

# Suites numériques

**Idee.** Une suite est une liste infinie de nombres, par exemple  $(1; 3; 5; 7; 9; 11; \dots)$ .

**Définition.** Une **suite** est une fonction  $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$u$  est définie sur  $\mathbb{N}$  (entiers positifs) ou plus généralement, sur tous les entiers à partir d'un entier initial  $k$ .

**Exemple.** La liste des entiers naturels  $(0; 1; 2; 3; 4; \dots)$  est une suite.

**Exemple.** La liste des multiples de 3 supérieurs à 6 :  $(6; 9; 12; 15; \dots)$  est une suite.

**Contre-Exemple.**  $(1; 2; 3; 4)$  n'est pas une suite car c'est une liste finie.

**Notations.** Le  $n$ -ième nombre d'une suite est noté  $u_n$

$u_n$  est le **terme de rang  $n$** . Une suite  $u$  est aussi notée  $(u_n)$  ou plus précisément  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

**Attention** : Ne pas confondre  $u_n$  qui est un nombre et  $(u_n)$  qui désigne la suite  $u$ .

**Exemple.** Si  $u = (1; 3; 5; 7; \dots)$  est la suite des entiers impairs, alors  $u_0 = 1; u_1 = 3; u_2 = 5; u_3 = 7; \dots$

Le rang initial est très souvent 0. Mais on peut aussi définir une suite  $(u_n)_{n \geq k}$  avec un rang initial  $k \geq 1$ .

**Vocabulaire.** Définir une suite par une formule explicite, c'est donner  $u_n$  en fonction de  $n$  directement.

**Exemples.**

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = n^2 - 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On a  $u = (-1; 0; 3; 8; 15; 24; \dots)$

Soit la suite  $(u_n)_{n \geq 6}$  définie à partir du rang 6 par  $u_n = \frac{1}{n-5}$ . On a  $u = (u_6; u_7; u_8; \dots) = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots\right)$

**Vocabulaire.** Définir une suite par récurrence, c'est : donner une relation permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents ET donner un ou plusieurs premiers termes.

**Exemple.** Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $\begin{cases} u_0 = -6 \\ u_{n+1} = 3u_n + 15 \end{cases}$  pour  $n \in \mathbb{N}$  (suivant =  $3 \times$  courant + 15)

$u_1 = 3 \times (-6) + 15 = -3$  (autrement dit, on a remplacé  $n$  par 0 :  $u_1 = u_{0+1} = 3u_0 + 15$ )

$u_2 = 3 \times (-3) + 15 = 6$  (autrement dit, on a remplacé  $n$  par 1 :  $u_2 = u_{1+1} = 3u_1 + 15$ )

$u_3 = 3 \times (6) + 15 = 33$

Etc...  $u = (-6; -3; 6; 33; \dots)$  Pour calculer chaque terme, on doit connaître le précédent.

**Vocabulaire.** Si le terme courant est  $u_n$  alors  $u_{n+1}$  est le terme suivant.  $u_{n-1}$  est le terme précédent.

**Remarque.** Attention à ne pas confondre  $u_{n+1}$  (le terme suivant) et  $u_n + 1$  (le terme courant + 1)

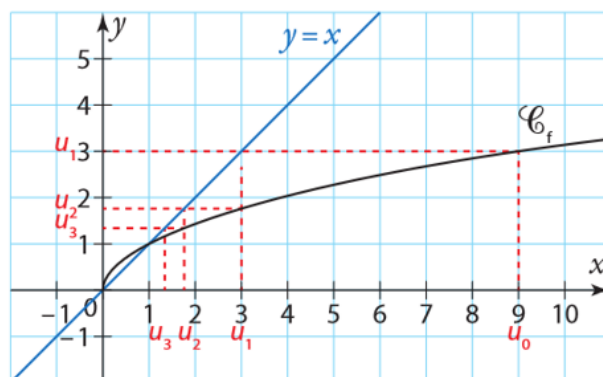
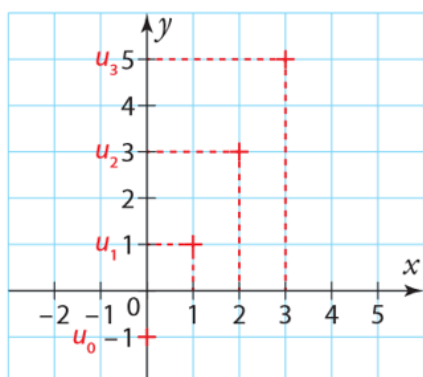
**Exemple.** Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = n^2 - 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Alors  $u_{n+1} = (n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n + 1 - 1 = n^2 + 2n$  mais  $u_n + 1 = (n^2 - 1) + 1 = n^2$

**Méthode.** Pour représenter une suite dans un repère (voir 1.), on place les points de coordonnées  $(n; u_n)$ .

**Méthode.** Si la suite  $(u_n)$  est définie par récurrence, ( $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ ), alors (voir 2.) on peut construire les termes à l'aide de la courbe représentative de la fonction  $f$  et de la droite d'équation  $y = x$

① On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = 2n - 1$ . ② On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$ .



**Définition.** Une suite  $(u_n)$  est **croissante** ssi, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} \geq u_n$

**Définition.** Une suite  $(u_n)$  est **décroissante** ssi, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} \leq u_n$

**Définition.** Une suite  $(u_n)$  est **constante** ssi, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n$

Si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes, on parle de suite **strictement croissante** ou **strictement décroissante**.

**Exemples.**  $(1; 3; 5; 19; 33; 200; \dots)$  est le début d'une suite strictement croissante.

$(-11; -3; 5; 5; 5; 6; 8; 8; 10; 11; \dots)$  est le début d'une suite croissante (mais pas strictement).

$(6; 2; 0; -1; -3; -10; \dots)$  est le début d'une suite décroissante.

$(1; -1; 2; -2; 3; -3; \dots)$  n'est ni croissante, ni décroissante.

**Méthode.** Pour étudier les variations d'une suite, on peut comparer  $u_{n+1} - u_n$  à 0.

**Exemple.** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 5$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + n^2 + 1$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = n^2 + 1 \geq 1 > 0$ . Donc la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.

**Méthode.** Pour étudier les variations d'une suite à valeurs positives, on peut comparer  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  à 1.

**Exemple.** La suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = 2^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , est croissante. En effet :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$  donc  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ . (Donc  $u_{n+1} > u_n$  puisque  $u_n > 0$ )

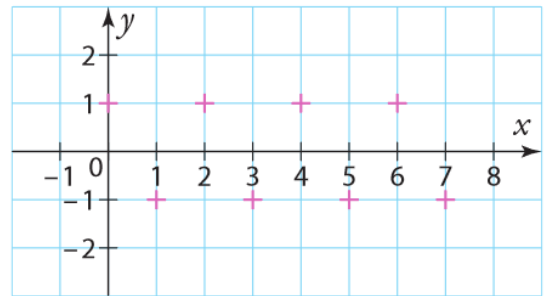
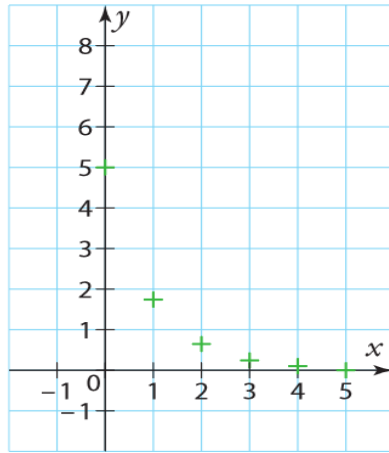
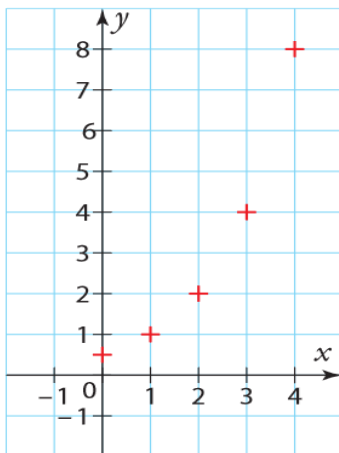
**Méthode.** Pour montrer qu'une suite n'est pas croissante, il suffit de trouver un  $n$  tel que  $u_n > u_{n+1}$

**Exemple.** On note  $u_n = (-1)^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .  $(u_n) = (1; -1; 1; -1; 1; -1; 1; \dots)$

$(u_n)$  n'est pas croissante car pour  $n = 0$  on a :  $u_0 = 1 > u_1 = -1$

$(u_n)$  n'est pas décroissante car pour  $n = 1$  on a :  $u_1 = -1 < u_2 = 1$

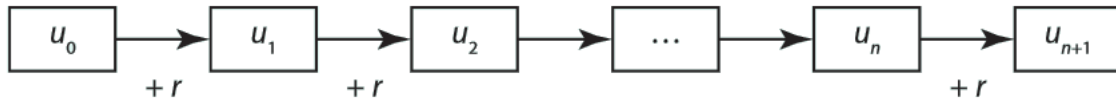
**Exemples.** Allure d'une suite croissante, d'une suite décroissante.



**Remarque.** La suite définie par  $u_n = (-1)^n$  n'est pas croissante ni décroissante

# Suites arithmétiques et géométriques

**Idée.** Une suite  $(u_n)$  est **arithmétique** si on **ajoute** toujours le **même** nombre pour passer au terme suivant  
**Définition.** Une suite  $(u_n)$  est **arithmétique** s'il existe un réel  $r$ , tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + r$   
 $r$  est appelé **raison de la suite arithmétique**  $(u_n)$ .



**Exemple.** La suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = -2$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + 3$  est la suite arithmétique de raison  $r = 3$  et de premier terme  $u_0 = -2$ .

**Propriété.** Terme général d'une suite arithmétique. Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$ .  
 Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = u_0 + nr$  Deux termes distants de  $n$  rangs diffèrent de  $n$  fois la raison

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = u_1 + (n - 1)r$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = u_p + (n - p)r$

**Exemple.** Soit  $(v_n)$  la suite définie par  $v_0 = 3$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = v_n - 0,5$ .

Cette suite est arithmétique de raison  $r = -0,5$  et de premier terme  $v_0 = 3$ .

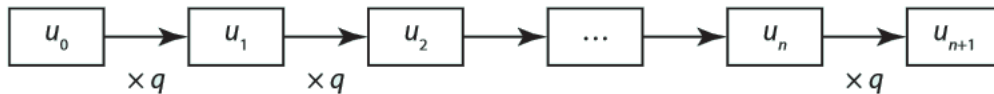
Donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = v_0 + r \times n = 3 - 0,5n$ .

**Remarque.** Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$ .

La suite est strictement croissante si  $r > 0$ , strictement décroissante si  $r < 0$ , et constante si  $r = 0$ .

**Idée.**  $(u_n)$  est **géométrique** si on **multiplie** toujours par le **même** nombre pour passer au terme suivant

**Définition.**  $(u_n)$  est **géométrique** s'il existe un réel  $q$ , tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n \times q$   
 $q$  est appelé **raison de la suite géométrique**  $(u_n)$ .



**Exemple.** La suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0,5$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 2u_n$  est la suite géométrique de raison  $q = 2$  et de premier terme  $u_0 = 0,5$ .

**Propriété.** Terme général d'une suite géométrique. Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $q$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = u_0 \times q^n$

**Remarque.** Si le rang initial est 1 il faut adapter la formule. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

**Remarque.** Si le rang initial est  $p$  il faut adapter la formule. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = u_p \times q^{n-p}$

**Exemple.** La suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0,5$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 2u_n$  est géométrique de raison  $q = 2$  et de premier terme  $u_0 = 0,5$ , donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = u_0 \times q^n = 0,5 \times 2^n$ .

**Propriété.** Somme des  $n$  premiers entiers. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

**Propriété.**

Somme de termes **consécutifs** d'une suite **arithmétique** = nombre de termes  $\times \frac{(1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme})}{2}$

**Exemple.**  $10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 = 6 \times \frac{10+25}{2} = 105$

**Propriété.** Somme des  $n$  premières puissances d'un réel différent de 1.

Soit  $q$  un réel  $\neq 1$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

**Propriété.** Somme de termes **consécutifs** d'une suite **géométrique** =  $1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$

**Exemple.**  $8 + 16 + 32 + 64 + 128 = 8 \times \frac{1-2^5}{1-2} = 8 \times \frac{-31}{-1} = 248$