

Suites arithmétiques et géométriques

Idée. Une suite (u_n) est **arithmétique** si on ajoute toujours le même nombre pour passer au terme suivant.

Exemple a. (6; 11; 16; 21; 26; 31; ...) est le début d'une suite arithmétique u , car on ajoute 5 à chaque fois.

Exemple b. (7; 4; 1; -2; -5; -8; ...) est le début d'une suite arithmétique v , car on ajoute -3 à chaque fois.

Définition. Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r , tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$
 r est appelé **raison de la suite arithmétique** (u_n) .

Exemple. Dans l'exemple a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 5$. La raison de cette suite est $r = 5$.

Exemple. Dans l'exemple b, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 3$. La raison de cette suite est $r = -3$.

Méthode. Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on peut montrer que $u_{n+1} - u_n$ est constant (indépendant de n).

Exemple. Soit la suite définie par $w_n = 5 + 8n$. La suite (w_n) est-elle arithmétique ?

$w_{n+1} - w_n = (5 + 8(n+1)) - (5 + 8n) = 5 + 8n + 8 - 5 - 8n = 8$. Donc (w_n) est arithmétique de raison 8.

Propriété. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + r \times n$$

Idée. Deux termes distants de n rangs diffèrent de n fois la raison

Exemple. Dans l'exemple a, (u_n) est arithmétique de raison $r = 5$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6 + 5n$

Exemple. Dans l'exemple b, (v_n) est arithmétique de raison $r = -3$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 - 3n$

Remarque. Si le rang initial est 1 il faut adapter la formule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + r(n-1)$

Remarque. Si le rang initial est $p \in \mathbb{N}$ il faut adapter la formule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + r(n-p)$

Propriété. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

La suite est strictement croissante si $r > 0$, strictement décroissante si $r < 0$, et constante si $r = 0$.

Exemple. Dans l'exemple a, (u_n) est arithmétique de raison $r = 5 > 0$ donc (u_n) est croissante.

Idée. (u_n) est **géométrique** si on multiplie toujours par le même nombre pour passer au terme suivant.

Exemple c. (3; 6; 12; 24; 48; 96; ...) est le début d'une suite géométrique u , car on $\times 2$ à chaque fois.

Exemple d. (900; 90; 9; 0,9; 0,09; ...) est le début d'une suite géométrique v , car on $\times \frac{1}{10}$ à chaque fois.

Définition. Une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel q , tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$
 q est appelé **raison de la suite géométrique** (u_n) .

Exemple. Dans l'exemple c, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 \times u_n$. La raison de cette suite est $q = 2$.

Exemple. Dans l'exemple d, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{10} \times v_n$. La raison de cette suite est $q = \frac{1}{10}$.

Propriété. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q .

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n$$

Idée. Deux termes distants de n rangs, sont dans un rapport égal à la raison puissance n

Exemple. Dans l'exemple a, (u_n) est géométrique de raison $q = 2$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^n$

Exemple. Dans l'exemple b, on a $q = \frac{1}{10}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 900 \times \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{900}{10^n}$

Remarque. Si le rang initial est 1 il faut adapter la formule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 q^{n-1}$

Remarque. Si le rang initial est $p \in \mathbb{N}$ il faut adapter la formule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p q^{n-p}$

Somme de suites arithmétiques et géométriques

Propriété. Somme des n premiers entiers. Pour tout entier $n \geq 1$, on a $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Démonstration. Soit un entier $n \geq 1$. On note S la somme des n premiers entiers.

$$S = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + \dots + 2 + 1$$

Donc en sommant les deux égalités, on obtient :

$$2S = \dots = \dots \quad \text{Donc } S = \frac{n \times (n+1)}{2}.$$

Propriété.

Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique = nombre de termes $\times \frac{(\text{1er terme} + \text{dernier terme})}{2}$

Démonstration. Symboliquement, il faut montrer que $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = (n-p+1) \times \frac{(u_p + u_n)}{2}$

$$u_p + \dots + u_n = (u_p) + (u_p + r) + (u_p + 2r) + \dots + (u_p + (n-p)r)$$

$$u_p + \dots + u_n = (n-p+1)u_p + r + 2r + 3r + \dots + (n-p)r$$

$$u_p + \dots + u_n = (n-p+1)u_p + r(1 + 2 + 3 + \dots + (n-p))$$

$$u_p + \dots + u_n = \dots = (n-p+1) \left(u_p + \frac{r(n-p)}{2} \right)$$

$$u_p + \dots + u_n = (n-p+1) \left(\frac{2u_p + r(n-p)}{2} \right) = (n-p+1) \left(\frac{u_p + (u_p + r(n-p))}{2} \right) = (n-p+1) \frac{(u_p + u_n)}{2}$$

Exemple. $10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 = 6 \times \frac{10+25}{2} = 105$

Propriété. Somme des n premières puissances d'un réel différent de 1.

Soit q un réel $\neq 1$. Pour tout entier $n \geq 1$, $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Démonstration. On note $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$ $qS = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}$

$$\text{Donc } S - qS = 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \dots + \cancel{q^n} - \cancel{q} - \cancel{q^2} - \dots - \cancel{q^n} - q^{n+1}$$

$$\text{Donc } S(1-q) = 1 - q^{n+1}. \text{ Comme } q \neq 1, \text{ on peut diviser par } 1-q. \quad S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Propriété. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique = 1^{er} terme $\times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$

Démonstration.

$$u_p + \dots + u_n = u_p + qu_p + q^2u_p + \dots + q^{n-p}u_p = u_p(\dots) = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

Exemple. $8 + 16 + 32 + 64 + 128 = 8 \times \frac{1-2^5}{1-2} = 8 \times \frac{-31}{-1} = 248$