Rappels. Suites arithmétiques et géométriques

Idée. Une suite (u_n) est **arithmétique** si on ajoute toujours le <u>même</u> nombre pour passer au terme suivant.
Définition. Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$
r est appelé **raison de la suite arithmétique** (u_n).

$$u_0 \xrightarrow[+r]{} u_1 \xrightarrow[+r]{} u_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow u_n \xrightarrow[+r]{} u_{n+1}$$

Exemple. La suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = u_n + 3$ est arithmétique de raison 3.

$u = (-2; 1; 4; 7; 10; \dots)$ est arithmétique de raison 3

Propriété. Terme général d'une suite arithmétique. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$ (Deux termes distants de n rangs diffèrent de n fois la raison)

Exemple. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = v_n - 0{,}5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Cette suite est arithmétique de raison $-0{,}5$ et de premier terme 3. Donc, $v_n = 3 - 0{,}5n$.

Idée. (u_n) est **géométrique** si on multiplie toujours par le <u>même</u> nombre pour passer au terme suivant.
Définition. (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel q, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times q$
q est appelé **raison de la suite géométrique** (u_n).

$$u_0 \xrightarrow[\times q]{} u_1 \xrightarrow[\times q]{} u_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow u_n \xrightarrow[\times q]{} u_{n+1}$$

Exemple. La suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}5$ et, $u_{n+1} = 2u_n$ est une suite géométrique de raison $q = 2$.

$u = (0{,}5; 1; 2; 4; 8; 16; \dots)$ est géométrique de raison 2

Propriété. Terme général d'une suite géométrique. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$

Exemple. La suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$ est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 0{,}5$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = 0{,}5 \times 2^n$.

Somme de suites arithmétiques et géométriques

Propriété.
Somme de termes <u>consécutifs</u> d'une suite <u>*arithmétique*</u> $= \text{nombre de termes} \times \frac{(1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme})}{2}$

Exemple. $10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 = 6 \times \frac{10+25}{2} = 105$

Remarque. Pour tout entier $n \geq 1$, on a $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}$

Exemple. $1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = \frac{10 \times 11}{2} = 55$

Propriété.
Somme de termes <u>consécutifs</u> d'une suite <u>*géométrique*</u> = 1$^{\text{er}}$ terme $\times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$

Exemple. $8 + 16 + 32 + 64 + 128 = 8 \times \frac{1-2^5}{1-2} = 8 \times \frac{-31}{-1} = 248$