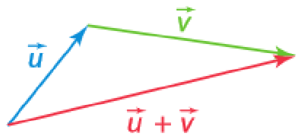
Géométrie repérée

Hypothèse. Dans tout ce qui suit, on se place dans un repère $(O;I;J)$.

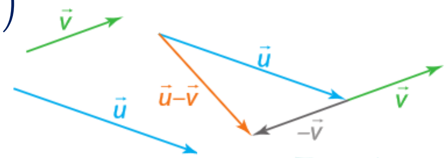
Définition. Soit $\vec{u}=\binom{x}{y}$ un vecteur du plan. On représente le vecteur $\vec{u}$ par une flèche.
$\vec{u}$ représente la translation « se déplacer de x unités vers la droite/gauche et de y unités vers le haut/bas ».
Visuellement, deux vecteurs sont égaux s'ils pointent dans la même direction, et ont la même longueur.

Définition. Soit $\vec{u}=\binom{x}{y}$ et $\vec{v}=\binom{x'}{y'}$. On pose $\boldsymbol{\vec{u}+\vec{v}}=\binom{x}{y}+\binom{x'}{y'}=\binom{x+x'}{y+y'}$.



Additionner des vecteurs, c'est appliquer des translations successivement.

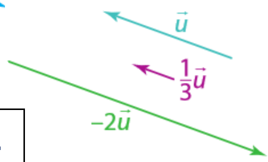
Définition. Soit $\vec{u}=\binom{x}{y}$ et $\vec{v}=\binom{x'}{y'}$. On pose $\boldsymbol{\vec{u}-\vec{v}}=\binom{x}{y}-\binom{x'}{y'}=\binom{x-x'}{y-y'}$



$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$ donc soustraire un vecteur, c'est additionner son opposé.

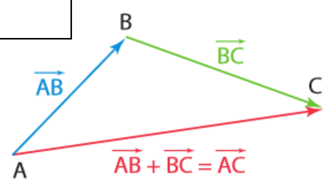
Définition. Soit $\vec{u}=\binom{x}{y}$ et k un réel. On pose $\boldsymbol{k\vec{u}}=k\binom{x}{y}=\binom{kx}{ky}$

Multiplier un vecteur par $k\geq 0$, c'est multiplier sa longueur par k.
Multiplier un vecteur par $k<0$, c'est multiplier sa longueur par $|k|$ et inverser son sens.



Définition. Etant donnés deux points $A=(x_A;y_A)$ et $B=(x_B;y_B)$ on note $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}}=\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ représente la translation qui déplace notamment le point A au point B

Propriété. **Relation de Chasles.**
Soit A,B,C trois points. Alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Attention, $AB+BC\geq AC$.



Définition. La **longueur d'un vecteur** $\vec{u}=\binom{x}{y}$, notée $\|\boldsymbol{\vec{u}}\|$ et lue « **norme de $\vec{u}$** » est $\|\boldsymbol{\vec{u}}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Définition. La **longueur d'un segment** $[AB]$ est $\boldsymbol{AB}=\|\overrightarrow{AB}\|=\left\|\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A}\right\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Définition. M est le **milieu d'un segment** $[AB]$ ssi $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
Propriété. Les coordonnées du milieu M d'un segment $[AB]$ sont $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}$ et $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$

Exemple. Si $A=(3;5)$ et $B=(9;-1)$ alors le milieu de $[AB]$ est le point $M=\left(\frac{3+9}{2};\frac{5+(-1)}{2}\right)=(6;2)$

Définition. Une **équation** est l'expression d'une égalité, par exemple « $2y^2-7x=4$ ».
Définition par l'exemple. Un point $(2;-3)$ **vérifie l'équation** « $2y^2-7x=4$ » car $2(-3)^2-7\times(2)=4$
Exemples. Le point $(2;3)$ vérifie aussi l'équation car $2\times(3)^2-7\times(2)=4$
Le point $(5;1)$ ne vérifie pas l'équation car $2\times(1)^2-7\times(5)=-33\neq 4$.
Remarque. Une <u>équation</u> à *deux* variables réelles, correspond donc toujours à un <u>ensemble de points</u> du *plan* : L'ensemble de tous les points qui rendent l'équation <u>vraie</u>.

Propriété. Toute droite du plan d peut être décrite comme l'ensemble des points $(x;y)$ du plan vérifiant une équation de la forme « $ax+by+c=0$ » où $a,b,c\in\mathbb{R}$ et a et b ne sont pas tous les deux nuls.
Définition. L'expression « $ax+by+c=0$ » est **<u>une</u> équation cartésienne de la droite $\boldsymbol{d}$.**
Remarque. Un point $M=(x;y)$ du plan vérifie : $M\in d \iff ax+by+c=0$

Idée. 2 vecteurs non nuls sont colinéaires s'ils sont alignés dans le même sens ou dans des sens opposés
Définition. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** ssi il existe un <u>réel</u> k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.
Exemple. $\binom{3}{2}$ et $\binom{-9}{-6}$ sont colinéaires car $\binom{-9}{-6}=-3\binom{3}{2}$. (ou ce qui revient au même $\binom{3}{2}=-\frac{1}{3}\binom{-9}{-6}$)

Idée. Un vecteur directeur d'une droite, est un vecteur aligné avec la droite dans un sens ou l'autre.
Définition. $\vec{u}$ est un **vecteur directeur de la droite $(\boldsymbol{AB})$** ssi $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Définition. Le **déterminant** de deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est $\mathbf{det}(\vec{\boldsymbol{u}}; \vec{\boldsymbol{v}}) = xy' - x'y$.

Exemple. Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, alors $\det(\vec{u}; \vec{v}) = (3)(-1) - (1)(2) = -3 - 2 = -5$.

Propriété. Dans un repère orthonormé, l'aire du parallélogramme formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut $|\det(\vec{u}; \vec{v})|$

Propriété. Deux vecteurs sont colinéaires ssi leur déterminant est nul. (dans n'importe quel repère)

Exemple. $\det\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix}\right) = (3)(-6) - (2)(-9) = -18 + 18 = 0$ donc $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix}$ sont bien colinéaires.

Propriété. Trois points distincts A, B et C sont alignés ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ssi $\det\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = 0$.

Exemple. Les points $A = (1; 3)$, $B = (2; 6)$ et $C = (3; 9)$ sont-ils alignés ?

$\det\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 2-1 \\ 6-3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3-1 \\ 9-3 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}\right) = 1 \times 6 - 2 \times 3 = 0$. Donc A, B et C sont alignés.

Propriété. Un vecteur directeur d'une droite d d'équation cartésienne « $ax + by + c = 0$ » est $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Exemple. La droite d'équation cartésienne « $4x - 5y + 2 = 0$ » admet comme vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Propriété. Deux droites d'équations cartésiennes « $ax + by + c = 0$ » et « $a'x + b'y + c' = 0$ » sont parallèles ssi $\det\left(\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}\right) = 0$ (Leurs vecteurs directeurs sont colinéaires)

Exemple. Les droites $3x + 2y - 5 = 0$ et $-6x - 4y = 0$ sont parallèles car $\det\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}\right) = 0$

Remarque. Deux droites (AB) et (MN) sont parallèles ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires ssi $\det\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{MN}\right) = 0$.

Propriété. Etant donnés un point A et un vecteur $\vec{u}$ non nul, il existe une unique droite d passant par le point A et ayant pour vecteur directeur $\vec{u}$.

Exemple. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A = (-1; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit $M = (x; y)$ un point du plan.

$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\vec{u} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}; \vec{u}\right) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{pmatrix} x+1 \\ y-3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(1) - (y-3)(-2) = 0$

$M \in d \Leftrightarrow x + 1 + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 5 = 0$. Donc une équation de d est $x + 2y - 5 = 0$.

Déf. « $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ » est un **système linéaire de 2 équations à 2 inconnues.** $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$

Théorème. Un tel système a : soit une seule solution, soit aucune solution, soit une infinité de solutions. Résoudre un tel système revient à chercher les coordonnées du point d'intersection, s'il y en a un, des deux droites dont les équations sont celles du système. On le résout par substitution ou par combinaison.

- Le système admet un seul couple solution ssi les deux droites sont sécantes ($\det\left(\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}\right) \neq 0$)
- Le système admet aucune solution ssi les deux droites sont parallèles non confondues.
- Le système admet une infinité de solutions ssi les deux droites sont parallèles confondues.

Propriété. Equation cartésienne d'un cercle.
Le cercle C de centre le point $(a; b)$, de rayon $r > 0$ admet pour équation « $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ »

Exemple. Une équation du cercle de centre $(1; -2)$ et de rayon 3 est $(x - 1)^2 + (x + 2)^2 = 9$.

Exemple. $(x - 1)^2 + (x + 2)^2 = -1$ n'est pas un cercle. L'équation n'est jamais vérifiée car un carré est ≥0

Exemple. Déterminer l'ensemble des points du plan vérifiant l'équation $(E) : x^2 + 6x + y^2 - 4y = 3$.

On met sous forme canonique $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$. De même $y^2 - 4y = (y - 2)^2 - 4$. Ainsi :

$(E) \Leftrightarrow (x + 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 = 3 \Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y - 2)^2 - 13 = 3 \Leftrightarrow \left(x - (-3)\right)^2 + (y - 2)^2 = 16$

Donc l'ensemble cherché est un cercle de centre $(-3; 2)$ et de rayon $\sqrt{16} = 4$