# Dérivation et composée

**Dérivées de référence**. A chaque ligne, $f$ est définie et vaut l'expression de la 2ème colonne *sur tout* $D_f$. On déduit : $f$ est dérivable sur $D_{f'}$, et $f'(x)$ vaut l'expression dans la 3ème colonne *sur tout* $D_{f'}$

| $D_f$ | $f(x)$ | $f'(x)$ | $D_{f'}$ | Conditions |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | $c$ | $0$ | $\mathbb{R}$ | $c \in \mathbb{R}$ |
| $\mathbb{R}$ | $x$ | $1$ | $\mathbb{R}$ | |
| $\mathbb{R}$ | $ax$ | $a$ | $\mathbb{R}$ | $a \in \mathbb{R}$ |
| $\mathbb{R}$ | $ax+b$ | $a$ | $\mathbb{R}$ | $a, b \in \mathbb{R}$ |
| $\mathbb{R}$ | $x^2$ | $2x$ | $\mathbb{R}$ | |
| $\mathbb{R}$ | $x^3$ | $3x^2$ | $\mathbb{R}$ | |
| $\mathbb{R}$ | $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ | $n \in \mathbb{N}, n > 0$ |
| $\mathbb{R}^*$ | $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}^*$ | $n \in \mathbb{Z}, n < 0$ |
| $\mathbb{R}^*$ | $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ | |
| $\mathbb{R}_+$ | $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\mathbb{R}_+^*$ | |
| $\mathbb{R}$ | $e^x$ | $e^x$ | $\mathbb{R}$ | |

**Opérations sur les dérivées**. A chaque ligne :
- On suppose que $u$ et $v$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, et dérivables sur un intervalle $I$.
- On déduit que $f$ est définie et dérivable sur $I$.

| $f$ | $f'$ | Conditions |
|---|---|---|
| $u+v$ | $(u+v)' = u' + v'$ | |
| $u-v$ | $(u-v)' = u' - v'$ | |
| $a \times u$ | $(a \times u)' = a \times u'$ | $a \in \mathbb{R}$ |
| $u \times v$ | $(uv)' = u'v + v'u$ | |
| $\frac{1}{v}$ | $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$ | $v: I \to \mathbb{R}^*$ <br> <u>$v$ ne s'annule pas sur $I$.</u> |
| $\frac{u}{v}$ | $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ | $v: I \to \mathbb{R}^*$ <br> <u>$v$ ne s'annule pas sur $I$.</u> |
| $e(i(x))$ | $e'(i(x)) \times i'(x)$ | $i: I \to J$ et $e: J \to \mathbb{R}$ |
| $e^u$ | $(e^u)' = u'e^u$ | |

**Propriété**. **Dérivée de la composée.**
Soit $i: I \to J$ une fonction dérivable et $e: J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, où $I$ et $J$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$.
Alors la fonction $f: x \mapsto e(i(x))$ est dérivable sur $I$ et sa dérivée est $f'(x) = e'(i(x)) \times i'(x)$

$$\big(\text{exterieur}(\text{interieur})\big)' = \text{exterieur}'(\text{interieur}) \times \text{interieur}'$$

**Exemple**. Calculer la dérivée de $f(x) = (3x+5)^{10}$
$f(x) = e(i(x))$ avec $i(x) = 3x+5$ et $e(x) = x^{10}$. $i'(x) = 3$ et $e'(x) = 10x^9$
Donc $f'(x) = e'(i(x)) \times i'(x) = 10(i(x))^9 \times 3 = 30(3x+5)^9$

**Exemple**. Calculer la dérivée de $f(x) = \sqrt{4x+2}$
$f(x) = e(i(x))$ avec $i(x) = 4x+2$ et $e(x) = \sqrt{x}$. $i'(x) = 4$ et $e'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Donc $f'(x) = e'(i(x)) \times i'(x) = \frac{1}{2\sqrt{i(x)}} \times 4 = \frac{4}{2\sqrt{4x+2}} = \frac{2}{\sqrt{4x+2}}$

**Exemple**. Calculer la dérivée de $f(x) = e^{-7x^2+2}$
$f(x) = e(i(x))$ avec $i(x) = -7x^2+2$ et $e(x) = e^x$. $i'(x) = -7 \times 2x = -14x$ et $e'(x) = e^x$.
Donc $f'(x) = e'(i(x)) \times i'(x) = e^{(-7x^2+2)} \times (-14x) = -14x\, e^{-7x^2+2}$

**Exemple**. Sur quel intervalle $I$ la dérivée de $f(x) = \sqrt{4x+2}$ est-elle définie ?
$f(x) = e(i(x))$ avec $i(x) = 4x+2$ et $e(x) = \sqrt{x}$
$e$ n'est dérivable que sur $J = ]0; +\infty[ = \mathbb{R}_+^*$. $i(x)$ doit donc être à valeurs dans $J$.
On résout $i(x) \in J \Leftrightarrow 4x+2 > 0 \Leftrightarrow 4x > -2 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{4} \Leftrightarrow x > -0{,}5 \Leftrightarrow x \in ]-0{,}5; +\infty[$
Donc on doit choisir $I = ]-0{,}5; +\infty[$ pour que $i: I \to J$ et que $f$ soit dérivable sur $I$.