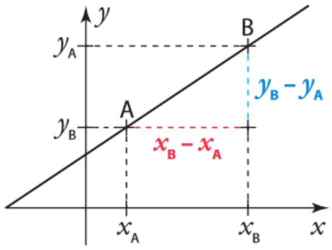
Dérivation

Rappels. Toute droite du plan d non verticale admet une équation de la forme « $y = mx + p$ » où m et p sont des constantes réelles. Dans ce cas l'expression « $y = mx + p$ » est **l'équation réduite de la droite d**

Exemple. $y = 3x + 6$ et $y = -17x - 30$ sont des équations de droites.

Définitions. La pente (ou coefficient directeur) d'une droite non verticale, est le nombre m qui indique de combien d'unités la droite monte (ou descend si $m < 0$) lorsqu'on avance d'une unité vers la droite.
La pente d'une droite d'équation « $y = mx + p$ » est m. p s'appelle **l'ordonnée à l'origine** de d.

Exemple. La droite $y = 5x + 3$ a pour pente 5 et pour ordonnée à l'origine 3.
Exemple. La droite $y = -2x$ a pour pente -2 et pour ordonnée à l'origine 0.
Exemple. La droite $y = x - 1$ a pour pente 1 et pour ordonnée à l'origine -1.



Propriété. Etant donnés $A = (x_A; y_A)$ et $B = (x_B; y_B)$ deux points du plan d'abscisses distinctes $(x_A \neq x_B)$, alors la pente de la droite (AB) est $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Exemple. Donner la pente de la droite passant par $A = (3; 9)$ et $B = (6; 12)$.
La pente de cette droite est $\frac{12-9}{6-3} = \frac{3}{3} = 1$. $m = 1$.

Idée : La dérivée d'une fonction en un point (de sa courbe) est la pente de la fonction en ce point. C'est un nombre qui mesure la vitesse de variation de la fonction au point considéré.
La dérivée généralise la notion de pente à une fonction. Elle dépend du point. Elle n'existe pas toujours.

Définitions. On se place en un point d'abscisse a de la courbe représentative d'une fonction f.
Si en faisant un zoom infini sur le point, la courbe se déforme et devient une droite (non verticale), alors :
- Cette droite est appelée **tangente à la courbe représentative de f en a**.
- La **dérivée de la fonction f en a**, notée $f'(a)$ est la pente de la tangente (à f en a).
- On dit que la fonction f est **dérivable en a**, (elle admet une dérivée en a)

Définition. La tangente est la droite passant par $A = \big(a; f(a)\big)$ et de coefficient directeur $f'(a)$.
Propriété. L'équation de la tangente est « $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ »
Exemple. La tangente en $a = 2$ de la fonction f telle que $f(2) = 3$ et $f'(2) = -5$, a pour équation :

$$y = -5(x - 2) + 3$$

Définition. f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I.
Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée de la fonction f**, la fonction $f' : I \to \mathbb{R} : x \mapsto f'(x)$

Dérivées usuelles. A chaque ligne, f est définie et vaut l'expression de la colonne à gauche sur tout D_f. On déduit que f est dérivable sur $D_{f'}$, et $f'(x)$ vaut l'expression dans la dernière colonne sur tout $D_{f'}$.

$f(x)$	Conditions	D_f	$D_{f'}$	$f'(x)$
c	$c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	1
ax	$a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
$ax + b$	$a, b \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
x^2		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
x^3		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$3x^2$
x^4		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$4x^3$
x^n	$n \geq 1$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$		$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$

Opérations sur les dérivées. A chaque ligne :
- I est un intervalle.
- On suppose que u et v sont dérivables.
- On déduit que f est dérivable sur I.

f	Conditions	f'
$u + v$	$u, v : I \to \mathbb{R}$	$(u + v)' = u' + v'$
$u - v$	$u, v : I \to \mathbb{R}$	$(u - v)' = u' - v'$
$a \times u$	$a \in \mathbb{R}$, $u : I \to \mathbb{R}$	$(a \times u)' = a \times u'$
$u \times v$	$u, v : I \to \mathbb{R}$	$(u \times v)' = u'v + v'u$