Produit scalaire

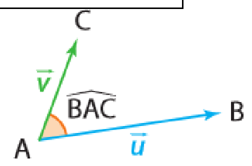
Hypothèse. On se place dans un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.

Définition. Un vecteur est **unitaire** ssi il est de norme 1, autrement dit s'il est de longueur 1.
Exemple. Dans un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$, les vecteurs $\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$ sont unitaires (et orthogonaux).
Remarque. On peut rendre un vecteur unitaire en le divisant par sa norme. $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ est toujours de norme 1.

Définition. Angle orienté. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires : Soit A et B les points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}, \vec{v}=\overrightarrow{OB}$.
A et B sont 2 points du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires et $\mathcal{C}$ est de rayon 1.
L'angle orienté de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $(\vec{u};\vec{v})$ est défini comme la longueur de l'arc de cercle $\widehat{AB}$, modulo 2π, comptée positivement dans le sens direct, négativement dans le sens indirect.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont quelconques : on se ramène au cas unitaire. $(\vec{u};\vec{v})$ est défini comme l'angle orienté $\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|};\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)$.

Définition. Angle géométrique. Intuitivement, l'angle géométrique de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ correspond à l'angle saillant (entre 0 et π) que l'on mesure directement au rapporteur entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si on les fait partir d'un même point. $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ est donc toujours dans l'intervalle $[0;\pi]$.

Rigoureusement, $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ peut se définir comme la valeur absolue de la mesure principale (celle dans $]-\pi;\pi]$) de l'angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$.



Remarque et définition. Dans un repère orthonormé $R=(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, l'angle géométrique $(\widehat{\vec{\imath};\vec{\jmath}})$ vaut toujours $\frac{\pi}{2}$, mais l'angle orienté $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$ peut valoir soit $\frac{\pi}{2}$, soit $-\frac{\pi}{2}$.
Un repère orthonormé est **direct** (resp. **indirect**) ssi $(\vec{\imath};\vec{\jmath})=\frac{\pi}{2}$ (resp. $(\vec{\imath};\vec{\jmath})=-\frac{\pi}{2}$).
Propriété (admise). Les longueurs et les angles géométriques ne changent pas lorsque l'on change de repère orthonormé. Les angles orientés ne changent pas par changement de repère orthonormé direct.

1. Point de vue géométrique du produit scalaire

Théorème. Loi des cosinus, ou **formule d'Al-Kashi** (généralisation du théorème de Pythagore)
Dans un triangle ABC quelconque, on a, par exemple $BC^2=AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$.
On l'écrit parfois sous la forme $a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\alpha)$ en notant $a=BC,\ b=AC,\ c=AB,\ \alpha=\widehat{BAC}$
Exemple. Soit un triangle ABC tel que $AB=8$, $AC=4$ et $\widehat{BAC}=50°$. Calculer la longueur BC.
$BC^2=AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)=64+16-2\times8\times4\times\cos(50°)\approx38{,}86$ et donc $BC\approx6{,}23$

Définition. **Produit scalaire**. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tous deux non nuls.
On appelle **produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$** et on note $\vec{u}\cdot\vec{v}$ le nombre réel défini par : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$
Si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$, alors le produit scalaire s'écrit : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$
La loi des cosinus se réécrit alors $BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
Dans le cas où $\vec{u}$ est nul ou $\vec{v}$ est nul, on définit $\vec{u}\cdot\vec{v}=\mathbf{0}$. (l'angle $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ n'a pas de sens dans ce cas)
Exemple. Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ tels que $\|\overrightarrow{AB}\|=AB=2$ et $\|\overrightarrow{AC}\|=AC=3$ et $\widehat{BAC}=30°$.
Leur produit scalaire vaut $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)=2\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

Propriétés. Soit $\vec{u},\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On a $-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\leq\vec{u}\cdot\vec{v}\leq\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ puisque $-1\leq\cos(.)\leq1$
• $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens $\Leftrightarrow(\widehat{\vec{u};\vec{v}})=0\Leftrightarrow\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})=1\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
• $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens opposé $\Leftrightarrow(\widehat{\vec{u};\vec{v}})=\pi\Leftrightarrow\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})=-1\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
• $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow(\widehat{\vec{u};\vec{v}})=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})=0\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
(Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.)
Propriété (projeté orthogonal). Soit trois points A,B,C (ou deux vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ qu'on fait partir d'un même point A). Alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\pm AB\times AH$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB). Le signe est $+$ si $\overrightarrow{AH}$ est de même sens que $\overrightarrow{AB}$, et $-$ sinon.

2. Point de vue algébrique du produit scalaire

Théorème. Calculer un produit scalaire de vecteurs à partir de leurs coordonnées.
Dans un repère orthonormé, si $\vec{u} = \binom{x}{y}$ et $\vec{v} = \binom{x'}{y'}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Démonstration. On peut choisir 3 points A, B, C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
D'une part, d'après Chasles : $BC^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2 = \|\vec{v} - \vec{u}\|^2$.
D'autre part, d'après la loi des cosinus, et la définition géométrique du produit scalaire :
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
Ainsi $\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$, donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2) = \frac{1}{2}\left(\left\|\binom{x}{y}\right\|^2 + \left\|\binom{x'}{y'}\right\|^2 - \left\|\binom{x'-x}{y'-y}\right\|^2\right)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - ((x'-x)^2 + (y'-y)^2)\right)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - (x'^2 + x^2 - 2xx' + y'^2 + y^2 - 2yy')\right) = \frac{1}{2}(2xx' + 2yy') = xx' + yy'.$$

Exemple. Le produit scalaire de $\vec{u} = \binom{2}{3}$ et $\vec{v} = \binom{-3}{-5}$ vaut $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-3) + 3 \times (-5) = -21$

Théorème. Propriétés algébriques du produit scalaire.
Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs du plan, et k un réel. Alors :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (commutativité)
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (distributivité)
- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ (Loi des cosinus)

Propriété. Dans un repère orthonormé, deux vecteurs $\vec{u} = \binom{x}{y}$ et $\vec{v} = \binom{x'}{y'}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

Exemple. On considère les vecteurs $\vec{u} = \binom{2}{3}$ et $\vec{v} = \binom{-3}{-5}$. Leur produit scalaire vaut :
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-3) + 3 \times (-5) = -21 \neq 0$ donc les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

Propriété. Etant donné deux points A et B et leur milieu I, on a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$
Propriété. Soit A et B deux points distincts.
L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.
Propriété. Soit A, B et C trois points distincts.
ABC est rectangle en C si et seulement si C appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

Propriété. Pour calculer les coordonnées d'un vecteur dans un repère orthonormé, on projette le vecteur sur les vecteurs de base. Dans un repère orthonormé $R = (O\,; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$,
Les coordonnées d'un vecteur $\vec{v} = \binom{x}{y}_R$ vérifient $x = \vec{v} \cdot \vec{\imath}$ et $y = \vec{v} \cdot \vec{\jmath}$.
Les coordonnées d'un point $M = (x\,; y)_R$ vérifient $x = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{\imath}$ et $y = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{\jmath}$.

Propriété et définitions. Soit $d = (AB)$ une droite.
Alors $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$ est un vecteur unitaire directeur de cette droite d.
Soit M un point du plan. Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite d.
Alors : $\overrightarrow{AH} = (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u})\,\vec{u}$ et $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}| = AH$
$(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u})\,\vec{u}$ est appelé **vecteur projeté orthogonal** du vecteur $\overrightarrow{AM}$ sur la droite d.
$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}$ est appelé **composante** de $\overrightarrow{AM}$ le long de la droite d (orientée par $\vec{u}$).