Second degré

Définition. Une fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une **fonction polynôme de degré 1** ssi :
Il existe deux nombres réels $a, b \in \mathbb{R}$ <u>avec $a \neq 0$</u>, tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.
Une **équation de degré 1** est une équation de la forme « $ax + b = 0$ » avec $a \neq 0$.

Définition. Une fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une **fonction polynôme de degré 2** ssi :
Il existe trois nombres réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ <u>avec $a \neq 0$</u>, tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Une **équation de degré 2** est une équation de la forme « $ax^2 + bx + c = 0$ » avec $a \neq 0$.

Exemple. $f: x \mapsto x^2 - 3x + 0{,}2$ est une fonction polynôme de degré 2 avec $a = 1$, $b = -3$, $c = 0{,}2$.
Exemple. $f: x \mapsto 5x + 2$ n'en n'est pas une car même si $f(x) = 0x^2 + 5x + 2$, on a $a = 0$ ce qui est interdit.
Exemple. $f: x \mapsto (x-1)^2$ est une fonction polynôme de degré 2 car en développant on s'aperçoit que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 1$ (donc $a = 1, b = -2, c = 1$).
Définitions. L'écriture « $f(x) = ax^2 + bx + c$ » est appelée **forme développée de f**. a, b, c sont uniques.
a est le **coefficient dominant** de f. c est le **coefficient constant** de f.

Théorème (Forme canonique). Une fonction polynôme de degré 2 peut s'écrire sous la forme suivante :
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec α, β réels et uniques. On a : $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$ avec $\Delta = b^2 - 4ac$

Définition. L'écriture « $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ » est appelée **forme canonique de f**.
Exemple. Mettre $f: x \mapsto 2x^2 + 12x + 19$ sous la forme canonique. On calcule $\alpha = -\frac{(12)}{2\times(2)} = -3$, $\Delta = (12)^2 - 4 \times (2) \times (19) = -8$, $\beta = -\frac{(-8)}{4\times(2)} = 1$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2\big(x - (-3)\big)^2 + 1$.
Autre méthode rapide : $f(x) = 2(x^2 + 6x) + 19 = 2(x^2 + 2 \times 3x) + 19 = 2(x^2 + 2 \times 3x + 3^2 - 3^2) + 19 = 2((x+3)^2 - 3^2) + 19 = 2(x+3)^2 - 2 \times 9 + 19 = 2\big(x - (-3)\big)^2 + 1$. Donc par unicité, $\alpha = -3$ et $\beta = 1$.

Rappel. La courbe représentative d'une fonction de degré 1, « $y = ax + b$ » est une droite.

Définition. La courbe représentative d'une fonction de degré 2 « $y = ax^2 + bx + c$ » est appelée **parabole**.
Définition. Si le coefficient dominant a est > 0 (resp. < 0) la parabole est « **vers le haut (resp. bas)** »

Théorème. La forme canonique permet de trouver les variations de f suivant le signe de a :

Si $a > 0$, f est décroissante sur $]-\infty; \alpha]$, croissante sur $[\alpha; +\infty[$ et f atteint son minimum β en α

Si $a > 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Si $a < 0$, f est croissante sur $]-\infty; \alpha]$, décroissante sur $[\alpha; +\infty[$ et f atteint son maximum β en α

Si $a < 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\nearrow$	β	$\searrow$	

Exemple. Etudier les variations de $f: x \mapsto 2x^2 + 12x + 19$. On a vu que $\alpha = -3$ et $\beta = 1$, donc f est décroissante sur $]-\infty; -3]$, croissante sur $[-3; +\infty[$ et atteint son minimum 1 en $x = -3$.

Propriété. La parabole C_f admet pour axe de symétrie la droite d'équation « $x = \alpha$ ».

Définition et propriété. Le sommet de la parabole C_f est le point le plus bas (resp. haut) si la parabole est orientée vers le haut (resp. bas). Les coordonnées du sommet de la parabole sont toujours $(\alpha; \beta)$

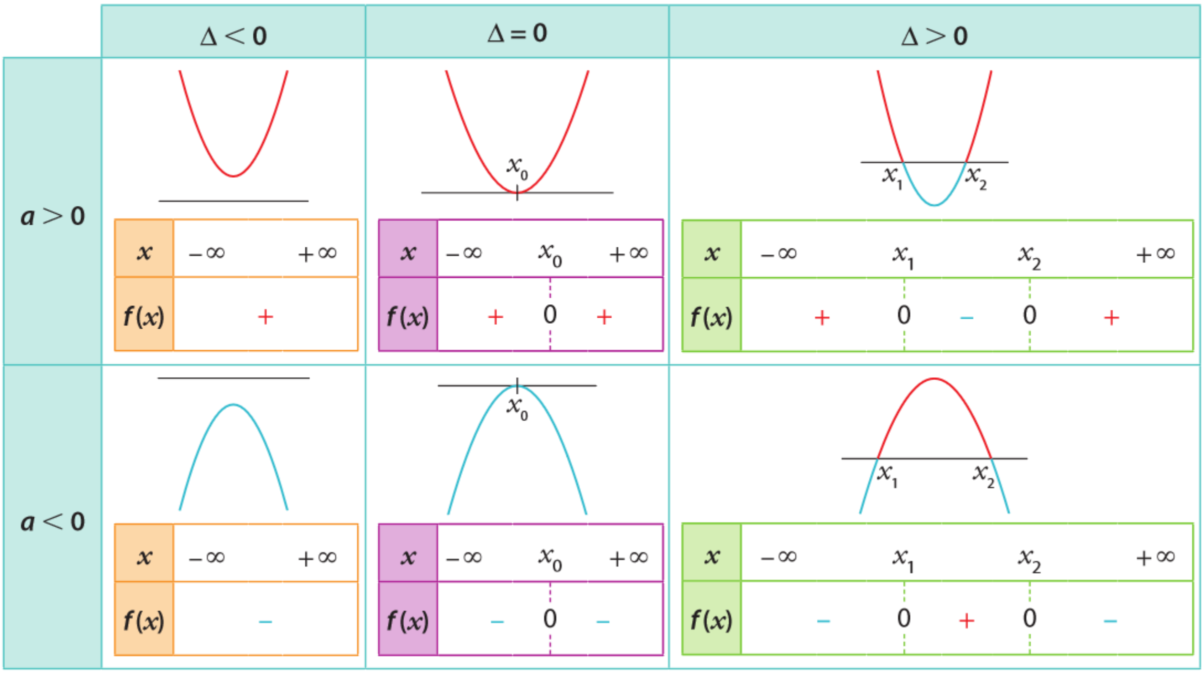
Exemple. Déterminer le sommet de la parabole d'équation « $y = 4x^2 + 8x - 10$ ». f est un polynôme de degré 2, on a $\alpha = -\frac{8}{2\times4} = -1$ et $\beta = -\frac{\left((8)^2 - 4\times(4)\times(-10)\right)}{4\times(4)} = -14$, donc son sommet est le point $(-1; -14)$.

Définition. Une **racine d'une fonction f** est un nombre x tel que $f(x) = 0$. C'est une solution de l'équation « $f(x) = 0$ ». Résoudre une équation, c'est déterminer l'ensemble de ses racines.
Rappel. Résolution d'une équation de degré 1. Si $f: x \mapsto ax + b$ est un polynôme de degré 1 :
f a exactement 1 racine sur $\mathbb{R}$ càd « $ax + b = 0$ » a exactement 1 solution sur $\mathbb{R}$, et cette solution est :
$x_1 = -\frac{b}{a}$ (Démonstration : $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$. La dernière étape est valide car $a \neq 0$)

Hypothèse. Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme de degré 2. $(a \neq 0)$
Définition. $\boldsymbol{\Delta} = b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant de $\boldsymbol{f}$**.
Théorème. Résolution d'une équation de degré 2.
On calcule le discriminant Δ de f. On a 3 situations possibles suivant le signe de Δ.
Si $\Delta < 0$: Alors f n'a pas de racines sur $\mathbb{R}$ autrement dit « $ax^2 + bx + c = 0$ » n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas on ne peut pas factoriser f sur $\mathbb{R}$.
Si $\Delta = 0$: Alors f a exactement 1 racine sur $\mathbb{R}$ autrement dit « $ax^2 + bx + c = 0$ » a exactement 1 solution dans $\mathbb{R}$, et cette solution est $\boldsymbol{x_0} = -\frac{b}{2a} = \alpha$. On peut alors factoriser f : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a(x - x_0)^2$
Si $\Delta > 0$: Alors f a exactement 2 racines sur $\mathbb{R}$, « $ax^2 + bx + c = 0$ » a exactement 2 solutions dans $\mathbb{R}$, et ces deux solutions sont $\boldsymbol{x_1} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\boldsymbol{x_2} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. On peut alors écrire : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Définition. La forme « $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ » est appelée **forme factorisée de $\boldsymbol{f}$**.
Factoriser un polynôme de degré 2 revient à déterminer ses racines, donc revient à résoudre « $f(x) = 0$ »
Remarque. Le cas $\Delta = 0$ correspond au cas limite où $x_1 = x_2$. On dit que x_0 est une **racine double**.
Exemple. Résoudre $2x^2 + x - 3 = 0$. On pose $f : x \mapsto 2x^2 + x - 3$. Le discriminant de f est $\Delta = (1)^2 - 4 \times (2) \times (-3) = 25$ donc l'équation a 2 solutions : $x_1 = \frac{-(1)-\sqrt{(25)}}{2\times(2)} = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{-(1)+\sqrt{(25)}}{2\times(2)} = 1$
Exemple. Déterminer les racines de $f : x \mapsto x^2 + x + 1$. Le discriminant de f est $\Delta = (1)^2 - 4 \times (1) \times (1) = -3 < 0$ donc f n'a pas de racines sur $\mathbb{R}$. L'équation « $x^2 + x + 1 = 0$ » n'a pas de solution réelle.
Exemple. Factoriser $f : x \mapsto 9x^2 - 30x + 25$. Le discriminant de f est $\Delta = (-30)^2 - 4 \times (9) \times (25) = 0$.
Donc f admet une seule racine $x_0 = -\frac{(-30)}{2\times 9} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 9\left(x - \frac{5}{3}\right)^2$

Théorème. **Résolution d'une inéquation de degré 2.**
Le signe d'un trinôme est déterminé par les 6 cas de figures suivants :



	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$	x : $-\infty$; $+\infty$ — $f(x)$: $+$	x : $-\infty$; x_0 ; $+\infty$ — $f(x)$: $+$ 0 $+$	x : $-\infty$; x_1 ; x_2 ; $+\infty$ — $f(x)$: $+$ 0 $-$ 0 $+$
$a < 0$	x : $-\infty$; $+\infty$ — $f(x)$: $-$	x : $-\infty$; x_0 ; $+\infty$ — $f(x)$: $-$ 0 $-$	x : $-\infty$; x_1 ; x_2 ; $+\infty$ — $f(x)$: $-$ 0 $+$ 0 $-$

Exemple. Résoudre (I) : « $2x^2 + x - 3 < 0$ » sur $\mathbb{R}$. On pose $f(x) = 2x^2 + x - 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a $a = 2 > 0$, et on a vu que $\Delta > 0$ et après résolution les racines sont $x_1 = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = 1$.
On est donc dans le cas n° 3. On observe que pour satisfaire (I), il faut se placer strictement (car (I) est une inégalité stricte) entre (pour être négatif) les racines. L'ensemble des solutions de (I) est donc $]-\frac{3}{2} ; 1[$.
Propriété. Si $\Delta \geq 0$, alors $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ (Utile pour trouver l'autre racine connaissant l'une)
Exemple. Trouver les racines de $f : x \mapsto 2x^2 - x - 1$. En testant des petites valeurs entières $x = 1; 2; 3; -1; -2$ on trouve par chance une racine « évidente » : $f(1) = 0$ donc $x_1 = 1$ est racine évidente.
D'après les relations coefficients racines, on a $1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ donc $x_2 = -\frac{1}{2}$ est l'autre racine.
Propriété. Deux réels ont pour somme S et produit P ssi ils forment les 2 solutions de « $x^2 - Sx + P = 0$ ».