

Intervalles et inéqalités

Définition d'un intervalle. L'ensemble des nombres réels compris entre a (inclus) et b (inclus) est appelé **intervalle** et se note $[a; b]$. a et b sont **les bornes de l'intervalle**. Les autres types d'intervalles sont :

Ensemble des réels x tels que	Signification	Notation	Représentation
$a \leq x \leq b$	x est entre a inclus et b inclus	$x \in [a; b]$	
$a < x \leq b$	x est entre a exclus et b inclus	$x \in]a; b]$	
$a \leq x < b$	x est entre a inclus et b exclus	$x \in [a; b[$	
$a < x < b$	x est entre a exclus et b exclus	$x \in]a; b[$	
$x \geq a$ (ou $a \leq x$)	x est supérieur ou égal à a	$x \in [a; +\infty[$	
$x > a$ (ou $a < x$)	x est (strictement) supérieur à a	$x \in]a; +\infty[$	
$x \leq b$ (ou $b \geq x$)	x est inférieur ou égal à a	$x \in]-\infty; b]$	
$x < b$ (ou $b > x$)	x est (strictement) inférieur ou égal à a	$x \in]-\infty; b[$	

Définition. $-\infty$ et $+\infty$ se disent respectivement « moins l'infini » et « plus l'infini ». Le crochet est toujours vers l'extérieur en $+\infty$ et $-\infty$.

Définition. L'ensemble des nombres réels \mathbb{R} est $] - \infty; +\infty[$. L'ensemble des nombres réels positifs s'écrit \mathbb{R}_+ ou $[0; +\infty[$ et l'ensemble des nombres réels négatifs s'écrit \mathbb{R}_- ou $] - \infty; 0]$.

Définition. L'**intersection de deux intervalles** I et J est l'ensemble noté $I \cap J$ qui contient les nombres qui appartiennent à I et à J .

Définition. L'**union de deux intervalles** I et J est l'ensemble noté $I \cup J$ qui contient les nombres qui appartiennent à I ou à J .

Exemple. Si $I = [0; 12]$ et $J = [3; 20]$, $I \cap J = [3; 12]$ et $I \cup J = [0; 20]$.



Définition. L'ensemble des réels non nuls s'écrit \mathbb{R}^* ou $] - \infty; 0[\cup]0; +\infty[$ ou $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Règles (manipulation des inéqalités). Soit a, b, c, k des réels.

- Si $a < b$ alors $a + c < b + c$. (Ajouter un réel aux 2 côtés d'une inéqalité conserve l'inéqalité)
- Si $a < b$ alors $a - c < b - c$. (Soustraire un réel aux 2 côtés d'une inéqalité conserve l'inéqalité)
- Si $a < b$ et $k \geq 0$ alors $ka < kb$. (Multiplier une inéqalité par un réel ≥ 0 conserve l'inéqalité)
- Si $a < b$ et $k \leq 0$ alors $ka > kb$. (Multiplier une inéqalité par un réel ≤ 0 inverse l'inéqalité)
- Si $a < b$ et $k \geq 0$ alors $\frac{a}{k} < \frac{b}{k}$. (Diviser une inéqalité par un réel ≥ 0 conserve l'inéqalité)
- Si $a < b$ et $k \leq 0$ alors $\frac{a}{k} > \frac{b}{k}$. (Diviser une inéqalité par un réel ≤ 0 inverse l'inéqalité)
- Ces règles restent valables en remplaçant $<$ par \leq et $>$ par \geq . (mais k doit rester $\neq 0$ pour \div)

Définition. Une **inéqation** est une inéqalité dans laquelle est présente une inconnue. **Résoudre une inéqation** revient à déterminer l'ensemble de toutes les valeurs de l'inconnue qui vérifient l'inéqalité.

Exemple. Résoudre (I): $2x + 6 \geq x - 5$ sur \mathbb{R} . L'inconnue ici est la variable x que l'on va isoler.

Soit $x \in \mathbb{R}$. (I) $\Leftrightarrow 2x - x \geq -6 - 5 \Leftrightarrow x \geq -11$. Donc l'ensemble des solutions de (I) est $[-11; +\infty[$.

Définition de la valeur absolue. Etant donné un réel a , on définit $|a| = a$ si $a \geq 0$, $|a| = -a$ si $a \leq 0$.

Exemple. $|3| = 3$; $|-4| = 4$; $|-1,5| = 1,5$; $|5,6| = 5,6$. La valeur absolue « enlève » le signe $-$.

Définition. La distance entre deux réels a, b

quelconques est $d(a; b) = |a - b|$

(Car si $a > b$ c'est $a - b$, et si $a < b$ c'est $b - a$).

Exemples. $d(2,5; 7) = |2,5 - 7| = |-4,5| = 4,5$.

$d(1; -3) = |1 - (-3)| = |4| = 4$.

Propriété. Pour $x, a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$ on a : $|x - a| \leq r \Leftrightarrow x \in [a - r; a + r]$

