Produit scalaire algébrique

Définition (Produit scalaire). Dans un repère <u>orthonormé</u>, si $\vec{u} = \binom{x}{y}$ et $\vec{v} = \binom{x'}{y'}$, alors on appelle **produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$** et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le <u>*nombre*</u> défini par $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Exemple. Le produit scalaire de $\vec{u} = \binom{2}{3}$ et $\vec{v} = \binom{-3}{-5}$ est $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2) \times (-3) + (3) \times (-5) = -21$

Attention le produit scalaire $\cdot$ n'est <u>pas une multiplication</u> $\times$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des *vecteurs* et <u>pas des nombres</u>.

Exemple. $\binom{5}{-1} \cdot \binom{3}{-2} = (5) \times (3) + (-1) \times (-2) = 15 + 2 = 17$

Hypothèses. Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs du plan, et k un réel.

Propriété. Le produit scalaire est commutatif. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

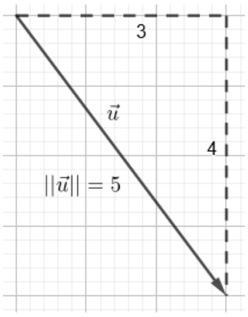
Exemple. $\binom{-4}{3} \cdot \binom{2{,}5}{-1} = (-4)(2{,}5) + (3)(-1) = -13$ $\binom{2{,}5}{-1} \cdot \binom{-4}{3} = (2{,}5)(-4) + (-1)(3) = -13$

Propriété. Le produit scalaire $\cdot$ est distributif sur $+$. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d}$

Exemple. $\left(\binom{1}{0} + \binom{3}{-2}\right) \cdot \binom{2}{3} = \binom{1}{0} \cdot \binom{2}{3} + \binom{3}{-2} \cdot \binom{2}{3} = 2 + 0 + 6 - 6 = 2$

Propriété. Les constantes dans un produit scalaire, peuvent être sorties. $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Exemple. $\binom{5}{-1} \cdot 5\binom{3}{-2} = 5\left(\binom{5}{-1} \cdot \binom{3}{-2}\right) = 5 \times ((5)(3) + (-1)(-2)) = 5(17) = 85$



Rappel. La **norme** (ou **longueur**) d'un vecteur $\vec{u} = \binom{x}{y}$, est définie par $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Rappel. La **longueur de** $[AB]$ est $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \left\|\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Exemple. Soit $\vec{u} = \binom{3}{-4}$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$. $\vec{u}$ est de longueur 5.

Propriété. Le carré scalaire est égal au carré de la norme. $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 = \|\vec{u}\|^2$

Exemple. $\binom{4}{-3} \cdot \binom{4}{-3} = (4)(4) + (-3)(-3) = 25$. Aussi $\left\|\binom{4}{-3}\right\|^2 = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2}^2 = (4)^2 + (-3)^2 = 25$

<u>Attention</u> : $\|\vec{u}\|$ est un nombre donc $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\|$. Mais dans $\vec{u} \cdot \vec{u}$ il s'agit du produit scalaire et pas $\times$.

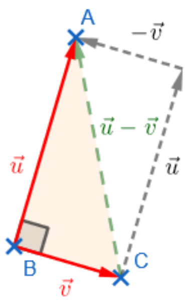
Corollaire. La norme d'un vecteur est la racine de son carré scalaire. $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Propriété. 1ère identité remarquable vectorielle. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

Propriété. 2ème identité remarquable vectorielle. $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

Preuve. $\left\|\binom{x}{y} - \binom{x'}{y'}\right\|^2 = \left\|\binom{x - x'}{y - y'}\right\|^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - 2xx' - 2yy'$

Propriété. Dans un repère orthonormé, deux vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul.



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\Leftrightarrow \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

Exemple. Montrer que $\vec{u} = \binom{2}{-3}$ et $\vec{v} = \binom{-3}{-2}$ sont orthogonaux.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2) \times (-3) + (-3) \times (-2) = -6 + 6 = 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Propriété. Soit $A,\ B$ deux points distincts. Soit M un point.
M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ ssi $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ ssi ABM est rectangle en M (quand $M \neq A, B$)
Autrement dit : L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Exemple. Déterminer l'ensemble des points M tels que

Propriété. Etant donné deux points A et B et leur milieu I, on a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

Rappel. $\vec{u}$ est un **vecteur directeur de la droite** $(\boldsymbol{AB})$ ssi $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ ssi $\det(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = 0$
Propriété. Un vecteur directeur d'une droite d'équation cartésienne " $ax + by + c = 0$ " est $\binom{-b}{a}$.

Définition. $\vec{u}$ est un **vecteur normal à la droite** $(\boldsymbol{AB})$ ssi $\vec{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ ssi $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
Propriété. Un vecteur normal à une droite d'équation cartésienne " $ax + by + c = 0$ " est $\binom{a}{b}$.

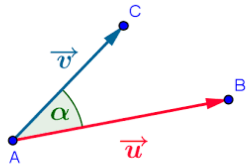
Rappels

Définition. Un vecteur est **unitaire** ssi il est de norme 1, autrement dit s'il est de longueur 1.

Remarque. On peut rendre un vecteur unitaire en le divisant par sa norme. $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ est toujours de norme 1.

Définitions. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On note A et B les points tels que $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \overrightarrow{OA}$ et $\frac{\vec{v}}{\|v\|} = \overrightarrow{OB}$.
A et B sont alors deux points situés sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
L'angle <u>orienté</u> de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $(\vec{u};\vec{v})$ est défini comme la longueur de l'arc de cercle $\widehat{AB}$, modulo 2π, comptée positivement dans le sens direct, négativement dans le sens indirect. Sa **mesure principale** est exprimée dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.
L'angle <u>géométrique</u> (non-orienté) de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ est défini comme la valeur absolue de la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$. $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ est donc un nombre dans l'intervalle $[0;\pi]$.

Remarque. Visuellement, l'angle géométrique de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ correspond à l'angle saillant que l'on mesure directement au rapporteur entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si on les fait partir d'un même point. $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ est un nombre dans l'intervalle $[0;\pi]$.



Définition. Deux vecteurs non nuls sont **orthogonaux**, s'ils forment un angle géométrique valant $\frac{\pi}{2}$ (droit).
Propriété. Deux vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

Définition. Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires**, s'ils forment un angle géométrique valant 0 ou π.
Propriété. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
Propriété. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $\det(\vec{u};\vec{v}) = \vec{0}$

Définition. Un **repère** $R = (O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ désigne la donnée d'un point O et de vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ <u>non colinéaires</u>.

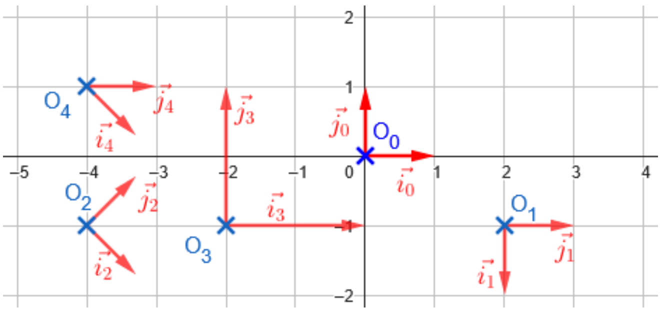
Propriété. Soit $R = (O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Soit un vecteur $\vec{u}$. Il existe d'uniques $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
Définition. x et y sont **les coordonnées du <u>vecteur</u> $\vec{u}$ <u>dans le repère R</u>**. On note $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_R$

Propriété. Soit un point M. Il existe d'uniques $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
Définition. x et y sont **les coordonnées du <u>point</u> M <u>dans le repère R</u>**. On note $M = (x;y)_R$

Remarque. Quand on change de repère R, les coordonnées d'un vecteur ou d'un point changent.
Cependant, la plupart des formules vectorielles restent valables, si on les écrit dans un <u>même</u> repère R.

Définition. On note $R_0 = \left((0;0);\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ le **repère canonique**. Jusqu'ici, on a toujours utilisé R_0.

Définition. Un **repère** $R = (O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ est **orthonormé** si $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux et de longueur 1 (<u>dans R_0</u>).



Exemples. Ici on considère R_0 comme le repère de référence.
Ci-contre, les repères R_0, R_1 et R_2 sont orthonormés.
Les longueurs ont donc la même mesure dans R_0,R_1, R_2.
R_3 n'est pas orthonormé car ses vecteurs sont de longueur 2 (en les mesurant dans R_0).
R_4 n'est pas orthonormé car ses vecteurs ne sont pas orthogonaux (au sens de R_0).

Propriété. Les longueurs et angles géométriques ne changent pas si on change de repère <u>orthonormé</u>

Produit scalaire géométrique

Théorème. Loi des cosinus, ou **formule d'Al-Kashi (généralisation de Pythagore)**
Dans un triangle ABC quelconque, on a, par exemple : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$
On l'écrit parfois sous la forme $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$ en notant $a = BC,\ b = AC,\ c = AB,\ \alpha = \widehat{BAC}$

Exemple. Soit un triangle ABC tel que $AB = 8$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 50°$. Calculer la longueur BC.
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 64 + 16 - 2 \times 8 \times 4 \times \cos(50°) \approx 38{,}86$ et donc $BC \approx 6{,}23$

Corollaire (Al-Kashi vectoriel). Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, $\quad \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$

Rappel. Produit scalaire (algébrique). Si $\vec{u} = \binom{x}{y}$, $\vec{v} = \binom{x'}{y'}$ dans un repère orthonormé : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Rappel. (2ème identité remarquable). Pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\quad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

Propriété. **Produit scalaire (géométrique)**. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls dans un repère orthonormé. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$$

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors le produit scalaire s'écrit $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$

Exemple. Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ tels que $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = 2$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 30°$.
Leur produit scalaire vaut $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

Propriété (Interprétation géométrique). Soit trois points A, B, C (ou deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ qu'on fait partir d'un même point A). Alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \pm AB \times AH$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).
Le signe est $+$ si $\overrightarrow{AH}$ est de même sens que $\overrightarrow{AB}$, et $-$ sinon.

Corollaires. Soit $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On a $-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ puisque $-1 \leq \cos(.) \leq 1$

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow (\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens $\Leftrightarrow (\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = 1 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens opposé $\Leftrightarrow (\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = \pi \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = -1 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

Propriété. Le produit scalaire est invariant par changement de repère orthonormé.
Dans n'importe quel repère orthonormé R, $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = x_R x'_R + y_R y'_R$

Méthode. Pour déterminer les coordonnées inconnues d'un objet dans un repère orthonormé,
On « projette » (on applique le produit scalaire) sur les vecteurs de base du repère.
Propriété. Dans tout repère orthonormé $R = (O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$,
Les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}$ dans R peuvent s'obtenir en calculant $x_{\vec{v}} = \vec{v} \cdot \vec{\imath}$ et $y_{\vec{v}} = \vec{v} \cdot \vec{\jmath}$.
Les coordonnées d'un point M dans R peuvent s'obtenir en calculant $x_M = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{\imath}$ et $y_M = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{\jmath}$.

Méthode. Pour déterminer la « composante » d'un vecteur $\vec{v}$ dans une direction donnée, on « projette » sur un vecteur directeur *unitaire* $\vec{u}$ dans la direction souhaitée. (On calcule $\vec{v} \cdot \vec{u}$)
Exemple. Une piste de ski est représentée par une droite qui descend avec une pente de $45°$.
La piste est donc dirigée par le vecteur unitaire $\vec{u} = \begin{pmatrix}\cos(-45°)\\ \sin(-45°)\end{pmatrix}$. Un skieur de 70 kg, subit son poids comme une force $\vec{F}$ d'environ 700 N vers le bas, donc $\vec{F} = \begin{pmatrix}0\\ -700\end{pmatrix}$. La composante du poids du skieur le long de la piste est donc $\vec{F} \cdot \vec{u} = (-700)(\sin(-45°)) = 700\sin(45°) \approx 500$ N.