Fonctions numériques

Définition. Une fonction f est un ensemble d'associations.
Définir une fonction f signifie : associer à chaque chose x d'un ensemble D, une unique chose y située dans un ensemble E.
y est **l'image de x par la fonction f**, y est notée $f(x)$, et lue « f de x » pour rappeler qu'elle dépend de x
D est **l'ensemble de définition** de la fonction f et E **est l'ensemble d'arrivée** de la fonction f.
Pour dire que f est une fonction de D vers E, on écrit $\boldsymbol{f: D \to E}$
On étudiera surtout les fonctions numériques, où D et E seront des ensembles de nombres.

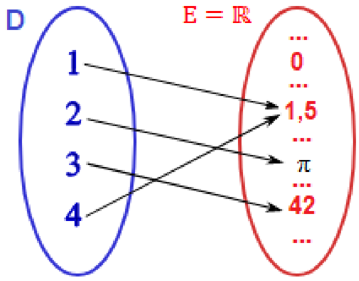
Propriété. Une image d'un certain nombre x par une fonction f est toujours unique.

Définition. Si y est l'image de x, on a l'égalité $f(x) = y$ et x est **un antécédent de y par f**.
Propriété. Un même nombre y peut avoir 0, 1 ou plusieurs antécédents par la fonction f.

Exemple. On peut définir une fonction avec un tableau de valeurs :

x	1	2	3	4
$f(x)$	1,5	π	42	1,5

Cela signifie que $f: \{0; 1; 2; 3\} \to \mathbb{R}$. On a :
$f(1) = 1{,}5$; $f(2) = \pi$; $f(3) = 42$; $f(4) = 1{,}5$

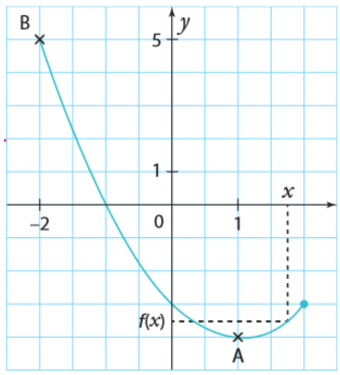


Définition. **Donner l'expression algébrique d'une fonction** c'est écrire $f(x)$ en fonction de x.

Exemple. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto 3x + 5$.
Alors par exemple $g(7) = 3 \times (7) + 5 = 26$; $g(1) = 8$; $g(0) = 5$; $g(-3) = 3 \times (-3) + 5 = -4$
Exemple. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = (6 - x)^2$
Alors par exemple $h(3) = \big(6 - (3)\big)^2 = 3^2 = 9$. $h(-2) = \big(6 - (-2)\big)^2 = (6 + 2)^2 = 8^2 = 64$. $h(6) = 0$.
Remarque. Il est courant de ne pas préciser l'ensemble d'arrivée car on considère qu'il est évident ($\mathbb{R}$).
Exemple. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x - 4$.
Il faut comprendre que g est à valeurs dans $\mathbb{R}$, autrement dit $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Remarque. Il est courant de ne pas préciser l'ensemble de définition de f. Dans ce cas, il faut chercher l'ensemble le plus grand possible pour lequel l'expression algébrique de f a un sens dans le contexte.
Exemple. Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{1}{x} + 2$
Il faut comprendre que f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et que l'ensemble de définition D est une partie de $\mathbb{R}$.
D'après l'expression on voit que $f(x)$ est défini si $x \neq 0$ mais pas en $x = 0$. Donc $D = \mathbb{R}^*$ est l'ensemble des réels non nul. Il faut donc comprendre que $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

Définition. Dans un repère du plan R, **la courbe représentative d'une fonction f**$: D \to \mathbb{R}$ est l'ensemble des points de coordonnées $\big(x; f(x)\big)$ où $x \in D$. Un point $(x; y)$ se trouve sur la courbe ssi $y = f(x)$.
C'est la courbe d'équation « $y = f(x)$ ».

Exemple. Soit la fonction $f: [-2; 2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x - 1)^2 - 4$.
On a tracé la courbe C_f représentative de f sur le graphe ci-contre.
Il s'agit de la courbe d'équation $y = (x - 1)^2 - 4$.



Exemple. Etant donné un $x \in D$ et ayant calculé $y = f(x)$, on peut vérifier graphiquement que $y = f(x)$.
Il suffit de regarder le point $(x; y)$ et de vérifier s'il se trouve sur la courbe C_f.
En $x = 1$ on calcule $y = f(1) = \big((1) - 1\big)^2 - 4 = 0^2 - 4 = -4$, donc le point $A = (1; -4)$ doit se trouver sur C_f. C'est bien le cas.
Exemple. On peut lire graphiquement la valeur de $f(x)$ pour un x donné.
Si on cherche à déterminer $f(-2)$, on regarde le point de la courbe situé à $x = 2$, ici c'est B. On regarde ensuite l'ordonnée y de B. On voit que le point $B = (-2; 5)$ donc $y = 5$, ce qui signifie que $f(-2) = 5$.
Vérifions le. $f(-2) = \big((-2) - 1\big)^2 - 4 = (-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$.
Remarque. Une droite verticale ne peut couper une courbe de fonction qu'une seule fois au maximum.
Remarque. Une droite horizontale peut couper une courbe de fonction, 0, 1, ou plusieurs fois.