Etudes de signe - 1

A. Etudier le signe d'une fonction, méthode générale.

Méthode. Pour **étudier le signe d'une fonction $A(x)$** • On résout l'inéquation $A(x) \geq 0$ d'inconnue x. • Dans l'ensemble solution, la fonction A est positive • Ailleurs, la fonction A est négative. • On fait un tableau de signes résumant ces informations.	**Exemple**. Etudier le signe de $A(x) = -2x - 6$. $A(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq 6 \Leftrightarrow x \leq \frac{6}{-2} \Leftrightarrow x \leq -3$ Sur $]-\infty; -3]$ $A(x) \geq 0$ Sur $]-3; +\infty[$ $A(x) < 0$ Donc $A(x)$ est positif à gauche de -3, et négatif à droite.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$A(x)$		$+$	0	$-$	

Exercice A1. Etudier le signe des fonctions suivantes :

$A(x) = 2x + 4$

$B(x) = 8x - 5$

$C(x) = -3x + 12$

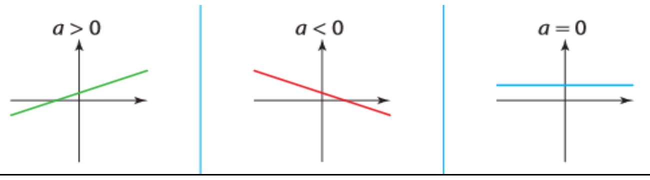
$D(x) = -7x$

B. Décrire les variations d'une fonction affine.

Définition. Une fonction **affine** est de la forme $f(x) = ax + b$. (où a et b sont des constantes).

Propriétés.

• La courbe d'une fonction affine est *une droite*.
- Si $a > 0$ alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$ alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = 0$ alors f est constante sur $\mathbb{R}$.



Exemple. Déterminer le sens de variations de la fonction $f(x) = 4x - 3$.

f est une fonction affine avec $a = 4 > 0$. Donc f est croissante.

Exercice B1. Donner les variations des fonctions suivantes :

$A(x) = 2x + 4$

$B(x) = 8x - 5$

$C(x) = -3x + 12$

$D(x) = -7x$

C. Dresser le tableau de signes d'une fonction affine.

Méthode 1. Pour **étudier le signe d'une *fonction affine*** • On peut faire une étude de signe générale comme en A.

Méthode 2. Pour **étudier le signe d'une *fonction affine*** • On calcule la valeur où $A(x) = 0$ avec la formule $-\frac{b}{a}$ • On dresse le tableau de signes : En 1ère ligne on a $\mid x \mid -\infty \quad -\frac{b}{a} \quad +\infty \mid$ En 2ème ligne : • Si $a > 0$ les signes sont $\mid - \quad 0 \quad + \mid$ • Si $a < 0$ les signes sont $\mid + \quad 0 \quad - \mid$ (Pour se rappeler des signes penser aux variations)	**Exemple**. Etudier le signe de $A(x) = -2x - 6$. $A(x)$ s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{-6}{-2} = -3$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$A(x)$		$+$	0	$-$	

$a = -2 < 0$

(La pente a est négative, donc la droite descend en allant vers la droite, donc $+$ d'abord, et $-$ ensuite.)

Etudes de signe - 2

Exercice C1. Etudier le signe des fonctions suivantes :

$A(x) = -3x + 9$

$B(x) = 5x - 15$

$C(x) = -10x - 30$

$D(x) = \frac{1}{2}x + 4$

D. <u>Dresser le tableau de signes d'un produit de fonctions.</u>

Méthode. Pour déterminer le tableau de signes d'une *fonction produit* :
- On commence par faire la première ligne pour les valeurs de x
- On détermine le tableau de signes de chaque facteur du produit, dans une nouvelle ligne à chaque fois.
- Les valeurs limites pour x sont toutes écrites sur la première ligne, dans l'ordre croissant.
- On prolonge toutes les séparations verticalement avec des pointillés.
- On ajoute une dernière ligne pour représenter la fonction produit.
- On obtient les signes de cette dernière ligne en appliquant la règle des signes aux lignes des facteurs.

Exemple. Etudier le signe de $h(x) = (3x + 4)(-2x + 6)$.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		3		$+\infty$
$3x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice D1. Etudier le signe des fonctions suivantes

$A(x) = (-2x + 4)(-3x - 9)$

$B(x) = (2x + 14)(6x - 24)$

$C(x) = (5x - 65)(7 - 2x)$

$D(x) = (-3x - 72)(-4x - 96)$

Etudes de signe - 3

E. Dresser le tableau de signes d'un quotient de fonctions.

Méthode. Pour déterminer le tableau de signes d'une *fonction quotient* :
- On commence par faire la première ligne pour les valeurs de x
- On détermine le tableau de signes du numérateur et du dénominateur, dans une nouvelle ligne à chaque fois.
- Les valeurs limites pour x sont toutes écrites sur la première ligne, dans l'ordre croissant.
- On prolonge toutes les séparations verticalement avec des pointillés.
- On ajoute une dernière ligne pour représenter la fonction quotient.
- On obtient les signes de cette dernière ligne en appliquant la règle des signes.

Exemple. Etudier le signe de $k(x) = \frac{3x-5}{2x+7}$

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
$k(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Exercice E1. Etudier le signe des fonctions suivantes

$A(x) = \frac{x+2}{-x}$

$B(x) = \frac{2x+3}{6x-4}$

$C(x) = \frac{-3x-9}{-2x+7}$

$D(x) = \frac{x}{6-3x}$

F. Résoudre une inéquation à partir d'un tableau de signes

Méthode. Pour résoudre une inéquation *dont un côté est zéro*, par exemple $C(x) > 0$
- On établit le tableau de signes de $C(x)$
- On se sert des signes de la dernière ligne, pour déterminer le(s) intervalle(s) solutions sur la première ligne.

Exercice F1. Résoudre les inéquations suivantes :

$(A) : (9x-1)(4-x) \leq 0$

$(B) : (3x+2)(4x-8) > 0$

Etudes de signe - 4

Méthode. Pour résoudre une inéquation générale, par exemple $A(x) > B(x)$

- On commence par poser $C(x) = A(x) - B(x)$ de sorte que l'inéquation se ramène au cas $C(x) > 0$.
- On simplifie $C(x)$ si nécessaire.
- On établit le tableau de signes de $C(x)$
- On se sert des signes de la dernière ligne, pour déterminer le(s) intervalle(s) solutions sur la première ligne.

Exercice F2. Résoudre les inéquations suivantes :

$(A) : \frac{1}{x} < 3$ $\qquad$ $(B) : \frac{x}{x+2} > 1$