Equations de droites

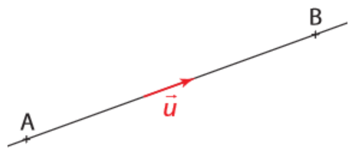
Idée. Un **vecteur directeur d'une droite** d est un vecteur aligné avec la droite dans un sens ou l'autre. Si on le trace en partant d'un point de d, il est inclus dans d.

Définition. Soit un vecteur $\vec{u}$, et une droite d dont A et B sont deux points distincts.
$\vec{u}$ est un **vecteur directeur de la droite** d si $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Exemple. Si $A = (2; -4)$ et $B = (6; 2)$ alors $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) car $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB) car $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$



Définition. Une **équation** est l'expression d'une égalité.

Exemple. " $x = 5$ " est une équation. x est une variable.
Contre-Exemple. " $3x + 6$ " n'est pas une équation car ce n'est pas une égalité.
Exemple. " $3y + 4x^2 = 7$ " est une équation (à 2 variables). x est la 1ère variable et y est la 2ème variable.
Le point $(-1; 1)$ vérifie l'équation car $3 \times (1) + 4 \times (-1)^2 = 3 + 4 = 7$.
Le point $(3; 0)$ ne vérifie pas l'équation car $3 \times (0) + 4 \times (3)^2 = 36 \neq 7$.
Le point $(1; 1)$ vérifie l'équation car $3 \times (1) + 4 \times (1)^2 = 3 + 4 = 7$.

Remarque. Une équation à deux variables, correspond toujours à un ensemble de points du plan :
L'ensemble de tous les points qui rendent l'équation vraie.

Propriété. Toute droite du plan d peut être décrite comme l'ensemble des points $(x; y)$ du plan vérifiant une équation de la forme $ax + by + c = 0$ où a et b sont des constantes réelles, pas toutes les deux nulles. La réciproque est vraie.

Définition. L'expression " $ax + by + c = 0$ " est **une équation cartésienne de la droite d.**
Remarque. Cette expression résume à elle seule toute la droite d.
Pour tout point $M = (x; y)$ du plan on peut écrire : $M \in d \Leftrightarrow ax + by + c = 0$

Remarque. Pour une même droite, l'équation cartésienne n'est jamais unique.

Exemple. $x + y = 0 \Leftrightarrow 123x + 123y = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0$
Ces équations cartésiennes représentent la même droite, car elles sont équivalentes.

Propriété. Toute droite du plan d non verticale correspond à une équation de la forme $y = mx + p$ où m et p sont des constantes réelles.
Définition. Dans ce cas l'expression " $y = mx + p$ " est **l'équation réduite de la droite d.**
Propriété. Toute droite du plan d verticale correspond à une équation de la forme $x = k$ où k est une constante réelle.
Définition. Dans ce cas l'expression " $x = k$ " est **l'équation réduite de la droite d.**
Remarque. Toute droite admet une unique équation sous forme réduite.

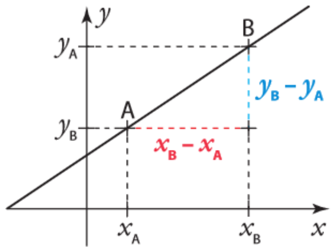
Exemple. Donner l'équation réduite de la droite d d'équation $3x + 5y = 2$.
$4x + 2y = 6 \Leftrightarrow 2y = -4x + 6 \Leftrightarrow y = -2x + 3$
L'équation réduite de d est donc $y = -2x + 3$. On a $m = -2$ et $p = 3$.

Hypothèse. Soit une droite d non verticale d'équation réduite $y = mx + p$

Définition. m s'appelle **le coefficient directeur** de la droite d, p est **l'ordonnée à l'origine** de d.

Propriété. Si $m > 0$ la droite « monte ». Si $m < 0$ la droite « descend ». Si $m = 0$ la droite est horizontale (parallèle à l'axe des abscisses.). m est aussi appelé **pente** de d.
m indique combien d'unités la droite monte (ou descend) si on va une unité à droite.

Propriété. Etant donnés $A = (x_A; y_A)$ et $B = (x_B; y_B)$ deux points du plan d'abscisses distinctes $(x_A \neq x_B)$, alors le coefficient directeur de la droite (AB) est $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$



Propriété. Un vecteur directeur d'une droite d d'équation cartésienne " $ax + by + c = 0$ " est $\binom{-b}{a}$.

Propriété. Le vecteur $\binom{1}{m}$ est un vecteur directeur de la droite d.

Propriété. Deux droites du plan peuvent être soit sécantes, soit parallèles (strictement), soit confondues.

Propriété. Deux droites d'équations réduites « $y = mx + p$ » et « $y = m'x + p'$ » sont parallèles ssi $m = m'$. De plus, si $p = p'$ alors elles sont confondues.

Propriété. Deux droites d'équations cartésiennes « $ax + by + c = 0$ » et « $a'x + b'y + c' = 0$ » sont parallèles ssi $\det\left(\binom{-b}{a}; \binom{-b'}{a'}\right) = 0$ ssi $-ba' + ab' = 0$ ssi $ab' = a'b$

Système d'équations

Définition. Système linéaire de deux équations à deux inconnues.
On dit qu'un couple de réels $(x;y)$ vérifie le système suivant de 2 équations linéaires du 1er degré à 2 inconnues « $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ » où a,b,c,a',b',c' sont des réels, si ce couple vérifie les deux équations.

Théorème. Un tel système a : soit une seule solution, soit aucune solution, soit une infinité de solutions.
Résoudre un tel système revient à chercher les coordonnées du point d'intersection, s'il y en a un, des deux droites dont les équations sont celles du système.

- Le système admet un seul couple solution ssi les deux droites sont sécantes ssi $\det\left(\begin{pmatrix}-b \\ a\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-b' \\ a'\end{pmatrix}\right) \neq 0$
- Le système admet aucune solution ssi les deux droites sont parallèles non confondues.
- Le système admet une infinité de solutions ssi les deux droites sont confondues.

Règle. Résolution d'un système par substitution.
Cette méthode consiste à isoler une inconnue à partir d'une équation et à la remplacer dans l'autre équation afin d'obtenir une nouvelle équation avec une seule inconnue.
On résout alors cette nouvelle équation puis on remplace l'inconnue trouvée dans la première équation afin de trouver la seconde inconnue.
Cette méthode a l'avantage d'être simple, mais le désavantage d'être lente et propice aux erreurs.

Exemple. Pour résoudre (E): $\begin{cases} -2x+y+3=0 \\ 3x-5y-2=0 \end{cases}$ on peut effectuer les étapes suivantes :

1. On isole y dans la première équation ; 2. On remplace y dans la 2ème équation pour n'avoir que du x
3. On résout la 2ème équation pour trouver x ; 4. On remplace x par sa valeur dans la 1ère pour trouver y.

Supposons que $(x;y)$ vérifie (E). Alors $\begin{cases} y=2x-3 \\ 3x-5y-2=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} y=2x-3 \\ 3x-5(2x-3)-2=0 \end{cases}$ donc

$\begin{cases} y=2x-3 \\ 3x-10x+15-2=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} y=2x-3 \\ -7x+13=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} y=2x-3 \\ x=\frac{13}{7} \end{cases}$ donc $\begin{cases} y=\frac{5}{7} \\ x=\frac{13}{7} \end{cases}$ c'est-à-dire $(x;y)=\left(\frac{13}{7};\frac{5}{7}\right)$.

Réciproquement si $(x;y)=\left(\frac{13}{7};\frac{5}{7}\right)$ alors $(x;y)$ vérifie (E). L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{\left(\frac{13}{7};\frac{5}{7}\right)\right\}$.

Règle. Résolution d'un système par combinaison.
Cette méthode consiste à multiplier les deux équations par des nombres de telle manière qu'en additionnant les équations membre à membre, une inconnue s'élimine. Ainsi, il n'y a plus qu'à résoudre une équation à une seule inconnue. Pour trouver la deuxième inconnue, on peut renouveler la même méthode ou substituer. Cette méthode est plus rapide mais plus astucieuse.

Exemple. Pour résoudre (E): $\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \begin{cases} -2x+y+3=0 \\ 3x-5y-2=0 \end{cases}$ on peut effectuer les étapes suivantes :

Supposons que $(x;y)$ vérifie (E). Alors $\begin{pmatrix} L_1 := 3L_1 \\ L_2 := 2L_2 \end{pmatrix} \begin{cases} -6x+3y+9=0 \\ 6x-10y-4=0 \end{cases}$ donc

$\begin{pmatrix} L_1 := L_1 \\ L_2 := L_1+L_2 \end{pmatrix} \begin{cases} -6x=-3y-9 \\ -7y+5=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=\frac{-3}{-6}y+\frac{-9}{-6} \\ y=\frac{5}{7} \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=\frac{13}{7} \\ y=\frac{5}{7} \end{cases}$ donc $(x;y)=\left(\frac{13}{7};\frac{5}{7}\right)$.

Réciproquement si $(x;y)=\left(\frac{13}{7};\frac{5}{7}\right)$ alors $(x;y)$ vérifie (E). L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{\left(\frac{13}{7};\frac{5}{7}\right)\right\}$.