Produit scalaire algébrique

Définition (Produit scalaire). Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors on appelle **produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$** et on note $\vec{u}\cdot\vec{v}$ le *nombre* défini par $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$

Exemple. Le produit scalaire de $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$ est $\vec{u}\cdot\vec{v}=(2)\times(-3)+(3)\times(-5)=-21$

Attention le produit scalaire $\cdot$ n'est pas une multiplication $\times$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des *vecteurs* et pas des nombres.

Exemple. $\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}=(5)\times(3)+(-1)\times(-2)=15+2=17$

Hypothèses. Soit $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ trois vecteurs du plan, et k un réel.

Propriété. Le produit scalaire est commutatif. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

Exemple. $\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2{,}5\\-1\end{pmatrix}=(-4)(2{,}5)+(3)(-1)=-13$ $\begin{pmatrix}2{,}5\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}=(2{,}5)(-4)+(-1)(3)=-13$

Propriété. Le produit scalaire $\cdot$ est distributif sur $+$. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$

Exemple. $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=2+0+6-6=2$

Propriété. Dans un produit scalaire, les constantes peuvent être sorties devant

$$\vec{u}\cdot(k\vec{v})=(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

Exemple. $\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}\cdot5\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}=5\left(\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\right)=5\times((5)(3)+(-1)(-2))=5(17)=85$

Rappel. La **norme** (ou **longueur**) d'un vecteur $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, est définie par $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

Exemple. Soit $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$, alors $\|\vec{u}\|=\sqrt{(3)^2+(-4)^2}=5$. $\vec{u}$ est de longueur 5.

Propriété. Le carré scalaire est égal au carré de la norme. $\vec{u}^2=\vec{u}\cdot\vec{u}=x^2+y^2=\|\vec{u}\|^2$

Exemple. $\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=(4)(4)+(-3)(-3)=25$. Aussi $\left\|\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\right\|^2=\sqrt{(4)^2+(-3)^2}^2=(4)^2+(-3)^2=25$

Attention : $\|\vec{u}\|$ est un nombre donc $\|\vec{u}\|^2=\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|$. Mais dans $\vec{u}\cdot\vec{u}$ il s'agit du produit scalaire et pas $\times$.

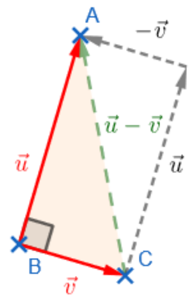
Corollaire. La norme d'un vecteur est la racine de son carré scalaire. $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}=\sqrt{x^2+y^2}$

Propriété. 1ère identité remarquable vectorielle. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$

Propriété. 2ème identité remarquable vectorielle. $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$

Preuve. $\left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right\|^2=\left\|\begin{pmatrix}x-x'\\y-y'\end{pmatrix}\right\|^2=(x-x')^2+(y-y')^2=x^2+y^2+x'^2+y'^2-2xx'-2yy'$

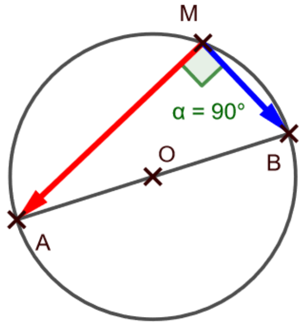
Propriété. Dans un repère orthonormé, deux vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul.



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\Leftrightarrow\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow xx'+yy'=0$.

Exemple. Montrer que $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2)\times(-3)+(-3)\times(-2)=-6+6=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.



Propriété. Soit $A,\ B$ deux points distincts. Soit M un point.
M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ ssi $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Exemple. Si $A=(5;4)$ et $B=(1;2)$, donner une équation du cercle de diamètre $[AB]$
On note C ce cercle. Soit $M=(x;y)$ un point du plan.
$M\in C \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}5-x\\4-y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-x\\2-y\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (5-x)(1-x)+(4-y)(2-y)=0$
$M\in C \Leftrightarrow 5-5x-x+x^2+8-4y-2y+y^2=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-6x-6y+13=0$

Propriété. Etant donné deux points A et B et leur milieu I, on a $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2$

Exemple. Soit $A=(5;4)$ et $B=(1;2)$, déterminer l'ensemble (E) des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=8$.
On note I le milieu de $[AB]$. On a $I=\left(\frac{5+1}{2};\frac{4+2}{2}\right)=(3;3)$.
De plus $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{20}$
Soit $M=(x;y)$ un point du plan.
$M\in(E)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=8 \Leftrightarrow MI^2-\frac{1}{4}AB^2=8 \Leftrightarrow MI^2-\frac{1}{4}\times 20=8 \Leftrightarrow MI^2-5=8 \Leftrightarrow MI^2=13 \Leftrightarrow MI=\sqrt{13}$
(E) est un cercle de centre $I=(3;3)$ et de rayon $\sqrt{13}$.

Rappel. $\vec{u}$ est un **vecteur directeur de la droite** $(\boldsymbol{AB})$ ssi $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ ssi $\det(\vec{u};\overrightarrow{AB})=0$

Rappel. Un vecteur directeur d'une droite d'équation cartésienne " $ax+by+c=0$ " est $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Définition. $\vec{u}$ est un **vecteur normal à la droite** $(\boldsymbol{AB})$ ssi $\vec{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ ssi $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0$
Propriété. Un vecteur normal à une droite d'équation cartésienne " $ax+by+c=0$ " est $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

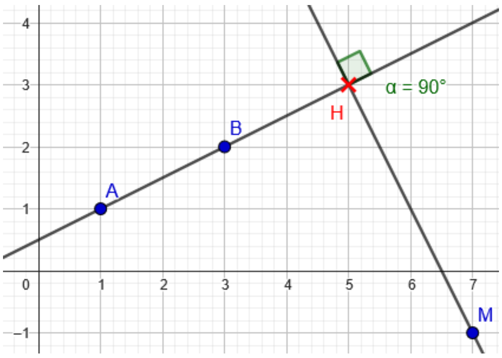
Exemple. Les droites $d_1: 2x-3y+4=0$ et $3x+2y-1=0$ sont-elles perpendiculaires ?
Leurs vecteurs normaux sont $\vec{n_1}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{n_2}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, or $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=6-6=0$ donc $d_1\perp d_2$.
On pouvait aussi utiliser les vecteurs directeurs. Pour traduire des situations avec des droites, on a souvent le choix entre vecteur directeur / vecteur normal, et entre produit scalaire nul / déterminant nul.

Définition. Le **projeté orthogonal d'un point $\boldsymbol{M}$ sur une droite $\boldsymbol{d}$** est le point $H\in d$ tel que $(MH)\perp d$

Si on connait l'équation $ax+by+c=0$ de d, c'est le point H t.q. $\begin{cases}ax_H+by_H+c=0\\ \overrightarrow{MH}\cdot\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}=0 \quad \left(\text{ou } \det\left(\overrightarrow{MH};\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right)=0\right)\end{cases}$

Si on connait deux points A et B de d, c'est le point H tel que $\begin{cases}\det(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{AB})=0\\ \overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$

Exemple. Déterminer le projeté orthogonal H du point $M=(7;-1)$ sur la droite (AB) où $A=(1;1)$ et $B=(3;2)$. $\quad \overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}(3)-(1)\\(2)-(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$



$\det(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{AB})=\begin{vmatrix}x_H-1 & 2\\ y_H-1 & 1\end{vmatrix}=(x_H-1)(1)-(y_H-1)(2)$
$\det(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{AB})=x_H-1-2y_H+2=x_H-2y_H+1=0$
$\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}x_H-(7)\\y_H-(-1)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=(x_H-7)(2)+(y_H+1)(1)$
$\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{AB}=2x_H-14+y_H+1=2x_H+y_H-13=0$
On résout $\begin{cases}x-2y+1=0\\2x+y-13=0\end{cases}\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=3\end{cases}$ Le projeté orthogonal de M sur (AB) est $H=(5;3)$.