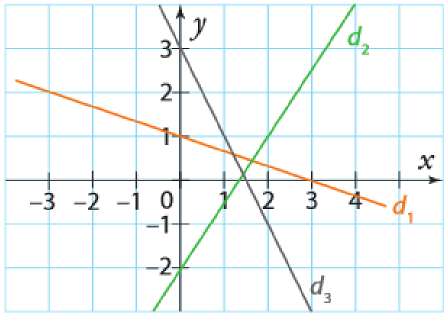
Dérivation - 1

A. Déterminer graphiquement la pente d'une droite non verticale.

Méthode.
- On choisit deux points A et B de la droite, si possible sur des graduations.
- On mesure le déplacement horizontal, et le déplacement vertical entre les deux points choisis.
- On calcule la pente $m = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
- Si la droite descend en allant vers la droite, la pente est négative, on vérifie que m a un signe $-$



Exercice A1. Déterminer la pente pour chaque droite :

Pour d_1 : $m =$

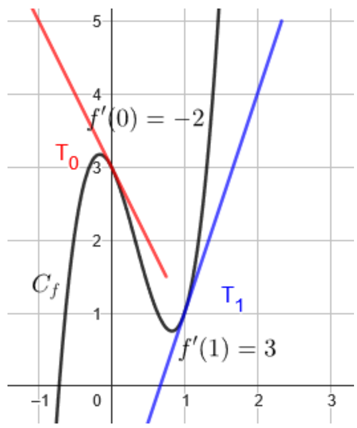
Pour d_2 : $m =$

Pour d_3 : $m =$

B. Déterminer graphiquement la dérivée d'une fonction en un point.

Idée. La dérivée d'une fonction en un point de sa courbe est la pente de la fonction en ce point.
La dérivée est <u>un nombre</u> qui mesure la vitesse de variation de la fonction au point considéré.

Méthode. Pour déterminer *graphiquement* la dérivée $f'(x)$ d'une fonction f en un point x :
- On détermine graphiquement la pente de la tangente, qui est la dérivée.



Exemple. Déterminer la dérivée de f en 1, c'est-à-dire $f'(1)$.
En $x = 1$, la tangente T_1 à C_f a pour pente $m =$
Donc $f'(1) =$
La fonction monte à une vitesse de carreaux/unité en 1.

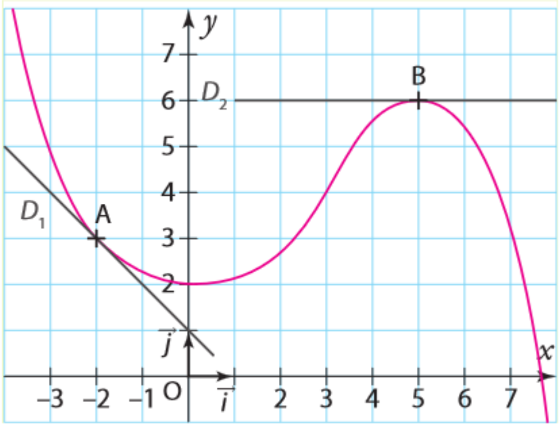
Exemple. Déterminer $f'(0)$.
En $x = 0$, la tangente T_0 à C_f a pour pente $m =$
Donc $f'(0) =$
La fonction descend à une vitesse de carreaux/unité en 0.

Idée. La tangente d'une fonction en un point de sa courbe est la droite, qui approche au mieux la courbe si on fait un zoom infini sur le point considéré.

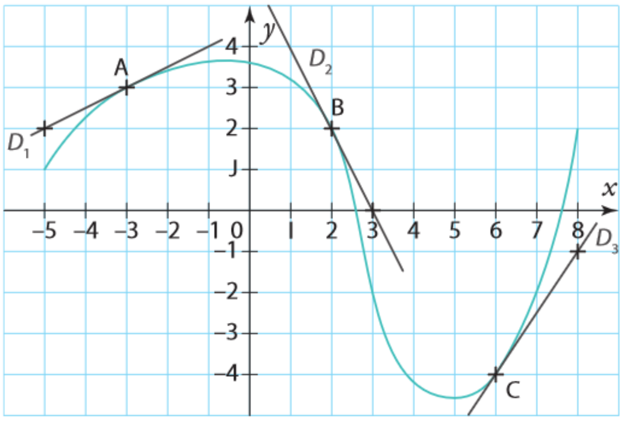
Propriété. La dérivée d'une fonction en un point, est la pente de la tangente, à la fonction en ce point.

Dérivation - 2

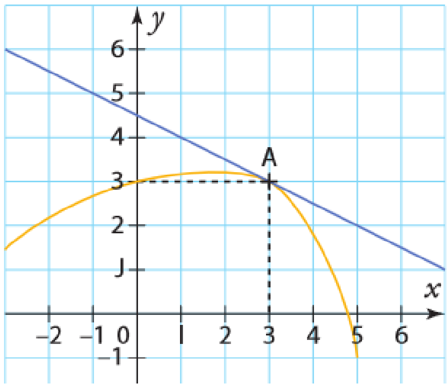
Exercice B1. Lire sur le graphique $f(-2)$, $f(5)$, $f'(-2)$ et $f'(5)$



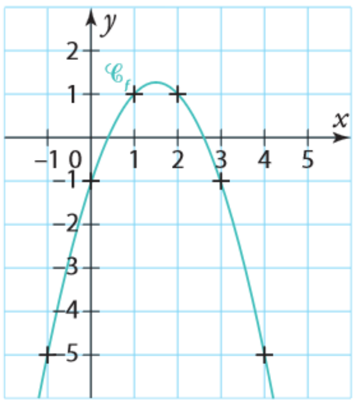
Exercice B2. Lire sur le graphique les valeurs de $f(-3)$, $f(2)$, $f(6)$ et $f'(-3)$, $f'(2)$, $f'(6)$



Exercice B3. La courbe d'une fonction g définie sur $[-3; 5]$ est représentée ci-contre. La tangente à cette courbe au point A d'abscisse 3 passe par le point de coordonnées $(-3; 6)$. Que vaut $g(3)$? Que vaut $g'(3)$?



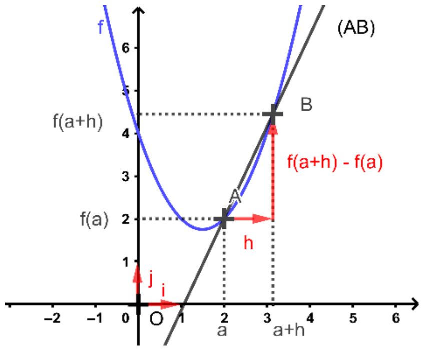
Exercice B4. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(2) = -1$ et $f'(0) = 2$. Soit C_f sa courbe dans le repère ci-dessous. Reproduire la courbe C_f (en plaçant quelques points importants et en respectant l'allure) et tracer la tangente à C_f au point d'abscisse 2 et la tangente à C_f au point d'abscisse 0



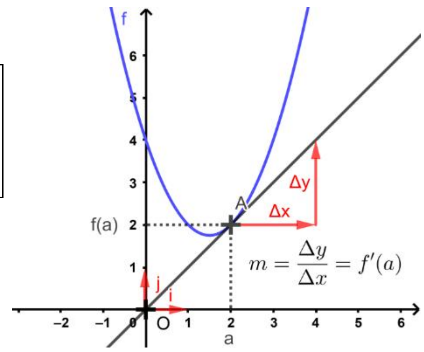
C. Connaitre la définition de la dérivée.

On veut définir précisément la dérivée, en un point A fixé sur la courbe d'une fonction f :

• On visualise la droite (AB) où B est un point qui se déplace librement le long de la courbe, et situé à une distance horizontale h du point A fixe sur la courbe.
• On rapproche le point B du point A, en diminuant la distance h.
• Quand B devient confondu avec A, la droite limite obtenue est la tangente, et la pente limite obtenue est la dérivée. La dérivée est la pente de la tangente.



Définition. Soit I un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Soit a et b des réels de l'intervalle I. On note $h = b - a$.



> $\boldsymbol{f}$ **est dérivable en $\boldsymbol{a}$** si $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est un nombre réel.
> Dans ce cas on note $\boldsymbol{f'(a)} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $\quad f'(a)$ est la **dérivée de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$.**

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est appelé **taux de variation de $\boldsymbol{f}$ entre $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$**.

Remarque. Dans la définition, $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ peut être écrit sous la forme $\lim\limits_{b\to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ou sous la forme $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ ce qui s'écrit aussi $\frac{df}{dx}$ en physique.

D. Calculer un taux de variation.

> **Définition.** Le **taux de variation** ou **taux d'accroissement** d'une fonction f entre a et b est
> $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Exercice D1.

a) Déterminer le taux de variation de $f(x) = -5x + 8$ entre $a = 4$ et $b = 7$

b) Déterminer le taux de variation de $g(x) = x^3 - 3x$ entre $a = 1$ et $b = -\frac{1}{2}$

c) Déterminer le taux de variation de $c(x) = \frac{1}{x+1}$ entre $a = 1$ et $b = 3$

d) Déterminer le taux de variation de $d(x) = x^2 + 1$ entre $a = 2$ et $b = 2 + \sqrt{3}$

E. Calculer une dérivée à partir de la définition.

Méthode.
- On calcule le taux de variation $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- On simplifie l'expression le plus possible.
- On calcule ensuite la limite quand h s'approche de 0. En 1ère, on peut se contenter de remplacer h par 0.

Exemple. Soit la fonction définie par $f(x)=x^2$. Déterminer $f'(x)$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

Donc $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}$

Exercice E1.

a) Soit $f(x)=4x-6$. Déterminer $f'(x)$.

b) Soit $g(x)=5x+2$. Déterminer $g'(7)$.

c) Soit $h(x)=5(3-2x)$. Déterminer $h'(x)$.

d) Soit $i(x)=(3+x)^2$. Déterminer $i'(x)$.

e) Soit $j(x)=(1-2x)^2$. Déterminer $j'(4)$.

f) Soit $k(x)=\frac{1}{x}$. Déterminer $k'(x)$.

F. Connaitre les dérivées de référence, et les opérations sur les dérivées.

Définition. Une fonction $\boldsymbol{f}$ **est dérivable sur un intervalle** $\boldsymbol{I}$ si elle est dérivable <u>en tout</u> nombre réel x de I.
Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée de la fonction** $\boldsymbol{f}$, la fonction $f':\begin{matrix} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x)\end{matrix}$

Dérivées de référence. A chaque ligne, si f est définie et vaut l'expression de la 2ème colonne *sur tout* D_f.
Alors : f est dérivable sur $D_{f'}$, et $f'(x)$ vaut l'expression dans la 3ème colonne sur tout $D_{f'}$

D_f	$f(x)$	$f'(x)$	$D_{f'}$	Conditions
$\mathbb{R}$	a	0	$\mathbb{R}$	a constante
$\mathbb{R}$	x	1	$\mathbb{R}$	
$\mathbb{R}$	x^2	$2x$	$\mathbb{R}$	
$\mathbb{R}$	x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$	
$\mathbb{R}$	x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	n entier > 0
$\mathbb{R}^*$	x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$	n entier < 0
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$	

Opérations sur les dérivées. A chaque ligne :
- On suppose que u et v sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, et dérivables sur un intervalle I.
- On déduit que f est définie et dérivable sur I.

f	f'	Conditions
$u+v$	$(u+v)' = u' + v'$	
$u-v$	$(u-v)' = u' - v'$	
au	$(au)' = au'$	a constante

G. Dériver une fonction par le calcul.

Exercice G1. Dériver les fonctions suivantes

$a(x) = 3x + 5$

$b(x) = 3 - 8x$

$c(x) = \frac{2}{7}x + \frac{1}{2}$

$d(x) = \frac{-3+8x}{5}$

Exercice G2. Dériver les fonctions suivantes

$f(x) = 3x^3$

$g(x) = -5x^2 + 17x - 9$

$h(x) = \frac{3}{x} - x^4$

$i(x) = 5\sqrt{x} - \frac{3}{2}$

Exercice G3.

Soit $r(x) = 2x + 5$. Déterminer $r'(3)$.

Soit $s(x) = -3x + 5x^2$. Déterminer $s'(5)$.

Soit $t(x) = -6x^3 + 2x$. Déterminer $t'(-2)$.

H. Déterminer l'équation réduite d'une tangente par le calcul.

Définition. Si f est dérivable en a, la **tangente** à la courbe de f en a, est la droite passant par $A = \left(a; f(a)\right)$ et de pente $f'(a)$.

Méthode. Pour trouver l'équation réduite de la tangente à la courbe d'une fonction f à l'abscisse a.
- On détermine $f'(a)$.
- L'équation de la tangente est de la forme $y = f'(a)x + p$
- On détermine $f(a)$.
- Comme A est sur la tangente, on remplace x par a, et y par $f(a)$, puis on résout l'équation pour trouver p.

Exercice H1.

a) Trouver une équation de la tangente à la fonction $f(x) = 3x^2 - 5$ en -2.

b) Trouver une équation de la tangente à la fonction $g(x) = -5x^3$ en 3.

c) Trouver une équation de la tangente en 3 de la fonction h telle que $h(3) = 5$ et $h'(3) = -1$.

d) Une fonction f admet une tangente d'équation $y = -7x + 9$ en 1. Que vaut $f'(1)$? Que vaut $f(1)$?