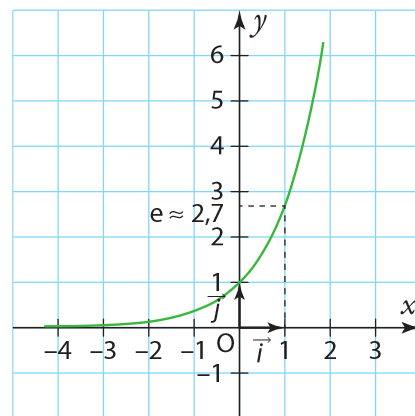


Fonction exponentielle

Propriété (admise). Il existe une unique fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur \mathbb{R} telle que $f(0) = 1$ et $f' = f$

Définition. Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**. On la note **exp**. Sa courbe représentative est représentée ci-contre



Propriétés. $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur \mathbb{R} .
 $\exp' = \exp$ La dérivée de l'exponentielle est elle-même.
 $\exp(0) = 1$

Notation exponentielle. Les propriétés de l'exponentielle sont similaires à celles des puissances. Pour cette raison on préfère la notation e^x plus compacte que $\exp(x)$.

Définition. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $e^x = \exp(x)$

Définition. Le nombre e est l'image de 1 par la fonction exponentielle. $e = e^1 = \exp(1) \approx 2,718 \dots$

Hypothèse. Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

Propriété. $e^{x+y} = e^x \times e^y$

Exemple. Simplifier $e^5 \times e^3$
 $e^5 \times e^3 = e^{5+3} = e^8$

Propriété. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

Exemple. Simplifier $\frac{1}{e^{-3}}$
 $\frac{1}{e^{-3}} = e^{-(-3)} = e^3$

Remarque. $e^{-1} = \frac{1}{e}$

Propriété. $e^{x-y} = e^x \times e^{-y} = \frac{e^x}{e^y}$

Exemple. Simplifier $\frac{e^7}{e^{-3}}$
 $\frac{e^7}{e^{-3}} = e^{7-(-3)} = e^{10}$

Propriété. $(e^x)^y = e^{xy}$

Exemple. Simplifier $(e^{-2x})^3$
 $(e^{-2x})^3 = e^{(-2x)(3)} = e^{-6x}$

Propriété. $\sqrt[n]{e} = e^{\frac{1}{n}}$ plus généralement $\sqrt[n]{e} = e^{\frac{1}{n}}$

Exemple. Simplifier $\sqrt{e^{4x}}$

$$\sqrt{e^{4x}} = (e^{4x})^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \times 4x} = e^{2x}$$

Propriété. $e^x > 0$

Preuve. $e^x = e^{2 \times \frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0$ car un carré est ≥ 0 .

De plus, s'il existait $x \in \mathbb{R}$ tel que $e^x = 0$, on aurait $1 = e^0 = e^{x-x} = e^x e^{-x} = 0$. Absurde, donc $e^x > 0$.

Propriété. \exp est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Propriété. $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

Exemple. Résoudre l'équation (E) $\Leftrightarrow e^{2x+3} = e^{-3x}$
 (E) $\Leftrightarrow 2x + 3 = -3x \Leftrightarrow 5x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}$

Propriété. $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Exemple. Résoudre l'inéquation (I) $\Leftrightarrow e^{3x} < e^9$
 (I) $\Leftrightarrow 3x < 9 \Leftrightarrow x < \frac{9}{3} \Leftrightarrow x < 3$

Propriété. Si $f(x) = e^{ax+b}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = ae^{ax+b}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple. Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-8x+2}$. Alors $f'(x) = -8e^{-8x+2}$

Propriétés. Variations d'une fonction exponentielle paramétrée par $k \in \mathbb{R}$

Si $k < 0$, $x \mapsto e^{kx}$ est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

Si $k > 0$, $x \mapsto e^{kx}$ est strictement croissante sur \mathbb{R}

Remarque. A quoi sert la fonction exponentielle ? C'est une solution particulière de l'équation différentielle " $f' = f$ ". Les solutions d'une équation différentielle plus générale de la forme " $f' = af + b$ " où a, b sont des constantes, peuvent s'écrire à l'aide de la fonction exponentielle. On rencontre ce type d'équations différentielles en physique, en économie, en biologie, ... Pour savoir manipuler leurs solutions, il suffit de savoir manipuler la fonction $x \mapsto e^x$.