Produit scalaire algébrique

Définition (Produit scalaire). Dans un repère orthonormé, si $\vec{u} = \binom{x}{y}$ et $\vec{v} = \binom{x'}{y'}$, alors on appelle **produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$** et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le *nombre* défini par $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Exemple. Le produit scalaire de $\vec{u} = \binom{2}{3}$ et $\vec{v} = \binom{-3}{-5}$ est $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2) \times (-3) + (3) \times (-5) = -21$

Attention le produit scalaire $\cdot$ n'est pas une multiplication $\times$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des *vecteurs* et pas des nombres.

Exemple. $\binom{5}{-1} \cdot \binom{3}{-2} = (5) \times (3) + (-1) \times (-2) = 15 + 2 = 17$

Hypothèses. Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs du plan, et k un réel.

Propriété. Le produit scalaire est commutatif. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Exemple. $\binom{-4}{3} \cdot \binom{2{,}5}{-1} = (-4)(2{,}5) + (3)(-1) = -13$ $\binom{2{,}5}{-1} \cdot \binom{-4}{3} = (2{,}5)(-4) + (-1)(3) = -13$

Propriété. Le produit scalaire $\cdot$ est distributif sur $+$. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d}$

Exemple. $\left(\binom{1}{0} + \binom{3}{-2}\right) \cdot \binom{2}{3} = \binom{1}{0} \cdot \binom{2}{3} + \binom{3}{-2} \cdot \binom{2}{3} = 2 + 0 + 6 - 6 = 2$

Propriété. Dans un produit scalaire, les constantes peuvent être sorties devant

$$\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Exemple. $\binom{5}{-1} \cdot 5\binom{3}{-2} = 5\left(\binom{5}{-1} \cdot \binom{3}{-2}\right) = 5 \times \big((5)(3) + (-1)(-2)\big) = 5(17) = 85$

Rappel. La **norme** (ou **longueur**) d'un vecteur $\vec{u} = \binom{x}{y}$, est définie par $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exemple. Soit $\vec{u} = \binom{3}{-4}$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$. $\vec{u}$ est de longueur 5.

Propriété. Le carré scalaire est égal au carré de la norme. $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 = \|\vec{u}\|^2$

Exemple. $\binom{4}{-3} \cdot \binom{4}{-3} = (4)(4) + (-3)(-3) = 25$. Aussi $\left\|\binom{4}{-3}\right\|^2 = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2}^2 = (4)^2 + (-3)^2 = 25$

Attention : $\|\vec{u}\|$ est un nombre donc $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\|$. Mais dans $\vec{u} \cdot \vec{u}$ il s'agit du produit scalaire et pas $\times$.

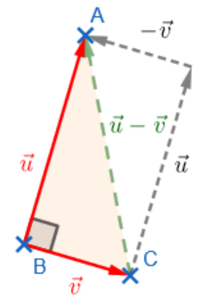
Corollaire. La norme d'un vecteur est la racine de son carré scalaire. $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Propriété. 1ère identité remarquable vectorielle. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

Propriété. 2ème identité remarquable vectorielle. $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

Preuve. $\left\|\binom{x}{y} - \binom{x'}{y'}\right\|^2 = \left\|\binom{x - x'}{y - y'}\right\|^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - 2xx' - 2yy'$

Propriété. Dans un repère orthonormé, deux vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul.

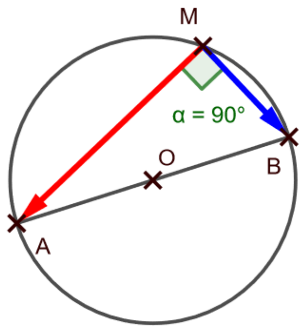


$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\Leftrightarrow \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

Exemple. Montrer que $\vec{u} = \binom{2}{-3}$ et $\vec{v} = \binom{-3}{-2}$ sont orthogonaux.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2) \times (-3) + (-3) \times (-2) = -6 + 6 = 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Propriété. Soit $A,\ B$ deux points distincts. Soit M un point.
M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ ssi $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ ssi ABM est rectangle en M (quand $M\neq A,B$)
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.



Exemple. Si $A=(5;4)$ et $B=(1;2)$, donner une équation du cercle de diamètre $[AB]$
On note C ce cercle. Soit $M=(x;y)$ un point du plan.

$M\in C\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}5-x\\4-y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-x\\2-y\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow(5-x)(1-x)+(4-y)(2-y)=0$

$M\in C\Leftrightarrow 5-5x-x+x^2+8-4y-2y+y^2=0\Leftrightarrow x^2+y^2-6x-6y+13=0$

Propriété. Etant donné deux points A et B et leur milieu I, on a $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2$

Exemple. Soit $A=(5;4)$ et $B=(1;2)$, déterminer l'ensemble (E) des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=8$.
On note I le milieu de $[AB]$. On a $I=\left(\frac{5+1}{2};\frac{4+2}{2}\right)=(3;3)$.
De plus $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{20}$
Soit $M=(x;y)$ un point du plan.

$M\in(E)\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=8\Leftrightarrow MI^2-\frac{1}{4}AB^2=8\Leftrightarrow MI^2-\frac{1}{4}\times 20=8\Leftrightarrow MI^2-5=8\Leftrightarrow MI^2=13\Leftrightarrow MI=\sqrt{13}$

(E) est un cercle de centre $I=(3;3)$ et de rayon $\sqrt{13}$.

Définition. $\vec{u}$ est un **vecteur normal à la droite** $(\boldsymbol{AB})$ ssi $\vec{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ ssi $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0$
Propriété. <u>Un</u> vecteur normal à une droite d'équation cartésienne " $ax+by+c=0$ " est $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Exemple. Déterminer une équation de la droite (d) de vecteur normal $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et passant par $A=(1\,;0)$.
Soit $M=(x;y)$ un point du plan.

$M\in(d)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-1\\y-0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow(x-1)(2)+(y)(-3)=0\Leftrightarrow 2x-3y-2=0$

Rappel. $\vec{u}$ est un **vecteur directeur de la droite** $(\boldsymbol{AB})$ ssi $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ ssi $\det(\vec{u};\overrightarrow{AB})=0$
Propriété. <u>Un</u> vecteur directeur d'une droite d'équation cartésienne " $ax+by+c=0$ " est $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

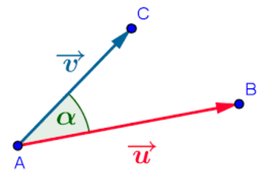
Exemple. Déterminer une équation de la droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ passant par $A=(1\,;0)$.
Soit $M=(x;y)$ un point du plan.

$M\in(d)\Leftrightarrow\det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-1&2\\y-0&-3\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(x-1)(-3)-(y)(2)=0\Leftrightarrow -3x+3-2y=0$

Produit scalaire géométrique

Définition. L'angle géométrique entre deux <u>vecteurs non nuls</u> $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ est défini comme la longueur, le long du cercle $\mathcal{C}$ de centre $O=(0;0)$ de rayon 1, de l'arc le plus court possible entre A et B, les points de $\mathcal{C}$ définis par $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}=\overrightarrow{OA}$ et $\frac{\vec{v}}{\|v\|}=\overrightarrow{OB}$.

Idée. $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ correspond à l'angle saillant que l'on mesure directement au rapporteur entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si on les fait partir d'un même point.
Remarque. $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ est un <u>nombre</u> qui appartient toujours à l'intervalle $[0;\pi]$

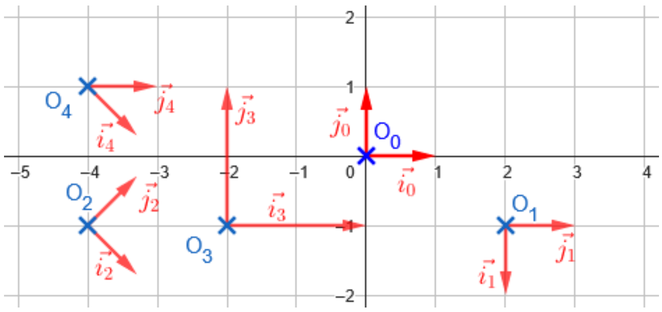


Définition. Deux vecteurs $\vec{u};\vec{v}$ non nuls sont **orthogonaux**, s'ils forment un angle droit. $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})=\frac{\pi}{2}$
Définition. Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires**, s'ils forment un angle valant 0 ou π. $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})\in\{0;\pi\}$

Propriété. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.
Propriété. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $\det(\vec{u};\vec{v})=\vec{0}$

Définition. Un **repère** $R=(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ désigne la donnée d'un point O et de vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ <u>non colinéaires</u>.
Déf. $\boldsymbol{R_0}=\left((0;0);\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ est **le repère canonique**. Il sert de référence pour les repères orthonormés.

Définition. Un **repère** $R=(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ est **orthonormé** si $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux et de longueur 1 (<u>dans R_0</u>).



Exemples. Ici R_0 est le repère de référence.
Ci-contre, les repères R_0, R_1 et R_2 sont orthonormés.
Les longueurs ont donc la même mesure dans R_0,R_1, R_2.
R_3 n'est pas orthonormé car ses vecteurs sont de longueur 2 (en les mesurant dans R_0).
R_4 n'est pas orthonormé car ses vecteurs ne sont pas orthogonaux (au sens de R_0).

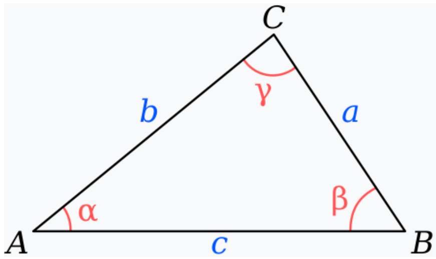
Propriété. Soit $R=(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Soit un vecteur $\vec{u}$. Il existe d'uniques $x,y\in\mathbb{R}$ tels que $\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$.
Définition. x et y sont **les coordonnées du <u>vecteur</u> $\vec{u}$ <u>dans le repère R</u>**. On note souvent $\vec{u}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}_{\boldsymbol{R}}$

Propriété. Soit $R=(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Soit un point M. Il existe d'uniques $x,y\in\mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{OM}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$.
Définition. x et y sont **les coordonnées du <u>point</u> M <u>dans le repère R</u>**. On note souvent $M=(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{R}}$

Remarque. Quand on change de repère R, les coordonnées d'un vecteur ou d'un point changent. Cependant, la plupart des formules vectorielles restent valables, si on les écrit dans un <u>même</u> repère R.

Propriété. Les longueurs et angles géométriques ne changent pas si on change de repère <u>orthonormé</u>

Théorème. Loi des cosinus, ou **formule d'Al-Kashi**
Dans un triangle ABC <u>quelconque</u>, on a, par exemple :
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$$
En posant $a = BC,\ b = AC,\ c = AB,\ \alpha = \widehat{BAC}$, on peut écrire :
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$



Exemple. Soit un triangle ABC tel que $AB = 8$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 50°$.
Calculer la longueur BC.
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 64 + 16 - 2 \times 8 \times 4 \times \cos(50°) \approx 38{,}86$ et donc $BC \approx 6{,}23$

Hypothèse. On se place dans un repère <u>orthonormé</u> R fixé. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs <u>non nuls</u>

Rappel. Produit scalaire (algébrique). $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Rappel. (2ème identité remarquable). $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

Propriété. Reformulation vectorielle d'Al-Kashi. $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$

Propriété. **Produit scalaire (géométrique).** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$
Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$

Exemple. Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ tels que $AB = 2$ et $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 30°$.
Leur produit scalaire vaut $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

Corollaire. Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est un nombre qui ne dépend <u>*pas*</u> du repère <u>orthonormé</u> R choisi.
Quand on utilise $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_R \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_R = xx' + yy'$, on peut choisir un repère <u>orthonormé</u> R qui nous arrange.

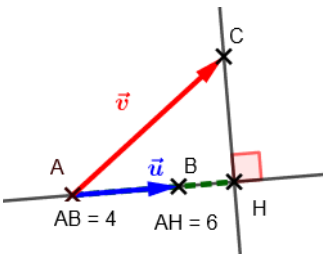
Corollaire. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (Car $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$)

Corollaire. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de même sens $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ (Car $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = 1$)
Corollaire. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de sens opposés $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ (Car $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \pi \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = -1$)

Propriété (Interprétation géométrique). Soit trois points A, B, C (ou deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ qu'on fait partir d'un même point A). Alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \pm AB \times AH$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).
Le signe est $+$ si $\overrightarrow{AH}$ est de même sens que $\overrightarrow{AB}$, et $-$ sinon.

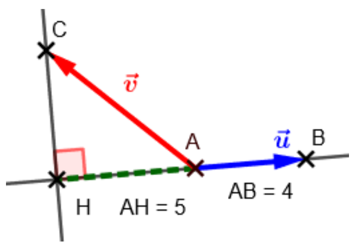
Exemple.
Ici $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont dans le même sens, donc

$\vec{u} \cdot \vec{v} = +4 \times 6 = +24$



Exemple.
Ici $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont dans des sens opposés, donc

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -4 \times 5 = -20$



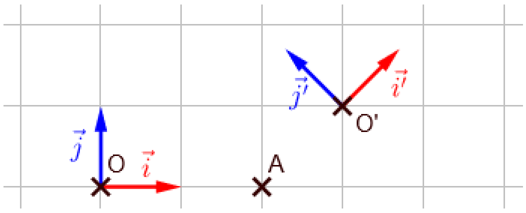
Méthode. Pour déterminer la composante d'un vecteur $\vec{v}$ dans une direction donnée, on « projette » sur un vecteur directeur <u>*unitaire*</u> $\vec{u}$ dans la direction souhaitée. (On calcule $\vec{v} \cdot \vec{u}$)

Exemple. Une piste de ski est représentée par une droite qui descend avec une pente de $45°$.
La piste est donc dirigée par le vecteur unitaire $\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos(-45°) \\ \sin(-45°) \end{pmatrix}$. Un skieur de 70 kg, subit son poids comme une force $\vec{F}$ d'environ 700 N vers le bas, donc $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -700 \end{pmatrix}$. La composante du poids du skieur le long de la piste est donc $\vec{F} \cdot \vec{u} = (-700)(\sin(-45°)) = 700\sin(45°) \approx 500$ N.

Pour aller plus loin…

Changements de repère.

Propriété. Dans <u>tout</u> repère <u>orthonormé</u> $R = (O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$,
Les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}$ dans R peuvent s'obtenir en calculant $x_{\vec{v}}^R = \vec{v}\cdot\vec{\imath}$ et $y_{\vec{v}}^R = \vec{v}\cdot\vec{\jmath}$.
Les coordonnées d'un point M dans R peuvent s'obtenir en calculant $x_M^R = \overrightarrow{OM}\cdot\vec{\imath}$ et $y_M^R = \overrightarrow{OM}\cdot\vec{\jmath}$.



Exemple. On note $R = (O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ et $R' = \left(O';\vec{\imath'};\vec{\jmath'}\right)$.
On a $A = (2;0)_R$.
Calculer les coordonnées de A dans R'.

$$x_{\vec{\imath'}} = \vec{\imath'}\cdot\vec{\imath} = \left\|\vec{\imath'}\right\|\|\vec{\imath}\|\cos\left(\vec{\imath'};\vec{\imath}\right) = \cos\left(\vec{\imath'};\vec{\imath}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_{\vec{\imath'}} = \vec{\imath'}\cdot\vec{\jmath} = \cos\left(\vec{\imath'};\vec{\jmath}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc $\vec{\imath'} = \begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}_R$. Par des calculs similaires $\vec{\jmath'} = \begin{pmatrix}-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}_R$

Ainsi dans R', $x_A = \overrightarrow{O'A}\cdot\vec{\imath'} = \begin{pmatrix}2-3\\0-1\end{pmatrix}_R\cdot\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}_R = -\sqrt{2}$ et $y_A = \overrightarrow{O'A}\cdot\vec{\jmath'} = \begin{pmatrix}2-3\\0-1\end{pmatrix}_R\cdot\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}_R = 0$

Donc $A = \left(-\sqrt{2};0\right)_{R'}$