Vecteurs du plan

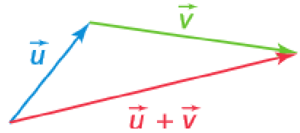
Définition. Etant donnés 2 points A et B du plan, la transformation qui transforme A en B est appelée **translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$**. Si A et B sont confondus, on parle de translation de vecteur nul noté $\vec{0}$.
Un vecteur correspond donc à une translation, et peut être représenté par une flèche, dont la position dans le plan est sans importance. Le vecteur nul est le seul vecteur de longueur nulle sans direction ni sens.

Notations. Etant donné 2 points A, B on note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur allant de A vers B et de longueur AB.
En toute généralité quand on ne connait pas A ni B on note un vecteur $\vec{u}$ avec une lettre minuscule.

Propriété. Deux vecteurs ayant même direction, même sens et même longueur sont égaux.

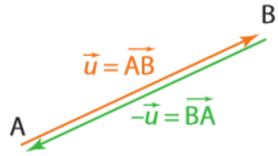
Propriété. Etant donné un vecteur $\vec{u}$ et un point A, on peut toujours trouver un point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Propriété. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ssi $ABDC$ est un parallélogramme. (Attention à l'ordre des lettres).



Définition. **La somme de vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ notée $\vec{u}+\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation obtenue par la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de celle de vecteur $\vec{v}$.

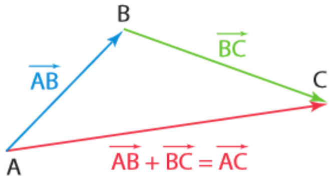
Définition. **Le vecteur opposé** du vecteur $\vec{u}$, noté $-\vec{u}$, est le vecteur qui possède la même direction et la même longueur que $\vec{u}$ mais un sens opposé. $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$



Propriétés. Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$:

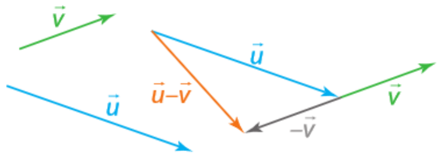
- $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$ (commutativité)
- $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ (associativité)
- $\vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{0}$
- $\vec{u}+\vec{0} = \vec{u}$

Propriété. **Relation de Chasles**.
Soit A, B, C trois points. Alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Attention, $AB+BC \geq AC$.



Exemple. $\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{DD} = \vec{0}$.

Définition. **Différence de deux vecteurs**
Le vecteur $\vec{u}-\vec{v}$ est défini par $\vec{u}-\vec{v} = \vec{u}+(-\vec{v})$ ce qui signifie que soustraire un vecteur, c'est additionner son opposé.



Rappel. Un **repère** R désigne 3 points O, I, J distincts et non alignés.
On note $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{R}}$ le <u>point</u> du plan dont les coordonnées dans R sont x et y.

Définition. Dans un repère $R = (O, I, J)$, **les coordonnées <u>d'un vecteur</u> $\vec{u}$**, sont les coordonnées de la pointe de sa flèche, quand on fait partir la flèche de l'origine. Plus précisément, ce sont les coordonnées dans R du point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. On note $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{R}}$ le vecteur $\vec{u}$ dont les coordonnées dans R sont x et y.

Propriété. Dans un repère R, si $A = (x_A; y_A)_R$ et $B = (x_B; y_B)_R$ alors $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}_R$

Exemple. Si $A = (-1; 2)$ et $B = (0; -4)$, alors $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$.

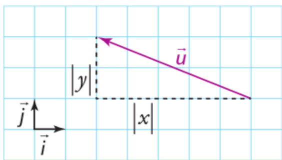
Hypothèse. On suppose le plan muni d'un repère orthogonal fixé $\boldsymbol{R_0}(O_0, I_0; J_0)$ servant de référence pour définir les longueurs. On <u>postule</u> que dans R_0, $[O_0 I_0]$ et $[O_0 J_0]$ sont de longueur 1.

Propriété. La longueur d'un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{R_0}$, notée $\|\vec{u}\|$ et lue « **norme de $\vec{u}$** » est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Propriété. La longueur d'un segment $[AB]$ est $\boldsymbol{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Définition. Un repère $R = (O; I; J)$ est **orthonormé** ssi R est <u>orthogonal</u> et $[OI]$ et $[OJ]$ sont <u>de longueur 1</u> (dans R_0)

Propriété. Les longueurs ne changent pas si on change de repère <u>orthonormé</u>.



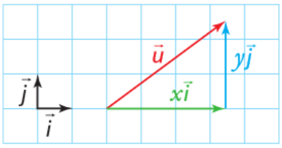
Propriété. Dans <u>tout</u> repère <u>orthonormé</u> R, si $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_R$ alors $\|\vec{u}\| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_R \right\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Propriété. Dans <u>tout</u> repère <u>orthonormé</u> R, $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \left\| \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}_R \right\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Exemple. Dans un repère orthonormé si $\vec{u} = \binom{3}{-4}$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$. $\vec{u}$ est de longueur 5.

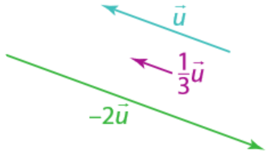
Remarque. On peut voir un repère $(O; I; J)$ du plan comme la donnée d'un point O et de deux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ de directions distinctes (en posant $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$). On écrit $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Remarque. Dans un repère $R = (O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ du plan, tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de façon unique sous la forme $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ où x, y sont réels. Ce sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans R.
On a toujours : $\binom{x}{y}_R = x\binom{1}{0}_R + y\binom{0}{1}_R = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$



Remarque. Un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ est orthonormé ssi il est orthogonal et $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont de norme 1.

Définition. Produit d'un vecteur par un réel.
Etant donné $k \in \mathbb{R}$ et un vecteur $\vec{u}$, le vecteur $\boldsymbol{k\vec{u}}$ est de même direction que celle de $\vec{u}$, de sens identique (resp. opposé) à $\vec{u}$ si $k > 0$ (resp. $k < 0$), de longueur $|k| \times \|\vec{u}\|$.



Propriétés. Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et tous réels k et k' :
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$

Propriété. Dans un même repère R, deux vecteurs $\vec{u} = \binom{x}{y}_R$ et $\vec{v} = \binom{x'}{y'}_R$ sont égaux ssi ils ont même coordonnées : $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \binom{x}{y}_R = \binom{x'}{y'}_R \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases} \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$

Propriété. **Coordonnées et opérations.** Soit un repère R et soit deux vecteurs $\vec{u} = \binom{x}{y}_R$ et $\vec{v} = \binom{x'}{y'}_R$

$$\vec{u} + \vec{v} = \binom{x}{y}_R + \binom{x'}{y'}_R = \binom{x + x'}{y + y'}_R \qquad \vec{u} - \vec{v} = \binom{x}{y}_R - \binom{x'}{y'}_R = \binom{x - x'}{y - y'}_R$$

$$-\vec{u} = -\binom{x}{y}_R = \binom{-x}{-y}_R \qquad k\vec{u} = k\binom{x}{y}_R = \binom{kx}{ky}_R$$

Exemples. $\binom{2}{-5} + \binom{-1}{4} = \binom{1}{-1}$. $\binom{2}{-5} - \binom{-1}{4} = \binom{3}{-9}$. $-\binom{1}{-1} = \binom{-1}{1}$. $3\binom{2}{-4} = \binom{6}{-12}$

Propriété. M est le milieu d'un segment $[AB]$ ssi $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ ssi $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ssi $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

Définition. Deux vecteurs <u>non nuls</u> $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** ssi leurs directions sont perpendiculaires.

Définition. Deux vecteurs <u>non nuls</u> $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** ssi ils ont la même direction ssi il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Exemple. $\binom{3}{2}$ et $\binom{-9}{-6}$ sont colinéaires car $\binom{-9}{-6} = -3\binom{3}{2}$. (ou ce qui revient au même $\binom{3}{2} = -\frac{1}{3}\binom{-9}{-6}$)

Définition. Le **déterminant** de deux vecteurs $\vec{u} = \binom{x}{y}_R$ et $\vec{v} = \binom{x'}{y'}_R$ est $\mathbf{det}(\vec{\boldsymbol{u}}; \vec{\boldsymbol{v}}) = xy' - x'y$.

Exemple. Si $\vec{u} = \binom{3}{2}$ et $\vec{v} = \binom{1}{-1}$, alors $\det(\vec{u}; \vec{v}) = (3)(-1) - (1)(2) = -3 - 2 = -5$.

Propriété. Dans un repère orthonormé, l'aire du parallélogramme formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut $|\det(\vec{u}; \vec{v})|$

Propriété. Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul (dans n'importe quel repère R).

Exemple. $\det\left(\binom{3}{2}; \binom{-9}{-6}\right) = (3)(-6) - (2)(-9) = 18 - (-18) = 0$ donc $\binom{3}{2}$ et $\binom{-9}{-6}$ sont bien colinéaires.

Propriété. Deux droites (AB) et (MN) sont parallèles ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires ssi $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{MN}) = 0$.

Propriété. Trois points distincts A, B et C sont alignés ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ssi $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$.

Exemple. Les points $A = (1; 3)$, $B = (2; 6)$ et $C = (3; 9)$ sont-ils alignés ?

$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \det\left(\binom{2-1}{6-3}; \binom{3-1}{9-3}\right) = \det\left(\binom{1}{3}; \binom{2}{6}\right) = 1 \times 6 - 2 \times 3 = 0$. Donc A, B et C sont alignés.