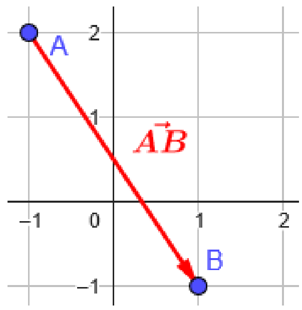
Vecteurs et géométrie - 1

A. <u>Calculer un vecteur reliant deux points</u>.



Définition. Soit deux points $A = (x_A\,; y_A)$ et $B = (x_B\,; y_B)$. On définit $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

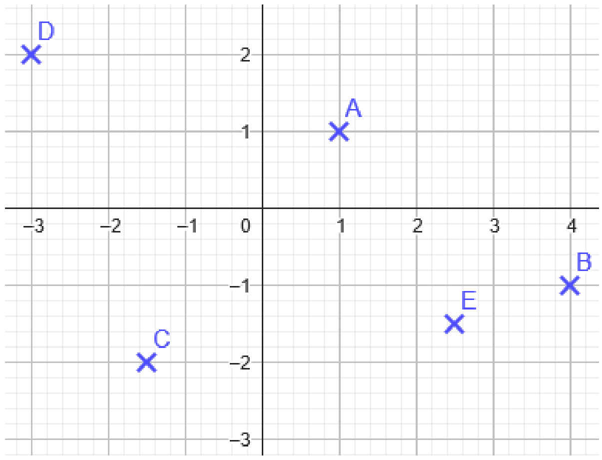
• Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ représente la translation qui déplace le point A au point B, car $t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$

• $\overrightarrow{AB}$ est donc souvent représenté par une flèche reliant le point A au point B.

Méthode. Pour calculer $\overrightarrow{AB}$ on utilise la formule $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Exemple. Soit $A = (1; 1)$ et $B = (4; -1)$, calculer $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB} =$



Exercice A1.

1) Lire graphiquement les coordonnées des points ci-contre :

$A =$ $B =$ $C =$

$D =$ $E =$

2) Déterminer les vecteurs suivants par le calcul, puis vérifier graphiquement :

$\overrightarrow{DA} =$ $\overrightarrow{BD} =$ $\overrightarrow{EA} =$

$\overrightarrow{CA} =$ $\overrightarrow{CE} =$

$\overrightarrow{AA} =$

$\overrightarrow{AB} =$ $\overrightarrow{BA} =$

Remarques. Soit A, B deux points. Alors on a toujours :

• $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

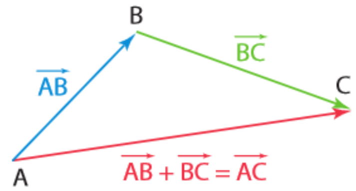
• $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

Vecteurs et géométrie - 2

B. <u>Simplifier une expression vectorielle avec la relation de Chasles.</u>

Propriétés. Soit A, B, C trois points. Alors

- La propriété suivante appelée **relation de Chasles** est vraie : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- Il faut aussi savoir reconnaitre la relation dans l'autre sens : $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$
- Attention, quand on parle de distances, on a $AB + BC \geq AC$



Exercice B1. Compléter en utilisant la relation de Chasles

$\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{\ldots A} + \overrightarrow{A \ldots}$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HG} +$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{D\ldots} + \overrightarrow{C\ldots} = \overrightarrow{\ldots B}$

$\overrightarrow{E\ldots} + \overrightarrow{\ldots E} =$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{A\ldots} = \overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{B\ldots} + \overrightarrow{CM}$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{FE} + \quad\quad = \vec{0}$

Méthode. Pour simplifier une expression vectorielle sur des points :

- On change tous les − en + en inversant les lettres correspondantes.
- On repère une lettre répétée en fin et en début de vecteur.
- On utilise Chasles pour faire disparaître la lettre répétée.
- On recommence autant de fois que possible.

Simplifier $\vec{u} = -\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CE}$

$\vec{u} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EC}$
$\quad = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EC}$
$\quad = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EC}$
$\quad = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EC}$
$\quad = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC}$
$\quad = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC}$
$\quad = \overrightarrow{AC}$

Exercice B2. Simplifier les expressions suivantes :

$\vec{a} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} =$ $\quad\quad$ $\vec{b} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AA} =$

$\vec{c} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} =$ $\quad\quad$ $\vec{d} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} =$

$\vec{e} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}$
$\quad =$

$\vec{f} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$
$\quad =$

Rappels.

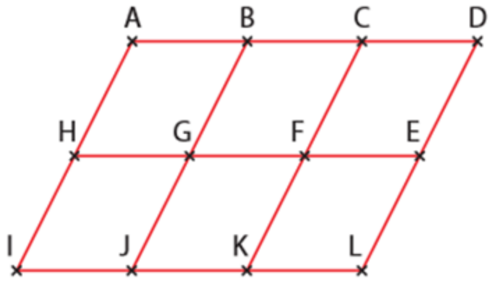
- Deux vecteurs sont identiques s'ils ont même direction, même sens, même longueur.
- La position d'un vecteur n'a pas d'importance.

Exercice B3. La figure représente six parallélogrammes de même taille.
En vous servant des points de la figure, donner un vecteur égal à :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{KL} =$ $\quad\quad$ b) $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HF} =$

c) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GF} =$ $\quad\quad$ d) $\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{BD} =$

e) $\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{CB} =$ $\quad\quad$ f) $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{HA} =$



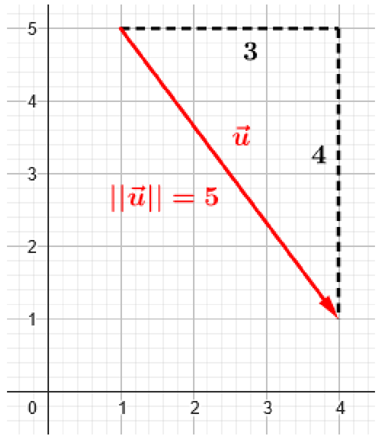
Exercice B4. Soit $A = (x_A; y_A), B = (x_B; y_B), C = (x_C; y_C)$ trois points du plan.

1) Démontrer que $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. $\quad\quad$ $\overrightarrow{AA} =$

2) Démontrer que $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. $\quad\quad$ $-\overrightarrow{AB} =$

3) Démontrer $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. $\quad\quad$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} =$

C. Calculer la longueur d'un vecteur.



Définition. La **norme (ou longueur) d'un vecteur** $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $\|\vec{\boldsymbol{u}}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exemple. Calculer la norme du vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$

Exercice C1. Calculer la norme des vecteurs suivants :

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$

Propriété. La distance entre deux points A et B est $\boldsymbol{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| = \left\| \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Exercice C2.

Calculer la distance entre $A = (3; 6)$ et $B = (10; 9)$. $\quad AB =$

Calculer la distance entre $C = (-2; 1)$ et $D = (9; -5)$. $CD =$

D. Tester une égalité de vecteurs

Méthode.	**Exemple.**
	Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ Est-ce que (E) : $3\vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{w}$?
• On commence par simplifier des deux côtés.	$(E) \Leftrightarrow 3\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$

• Jusqu'à arriver à une égalité entre deux vecteurs.
• On transforme *une égalité vectorielle*, en *deux égalités numériques*, regroupées dans une accolade.
• On finit de simplifier chaque égalité séparément.
• On teste chaque égalité.
  • Si une est fausse, l'égalité initiale est fausse
  • Si toutes sont vraies, l'égalité initiale est vraie
	$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 + -2 \\ -12 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 + -2 = 4 \\ -12 + 6 = -8 \end{cases}$
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 4 \\ -6 = -8 \end{cases}$
	Mais $-6 \neq -8$
	Donc $3\vec{u} + 2\vec{v} \neq 2\vec{w}$.

Exercice D1. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Tester les égalités suivantes :

Peut-on affirmer que (E) : $-5\vec{u} = \vec{v}$? $\qquad$ Peut-on affirmer que (F) : $3\vec{w} - \vec{u} = 2\vec{v}$?

E. Résoudre une équation vectorielle simple.

<table>
<tr>
<td>

Méthode.
Pour résoudre une équation vectorielle simple :

• On commence par simplifier des deux côtés.

• Jusqu'à arriver à une égalité entre deux vecteurs.
• On transforme *une* équation *vectorielle*, en *deux* équation *numériques*, regroupées dans une accolade.
• On finit de résoudre les deux équations en parallèle.

</td>
<td>

Exemple. Soit $A = (-2\,;5)$ et $\vec{u} = \binom{9}{3}$.

Trouver le point M tel que $3\overrightarrow{AM} = \vec{u}$

$3\overrightarrow{AM} = \vec{u} \Leftrightarrow 3\binom{x_M - x_A}{y_M - y_A} = \binom{9}{3} \Leftrightarrow 3\binom{x_M + 2}{y_M - 5} = \binom{9}{3}$
$\Leftrightarrow \binom{3(x_M + 2)}{3(y_M - 5)} = \binom{9}{3} \Leftrightarrow \binom{3x_M + 6}{3y_M - 15} = \binom{9}{3}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_M + 6 = 9 \\ 3y_M - 15 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_M = 9 - 6 \\ 3y_M = 3 + 15 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_M = 3 \\ 3y_M = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 1 \\ y_M = 6 \end{cases}$
$\Leftrightarrow M = (1; 6)$
Le point M tel que $3\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ est $M = (1; 6)$

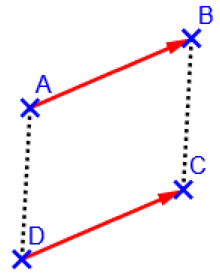
</td>
</tr>
</table>

Exercice E1. Soit $A = (-2\,;5)$ et $\vec{u} = \binom{9}{3}$.

Trouver le point M tel que $2\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

$2\overrightarrow{AM} = \vec{u} \Leftrightarrow$ REFAIRE un exo avec ~ 3 questions.

Vecteurs et géométrie - 5

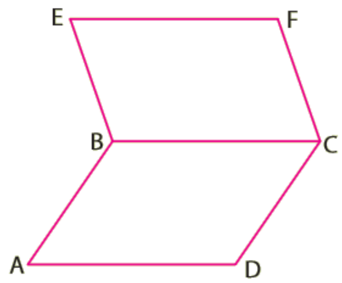


F. Traduire vectoriellement un parallélogramme.

Propriété. $ABCD$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
(Attention à l'ordre des lettres).

Exercice F1.

$BCDA$ et $BCFE$ sont deux parallélogrammes.



1) Traduire l'énoncé par 2 égalités vectorielles.

2) Montrer que $ADFE$ est un parallélogramme, avec des égalités vectorielles.

On note G, le symétrique de C par rapport à B.

3) Trouver 3 vecteurs égaux à $\overrightarrow{GB}$.
$\overrightarrow{GB} =$ $\overrightarrow{GB} =$ $\overrightarrow{GB} =$

4) Donner deux autres parallélogrammes à l'aide des points de la figure.

Exercice F2. Soit $E = (-3; 2)$, $F = (1; -2)$ et $G = (-1; -5)$.

1) Déterminer les coordonnées du point H pour que $EFGH$ soit un parallélogramme.

Exercice F3. $ABCD$ est un rectangle. On note I le point d'intersection de ses diagonales. K et J sont les symétriques respectifs de I et A par rapport à D.

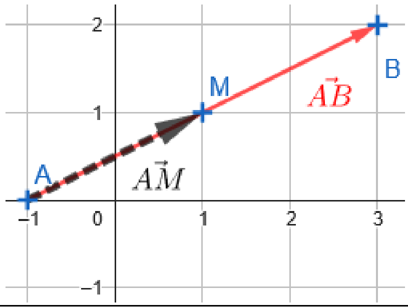
1) Faire une figure.

2) Montrer que $AIJK$ est un parallélogramme.

3) Citer tous les vecteurs égaux de cette figure.

4) En déduire que $ICJK$ est un parallélogramme

G. Trouver le symétrique, ou le milieu, par calcul vectoriel.



Propriété. Pour tout points A, B, M on a :

A et B sont symétriques par rapport à M $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

Exemple. Soit le point $A = (3; -5)$ et le point $B = (-2; 7)$

Calculer le symétrique C du point A par rapport à B.

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_B - x_C \\ y_B - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 - x_C \\ 7 - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2 \\ -5 - 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 - x_C \\ 7 - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 - x_C = 5 \\ 7 - y_C = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_C = 5 + 2 \\ -y_C = -12 - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_C = 7 \\ -y_C = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -7 \\ y_C = 19 \end{cases} \Leftrightarrow C = (-7; 19)$$

Donc $C = (-7; 19)$

Exercice G1. Soit $J = (-5; 2)$, $K = (2; -3)$.

1) Calculer le symétrique L du point J par rapport à K.

2) Calculer le symétrique I du point K par rapport à J.

Propriété. M est le milieu du segment $[AB]$ $\Leftrightarrow$ A et B sont symétriques par rapport à M $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

3) Calculer le milieu M du segment $[JK]$.