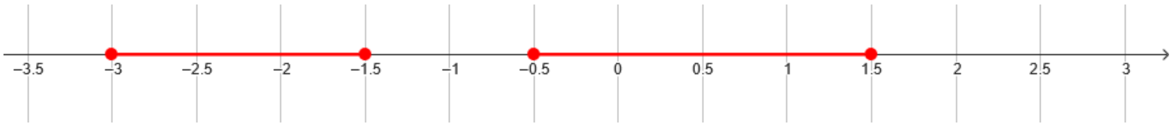
Intervalles - 1

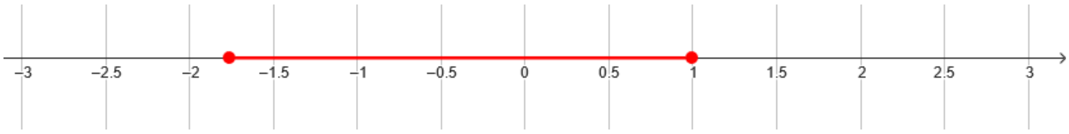
A. Comprendre la notion d'intervalle.

- On peut représenter les nombres réels sur un axe gradué.
- Pour représenter un *ensemble* de nombres, on peut colorier une ou plusieurs parties de l'axe.



Définition. Un **intervalle** est un *ensemble continu* de nombres réels.

Exemple. L'ensemble colorié ci-dessous des nombres entre $-1{,}75$ et 1 est un intervalle car il n'a qu'une partie.

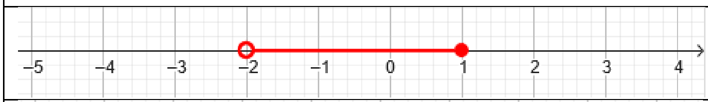
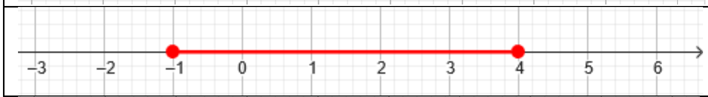
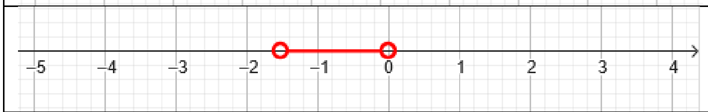
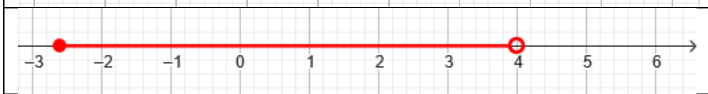
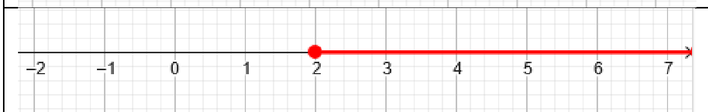
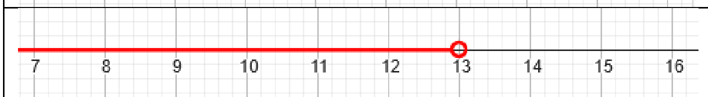
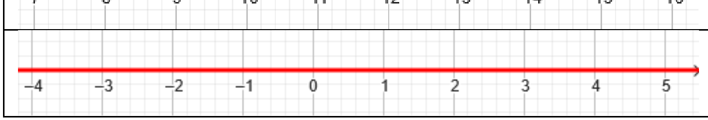


- Un intervalle est délimité par *deux* valeurs, appelées **borne inférieure**, et **borne supérieure**. (Ici $-1{,}75$ et 1)
- Chacune des deux bornes peut être soit incluse, soit exclue, et peut être soit finie, soit infinie : ∞

B. Désigner ou représenter un intervalle.

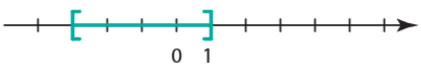
Méthode. Pour désigner un intervalle à partir de sa représentation :
- On commence par écrire : *borne inférieure ; borne supérieure*
- On entoure avec des crochets tournés vers l'intérieur si la borne est incluse, vers l'extérieur sinon.

Exemples.

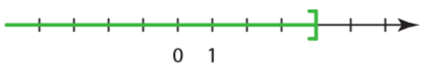
Schéma	Intervalle	Borne inf.	Borne sup.
	$]-2\,;1]$	-2 est exclus	1 est inclus
	$[-1\,;4]$	-1 est inclus	4 est inclus
			
			
	$[2\,;\infty[$	2 est inclus	∞ est exclus
			
			

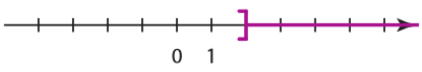
- L'intervalle $]-\infty\,;\infty[$ contient tous les nombres réels. C'est donc l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}=]-\infty\,;\infty[$

Exercice B1. Ecrire les intervalles correspondants :

a) 

b) 

c) 

d) 

Exercice B2. Représenter sur une *même* droite graduée les intervalles suivants avec 4 couleurs :

a) $]1\,;4]$ b) $[-0{,}5\,;3]$
c) $]-\infty\,;2]$ d) $[0\,;+\infty[$

Exercice B3. Vrai ou faux

(a) $3 \in [1\,;5[$ (b) $2 \in [2\,;4]$
(c) $2 \in]2\,;3]$ (d) $6 \in]-\infty\,;5]$

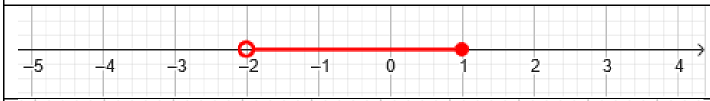
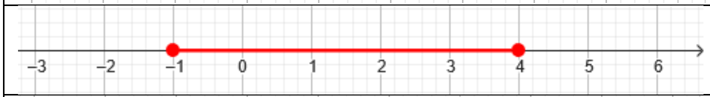
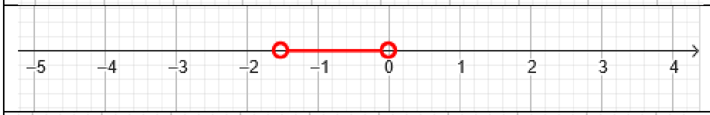
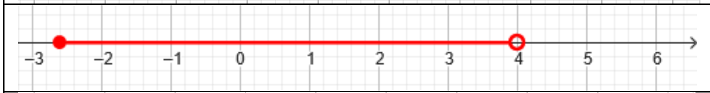
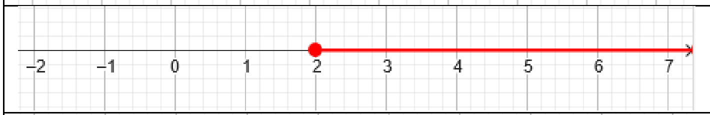
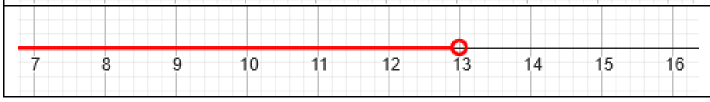
Intervalles - 2

C. <u>Traduire l'appartenance à un intervalle par une inégalité et réciproquement.</u>

Méthode. Pour traduire l'appartenance d'un nombre x à un intervalle, en une inégalité :

- On peut commencer par écrire : *borne inférieure* $<x<$ *borne supérieure*
- Si un crochet est tourné vers l'intérieur (si sa borne est incluse), on ajoute un trait sous le signe $<$ qui devient $\leq$
- Si une des bornes est infinie, on n'écrit qu'une inégalité simple. (Un nombre x vérifie toujours $-\infty<x$ et $x<\infty$.)

Exemples.

Schéma	Ecrire :		Revient à écrire :
	$x \in]-2\,;1]$	$\Leftrightarrow$	$-2<x\leq 1$
	$x \in [-1\,;4]$	$\Leftrightarrow$	$-1\leq x\leq 4$
		$\Leftrightarrow$	
		$\Leftrightarrow$	
	$x \in [2\,;\infty[$	$\Leftrightarrow$	$2\leq x$ $(2\leq x<\infty)$
		$\Leftrightarrow$	

Méthode. Pour traduire une inégalité sur un nombre x, en l'appartenance de x à un intervalle :

- On peut commencer par écrire : $x \in$ *borne inférieure* ; *borne supérieure*
- Si une inégalité est stricte $<$ on met un crochet vers l'extérieur. Si elle est large $\leq$ on met un crochet vers l'intérieur.
- S'il n'y a qu'une inégalité simple, la borne manquante est ∞ ou $-\infty$ (suivant qu'elle est supérieure ou inférieure).

Exemple. Traduire l'inégalité par l'appartenance à un intervalle. $5<x\leq 7$ $\Leftrightarrow$

Exercice C1. Traduire chaque appartenance par une inégalité.

(a) $x \in [0\,;2[$ $\Leftrightarrow$

(b) $y \in]-5\,;3]$ $\Leftrightarrow$

(c) $2+z \in [0\,;3]$ $\Leftrightarrow$

(d) $a \in]-\infty\,;\,5{,}88]$ $\Leftrightarrow$

(e) $b \in]-3{,}5\,;\,\infty[$ $\Leftrightarrow$

Exercice C2. Traduire chaque inégalité par l'appartenance à un intervalle.

(a) $3\leq x\leq 6$ $\Leftrightarrow$

(b) $-5{,}2<y\leq 2$ $\Leftrightarrow$

(c) $1\leq x-2<3$ $\Leftrightarrow$

(d) $c\leq -5$ $\Leftrightarrow$

(e) $2<z$ $\Leftrightarrow$

Intervalles - 3

D. Représenter et simplifier l'intersection de deux intervalles

Définition. L'intersection des intervalles I et J est l'ensemble noté $\boldsymbol{I \cap J}$ des nombres qui appartiennent à I *et* à J.

Méthode. Pour représenter *l'intersection* de deux intervalles :
- Sur un axe gradué, on colorie les deux intervalles avec deux couleurs différentes.
- L'intersection est l'ensemble des points coloriés par les deux couleurs à la fois.

Exemple. Représenter puis simplifier $A =]3; 6[\cap [4; 8[$

Exercice D1. Représenter puis simplifier :

(a) $A = [-4; 5] \cap [0; 10]$

(b) $B =]-5; 2] \cap [4; 7]$

(c) $C = [10; 20[\cap [0; 15[$

(d) $D = [0; 8[\cap]2; 5]$

E. Simplifier des inégalités séparées par des « et »

Exemple. Traduire $-3 \leq x < 0$ et $-2 < x < 5$ avec une intersection d'intervalles. Représenter puis simplifier.

$-3 \leq x < 0$ et $-2 < x < 5$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$

Exercice E1. Simplifier.

(a) $3 < x < 10$ et $2 \leq x \leq 5$ $\Leftrightarrow$

(b) $4 \leq a \leq 8$ et $5 < a < 9$ $\Leftrightarrow$

(c) $-5 \leq b \leq 2$ et $-10 < b < 2$ $\Leftrightarrow$

(d) $-2 < z < -1$ et $3 \leq z < 5$ $\Leftrightarrow$

(e) $0 < x < 1$ et $-2 \leq x \leq 2$ $\Leftrightarrow$

Intervalles - 4

F. Représenter et simplifier l'union de deux intervalles

Définition. **L'union** des intervalles I et J est l'ensemble noté $\boldsymbol{I \cup J}$ des nombres qui appartiennent à I *ou* à J.

Méthode. Pour représenter *l'union* de deux intervalles : • Sur un axe gradué, on colorie les deux intervalles. • L'union est l'ensemble des points coloriés. Ce n'est pas forcément un intervalle.

Exemple. Représenter puis simplifier $A =]3;6[\cup [4;8[$

Exercice F1. Représenter puis simplifier *si possible* :

(a) $A = [-4;5] \cup [0;10]$

(b) $B =]-5;2] \cup [4;7]$

(c) $C = [10;20[\cup [0;15[$

(d) $D = [0;8[\cup]2;5]$

G. Simplifier des inégalités séparées par des « ou »

Exemple. Traduire $-3 \leq x < 0$ ou $-2 < x < 5$ avec une union d'intervalles. Représenter puis simplifier.

$-3 \leq x < 0$ ou $-2 < x < 5 \quad \Leftrightarrow \qquad\qquad \Leftrightarrow$

Exercice G1. Traduire chaque affirmation par l'appartenance à une union. Simplifier *si possible*.

(a) $3 < x < 10$ ou $2 \leq x \leq 5 \quad \Leftrightarrow$

(b) $-5 \leq b \leq 2$ ou $-10 < b < 2 \quad \Leftrightarrow$

(c) $-2 < z < -1$ ou $3 \leq z < 5 \quad \Leftrightarrow$

(d) $0 < x < 1$ ou $-2 \leq x \leq 2 \quad \Leftrightarrow$