A. Calculer le produit scalaire de deux vecteurs

Définition. Dans un repère <u>orthonormé</u>, si $\vec{u} = \binom{x}{y}$ et $\vec{v} = \binom{x'}{y'}$, alors on appelle **produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$** et on note $\vec{u}\cdot\vec{v}$ le <u>nombre</u> défini par $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$

Exemple. Le produit scalaire de $\vec{u} = \binom{2}{3}$ et $\vec{v} = \binom{-3}{-5}$ est $\vec{u}\cdot\vec{v} = (2)\times(-3) + (3)\times(-5) = -21$

Attention le produit scalaire $\cdot$ n'est <u>pas une multiplication</u>. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des *vecteurs* et <u>pas des nombres</u>.

Exercice A1. Calculer les produits scalaires suivants :

a) Si $\vec{u} = \binom{3}{5}$ et $\vec{v} = \binom{2}{-5}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} =$

b) $\binom{-2}{3}\cdot\binom{4}{-1} =$

c) $\binom{0{,}5}{-4}\cdot\binom{-3}{-2{,}5} =$

d) $\binom{-5}{-8}\cdot\binom{-3}{0} =$

e) $\binom{7}{0}\cdot\binom{0}{5} =$

B. Développer un produit scalaire

Propriété. Le produit scalaire est commutatif. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

Exemple. $\binom{-4}{3}\cdot\binom{2{,}5}{-1} = (-4)(2{,}5) + (3)(-1) = -13$ $\binom{2{,}5}{-1}\cdot\binom{-4}{3} = (2{,}5)(-4) + (-1)(3) = -13$

Propriété. Le produit scalaire $\cdot$ est distributif sur $+$.

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d}) = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{a}\cdot\vec{d} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{d}$$

Exemple. $\left(\binom{1}{0} + \binom{3}{-2}\right)\cdot\binom{2}{3} = \binom{1}{0}\cdot\binom{2}{3} + \binom{3}{-2}\cdot\binom{2}{3} = 2 + 0 + 6 - 6 = 2$

Propriété. Dans un produit scalaire, les constantes peuvent être sorties devant

$$\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = (k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

Exemple. $\binom{5}{-1}\cdot 5\binom{3}{-2} = 5\left(\binom{5}{-1}\cdot\binom{3}{-2}\right) = 5\times\big((5)(3) + (-1)(-2)\big) = 5(17) = 85$

Exercice B1. Développer les produits scalaires suivants :

1) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot 2\vec{w} =$

2) $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d}) =$

3) $(\vec{e}-\vec{f})\cdot(2\vec{e}+\vec{f}) =$

4) $(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})\cdot(-2\vec{v}) =$

C. Calculer la norme d'un vecteur

Rappel. La **norme** (ou longueur) d'un vecteur $\vec{u} = \binom{x}{y}$, est définie par $\|\vec{\boldsymbol{u}}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exemple. Soit $\vec{u} = \binom{3}{-4}$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$. $\vec{u}$ est de longueur 5.

Exercice C1. Calculer la norme de chacun des vecteurs suivants :

$\vec{a} = \binom{-2}{3}$ $\quad$ $\vec{b} = \binom{8}{-6}$

$\vec{c} = \binom{1}{1}$ $\quad$ $\vec{d} = \binom{-3}{-2}$

Exercice C2. Calculer :

$A = \left\|\binom{8}{6}\right\| =$ $\quad$ $B = \left\|\binom{8}{6}\right\|^2 =$

$C = \binom{8}{6} + \binom{8}{6} =$ $\quad$ $D = \binom{8}{6} \cdot \binom{8}{6} =$

$E = 6\binom{8}{6} =$ $\quad$ $F = \sqrt{\binom{8}{6} \cdot \binom{8}{6}} =$

D. Développer un carré scalaire ou le carré d'une norme

Propriété. Le carré scalaire est égal au carré de la norme. $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 = \|\vec{u}\|^2$

Exemple. $\binom{4}{-3} \cdot \binom{4}{-3} = (4)(4) + (-3)(-3) = 25$. Aussi $\left\|\binom{4}{-3}\right\|^2 = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2}^2 = (4)^2 + (-3)^2 = 25$

Attention : $\|\vec{u}\|$ est un nombre donc $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\|$. Mais dans $\vec{u} \cdot \vec{u}$ il s'agit du produit scalaire et pas de $\times$.

Corollaire. La norme d'un vecteur est la racine de son carré scalaire. $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exercice D1. Soit $\vec{u} = \binom{-2}{4}$ et $\vec{v} = \binom{1}{-5}$. Calculer

$\vec{u} + \vec{v} =$

$\|\vec{u}\|^2 =$ $\quad$ $\|\vec{v}\|^2 =$ $\quad$ $\vec{u} \cdot \vec{v} =$

$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} =$

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 =$

Propriétés.

- $1^{\text{ère}}$ identité remarquable vectorielle. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $2^{\text{ème}}$ identité remarquable vectorielle. $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $3^{\text{ème}}$ identité remarquable vectorielle. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Démonstration.

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \left\|\binom{x}{y} + \binom{x'}{y'}\right\|^2 = \left\|\binom{x + x'}{y + y'}\right\|^2 =$

$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \left\|\binom{x}{y} - \binom{x'}{y'}\right\|^2 = \left\|\binom{x - x'}{y - y'}\right\|^2 =$

$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) =$

E. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k$

Méthode. On note I le milieu du segment $[AB]$.

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)=\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2=MI^2-IA^2$

Donc $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k \Leftrightarrow MI^2-IA^2=k \Leftrightarrow MI^2=k+IA^2$

- Si $k+IA^2>0$ alors $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k \Leftrightarrow MI=\sqrt{k+IA^2}$. E est le cercle de centre I de rayon $\sqrt{k+IA^2}$
- Si $k+IA^2=0$ alors $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k \Leftrightarrow MI^2=0 \Leftrightarrow MI=0$. E est l'ensemble constitué uniquement du point I.
- Si $k+IA^2<0$ alors $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k$ n'a pas de solutions. L'ensemble E est vide.

Exercice E1. Soit A et B deux points du plan distants de $10\ cm$.

1) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=5$

2) Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-25$

3) Déterminer l'ensemble $\mathcal{G}$ des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-60$

F. Déterminer si deux vecteurs sont colinéaires par calcul

Propriété. Dans un repère quelconque,
deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

$$\vec{u}\parallel\vec{v} \Leftrightarrow \det(\vec{u};\vec{v})=0$$

Exercice F1. Déterminer si les vecteurs sont colinéaires ou non :

1) $\vec{u}=\binom{3}{5}$ et $\vec{v}=\binom{1}{2}$

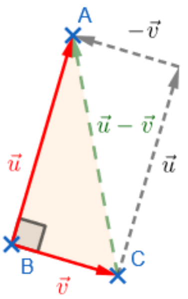
2) $\vec{a}=\binom{1}{-5}$ et $\vec{b}=\binom{-2}{10}$

3) $\vec{c}=\binom{-3}{4}$ et $\vec{d}=\binom{-6}{-10}$

G. Déterminer si deux vecteurs sont orthogonaux par calcul

Propriété. Dans un repère orthonormé,
deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$$



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\Leftrightarrow \|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow xx'+yy'=0$.

Exemple. Montrer que $\vec{u}=\binom{2}{-3}$ et $\vec{v}=\binom{-3}{-2}$ sont orthogonaux.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2)\times(-3)+(-3)\times(-2)=-6+6=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

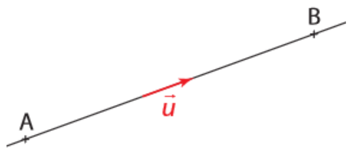
Exercice G1. Déterminer si les vecteurs sont orthogonaux ou non :

1) $\vec{u}=\binom{3}{5}$ et $\vec{v}=\binom{-10}{-6}$

2) $\vec{a}=\binom{4}{10}$ et $\vec{b}=\binom{-5}{2}$

3) $\vec{c}=\binom{-3}{4}$ et $\vec{d}=\binom{-6}{-10}$

H. Déterminer un vecteur directeur d'une droite



Définition. Un **vecteur directeur d'une droite** est un vecteur aligné avec la droite dans un sens ou l'autre.

Remarque. $\vec{u}$ est un **vecteur directeur de la droite** (AB) si $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Propriété. Un vecteur directeur d'une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Exemple. Donner un vecteur directeur de la droite $3y - 6x - 12 = 0$.

Propriété. Un vecteur directeur d'une droite passant par deux points A et B est $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Exemple. Donner un vecteur directeur de la droite passant par les points $S = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

I. Déterminer un vecteur normal à une droite

Définition. Un **vecteur normal à une droite** est un vecteur de direction perpendiculaire à la droite.

Remarque. $\vec{n}$ est un **vecteur normal à la droite** (AB) si $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.

Propriété. Un vecteur normal à une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Exemple. Donner un vecteur normal à la droite $3y - 6x - 12 = 0$.

Propriété. Un vecteur normal à une droite passant par deux points A et B est $\vec{n} = \begin{pmatrix} -(y_B - y_A) \\ x_B - x_A \end{pmatrix}$

Plus généralement un vecteur normal à un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $\vec{n} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

Exemple. Donner un vecteur normal à la droite passant par les points $S = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

J. Déterminer si deux droites sont parallèles par calcul

Méthodes. On peut utiliser au choix l'une des méthodes suivantes :
- On détermine un vecteur directeur de chaque droite et on compare leur déterminant à 0.
- On détermine un vecteur normal à chaque droite et on compare leur déterminant à 0.
- On détermine un vecteur directeur de l'une, un vecteur normal à l'autre, et on compare leur *produit scalaire* à 0.

Exercice J1. Déterminer si les droites sont parallèles :

Soit $A = (-2; 1), B = (3; 4), C = (2; 2), D = (5; 4)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

Soit $E = (0; 3),\ F = (2; 2),\ G = (1; -2),\ H = (-10\,; 3{,}5)$. Les droites (EF) et (GH) sont-elles parallèles ?

K. Déterminer si deux droites sont perpendiculaires par calcul

Méthodes. On peut utiliser au choix l'une des méthodes suivantes :
- On détermine un vecteur directeur de chaque droite et on compare leur produit scalaire à 0.
- On détermine un vecteur normal à chaque droite et on compare leur produit scalaire à 0.
- On détermine un vecteur directeur de l'une, un vecteur normal à l'autre, et on compare leur *déterminant* à 0.

Exercice K1. Déterminer si les droites sont perpendiculaires :
Soit $A = (-3\,;3)$, $B = (3\,;0)$, $C = (-3\,;-2)$, $D = (1\,;6)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ?

Soit $E = (1\,;5)$, $F = (-2;0)$, $G = (3;-10)$, $H = (-1;5)$. Les droites (EF) et (GH) sont-elles perpendiculaires ?

L. Calculer le projeté orthogonal d'un point sur une droite

Définition. Le **projeté orthogonal d'un point $\boldsymbol{M}$ sur une droite $\boldsymbol{d}$** est le point $H \in d$ tel que $(MH) \perp d$.

Si on connait deux points A et B de la droite d, c'est le point H tel que $\begin{cases} \det\left(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{AB}\right) = 0 \\ \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases}$

Si on connait l'équation $ax + by + c = 0$ de d, c'est le point H t.q. $\begin{cases} ax_H + by_H + c = 0 \\ \overrightarrow{MH} \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$ $\left(\text{ou } \det\left(\overrightarrow{MH};\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = 0\right)$

Exemple. Déterminer le projeté orthogonal H du point $M = (7;-1)$ sur la droite (AB) où $A = (1;1)$ et $B = (3;2)$.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} (3)-(1) \\ (2)-(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\det\left(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{AB}\right) = \begin{vmatrix} x_H - 1 & 2 \\ y_H - 1 & 1 \end{vmatrix} = (x_H - 1)(1) - (y_H - 1)(2)$

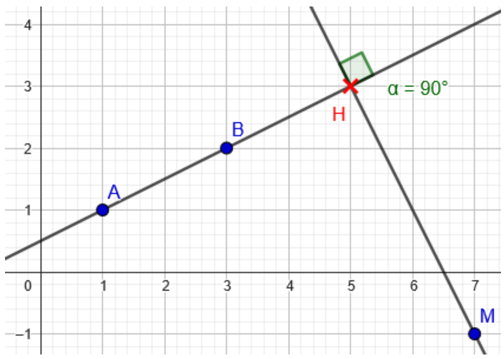
$\det\left(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{AB}\right) = x_H - 1 - 2y_H + 2 = x_H - 2y_H + 1$

$\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_H - (7) \\ y_H - (-1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (x_H - 7)(2) + (y_H + 1)(1)$

$\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{AB} = 2x_H - 14 + y_H + 1 = 2x_H + y_H - 13$

On résout $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + y - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$

Le projeté orthogonal de M sur (AB) est $H = (5;3)$.



Exercice L1. Calculer les projetés orthogonaux suivants :

1) Soit $A = (-2;-1)$, $B = (6;3)$, et $C = (2;6)$. Déterminer le projeté orthogonal H du point C sur la droite (AB)