Dérivation

Rappels : La pente d'une droite (non verticale) est le nombre relatif m qui indique de combien d'unités la droite monte (ou descend si $m < 0$) lorsqu'on avance d'une unité vers la droite.
La pente d'une droite d'équation « $y = mx + p$ » est son coefficient directeur m.

Idée : La dérivée d'une fonction en un point (de sa courbe) est la pente de la fonction en ce point.
C'est un nombre qui sert à mesurer la vitesse de variation de la fonction au point considéré.

La dérivée généralise la notion de pente à une fonction. Elle dépend du point. Elle n'existe pas toujours.

Définitions. On se place en un point d'abscisse a de la courbe représentative d'une fonction f.
Si en faisant un zoom infini sur le point, la courbe se déforme et devient une droite (non verticale), alors :
- Cette droite est appelée **tangente à la courbe représentative de f en a**.
- On dit que la fonction f est **dérivable en a**, (elle admet une dérivée en a)
- La **dérivée de la fonction f en a**, notée $f'(a)$ est la pente de la tangente (à f en a).

Propriété. La tangente est la droite passant par $A = (a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.
Propriété. L'équation de la tangente est : « $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ »
Définition. f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I.
Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée de la fonction f**,
la fonction $f': I \to \mathbb{R}: x \mapsto f'(x)$

Dérivées usuelles. A chaque ligne, f est définie et vaut l'expression de la colonne à gauche sur tout D_f.
On déduit que f est dérivable sur $D_{f'}$, et $f'(x)$ vaut l'expression dans la dernière colonne sur tout $D_{f'}$.

$f(x)$	Conditions	D_f	$D_{f'}$	$f'(x)$
c	$c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	1
ax	$a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
$ax+b$	$a, b \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
x^2		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
x^3		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$3x^2$
x^4		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$4x^3$
x^n	$n \geq 1$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x} = x^{-1}$		$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$
$\sqrt{x}$		$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x

Opérations sur les dérivées. A chaque ligne :
- On suppose que u et v sont dérivables.
- On déduit que f est dérivable sur I.

f	Conditions	f'
$u+v$	$u, v: I \to \mathbb{R}$	$u'+v'$
$u-v$	$u, v: I \to \mathbb{R}$	$u'-v'$
$a \times u$	$a \in \mathbb{R},\ u: I \to \mathbb{R}$	au'
$u \times v$	$u, v: I \to \mathbb{R}$	$u'v+v'u$
$\frac{1}{v}$	$v: I \to \mathbb{R}^*$	$\frac{-v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$u: I \to \mathbb{R}$ $v: I \to \mathbb{R}^*$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$
e^u	$u: I \to \mathbb{R}$	$u'e^u$