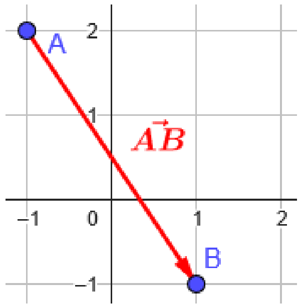
Vecteurs et géométrie - 1

A. Calculer un vecteur reliant deux points.



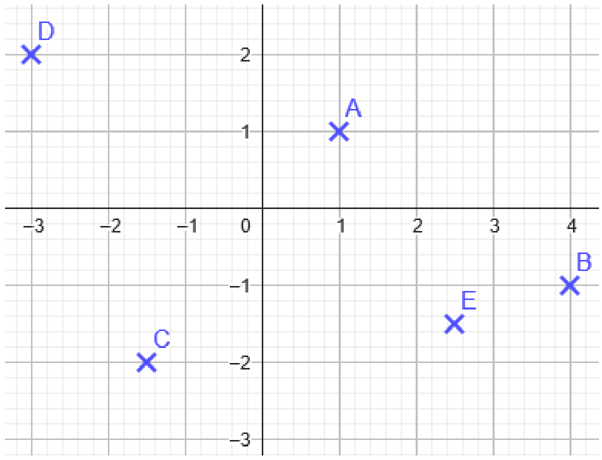
Définition. Soit deux points $A = (x_A\,;y_A)$ et $B = (x_B\,;y_B)$. On définit $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ représente la translation qui déplace le point A au point B, car $t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$
- $\overrightarrow{AB}$ est donc souvent représenté par une flèche reliant le point A au point B.

Méthode. Pour calculer $\overrightarrow{AB}$ on utilise la formule $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Exemple. Soit $A = (1; 1)$ et $B = (4; -1)$, calculer $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB} =$



Exercice A1.

1) Lire graphiquement les coordonnées des points ci-contre :

$A =$ $B =$ $C =$

$D =$ $E =$

2) Déterminer les vecteurs suivants par le calcul, puis vérifier graphiquement :

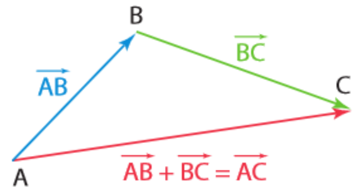
$\overrightarrow{DA} =$ $\overrightarrow{BD} =$ $\overrightarrow{EA} =$

$\overrightarrow{CA} =$ $\overrightarrow{CE} =$

B. Simplifier une expression vectorielle avec la relation de Chasles.

Propriétés. Soit A, B, C trois points. Alors

- $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$
- $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$
- **Relation de Chasles** : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



- Il faut aussi savoir appliquer la relation de Chasles dans l'autre sens : $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$
- Attention, quand on parle de distances, on a $AB + BC \geq AC$

Exercice B1. Compléter en utilisant la relation de Chasles

$\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{\ldots A} + \overrightarrow{A \ldots}$ $\qquad$ $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HG} +$ $\qquad$ $\overrightarrow{D \ldots} + \overrightarrow{C \ldots} = \overrightarrow{\ldots B}$

$\overrightarrow{E \ldots} + \overrightarrow{\ldots E} =$ $\qquad$ $\overrightarrow{A \ldots} = \overrightarrow{A \ldots} + \overrightarrow{B \ldots} + \overrightarrow{CM}$ $\qquad$ $\overrightarrow{FE} + \qquad = \vec{0}$

Méthode. Pour simplifier une expression vectorielle sur des points :

- On change tous les $-$ en $+$ en inversant les lettres correspondantes.
- On repère une lettre répétée en fin et début de vecteur.
- On utilise Chasles pour faire disparaître la lettre répétée.
- On recommence autant de fois que possible.

Simplifier $\vec{u} = -\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CE}$

$\vec{u} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EC}$

$\quad = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EC}$

$\quad = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EC}$

$\quad = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EC}$

$\quad = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC}$

$\quad = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC}$

$\quad = \overrightarrow{AC}$

Exercice B2. Simplifier les expressions suivantes :

$\vec{a} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} =$ $\qquad$ $\vec{b} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AA} =$

$\vec{c} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} =$ $\qquad$ $\vec{d} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} =$

$\vec{e} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}$
$\quad =$

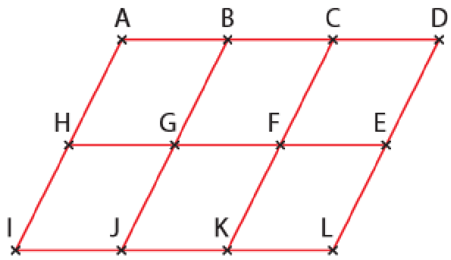
$\vec{f} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$
$\quad =$

Rappels.

- Deux vecteurs sont identiques s'ils ont même direction, même sens, même longueur.
- La position d'un vecteur n'a pas d'importance.

Exercice B3. La figure représente six parallélogrammes de même taille. En vous servant des points de la figure, donner un vecteur égal à :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{KL}$
b) $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HF}$
c) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GF}$
d) $\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{BD}$
e) $\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{CB}$
f) $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{HA}$



a) $\qquad$ b)
c) $\qquad$ d)
e) $\qquad$ f)

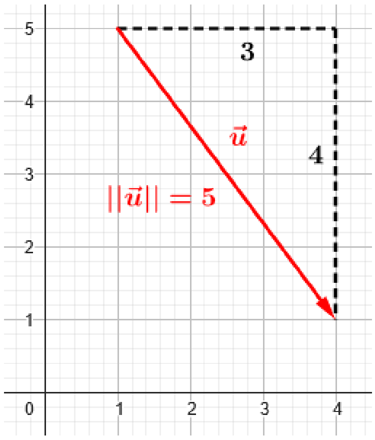
Exercice B4. Soit $A = (x_A ; y_A), B = (x_B ; y_B), C = (x_C ; y_C)$ trois points du plan.

1) Démontrer que $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. $\qquad$ $\overrightarrow{AA} =$

2) Démontrer que $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. $\qquad$ $-\overrightarrow{AB} =$

3) Démontrer $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. $\qquad$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} =$

Vecteurs et géométrie - 3



C. Calculer la longueur d'un vecteur.

Définition. La **norme (ou longueur) d'un vecteur** $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $\|\vec{\boldsymbol{u}}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exemple. Calculer la norme du vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5}$

Rappel. La **longueur d'un segment** $[AB]$ est :

$$\boldsymbol{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| = \left\| \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exercice C1. Calculer la norme des vecteurs suivants :

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$

D. Tester une égalité de vecteurs

Méthode.

- On commence par simplifier des deux côtés.
- Jusqu'à arriver à une égalité entre deux vecteurs.
- On transforme *une* égalité *vectorielle*, en *deux* égalités *numériques*, regroupées dans une accolade.
- On finit de simplifier chaque égalité séparément.
- On teste chaque égalité.
  - Si une est fausse, l'égalité initiale est fausse
  - Si toutes sont vraies, l'égalité initiale est vraie

Exemple.

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$

Est-ce que $3\vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{w}$?

$$\begin{aligned}
3\vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{w} \Leftrightarrow\quad & 3\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{pmatrix} 6 + -2 \\ -12 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases} 6 + -2 = 4 \\ -12 + 6 = -8 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases} 4 = 4 \\ -6 = -8 \end{cases}
\end{aligned}$$

Mais $-6 \neq -8$

Donc $3\vec{u} + 2\vec{v} \neq 2\vec{w}$.

Exercice D1. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Tester les égalités suivantes :

Peut-on affirmer que (E) : $-5\vec{u} = \vec{v}$?

Peut-on affirmer que (F) : $3\vec{w} - \vec{u} = 2\vec{v}$?

E. Résoudre une équation vectorielle simple.

Méthode.
Pour résoudre une équation vectorielle simple :

- On note les coordonnées du point cherché.
- On commence par simplifier des deux côtés.

- Jusqu'à arriver à une égalité entre deux vecteurs.
- On transforme *une équation vectorielle*, en *deux équation numériques*, regroupées dans une accolade.
- On finit de résoudre les deux équations en parallèle.

Exemple. Soit $A = (-2\,;5)$ et $\vec{u} = \binom{9}{3}$.

Trouver le point M tel que $3\overrightarrow{AM} = \vec{u}$

On note $M = (x; y)$.

$$3\overrightarrow{AM} = \vec{u} \Leftrightarrow 3\binom{x_M - x_A}{y_M - y_A} = \binom{9}{3} \Leftrightarrow 3\binom{x+2}{y-5} = \binom{9}{3}$$

$$\Leftrightarrow \binom{3(x+2)}{3(y-5)} = \binom{9}{3} \Leftrightarrow \binom{3x+6}{3y-15} = \binom{9}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+6=9 \\ 3y-15=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 9-6 \\ 3y = 3+15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3 \\ 3y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases}$$

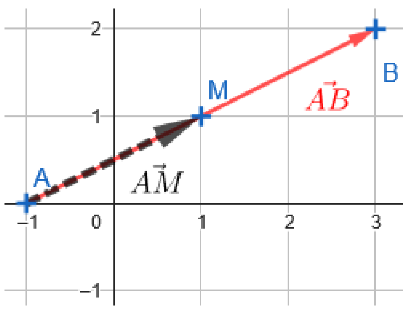
$$\Leftrightarrow M = (1; 6)$$

Le point M tel que $3\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ est $M = (1; 6)$

Exercice E1. Soit $A = (-2\,;5)$ et $\vec{u} = \binom{9}{3}$.

Trouver le point M tel que $2\overrightarrow{AM} = \vec{u}$:

F. Trouver le symétrique, ou le milieu, par calcul vectoriel.



Propriété. Pour tout points A, B, M on a :
B est le symétrique de A par rapport à M $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

Exemple. Soit le point $A = (3; -5)$ et le point $B = (-2; 7)$
Calculer le symétrique C du point A par rapport à B.

On note $(x; y)$ les coordonnées du point C cherché.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \binom{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \binom{x_C - x_B}{y_C - y_B} \Leftrightarrow \binom{-2-3}{7+5} = \binom{x+2}{y-7} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = x+2 \\ 12 = y-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5-2 = x \\ 12+7 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 = x \\ 19 = y \end{cases}$$

Donc $C = (-7; 19)$

Exercice F1. Soit $J = (-5; 2)$, $K = (2; -3)$.
1) Calculer le symétrique L du point J par rapport à K.

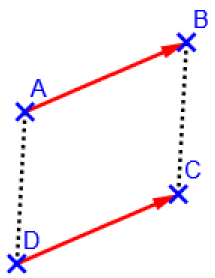
2) Calculer le symétrique I du point K par rapport à J.

Propriété. Pour tout points A, B, M on a : M est le milieu du segment $[AB] \Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

3) Calculer le milieu M du segment $[JK]$.

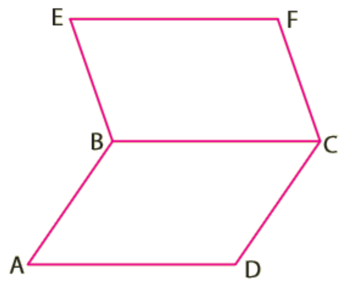
Vecteurs et géométrie - 5

G. Traduire vectoriellement un parallélogramme.



Propriété. $ABCD$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
(Attention à l'ordre des lettres).

Exercice G1.



$BCDA$ et $BCFE$ sont deux parallélogrammes.

1) Traduire l'énoncé par 2 égalités vectorielles.

2) Montrer que $ADFE$ est un parallélogramme, avec des égalités vectorielles.

On note G, le symétrique de C par rapport à B.

3) Trouver 3 vecteurs égaux à $\overrightarrow{GB}$.
   $\overrightarrow{GB} =$ $\overrightarrow{GB} =$ $\overrightarrow{GB} =$

4) Donner deux autres parallélogrammes à l'aide des points de la figure.

Exercice G2. Soit $E = (-3; 2)$, $F = (1; -2)$ et $G = (-1; -5)$.

1) Déterminer les coordonnées du point H pour que $EFGH$ soit un parallélogramme.

Exercice G3. $ABCD$ est un rectangle. On note I le point d'intersection de ses diagonales. K et J sont les symétriques respectifs de I et A par rapport à D.

1) Faire une figure.
2) Montrer que $AIJK$ est un parallélogramme.

3) Citer tous les vecteurs égaux de cette figure.

4) En déduire que $ICJK$ est un parallélogramme.