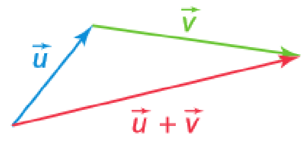
Géométrie repérée

Rappels

Définition. Soit $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur du plan. On représente le vecteur $\vec{u}$ par <u>une flèche</u>
$\vec{u}$ représente la translation « se déplacer de x unités vers la droite/gauche et de y unités vers le haut/bas ».
Visuellement, deux vecteurs sont égaux s'ils pointent dans la même direction, et ont la même longueur.

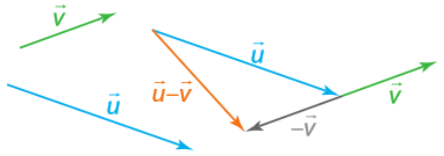
Définition. Pour tous $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\vec{u}+\vec{v}}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

Additionner des vecteurs, c'est appliquer des translations successivement.



Définition. Pour tous $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\vec{u}-\vec{v}}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x'\\y-y'\end{pmatrix}$

$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$ donc soustraire un vecteur, c'est additionner son opposé.

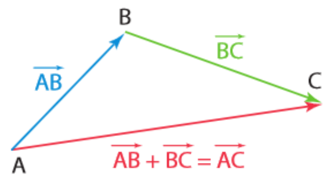


Définition. Pour tout $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et tout réel k, $\boldsymbol{k\vec{u}}=k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$

Multiplier un vecteur par $k\geq 0$, c'est multiplier sa longueur par k.
Multiplier un vecteur par $k<0$, c'est multiplier sa longueur par $|k|$ et inverser son sens.

Définition. Etant donnés deux points $A=(x_A;y_A)$ et $B=(x_B;y_B)$ on note $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}}=\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ représente la translation qui déplace notamment le point A au point B

Propriété. **Relation de Chasles.**
Soit A,B,C trois points. Alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.   Attention, $AB+BC\geq AC$.



Définition. La **longueur d'un vecteur** $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, notée $\|\vec{u}\|$ et lue « **norme de $\vec{u}$** » est $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Définition. La **longueur d'un segment** $[AB]$ est $\boldsymbol{AB}=\|\overrightarrow{AB}\|=\left\|\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Propriété. M est le milieu d'un segment $[AB]$ ssi $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$ ssi $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
Les coordonnées du milieu M d'un segment $[AB]$ sont donc : $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}$ et $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$

Exemple. Si $A=(3;5)$ et $B=(9;-1)$ alors le milieu de $[AB]$ est le point $M=\left(\frac{3+9}{2};\frac{5+(-1)}{2}\right)=(6;2)$

Définition. Une **équation** est l'expression d'une égalité, par exemple « $3y+4x^2=7$ ».
Définition et exemple. Un point $(a;b)$ **vérifie l'équation** « $3y+4x^2=7$ » ssi $3b+4a^2=7$.

Exemples. Le point $(-1;1)$ vérifie l'équation « $3y+4x^2=7$ » car $3\times(1)+4\times(-1)^2=3+4=7$.
Le point $(1;1)$ vérifie aussi l'équation « $3y+4x^2=7$ ». Le point $(0;0)$ ne la vérifie pas car $0\neq 7$.

Remarque. Une équation à <u>deux</u> variables réelles, correspond donc toujours à un ensemble de points du <u>plan</u> : L'ensemble de tous les points qui rendent l'équation vraie.

Propriété. Toute droite du plan d peut être décrite comme l'ensemble des points $(x;y)$ du plan vérifiant une équation de la forme « $ax+by+c=0$ » où a et b sont des constantes réelles, <u>pas toutes les 2 nulles</u>
Définition. L'expression « $ax+by+c=0$ » est **<u>une</u> équation cartésienne de la droite d.**

Remarque. Un point $M=(x;y)$ du plan vérifie : $M\in d \Leftrightarrow ax+by+c=0$

Propriétés et définitions.
Toute droite du plan d <u>non verticale</u> admet une équation de la forme « $y=mx+p$ » où m et p sont des constantes réelles. Dans ce cas l'expression « $y=mx+p$ » est **<u>l</u>'équation réduite de la droite d.**
Toute droite du plan d <u>verticale</u> admet une équation de la forme « $x=k$ » où k est une constante réelle.
Dans ce cas l'expression « $x=k$ » est **<u>l</u>'équation réduite de la droite d.**

Idée. 2 vecteurs non nuls sont colinéaires s'ils sont alignés dans le même sens ou dans des sens opposés
Définition. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** ssi il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Exemple. $\binom{3}{2}$ et $\binom{-9}{-6}$ sont colinéaires car $\binom{-9}{-6} = -3\binom{3}{2}$. (ou ce qui revient au même $\binom{3}{2} = -\frac{1}{3}\binom{-9}{-6}$)

Idée. Un vecteur directeur d'une droite, est un vecteur aligné avec la droite dans un sens ou l'autre.
Définition. $\vec{u}$ est un **vecteur directeur de la droite** $(\boldsymbol{AB})$ ssi $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Définition. Le **déterminant** de deux vecteurs $\vec{u} = \binom{x}{y}$ et $\vec{v} = \binom{x'}{y'}$ est $\mathbf{det}(\vec{\boldsymbol{u}}; \vec{\boldsymbol{v}}) = xy' - x'y$.

Exemple. Si $\vec{u} = \binom{3}{2}$ et $\vec{v} = \binom{1}{-1}$, alors $\det(\vec{u}; \vec{v}) = (3)(-1) - (1)(2) = -3 - 2 = -5$.

Propriété. Dans un repère orthonormé, l'aire du parallélogramme formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut $|\det(\vec{u}; \vec{v})|$

Propriété. Deux vecteurs sont colinéaires ssi leur déterminant est nul. (dans n'importe quel repère)

Exemple. $\det\left(\binom{3}{2}; \binom{-9}{-6}\right) = (3)(-6) - (2)(-9) = 18 - (-18) = 0$ donc $\binom{3}{2}$ et $\binom{-9}{-6}$ sont bien colinéaires.

Propriété. Deux droites (AB) et (MN) sont parallèles ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires ssi $\det\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{MN}\right) = 0$.

Propriété. Trois points distincts A, B et C sont alignés ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ssi $\det\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = 0$.

Exemple. Les points $A = (1; 3)$, $B = (2; 6)$ et $C = (3; 9)$ sont-ils alignés ?

$\det\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \det\left(\binom{2-1}{6-3}; \binom{3-1}{9-3}\right) = \det\left(\binom{1}{3}; \binom{2}{6}\right) = 1 \times 6 - 2 \times 3 = 0$. Donc A, B et C sont alignés.

Propriété. Un vecteur directeur d'une droite d d'équation cartésienne « $ax + by + c = 0$ » est $\binom{-b}{a}$.

Exemple. La droite d'équation cartésienne « $4x - 5y + 2 = 0$ » admet comme vecteur directeur $\vec{u} = \binom{5}{4}$.

Propriété. Etant donnés un point A et un vecteur $\vec{u}$ non nul, il existe une unique droite d passant par le point A et ayant pour vecteur directeur $\vec{u}$.

Exemple. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A = (-1; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \binom{-2}{1}$. Soit $M = (x; y)$ un point du plan.

$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\vec{u} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}; \vec{u}\right) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\binom{x+1}{y-3}; \binom{-2}{1}\right) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(1) - (y-3)(-2) = 0$

$M \in d \Leftrightarrow x + 1 + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 5 = 0$. Donc une équation de d est $x + 2y - 5 = 0$.

Propriété. Equation cartésienne d'un cercle.
Le cercle C de centre le point $A = (a; b)$, de rayon $r > 0$ admet pour équation « $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ »

Exemple. Une équation du cercle de centre $A = (1; -2)$ et de rayon 3 est $(x-1)^2 + (x+2)^2 = 9$.