Probabilités conditionnelles et indépendance

Hypothèses. Soit une expérience aléatoire d'univers Ω sur laquelle est définie une probabilité P. Soit A et B deux évènements. On suppose $P(A) \neq 0$.

Définition. On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A** la probabilité que l'évènement B se réalise sachant que l'évènement A est réalisé. Elle est notée $P_A(B)$ ou $P(B \mid A)$ et est définie par $\boldsymbol{P_A(B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

Exemple. On donne ci-contre la répartition des spectateurs sur une journée dans une salle de cinéma selon les séances et le tarif. On choisit un de ces spectateurs au hasard et on considère les événements :

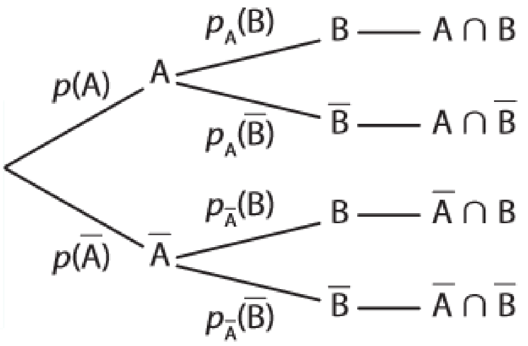
- M : « La personne a assisté à la séance du matin. »
- D : « La personne a payé demi-tarif. »

	Plein tarif	Demi-tarif	Total
Séance du matin	103	91	194
Séance du soir	280	26	306
Total	383	117	500

La probabilité que la personne ait assisté à la séance du matin sachant qu'elle a payé demi-tarif est $P_D(M) = \frac{91}{117}$ car parmi les 117 personnes ayant payé demi-tarif, 91 sont venues le matin.
De même, $P_M(D)$, la probabilité que la personne ait payé demi-tarif, sachant qu'elle a assisté à la séance du matin est $\frac{91}{194}$. Attention à ne pas confondre $P_D(M)$ et $P(D \cap M)$

Propriété. Probabilité conditionnelle et intersection
On a, de manière équivalente, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ et $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

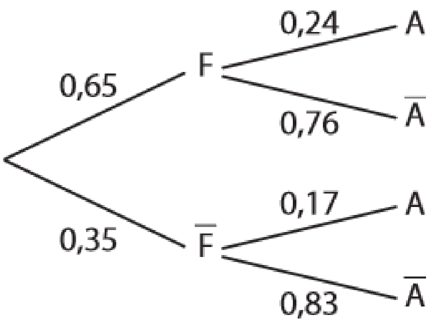
Propriété. Règle du produit
Soit un évènement A tel que $P(A) \neq 0$ et $P(\overline{A}) \neq 0$.
Dans l'arbre pondéré ci-contre, les probabilités des événements $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, et $\overline{A} \cap \overline{B}$ peuvent être obtenues en multipliant entre-elles les probabilités écrites sur les branches qui « mènent » à l'événement.



Démonstration. Cette propriété découle immédiatement de la propriété $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

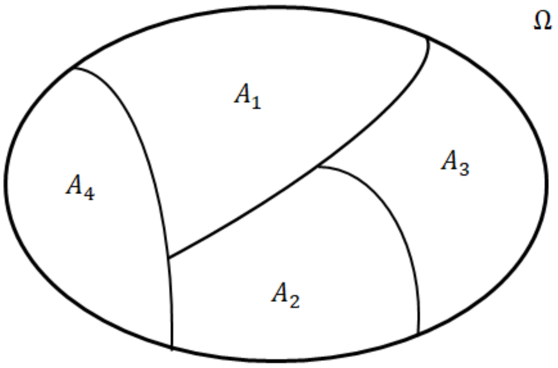
Exemple. Dans un lycée, les élèves de Terminale faisant la spécialité mathématiques, se répartissent ainsi :
- 65 % de filles, dont 24 % souhaitent faire PASS.
- 35 % de garçons, dont 17 % souhaitent faire PASS.

On tire au sort un de ces élèves et on considère les événements F : « L'élève est une fille. » et A : « L'élève souhaite faire PASS. ». On peut représenter la situation par l'arbre pondéré ci-contre. La probabilité que l'élève tiré au sort soit une fille qui souhaite faire PASS est $P(F \cap A) = P(F) \times P_F(A) = 0{,}65 \times 0{,}24 = 0{,}156$. La probabilité que l'élève tiré au sort soit un garçon qui ne souhaite pas faire PASS est $P(\overline{F} \cap \overline{A}) = P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(\overline{A}) = 0{,}35 \times 0{,}83 = 0{,}2905$.



Définition. Partition de l'univers.
Soit $n \geq 2$ événements de probabilités non nulles $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ces événements forment **une partition de l'univers Ω** si :
- Ils sont disjoints deux à deux, c'est-à-dire $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$
- Leur union est l'univers, c'est-à-dire $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

Plus généralement, on dit que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment **une partition d'un événement B** si ils sont disjoints deux à deux et leur union est égale à B.



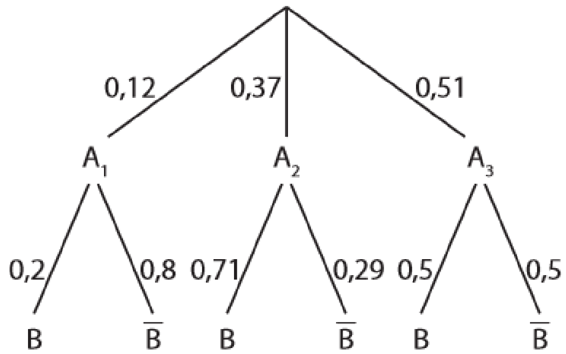
Remarque. Un événement A et son contraire $\overline{A}$ forment toujours une partition de l'univers Ω.

Propriété. Les probabilités d'une partition s'additionnent.
Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partition de l'univers Ω, alors $P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = P(\Omega) = 1$
Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partition d'un événement B, alors $P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = P(B)$

Propriété. Arbre pondéré et partition.
On peut construire des arbres pondérés avec plus de deux branches partant d'un même nœud tant que tous les événements « reliés à un même nœud » forment une partition de l'univers.

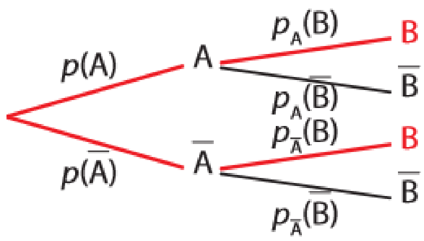
Propriété. Dans un arbre pondéré, la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est donc toujours égale à 1.

Exemple. Soit A_1, A_2 et A_3 formant une partition de l'univers. Dans l'arbre ci-contre, les événements reliés à un même nœud (A_1, A_2 et A_3 d'une part et B et $\overline{B}$ d'autre part) forment des partitions de l'univers, c'est donc bien un arbre pondéré.
On peut y calculer par exemple :
$P(A_2 \cap \overline{B}) = P(A_2) \times P_{A_2}(\overline{B}) = 0{,}37 \times 0{,}29 = 0{,}1073$

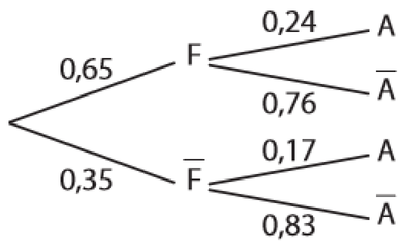


Propriété. Formule des probabilités totales (cas particulier)
Soit A et B deux événements. On suppose que $P(A) \neq 0$ et $P(\overline{A}) \neq 0$. Alors :
$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$$
Remarque. Sur un arbre pondéré, on peut comprendre la formule des probabilités totales comme le fait que <u>l'on additionne</u> les probabilités $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ et $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$ associées aux « chemins » pour lesquels B est réalisé, représentés en rouge sur l'arbre ci-contre.

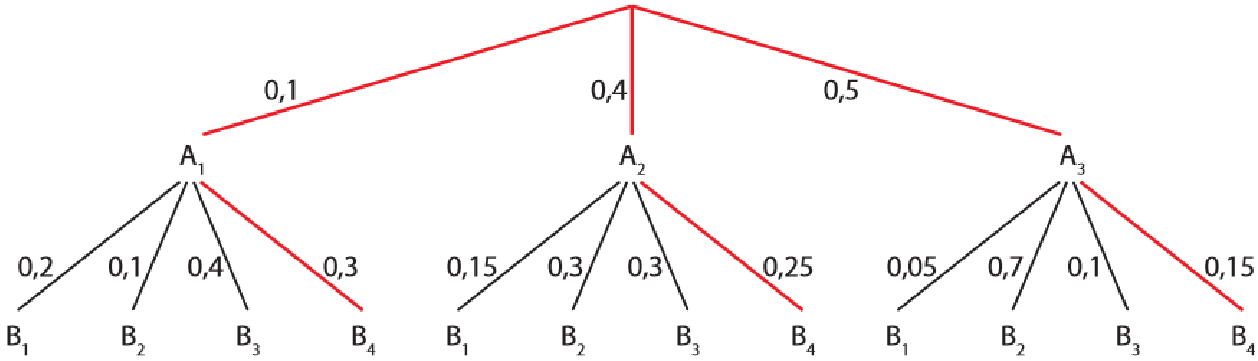
Exemple. On reprend l'exemple des élèves d'un lycée faisant la spécialité mathématiques. La probabilité qu'un élève souhaite faire PASS est : $P(A) = P(F) \times P_F(A) + P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(A)$
$P(A) = 0{,}65 \times 0{,}24 + 0{,}35 \times 0{,}17 = 0{,}2155.$



Propriété. Formule des probabilités totales (cas général).
Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ formant une partition de l'univers. Soit B un événement.
Alors $A_1 \cap B$, $A_2 \cap B$, …, $A_n \cap B$ forment une partition de l'événement B, de plus on a
$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$
Ce résultat est aussi appelé la formule de Bayes.



Exemple. Pour l'arbre pondéré ci-dessous (on admet que A_1, A_2 et A_3 d'une part et B_1, B_2, B_3 et B_4 d'autre part forment 2 partitions), $P(B_4) = P(A_1) \times P_{A_1}(B_4) + P(A_2) \times P_{A_2}(B_4) + P(A_3) \times P_{A_3}(B_4)$
$P(B_4) = 0{,}1 \times 0{,}3 + 0{,}4 \times 0{,}25 + 0{,}5 \times 0{,}15 = 0{,}205$.



Indépendance de deux évènements

Hypothèse. Soit A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

Définition. Indépendance de deux événements.
On dit que A et B sont des **événements indépendants** si $P(B) = P_A(B)$.
Concrètement, cela veut dire que le fait que A soit réalisé n'a pas d'influence sur la probabilité de réalisation de B. De manière symétrique, on a alors également $P(A) = P_B(A)$

Exemple. On donne la répartition des licenciés dans un club. On tire au sort une personne de ce club pour une tombola et on considère les événements A : « La personne est adulte. » et B : « La personne pratique le basket-ball. ».

	Adulte	Enfant	Total
Handball	73	174	247
Basket-ball	45	135	180
Gymnastique	14	87	101
Total	132	396	528

On constate que $P(A) = \frac{132}{528} = 0{,}25$ et $P_B(A) = \frac{45}{180} = 0{,}25$.
Ainsi $P(A) = P_B(A)$ donc A et B sont indépendants.

Propriété. Indépendance et intersection
A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Exemple. Dans l'exemple précédent, on appelle G l'événement « La personne pratique la gymnastique ». On a alors $P(A) = \frac{132}{528} = \frac{1}{4}$ et $P(G) = \frac{101}{528}$
Donc $P(A) \times P(G) = \frac{1}{4} \times \frac{101}{528} \approx 0{,}048$ d'une part. D'autre part, $P(A \cap G) = \frac{14}{528} \approx 0{,}027$.
Ainsi, $P(A \cap G) \neq P(A) \times P(G)$ donc A et G ne sont pas indépendants.

Remarque. Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont, A et $\overline{B}$ le sont, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont.