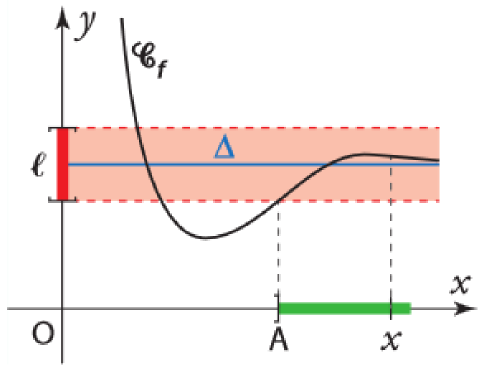
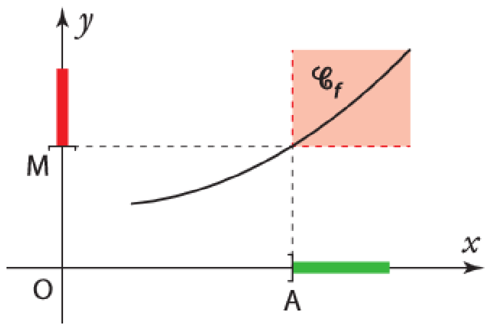
# Limites de fonctions

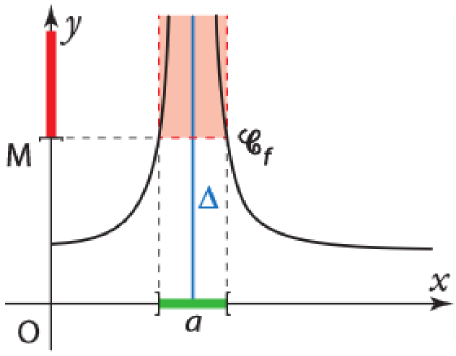
**Définitions**. **Une fonction $f$ a pour limite $l$ en $+\infty$** ssi étant donné un intervalle contenant $l$ aussi petit soit il, la courbe $C_f$, en allant vers la droite, finit par entrer dans l'intervalle sans jamais en ressortir :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in D_f, x > A \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$
Dans ce cas on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ ou encore $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} l$
Dans ce cas la droite d'équation « $y = l$ » est une **asymptote horizontale** à la courbe $C_f$.
De façon similaire, on définit « **$f$ a pour limite $l$ en $-\infty$** »,
« $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$ ».



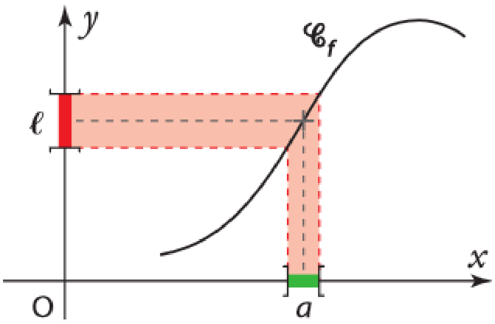

**Définitions**. **Une fonction $f$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$** ssi étant donnée une valeur $M$ aussi grande soit elle, la courbe $C_f$, en allant vers la droite, finit par dépasser $M$ sans jamais redescendre :
$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in D_f, x > A \Rightarrow f(x) \geq M.$
Dans ce cas on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou encore $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$
De façon similaire, on définit « **$f$ a pour limite $-\infty$ en $+\infty$** » ;
« $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ » ; et les autres cas $\pm\infty$ …




**Définitions**. **Une fonction $f$ a pour limite $+\infty$ en $a$** ssi étant donnée une valeur M aussi grande soit elle, la courbe $C_f$, <u>en se rapprochant de $a$</u>, finit par dépasser $M$ sans jamais redescendre :
$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D_f, |x - a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq M.$
Dans ce cas on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou encore $f(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$
Dans ce cas la droite d'équation « $x = a$ » est une **asymptote <u>verticale</u>** à la courbe $C_f$. De façon similaire, on définit « **$f$ a pour limite $-\infty$ en $a$** », « $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ».



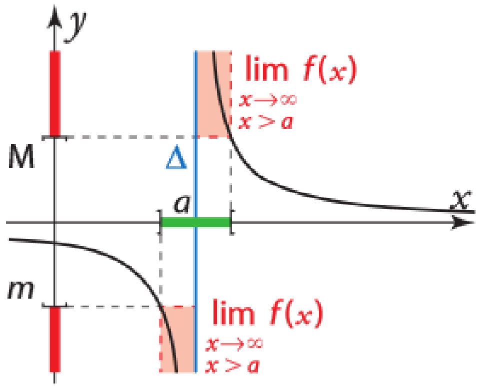

**Définitions**. **Une fonction $f$ a pour limite $l$ en $a$** ssi étant donné un intervalle contenant $l$ aussi petit soit il, la courbe $C_f$, <u>en se rapprochant de $a$</u>, finit par entrer dans l'intervalle sans jamais en ressortir :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D_f, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$
Dans ce cas on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ ou encore $f(x) \underset{x\to a}{\to} l$




**Définitions**. Parfois la limite en $a$ n'existe pas, on peut alors souvent définir une limite à droite ou à gauche de $a$ que l'on note respectivement : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$. Il faut adapter les définitions précédentes en restreignant l'intervalle où varie $x$ à un seul côté.

**Propriété**. Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ existent <u>et ont la même valeur</u> $l$
alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.
Réciproquement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$.

**Définitions**. Limite en $l^+ / l^-$. Pour toutes les définitions de limites finies précédemment données, on écrit parfois $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l^+$ (respectivement $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l^-$) pour signifier d'une part que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ et d'autre part que $f(x) \geq l$ (respectivement $f(x) \leq l$) près de $a$.



**Propriétés**. **Limites usuelles** à connaitre.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Fonction constante | Pour tout réel $c$, $\lim\limits_{x\to\alpha} c = c$ | | | |
| Fonction inverse | $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ | $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ | $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ | |
| Fonction puissance | Pour tout $n$ entier naturel $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ | Si $n$ pair : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ | Si $n$ est impair : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ | |
| Fonction exponentielle | $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ |
| Fonction racine carrée | $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ | $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ | $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ |

**Exemple**. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ car tout intervalle $[-a; a]$ autour de $0$, contient $\frac{1}{x}$ dès que $x$ est assez grand (en l'occurrence dès que $x > \frac{1}{a}$ on a bien $0 < \frac{1}{x} < a$) .

**Remarque**. En pratique, pour mémoriser ces tables, on remplace mentalement $x$ par une valeur proche de sa limite dans l'expression $f(x)$, et on essaye de deviner vers quoi tend $f(x)$. Par exemple, pour « se rappeler » de $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$ on remplace $x$ par $1000$ (proche de $+\infty$), $\frac{1}{1000} = 0{,}001 \approx 0$ donc on devine que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

**Règles d'addition, produit, quotient de limites.**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions. On note $\alpha$ une valeur réelle $a$ ou $a^+$ ou $a^-$ ou $-\infty$ ou $+\infty$.

| $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ | $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ | $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) + g(x)$ | $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\,g(x)$ |
|---|---|---|---|
| $l$ | $l'$ | $l + l'$ | $l \times l'$ |
| $l$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ si $l > 0$<br>$-\infty$ si $l < 0$<br>indéterminé si $l = 0$ |
| $l$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ si $l > 0$<br>$+\infty$ si $l < 0$<br>indéterminé si $l = 0$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | indéterminé | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $+\infty$ | indéterminé | $-\infty$ |

| $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ | $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ | $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$ |
|---|---|---|
| $l$ | $l' \neq 0$ | $\frac{l}{l'}$ |
| $l$ | $\pm\infty$ | $0$ |
| $l \neq 0$ | $0^+$ | $+\infty$ si $l > 0$<br>$-\infty$ si $l < 0$ |
| $l \neq 0$ | $0^-$ | $-\infty$ si $l > 0$<br>$+\infty$ si $l < 0$ |
| $+\infty$ | $l'$ | $+\infty$ si $l' > 0$ ou $l' = 0^+$<br>$-\infty$ si $l' < 0$ ou $l' = 0^-$ |
| $-\infty$ | $l'$ | $-\infty$ si $l' > 0$ ou $l' = 0^+$<br>$+\infty$ si $l' < 0$ ou $l' = 0^-$ |
| $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | indéterminé |
| $0$ | $0$ | indéterminé |

Dans ces tableaux :
Indéterminé signifie qu'on ne peut pas conclure sur la limite.
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = 0^+$ (resp $0^-$) signifie que $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = 0$ et que $f(x) > 0$ (resp. $< 0$) pour $x$ assez proche de $\alpha$.

Pour déterminer $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) - g(x)$ on peut juste remarquer que $f(x) - g(x) = f(x) + \left(-g(x)\right)$.

**Exemple**. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

**Méthodes** : **Pour lever une forme indéterminée**

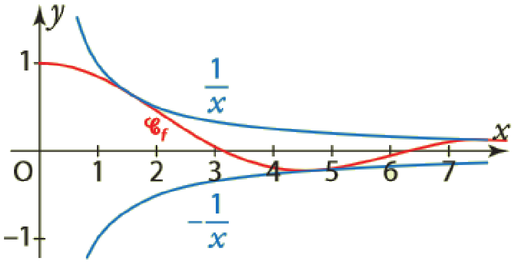
- On peut simplifier : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x}{x}$. On a une F.I. « $\frac{+\infty}{+\infty}$ ». Cependant $\frac{x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$.
- On peut factoriser : Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x$. Sachant $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ on a une F.I. « $+\infty - \infty$ ».

Mais $x^2 - x = x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$, donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$.

**Notation.** On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$

**Théorème**. Limite par encadrement ou théorème des gendarmes.

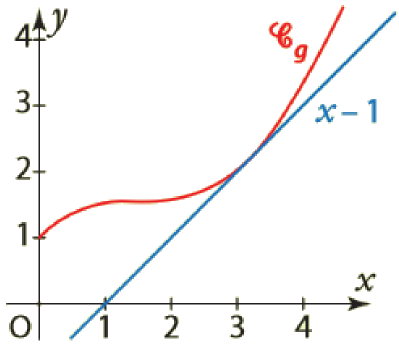
Soit $f, g, h$ trois fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$
et vérifiant pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x)$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x)$




**Exemple.** Soit la fonction $f$ définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. On cherche $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
La fonction sin est périodique non constante, de valeurs comprises entre $-1$ et $1$. Elle n'a donc pas de limite en $+\infty$. On ne peut pas appliquer la règle quotient. Comme la fonction sin est bornée par $-1$ et $1$, on a pour tout $x > 0$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ donc en divisant par $x > 0$ on obtient $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et d'autre part $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$.

**Théorème**. Limite par comparaison.

Soit $f, g$ deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$
et vérifiant pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$
Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$
Si $f$ et $g$ admettent une limite (finie ou non) en $a$, alors on a toujours $\lim\limits_{x \to a} g(x) \leq \lim\limits_{x \to a} f(x)$




**Exemple.** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \cos(x)$. On cherche $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
La fonction cos est périodique non constante, de valeurs comprises entre $-1$ et $1$. Elle n'a donc pas de limite en $+\infty$. On ne peut pas appliquer la règle somme. Comme la fonction cos est bornée par $-1$ et $1$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.
Donc en ajoutant $x$, on a $-1 + x \leq x + \cos(x)$ soit : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 + x \leq f(x)$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} -1 + x = +\infty$. Par le théorème de comparaison de limites, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

**Théorème**. Composition de limites ou changement de variables.

Soit $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $f$, $g$ définie au voisinage de $a$, respectivement de $b$.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y \to b} g(y) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = c$

**Exemple.** Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}}$. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{y \to 0} e^y = 1$ donc par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

**Théorème.** Croissances comparées. Pour tout entier naturel $n$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.