A. Déterminer si deux droites sont sécantes, parallèles, ou confondues, à partir d'équations cartésiennes

Méthode. Pour déterminer si deux droites sont sécantes, parallèles, ou confondues, à partir d'équation cartésiennes de la forme : $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$

- On calcule le déterminant $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$
- Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$, les droites sont *sécantes*.
- Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$, les droites sont parallèles, il reste à déterminer si les droites sont confondues ou non.
    - On calcule le déterminant $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}$
    - Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$, les droites sont *strictement parallèles*.
    - Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$, les droites sont *confondues*.

Exercice A1. Déterminer dans chaque cas, si les deux équations correspondent à des droites sécantes, parallèles, ou confondues :

- $\begin{cases} -2x + 5y + 6 = 0 \\ 4x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$

- $\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ -10x + 15y - 5 = 0 \end{cases}$

- $\begin{cases} -3x + 5y + 7 = 0 \\ 9x - 15y - 2 = 0 \end{cases}$

B. Déterminer si deux droites sont sécantes, parallèles, ou confondues, à partir d'équations réduites

Méthode. Pour déterminer si deux droites sont sécantes, parallèles, ou confondues, à partir d'équation réduites de la forme : $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$

- Si $m \neq m'$, les droites sont *sécantes*.
- Si $m = m'$, les droites sont parallèles, il reste à déterminer si les droites sont confondues ou non.
    - Si $p \neq p'$, les droites sont *strictement parallèles*.
    - Si $p = p'$, les droites sont *confondues*. (Dans ce cas les équations sont identiques)

Exercice B1. Déterminer dans chaque cas, si les deux équations correspondent à des droites sécantes, parallèles, ou confondues :

- $\begin{cases} y = 3x + 10 \\ y = 7x - 5 \end{cases}$

- $\begin{cases} y = -5x + 12 \\ y = -5x - 10 \end{cases}$

- $\begin{cases} y = -3x + 2 \\ y = 3x + 2 \end{cases}$

C. Simplifier un système linéaire

Définition. Un **système de 2 équations linéaires à 2 inconnues** peut s'écrire sous la forme : $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$

où $x; y$ sont les variables inconnues, et a, b, c, a', b', c' sont des nombres constants.

Exemple. $\begin{cases} -2x+3y+16=0 \\ 4x+2y-16=0 \end{cases}$ est un système de 2 équations linéaires à 2 inconnues.

Méthode. Pour *simplifier* un système :

- Si nécessaire, on développe ce qui peut l'être.
- Chaque terme à droite est déplacé à gauche, en changeant son signe.
- On simplifie à gauche en factorisant par x, puis par y.

Ex. Simplifier (E) : $\begin{cases} 3x+y=2(y-1) \\ y+7=5(x+2) \end{cases}$

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \\ \end{cases}$

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \\ \end{cases}$

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \\ \end{cases}$

Exercice C1. Simplifier les systèmes suivants :

(A) : $\begin{cases} 2x+3=5y \\ -3y=5-2x \end{cases}$

(B) : $\begin{cases} 3(x-5)=y \\ 5+2(y-8)=-2x \end{cases}$

D. Compter les solutions d'un système linéaire

Propriété. Un système linéaire a :

- Soit une seule solution, soit aucune solution, soit une infinité de solutions.

Méthode. Pour compter les solutions d'un système linéaire : $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$

- Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$, le système admet un seul couple solution. (droites sécantes)
- Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$, le système n'admet aucune solution. (droites strictement parallèles)
- Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$, le système admet une infinité de solutions. (droites confondues)

Exercice D1. Déterminer si les systèmes suivants ont une, zéro, ou une infinité de solutions :

- (A): $\begin{cases} 10x+3y+7=0 \\ -30x-9y-2=0 \end{cases}$

- (B): $\begin{cases} 4x-5y+2=0 \\ -8x+10y-4=0 \end{cases}$

- (C): $\begin{cases} 3x+7y+6=0 \\ 4x+2y-1=0 \end{cases}$

E. Résoudre un système linéaire

a) Par substitution

Méthode. Pour résoudre un système linéaire $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ *par substitution* :

• On calcule le déterminant $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$

• Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$ • Le système a un seul couple solution qu'on détermine par la méthode suivante :

• On isole une inconnue dans une équation.

• On remplace l'inconnue isolée dans l'autre équation afin d'obtenir une nouvelle équation à une inconnue.

• On résout cette nouvelle équation.

• On remplace l'inconnue trouvée dans la première équation afin de trouver la seconde inconnue.

• Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$: • Le système n'a aucune solution. $S=\emptyset$

• Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$: • Le système a une infinité de solutions. Résolution hors programme.

Exemple. Résoudre (E) : $\begin{cases} -2x+3y+16=0 \\ 4x+2y-16=0 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\times 2 - 3\times 4 = -4-12 = -16 \neq 0.$ Donc (E) admet une seule solution.

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3y+16=0 \\ 4x+2y-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3y+16=0 \\ 2y=-4x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3y+16=0 \\ y=-2x+8 \end{cases}$ (On isole y dans la 2è équation)

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3(-2x+8)+16=0 \\ y=-2x+8 \end{cases}$ (On remplace y dans la 1ère équation)

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+(-6)x+24+16=0 \\ y=-2x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x+40=0 \\ y=-2x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-40}{-8}=5 \\ y=-2x+8 \end{cases}$ (On isole x dans la 1ère équation)

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-2x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-2(5)+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$ (On remplace la valeur de x dans la 2ème équation).

L'ensemble des solutions de (E) est : $S_E=\{(5;-2)\}$.

Exercice E1. Résoudre les systèmes suivants :

(A) : $\begin{cases} x-y-4=0 \\ 2x+3y-3=0 \end{cases}$ (B) : $\begin{cases} 2x+3y-1=0 \\ 5x-2y-12=0 \end{cases}$

(C) : $\begin{cases} 4x+9y-5=0 \\ 6x-6y-1=0 \end{cases}$ (D) : $\begin{cases} 2x-6y=5 \\ 3x-9y=1 \end{cases}$

b) <u>Par combinaison</u>

Méthode. Pour résoudre un système linéaire $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ *par combinaison* :

• On calcule le déterminant $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$

• Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$ • Le système a un seul couple solution qu'on détermine par la méthode suivante :

- On multiplie la ligne 1 par le coefficient a' de la ligne 2 et on multiplie la ligne 2 par le coefficient a de la ligne 1
- On remplace la ligne 2 par : ligne 2 moins ligne 1. La ligne 2 n'a alors plus qu'une seule inconnue y
- On résout la ligne 2 en y.
- On remplace l'inconnue y trouvée dans la première équation afin de trouver la seconde inconnue x.

• Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \neq 0$: • Le système n'a aucune solution. $S = \emptyset$

• Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$: • Le système a une infinité de solutions. Résolution hors programme.

Cette méthode est souvent plus rapide et plus sure, car elle évite les fractions dans les calculs.

Exemple. Résoudre (E): $\begin{cases} -2x + 3y + 16 = 0 \\ 4x + 2y - 16 = 0 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-2) \times 2 - 3 \times 4 = -4 - 12 = -16 \neq 0.$ Donc (E) admet une seule solution.

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y + 16 = 0 \\ 4x + 2y - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\mathbf{8}x + 12y + 64 = 0 & (L_1 \leftarrow 4 \times L_1) \\ -\mathbf{8}x - 4y + 32 = 0 & (L_2 \leftarrow -2 \times L_2) \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 12y + 64 = 0 \\ 0x + (-4 - 12)y + 32 - 64 = 0 \; (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 12y + 64 = 0 \\ -16y - 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 12y + 64 = 0 \\ y = \frac{32}{-16} = -2 \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 12(-2) + 64 = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 40 = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-40}{-8} = 5 \\ y = -2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (E) est : $S_E = \{(5; -2)\}$.

Exercice E2. Résoudre les systèmes suivants :

(A) : $\begin{cases} 3x + 2y = 66 \\ x + 3y = 57 \end{cases}$ (B) : $\begin{cases} 10x - 3y - 35 = 0 \\ 5x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$

(C) : $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$ (D) : $\begin{cases} -x + 2y + 3 = 0 \\ 3x - 6y - 1 = 0 \end{cases}$

F. <u>Résoudre un problème avec un système linéaire</u>

Exercice F1. Déterminer deux entiers dont la différence est 8 et dont la somme est 36.

Exercice F2. Jacques et Laurent ont à eux deux 54 ans. Dans trois ans, Jaques aura le double de l'âge de Laurent. Quel âge ont-ils ?

Exercice F3. Dans une ferme il y a des vaches et des poules. On compte 51 têtes et 176 pattes.
Combien y a-t-il de vaches et de poules dans cette ferme ?

Exercice F4. Chloé possède dans sa tirelire 20 pièces de monnaie. Certaines ont une valeur de 2 euros et d'autres une valeur de 1 euro. À l'aide de la totalité de ses 20 pièces, elle s'offre un cadeau valant 36 euros. Combien de pièces de chaque sorte Chloé a-t-elle dans sa tirelire ?

Exercice F5. Une entreprise reçoit une première facture d'électricité de 3 020,55 euros. La facture montre une consommation de 2 166 kWh durant les heures creuses et de 4 691 kWh pendant les heures pleines. Le mois suivant la facture s'élève à 1 551,15 euros pour une consommation de 2 484 kWh en heures creuses et de 1 629 kWh en heures pleines. Déterminer le prix du kWh en heures creuses et en heures pleines.