

Probabilités conditionnelles

Hypothèses. Soit une expérience aléatoire d'univers Ω sur laquelle est définie une probabilité P . Soit A et B deux évènements. On suppose $P(A) \neq 0$.

Définition. On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A** la probabilité que l'évènement B se réalise sachant que l'évènement A est réalisé. Elle est notée $P_A(B)$ ou $P(B | A)$ et est définie par $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Exemple. On donne ci-contre la répartition des spectateurs sur une journée dans une salle de cinéma selon les séances et le tarif. On

choisit un de ces spectateurs au hasard et on considère les événements :

- M : « La personne a assisté à la séance du matin. »

- D : « La personne a payé demi-tarif. »

La probabilité que la personne ait assisté à la séance du matin sachant qu'elle a payé demi-tarif est $P_D(M) = \frac{91}{117}$ car parmi les 117 personnes ayant payé demi-tarif, 91 sont venues le matin.

De même, $P_M(D)$, la probabilité que la personne ait payé demi-tarif, sachant qu'elle a assisté à la séance du matin est $\frac{91}{194}$. Attention à ne pas confondre $P_D(M)$ et $P(D \cap M)$

	Plein tarif	Demi-tarif	Total
Séance du matin	103	91	194
Séance du soir	280	26	306
Total	383	117	500

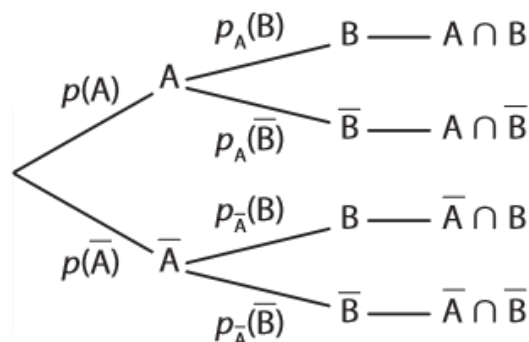
Propriété. Probabilité conditionnelle et intersection

On a, de manière équivalente, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ et $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Propriété. Règle du produit

Soit un évènement A tel que $P(A) \neq 0$ et $P(\bar{A}) \neq 0$.

Dans l'arbre pondéré ci-contre, les probabilités des événements $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$, et $\bar{A} \cap \bar{B}$ peuvent être obtenues en multipliant entre-elles les probabilités écrites sur les branches qui « mènent » à l'évènement.



Exemple. Lors d'une colonie de vacances, il y a :

- 65 % de filles, dont 24 % souhaitent faire une randonnée.

- 35 % de garçons, dont 17 % souhaitent faire une randonnée.

On tire au sort un des enfants et on considère les événements F : « L'enfant est une fille. » et A : « L'enfant souhaite faire une randonnée. ». On peut représenter la situation par l'arbre pondéré ci-contre. La probabilité que l'enfant tiré au sort soit une fille qui souhaite faire une randonnée est $P(F \cap A) =$

$P(F) \times P_F(A) = 0,65 \times 0,24 = 0,156$. La probabilité que l'enfant tiré au sort soit un garçon qui ne souhaite pas faire de

randonnée est $P(\bar{F} \cap \bar{A}) = P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(\bar{A}) = 0,35 \times 0,83 = 0,2905$.

