Objectif. Reconnaitre une fonction polynôme du second degré.

Exercice 1. Pour chaque fonction, déterminer si c'est une fonction polynôme de degré 2. Si c'est le cas, indiquer les coefficients.

a) $f(x) = x^2 + 2x - \sqrt{2}$
b) $g(x) = x^2 + \frac{1}{x} - 2$
c) $h(x) = 2x + 1$

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x+2)^2 - 3(x+1)$.

a) Développer $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
b) En déduire que f est une fonction polynôme de degré 2. Indiquer ses coefficients.

Exercice 3. Parmi les fonctions ci-dessous, indiquer les fonctions polynômes de degré 2, en précisant ses coefficients.

a) $f(x) = (x+1)^2$
b) $g(x) = (x+1)(x-1)$
c) $h(x) = (x+1)^2 - (x-1)^2$
d) $i(x) = (x+1)^3 - x^3$

Objectif. Ecrire sous forme canonique

Exercice 4. Déterminer la forme canonique des fonctions suivantes

1. $f(x) = x^2 - 6x + 5$
2. $g(x) = -2x^2 + 2x + 2$

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 24x - 41$

1. Développer l'expression $-3(x-4)^2 + 7$
2. En déduire la forme canonique de f.

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x + 5$.

1. Compléter l'égalité avec des réels :
$$x^2 + 4x + \cdots = (x + \cdots)^2$$
2. En déduire la forme canonique de f

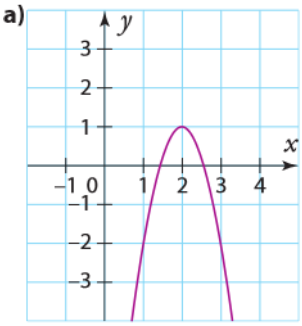
Exercice 7. Déterminer la forme canonique des fonctions suivantes

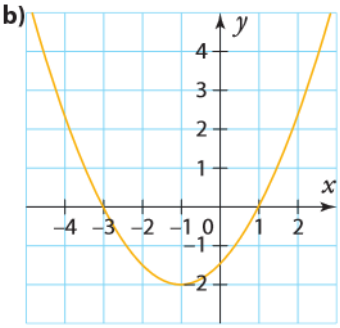
1. $f(x) = x^2 + 5x + 4$
2. $g(x) = 2x^2 + 4x + 8$
3. $h(x) = 3x^2 + 9x + 5$

Exercice 8. Mettre sous la forme canonique une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression générale de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Retrouver le résultat du cours.

Objectif. Utiliser la forme canonique

Exercice 9. Pour chaque fonction représentée ci-dessous, déterminer les coordonnées du sommet, l'axe de symétrie et le signe de a.





Exercice 10. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 9x - 5$.

1. f a-t-elle un maximum ou un minimum sur $\mathbb{R}$?
2. Dresser le tableau de variations de f

Exercice 11. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 6x - 7$.

1. Dresser le tableau de variations de f
2. En déduire le(s) extremum(s) de f.

Exercice 12. Pour chaque équation de parabole donnée ci-dessous, déterminer son axe de symétrie et les coordonnées du sommet.

a) $y = x^2 + x + 1$ b) $y = 2x^2 - 4x + 5$
c) $y = x^2 + 6x - 3$ d) $y = -4x^2 + 6x - 2$

Exercice 13. On considère la parabole d'équation $y = 2x^2 - 16x + 1$

1. Quel est l'axe de symétrie de la parabole ?
2. Déterminer l'ordonnée du point d'abscisse 0.
3. En déduire l'ordonnée du point d'abscisse 8 sans calcul.

Objectif. Résoudre une équation simple du second degré, par factorisations astucieuses, sans utiliser le théorème général.

Exercice 14. Factoriser les expressions suivantes en repérant un facteur commun

a) $f(x) = x^2 + 5x$ b) $g(x) = 2x^2 - 10x$

Exercice 15. Factoriser les expressions suivantes en utilisant des identités remarquables

a) $f(x) = x^2 - 16$ b) $g(x) = x^2 - 3$
c) $h(x) = x^2 + 2x + 1$ d) $i(x) = 4x^2 - 12x + 9$

Exercice 16. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes sans utiliser le discriminant.

(A) : $x^2 + 2x = 0$ (B) : $(x-1)^2 - 3 = -3$

(C) : $2(x-1)(x+5) = 0$ (D) : $x^2 = 36$

Exercice 17. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes sans utiliser le discriminant.

(A) : $9x^2 - 6x + 4 = 0$ (B) : $(x+1)^2 - 7 = 0$

(C) : $x^2 = 3x$ (D) : $x^2 - 6x + 4 = 4$

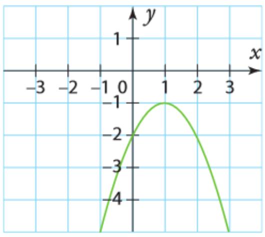
Objectif. Résoudre une équation du second degré en utilisant le théorème général.

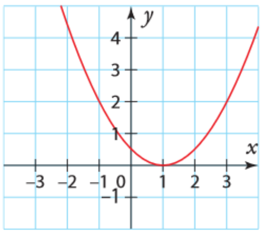
Exercice 18. Pour chaque trinôme ci-dessous, calculer le discriminant Δ.

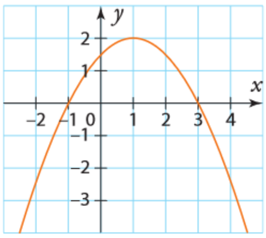
a) $x^2 + 4x + 5$ b) $2x^2 - x - 6$

c) $-2x^2 - 4x - 7$ d) $-x^2 + 2x + 3$

Exercice 19. Pour chaque trinôme représenté graphiquement, déterminer le signe de Δ.

a)


b)


c)


Exercice 20. Pour chaque équation ci-dessous, déterminer le nombre de solutions réelles

a) $x^2 + 3x + 2 = 0$ b) $2x^2 - 5x + 7 = 0$

c) $-\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3 = 0$ d) $2x^2 + 7x + 11 = 0$

Exercice 21. On considère l'équation $(m+8)x^2 + mx + 1 = 0$. Pour quelles valeurs de m cette équation admet-elle une unique solution ?

Exercice 22. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

(A) : $3x^2 - 9x - 12 = 0$

(B) : $3x^2 - 5x = -25$

(C) : $4x^2 + 3x - 7 = 5x + 4$

(D) : $3x^2 + 3x + 7 = x^2 - 2x$

(E) : $2x^2 = 2x - \frac{1}{2}$

Exercice 23. Déterminer, si elles existent, les racines des trinômes suivants.

a) $f(x) = -2x^2 + 3x - 4$

b) $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$

c) $h(x) = -x^2 - 2x + 35$

Exercice 24. Factoriser les trinômes suivants.

a) $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$

b) $g(x) = 3x^2 - 18x + 27$

c) $h(x) = x^2 + x - 1$

Exercice 25. Démonstration théorème général.

1. Mettre sous forme canonique l'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$
2. Montrer que $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$
3. Montrer que $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$

On a donc $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right)$

4. Que faut-il supposer sur Δ pour avoir le droit d'écrire l'égalité précédente ?
5. Rappeler l'identité remarquable $X^2 - Y^2$
6. En choisissant X et Y judicieusement, factoriser $f(x)$, et en déduire le théorème.

Problèmes.

Exercice 26. Soit g une fonction polynôme de degré 2. La courbe représentative de g a pour sommet le point $A = (1; 3)$ et passe par le point $B = (0; 5)$. Déterminer la forme canonique de g.

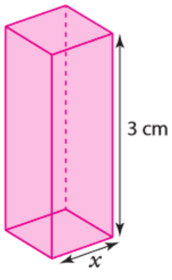
Exercice 27. On considère la parabole d'équation $y = 2x^2 + 2x - 1{,}5$
1. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole.
2. Déterminer l'équation de l'axe de symétrie de la parabole.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la parabole avec l'axe des ordonnées.
4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.
5. Déterminer le nombre de points d'intersection de la parabole avec la droite d'équation $y = 2x - 1$. Préciser leurs coordonnées.

Exercice 28. Une personne s'est pesée toutes les semaines pendant un an en 2018. Sa courbe de poids peut être modélisée par une fonction polynôme de degré 2 dont l'expression est $f(x) = 0{,}008x^2 - 0{,}4x + 75$ où x correspond au temps en semaines à partir du premier janvier 2018.
$x \in [0; 52]$.
1. Dresser le tableau de variations de f
2. En utilisant cette modélisation, répondre aux questions suivantes

a) Quel était son poids maximal sur l'année ? Quand a-t-il été atteint ?
b) Quel était son poids minimal sur l'année ? Quand a-t-il été atteint ?

Exercice 29. Déterminer deux nombres entiers consécutifs dont la somme des carrés est égale à 4141

Exercice 30. On considère un parallélépipède rectangle à base carrée, de côté x et de hauteur 3 cm.
1. Exprimer la surface totale du parallélépipède en fonction de x.
2. Quelle est la valeur de cette surface lorsque $x = 1$ cm ?
3. Pour quelle valeur de x cette aire est-elle égale à 100 cm^2 ?



Exercice 31. Un groupe d'amis décide de fêter Noël. Chacun offre un cadeau à toutes les personnes présentes sauf à elle-même. On compte 210 cadeaux. Combien y a-t-il de personnes ?

Exercice 32. Une entreprise produit entre 0 et 50 balançoires par jour. Le coût de fabrication de x balançoires, en euros, est donné par la fonction suivante : $f(x) = x^2 + 230x + 325$. Chaque balançoire est vendue 300€, et toute la production est vendue.
1. Exprimer le bénéfice $B(x)$ réalisé par l'entreprise en fonction de x.
2. Étudier les variations de la fonction B.
3. En déduire le bénéfice maximal réalisé par l'entreprise.
4. Combien de balançoires l'entreprise doit-elle produire et vendre pour être rentable ?

Exercice 33. Un parachutiste saute d'un avion sans vitesse initiale. Dans cet exercice, nous négligerons les frottements de l'air. Avant de déployer son parachute, son altitude en mètres est donnée par la fonction suivante :

$$h(t) = -4{,}9t^2 + 3500$$

où t désigne le temps en secondes.
1. À quelle altitude était l'avion au moment du saut ?
2. Le parachute doit être déployé à une altitude de 1500 m. Au bout de combien de temps le parachutiste doit-il déployer son parachute ?

Objectif. Utiliser des propriétés des racines.

Exercice 34. Pour chaque fonction, déterminer une racine évidente. Puis déterminer l'autre racine, et la forme factorisée.

a) $f(x) = 2x^2 - 14x + 12$
b) $g(x) = 2x^2 - 8x - 10$
c) $h(x) = x^2 - 6x + 8$

Exercice 35. Sans calculer explicitement les racines, déterminer leur somme et leur produit pour $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$.

Objectif. Résoudre des inéquations du second degré.

Exercice 36. Sans calcul, dresser le tableau de signes de chaque fonction

a) $f(x) = 2(x+2)(x-3)$
b) $g(x) = -2\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$
c) $h(x) = x^2 + 5$

Exercice 37. Dresser le tableau de signes de chaque fonction.

a) $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$
b) $g(x) = 9x^2 + 24x + 16$
c) $h(x) = 2x^2 - 5x + 6$

Exercice 38. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes, sans utiliser le discriminant.

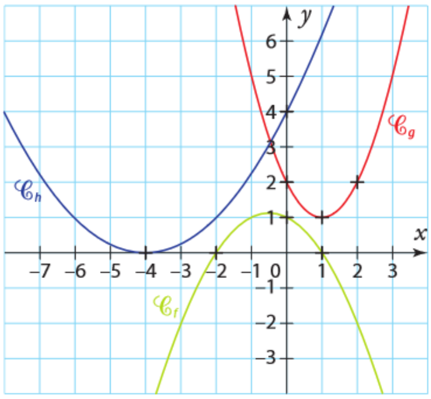
(A) : $x^2 - 2x > 0$ (B) : $x^2 - 81 \leq 0$
(C) : $(x - 1{,}5)(x + 2{,}8) > 0$ (D) : $x^2 + 20 < 0$

Exercice 39. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

(A) : $x^2 + x + 1 > 0$ (B) : $3x^2 - 4x + \frac{4}{3} \leq 0$
(C) : $-2x^2 + 3x - 6 < 0$
(D) : $-7x^2 + 4x - 9 > -8$

Problèmes.

Exercice 40. Trois fonctions polynômes de degré 2 ont été représentées ci-dessous : les fonctions f, g et h. Pour chaque fonction, déterminer, lorsqu'elle existe, sa forme factorisée.



Exercice 41. On veut étudier la position relative d'une parabole d'équation $y = 2x^2 - 3x + 5$ et d'une droite d'équation $y = 5x - 3$.

1. Déterminer le ou les points d'intersection de la parabole et de la droite.
2. On pose $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ et $g(x) = 5x - 3$

a) Étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
b) En déduire la position relative de la parabole et de la droite.