Second degré II - 1

A. Résoudre une équation de degré 2.

Rappel. Pour déterminer les racines d'un trinôme

• On détermine les coefficients a, b, c puis le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ du trinôme.

• Si $\Delta > 0$, alors le trinôme a deux racines : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

• Si $\Delta = 0$, alors le trinôme a une seule racine : $x_1 = -\frac{b}{2a}$

• Si $\Delta < 0$, alors le trinôme n'a pas de racine.

B. Factoriser un trinôme.

Méthode. Pour factoriser un trinôme :

• On détermine les coefficients a, b, c puis le discriminant Δ, puis les racines éventuelles x_1, x_2 du trinôme.

• Si $\Delta > 0$, alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ pour tout x.

• Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = a(x - x_1)^2$ pour tout x.

• Si $\Delta < 0$, alors le trinôme f ne se factorise pas.

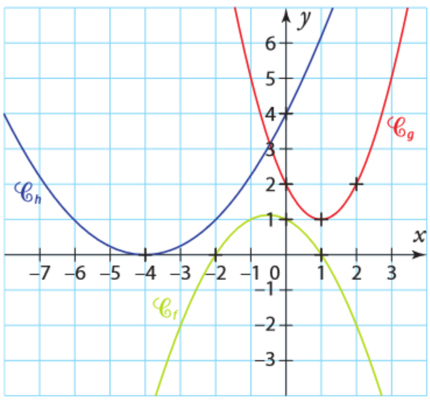
Exercice B1. Factoriser les trinômes suivants :

$a(x) = 2x^2 - 4x - 16$

$b(x) = 3x^2 - 18x + 27$

$c(x) = x^2 + x - 1$

Exercice B2. Trois fonctions polynômes de degré 2 ont été représentées ci-dessous : les fonctions f, g et h. Pour chaque fonction, déterminer, lorsqu'elle existe, sa forme factorisée



C. <u>Etudier le signe d'un trinôme</u>

Exercice C1. Dresser le tableau de signes de chaque fonction :

$f(x) = -3x + 9$

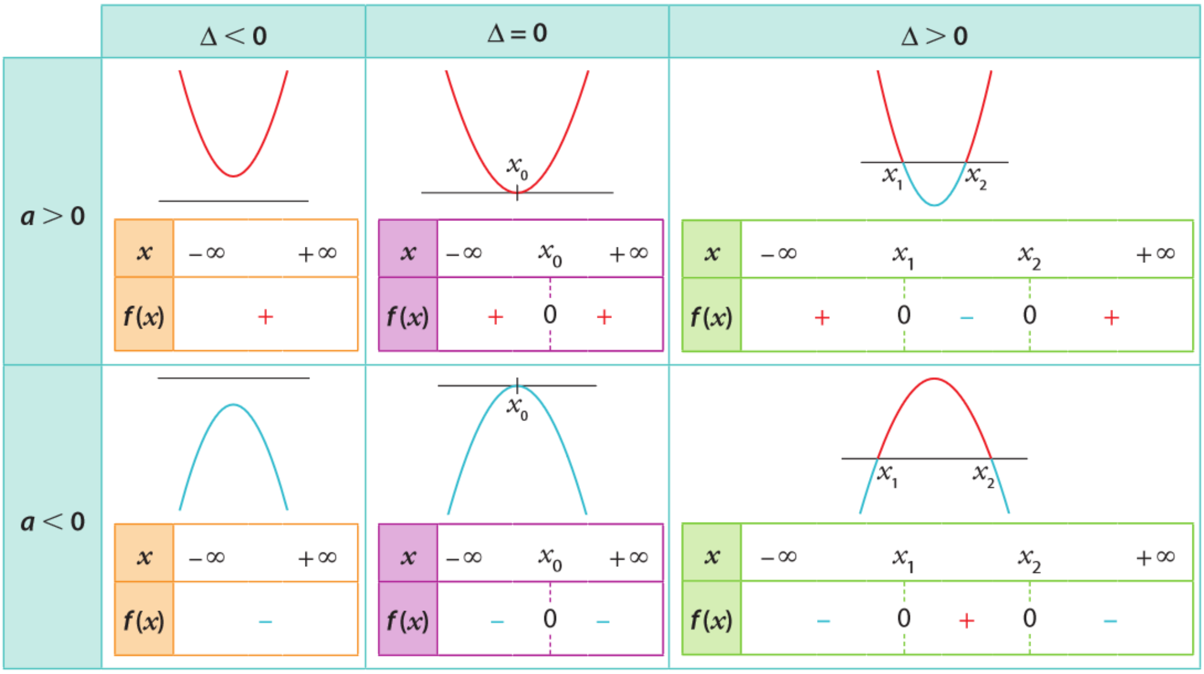
$g(x) = 2x + 5$

$h(x) = (2x + 5)(-3x + 9)$

$i(x) = x^2 + 9$

$j(x) = -3(x - 5)^2$

Méthode. Le signe d'un trinôme est déterminé par les 6 cas de figures suivants :



Exercice C2. Dresser le tableau de signes de chaque fonction :

$a(x) = 2x^2 - 4x - 16$

$b(x) = 9x^2 + 24x + 16$

$c(x) = 2x^2 - 5x + 6$

D. Résoudre une inéquation de degré 2.

Méthode. Pour résoudre une inéquation de degré 2 dont un côté est 0, par exemple : $f(x) > 0$
• On étudie le signe du trinôme f puis on lit le(s) intervalle(s) solution(s) dans le tableau de signes.

Méthode. Pour résoudre une inéquation de degré 2, par exemple $f(x) \leq g(x)$
• On soustrait $g(x)$ des deux côtés pour se ramener à une équation de la forme $h(x) \leq 0$.
• On résout l'inéquation $h(x) \leq 0$

Exercice D1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$(A) \Leftrightarrow x^2 + x + 1 > 0$

$(B) \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + \frac{4}{3} \leq 0$

$(C) \Leftrightarrow -2x^2 + 3x - 6 < 0$

$(D) \Leftrightarrow -7x^2 + 7x - 9 > -8 + 3x$

Second degré II - 4

E. Trouver rapidement l'autre racine, connaissant une des racines

Propriété. Si un trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ a deux racines x_1 et x_2 alors : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Méthode. Si on connait déjà une racine x_1 d'un trinôme f de coefficients a, b, c :

• On peut trouver x_2 en résolvant $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

• Alternativement, on peut trouver x_2 en résolvant $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ (à condition que $x_1 \neq 0$)

• On peut parfois trouver une première racine évidente en remplaçant x par des petites valeurs : $0; 1; 2; -1; -2;$ ….
On peut ainsi trouver rapidement les deux racines.

Exercice E1. Pour chaque fonction, trouver une racine évidente. Puis déterminer l'autre racine, et la forme factorisée.

$f(x) = 2x^2 - 14x + 12$

$g(x) = 2x^2 - 8x - 10$

$h(x) = x^2 - 6x + 8$

F. Trouver deux nombres de somme donnée, et de produit donné.

Propriété. Soit s, p, u, v des nombres réels.
$\begin{cases} u+v=s \\ uv=p \end{cases} \Leftrightarrow u$ et v sont les racines du trinôme x^2-sx+p

Méthode. On cherche à résoudre le système $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=s \\ uv=p \end{cases}$ d'inconnues $(u;v)$

- On considère le trinôme x^2-sx+p
- On calcule son discriminant Δ
- Si $\Delta>0$, on détermine ses racines x_1 et x_2
  $(E) \Leftrightarrow (u=x_1$ et $v=x_2)$ ou $(u=x_2$ et $v=x_1)$
  Il y a exactement deux couples solutions. $S_E=\{\,(x_1;x_2);\ \ (x_2;x_1)\,\}$
- Si $\Delta=0$, on détermine l'unique racine x_1
  $(E) \Leftrightarrow u=x_1$ et $v=x_1$
  Il y a exactement un couple solution. $S_E=\{\,(x_1;x_1)\,\}$
- Si $\Delta<0$, le système n'a pas de solutions. $S_E=\emptyset$

Exemple. Résoudre le système $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=7 \\ uv=12 \end{cases}$
On considère le trinôme $x^2-7x+12$.
Son discriminant est $\Delta=(-7)^2-4\times 12=1>0$.
Ses racines sont donc $x_1=\frac{7+1}{2}=4$ et $x_2=\frac{7-1}{2}=3$.
Donc $S_E=\{(4;3);(3;4)\}$.

Exercice F1.

Résoudre le système $(F) \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=13 \\ uv=40 \end{cases}$

Résoudre le système $(G) \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=34 \\ uv=289 \end{cases}$

Résoudre le système $(H) \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=1 \\ uv=1 \end{cases}$

G. Problèmes

Exercice G1.

1. Mettre sous forme canonique l'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$
2. Rappel : $\alpha = -\frac{b}{2a}$; $\beta = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$; $\Delta = b^2 - 4ac$

a) Montrer que $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$

b) Montrer que $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$

On a "donc" $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\mathrm{a}}\right)^2\right)$

c) Quelle condition doit vérifier Δ pour avoir le droit d'écrire l'égalité précédente ?

3. On suppose que Δ vérifie cette condition.

a) Rappeler l'identité remarquable $X^2 - Y^2 = \ldots$

b) En choisissant X et Y judicieusement, factoriser $f(x)$.

c) Quelles sont les racines de $f(x)$?

d) Que peut-on dire des racines quand $\Delta = 0$?

4. Si $\Delta < 0$:

a) Quel est le signe de $-\frac{\Delta}{4a^2}$? et de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$?

b) Si $a > 0$, quel est le signe $f(x)$? et si $a < 0$?

En déduire que $f(x)$ ne peut pas avoir de racines.

Exercice G2.