Dérivation

Idée : La dérivée d'une fonction en un point (de sa courbe) est la pente de la fonction en ce point.
La dérivée généralise la notion de pente à une fonction. Elle dépend du point. Elle n'existe pas toujours.
Plus précisément : On se place en un point d'abscisse a de la courbe représentative d'une fonction f.
Si en faisant un zoom infini sur le point, la courbe se déforme et devient une droite (non verticale), alors :
- Cette droite est appelée **tangente à la courbe représentative de f en a**.
- On dit que la fonction f est **dérivable en a**, (elle admet une dérivée en a)
- La **dérivée de la fonction f en a, notée $f'(a)$** est la pente de la tangente (à f en a).

Définition. Soit I un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.
f est dérivable en a ssi $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie.
Si f est dérivable en a, la **dérivée de f en a** est $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \in \mathbb{R}$

Définition (Tangente). Si f est dérivable en a, **la tangente à C_f en a** est la droite passant par $A = \big(a; f(a)\big)$ et de coefficient directeur $f'(a)$.
Autrement dit c'est la droite d'équation : « $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ »

Définition. f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I.
Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée de la fonction f**, la fonction $f': I \to \mathbb{R}: x \mapsto f'(x)$

Définition. Composition de fonctions
La fonction **composée** de $u: I \to J$ suivie de $v: J \to \mathbb{R}$ est la fonction $v \circ u: I \to \mathbb{R}: x \mapsto (v \circ u)(x) = v\big(u(x)\big)$

Dérivées usuelles. A chaque ligne, f est définie et vaut l'expression de la colonne à gauche sur tout D_f.
On déduit que f est dérivable sur $D_{f'}$, et $f'(x)$ vaut l'expression dans la dernière colonne sur tout $D_{f'}$.

$f(x)$	Conditions	D_f	$D_{f'}$	$f'(x)$
c	$c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	1
ax	$a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
$ax+b$	$a, b \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
x^2		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
x^3		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$3x^2$
x^n	$n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
x^n	$n \in \mathbb{Z}, n < 0$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
x^r	$r \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	rx^{r-1}
$\frac{1}{x} = x^{-1}$		$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$		$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
e^x		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x
$\cos(x)$		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\ln(x)$		$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
$\lvert x \rvert$		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	1 si $x > 0$ -1 si $x < 0$

Opérations sur les dérivées. A chaque ligne :
- On suppose que u et v sont dérivables.
- On déduit que f est dérivable sur I.

f	Conditions	f'
$u+v$	$u, v: I \to \mathbb{R}$	$u' + v'$
$u-v$	$u, v: I \to \mathbb{R}$	$u' - v'$
$a \times u$	$a \in \mathbb{R},\ u: I \to \mathbb{R}$	au'
$au+b$	$a, b \in \mathbb{R},\ u: I \to \mathbb{R}$	au'
$u \times v$	$u, v: I \to \mathbb{R}$	$u'v + v'u$
$\frac{u}{v}$	$u: I \to \mathbb{R},\ v: I \to \mathbb{R}^*$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$
$v \circ u$	$u: I \to J$ et $v: J \to \mathbb{R}$	$(v' \circ u) \times u'$
u^2	$u: I \to \mathbb{R}$	$2uu'$
u^n	$n \in \mathbb{Z}, n \geq 0,\ u: I \to \mathbb{R}$	$nu^{n-1}u'$
u^n	$n \in \mathbb{Z}, n < 0,\ u: I \to \mathbb{R}^*$	$nu^{n-1}u'$
u^r	$r \in \mathbb{R},\ u: I \to \mathbb{R}_+^*$	$ru^{r-1}u'$
$\frac{1}{u} = u^{-1}$	$u: I \to \mathbb{R}^*$	$\frac{-u'}{u^2}$
$\sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$	$u: I \to \mathbb{R}_+^*$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}u'$
e^u	$u: I \to \mathbb{R}$	$e^u u'$
$\cos(u)$	$u: I \to \mathbb{R}$	$-\sin(u)\, u'$
$\sin(u)$	$u: I \to \mathbb{R}$	$\cos(u)\, u'$
$\ln(u)$	$u: I \to \mathbb{R}_+^*$	$\frac{u'}{u}$