Objectif. Calculer les termes d'une suite définie explicitement.

Exercice 1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer u_0, u_1, et u_2

Exercice 2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{n+1}{2n-3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer u_0 et u_{10}

Exercice 3. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer les cinq premiers termes de la suite.

Exercice 4. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_{n+1}, u_{n-1}, u_{2n} et $u_n + 1$ en fonction de n.

Exercice 5. Thomas paye 45 € un abonnement résidentiel annuel pour garer sa voiture dehors. Il doit ensuite payer 1,5 € supplémentaire par jour de stationnement. On note u_n le prix que Thomas paye pour son abonnement et n jours de stationnements.

1. Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
2. Combien payera-t-il au total s'il gare sa voiture dehors 300 jours par an ?

Objectif. Calculer les termes d'une suite définie explicitement.

Exercice 6.

a) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -5$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer u_1 et u_2.

b) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n - 2}{u_n - 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer u_1 et u_2.

Exercice 7. Soit (u_n) la suite définie par $u_2 = -3$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 6$ pour tout $n \geq 2$. Calculer les 4 premiers termes de (u_n).

Exercice 8. Une ludothèque possède 100 jeux de société en 2019. Chaque année, elle donne 5 % de ses jeux à une œuvre de charité et décide d'acheter 10 nouveaux jeux.

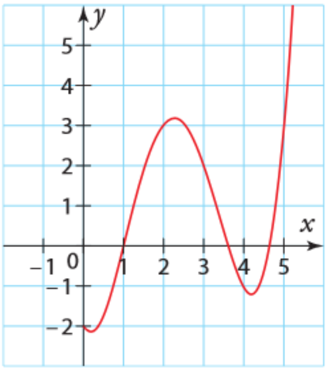
1. Combien aura-t-elle de jeux en 2020 ?
2. On note u_n le nombre de jeux de société de la ludothèque en $2019 + n$. Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.

Exercice 9. Un matin, Mathéo décide de poser un récipient dans son jardin, contenant 200 g de noisettes. Chaque après-midi, un écureuil vient manger la moitié du récipient, puis Mathéo remet 80 g de noisettes le soir. On note u_n la quantité en grammes de noisettes dans le récipient le n-ième jour au matin.

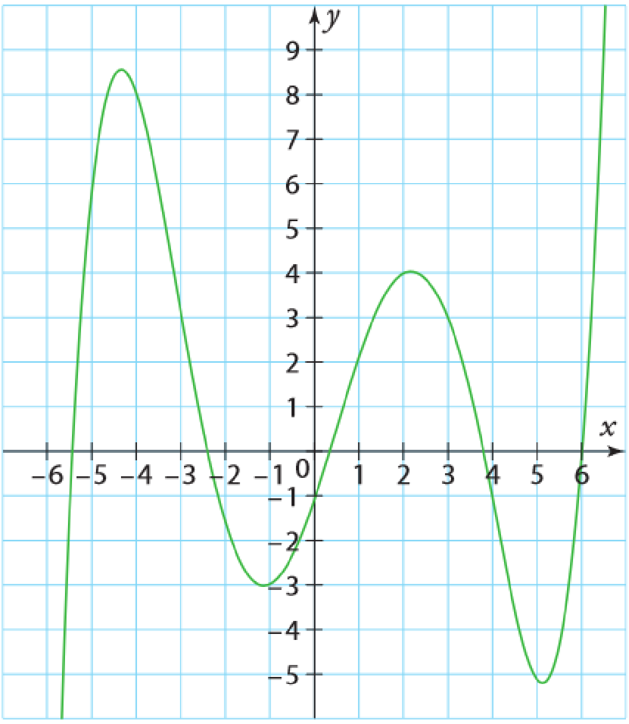
1. Donner la valeur de u_1 et de u_2.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

Objectif. Lire une représentation graphique

Exercice 10. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$. On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction f. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de la suite (u_n)



Exercice 11. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = f(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de la suite (v_n).



Objectif. Représenter graphiquement une suite

Exercice 12. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 1$ pour tout n $\in \mathbb{N}$.

1. Calculer les 4 premiers termes de (u_n)
2. Représenter la suite (u_n) de deux manières différentes.

Objectif. Etudier les variations d'une suite

Exercice 13. Etudier les variations des suites suivantes définies pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) $u_n = n^2 + 2n$

b) $v_n = \frac{4}{n+1}$

c) $w_n = -5^n$

d) $a_n = -2n^2 + 5$

e) (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n + \sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 14. Etudier les variations des suites suivantes en remarquant qu'elles sont positives :

a) $u_n = 7 \times 0{,}5^n$

b) $v_n = 4 \times 9^n$

Exercice 15. Etudier les variations des suites suivantes définies pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) $u_n = 2n^2 - 3n + 1$

b) $v_n = \frac{3^n}{2^{n-1}}$

c) $w_n = \frac{n-3}{2n+1}$

Exercice 16.

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{2^n}{n}$ pour $n \geq 1$.

a) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

b) Résoudre l'inéquation $\frac{2n}{n+1} > 1$ d'inconnue n.

c) En déduire les variations de (u_n).

Exercice 17.

1. Montrer que la suite définie par $u_n = (-3)^n$ n'est ni croissante, ni décroissante.
2. Montrer que la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -n^2 + 4n$ n'est ni croissante ni décroissante

Exercice 18. On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 2$.

1. Recopier et compléter ce programme Python pour qu'il affiche w_{20}

```
w =..............
for i in range(.........,   .........)
        w =.......................
print(......)
```

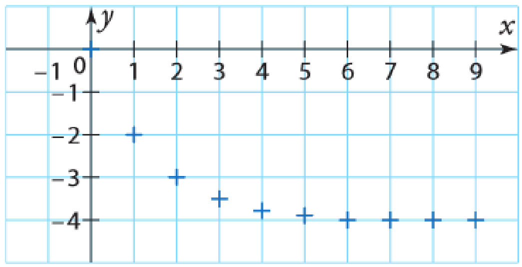
2. Implémenter cet algorithme. Combien vaut w_{20} ?
3. Conjecturer la limite de w_n

Objectif. Conjecturer la limite d'une suite

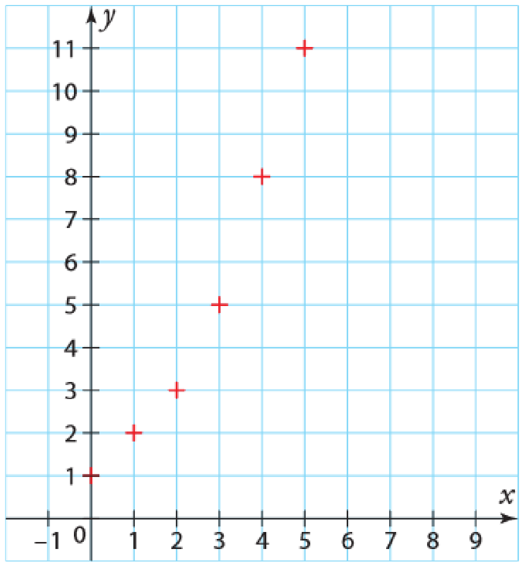
Exercice 19.

Conjecturer, si elle existe, la limite des suites ci-dessous :

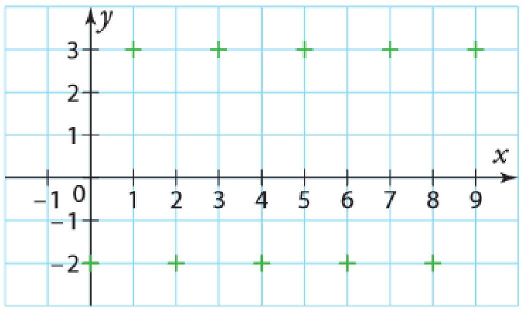
a)



b)



c)



Exercice 20. Conjecturer, si elle existe, la limite des suites dont certaines valeurs sont données ci-dessous.

1. $u_1 = -1$, $u_{10} = -20$, $u_{1000} = -4000$, $u_{10000} = -5000$
2. $v_1 = 3$, $v_{10} = -2$, $v_{100} = 3$, $v_{1000} = -2$, $v_{10000} = 3$
3. $w_1 = -1$, $w_{100} = -1{,}95$, $w_{1000} = -1{,}98$, $w_{10000} = -1{,}99$

Exercice 21. Conjecturer la limite de :

1. La suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n$
2. La suite (v_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $v_n = \frac{1}{n}$

Problèmes.

Exercice 22. Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2019. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2000.
Une étude lui permet d'élaborer chaque année un modèle selon lequel :
- Entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve ;
- Entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5% de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2019 + n$. On a donc $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2926$
2. Justifier que $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$ pour tout entier naturel n.
3. A l'aide d'un tableur, le directeur a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Il a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3000	2926	2856	2789	2725	2665	2608	2554

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopier vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

4. Compléter l'algorithme ci-dessous pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera strictement inférieure à 2000.

$n = 0$
$u = 3000$
while ………………………… :
    $u =$……………………
    $n =$……………………
print(n)

5. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture à l'aide de la calculatrice.

Exercice 23. Des algues prolifèrent dans un étang. Pour s'en débarrasser, le propriétaire installe un système de filtration. En journée, la masse d'algues augmente de 2% puis, à la nuit tombée, le propriétaire actionne pendant une heure le système de filtration qui retire 100kg d'algues. On admet que les algues ne prolifèrent pas pendant la nuit.
Le propriétaire estime que la masse d'algues dans l'étang au matin de l'installation du système de filtration est de 2 000 kg. On modélise par a_n la masse d'algues dans l'étang, exprimée en kg, après utilisation du système de filtration pendant n jours.

1. Calculer les termes a_0, a_1, a_2
2. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n pour tout entier naturel n.
3. Faire un tableau de valeurs de la suite (a_n) sur la calculatrice. En déduire la masse d'algues encore présente après une semaine de traitement. On donnera une valeur arrondie à l'unité.
4. A l'aide du tableau de valeurs de la suite (a_n), déterminer au bout de combien de jours la quantité d'algues sera inférieure à 1000 kg.
5. Compléter l'algorithme Python suivant afin qu'il de répondre à la question précédente :

$n = 0$
$a = 2000$
while ………………………… :
    $a =$……………………
    $n = n + 1$
print(n)

Objectif. Etudier une suite arithmétique

Exercice 24. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 2$. Calculer u_1, u_2, u_3

Exercice 25. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = -3$

1. Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer u_{20}.

Exercice 26. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 3 telle que $u_3 = -1$

1. Donner l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$
2. Calculer u_{10}

Exercice 27. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $\frac{3}{2}$ telle que $u_4 = 9$. Déterminer la valeur du premier terme de la suite u_0.

Exercice 28. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_0 = 3$ et $u_1 = 7$. Déterminer la raison.

Exercice 29. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_2 = 4$ et $u_6 = -1$. Déterminer la raison.

Exercice 30. Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? Justifier.

a) (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
b) (v_n) définie par $v_n = -n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
c) (w_n) définie par $w_n = n^2 - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 31. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = (n+1)^2 - n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est arithmétique.

Exercice 32. Leila avait 10 jeux vidéo en janvier. Depuis février, elle décide d'acheter deux nouveaux jeux le premier jour de chaque mois. On note u_n le nombre de jeux vidéo de Leila en fin de mois, n mois après janvier.

1. Déterminer la valeur de u_0
2. Justifier que la suite (u_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison.

Exercice 33. Enzo décide de s'entraîner pour une épreuve de natation, où il devra nager sur une distance de 1 500 m. Pour cela, il va dans une piscine dont la longueur est de 50 m. Le premier jour, il fait deux longueurs. Puis chaque jour il nage une longueur de plus que le jour précédent. On note u_n la distance réalisée en mètres le n-ième jour.

1. Donner la valeur de u_1
2. Justifier que (u_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison.

Objectif. Etudier une suite géométrique

Exercice 34. Soit (u_n) une suite géométrique de raison -2 et de premier terme $u_0 = 0{,}5$. Calculer u_1, u_2, u_3.

Exercice 35. Soit (u_n) une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -1$.

1. Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$
2. Calculer u_{10}

Exercice 36. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ telle que $u_5 = 2$.

1. Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$
2. Calculer u_{10}

Exercice 37. Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 telle que $u_3 = 12$. Déterminer la valeur du premier terme u_0.

Exercice 38. Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_0 = -3$ et $u_1 = 4$. Déterminer la valeur de la raison de la suite.

Exercice 39. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ telle que $u_2 = 4$ et $u_4 = 1$. Déterminer la valeur de la raison de la suite.

Exercice 40. Les suites suivantes sont-elles géométriques ? Justifier.

a) (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$
b) (v_n) définie par $v_n = -3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
c) (w_n) définie par $w_n = \frac{1}{4^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
d) (a_n) définie par $a_n = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 41. Une ville comptait 10 000 habitants en 2000. Chaque année, le nombre d'habitants augmente de 10 % par rapport à l'année précédente. On note u_n le nombre d'habitants en 2000 + n.

1. Donner la valeur de u_0 et de u_1

2. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.

Exercice 42. Yacine a préparé un gâteau au chocolat qu'il a déposé dans une assiette dans la cuisine. À chaque fois qu'il passe devant, il se sert la moitié de ce qui reste. On note u_n la proportion du gâteau qui reste dans l'assiette après que Yacine se soit servi n fois.
1. Donner la valeur de u_0 et de u_1
2. Justifier que (u_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.

Objectif. Calcul de sommes

Exercice 43. Calculer les sommes suivantes
a) $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 15$
b) $S = 1 + 2 + \cdots + 7$
c) $S = 8 + 9 + \cdots + 15$
d) $S = 7 + 8 + \cdots + 50$

Exercice 44. Calculer la somme S des 20 premiers termes de la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme -1.

Exercice 45. Calculer la somme S des 25 premiers entiers naturels pairs.

Exercice 46. Calculer les sommes suivantes
a) $S = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{12}$
b) $S = 1 - 2 + 4 - 8 + \cdots + 1024 - 2048$

Exercice 47. Calculer la somme S des 10 premiers termes de la suite géométrique de raison $\frac{4}{5}$ et de premier terme 10.

Exercice 48. Formule de la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.
a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}$
b) Démontrer que pour tous entiers $k \geq 0, n \geq 1$:
$u_{k+1} + \cdots + u_{k+n} = n \times \frac{u_{k+1} + u_{k+n}}{2}$

Exercice 49. Formule de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.
Soit un nombre réel q différent de 1.
a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $1 + q + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
b) Démontrer que pour tous entiers $k \geq 0, n \geq 1$:
$u_{k+1} + \cdots + u_{k+n} = u_{k+1} \times \frac{1-q^n}{1-q}$

Problèmes.

Exercice 50. Une entreprise d'impression de photos propose un abonnement annuel à ses clients qui coute 45 euros. Avec cet abonnement, le client paye 5 centimes par photo qu'il veut imprimer. On note u_n le prix que paye le client pour l'abonnement et l'impression de n photos.
1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Combien le client paye-t-il pour imprimer 15 photos ?
3. S'il a payé 98 euros, combien de photos a-t-il imprimées ?

Exercice 51. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule la somme des 50 premiers termes de (u_n).

```
U ← …
S ← 0
Pour i allant de … à …
  S ← …
  U ← …
Fin pour
```

Exercice 52. On s'intéresse à une échelle dont le 1er barreau se trouve à une hauteur de 10 cm du sol. Il y a ensuite 30 cm entre chaque barreau.
a) À quelle hauteur le 2ème barreau sera-t-il ?
b) À quelle hauteur le 3ème barreau sera-t-il ?
c) On note u_n la hauteur par rapport au sol du n-ième barreau de l'échelle. Déterminer u_1
d) Pour $n \in \mathbb{N}$ exprimer u_{n+1} en fonction de u_n
e) En déduire l'expression de u_n en fonction de n

Exercice 53. Pour ses 10 ans, les parents de Marie lui achètent un petit coffre-fort et mettent 100 euros dedans. Puis tous les ans pour son anniversaire, ils lui donnent 50 euros à placer dans son coffre-fort. On note u_n la somme dans le coffre-fort n années après ses 10 ans. On a $u_0 = 100$.
a) Exprimer u_n en fonction de n. Justifier.
b) Combien Marie a-t-elle dans son coffre-fort le lendemain de son 15ème anniversaire ?
c) Déterminer à quel âge Marie aura 1 000 euros dans son coffre-fort.

Exercice 54. Carole et Nicolas font un tournoi de 5 mini-jeux sur un jeu vidéo. Carole obtient un score de 5 000 et Nicolas un score de 3 500. Nicolas décide alors de s'entraîner chaque semaine pour battre le record de Carole. Chaque semaine, il améliore son score de 5 %. Au bout de combien de semaines battra-t-il le record de Carole ?

Exercice 55. Un artificier prépare son feu d’artifice, synchronisé sur de la musique. Il décide de lancer une fusée pendant le premier extrait de musique, deux fusées pendant le deuxième extrait, trois pendant le troisième extrait, etc. Chaque fusée lancée lui coûte 10 €.
1. Il décide de passer 15 extraits de musique. Combien paiera-t-il ?
2. Il décide d’époustoufler les spectateurs et d’envoyer au moins 1 000 fusées. En utilisant la calculatrice, déterminer le nombre d’extraits de musique qu’il devra passer. Combien paiera-t-il ?

Exercice 56. Benjamin décide d’empiler des livres. Pour la stabilité de sa tour, il commence avec le plus gros livre, qui contient 500 pages. Puis il place chaque fois au-dessus un livre contenant 10 de pages de moins que le précédent.
1. Combien de pages contient une pile de 20 livres ?
2. Combien de livres au maximum peut-il mettre sur sa pile, sachant qu’un livre ne peut pas avoir moins de dix pages ? Quelle sera alors la hauteur de la pile ?