Fonctions

Définition. Une fonction f est un ensemble d'associations.
Définir une fonction f signifie : associer à chaque chose x d'un ensemble D, une unique chose y située dans un ensemble E.
y est **l'image de x par la fonction f,** y est notée $\boldsymbol{f(x)}$, et lue « f de x » pour rappeler qu'elle dépend de x
Ici, D est **l'ensemble de définition** de la fonction f et E **est l'ensemble d'arrivée** de la fonction f.
Pour dire que f est une fonction de D vers E, on écrit $\boldsymbol{f: D \to E}$
On étudiera surtout les fonctions numériques, où D et E seront des ensembles de nombres.

Propriété. Une image d'un certain nombre x par une fonction f est toujours unique.

Définition. Si y est l'image de x, on a l'égalité $f(x) = y$ et x est **un antécédent de y par f**.
Propriété. Un même nombre y peut avoir 0, 1 ou plusieurs antécédents par la fonction f.

Exemple. On peut définir une fonction avec un tableau de valeurs. Soit f la fonction définie par :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-4	-1	2	5	8	11	14

Signifie que $D = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$, $E = \mathbb{R}$ et : $f(-3) = -4$; $f(-2) = -1$; … ; $f(2) = 11$; $f(3) = 14$

Définition. Donner l'expression algébrique d'une fonction c'est écrire $f(x)$ en fonction de x.

Exemples. Voici des exemples de définitions algébriques de fonctions numériques :
- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (x-6)^2$
- Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto (x-6)^2$

Remarque. Il est courant de ne pas préciser l'ensemble d'arrivée car on considère qu'il est évident ($\mathbb{R}$).

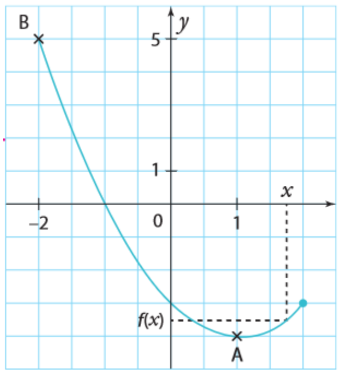
Exemple. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x - 4$.
Il faut comprendre que g est à valeurs dans $\mathbb{R}$, autrement dit $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Remarque. Il est courant de ne pas préciser l'ensemble de définition de f. Dans ce cas, il faut chercher l'ensemble le plus grand possible pour lequel l'expression algébrique de f a un sens dans le contexte.

Exemple. Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{1}{x} + 2$
Il faut comprendre que f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et que l'ensemble de définition D est une partie de $\mathbb{R}$.
D'après l'expression on voit que $f(x)$ est défini si $x \neq 0$ mais pas en $x = 0$. Donc $D = \mathbb{R}^*$ est l'ensemble des réels non nul. Il faut donc comprendre que $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

Définition. Dans un repère du plan R, **la courbe représentative d'une fonction f**$: D \to \mathbb{R}$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ où $x \in D$ et $y = f(x)$ est l'image de x par la fonction.
C'est la courbe d'équation « $y = f(x)$ ».

Exemple. Soit la fonction $f: [-2; 2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x-1)^2 - 4$.
On a tracé la courbe C_f représentative de f sur le graphe ci-contre.
Il s'agit de la courbe d'équation « $y = (x-1)^2 - 4$ ».



Exemple. Etant donné un $x \in D$ et ayant calculé $y = f(x)$, on peut vérifier graphiquement que $y = f(x)$.
Il suffit de regarder le point $(x; y)$ et de vérifier s'il se trouve sur la courbe C_f.
$f(1) = \left((1) - 1\right)^2 - 4 = 0^2 - 4 = -4$, donc le point $A = (1; -4)$ doit se trouver sur C_f. C'est bien le cas.

Exemple. On peut lire graphiquement la valeur de $f(x)$ pour un x donné.
Si on cherche à déterminer $f(-2)$, on se place en $x = -2$, on regarde où la droite verticale « $x = -2$ » coupe la courbe C_f, ici c'est en B. On regarde ensuite l'ordonnée y du point d'intersection B.
On voit que le point $B = (-2; 5)$ donc $y = 5$, ce qui signifie que $f(-2) = 5$.
Vérifions le. $f(-2) = \left((-2) - 1\right)^2 - 4 = (-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$.

Remarque. Une droite verticale ne peut intersecter une courbe de fonction qu'en au plus un point.