Second degré (Partie 2)

Définition. Une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une **fonction polynôme de degré 2** ssi :
Il existe trois nombres réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Définition. Une **équation de degré 2** est une égalité " $f(x) = 0$ " où f est de degré 2.

Théorème (Forme canonique). $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec α, β uniques. On a $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$
Propriété. Les coordonnées du sommet de la parabole sont toujours $(\alpha;\beta)$
Théorème. La forme canonique permet de trouver les variations et les extremums de f suivant le signe de a

Si $a > 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Si $a < 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\nearrow$	β	$\searrow$	

Définition. Une **racine** d'une fonction f est un nombre x tel que $f(x) = 0$.
C'est une **solution** de l'équation " $f(x) = 0$ ".

Hypothèse. Soit $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme de degré 2. $(a \neq 0)$
Définition. $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant de f**.
Théorème. Résolution d'une équation de degré 2.
On calcule le discriminant Δ de f. On a 3 situations possibles suivant le signe de Δ.
Si $\Delta < 0$: Alors f n'a pas de racines sur $\mathbb{R}$ autrement dit " $ax^2 + bx + c = 0$ " n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.
Dans ce cas on ne peut pas factoriser f sur $\mathbb{R}$.
Si $\Delta = 0$: Alors f a exactement 1 racine sur $\mathbb{R}$ autrement dit " $ax^2 + bx + c = 0$ " a exactement 1 solution dans $\mathbb{R}$, et cette solution est $\boldsymbol{x_0} = -\frac{b}{2a} = \alpha$. On peut alors factoriser f. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - x_0)^2$
Si $\Delta > 0$: Alors f a exactement 2 racines sur $\mathbb{R}$, " $ax^2 + bx + c = 0$ " a exactement 2 solutions dans $\mathbb{R}$, et ces deux solutions sont $\boldsymbol{x_1} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\boldsymbol{x_2} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

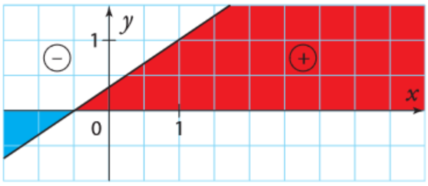
Définition. La forme " $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ " est appelée **forme factorisée** de f.
Factoriser un polynôme de degré 2 revient à déterminer ses racines, donc revient à résoudre " $f(x) = 0$ "
Remarque. Le cas $\Delta = 0$ correspond au cas limite où $x_1 = x_2$. On dit que x_0 est une **racine double** de f.
Exemple. Résoudre $2x^2 + x - 3 = 0$. On pose $f: x \mapsto 2x^2 + x - 3$. Le discriminant de f est
$\Delta = (1)^2 - 4 \times (2) \times (-3) = 25$ donc l'équation a 2 solutions : $x_1 = \frac{-(1)-\sqrt{(25)}}{2\times(2)} = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{-(1)+\sqrt{(25)}}{2\times(2)} = 1$
Exemple. Déterminer les racines de $f: x \mapsto x^2 + x + 1$. Le discriminant de f est $\Delta = (1)^2 - 4 \times (1) \times (1) = -3 < 0$ donc f n'a pas de racines sur $\mathbb{R}$. L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle.
Exemple. Factoriser $f: x \mapsto 9x^2 - 30x + 25$. Le discriminant de f est $\Delta = (-30)^2 - 4 \times (9) \times (25) = 0$.
Donc f admet une seule racine $x_0 = -\frac{(-30)}{2\times 9} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 9\left(x - \frac{5}{3}\right)^2$

Propriété. Si $\Delta \geq 0$, alors $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ (Utile pour trouver l'autre racine connaissant l'une)
Exemple. Trouver les racines de $f: x \mapsto 2x^2 - x - 1$. En testant des petites valeurs entières $x = 1; 2; 3; -1; -2$ on trouve par chance une racine évidente : $f(1) = 0$ donc $x_1 = 1$ est racine évidente.
D'après les relations coefficients racines, on a $1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ donc $x_2 = -\frac{1}{2}$ est l'autre racine.

Propriété. Deux réels ont pour somme S et produit P ssi ils forment les 2 solutions de " $x^2 - Sx + P = 0$ ".

Rappels. Fonction polynome (affine) de degré 1. Si $f : x \mapsto ax+b$ est un polynôme de degré 1 $\quad (a \neq 0)$: $x_1 = -\frac{b}{a}$ est l'unique racine de f. La fonction s'annule et change de signe une fois en $-\frac{b}{a}$.

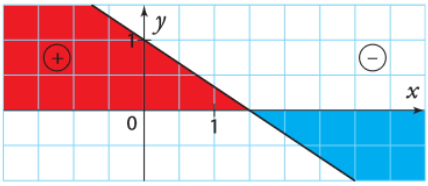
$a > 0$



x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

f est négative puis positive.

$a < 0$



x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

f est positive puis négative.

Exemple. Déterminer le signe de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -3x+4$.
g est une fonction affine avec $a = -3$ et $b = 4$. a est négatif donc g est décroissante sur $\mathbb{R}$.
g s'annule en $\frac{4}{3}$, g est positive sur $]-\infty ; \frac{3}{4}]$ et g est négative sur $[\frac{3}{4} ; +\infty[$.

Exemple. Déterminer le signe de $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (3x+4)(-2x+6)$

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		3		$+\infty$
$3x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

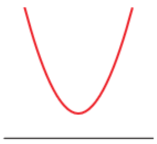
Exemple. Déterminer le signe de $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{3x-5}{2x+7}$

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
$k(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	

Théorème. Résolution d'une inéquation de degré 2.
Le signe d'un trinôme est déterminé par les 6 cas de figures suivants :

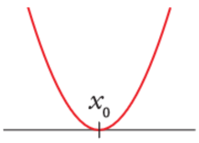
$a > 0$

$\Delta < 0$



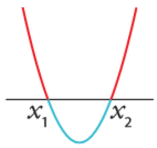
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	

$\Delta = 0$



x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

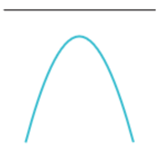
$\Delta > 0$



x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

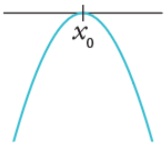
$a < 0$

$\Delta < 0$



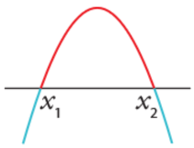
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	

$\Delta = 0$



x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

$\Delta > 0$



x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exemple. Résoudre (I) : $2x^2 + x - 3 < 0$ sur $\mathbb{R}$. On pose $f(x) = 2x^2 + x - 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
$\Delta = (1)^2 - 4 \times (2) \times (-3) = 25$ donc l'équation a 2 solutions : $x_1 = \frac{-(1)-\sqrt{(25)}}{2\times(2)} = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{-(1)+\sqrt{(25)}}{2\times(2)} = 1$
On a $a > 0$, et $\Delta > 0$. On est donc dans le cas n° 3. On observe que pour satisfaire (I), il faut se placer strictement (car (I) est une inégalité stricte) entre (pour être négatif) les racines. L'ensemble des solutions de (I) est donc $]-\frac{3}{2} ; 1[$.