+2y-16=0$ a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$.

On calcule le déterminant de leurs vecteurs directeurs $\begin{vmatrix}-3 & -2\\ -2 & 4\end{vmatrix}=(-3)(4)-(-2)(-2)=-16\neq 0$.

Donc leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, donc ces droites sont sécantes.

Méthode. Résolution d'un système par substitution.
Cette méthode consiste à isoler une inconnue à partir d'une équation et à la remplacer dans l'autre équation afin d'obtenir une nouvelle équation avec une seule inconnue.
On résout alors cette nouvelle équation puis on remplace l'inconnue trouvée dans la première équation afin de trouver la seconde inconnue.

Exemple. Résoudre (E): $\begin{cases}-2x+3y+16=0\\ 4x+2y-16=0\end{cases}$

$(E)\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+3y+16=0\\ 4x+2y-16=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+3y+16=0\\ 2y=-4x+16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+3y+16=0\\ y=-2x+8\end{cases}$ (On isole y dans la 2è équation)

$(E)\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+3(-2x+8)+16=0\\ y=-2x+8\end{cases}$ (On remplace y dans la 1ère équation)

$(E)\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+(-6)x+24+16=0\\ y=-2x+8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-8x+40=0\\ y=-2x+8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{-40}{-8}=5\\ y=-2x+8\end{cases}$ (On résout x dans la 1ère équation)

$(E)\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\ y=-2x+8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\ y=-2(5)+8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\ y=-2\end{cases}$ (On remplace la valeur de x dans la 2ème équation).

L'ensemble des solutions de (E) est $\{(5;-2)\}$.

Méthode. Résolution d'un système <u>par combinaison</u>.
Cette méthode consiste à multiplier les deux équations par des nombres de telle manière qu'en soustrayant les équations, une inconnue s'élimine. Ainsi, il n'y a plus qu'à résoudre une équation à une seule inconnue. Pour trouver la deuxième inconnue, on peut renouveler la même méthode ou substituer. Cette méthode est souvent plus rapide et plus sure, car elle évite les fractions dans les calculs.

Exemple. Résoudre (E): $\begin{cases} -2x + 3y + 16 = 0 \\ 4x + 2y - 16 = 0 \end{cases}$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y + 16 = 0 \\ 4x + 2y - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\mathbf{8}x + 12y + 64 = 0 & (L_1 \leftarrow 4 \times L_1) \\ -\mathbf{8}x - 4y + 32 = 0 & (L_2 \leftarrow -2 \times L_2) \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 12y + 64 = 0 \\ 0x + (-4 - 12)y + 32 - 64 = 0 \ \ (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 12y + 64 = 0 \\ -16y - 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 12y + 64 = 0 \\ y = \frac{32}{-16} = -2 \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 12(-2) + 64 = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 40 = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-40}{-8} = 5 \\ y = -2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (E) est $\{(5; -2)\}$.