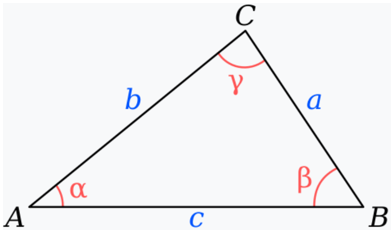
I. Déterminer complètement un triangle à partir d'au moins 3 informations

Dans toute cette partie on considère un triangle ABC. Pour abréger, on utilise les notations suivantes : $a = BC,\ b = AC,\ c = AB, \alpha = \widehat{BAC}, \beta = \widehat{ABC}, \gamma = \widehat{ACB}$



Théorème. Loi des cosinus, ou **formule d'Al-Kashi**

Dans un triangle ABC on a par exemple : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

Par symétrie, les lettres peuvent être permutées : $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Théorème. Loi des sinus. Dans un triangle ABC on a : $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Théorème. Somme des angles. Dans un triangle ABC on a : $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ rad.

Idée générale. Pour déterminer complètement un triangle à partir de 3 informations, on utilise ces trois théorèmes.

A. A partir de la longueur de deux côtés et de l'angle *situé entre eux*

Méthode. Si on connait par exemple b, c et α : Pour trouver a on obtient a^2 par la loi des cosinus et on applique $\sqrt{\square}$.

Pour trouver β on isole $\sin\beta$ dans $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ puis on applique $\sin^{-1}\square$. Pour trouver γ on résout $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

Exemple A.1. Soit un triangle ABC tel que $AB = 8$ cm, $AC = 4$ cm et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ rad. Déterminer BC.

$c = 8$; $b = 4$; $\alpha = \frac{\pi}{3}$. On cherche $a = BC$. $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)} \approx 6{,}93$. Donc $BC \approx 6{,}93$ cm.

Exemple A.2. Soit un triangle DEF tel que $DE = 8$, $EF = 10$ et $\widehat{DEF} = \frac{\pi}{5}$ rad. Déterminer la longueur DF.

B. A partir de la longueur de deux côtés et d'un *autre* angle

Méthode. Si on connait par exemple b, c et β : On isole $\sin\gamma$ dans $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ puis on applique $\sin^{-1}\square$ pour trouver γ. On utilise $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ pour trouver α puis on résout a dans $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$. (Ou la loi des cosinus)

Exemple B.1. Soit un triangle ABC tel que $AB = 5$ cm, $AC = 7$ cm et $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{4}$. Déterminer BC.

$c = 5$; $b = 7$; $\beta = \frac{\pi}{4}$. On cherche $a = BC$.

Par la loi des sinus, $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ donc $\frac{7}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{5}{\sin\gamma}$ donc $\sin\gamma = \frac{5}{7}\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\gamma \approx \sin^{-1}\left(\frac{5}{7}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 0{,}529$ rad

Donc $\alpha = \pi - \beta - \gamma \approx 1{,}826$. Par la loi des sinus $a = \frac{b}{\sin\beta}\sin\alpha \approx 7{,}50$. Donc $BC \approx 7{,}50\ cm$

Exemple B.2.

C. A partir des longueurs des 3 côtés

Méthode. Pour trouver un angle α du triangle, on utilise la loi des cosinus, on isole $\cos\alpha$ puis on applique $\cos^{-1}\square$

Exemple C.1. Soit un triangle ABC tel que $AB = 3$, $BC = 4$ et $AC = 6$. Déterminer l'angle $\widehat{BAC}$.

$c = 3$; $a = 4$; $b = 6$. On cherche $\alpha = \widehat{BAC}$.

Par la loi des cosinus $\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \cos(\alpha)$. Donc $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}\right) \approx$

Exemple C.2.

D. A partir de la longueur d'un côté et de deux angles

Méthode. Si on connait par exemple α, β et a, alors on utilise $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ pour trouver γ.

On résout $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ pour trouver b et on résout $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$ pour trouver c.

Exemple D.1. Soit un triangle ABC tel que $AB = 10$, $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$. Déterminer BC et AC.

$c = 10$; $\beta = \frac{\pi}{3}$; $\alpha = \frac{\pi}{4}$. On cherche a et b. On a $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Donc $\gamma = \pi - \alpha - \beta = \frac{5\pi}{12} \approx 1{,}309$

Par la loi des sinus, $a = \frac{c}{\sin\gamma}\sin(\alpha) \approx 7{,}32$ et $b = \frac{c}{\sin\gamma}\sin(\beta) \approx 8{,}97$. Donc $BC \approx 7{,}32$ cm et $AC \approx 8{,}97$ cm

Exemple D.2.

II. Calculer le produit scalaire de deux vecteurs à partir de leur longueur et de l'angle entre eux.

Rappel. Produit scalaire (définition algébrique). $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$

Rappel. (1ère identité remarquable). $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$

Rappel. (2ème identité remarquable). $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}$

Propriété. Formulation vectorielle de la loi des cosinus. $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$

Les deux lignes précédentes entraînent la conséquence suivante :

Propriété. Produit scalaire (définition géométrique). $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

Exemple 1. Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ tels que $AB = 2$ et $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 30°$. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Exemple 2.

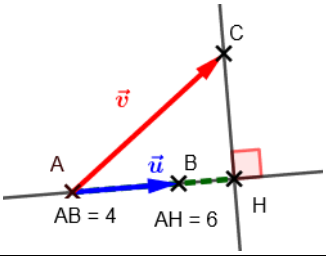
III. Projeter un vecteur dans une direction donnée

Propriété (Interprétation géom.) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \pm AB \times AH$ où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

Le signe est $+$ si $\overrightarrow{AH}$ est de même sens que $\overrightarrow{AB}$, et $-$ sinon. La propriété découle du fait que $AH = \pm AC \times \cos(\widehat{BAC})$

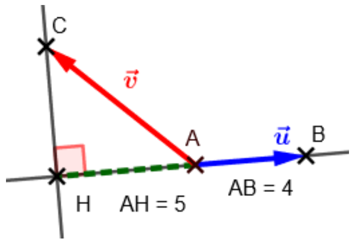
Ici $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont dans le même sens, donc

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = +4 \times 6 = +24$$



Ici $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont dans des sens opposés, donc

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -4 \times 5 = -20$$



Methode. Pour calculer la composante d'un vecteur $\vec{v}$ dans une direction $\vec{u}$, on calcule $\vec{v}\cdot\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right)$

Quand le vecteur $\vec{u}$ est déjà de norme 1, on calcule $\vec{v}\cdot\vec{u}$.

Exemple 1. Une piste de ski est représentée par une droite qui descend vers la droite avec une pente de $45°$. Un skieur de 70 kg, subit son poids comme une force $\vec{F}$ d'environ $700\ N$ vers le bas, donc $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -700 \end{pmatrix}$.

Calculer la composante du poids du skieur, le long de la pente descendante.

On cherche un vecteur directeur $\vec{u}$ de la pente descendante.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos(-45°) \\ \sin(-45°) \end{pmatrix}$ convient, et sa norme est 1 puisque pour tout x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

La composante de $\vec{F}$ dans la direction $\vec{u}$ est donc $\vec{F}\cdot\vec{u} = -700\sin(-45°) = +700\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 500\ N$.

Exemple 2.