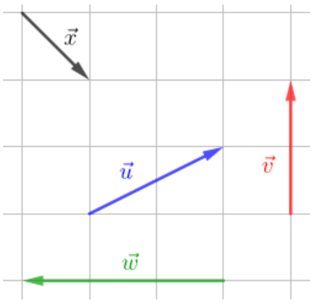
Vecteurs du plan

Définition. On note $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ le <u>point</u> du plan de coordonnées x et y. (x et y sont des nombres réels)

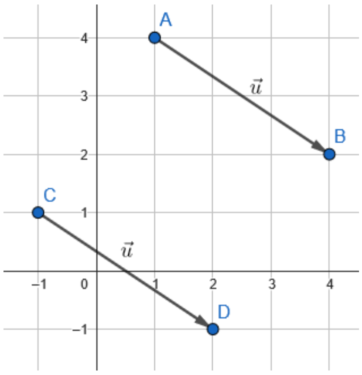
Définition. On définit un nouvel objet noté $\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}$, appelé **vecteur du plan** de coordonnées x et y.

Idées. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ un vecteur du plan.

$\vec{u}$ représente la translation « se déplacer horizontalement de x unités et verticalement de y unités ».
On représente le vecteur $\vec{u}$ par <u>une flèche</u> qui va à droite/gauche de x unités et en haut/bas de y unités.
Visuellement, deux vecteurs sont identiques s'ils pointent dans la même direction, et ont la même longueur.



Exemples. Sur l'image à gauche, on a représenté plusieurs vecteurs : $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix}-3\\ 0\end{pmatrix}$ $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

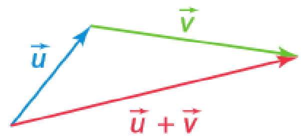


Exemple. Sur l'image à droite, $\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}$ représente l'idée : « se déplacer de 3 unités à droite et 2 unités vers le bas ».
On a $A + \vec{u} = (1;4) + \begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix} = (1+3;4-2) = (4;2) = B$. De même, $C + \vec{u} = (-1;1) + \begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix} = D$. Les 2 flèches représentent <u>le même</u> vecteur $\vec{u}$. La position d'un vecteur est sans importance.

Définition. Pour tout point $M = (x_M; y_M)$, on note $\boldsymbol{M + \vec{u}} = (x_M + x; y_M + y)$
Si on fait partir la flèche $\vec{u}$ depuis M, alors $M + \vec{u}$ est <u>le point</u> au bout de la flèche.

Définition. On note $\vec{\boldsymbol{0}} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ le **vecteur nul**. Il représente la translation « immobile »

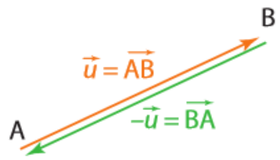
Définition. Pour tous $\vec{u} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\vec{u} + \vec{v}} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+x'\\ y+y'\end{pmatrix}$.
Additionner des vecteurs, c'est appliquer des translations successivement.



Visuellement il suffit de les mettre bout à bout, car $M + (\vec{u} + \vec{v}) = (M + \vec{u}) + \vec{v}$

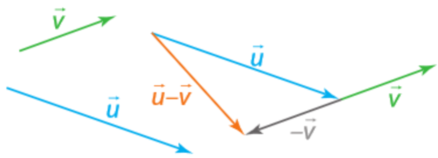
Exemples. $\begin{pmatrix}2\\ -5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\ 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\ -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

Définition. Pour tout $\vec{u} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{-\vec{u}} = -\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\ -y\end{pmatrix}$.
Le vecteur opposé a la même longueur mais pointe dans la direction opposée.



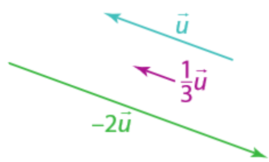
Exemples. $-\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$ $-\begin{pmatrix}-5\\ 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ -8\end{pmatrix}$

Définition. Pour tous $\vec{u} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\vec{u} - \vec{v}} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-x'\\ y-y'\end{pmatrix}$
$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ donc soustraire un vecteur, c'est additionner son opposé.



Exemple. $\begin{pmatrix}2\\ -5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\ 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ -9\end{pmatrix}$

Définition. Pour tout $\vec{u} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ et tout réel k, $\boldsymbol{k\vec{u}} = k\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}kx\\ ky\end{pmatrix}$
Multiplier un vecteur par $k \geq 0$, c'est multiplier sa longueur par k sans changer de sens.
Multiplier un vecteur par $k < 0$, c'est multiplier sa longueur par $|k|$ et inverser son sens

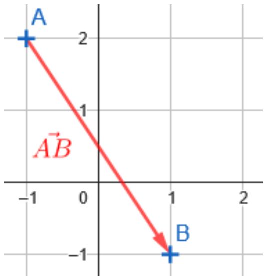


Exemples. $3\begin{pmatrix}2\\ -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\ -12\end{pmatrix}$ $-4\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\ 4\end{pmatrix}$

Propriétés algébriques. Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tous réels k et k' :

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$
- $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $0\vec{u} = \vec{0}$

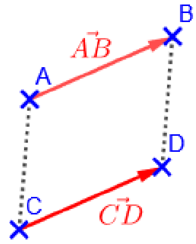
Définition. Etant donnés deux points $A = (x_A; y_A)$ et $B = (x_B; y_B)$ on note $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.



Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ représente la translation qui déplace notamment le point A au point B, car $A + \overrightarrow{AB} = B$.

La flèche représentant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donc souvent représentée allant du point A au point B.

Exemple. Si $A = (-1; 2)$ et $B = (1; -1)$, alors $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} (1) - (-1) \\ (-1) - (2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.



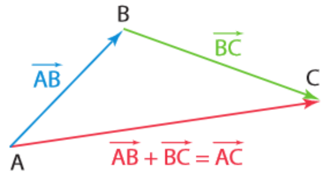
Propriété. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ssi $ABDC$ est un parallélogramme. (Attention à l'ordre des lettres).

Propriétés. • Pour tous points A, B on a $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. • Pour tout point A, on a $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Propriétés. Soit un vecteur $\vec{u}$.

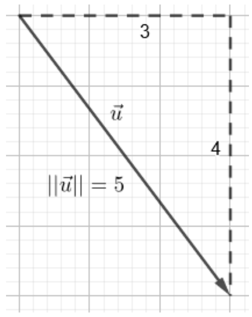
• Pour tout point A, on peut écrire $\vec{u}$ sous la forme $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ pour un certain point B.

• Pour tout point A, on peut écrire $\vec{u}$ sous la forme $\vec{u} = \overrightarrow{CA}$ pour un certain point C.



Propriété. Relation de Chasles.
Soit A, B, C trois points. Alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Attention, $AB + BC \geq AC$.

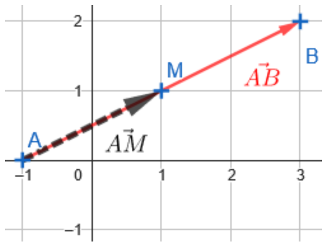
Exemple. $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{DD} = \vec{0}$.



Définition. La **norme (ou longueur) d'un vecteur** $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, est définie par $\|\vec{\boldsymbol{u}}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Définition. La **longueur de** $[AB]$ est $\boldsymbol{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| = \left\| \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

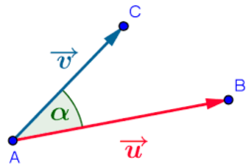
Exemple. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$. $\vec{u}$ est de longueur 5.



Définition. M est le **milieu d'un segment** $[AB]$ ssi $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

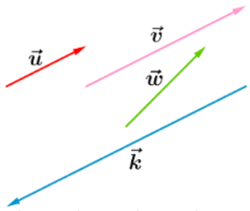
Propriété. Les coordonnées du milieu M de $[AB]$ sont $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

Exemple. Si $A = (-1; 0)$ et $B = (3; 2)$ alors le milieu est $M = \left(\frac{-1+3}{2}; \frac{0+2}{2}\right) = (1; 1)$



Remarque. A ce stade, on peut techniquement définir, la **longueur d'une courbe**, puis **l'angle géométrique entre deux vecteurs** (non nuls).

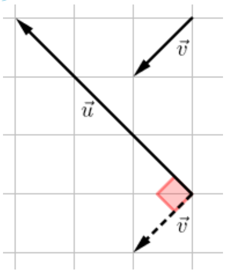
Définition. Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires**, s'ils forment un angle nul ou plat (0° ou 180°), autrement dit s'ils sont alignés, dans le même sens ou de sens opposés.

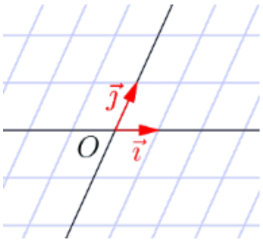


Exemple. Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{k}$ sur l'image ci-contre sont colinéaires entre eux.
Le vecteur $\vec{w}$ n'est colinéaire avec aucun des autres vecteurs.

Définition. Deux vecteurs non nuls sont **orthogonaux**, s'ils forment un angle droit (90°).

Exemple. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sur l'image ci-contre sont orthogonaux, car si on les fait partir du même point, ils forment un angle droit.

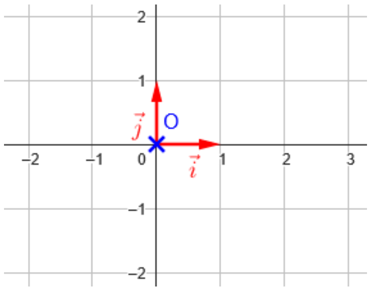




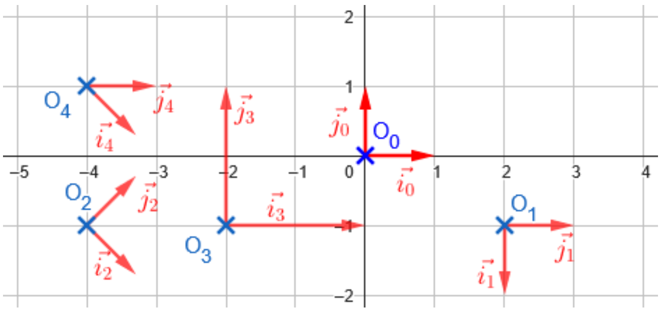
Définition. Un **repère** désigne la donnée d'un point O et de vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ non colinéaires.
On note $(\boldsymbol{O}; \vec{\boldsymbol{\imath}}; \vec{\boldsymbol{\jmath}})$ un tel repère.
Un repère sert à repérer les coordonnées, les longueurs, aires, angles, etc..

Remarque. Quand on change de repère, les coordonnées d'un vecteur ou d'un point changent.
Cependant, les définitions et formules précédentes restent valables, si on les écrit dans un même repère R.
Attention : Les longueurs, aires et angles sont des notions a priori relatives au repère utilisé.

Définition. On note $\boldsymbol{R_0} = \left((0;0); \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ le **repère canonique**. Jusqu'ici, on a toujours utilisé R_0.



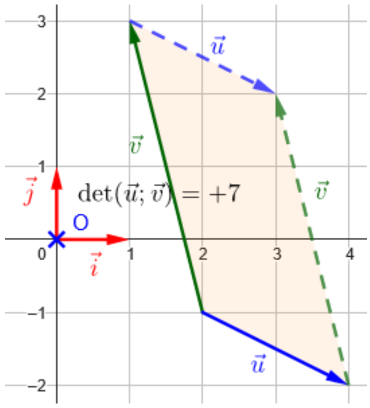
Définition. Un **repère** $R = (O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ est **orthonormé** si $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux et de longueur 1 (dans R_0).
Propriété. Les longueurs, aires et angles géométriques sont identiques dans tout repère *orthonormé*.
Exemple. Le repère canonique R_0 est en particulier orthonormé.



Exemples. Ici on considère R_0 comme le repère de référence.
Ci-contre, les repères R_0, R_1 et R_2 sont orthonormés.
Les longueurs ont donc la même mesure dans R_0,R_1, R_2.
R_3 n'est pas orthonormé car ses vecteurs sont de longueur 2 (en les mesurant dans R_0).
R_4 n'est pas orthonormé car ses vecteurs ne sont pas orthogonaux (au sens de R_0).

Définition. Le **déterminant** de deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_R$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}_R$ est

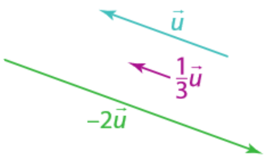
$\mathbf{det}(\vec{\boldsymbol{u}}; \vec{\boldsymbol{v}}) = \begin{vmatrix}\boldsymbol{x} & \boldsymbol{x'}\\ \boldsymbol{y} & \boldsymbol{y'}\end{vmatrix} = xy' - x'y$. (A priori le déterminant dépend du repère R)



Exemple. Si $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$, alors

$\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 4\end{vmatrix} = (2)(4) - (-1)(-1) = 8 - 1 = 7$

Propriété. Dans un repère orthonormé, l'aire du parallélogramme formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ quand on les fait partir d'un même point, vaut $|\det(\vec{u}; \vec{v})|$
Exemple. En supposant que l'unité de base est le cm, l'aire du parallélogramme précédent délimité par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $|\det(\vec{u}; \vec{v})| = 7\ \mathrm{cm}^2$



Propriété. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** ssi il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
Exemples. $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-9\\-6\end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\begin{pmatrix}-9\\-6\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.
Les vecteurs ci-contre sont colinéaires entre eux puisqu'ils sont proportionnels à $\vec{u}$.

Propriété. Deux vecteurs sont colinéaires ssi leur déterminant est nul. (dans n'importe quel repère)
Exemple. $\begin{vmatrix}3 & -9\\ 2 & -6\end{vmatrix} = (3)(-6) - (2)(-9) = 18 - (-18) = 0$ donc $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-9\\-6\end{pmatrix}$ sont bien colinéaires.

Propriété. Deux droites (AB) et (MN) sont parallèles ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires ssi $\det\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{MN}\right) = 0$.
Propriété. Trois points distincts A, B et C sont alignés ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ssi $\det\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = 0$.
Exemple. Les points $A = (1;3)$, $B = (2;6)$ et $C = (3;9)$ sont-ils alignés ?

$\det\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix}(2-1) & (3-1)\\ (6-3) & (9-3)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{vmatrix} = 1 \times 6 - 2 \times 3 = 0$. Donc A, B et C sont alignés.