Dérivation

Rappels : La pente d'une droite (non verticale) est le nombre relatif m qui indique de combien d'unités la droite monte (ou descend si $m < 0$) lorsqu'on avance d'une unité vers la droite.
La pente d'une droite d'équation « $y = mx + p$ » est son coefficient directeur m.

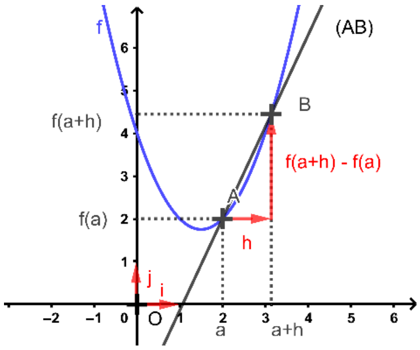
Idée : La dérivée d'une fonction en un point (de sa courbe) est la pente de la fonction en ce point.
C'est un nombre qui sert à mesurer la vitesse de variation de la fonction au point considéré.
La dérivée généralise la notion de pente à une fonction. Elle dépend du point. Elle n'existe pas toujours.
Définitions. On se place en un point d'abscisse a de la courbe représentative d'une fonction f.
Si en faisant un zoom infini sur le point, la courbe se déforme et devient une droite (non verticale), alors :
- Cette droite est appelée **tangente à la courbe représentative de f en a**.
- On dit que la fonction f est **dérivable en a**, (elle admet une dérivée en a)
- La **dérivée de la fonction f en a**, notée $f'(a)$ est la pente de la tangente (à f en a).

Définition précise. Soit I un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit a et b des réels de l'intervalle I. On note A et B les points de la courbe C_f d'abscisses respectives $x_A = a$ et $x_B = b$. Donc $A = \big(a\,;f(a)\big)$ et $B = \big(b\,;f(b)\big)$. On note $h = b - a$

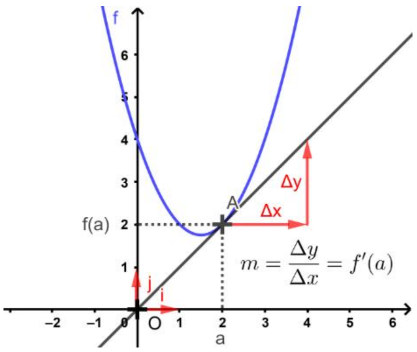
f est dérivable en a ssi $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \in \mathbb{R}$.

Si f est dérivable en a, la **dérivée de f en a** est $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \in \mathbb{R}$

Déf. $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le **taux d'accroissement de f entre a et b**.



Définition (Tangente). Si f est dérivable en a, **la tangente à C_f en a** est la droite passant par $A = \big(a; f(a)\big)$ et de coefficient directeur $f'(a)$.
Propriété. L'équation de cette droite est : « $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ »



Définition. f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I.
Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée de la fonction f**,
la fonction $f' : I \to \mathbb{R} : x \mapsto f'(x)$

Contre-exemple. Les fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ ne sont pas dérivables en 0

Dérivées usuelles. A chaque ligne, f est définie et vaut l'expression de la colonne à gauche sur tout D_f.
On déduit que f est dérivable sur $D_{f'}$, et $f'(x)$ vaut l'expression dans la dernière colonne sur tout $D_{f'}$.

$f(x)$	Conditions	D_f	$D_{f'}$	$f'(x)$
c	$c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	1
ax	$a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
$ax + b$	$a, b \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
x^2		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
x^3		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$3x^2$
x^n	$n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
x^n	$n \in \mathbb{Z}, n < 0$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
x^r	$r \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	rx^{r-1}
$\frac{1}{x} = x^{-1}$		$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$		$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
e^x		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x

Opérations sur les dérivées. A chaque ligne :
- On suppose que u et v sont dérivables.
- On déduit que f est dérivable sur I.

f	Conditions	f'
$u + v$	$u, v : I \to \mathbb{R}$	$u' + v'$
$u - v$	$u, v : I \to \mathbb{R}$	$u' - v'$
$a \times u$	$a \in \mathbb{R},\ u : I \to \mathbb{R}$	au'
$u \times v$	$u, v : I \to \mathbb{R}$	$u'v + v'u$
$\frac{1}{v}$	$v : I \to \mathbb{R}^*$	$\frac{-v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$u : I \to \mathbb{R}$ $v : I \to \mathbb{R}^*$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$
$x \mapsto v(ax + b)$	$v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$x \mapsto av'(ax + b)$
e^u	$u : I \to \mathbb{R}$	$u'e^u$