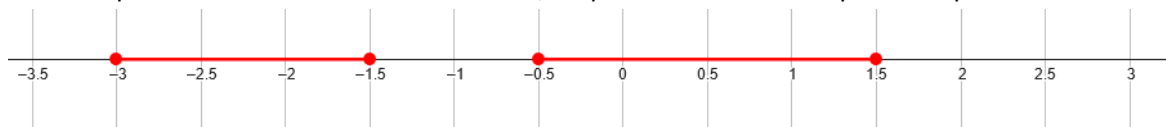


Intervalles - 1

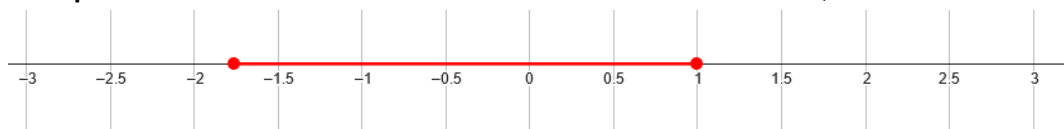
A. Comprendre la notion d'intervalle.

- On peut représenter les nombres réels sur un axe gradué.
- Pour représenter un *ensemble* de nombres, on peut colorier une ou plusieurs parties de l'axe.



Définition. Un **intervalle** est un *ensemble continu* de nombres réels.

Exemple. L'ensemble colorié ci-dessous des nombres entre $-1,75$ et 1 est un intervalle car il n'a qu'une partie.



- Un intervalle est délimité par *deux* valeurs, appelées **borne inférieure**, et **borne supérieure**. (Ici $-1,75$ et 1)
- Chacune des deux bornes peut être soit incluse, soit exclue, et peut être soit finie, soit infinie : ∞

B. Désigner ou représenter un intervalle.

Méthode. Pour désigner un intervalle à partir de sa représentation :

- On commence par écrire : *borne inférieure ; borne supérieure*
- On entoure avec des crochets tournés vers l'intérieur si la borne est incluse, vers l'extérieur sinon.

Exemples.

Schéma	Intervalle	Borne inf.	Borne sup.
	$] - 2 ; 1]$	-2 est exclus	1 est inclus
	$[- 1 ; 4]$	-1 est inclus	4 est inclus
	$[2 ; \infty [$	2 est inclus	∞ est exclus

- L'intervalle $] - \infty ; \infty [$ contient tous les nombres réels. C'est donc l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R} =] - \infty ; \infty [$

Exercice B1. Ecrire les intervalles correspondants :

- a)
- b)
- c)
- d)

Exercice B2. Représenter sur une *même* droite graduée les intervalles suivants avec 4 couleurs :

- a) $] 1 ; 4]$ b) $[- 0,5 ; 3]$
c) $] - \infty ; 2]$ d) $[0 ; + \infty [$

Exercice B3. Vrai ou faux

- (a) $3 \in [1 ; 5 [$ (b) $2 \in [2 ; 4]$
(c) $2 \in] 2 ; 3]$ (d) $6 \in] - \infty ; 5]$

Intervalles - 2

C. Traduire l'appartenance à un intervalle par une inégalité et réciproquement.

Méthode. Pour traduire l'appartenance d'un nombre x à un intervalle, en une inégalité :

- On peut commencer par écrire : $\text{borne inférieure} < x < \text{borne supérieure}$
- Si un crochet est tourné vers l'intérieur (si sa borne est **incluse**), on ajoute un trait sous le signe $<$ qui devient \leq
- Si une des bornes est infinie, on n'écrit qu'une inégalité simple. (Un nombre x vérifie toujours $-\infty < x$ et $x < \infty$.)

Exemples.

Schéma	Ecrire :	Revient à écrire :
	$x \in] - 2 ; 1]$	$-2 < x \leq 1$
	$x \in [- 1 ; 4]$	$-1 \leq x \leq 4$
		\Leftrightarrow
		\Leftrightarrow
	$x \in [2 ; \infty [$	$2 \leq x$ $(2 \leq x < \infty)$
		\Leftrightarrow

Méthode. Pour traduire une inégalité sur un nombre x , en l'appartenance de x à un intervalle :

- On peut commencer par écrire : $x \in \text{borne inférieure} ; \text{borne supérieure}$
- Si une inégalité est stricte $<$ on met un crochet vers l'extérieur. Si elle est large \leq on met un crochet vers l'intérieur.
- S'il n'y a qu'une inégalité simple, la borne manquante est ∞ ou $-\infty$ (suivant qu'elle est supérieure ou inférieure).

Exemple. Traduire l'inégalité par l'appartenance à un intervalle. $5 < x \leq 7 \Leftrightarrow$

Exercice C1. Traduire chaque appartenance par une inégalité.

- (a) $x \in [0 ; 2 [$ \Leftrightarrow
- (b) $y \in] - 5 ; 3]$ \Leftrightarrow
- (c) $2 + z \in [0 ; 3]$ \Leftrightarrow
- (d) $a \in] - \infty ; 5,88]$ \Leftrightarrow
- (e) $b \in] - 3,5 ; \infty [$ \Leftrightarrow

Exercice C2. Traduire chaque inégalité par l'appartenance à un intervalle.

- (a) $3 \leq x \leq 6$ \Leftrightarrow
- (b) $-5,2 < y \leq 2$ \Leftrightarrow
- (c) $1 \leq x - 2 < 3$ \Leftrightarrow
- (d) $c \leq -5$ \Leftrightarrow
- (e) $2 < z$ \Leftrightarrow

Intervalles - 3

D. Représenter et simplifier l'intersection de deux intervalles

Définition. L'intersection des intervalles I et J est l'ensemble noté $I \cap J$ des nombres qui appartiennent à I et à J .

Méthode. Pour représenter l'intersection de deux intervalles :

- Sur un axe gradué, on colorie les deux intervalles avec deux couleurs différentes.
- L'intersection est l'ensemble des points coloriés par les deux couleurs à la fois.

Exemple. Représenter puis simplifier $A =]3; 6[\cap [4; 8[$

Exercice D1. Représenter puis simplifier :

(a) $A = [-4; 5] \cap [0; 10]$

(b) $B =]-5; 2] \cap [4; 7]$

(c) $C = [10; 20[\cap [0; 15[$

(d) $D = [0; 8[\cap]2; 5]$

E. Traduire l'appartenance à une intersection d'intervalles

Exemple. Traduire $x \in]3; 6] \cap [4; 8[$ par des inégalités :

$$x \in]3; 6] \cap [4; 8[\Leftrightarrow x \in]3; 6] \text{ et } x \in [4; 8[\Leftrightarrow 3 < x \leq 6 \text{ et } 4 \leq x < 8$$

Exemple. Traduire $x \in [-2; 3[\cap [-3; 0]$ par des inégalités :

$$x \in [-2; 3[\cap [-3; 0] \Leftrightarrow$$

Exemple. Traduire $-3 \leq x < 0$ et $-2 < x < 5$ avec une intersection d'intervalles. Représenter puis simplifier.

$$-3 \leq x < 0 \text{ et } -2 < x < 5 \Leftrightarrow$$

Exercice E1. Traduire chaque affirmation par des inégalités :

(a) $x \in [-1; 1] \cap [0; 2] \Leftrightarrow$

(b) $z \in]3; 5] \cap]1; 4] \Leftrightarrow$

(c) $y \in [0; 2] \cap [2; 3[\Leftrightarrow$

Exercice E2. Traduire chaque affirmation par l'appartenance à une intersection. Simplifier.

(a) $3 < x < 10$ et $2 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow$

(b) $-5 \leq b \leq 2$ et $-10 < b < 2 \Leftrightarrow$

(c) $-2 < z < -1$ et $3 \leq z < 5 \Leftrightarrow$

F. Représenter et simplifier l'union de deux intervalles

Définition. L'union des intervalles I et J est l'ensemble noté $I \cup J$ des nombres qui appartiennent à I ou à J .

Méthode. Pour représenter l'union de deux intervalles :

- Sur un axe gradué, on colorie les deux intervalles.
- L'union est l'ensemble des points coloriés. Ce n'est pas forcément un intervalle.

Exemple. Représenter puis simplifier $A =]3; 6[\cup [4; 8[$

Exercice F1. Représenter puis simplifier *si possible* :

(a) $A = [-4; 5] \cup [0; 10]$

(b) $B =]-5; 2] \cup [4; 7]$

(c) $C = [10; 20[\cup [0; 15[$

(d) $D = [0; 8[\cup]2; 5]$

G. Traduire l'appartenance à une union d'intervalles

Exemple. Traduire $x \in]3; 6] \cup [4; 8[$ par des inégalités :

$$x \in]3; 6] \cup [4; 8[\Leftrightarrow x \in]3; 6] \text{ ou } x \in [4; 8[\Leftrightarrow 3 < x \leq 6 \text{ ou } 4 \leq x < 8$$

Exemple. Traduire $x \in [-2; 3[\cup [-3; 0]$ par des inégalités :

$$\Leftrightarrow \Leftrightarrow$$

Exemple. Traduire $-3 \leq x < 0$ ou $-2 < x < 5$ avec une union d'intervalles. Représenter puis simplifier.

$$-3 \leq x < 0 \text{ ou } -2 < x < 5 \Leftrightarrow \Leftrightarrow$$

Exercice G1. Traduire chaque affirmation par des inégalités :

(a) $x \in [-1; 1] \cup [0; 2] \Leftrightarrow$

(b) $z \in]3; 5] \cup]1; 4] \Leftrightarrow$

(c) $y \in [0; 2] \cup [2; 3[\Leftrightarrow$

Exercice G2. Traduire chaque affirmation par l'appartenance à une union. Simplifier *si possible*.

(a) $3 < x < 10$ ou $2 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow$

(b) $-5 \leq b \leq 2$ ou $-10 < b < 2 \Leftrightarrow$

(c) $-2 < z < -1$ ou $3 \leq z < 5 \Leftrightarrow$