Suites arithmétiques et géométriques

Idée. Une suite (u_n) est **arithmétique** si on ajoute toujours le <u>même</u> nombre pour passer au terme suivant.

Exemple *a*. $(6; 11; 16; 21; 26; 31; \dots)$ est le début d'une suite arithmétique u, car on ajoute 5 à chaque fois.
Exemple *b*. $(7; 4; 1; -2; -5; -8; \dots)$ est le début d'une suite arithmétique v, car on ajoute -3 à chaque fois.

Définition. Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$
r est appelé **raison de la suite arithmétique** (u_n).

Exemple. Dans l'exemple *a*, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 5$. La raison de cette suite est $r = 5$.
Exemple. Dans l'exemple *b*, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 3$. La raison de cette suite est $r = -3$.

Méthode. Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on peut montrer que $u_{n+1} - u_n$ est constant (indépendant de n).

Exemple. Soit la suite définie par $w_n = 5 + 8n$. La suite (w_n) est-elle arithmétique ?
$w_{n+1} - w_n = \big(5 + 8(n+1)\big) - (5 + 8n) = 5 + 8n + 8 - 5 - 8n = 8$. Donc (w_n) est arithmétique de raison 8.

Propriété. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + r \times n$$

Idée. Deux termes distants de n rangs diffèrent de n fois la raison

Exemple. Dans l'exemple *a*, (u_n) est arithmétique de raison $r = 5$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6 + 5n$
Exemple. Dans l'exemple *b*, (v_n) est arithmétique de raison $r = -3$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 - 3n$

Remarque. Si le rang initial est 1 il faut adapter la formule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + r(n-1)$
Remarque. Si le rang initial est $p \in \mathbb{N}$ il faut adapter la formule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + r(n-p)$

Propriété. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
La suite est strictement croissante si $r > 0$, strictement décroissante si $r < 0$, et constante si $r = 0$.

Exemple. Dans l'exemple *a*, (u_n) est arithmétique de raison $r = 5 > 0$ donc (u_n) est croissante.

Idée. (u_n) est **géométrique** si on multiplie toujours par le <u>même</u> nombre pour passer au terme suivant.

Exemple *c*. $(3; 6; 12; 24; 48; 96; \dots)$ est le début d'une suite géométrique u, car on $\times$ 2 à chaque fois.
Exemple *d*. $(900; 90; 9; 0{,}9; 0{,}09; \dots)$ est le début d'une suite géométrique v, car on $\times \frac{1}{10}$ à chaque fois.

Définition. Une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel q, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$
q est appelé **raison de la suite géométrique** (u_n).

Exemple. Dans l'exemple *c*, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 \times u_n$. La raison de cette suite est $q = 2$.
Exemple. Dans l'exemple *d*, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{10} \times v_n$. La raison de cette suite est $q = \frac{1}{10}$.

Propriété. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n$$

Idée. Deux termes distants de n rangs, sont dans un rapport égal à la raison puissance n

Exemple. Dans l'exemple *a*, (u_n) est géométrique de raison $q = 2$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^n$
Exemple. Dans l'exemple *b*, on a $q = \frac{1}{10}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 900 \times \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{900}{10^n}$

Remarque. Si le rang initial est 1 il faut adapter la formule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 q^{n-1}$
Remarque. Si le rang initial est $p \in \mathbb{N}$ il faut adapter la formule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p q^{n-p}$

Somme de suites arithmétiques et géométriques

Propriété. Somme des n premiers entiers. Pour tout entier $n \geq 1$, on a $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Démonstration. Soit un entier $n \geq 1$. On note S la somme des n premiers entiers.
$S=1+2+\cdots+(n-1)+n$
$S=n+(n-1)+\cdots+2+1$
Donc en sommant les deux égalités, on obtient :
$2S=$………………………………………………=……………………………… Donc $S=\frac{n\times(n+1)}{2}$.

Propriété.
Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique = $\text{nombre de termes} \times \frac{(1^{\text{er}}\text{ terme} + \text{dernier terme})}{2}$

Démonstration. Symboliquement, il faut montrer que $u_p+u_{p+1}+\cdots+u_n=\frac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}$
$u_p+\cdots+u_n=(u_p)+(u_p+r)+(u_p+2r)+\cdots+(u_p+(n-p)r)$
$u_p+\cdots+u_n=(n-p+1)u_p+r+2r+3r+\cdots+(n-p)r$
$u_p+\cdots+u_n=(n-p+1)u_p+r(1+2+3+\cdots+(n-p))$
$u_p+\cdots+u_n=$……………………………………………………………$=(n-p+1)\left(u_p+\frac{r(n-p)}{2}\right)$

$$u_p+\cdots+u_n=(n-p+1)\left(\frac{2u_p+r(n-p)}{2}\right)=(n-p+1)\left(\frac{u_p+(u_p+r(n-p))}{2}\right)=(n-p+1)\frac{(u_p+u_n)}{2}$$

Exemple. $10+13+16+19+22+25=6\times\frac{10+25}{2}=105$

Propriété. Somme des n premières puissances d'un réel différent de 1.
Soit q un réel $\neq 1$. Pour tout entier $n \geq 1$, $1+q+q^2+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Démonstration. On note $S=1+q+q^2+\cdots+q^n$ $qS=q+q^2+q^3+\cdots+q^{n+1}$
Donc $S-qS=1+\cancel{q}+\cancel{q^2}+\cdots+\cancel{q^n}-\cancel{q}-\cancel{q^2}-\cdots-\cancel{q^n}-q^{n+1}$
Donc $S(1-q)=1-q^{n+1}$. Comme $q\neq 1$, on peut diviser par $1-q$. $S=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Propriété. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique = 1^{er} terme $\times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$

Démonstration.
$u_p+\cdots+u_n=u_p+qu_p+q^2u_p+\cdots+q^{n-p}u_p=u_p($……………………………………$)=u_p\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Exemple. $8+16+32+64+128=8\times\frac{1-2^5}{1-2}=8\times\frac{-31}{-1}=248$