Equations de droites

Définition. Une **équation** est l'expression d'une égalité.

Exemple. " $x + 5{,}3 = 17$ " est une équation. x est une variable. $5{,}3$ et 17 sont des constantes.

Contre-Exemple. " $3x + 6$ " n'est pas une équation, car il n'y a pas de $=$.

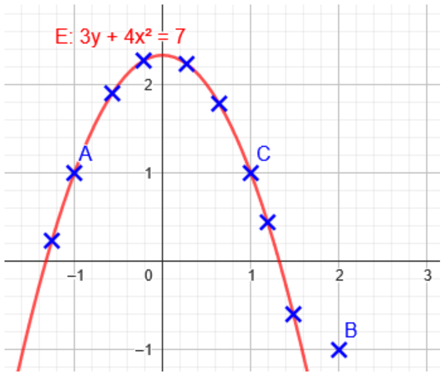
Exemple. " $3y + 4x^2 = 7$ " est une équation (à 2 variables).

x est la 1ère variable et y est la 2ème variable.

Le point $A = (-1; 1)$ vérifie l'équation car $3 \times (1) + 4 \times (-1)^2 = 3 + 4 = 7$.

Le point $B = (2; -1)$ ne vérifie pas l'équation : $3 \times (-1) + 4 \times (2)^2 = -15 \neq 7$

Le point $C = (1; 1)$ vérifie l'équation car $3 \times (1) + 4 \times (1)^2 = 3 + 4 = 7$.



Remarque. Une <u>équation</u> à *deux* variables, correspond à un <u>ensemble de points</u> du *plan* : L'ensemble de tous les points qui rendent l'équation vraie.

Exemple. L'équation $3y + 4x^2 = 7$ représente la courbe sur l'image ci-contre.

Propriété. Toute <u>droite</u> du plan correspond à un ensemble de points $(x; y)$ qui vérifient tous :
$ax + by + c = 0$ où a, b, c sont des constantes, et a, b pas simultanément nuls. La réciproque est vraie.

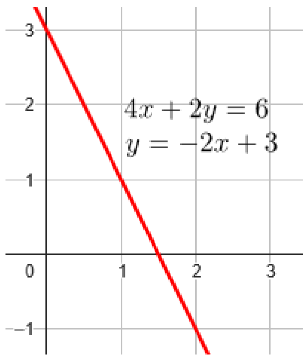
Exemple. $x + 3y - 5 = 0$ est l'équation d'une droite. $a = 1$, $b = 3$, et $c = -5$.

Définition et remarques principales. Toute droite admet une équation de la forme " $ax + by + c = 0$ "
" $ax + by + c = 0$ " est <u>une</u> **équation cartésienne de la droite.**
Cette équation représente toute la droite. Les seuls nombres a, b, c déterminent toute la droite.
Pour tout point $M = (x; y)$ du plan on peut écrire : $M \in d \iff ax + by + c = 0$

Remarque. Pour toute droite, l'équation *cartésienne* n'est pas unique. a, b, c ne sont pas uniques.

Exemple. $x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow 5x + 5y - 10 = 0$ Ces équations représentent la même droite.

Propriété. Toute droite du plan d <u>non verticale</u> admet une <u>unique</u> équation de la forme
$y = mx + p$ où m et p sont des constantes.
Définition. L'expression " $y = mx + p$ " est **<u>l</u>'équation réduite de la droite d.**
Propriété. Toute droite du plan d <u>verticale</u> admet une <u>unique</u> équation de la forme
$x = k$ où k est une constante.
Définition. Dans ce cas l'expression " $x = k$ " est **<u>l</u>'équation réduite de la droite d.**



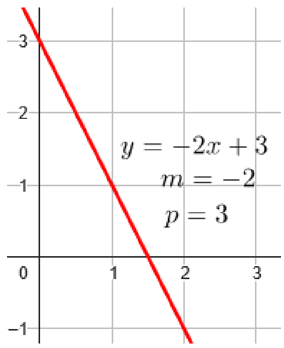
Exemple. Donner l'équation réduite de la droite d dont une équation est $4x + 2y = 6$
$4x + 2y = 6 \Leftrightarrow 2y = -4x + 6 \Leftrightarrow y = -2x + 3$ L'équation réduite est $y = -2x + 3$

Hypothèse. Soit une droite d non verticale d'équation *<u>réduite</u>* $y = mx + p$

Définition. m est **le coefficient directeur** ou **la pente** de la droite d, p est **l'ordonnée à l'origine** de d.

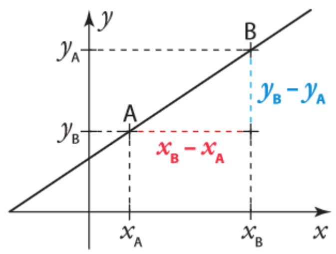
Exemple. Pour la droite d'équation réduite $y = -2x + 3$, on a $m = -2$ et $p = 3$.

Propriété. Si $m > 0$ la droite « monte » en allant vers la droite. Si $m < 0$ la droite « descend ». Si $m = 0$ la droite est horizontale (parallèle à l'axe des abscisses.).
m indique de combien d'unités la droite monte (ou descend) si on va une unité à droite.
p indique l'ordonnée y du point de la droite dont l'abscisse x est 0.



Exemple. La droite d'équation réduite $y = -2x + 3$ a une pente qui vaut $m = -2$, donc la droite descend à une vitesse de 2 unités par carreau. De plus $p = 3$, donc le point de la droite d'abscisse 0 a pour ordonnée 3.

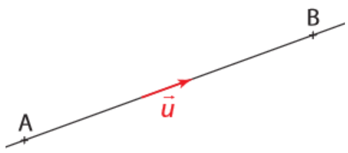
Propriété. Soit $A=(x_A;y_A)$ et $B=(x_B;y_B)$ deux points du plan d'abscisses distinctes Alors la pente de la droite (AB) est $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$



Exemple.
Donner l'équation réduite de la droite d passant par $A=(3\,;-24)$ et $B=(-6\,;12)$.
La pente de cette droite est $m=\frac{(12)-(-24)}{(-6)-(3)}=\frac{36}{-9}=-4$.
L'équation de d est donc de la forme $y=-4x+p$. On se sert ensuite du fait que $A\in d$ pour trouver p.
$y_A=-4x_A+p$ donc $-24=-4(3)+p$ donc $-24+12=p$ donc $p=-12$. Donc $d:\ \ y=-4x-12$

Idée. Un vecteur directeur d'une droite d est un vecteur aligné avec la droite dans un sens ou l'autre.

Définition. Soit un vecteur $\vec{u}$, et une droite d dont A et B sont deux points distincts.
$\vec{u}$ est un **vecteur directeur de la droite** d si $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.



Exemple. Déterminer un vecteur directeur de la droite d passant par $A=(2;-4)$ et $B=(6;2)$. Réponse : $\overrightarrow{AB}=\binom{8}{-2}$ est un vecteur directeur de la droite d.
$\vec{u}=\binom{4}{-1}$ est-il un vecteur directeur de d ? Oui car $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires car $\det(\vec{u};\overrightarrow{AB})=\begin{vmatrix}4&8\\-1&-2\end{vmatrix}=0$

Exemple. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A=(-1;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}=\binom{-2}{1}$. Soit $M=(x;y)$ un point du plan.
$M\in d\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\vec{u}\Leftrightarrow\det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x+1&-2\\y-3&1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(x+1)(1)-(y-3)(-2)=0$
$M\in d\Leftrightarrow x+1+2y-6=0\Leftrightarrow x+2y-5=0$. Donc une équation de d est $x+2y-5=0$.

Propriété. Un vecteur directeur d'une droite d d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ est $\binom{-b}{a}$.

Exemple. Donner un vecteur directeur de la droite $3y-6x=12$. Un vecteur directeur est $\binom{-3}{-6}$.

Propriété. Un vecteur directeur d'une droite d d'équation $y=mx+p$ est $\binom{1}{m}$.

Exemple. Donner un vecteur directeur de la droite $y=-2x+3$. Un vecteur directeur est $\binom{1}{-2}$

Remarque. Deux droites du plan peuvent être soit sécantes, soit parallèles (strictement, ou confondues).

Propriété. Deux droites d'équations réduites $y=mx+p$ et $y=m'x+p'$ sont parallèles ssi $m=m'$. De plus, si $p=p'$ alors elles sont confondues.

Exemple. Les droites $y=3x+2$ et $y=5x+2$ sont elles parallèles ? Non car elles ont des pentes différentes $(3\neq 5)$

Propriété. Soit deux droites d'équations cartésiennes $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$
Si $\begin{vmatrix}-b&-b'\\a&a'\end{vmatrix}\neq 0$ alors les droites sont sécantes.
Si $\begin{vmatrix}-b&-b'\\a&a'\end{vmatrix}=0$ alors les droites sont parallèles. Si de plus $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ alors elles sont confondues.

Exemple. Les droites $d: 3x+2y+1=0$ et $d': -5x-3y+1$ sont-elles parallèles ou sécantes ? Un vecteur directeur de d est $\vec{u}=\binom{-2}{3}$. Un vecteur directeur de d' est $\vec{u}'=\binom{3}{-5}$. $\det(\vec{u};\vec{u}')=\begin{vmatrix}-2&3\\3&-5\end{vmatrix}=$ $(-2)(-5)-(3)(3)=1\neq 0$. Donc $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires donc les droites d et d' sont sécantes.

Système d'équations

Définition. Si a, b, c, a', b', c' sont des constantes réelles,
" $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ " est un **système de 2 équations linéaires à 2 inconnues (x et y).**

Exemple. $\begin{cases} -2x + y + 3 = 0 \\ 3x - 5y - 2 = 0 \end{cases}$ est un système de 2 équations linéaires à 2 inconnues.

Propriété. Un tel système a : soit une seule solution, soit aucune solution, soit une infinité de solutions.
Résoudre un tel système revient à déterminer l'intersection de deux droites.
- Le système admet un seul couple solution ssi les deux droites sont sécantes. (ssi $\begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} \neq 0$)
- Le système admet aucune solution ssi les deux droites sont parallèles strictement.
- Le système admet une infinité de solutions ssi les deux droites sont confondues.

Exemple. $\begin{cases} -2x + y + 3 = 0 \\ 3x - 5y - 2 = 0 \end{cases}$ a pour déterminant $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(3) - (-2)(5) = -3 + 10 = 7 \neq 0$.
Donc le système a exactement un couple solution.

Méthode. Résolution d'un système par substitution.
Cette méthode consiste à isoler une inconnue à partir d'une équation et à la remplacer dans l'autre équation afin d'obtenir une nouvelle équation avec une seule inconnue.
On résout alors cette nouvelle équation puis on remplace l'inconnue trouvée dans la première équation afin de trouver la seconde inconnue.

Exemple. Résoudre (E): $\begin{cases} -2x + y + 3 = 0 \\ 3x - 5y - 2 = 0 \end{cases}$ On peut rédiger ainsi (sans les annotations entre parenthèses)

Supposons que $(x; y)$ vérifie (E)

$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 3x - 5y - 2 = 0 \end{cases}$ donc $3x - 5(2x - 3) - 2 = 0$ donc $3x - 10x + 15 - 2 = 0$ donc $-7x + 13 = 0$

donc $x = \frac{13}{7}$. Or $y = 2x - 3$ donc $y = 2\left(\frac{13}{7}\right) - 3 = \frac{5}{7}$

Donc $(x; y) = \left(\frac{13}{7}; \frac{5}{7}\right)$. (Ici, on sait que c'est la seule solution *possible* de (E), ce qu'il reste à vérifier)

Réciproquement si $(x; y) = \left(\frac{13}{7}; \frac{5}{7}\right)$ alors $(x; y)$ vérifie (E). L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{\left(\frac{13}{7}; \frac{5}{7}\right)\right\}$.

Méthode. Résolution d'un système par combinaison.
Cette méthode consiste à multiplier les deux équations par des nombres de telle manière qu'en soustrayant les équations, une inconnue s'élimine. Ainsi, il n'y a plus qu'à résoudre une équation à une seule inconnue. Pour trouver la deuxième inconnue, on peut renouveler la même méthode ou substituer.
Cette méthode est souvent plus rapide et plus sure, car elle évite les fractions dans les calculs.

Exemple. Résoudre (E): $\begin{cases} -2x + y + 3 = 0 \\ 3x - 5y - 2 = 0 \end{cases}$ On peut rédiger ainsi (sans les annotations entre parenthèses)

Supposons $(x; y)$ vérifie (E) $\begin{cases} -2x + 1y + 3 = 0 & (L_1) \\ 3x - 5y - 2 = 0 & (L_2) \end{cases}$ alors :

D'une part $\begin{cases} -6x + 3y + 9 = 0 & (L_1 \leftarrow 3 \times L_1) \\ -6x + 10y + 4 = 0 & (L_2 \leftarrow -2 \times L_2) \end{cases}$ donc $-7y + 5 = 0$ $(L_1 \leftarrow L_1 - L_2)$ donc $y = \frac{-5}{-7} = \frac{5}{7}$

D'autre part $\begin{cases} 10x - 5y - 15 = 0 & (L_1 \leftarrow -5 \times L_1) \\ 3x - 5y - 2 = 0 & (L_2 \leftarrow 1 \times L_2) \end{cases}$ donc $7x - 13 = 0$ $(L_1 \leftarrow L_1 - L_2)$ donc $x = \frac{13}{7}$

Donc $(x; y) = \left(\frac{13}{7}; \frac{5}{7}\right)$. (Ici, on sait que c'est la seule solution *possible* de (E), ce qu'il reste à vérifier)

Réciproquement si $(x; y) = \left(\frac{13}{7}; \frac{5}{7}\right)$ alors $(x; y)$ vérifie (E). L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{\left(\frac{13}{7}; \frac{5}{7}\right)\right\}$.