Arithmétique

Rappels. Les principaux ensembles de nombres sont :
$\mathbb{N}$ (Entiers naturels) $\subset \mathbb{Z}$ (Entiers relatifs) $\subset \mathbb{D}$ (Nombres décimaux) $\subset \mathbb{Q}$ (Rationnels) $\subset \mathbb{R}$ (Réels)

Définition. Soit a et b deux entiers relatifs.
a est un **multiple** de b ssi $\frac{a}{b}$ est un entier relatif. ($\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$)
On dit aussi que b est un **diviseur** de a, ou que a est **divisible** par b.

Exemple. 35 est un multiple de 7 car $\frac{35}{7} = 5$ est un entier.

Exemple. 42 n'est pas multiple de 10 car $\frac{42}{10} = 4{,}2 \notin \mathbb{Z}$

Exemple. 30 est un diviseur de 90 car $\frac{90}{30} = 3 \in \mathbb{Z}$.

Définition. Un entier n est **pair** ssi $n = 2k$ où k est <u>un entier relatif</u>.

Remarque. n est pair $\Leftrightarrow$ n multiple de $2 \Leftrightarrow \frac{n}{2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2$ divise $n \Leftrightarrow n$ est divisible par 2.

Définition. Un entier n est **impair** ssi $n = 2k + 1$ où k est <u>un entier relatif</u>.

Remarque. Tout entier n est soit pair, soit impair.

Exemples. 13 est impair, 3 est pair, 0 est pair, 41 est impair.

Remarque. Un entier n admet toujours 1 et n comme diviseurs. Donc n a au moins 2 diviseurs si $n > 1$.

Définition. Un entier naturel ≥ 2 est **premier** si on ne peut pas l'obtenir en multipliant de 2 entiers naturels plus petits. Autrement dit, s'il a exactement deux diviseurs (1 et lui-même).

Exemple. Liste des 10 premiers nombres premiers : $2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29$.
3 est premier car ses seuls diviseurs sont 3 et 1.
6 n'est pas premier car $3 \times 2 = 6$.
10 n'est pas premier car $2 \times 5 = 10$.

Test de primalité. Un entier n <u>non premier</u> a toujours un diviseur $d > 1$ tel que $d \leq \sqrt{n}$.
Si on a trouvé aucun diviseur $\leq \sqrt{n}$, on peut s'arrêter en concluant que n est premier.

Exemple. 11 est-il premier ? $\sqrt{11} \approx 3{,}32$. 11 n'est pas divisible par 2 ni par 3. Donc 11 est premier.

Théorème de décomposition en facteurs premiers. Tout nombre entier naturel peut se décomposer sous la forme d'un produit de nombres <u>premiers</u>. Par ailleurs, cette décomposition est unique.

Idée de la preuve. Soit un entier naturel n. S'il est premier, on a fini. Sinon on peut l'écrire $n = ab$ avec $a < n$ et $b < n$. Si a et b sont premiers, on a fini. Sinon, on continue à décomposer les facteurs non premiers jusqu'à ce qu'ils le deviennent. Ce processus termine puisqu'à chaque étape les facteurs sont plus petits.

Exemples. $20 = 2 \times 2 \times 5$ $\quad 22 = 2 \times 11$ $\quad 70 = 2 \times 5 \times 7$

Définition. Une fraction $\frac{a}{b}$ est **irréductible** ssi le numérateur a et le dénominateur b n'ont pas de diviseur commun (autre que 1).

Exemples. $\frac{5}{13}$ est irréductible car le seul diviseur commun à 5 et 13 est 1.
$\frac{12}{15}$ n'est pas irréductible car 3 est un diviseur de 12 et de 15.