Second degré - 1

A. Développer une fonction polynomiale.

Méthode. Pour développer et ordonner une fonction	Rappels.
• On développe ce qui peut l'être. • On simplifie les termes du même ordre • On ordonne les termes par puissances *décroissantes* de x	$a(b+c)=ab+ac$ $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

Exemple. Développer et ordonner $g(x)=3x^2(6-2x^3)-2x(x^2+3)$

$g(x)=$

$g(x)=$

$g(x)=$

Exercice A1. Développer et ordonner les fonctions suivantes :

$a(x)=3x-x^2(3x-5x^2)=$

$b(x)=1-x^2+(1-x)^2=$

$c(x)=2x^4(x^5-x^2)+x^4(4x^4+10x^5)=$

B. Déterminer si une fonction est un trinôme, et trouver ses coefficients a, b, c

Définitions. Un **polynôme de degré 2** ou **trinôme** est une fonction qui peut s'écrire $f(x)=ax^2+bx+c$ pour tout nombre réel x, où a, b, c sont des constantes, et où $a \neq 0$.
a est le **coefficient dominant**, b est le **coefficient médian**, et c est le **coefficient constant** du trinôme f.

Méthode. Pour déterminer si une fonction est un polynôme de degré 2, et trouver ses coefficients :	Exemple. La fonction $f(x)=3x(5-2x)-2$ est-elle un polynôme de degré 2 ? Si oui, préciser ses coefficients.
• On développe et on ordonne si nécessaire. • On vérifie que $f(x)$ est bien de la forme ax^2+bx+c Sinon ce n'est pas un polynôme de degré 2. • On lit les valeurs de a, b, c • On vérifie que le coefficient dominant a n'est pas zéro. Si $a=0$ ce n'est pas un polynôme de degré 2.	$f(x)=$

Exercice B1. Pour chaque fonction, déterminer si c'est un trinôme, et le cas échéant trouver ses coefficients a, b, c.

$f(x)=4x^2+5x-2$

$g(x)=5x^3-5x^2+2$

$h(x)=(5-x)^2$

$i(x)=3-x^2$

$j(x)=5(2+x)^2$

$k(x)=6x(7-3x)+2x-5$

Second degré - 2

C. Mettre un trinôme sous forme canonique, et trouver ses coefficients a, α, β

Propriété. Un trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut toujours s'écrire sous la **forme canonique** :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

où a, α, β sont des constantes, avec $a \neq 0$.

Méthode sans formule.

- On repère le coefficient dominant a.
- On factorise par a en divisant chaque terme par a dans la parenthèse. On simplifie l'intérieur de la parenthèse.
- On introduit un « $-2\times$ » juste devant le terme en x dans la parenthèse en divisant par -2 le coefficient médian.
- Une fois simplifié, le nombre entre $-2\times$ et x, est mis au carré puis ajouté et retranché juste derrière x.
- Le début de la parenthèse permet alors d'utiliser l'identité remarquable $(\boldsymbol{x^2 - 2yx + y^2}) = (\boldsymbol{x - y})^{\boldsymbol{2}}$
- On simplifie les constantes derrière.
- On développe le a sur la constante.
- On peut lire a, α, et β directement dans l'expression.

Exemple. Mettre $f(x) = 3x^2 + 12x + 9$ sous forme canonique et déterminer les coefficients a, α et β

$f(x) = 3x^2 + 12x + 9$

$f(x) = 3\left(\frac{3x^2}{3} + \frac{12x}{3} + \frac{9}{3}\right)$

$f(x) = 3(x^2 + 4x + 3)$

$f(x) = 3\left(x^2 - 2 \times \frac{+4}{-2} x + 3\right)$

$f(x) = 3(x^2 - 2 \times (-2)x + 3)$

$f(x) = 3(x^2 - 2 \times (-2)x + (-2)^2 - (-2)^2 + 3)$

$f(x) = 3\left(\left(\boldsymbol{x^2 - 2 \times (-2)x + (-2)^2}\right) - (-2)^2 + 3\right)$

$f(x) = 3\left(\left(\boldsymbol{x - (-2)}\right)^{\boldsymbol{2}} - (-2)^2 + 3\right)$

$f(x) = 3\left(\left(x - (-2)\right)^2 - 1\right)$

$f(x) = 3\left(x - (-2)\right)^2 - 3$

$a =$ $\qquad$ $\alpha =$ $\qquad$ $\beta =$

Exercice C1. Mettre chaque trinôme sous forme canonique et déterminer les coefficients a, α et β.

$a(x) = 5x^2 - 20x + 16 =$

$b(x) = 5(2x + 7) + x^2 =$

Exercice C2. Mettre sous forme canonique $f(x) = ax^2 + bx + c$. Exprimer α et β en fonction de a, b, et c.

Méthode avec formule.

- On détermine les coefficients a, b, c du trinôme f.
- On calcule d'abord $\alpha = -\frac{b}{2a}$ puis $\beta = f(\alpha)$
- On peut écrire la forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

Exemple. Mettre $f(x) = 3x^2 + 12x + 9$ sous forme canonique

$f(x) = 3x^2 + 12x + 9$

$a =$ $\qquad$ $b =$ $\qquad$ $c =$

$\alpha =$

$\beta =$

$f(x) =$

Exercice C3. Pour chaque trinôme, déterminer les coefficients a, b, c, α, β puis donner la forme canonique.

$f(x) = -2x^2 + 20x - 57$ $\qquad$ $a =$ $\qquad$ $b =$ $\qquad$ $c =$ $\qquad$ $\alpha =$

$\beta =$

$f(x) =$

$g(x) = -4x^2 - 56x - 184$ $\qquad$ $a =$ $\qquad$ $b =$ $\qquad$ $c =$ $\qquad$ $\alpha =$

$\beta =$

$g(x) =$

$h(x) = x^2 - 20x + 91$ $\qquad$ $a =$ $\qquad$ $b =$ $\qquad$ $c =$ $\qquad$ $\alpha =$

$\beta =$

$h(x) =$

Second degré - 3

D. Déterminer les variations d'un trinôme

Définition. La courbe représentative d'un trinôme est appelée **parabole**.

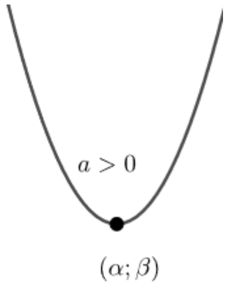
Méthode. Pour déterminer les variations d'un trinôme f :

- On détermine les coefficients α, β de la forme canonique. $\alpha = -\frac{b}{2a}$ $\beta = f(\alpha)$

- *Si a est positif* :
Le trinôme a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		↘	β	↗	

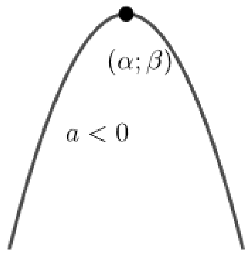
Remarques. Si $a > 0$:
- La parabole a l'allure suivante :
- Elle est **tournée vers le haut**.
- Son **sommet** est le point le plus bas, et a pour coordonnées $(\alpha; \beta)$.
- L'axe d'équation $x = \alpha$ est un axe de symétrie.



- *Si a est négatif* :
Le trinôme a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		↗	β	↘	

Remarques. Si $a < 0$:
- La parabole a l'allure suivante :
- Elle est **tournée vers le bas**.
- Son **sommet** est le point le plus haut, et a pour coordonnées $(\alpha; \beta)$.
- L'axe d'équation $x = \alpha$ est un axe de symétrie.

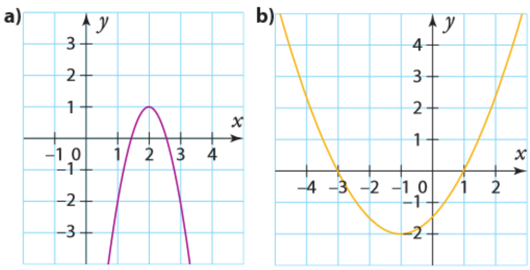


Exercice D1. Donner le tableau de variations de chaque trinôme :

$f(x) = -3x^2 + 9x - 5$ $g(x) = 3x^2 + 6x - 7$

$h(x) = x^2 + x + 1$

Exercice D2. Sur les graphes ci-contre, déterminer les coordonnées du sommet, l'axe de symétrie et le signe de a.



E. Déterminer la position du sommet de la courbe d'un trinôme

Méthode. Pour trouver la position du sommet de la courbe d'un trinôme f.
- On détermine les coefficients α, β de la forme canonique. $\alpha = -\frac{b}{2a}$ $\beta = f(\alpha)$
- Le sommet a pour coordonnées $(\alpha; \beta)$.

Exercice E1. Déterminer les coordonnées du sommet de chaque trinôme :

$f(x) = 2x^2 - 4x + 5$

$g(x) = x^2 + 6x - 3$

$h(x) = -4x^2 + 6x - 2$

Second degré - 4

F. Déterminer le discriminant d'un trinôme

Définition. Le **discriminant** d'un trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est $\Delta = b^2 - 4ac$

Méthode. Pour déterminer le discriminant d'un trinôme :	**Exemple**. Trouver le discriminant de $f(x) = 5x(x-2)$
• On détermine les coefficients a, b, c du trinôme. • On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$	$f(x) =$ $f(x) =$ $a =$ $b =$ $c =$ $\Delta =$

Exercice F1. Déterminer le discriminant de chaque trinôme :

$f(x) = x^2 + 4x + 5$

$g(x) = 2x^2 - x - 6$

$h(x) = -2x^2 - 4x - 7$

$i(x) = -x^2 + 2x + 3$

G. Résoudre une équation de degré 2.

Définition. Une **racine d'une fonction f** est un nombre x tel que $f(x) = 0$. C'est une solution de l'équation $f(x) = 0$.

Théorème. Pour déterminer les racines d'un trinôme $f(x)$ • On détermine les coefficients a, b, c puis le discriminant Δ du trinôme. • Si $\Delta > 0$, alors le trinôme a deux racines : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ • Si $\Delta = 0$, alors le trinôme a une seule racine : $x_1 = -\frac{b}{2a}$ • Si $\Delta < 0$, alors le trinôme n'a pas de racine.

Exemple. Trouver, si elles existent, les racines de $f(x) = 2x^2 + x - 3$.

On a $a =$ $b =$ $c =$ On note Δ le discriminant de f.

$\Delta =$ donc f a deux racines $x_1 =$ et $x_2 =$

Exercice G1. Déterminer, si elles existent, les racines de chaque trinôme :

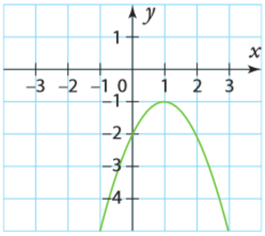
$f(x) = -2x^2 + 3x - 4$

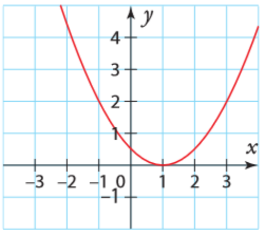
$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$

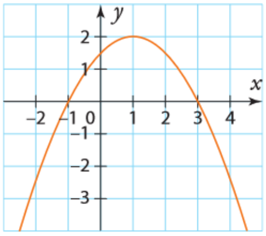
$h(x) = -x^2 - 2x + 35$

Second degré - 5

Exercice G2. Pour chaque trinôme représenté graphiquement, déterminer le signe de Δ

a) 

b) 

c) 

Remarque. Résoudre une équation de degré 2 de la forme $f(x) = 0$, c'est déterminer les racines de $f(x)$.

Exercice G3. Résoudre les équations suivantes :

$(A) \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0$

$(B) \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 = 0$

$(C) \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 5 = 0$

Méthode. Pour résoudre une équation de degré 2 de la forme $f(x) = g(x)$

- On soustrait $g(x)$ des deux côtés pour se ramener à une équation de la forme $h(x) = 0$.
- On détermine les racines du trinôme h.

Exercice G4. Résoudre les équations suivantes :

$(D) \Leftrightarrow 5x^2 + 4x + 6 = x^2 + 1$

$(E) \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 1 = x + 2$

$(F) \Leftrightarrow 3x^2 - 5x = x - 3$

Second degré - 6

Méthode. On n'a pas toujours besoin d'utiliser le théorème général pour trouver les racines. Par exemple :
- Si le trinôme est déjà factorisé, on utilise simplement le fait que $A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$.
- Si le trinôme n'a pas de terme constant, on peut factoriser par x
- Si le trinôme n'a pas de terme médian, on peut utiliser l'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

Exercice G5. Résoudre les équations suivantes

$(I) \Leftrightarrow (x - 3)(x + 6) = 0$

$(J) \Leftrightarrow 7(10x - 5)(3 - x) = 0$

$(K) \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0$

$(L) \Leftrightarrow 2x^2 = 8x$

$(M) \Leftrightarrow x^2 = 36$

$(N) \Leftrightarrow 9x^2 = 7$

Second degré - 7

Problèmes.

Exercice 1. On considère la parabole d'équation $y = 2x^2 + 2x - 1{,}5$

1. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole.
2. Déterminer l'équation de l'axe de symétrie de la parabole.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la parabole avec l'axe des ordonnées.
4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.
5. Déterminer le nombre de points d'intersection de la parabole avec la droite d'équation

$y = 2x - 1$. Préciser leurs coordonnées.

Exercice 2. Une personne s'est pesée toutes les semaines pendant un an. Sa courbe de poids peut être modélisée par une fonction polynôme de degré 2 dont l'expression est $f(x) = 0{,}008x^2 - 0{,}4x + 75$ où x correspond au temps en semaines à partir du premier janvier.

$x \in [0; 52]$.

1. Dresser le tableau de variations de f
2. En utilisant cette modélisation, répondre aux questions suivantes

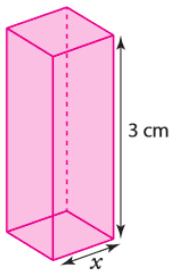
a) Quel était son poids maximal sur l'année ? Quand a-t-il été atteint ?

b) Quel était son poids minimal sur l'année ?

Quand a-t-il été atteint ?

Exercice 3. Déterminer deux nombres entiers consécutifs dont la somme des carrés est égale à 4141

Exercice 4. On considère un parallélépipède rectangle à base carrée, de côté x et de hauteur 3 cm.



1. Exprimer la surface totale du parallélépipède en fonction de x.
2. Quelle est la valeur de cette surface lorsque $x = 1$ cm ?
3. Pour quelle valeur de x cette aire est-elle égale à $100\ \mathrm{cm}^2$?

Exercice 5. Un groupe d'amis décide de fêter Noël. Chacun offre un cadeau à toutes les personnes présentes sauf à elle-même. On compte 210 cadeaux. Combien y a-t-il de personnes ?

Exercice 6. Une entreprise produit entre 0 et 50 balançoires par jour. Le coût de fabrication de x balançoires, en euros, est donné par la fonction suivante : $f(x) = x^2 + 230x + 325$. Chaque balançoire est vendue 300€, et toute la production est vendue.

1. Exprimer le bénéfice $B(x)$ réalisé par l'entreprise en fonction de x.
2. Étudier les variations de la fonction B.
3. En déduire le bénéfice maximal réalisé par l'entreprise.
4. Combien de balançoires l'entreprise doit-elle produire et vendre pour être rentable ?

Exercice 7. Un parachutiste saute d'un avion sans vitesse initiale. Dans cet exercice, nous négligerons les frottements de l'air. Avant de déployer son parachute, son altitude en mètres est donnée par la fonction suivante :

$$h(t) = -4{,}9t^2 + 3500$$

où t désigne le temps en secondes.

1. À quelle altitude était l'avion au moment du saut ?
2. Le parachute doit être déployé à une altitude de 1500 m. Au bout de combien de temps le parachutiste doit-il déployer son parachute ?