Equation d'une droite du plan - 1

A. Tester si un point vérifie une équation à 2 variables

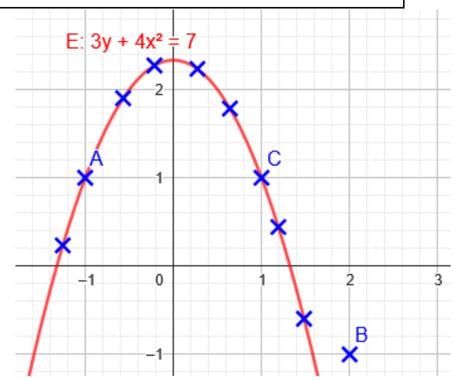
Définition. Une équation à *deux* variables, est une égalité comportant *deux* inconnues habituellement notées x, et y.

Exemples. $3y + 4x^2 = 7$ est une équation à 2 variables. x est la 1ère variable. y est la 2ème variable.

Le point $A = (-1; 1)$ vérifie-t-il l'équation (E) : $3y + 4x^2 = 7$?

$3(1) + 4(-1)^2 = 3 \times 1 + 4 \times 1 = 7.$ Donc A vérifie l'équation (E).

Le point $B = (2; -1)$ vérifie-t-il l'équation (E) : $3y + 4x^2 = 7$?



Le point $C = (1; 1)$ vérifie-t-il l'équation (E) : $3y + 4x^2 = 7$?

Remarque. Une équation à *deux* variables, représente un ensemble de points du *plan* : L'ensemble de tous les points qui rendent l'équation *vraie*.

Par exemple, l'équation $3y + 4x^2 = 7$ représente la courbe ci-contre :

Exercice A1.

$E = (-3; 2)$ vérifie-t-il l'équation (A) : $x^2 + 5y^2 = 11$?

$F = (-3; 4)$ vérifie-t-il l'équation (B) : $xy + y + 8 = 0$?

$G = (5; -1)$ vérifie-t-il l'équation (C) : $\frac{2x}{y} + 8 = -2$?

$H = (-2; 3)$ vérifie-t-il (D) : $(y + 5)(x - 3) = 40$?

B. Simplifier une équation à 2 variables

Méthode. Pour *simplifier* une équation à 2 variables : • Si nécessaire, on développe ce qui peut l'être. • Chaque terme à droite est déplacé à gauche, en changeant son signe. • On simplifie à gauche en factorisant par x, puis par y.	**Ex.** Simplifier (E) : $3x - y = -6(x + 2) + 2y$ $(E) \Leftrightarrow 3x - y = -6x - 6 \times 2 + 2y$ $(E) \Leftrightarrow 3x - y = -6x - 12 + 2y$ $\Leftrightarrow 3x - y + 6x + 12 - 2y = 0$ $\Leftrightarrow 9x - 3y + 12 = 0$

Exercice B1.

Simplifier l'équation (F) : $7(x + y) = 5 - 3y$

$(F) \Leftrightarrow$

Simplifier l'équation (G) : $2y - x = 5(2x + y)$

Simplifier l'équation (H) : $7x = -2y - 3(x - 5)$

Equation d'une droite du plan - 2

C. Déterminer les coefficients d'une équation cartésienne.

Définition. Une **équation cartésienne** est une équation à 2 variables de la forme $ax + by + c = 0$

Exemple. Mettre l'équation $(E) : 3x - 6y = -2x + 3$ sous forme cartésienne et préciser ses coefficients a, b, c.

$(E) \Leftrightarrow 3x - 6y + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 5x - 6y - 3 = 0 \Leftrightarrow 5x + (-6)y + (-3) = 0$
Donc $a = 5$; $b = -6$; $c = -3$

Exercice C1. Mettre chaque équation sous forme cartésienne et préciser ses coefficients a, b, c.

$(A) : -5y = -2x + 7$

$(A) \Leftrightarrow$

$(B) : 2(x + 3) = 5(y - 2)$

$(B) \Leftrightarrow$

D. Identifier le lieu géométrique d'une équation cartésienne

Propriété. Une équation à deux variables, représente *une droite* si et seulement si :
Elle peut être simplifiée en une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a \neq 0$ *ou* $b \neq 0$

Méthode. Pour identifier le lieu géométrique d'une équation linéaire :
- On la simplifie sous forme cartésienne $ax + by + c = 0$, puis on détermine les coefficients a, b, c.
- Si $b \neq 0$ et $a \neq 0$: (l'équation contient y et x) Alors : L'équation représente une droite oblique.
- Si $b \neq 0$ et $a = 0$: (l'équation contient y mais pas x) Alors : L'équation représente une droite horizontale.
- Si $b = 0$ et $a \neq 0$: (l'équation contient x mais pas y) Alors : L'équation représente une droite verticale.
- Si $b = 0$ et $a = 0$: (l'équation ne contient ni x, ni y) Alors : L'équation ne représente pas une droite.

Exercice D1. Identifier le lieu géométrique de chaque équation :

$(A) : 3x = 2y - 5$

$(A) \Leftrightarrow$

$(B) : 2y = 5$

$(C) : 6 = 3x - 2$

$(D) : 3x - 2 = 5x - 4 + 2x + 2$

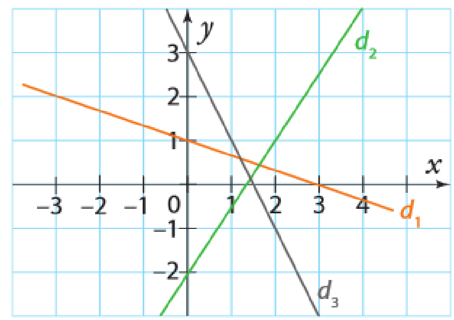
Equation d'une droite du plan - 3

E. <u>Déterminer l'équation réduite, la pente, l'ordonnée à l'origine, d'une droite par lecture graphique</u>

Méthode. Pour trouver *la pente* m d'une droite *non verticale* par lecture graphique :
- On choisit deux points A et B de la droite, si possible sur des graduations.
- On mesure le déplacement horizontal, et le déplacement vertical entre les deux points choisis.
- On calcule la pente $m = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
- Si la droite descend en allant vers la droite, la pente est négative, on vérifie que m a un signe $-$

Méthode. Pour trouver *l'ordonnée à l'origine* p d'une droite *non verticale* par lecture graphique :
- On regarde le point d'intersection entre la droite et l'axe vertical des ordonnées.
- On lit son ordonnée p

Exercice E1. Déterminer la pente et l'ordonnée à l'origine pour chaque droite :



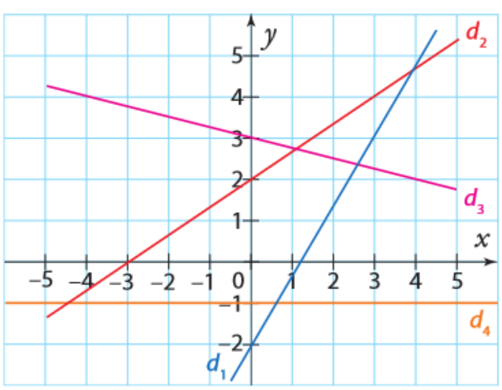
Pour d_1 : $m =$ $p =$

Pour d_2 : $m =$ $p =$

Pour d_3 : $m =$ $p =$

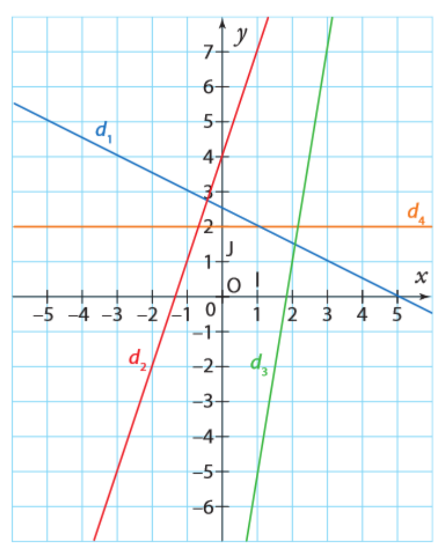
Méthode. Pour trouver *l'équation réduite* d'une droite *non verticale* par lecture graphique :
- On détermine sa pente m graphiquement.
- On détermine son ordonnée à l'origine p graphiquement.
- L'équation réduite de la droite est $y = mx + p$

Exercice E2. Déterminer l'équation réduite de chaque droite :



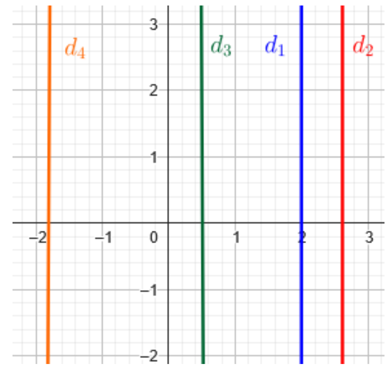
Pour d_1 on a $m =$ $p =$ donc $y =$

Exercice E3. Déterminer l'équation réduite de chaque droite :



Equation d'une droite du plan - 4

Méthode. Pour trouver *l'équation réduite* d'une droite *verticale* par lecture graphique :
- On regarde le point d'intersection entre la droite et l'axe horizontal des abscisses.
- On lit son abscisse k
- L'équation réduite de la droite est $x = k$



Exercice E4. Déterminer l'équation réduite de chaque droite verticale :

F. Déterminer l'équation réduite, la pente, l'ordonnée à l'origine, d'une droite à partir d'une équation cartésienne

Méthode 1. Pour réduire une équation cartésienne de droite $ax + by + c = 0$:
- Si $b \neq 0$ et $a \neq 0$: L'équation contient y et x.
  - On calcule la pente : $m = -\frac{a}{b}$
  - On calcule l'ordonnée à l'origine : $p = -\frac{c}{b}$
  - L'équation réduite est : $y = mx + p$

Exemple. Réduire l'équation (E) : $6x + 3y - 12 = 0$.

$m =$ $p =$

L'équation réduite de (E) est $y =$

- Si $b \neq 0$ et $a = 0$: L'équation contient y mais pas x.
  - La pente est : $m = 0$
  - On calcule l'ordonnée à l'origine : $p = -\frac{c}{b}$
  - L'équation réduite est : $y = p$

Exemple. Réduire l'équation (F) : $-8y + 12 = 0$.

$m =$ $p =$

L'équation réduite de (F) est $y =$

- Si $b = 0$ et $a \neq 0$: L'équation contient x mais pas y.
  - On calcule l'abscisse $-\frac{c}{a}$
  - L'équation réduite est : $x = -\frac{c}{a}$

Exemple. Réduire l'équation (G) : $2x - 10 = 0$.

L'équation réduite de (G) est $x =$

Méthode 2. Pour réduire une équation cartésienne $ax + by + c = 0$:
- Si $b \neq 0$: L'équation contient y.
  - On <u>isole y</u> pour trouver l'équation réduite
  - On simplifie l'équation sous la forme $y = mx + p$

Exemple. Réduire l'équation (E) : $6x + 3y - 12 = 0$

$(E) \Leftrightarrow$

- Si $b = 0$ et $a \neq 0$: L'équation contient x mais pas y.
  - On <u>isole x</u> pour trouver l'équation réduite
  - On simplifie l'équation sous la forme $x = k$

Exemple. Réduire l'équation (G) : $2x - 10 = 0$.

$(G) \Leftrightarrow$

Exercice F1. Déterminer par la méthode de votre choix, l'équation réduite de chaque équation :

(E) : $4x - 2y = 6$

(F) : $12 = -4x + 3$

(G) : $3x = -5y + 7 - 2x$

(H) : $5y = -2 + y$

Equation d'une droite du plan - 5

Exercice F2. Déterminer par la méthode de votre choix, l'équation réduite de chaque équation :

G. <u>Déterminer un vecteur directeur d'une droite à partir d'une équation cartésienne.</u>

H. <u>Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par un point donné, et de vecteur directeur donné.</u>