

Prêts

1. Prêt simple à taux fixe

Définition. Un prêt à échéance simple d'une durée d'un mois de capital C et à **taux mensuel fixe** t , est un contrat entre un emprunteur \mathcal{A} et un prêteur \mathcal{B} qui engage les 2 parties :

- À $T = 0$, \mathcal{B} verse C € à \mathcal{A} .
- À $T = 1$ mois, \mathcal{A} verse $C \times (1 + t)$ € à \mathcal{B} .

Le capital remboursé est $M = C \times (1 + t)$

Les intérêts du prêt valent $I = M - C$

Exemple. \mathcal{A} emprunte 100 € à \mathcal{B} pour un mois, au taux mensuel de 10 %. Combien doit rembourser \mathcal{A} au bout d'un mois ?

On a $t = 10\% = 0,1$ et $C = 100$. Donc \mathcal{A} rembourse $M = C(1 + t) = 100 \times 1,1 = 110$ €

Remarque. Si la durée du prêt est de k mois, la définition précédente est modifiée :

- À $T = 0$, \mathcal{B} verse C € à \mathcal{A} .
- À $T = k$ mois, \mathcal{A} verse $C \times (1 + t)^k$ € à \mathcal{B} . Le taux d'intérêt est appliqué k fois.

Le capital remboursé est $M = C \times (1 + t)^k$

Les intérêts du prêt valent $I = M - C$

Exemple. \mathcal{A} emprunte 1000 € à \mathcal{B} pour 1 an, au taux d'intérêt mensuel de 10 %. Combien doit rembourser \mathcal{A} au bout d'un an ? On a $M = 1000 \times (1 + 0,1)^{12} = 1000 \times 1,1^{12} \approx 3138$ €

Remarque. La durée d'un prêt peut utiliser d'autres périodes (ans, jours, ...). Il faut être cohérent entre la période choisie et le taux d'intérêt. (annuel, journalier, ...)

Si dans l'exemple précédent le taux était annuel, \mathcal{A} rembourserait : $M = 1000 \times 1,1 = 1100$ €.

Propriété. Si t est un taux mensuel, et T est le taux annuel correspondant alors :

$$1 + T = (1 + t)^{12} \qquad (1 + T)^{\frac{1}{12}} = 1 + t$$

2. Prêt immobilier standard = Prêt à taux fixe et mensualités fixes

Définition. Un prêt d'une durée de N mois, de capital C , à taux mensuel fixe t , à mensualité fixe M , est un contrat entre un emprunteur \mathcal{A} et un prêteur \mathcal{B} tel que :

- À $T = 0$, \mathcal{B} verse $C \in$ à \mathcal{A} .
- À $T = 1$ mois, \mathcal{A} verse $M \in$ à \mathcal{B}
- À $T = 2$ mois, \mathcal{A} verse $M \in$ à \mathcal{B}
- ...
- À $T = N$ mois, \mathcal{A} verse $M \in$ à \mathcal{B}

Remarques.

- Il y a essentiellement 4 paramètres : C, N, t, M
- En général l'emprunteur choisit le capital C et la durée N
- Le taux t est négocié entre l'institut de crédit (la banque) et l'emprunteur.
- M est déterminé par C, N et t avec l'équation du prêt que l'on va établir
- En général, il y a aussi des frais de dossier, et des frais de garantie payés à $T = 0$, mais pour en tenir compte, il suffit de diminuer la valeur de C .

Analyse.

Un prêt immobilier sur N mois, équivaut à N prêts simples. Le prêt simple n° k est contracté aujourd'hui, veut rendre la valeur M au mois n° k . Le prêt n° k emprunte donc le capital de $\frac{M}{(1+t)^k}$ aujourd'hui, ce qui fait bien $\frac{M}{(1+t)^k} \times (1+t)^k = M$ à rembourser au mois n° k . La somme des capitaux empruntés par les N prêts simples aujourd'hui doit donc être égale au capital total emprunté C aujourd'hui.

$$C = M \left(\left(\frac{1}{1+t} \right)^1 + \left(\frac{1}{1+t} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{1+t} \right)^N \right) = M(1+t)^{-1} \frac{1-(1+t)^{-N}}{1-(1+t)^{-1}} = M \frac{1-(1+t)^{-N}}{t} \quad (\text{somme de suite géométrique})$$

Propriété. $C = M \times \frac{1-(1+t)^{-N}}{t}$ et donc $M = C \times \frac{t}{1-(1+t)^{-N}}$

Quand on négocie un prêt immobilier avec une banque les échéances sont bien mensuelles, mais le taux qu'il faut regarder s'appelle **TAEG** et est annuel. On a donc $1 + TAEG = (1+t)^{12}$

Propriété. Equations du prêt immobilier. $C = M \times \frac{1-(1+TAEG)^{\frac{-N}{12}}}{\frac{1}{(1+TAEG)^{\frac{1}{12}}}-1}$ et $M = C \times \frac{(1+TAEG)^{\frac{1}{12}}-1}{1-(1+TAEG)^{\frac{-N}{12}}}$

- Le coût total d'un prêt est MN .
- Les intérêts d'un prêt sont $MN - C$.

Exemple. On emprunte 1 000 000 € au taux annuel de 1 % pendant 25 ans. Combien doit on rembourser

chaque mois ? $M = C \times \frac{(1+TAEG)^{\frac{1}{12}}-1}{\frac{1}{(1+TAEG)^{\frac{1}{12}}}-1} = 1\,000\,000 \times \frac{(1,01)^{\frac{1}{12}}-1}{1-(1,01)^{\frac{-1}{12}}} = 3\,766 \text{ €}$

Exemple. Un ménage gagne 6 000 € par mois. En général les banques empêchent de s'endetter à plus d'un tiers des revenus. Le ménage peut demander au maximum une mensualité de $M = 2\,000$ € par mois. Le taux annuel est à 2 %. La durée maximale d'emprunt est fixée à 25 ans soit $N = 300$ mois. Combien le

ménage peut-il emprunter au maximum ? $C = M \times \frac{1-(1+TAEG)^{\frac{-N}{12}}}{\frac{1}{(1+TAEG)^{\frac{1}{12}}}-1} = 2\,000 \times \frac{1-(1,02)^{-25}}{(1,02)^{\frac{1}{12}}-1} = 472\,843 \text{ €}$