Décomposition en facteurs premiers – 1

A. Déterminer si un entier est premier.

Définition. Un entier *supérieur à un*, est **premier** si on ne peut pas l'obtenir en multipliant deux entiers naturels plus petits. Autrement dit, il n'a pas d'autres diviseurs que 1 et lui-même.

- 1 n'est pas considéré premier. Cela garantit l'unicité de la décomposition en facteurs premiers.
- La liste des nombres premiers commence par $\mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{5}; \mathbf{7}; \mathbf{11}; \mathbf{13}; \mathbf{17}; \mathbf{19}; \mathbf{23}; \mathbf{29}, \ldots$

Méthode. Pour déterminer si un entier est premier, on essaye de diviser cet entier par 2, puis 3, puis 4, etc. jusqu'à trouver un résultat entier. Si on n'y arrive pas avant l'entier lui-même, alors il est premier.

Exemple 1 : Déterminer si 35 est un nombre premier :

$\frac{35}{2} = 17{,}5 \notin \mathbb{Z}$. $\frac{35}{3} \approx 11{,}67 \notin \mathbb{Z}$. $\frac{35}{4} = 8{,}75 \notin \mathbb{Z}$. $\frac{35}{5} = 7 \in \mathbb{Z}$. Donc $35 = 5 \times 7$. 35 *n'est pas* premier.

- Si un entier n'a aucun diviseur compris entre 2 et sa racine carrée, alors il est premier.
- Au lieu de tester tous les diviseurs, on peut se limiter aux diviseurs premiers $2; 3; 5; 7; 11; \ldots$

Exemple 2 : Déterminer si 47 est un nombre premier :

$\sqrt{47} \approx 6{,}9$. Il suffit de tester la division par les premiers compris entre 2 et 6. C'est-à-dire 2 ; 3 et 5.
$\frac{47}{2} = 23{,}5 \notin \mathbb{Z}$. $\frac{47}{3} \approx 15{,}67 \notin \mathbb{Z}$. $\frac{47}{5} = 9{,}4 \notin \mathbb{Z}$. Donc 47 *est* premier.

Exemple 3 : Déterminer si 77 est un nombre premier.
Exemple 4 : Déterminer si 79 est un nombre premier.
Exemple 5 : Déterminer si 377 est un nombre premier.
Exemple 6 : Déterminer si 269 est un nombre premier.

B. Décomposer un entier en produit de facteurs premiers.

Théorème.
Tout entier naturel peut s'écrire comme un produit d'entiers premiers de façon unique à l'ordre près.

Méthode. Pour décomposer un nombre en produit de facteurs premiers :
- On divise par 2 tant que le résultat reste entier. Puis on divise par 3 autant que possible, puis par 4, etc…
- Au bout d'un moment le résultat est 1. La décomposition est donnée par les diviseurs qui ont fonctionné.

Exemple 1 : Décomposer 693 en produit de facteurs premiers.

$\frac{693}{2} \notin \mathbb{Z}$. $\frac{693}{3} = 231$. $\frac{231}{3} = 77$. $\frac{77}{3} \notin \mathbb{Z}$. $\frac{77}{4} \notin \mathbb{Z}$. $\frac{77}{5} \notin \mathbb{Z}$. $\frac{77}{6} \notin \mathbb{Z}$. $\frac{77}{7} = 11$. $\frac{11}{7} \notin \mathbb{Z}$. $\frac{11}{8} \notin \mathbb{Z}$. $\frac{11}{9} \notin \mathbb{Z}$. $\frac{11}{10} \notin \mathbb{Z}$. $\frac{11}{11} = 1$.
Donc $693 = 3 \times 3 \times 7 \times 11$. Donc $693 = 3^2 \times 7 \times 11$

- Au lieu de tester tous les diviseurs, on peut se limiter aux diviseurs premiers 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; ...
- On peut s'arrêter dès que le carré du diviseur actuel est plus grand que le résultat actuel.

Exemple 2 : Décomposer 693 en produit de facteurs premiers.

$\frac{693}{2} \notin \mathbb{Z}$. $\frac{693}{3} = 231$. $\frac{231}{3} = 77$. $\frac{77}{3} \notin \mathbb{Z}$. $\frac{77}{5} \notin \mathbb{Z}$. $\frac{77}{7} = 11$. $7^2 > 11$ donc on s'arrête. $693 = 3^2 \times 7 \times 11$

Exemple 3 : Décomposer : 84
Exemple 4 : Décomposer : 13000
Exemple 5 : Décomposer : 299
Exemple 6 : Décomposer : 4095