

Equations produit nul, quotient nul - 1

A. Résoudre une équation produit nul

Propriété. Un produit est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul.

Symboliquement : $AB = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$

Méthode. Pour résoudre une équation produit nul :

- On utilise la propriété pour découper en plusieurs équations séparées par « ou ».
- On résout chaque équation séparément, en gardant le « ou » comme séparation.

Exemple. Résoudre $(E) : (5x + 2)(3x - 1) = 0$

$(E) \Leftrightarrow$

L'ensemble des solutions de (E) est

Exercice A1. Résoudre les équations suivantes

$$(A) : (x - 2)(x + 3) = 0$$

$$(B) : (5 - 2x)(8 + 4x) = 0$$

$$(C) : (2x - 6)(6 - 5x) = 0$$

$$(D) : (5 - x)(2x - 4)(2x - 3) = 0$$

B. Résoudre une équation carrée.

Méthode. Pour résoudre une équation de la forme $A^2 = k$ où $k > 0$, on peut écrire :

$$A^2 = k \Leftrightarrow A = \sqrt{k} \text{ ou } A = -\sqrt{k}$$

Exemple. Résoudre $(E) : (x - 1)^2 = 9$

$$(x - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow$$

L'ensemble des solutions de (E) est $\mathcal{S}_E =$

Propriété. Une équation de la forme $A^2 = k$ où $k < 0$ n'a pas de solutions.

Un carré est toujours positif.

Exemple. Résoudre $(F) : \left(\frac{178}{x^{42}} + x^{35}\right)^2 = -5$.

$-5 < 0$ donc l'équation (F) n'a pas de solutions. $\mathcal{S}_F = \emptyset$

Méthode. Pour résoudre une équation de la forme $A^2 = 0$, on peut écrire :

$$A^2 = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

Exemple. Résoudre $(G) : (2x + 4)^2 = 0$

$$(2x + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow$$

L'ensemble des solutions de (G) est $\mathcal{S}_G =$

Equations produit nul, quotient nul - 2

Exercice B1. Résoudre les équations suivantes

$$(A) : (3x - 6)^2 = 4$$

$$(B) : (5x - 7)^2 = 0$$

$$(C) : (12 - 4x)^2 = 5$$

$$(D) : (10x - 5)^2 = -2$$

C. Trouver les valeurs interdites dans un quotient

Méthode. Pour trouver l'ensemble des valeurs interdites d'un quotient $\frac{A}{B}$ on résout l'équation $B = 0$.

Exemple. Déterminer l'ensemble des valeurs interdites de $f(x) = \frac{x-3}{2x-6}$

$$2x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{2} \Leftrightarrow x = 3$$

L'ensemble des valeurs interdites de f est $\{3\}$

Exercice C1. Quelle sont les valeurs interdites de :

$$g(x) = \frac{1}{(x+7)(x-5)}$$

$$h(x) = \frac{1}{(3-2x)^2}$$

D. Résoudre une équation quotient nul

Propriété. Quand $B \neq 0$, on a : $\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0$

Méthode. Pour résoudre une équation quotient nul $\frac{A}{B} = 0$

- On résout l'équation $B = 0$ pour trouver les valeurs interdites.
- On résout l'équation $A = 0$ en enlevant les valeurs interdites si nécessaire.

Exemple. Résoudre $(E) : \frac{(2x-8)(4+2x)}{5x+10} = 0$

$5x + 10 = 0 \Leftrightarrow$	\Leftrightarrow	L'ensemble des valeurs interdites de (E) est $\{ \quad \}$
$(2x - 8)(4 + 2x) = 0 \Leftrightarrow$	ou	
\Leftrightarrow	ou	
\Leftrightarrow	ou	

L'ensemble des solutions de (E) est donc $\mathcal{S}_E =$

Exercice D1. Résoudre les équations suivantes :

$$(A) : \frac{4x-8}{x-3} = 0$$

$$(B) : \frac{(3-x)(5-x)(2x-8)}{2x-6} = 0$$

$$(C) : \frac{4x-8}{x-2} = 0$$

$$(D) : \frac{5}{x+2} = 0$$