Equations - 1

A. Remplacer une variable dans une expression.

Méthode. Pour remplacer une certaine lettre par une valeur dans une expression :
• On remplace *chaque* apparition de la lettre par la valeur *entre parenthèses*.

Exemple. Calculer $A(x) = 3x + 5x^2 - 6$ en $x = 10$.

$A(10) = 3(10) + 5(10)^2 - 6 = 3 \times 10 + 5 \times 10 \times 10 - 6 = 30 + 500 - 6 = 524$

Exemple. Calculer $B(x) = -x^2$ en $x = -2$

$B(-2) =$

Exemple. Calculer $C(x) = 2(-x)^2$ en $x = -3$

$C(-3) =$

Exercice A1. Calculer :

$A(x) = 3x^2 - x + 4$ en $x = -2$:

$B(x) = -5x + 3$ en $x = -4$:

$C(t) = -t^2 + 2t$ en $t = 5$:

$D(y) = (-10 - y)^2$ en $y = -3$:

B. Tester une équation en une valeur.

Définitions. Une **égalité** est une expression comportant un signe égal.
Une **équation** est *une égalité* comportant un ou plusieurs nombres inconnus notés avec des lettres.

Exemples. $4x + 5{,}3 = 17$ est une équation.
$3x + 6$ n'est pas une équation car il n'y a pas de signe $=$.

Méthode. Pour tester une équation à une variable x en une valeur k
• On remplace la variable x par la valeur k, puis on calcule les deux côtés du signe égal.
• Si les résultats sont les mêmes, l'équation est vraie *en* $x = k$, sinon, l'équation est fausse *en* $x = k$.

Exemple. L'équation $(A) : 3x + 5 = -2x + 10$ est-elle vérifiée en $x = 3$?

$3(3) + 5 = -2(3) + 10 \Leftrightarrow 9 + 5 = -6 + 10 \Leftrightarrow 14 = 4$
Mais $14 \neq 4$. Donc l'équation (A) est fausse en $x = 3$.

Exemple. L'équation $(B) : -2x + 7 = 3$ est-elle vérifiée en $x = 2$?

Exercice B1. Tester les équations suivantes :

$(E) : -6x - 3 = 15$ est-elle vérifiée en $x = -3$?

$(F) : -x + 2 = -3x + 10$ est-elle vérifiée en $x = 6$?

$(G) : -13 = 10x + 7$ est-elle vérifiée en $x = 2$?

$(H) : 3x^2 - 6x = 6x^2 - 9$ est-elle vérifiée en $x = -3$?

Equations - 2

C. Résoudre une équation du premier degré.

Définition. Une **solution** d'une équation est une valeur qui rend l'équation *vraie*.

Exemple. L'équation $3x - 3 = 0$ est vraie en $x = 1$. 1 est une solution de l'équation $3x - 3 = 0$.

• Une équation peut avoir zéro, une, ou plusieurs solutions.

Définition. Deux équations sont **équivalentes** si elles ont le même ensemble de solutions.

Exemple. L'équation $3 + x = 6$ est équivalente à l'équation $4 + x = 7$. On écrit $3 + x = 6 \Leftrightarrow 4 + x = 7$

• Le symbole ⇔ signifie « est équivalent à » / « revient à dire que » / « si et seulement si »

Définition. **Résoudre une équation** c'est trouver l'ensemble de ses solutions.

• On cherche à isoler l'inconnue x par transformations successives en équations équivalentes de plus en plus simples

Propriétés.

• Ajouter ou soustraire un même nombre c aux deux côtés d'une équation, donne une équation équivalente

• Multiplier ou diviser un même nombre c *non nul* aux 2 côtés d'une équation, donne une équation équivalente

Méthode. Pour résoudre une équation simple du 1er degré en x : • Chaque terme à droite et contenant x est déplacé à gauche, en changeant son signe. • Chaque terme à gauche ne contenant *pas* x est déplacé à droite, en changeant son signe. • On simplifie à gauche les termes en x, et à droite par calcul. • Si le terme restant à gauche, est de la forme $c\ x$, on *divise* par c les deux côtés. • On a résolu l'équation quand x est isolé. **ATTENTION** : Cette méthode du *1er degré* ne marche pas si l'équation contient des $x^2, x^3, \frac{1}{x}, \sqrt{x}$, …	**Exemple.** Résoudre $(E) : 3x + 5 = 35 - 7x$ $(E) \Leftrightarrow 3x + 5 = 35 - 7x$ $\Leftrightarrow 3x + 5 + 7x = 35$ $\Leftrightarrow 3x + 7x = 35 - 5$ $\Leftrightarrow (3 + 7)x = 30$ $\Leftrightarrow 10\ x = 30$ $\Leftrightarrow \frac{10x}{10} = \frac{30}{10}$ $\Leftrightarrow x = 3$ L'ensemble des solutions de (E) est : $S_E = \{3\}$

Exercice C1. Résoudre les équations suivantes :

$(A) : 3x - 5 = 5x + 13$

$(A) \Leftrightarrow$

$(B) : 1 - 7x = 3 - 11x$

$(C) : 6 - 2x = 8x - 34$

$(D) : 9x - 13 = 5x + 2$

• Pour des équations un peu plus compliquées, il est utile de commencer par développer et simplifier.

Exercice C2. Résoudre les équations suivantes :

$(F) : 5(x - 1) = -3(2 - x)$

$(G) : 5 - (x - 3) = 4x - (3x - 8)$

$(H) : 13x + 2 = x - 5 - 3(x + 12) + 4x$

Equations - 3

• Pour se débarrasser des fractions, on peut multiplier par les dénominateurs des 2 côtés.

Exercice C3. Résoudre les équations suivantes :

$(A) : \frac{x-2}{3} = \frac{3}{4} + x$

$(A) \Leftrightarrow \cancel{3} \times 4 \times \left(\frac{x-2}{\cancel{3}}\right) = 3 \times 4 \times \left(\frac{3}{4} + x\right)$

$(A) \Leftrightarrow 4 \times (x-2) = 3 \times 4 \times \frac{3}{4} + 3 \times 4 \times x$

$(A) \Leftrightarrow 4x - 8 = 9 + 12x$

$(A) \Leftrightarrow 4x - 12x = 9 + 8 \Leftrightarrow -8x = 17 \Leftrightarrow x = -\frac{17}{8}$

Donc $S_A = \left\{-\frac{17}{8}\right\}$

$(B) : x + \frac{3}{5} = \frac{4}{3}x - 1$

$(C) : \frac{3-2x}{4} = \frac{x+2}{5}$

• Certaines équations aboutissent à une égalité vraie comme $0 = 0$, dans ce cas, toute valeur est solution, $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

• Certaines équations aboutissent à une égalité fausse comme $0 = 1$, dans ce cas, il n'y a pas de solution, $\mathcal{S} = \emptyset$.

Exercice C4. Résoudre les équations suivantes :

$(A) : 2(x+4) + 1 - 5x = 3(1-x) + 7$

$(B) : 3(x-5) - 2x = 2(x+4) - x - 7$

D. <u>Résoudre un problème numérique avec une équation.</u>

Méthode. Pour résoudre un problème numérique :	**Exemple.** Un père a 40 ans et son fils a 10 ans. Dans combien d'années le père aura le double de l'âge de son fils ?
• Bien lire *la question* posée • **Modélisation** : • On note le nombre inconnu cherché avec une lettre. • On peut préciser chaque quantité ou relation utile. • On représente le problème avec une équation.	On note x le nombre d'années cherché. Dans x années, le père aura $40 + x$ ans. Dans x années, le fils aura $10 + x$ ans. On veut résoudre $(E) : 40 + x = 2(10 + x)$.
• **Résolution** : • On résout l'équation du problème.	$(E) \Leftrightarrow 40 + x = 2 \times 10 + 2 \times x$ $\Leftrightarrow 40 + x = 20 + 2x$ $\Leftrightarrow x - 2x = 20 - 40$ $\Leftrightarrow -x = -20$ $\Leftrightarrow x = 20$
• **Interprétation** : • On répond au problème en français à l'aide des solutions.	Le père aura le double de l'âge du fils dans 20 ans.

• La **modélisation** désigne le passage du réel aux mathématiques.

• La **résolution** s'effectue dans le monde mathématique.

• L'**interprétation** désigne le retour des mathématiques au réel.

Equations - 4

Exercice D1. Il y a 10 ans, Alice avait la moitié de l'âge quelle aura dans 10 ans. Quel âge à Alice ?

Exercice D2. Une personne dépense le quart de son salaire pour se loger, les $\frac{3}{7}$ pour se nourrir. Il lui reste 594 € pour les autres dépenses. Quel est son salaire ?

Exercice D3. Dans un bassin plein aux deux tiers on verse 20 litres. Il est alors plein aux trois quarts. Quelle est la capacité du bassin ?

Exercice D4. Si tous les inscrits étaient venus, la sortie en autocar aurait coûté 25 € par personne. Mais il y a eu 3 absents et chaque participant a dû payer un supplément de 1,50 €. Combien y avait-il d'inscrits ?

Exercice D5. Thomas a obtenu 11 et 16 aux deux premiers contrôles de mathématiques. Quelle note doit-il obtenir au troisième contrôle pour obtenir 15 de moyenne ?

Exercice D6. Dans un jardin, le tiers de la surface est recouvert par des fleurs, un sixième par des plantes et vertes et le reste soit 150 m^2, est occupé par la pelouse. Quel est l'aire de ce jardin ?

Exercice D7. François et son cousin William ont 200 € à eux deux. François a 20 € de plus que William. Combien d'argent possède chacun des deux cousins ?

Exercice D8. Le personnel d'une entreprise est composé d'hommes et de femmes. L'entreprise emploie 107 personnes. Si elle embauche 8 femmes de plus alors la composition de femmes représente 40 % de l'effectif total. Combien de femmes y a-t-il dans cette entreprise ?

E. Trouver les antécédents d'un nombre par une fonction, par le calcul.

Méthode. Pour trouver les antécédents d'un nombre connu k par une fonction f

- On résout l'équation $f(x) = k$ d'inconnue x.
- L'ensemble des valeurs trouvées est l'ensemble des antécédents de k par f.

Exemple. Déterminer le(s) antécédent(s) de 4 par la fonction $f(x) = 3x - 2$.

On résout $f(x) = 4$.

$f(x) = 4 \Leftrightarrow 3x - 2 = 4 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{3} \Leftrightarrow x = 2$

L'unique antécédent de 4 par f est 2.

- Chercher les antécédents d'un nombre, c'est chercher le(s) entrée(s) connaissant la sortie.

Exemple. Déterminer le(s) antécédent(s) de -2 par la fonction $g(x) = 3 - 10x$.

- Un nombre y peut avoir zéro, un, plusieurs, ou une infinité d'antécédents par f.

Exercice E1. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3x - 8$. Déterminer les éventuels antécédents des nombres suivants : a) 3 b) -5 c) $\frac{1}{2}$

Exercice E2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3 - x)(x - 1)$. Déterminer les antécédents de 0 par f.

F. Résoudre une équation produit nul

Propriété. Un produit est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul.
Symboliquement : $AB = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 0 \;\; ou \;\; B = 0$

Méthode. Pour résoudre une équation produit nul :
- On utilise la propriété pour découper en plusieurs équations séparées par « ou ».
- On résout chaque équation séparément, en gardant le « ou » comme séparation.

Exemple. Résoudre $(E) : (5x + 2)(3x - 1) = 0$

$(E) \Leftrightarrow$

L'ensemble des solutions de (E) est

Exercice F1. Résoudre les équations suivantes

$(A) : (x - 2)(x + 3) = 0$

$(B) : (5 - 2x)(8 + 4x) = 0$

$(C) : (2x - 6)(6 - 5x) = 0$

$(D) : (5 - x)(2x - 4)(2x - 3) = 0$

G. Résoudre une équation carrée.

Méthode. Pour résoudre une équation de la forme $A^2 = k$ où $k > 0$, on peut écrire :
$A^2 = k \Leftrightarrow \quad A = \sqrt{k}$ ou $A = -\sqrt{k}$

Exemple. Résoudre $(E) : (x - 1)^2 = 9$

$(x - 1)^2 = 9 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

L'ensemble des solutions de (E) est $\mathcal{S}_E =$

Propriété. Une équation de la forme $A^2 = k$ où $k < 0$ n'a pas de solutions. Un carré est toujours positif.

Exemple. Résoudre $(F) : \left(\frac{178}{x^{42}} + x^{35}\right)^2 = -5.$ $-5 < 0$ donc l'équation (F) n'a pas de solutions. $\mathcal{S}_F = \emptyset$

Méthode. Pour résoudre une équation de la forme $A^2 = 0$, on peut écrire :
$A^2 = 0 \Leftrightarrow \quad A = 0$

Exemple. Résoudre $(G) : (2x + 4)^2 = 0$

$(2x + 4)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

L'ensemble des solutions de (G) est $\mathcal{S}_G =$

Equations - 7

Exercice G1. Résoudre les équations suivantes

$(A) : (3x - 6)^2 = 4$

$(B) : (5x - 7)^2 = 0$

$(C) : (12 - 4x)^2 = 5$

$(D) : (10x - 5)^2 = -2$

H. Trouver les valeurs interdites dans un quotient

Méthode. Pour trouver l'ensemble des valeurs interdites d'un quotient $\frac{A}{B}$ on résout l'équation $B = 0$.

Exemple. Déterminer l'ensemble des valeurs interdites de $f(x) = \frac{x-3}{2x-6}$

$2x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{2} \Leftrightarrow x = 3$ L'ensemble des valeurs interdites de f est $\{3\}$

Exercice H1. Quelle sont les valeurs interdites de :

$g(x) = \frac{1}{(x+7)(x-5)}$

$h(x) = \frac{1}{(3-2x)^2}$

I. Résoudre une équation quotient nul

Propriété. Quand $B \neq 0$, on a : $\frac{A}{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 0$

Méthode. Pour résoudre une équation quotient nul $\frac{A}{B} = 0$

- On résout l'équation $B = 0$ pour trouver les valeurs interdites.
- On résout l'équation $A = 0$ *en enlevant* les valeurs interdites si nécessaire.

Exemple. Résoudre $(E) : \frac{(2x-8)(4+2x)}{5x+10} = 0$

$5x + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow$ L'ensemble des valeurs interdites de (E) est { }

$(2x - 8)(4 + 2x) = 0 \Leftrightarrow$ ou

$\Leftrightarrow$ ou

$\Leftrightarrow$ ou

L'ensemble des solutions de (E) est donc $S_E =$

Exercice I1. Résoudre les équations suivantes :

$(A) : \frac{4x-8}{x-3} = 0$

$(B) : \frac{(3-x)(5-x)(2x-8)}{2x-6} = 0$

$(C) : \frac{4x-8}{x-2} = 0$

$(D) : \frac{5}{x+2} = 0$