Arithmétique

Rappels. Les principaux ensembles de nombres sont :
$\mathbb{N}$ (Entiers naturels) $\subset \mathbb{Z}$ (Entiers relatifs) $\subset \mathbb{D}$ (Nombres décimaux) $\subset \mathbb{Q}$ (Rationnels) $\subset \mathbb{R}$ (Réels)

Définition. Soit a et b deux entiers relatifs.
a est un **multiple** de b ssi $\frac{a}{b}$ est un entier relatif. ($\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$)
On dit aussi que b est un **diviseur** de a, ou que a est **divisible** par b.

Exemple. 35 est un multiple de 7 car $\frac{35}{7} = 5$ est un entier.

Exemple. 42 n'est pas multiple de 10 car $\frac{42}{10} = 4{,}2 \notin \mathbb{Z}$

Exemple. 30 est un diviseur de 90 car $\frac{90}{30} = 3 \in \mathbb{Z}$.

Définition. Un entier n est **pair** ssi $n = 2k$ où k est un entier relatif.

Remarque. n est pair $\Leftrightarrow$ n multiple de 2 $\Leftrightarrow \frac{n}{2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ 2 divise n $\Leftrightarrow$ n est divisible par 2.

Définition. Un entier n est **impair** ssi $n = 2k + 1$ où k est un entier relatif.

Remarque. Tout entier n est soit pair, soit impair.

Exemples. 13 est impair. En effet $13 = 2 \times 6 + 1$. $\quad$ 10 est pair. En effet $10 = 2 \times 5$.

Remarque. Un entier n admet toujours 1 et n comme diviseurs. Donc tout $n \geq 2$ a au moins 2 diviseurs.

Définition. Un entier ≥ 2 est **premier** si on ne peut pas l'obtenir en multipliant deux entiers naturels plus petits. Autrement dit, s'il a exactement deux diviseurs (1 et lui-même).

Exemple. Liste des 10 premiers nombres premiers : $2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29$.
3 est premier car ses seuls diviseurs sont 3 et 1.
6 n'est pas premier car $3 \times 2 = 6$.
10 n'est pas premier car $2 \times 5 = 10$.

Test de primalité. Un entier n non premier a toujours un diviseur $d \geq 2$ tel que $d \leq \sqrt{n}$.
Si on a trouvé aucun diviseur $\leq \sqrt{n}$, on peut s'arrêter en concluant que n est premier.

Exemple. 11 est-il premier ? $\sqrt{11} \approx 3{,}32$. 11 n'est pas divisible par 2 ni par 3. Donc 11 est premier.

Théorème de décomposition en facteurs premiers. Tout nombre entier naturel peut se décomposer sous la forme d'un produit de nombres premiers. Par ailleurs, cette décomposition est unique.

Idée de la preuve. Soit un entier naturel n. S'il est premier, on a fini. Sinon on peut l'écrire $n = ab$ avec $a < n$ et $b < n$. Si a et b sont premiers, on a fini. Sinon, on continue à décomposer les facteurs non premiers jusqu'à ce qu'ils le deviennent. Ce processus termine puisqu'à chaque étape les facteurs sont plus petits.

Exemples. $20 = 2^2 \times 5^1$ $\quad$ $22 = 2^1 \times 11^1$ $\quad$ $1\,400 = 2^3 \times 5^2 \times 7^1$

Rappel. Un nombre x est rationnel s'il peut s'écrire sous la forme $x = \frac{p}{q}$ avec p, q des entiers, ($q \neq 0$)

Propriété. Il existe des nombres réels qui ne sont pas rationnels. Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Définition. Une fraction $\frac{a}{b}$ est **irréductible** ssi le numérateur a et le dénominateur b n'ont pas de diviseur commun (autre que 1).

Exemples. $\frac{5}{13}$ est irréductible car le seul diviseur commun à 5 et 13 est 1.
$\frac{12}{15}$ n'est pas irréductible car 3 est un diviseur de 12 et de 15.