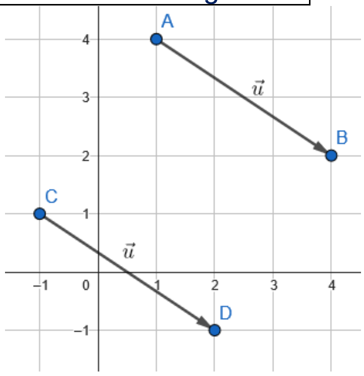
Vecteurs du plan

Hypothèse. On suppose que chaque point du plan correspond à la donnée de deux réels x et y qui représentent sa position. Les deux réels x et y sont appelés **coordonnées canoniques** du point.

Définition. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on note $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$ le point du plan de coordonnées x et y.
Définition. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on définit un objet noté $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$, appelé **vecteur du plan** de coordonnées x et y.

Définition. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur du plan.
$\vec{u}$ représente la translation « se déplacer de x unités vers la droite/gauche et de y unités vers le haut/bas ».
On représente le vecteur $\vec{u}$ par une flèche qui va à droite/gauche de x unités et en haut/bas de y unités.
Visuellement, deux vecteurs sont identiques s'ils pointent dans la même direction, et ont la même longueur.

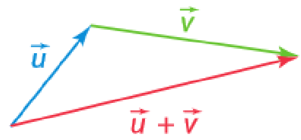


Exemple. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ représente l'idée : « se déplacer de 3 unités à droite et 2 unités vers le bas ». Sur l'image, $A + \vec{u} = (1; 4) + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = (1 + 3; 4 - 2) = (4; 2) = B$. De même, $C + \vec{u} = (-1; 1) + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = D$. Les 2 flèches représentent le même vecteur $\vec{u}$.

Pour tout point $M = (x_M; y_M)$, on note $\boldsymbol{M + \vec{u}} = (x_M + x; y_M + y)$
Si on fait partir la flèche $\vec{u}$ depuis M, alors le point au bout de la flèche est $M + \vec{u}$.
Un vecteur est une flèche dont la position précise est sans importance.

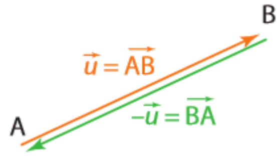
Définition. On note $\vec{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ le **vecteur nul**. Il représente la translation « immobile »

Définition. Pour tous $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\vec{u} + \vec{v}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.
Additionner des vecteurs, c'est appliquer des translations successivement.

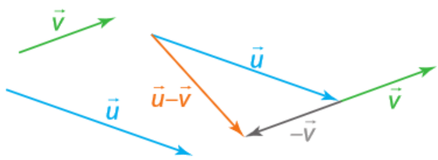


Visuellement il suffit de les mettre bout à bout. (car $M + (\vec{u} + \vec{v}) = (M + \vec{u}) + \vec{v}$)
Exemple. $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Définition. Pour tout $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{-\vec{u}} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.
Le vecteur opposé a la même longueur mais pointe dans la direction opposée.

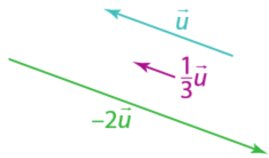


Définition. Pour tous $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\vec{u} - \vec{v}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$
$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ donc soustraire un vecteur, c'est additionner son opposé.



Exemples. $-\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

Définition. Pour tout $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et tout réel k, $\boldsymbol{k\vec{u}} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$
Multiplier un vecteur par $k \geq 0$, c'est multiplier sa longueur par k sans changer de sens.
Multiplier un vecteur par $k < 0$, c'est multiplier sa longueur par $|k|$ et inverser son sens



Exemple. $3\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \end{pmatrix}$

Propriétés algébriques. Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tous réels k et k' :

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$
- $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $0\vec{u} = \vec{0}$

Définition. Etant donnés deux points $A = (x_A; y_A)$ et $B = (x_B; y_B)$ on note $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ représente la translation qui déplace notamment le point A au point B, car $A + \overrightarrow{AB} = B$.
La flèche représentant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donc souvent tracée du point A au point B.
Exemple. Si $A = (-1; 2)$ et $B = (0; -4)$, alors $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Propriété. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ssi $ABDC$ est un parallélogramme. (Attention à l'ordre des lettres).

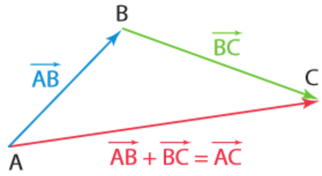
Propriété. Pour tous points A, B on a $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Propriété. Pour tout point A, on a $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Propriétés. Soit un vecteur $\vec{u}$.

Pour tout point A, on peut écrire $\vec{u}$ sous la forme $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ pour un certain point B.

Pour tout point A, on peut écrire $\vec{u}$ sous la forme $\vec{u} = \overrightarrow{CA}$ pour un certain point C.



Propriété. Relation de Chasles.
Soit A, B, C trois points. Alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Attention, $AB + BC \geq AC$.

Exemple. $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{DD} = \vec{0}$.

Définition. M est le milieu d'un segment $[AB]$ ssi $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ ssi $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ssi $x_M = \frac{x_A+x_B}{2}$ et $y_M = \frac{y_A+y_B}{2}$

Exemple. Si $A = (3; 5)$ et $B = (9; -1)$ alors le milieu de $[AB]$ est le point $M = \left(\frac{3+9}{2}; \frac{5+(-1)}{2}\right) = (6; 2)$

Définition. La **longueur d'un vecteur** $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, notée $\|\vec{u}\|$ et lue « **norme de $\vec{u}$** » est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Définition. La **longueur d'un segment** $[AB]$ est $\boldsymbol{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| = \left\| \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Exemple. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$. $\vec{u}$ est de longueur 5.

Remarque. A ce stade, on peut techniquement définir, la **longueur d'une courbe**, puis **l'angle géométrique** entre deux vecteurs comme la longueur de l'arc du cercle de rayon 1 qu'ils délimitent.

Définition. Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires**, s'ils forment un angle nul ou plat.

Définition. Deux vecteurs non nuls sont **orthogonaux**, s'ils forment un angle droit.

Définition. Un **repère** $R = (O\,; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$ désigne la donnée d'un point O et de vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ non colinéaires.

Définition. On note $\boldsymbol{R_0} = \left((0; 0); \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ le **repère canonique**. Jusqu'ici, on a toujours utilisé R_0.

Remarque. Quand on change de repère R, les coordonnées d'un vecteur ou d'un point changent.
Cependant, les définitions et formules précédentes restent valables, si on les écrit dans un même repère R.

Définition. Un **repère** $R = (O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ est **orthogonal** si $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux.

Définition. Un **repère** $R = (O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ est **orthonormé** si $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux et de longueur 1 dans R_0.

Propriété. Les longueurs, aires et angles géom. ne changent pas si on change de repère orthonormé.

Propriété. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** ssi il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Exemple. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. (ou ce qui revient au même $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix}$)

Définition. Le **déterminant** de deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_R$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_R$ est $\mathbf{det}(\vec{\boldsymbol{u}}; \vec{\boldsymbol{v}}) = xy' - x'y$.

Exemple. Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, alors $\det(\vec{u}; \vec{v}) = (3)(-1) - (1)(2) = -3 - 2 = -5$.

Propriété. Dans un repère orthonormé, l'aire du parallélogramme formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut $|\det(\vec{u}; \vec{v})|$

Propriété. Deux vecteurs sont colinéaires ssi leur déterminant est nul. (dans n'importe quel repère R)

Exemple. $\det\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix}\right) = (3)(-6) - (2)(-9) = 18 - (-18) = 0$ donc $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix}$ sont bien colinéaires.

Propriété. Deux droites (AB) et (MN) sont parallèles ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires ssi $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{MN}) = 0$.

Propriété. Trois points distincts A, B et C sont alignés ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ssi $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$.

Exemple. Les points $A = (1; 3)$, $B = (2; 6)$ et $C = (3; 9)$ sont-ils alignés ?

$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \det\left(\begin{pmatrix} 2-1 \\ 6-3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3-1 \\ 9-3 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}\right) = 1 \times 6 - 2 \times 3 = 0$. Donc A, B et C sont alignés.