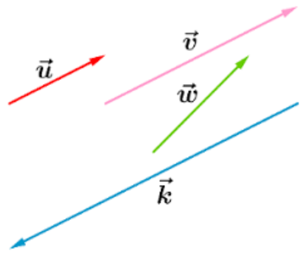
Colinéarité - 1

A. Identifier visuellement des vecteurs colinéaires

Définition. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** ssi il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
Autrement dit s'ils sont alignés, dans le même sens ou de sens opposés

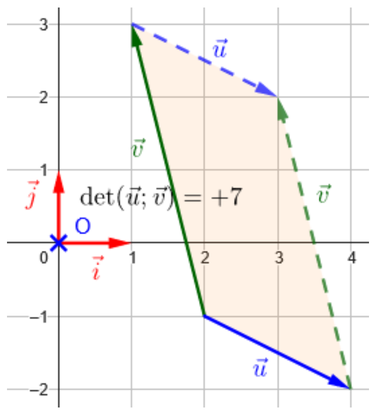


Exemple. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{k}$ sur l'image ci-contre sont colinéaires entre eux.
Le vecteur $\vec{w}$ n'est colinéaire avec aucun des autres vecteurs.

B. Calculer le déterminant de deux vecteurs

Définition. Dans un repère, le **déterminant** de deux vecteurs $\vec{u} = \binom{x}{y}$ et $\vec{v} = \binom{x'}{y'}$ est <u>le nombre</u> $\mathbf{det}(\vec{u};\vec{v}) = xy' - yx'$

Pour éviter la notation $\det\left(\binom{x}{y};\binom{x'}{y'}\right)$ on utilise la notation $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$



Exemple. Soit $\vec{u} = \binom{2}{-1}$ et $\vec{v} = \binom{-1}{4}$. Calculer $\det(\vec{u};\vec{v})$.

$\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} =$

Exercice B1. Soit $\vec{u} = \binom{2}{8}$, $\vec{v} = \binom{1}{-4}$, $\vec{w} = \binom{-0{,}5}{-2}$ et $\vec{r} = \binom{-2}{8}$. Calculer :

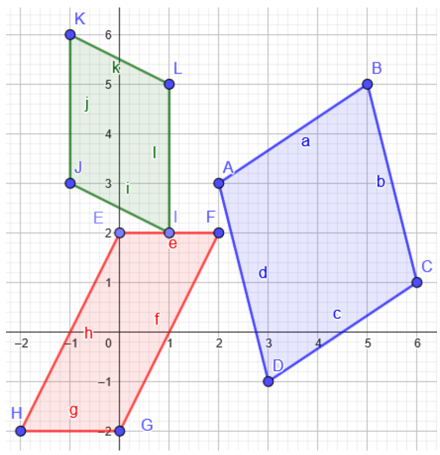
$\det(\vec{u};\vec{v}) =$

$\det(\vec{v};\vec{w}) =$

$\det(\vec{w};\vec{r}) =$

C. Calculer l'aire d'un parallélogramme délimité par deux vecteurs

Propriété. Dans un repère *orthonormé*, l'aire du parallélogramme formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ quand on les fait partir d'un même point, vaut $|\det(\vec{u};\vec{v})|$



Exercice C1. On suppose qu'une unité vaut 1 cm.
Calculer l'aire des parallélogrammes $\mathcal{A}_{ABCD}$, $\mathcal{A}_{EFGH}$, $\mathcal{A}_{IJKL}$

Le parallélogramme $ABCD$ est délimité par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 3 \times (-4) - 2 \times 1 = -12 - 3 = -15$
$\mathcal{A}_{ABCD} = |-15| = 15\ \text{cm}^2$

Colinéarité - 2

D. Tester la colinéarité de vecteurs par calcul

Propriété. Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est zéro. (Dans n'importe quel repère)

Exemple. Les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -15 \\ 6 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

$\det(\vec{u}; \vec{v}) =$

Exercice D1.

Les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Les vecteurs $\vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Les vecteurs $\vec{e} = \begin{pmatrix} -6 \\ 16 \end{pmatrix}$ et $\vec{f} = \begin{pmatrix} 9 \\ -24 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

E. Tester si deux droites sont parallèles par calcul

Méthode. Pour tester si deux droites sont parallèles :
- On détermine un vecteur directeur pour chaque droite.
- On teste la colinéarité des vecteurs directeurs, en comparant leur déterminant à zéro.

Exemple. Soit $A = (0; 3)$, $B = (2; 2)$, $C = (1; -2)$, $D = (-10\,; 3{,}5)$.
Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ou sécantes ?

$\overrightarrow{AB} =$ $\overrightarrow{CD} =$

$\det\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}\right) =$

Donc (AB) et (CD) sont

Exercice E1.

1) Soit $A = (-2; 1), B = (3; 4), C = (2; 2), D = (5; 4)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

2) Soit $E = (2; 2), F = (5; 4), G = (1; 4), H = (-2; 2)$. Les droites (EF) et (GH) sont-elles parallèles ?

3) Soit $I = (3; 4), J = (5; 0), K = (0; 5), L = (3; 0)$. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles parallèles ?

Colinéarité - 3

F. Tester si trois points sont alignés par calcul

Méthode. Pour tester si trois points sont alignés :

- On détermine deux vecteurs faisant intervenir ces trois points.
- On teste la colinéarité de ces vecteurs, en comparant leur déterminant à zéro.

Exemple. Les points $A = (1; 3)$, $B = (2; 6)$ et $C = (3; 9)$ sont-ils alignés ?

$\overrightarrow{AB} =$ $\overrightarrow{AC} =$

$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) =$

Donc

Exercice F1.

1) Soit $A = (2; 3)$, $B = (2; -1)$, $C = (2; 7)$. Les points A, B, C sont-ils alignés ?

2) Soit $D = (1; 4)$, $E = (-5; -4)$, $F = (4; 8)$. Les points D, E, F sont-ils alignés ?

3) Soit $G = (-3; 0)$, $H = (2; 3)$, $I = (4; 4)$. Le point I appartient-il à la droite (GH) ?