

A. Déterminer si deux droites sont sécantes, parallèles, ou confondues, à partir d'équations cartésiennes

Méthode. Pour déterminer si deux droites sont sécantes, parallèles, ou confondues, à partir d'équation cartésiennes de la forme : $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$

- On calcule le déterminant $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$
- Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$, les droites sont **sécantes**.
- Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$, les droites sont parallèles, il reste à déterminer si les droites sont confondues ou non.
 - On calcule le déterminant $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}$
 - Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$, les droites sont **strictement parallèles**.
 - Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$, les droites sont **confondues**.

Exercice A1. Déterminer dans chaque cas, si les deux équations correspondent à des droites sécantes, parallèles, ou confondues :

- $\begin{cases} -2x + 5y + 6 = 0 \\ 4x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ -10x + 15y - 5 = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} -3x + 5y + 7 = 0 \\ 9x - 15y - 2 = 0 \end{cases}$

B. Déterminer si deux droites sont sécantes, parallèles, ou confondues, à partir d'équations réduites

Méthode. Pour déterminer si deux droites sont sécantes, parallèles, ou confondues, à partir d'équation réduites de la forme : $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$

- Si $m \neq m'$, les droites sont **sécantes**.
- Si $m = m'$, les droites sont parallèles, il reste à déterminer si les droites sont confondues ou non.
 - Si $p \neq p'$, les droites sont **strictement parallèles**.
 - Si $p = p'$, les droites sont **confondues**. (Dans ce cas les équations sont identiques)

Exercice B1. Déterminer dans chaque cas, si les deux équations correspondent à des droites sécantes, parallèles, ou confondues :

- $\begin{cases} y = 3x + 10 \\ y = 7x - 5 \end{cases}$
- $\begin{cases} y = -5x + 12 \\ y = -5x - 10 \end{cases}$
- $\begin{cases} y = -3x + 2 \\ y = 3x + 2 \end{cases}$

C. Simplifier un système linéaire

Définition. Un système de 2 équations linéaires à 2 inconnues peut s'écrire sous la forme :
$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$
 où $x; y$ sont les variables inconnues, et a, b, c, a', b', c' sont des nombres constants.

Exemple.
$$\begin{cases} -2x + 3y + 16 = 0 \\ 4x + 2y - 16 = 0 \end{cases}$$
 est un système de 2 équations linéaires à 2 inconnues.

Méthode. Pour simplifier un système :

- Si nécessaire, on développe ce qui peut l'être.
- Chaque terme à droite est déplacé à gauche, en changeant son signe.
- On simplifie à gauche en factorisant par x , puis par y .

Ex. Simplifier (E) :
$$\begin{cases} 3x + y = 2(y - 1) \\ y + 7 = 5(x + 2) \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$$

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$$

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$$

Exercice C1. Simplifier les systèmes suivants :

$$(A) : \begin{cases} 2x + 3 = 5y \\ -3y = 5 - 2x \end{cases}$$

$$(B) : \begin{cases} 3(x - 5) = y \\ 5 + 2(y - 8) = -2x \end{cases}$$

D. Compter les solutions d'un système linéaire

Propriété. Un système linéaire a :

- Soit une seule solution, soit aucune solution, soit une infinité de solutions.

Propriété. Résoudre un système de 2 équations linéaires à 2 inconnues revient à chercher l'intersection de 2 droites.

- Le système admet **un seul** couple solution si et seulement si les 2 droites sont **sécantes**.
- Le système admet **aucune** solution si et seulement si les 2 droites sont **strictement parallèles**.
- Le système admet **une infinité** de solutions si et seulement si les 2 droites sont **confondues**.

Méthode. Pour compter les solutions d'un système linéaire :
$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

- Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$, le système admet **un seul** couple solution. (droites sécantes)
- Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$, le système n'admet **aucune** solution. (droites strictement parallèles)
- Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$, le système admet **une infinité** de solutions. (droites confondues)

Exercice D1. Déterminer si les systèmes suivants ont une, zéro, ou une infinité de solutions :

- (A) :
$$\begin{cases} 10x + 3y + 7 = 0 \\ -30x - 9y - 2 = 0 \end{cases}$$
- (B) :
$$\begin{cases} 4x - 5y + 2 = 0 \\ -8x + 10y - 4 = 0 \end{cases}$$
- (C) :
$$\begin{cases} 3x + 7y + 6 = 0 \\ 4x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

E. Résoudre un système linéaire

a) Par substitution

Méthode. Pour résoudre un système linéaire $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ par substitution :

- On calcule le déterminant $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$
- Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$:
 - Le système a un **seul** couple solution qu'on détermine par la méthode suivante :
 - On isole une inconnue dans une équation.
 - On remplace l'inconnue isolée dans l'autre équation afin d'obtenir une nouvelle équation à une inconnue.
 - On résout cette nouvelle équation.
 - On remplace l'inconnue trouvée dans la première équation afin de trouver la seconde inconnue.
- Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$:
 - Le système n'a **aucune** solution. $S = \emptyset$
- Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$:
 - Le système a une **infinité** de solutions. Résolution hors programme.

Exemple. Résoudre (E) : $\begin{cases} -2x + 3y + 16 = 0 \\ 4x + 2y - 16 = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} &= (-2) \times 2 - 3 \times 4 = -4 - 12 = -16 \neq 0. && \text{Donc (E) admet une seule solution.} \\ (E) &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y + 16 = 0 \\ 4x + 2y - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y + 16 = 0 \\ 2y = -4x + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y + 16 = 0 \\ y = -2x + 8 \end{cases} \quad (\text{On isole } y \text{ dans la 2}^{\text{e}} \text{ équation}) \\ (E) &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3(-2x + 8) + 16 = 0 \\ y = -2x + 8 \end{cases} \quad (\text{On remplace } y \text{ dans la 1}^{\text{e}} \text{ équation}) \\ (E) &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + (-6)x + 24 + 16 = 0 \\ y = -2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 40 = 0 \\ y = -2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-40}{-8} = 5 \\ y = -2x + 8 \end{cases} \quad (\text{On isole } x \text{ dans la 1}^{\text{e}} \text{ équation}) \\ (E) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2(5) + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases} \quad (\text{On remplace la valeur de } x \text{ dans la 2}^{\text{e}} \text{ équation}). \\ \text{L'ensemble des solutions de (E) est : } &S_E = \{(5; -2)\}. \end{aligned}$$

Exercice E1. Résoudre les systèmes suivants :

$$(A) : \begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ 2x + 3y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$(B) : \begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ 5x - 2y - 12 = 0 \end{cases}$$

$$(C) : \begin{cases} 4x + 9y - 5 = 0 \\ 6x - 6y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$(D) : \begin{cases} 2x - 6y = 5 \\ 3x - 9y = 1 \end{cases}$$

b) Par combinaison

Méthode. Pour résoudre un système linéaire $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ par combinaison :

- On calcule le déterminant $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$
- Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$:
 - Le système a un **seul** couple solution qu'on détermine par la méthode suivante :
 - On multiplie la ligne 1 par le coefficient a' de la ligne 2 et on multiplie la ligne 2 par le coefficient a de la ligne 1
 - On remplace la ligne 2 par : ligne 2 moins ligne 1. La ligne 2 n'a alors plus qu'une seule inconnue y
 - On résout la ligne 2 en y .
 - On remplace l'inconnue y trouvée dans la première équation afin de trouver la seconde inconnue x .
- Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$:
 - Le système n'a **aucune** solution. $S = \emptyset$
- Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$:
 - Le système a une **infinité** de solutions. Résolution hors programme.

Cette méthode est souvent plus rapide et plus sûre, car elle évite les fractions dans les calculs.

Exemple. Résoudre (E) : $\begin{cases} -2x + 3y + 16 = 0 \\ 4x + 2y - 16 = 0 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-2) \times 2 - 3 \times 4 = -4 - 12 = -16 \neq 0. \quad \text{Donc (E) admet une seule solution.}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y + 16 = 0 \\ 4x + 2y - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 12y + 64 = 0 & (L_1 \leftarrow 4 \times L_1) \\ -8x - 4y + 32 = 0 & (L_2 \leftarrow -2 \times L_2) \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 12y + 64 = 0 \\ 0x + (-4 - 12)y + 32 - 64 = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 12y + 64 = 0 \\ -16y - 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 12y + 64 = 0 \\ y = \frac{32}{-16} = -2 \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 12(-2) + 64 = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 40 = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-40}{-8} = 5 \\ y = -2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (E) est : $S_E = \{(5; -2)\}$.

Exercice E2. Résoudre les systèmes suivants :

$$(A) : \begin{cases} 3x + 2y = 66 \\ x + 3y = 57 \end{cases} \quad (B) : \begin{cases} 10x - 3y - 35 = 0 \\ 5x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$(C) : \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases} \quad (D) : \begin{cases} -x + 2y + 3 = 0 \\ 3x - 6y - 1 = 0 \end{cases}$$

F. Résoudre un problème avec un système linéaire

Exercice F1. Déterminer deux entiers dont la différence est 8 et dont la somme est 36.

Exercice F2. Jacques et Laurent ont à eux deux 54 ans. Dans trois ans, Jacques aura le double de l'âge de Laurent. Quel âge ont-ils ?

Exercice F3. Dans une ferme il y a des vaches et des poules. On compte 51 têtes et 176 pattes.
Combien y a-t-il de vaches et de poules dans cette ferme ?

Exercice F4. Chloé possède dans sa tirelire 20 pièces de monnaie. Certaines ont une valeur de 2 euros et d'autres une valeur de 1 euro. À l'aide de la totalité de ses 20 pièces, elle s'offre un cadeau valant 36 euros. Combien de pièces de chaque sorte Chloé a-t-elle dans sa tirelire ?

Exercice F5. Une entreprise reçoit une première facture d'électricité de 3 020,55 euros. La facture montre une consommation de 2 166 kWh durant les heures creuses et de 4 691 kWh pendant les heures pleines. Le mois suivant la facture s'élève à 1 551,15 euros pour une consommation de 2 484 kWh en heures creuses et de 1 629 kWh en heures pleines. Déterminer le prix du kWh en heures creuses et en heures pleines.