A. Déterminer les coefficients d'une équation cartésienne

Définition. Une **équation cartésienne** est une équation à 2 variables de la forme $ax + by + c = 0$

Exemple. Mettre l'équation $(E) : 3x - 6y = -2x + 3$ sous forme cartésienne et préciser ses coefficients a, b, c.

$(E) \Leftrightarrow 3x - 6y + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 5x - 6y - 3 = 0 \Leftrightarrow 5x + (-6)y + (-3) = 0$
Donc $a = 5$; $b = -6$; $c = -3$

Exercice A1. Mettre chaque équation sous forme cartésienne et préciser ses coefficients a, b, c.

$(A) : -5y = -2x + 7$
$(A) \Leftrightarrow$

$(B) : 2(x + 3) = 5(y - 2)$
$(B) \Leftrightarrow$

B. Identifier le lieu géométrique d'une équation cartésienne

Propriété. Une équation à deux variables, représente *une droite* si et seulement si :
Elle peut être simplifiée en une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ avec $\underline{a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0}$

Méthode. Pour identifier le lieu géométrique d'une équation linéaire :
- On la simplifie sous forme cartésienne $ax + by + c = 0$, puis on détermine les coefficients a, b, c.
- Si $b \neq 0$ et $a \neq 0$: (l'équation contient y et x) Alors : L'équation représente une droite oblique.
- Si $b \neq 0$ et $a = 0$: (l'équation contient y mais pas x) Alors : L'équation représente une droite horizontale.
- Si $b = 0$ et $a \neq 0$: (l'équation contient x mais pas y) Alors : L'équation représente une droite verticale.
- Si $b = 0$ et $a = 0$: (l'équation ne contient ni x, ni y) Alors : L'équation ne représente pas une droite.

Exercice B1. Identifier le lieu géométrique de chaque équation :

$(A) : 3x = 2y - 5$
$(A) \Leftrightarrow$

$(B) : 2y = 5$

$(C) : 6 = 3x - 2$

$(D) : 3x - 2 = 5x - 4 + 2x + 2$

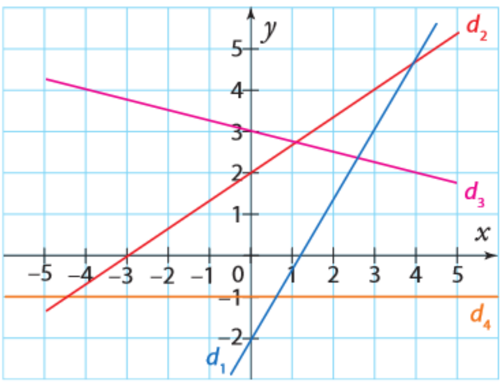
C. Déterminer l'équation réduite d'une droite par lecture graphique

Méthode. Pour trouver *la pente* m d'une droite *non verticale* par lecture graphique :
- On choisit deux points A et B de la droite, si possible sur des graduations.
- On mesure le déplacement horizontal, et le déplacement vertical entre les deux points choisis.
- On calcule la pente $m = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
- Si la droite descend en allant vers la droite, la pente est négative, on vérifie que m a un signe $-$

Méthode. Pour trouver *l'ordonnée à l'origine* p d'une droite *non verticale* par lecture graphique :
- On regarde le point d'intersection entre la droite et l'axe vertical des ordonnées.
- On lit son ordonnée p

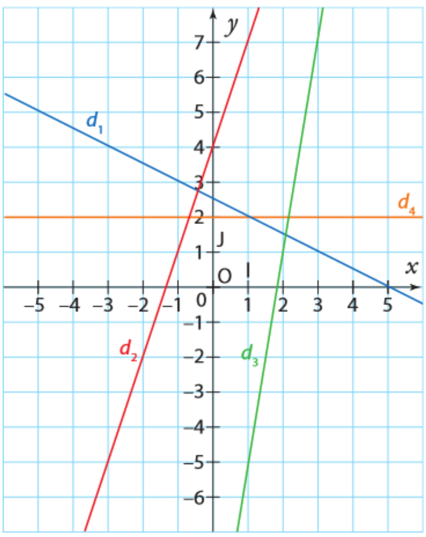
Méthode. Pour trouver *l'équation réduite* d'une droite *non verticale* par lecture graphique :
- On détermine sa pente m graphiquement.
- On détermine son ordonnée à l'origine p graphiquement.
- L'équation réduite de la droite est $y = mx + p$

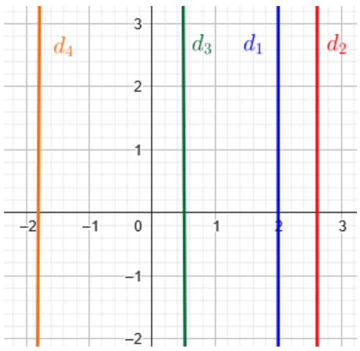
Exercice C1. Déterminer l'équation réduite de chaque droite :



Pour d_1 : $m =$ $p =$ donc $y =$

Exercice C2. Déterminer l'équation réduite de chaque droite :





Méthode. Pour trouver *l'équation réduite* d'une droite *verticale* par lecture graphique
- On regarde le point d'intersection entre la droite et l'axe horizontal des abscisses.
- On lit son abscisse k
- L'équation réduite de la droite est $x = k$

Exercice C3. Déterminer l'équation réduite de chaque droite verticale :

D. Réduire une équation de droite.

Méthode. Pour réduire une équation cartésienne $ax + by + c = 0$:

• Si $b \neq 0$: Si l'équation contient y.
- On isole y pour trouver l'équation réduite
- On simplifie l'équation sous la forme $y = mx + p$

• Si $b = 0$ et $a \neq 0$: Si l'équation contient x mais pas y.
- On isole x pour trouver l'équation réduite
- On simplifie l'équation sous la forme $x = k$

Exemple. Réduire l'équation (E) : $6x + 3y - 12 = 0$

$(E) \iff$

Exemple. Réduire l'équation (G) : $2x - 10 = 0$.

$(G) \iff$

Exercice D1.

Déterminer l'équation réduite de chaque équation :

(E) : $4x - 2y = 6$

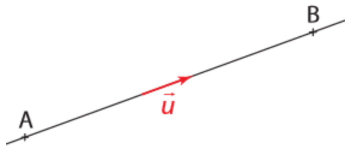
(F) : $12 = -4x + 3$

(G) : $3x = -5y + 7 - 2x$

(H) : $5y = -2 + y$

E. Trouver un vecteur directeur d'une droite et un point de la droite, à partir d'une équation.

Définition. Un **vecteur directeur d'une droite** d est un vecteur aligné avec la droite dans un sens ou l'autre.



Remarque. $\vec{u}$ est un **vecteur directeur de la droite** (AB) si $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Propriété. Un vecteur directeur d'une droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Exemple. Donner un vecteur directeur de la droite $3y - 6x - 12 = 0$.

Propriété. Un vecteur directeur d'une droite d d'équation réduite $y = mx + p$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

Exemple. Donner un vecteur directeur de la droite $y = -3x + 10$.

Propriété. Un vecteur directeur d'une droite d passant par deux points A et B est $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Exemple. Donner un vecteur directeur de la droite passant par les points $S = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Méthode. Pour trouver un point appartenant à une droite d d'équation donnée $ax + by + c = 0$

• Si $b \neq 0$: Si l'équation contient y

Par exemple, on remplace x par 0 puis on résout l'équation en y. On trouve $A = \left(0; -\frac{c}{b}\right)$

• Si $a \neq 0$: Si l'équation contient x

Par exemple, on remplace y par 0 puis on résout l'équation en x. On trouve $A = \left(-\frac{c}{a}; 0\right)$

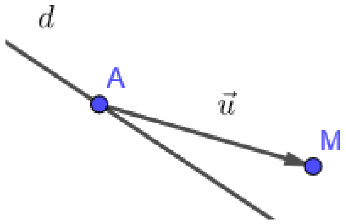
Exemple. Trouver un point appartenant à la droite $3y - 6x - 12 = 0$.

F. <u>Trouver une équation d'une droite à partir d'un vecteur directeur et d'un point de la droite.</u>

Exemple. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A = (-1; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Méthode 1. Soit $M = (x\,; y)$ un point du plan. On simplifie d'abord l'expression $\overrightarrow{AM}$.

$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - (-1) \\ y - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 3 \end{pmatrix}$



$M \in d \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0$

$M \in d \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & -2 \\ y-3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x+1)(1) - (y-3)(-2) = 0$

$M \in d \Leftrightarrow x + 1 + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 5 = 0$ Donc une équation de d est $x + 2y - 5 = 0$

Méthode 2.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d donc, d admet une équation de la forme $1x - (-2)y + c = 0$

Autrement dit $x + 2y + c = 0$. Il reste à déterminer la valeur de c.

On sait que $A \in d$, donc les coordonnées de A vérifie l'équation.

$x_A + 2y_A + c = (-1) + 2(3) + c = 0$ donc $5 + c = 0$ donc $c = -5$.

Une équation de d est donc $x + 2y - 5 = 0$.

Remarque. Pour déterminer l'équation d'une droite passant par deux points A, B il suffit de déterminer l'équation de la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$

Exercice F1.

a) Trouver une équation de la droite passant par $C = (3; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b) Trouver une équation de la droite passant par les points $I = (10; 0)$ et $J = (5; 3)$

G. Déterminer si des droites sont parallèles, si des points sont alignés

Définition. Dans un repère, le **déterminant** de deux vecteurs $\vec{u} = \binom{x}{y}$ et $\vec{v} = \binom{x'}{y'}$ est le nombre

$$\mathbf{det}(\vec{\boldsymbol{u}};\vec{\boldsymbol{v}}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y} & \boldsymbol{y'} \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

Exemple. Soit $\vec{u} = \binom{2}{-1}$ et $\vec{v} = \binom{-1}{4}$. Calculer $\det(\vec{u};\vec{v})$.

$\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} =$

Propriété. Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est zéro. (Dans n'importe quel repère)

Exemple. Les vecteurs $\vec{u} = \binom{5}{-2}$ et $\vec{v} = \binom{-15}{6}$ sont-ils colinéaires ?

$\det(\vec{u};\vec{v}) =$

Méthode. Pour tester si deux droites sont parallèles :
- On détermine un vecteur directeur pour chaque droite.
- On teste la colinéarité des vecteurs directeurs, en comparant leur déterminant à zéro.

Exemple. Soit $A = (0;3)$, $B = (2;2)$, $C = (1;-2)$, $D = (-10\,;3{,}5)$.
Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ou sécantes ?

$\overrightarrow{AB} =$

$\overrightarrow{CD} =$

$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) =$

Donc (AB) et (CD) sont

Exercice G1.

1) Soit $A = (-2;1), B = (3;4), C = (2;2), D = (5;4)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

2) Pour quelle valeur de m la droite (d) d'équation $mx - 3y + 2 = 0$ est-elle parallèle à la droite (Δ) d'équation $3x - 2y + 4 = 0$?

Méthode. Pour tester si trois points sont alignés :
- On détermine deux vecteurs faisant intervenir ces trois points.
- On teste la colinéarité de ces vecteurs, en comparant leur déterminant à zéro.

Exercice G2.

1) Soit $A = (2;3)$, $B = (2;-1)$, $C = (2;7)$. Les points A, B, C sont-ils alignés ?

2) Soit $G = (-3;0)$, $H = (2;3)$, $I = (4;4)$. Le point I appartient-il à la droite (GH) ?

H. Trouver l'intersection de deux droites en résolvant un système

Méthode. Pour résoudre un système linéaire $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$

• On calcule le déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

• Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$ • Le système a un seul couple solution (les droites sont sécantes).

On peut résoudre le système par substitution :
• On isole une inconnue dans une équation.
• On remplace l'inconnue isolée dans l'autre équation afin d'obtenir une nouvelle équation à une inconnue.
• On résout cette nouvelle équation.
• On remplace l'inconnue trouvée dans la première équation afin de trouver la seconde inconnue.

On peut aussi résoudre le système par combinaison :
• On multiplie la ligne 1 par le coefficient a' de la ligne 2 et on multiplie la ligne 2 par le coefficient a de la L1.
• On remplace la ligne 2 par : ligne 2 moins ligne 1. La ligne 2 n'a alors plus qu'une seule inconnue y
• On résout la ligne 2 en y.
• On remplace l'inconnue y trouvée dans la première équation afin de trouver la seconde inconnue x.

• Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \neq 0$ • Le système n'a aucune solution. (Les droites sont strictement parallèles)

• Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0$ • Le système a une infinité de solutions. (Les droites sont confondues).

Exemple. Résoudre (E): $\begin{cases} -2x+3y+16=0 \\ 4x+2y-16=0 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\times 2 - 3\times 4 = -4-12 = -16 \neq 0.$ Donc (E) admet une seule solution.

Exemple de résolution par substitution :

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3y+16=0 \\ 4x+2y-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3y+16=0 \\ 2y=-4x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3y+16=0 \\ y=-2x+8 \end{cases}$ (On isole y dans la 2è équation)

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3(-2x+8)+16=0 \\ y=-2x+8 \end{cases}$ (On remplace y dans la 1ère équation)

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+(-6)x+24+16=0 \\ y=-2x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x+40=0 \\ y=-2x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-40}{-8}=5 \\ y=-2x+8 \end{cases}$ (On isole x dans la 1ère équation)

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-2x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-2(5)+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$ (On remplace la valeur de x dans la 2ème équation).

L'ensemble des solutions de (E) est : $S_E = \{(5;-2)\}$.

Exemple de résolution par combinaison :

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3y+16=0 \\ 4x+2y-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x+12y+64=0 & (L_1 \leftarrow 4\times L_1) \\ -8x-4y+32=0 & (L_2 \leftarrow -2\times L_2) \end{cases}$

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} -8x+12y+64=0 \\ 0x+(-4-12)y+32-64=0 \; (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{cases}$

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} -8x+12y+64=0 \\ -16y-32=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x+12y+64=0 \\ y=\frac{32}{-16}=-2 \end{cases}$

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} -8x+12(-2)+64=0 \\ y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x+40=0 \\ y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-40}{-8}=5 \\ y=-2 \end{cases}$

L'ensemble des solutions de (E) est : $S_E = \{(5;-2)\}$.

Exercice H1. Résoudre les systèmes suivants :

(A) : $\begin{cases} 3x+2y=66 \\ x+3y=57 \end{cases}$ (B) : $\begin{cases} 10x-3y-35=0 \\ 5x-4y+20=0 \end{cases}$

(C) : $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 4x+3y=3 \end{cases}$ (D) : $\begin{cases} -x+2y+3=0 \\ 3x-6y-1=0 \end{cases}$

I. Donner une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon

Propriété. Un cercle de centre $(a; b)$ et de rayon r admet pour équation :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Exercice I1.

(a) Donner une équation du cercle de centre $(-1;-2)$ et de rayon 2

(b) Donner une équation du cercle de centre $(2\,;0)$ et de rayon $\sqrt{3}$

(c) Donner une équation du cercle de centre $\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{4}\right)$ et de rayon $\frac{5}{2}$

(d) Avec $C=(-2;3)$, donner une équation de l'ensemble des points M tels que $CM=2$.

Exercice I2. Pour chaque équation, donner le centre C et le rayon r du cercle :

(a) $(x-5)^2+(y-2)^2=16$

(b) $(x-4)^2+(y+3)^2=9$

(c) $x^2+y^2-8=0$

(d) $4(x-2)^2+4(y-1)^2=9$

Exercice I3. Soit $A=(-3;1)$ et $B=(2;5)$

(a) Déterminer les coordonnées du milieu M de $[AB]$.

(b) Calculer la longueur AM.

(c) Donner une équation du cercle de diamètre $[AB]$.

J. Réduire une équation de cercle et trouver le centre et le rayon

Méthode.

Pour réduire une équation et déterminer s'il s'agit d'un cercle :

• On simplifie sous la forme : $ax^2+bx+cy^2+dy+e=0$

Si ce n'est pas possible l'équation ne représente pas un cercle

• Si le coefficient en x^2 n'est pas égal au coefficient en y^2, l'équation ne représente pas un cercle.

• Sinon, on divise par ce coefficient, et l'équation est de la forme : $x^2+ax+y^2+by+c=0$

• On considère les termes en x comme un trinôme $P(x)$ et les termes en y comme un trinôme $Q(y)$.

• On met $P(x)$ et $Q(y)$ sous forme canonique, à gauche du signe =

• On simplifie les constantes, à droite du signe =

• L'équation est alors de la forme $(x-A)^2+(y-B)^2=C$

• Si $C>0$, l'équation est celle d'un cercle de rayon $r=\sqrt{C}$ de centre $(A;B)$.

• Si $C=0$, l'équation représente un unique point : le point $(A;B)$.

• Si $C<0$, l'équation n'a pas de solutions.

Exemple. Que représente l'équation :

$(E)\Leftrightarrow 3y^2+5x^2+54=30x-18y+2x^2$

$(E)\Leftrightarrow 5x^2-2x^2-30x+3y^2+18y+54=0$

$(E)\Leftrightarrow 3x^2-30x+3y^2+18y+54=0$

$(E)\Leftrightarrow \frac{3x^2}{3}-\frac{30x}{3}+\frac{3y^2}{3}+\frac{18y}{3}+\frac{54}{3}=0$

$(E)\Leftrightarrow x^2-10x+y^2+6y+18=0$

$(E)\Leftrightarrow (x-5)^2-25+(y+3)^2-9+18=0$

$(E)\Leftrightarrow (x-5)^2+(y+3)^2=25+9-18$

$(E)\Leftrightarrow (x-5)^2+\big(y-(-3)\big)^2=16$

$(E)\Leftrightarrow (x-5)^2+\big(y-(-3)\big)^2=4^2$

(E) représente un cercle de centre $(5;-3)$ et de rayon 4.

Exercice J1. Pour chacune des équations, déterminer si c'est un cercle et le cas échéant son rayon et son centre.

(1) $x^2+3x+y^2-4y=0$

(2) $3x^2+3y^2+3=3x+9y$

(3) $2x^2+16x+2y^2+6y+32=0$

(4) $x^2+6x+y^2-4y+14=0$

K. Déterminer par calcul, l'intersection d'une droite et d'un cercle

Méthode. En général on résout en s'inspirant de la méthode par substitution.
On réduit l'équation de la droite par exemple sous la forme $y = \ldots$ puis on remplace ce y dans l'équation du cercle, pour trouver une équation ne contenant que du x. Puis on trouve y, pour chaque valeur de x possible.

Exercice K1. Dans chacun des cas suivants, on donne les équations d'un cercle et d'une droite. Déterminer les coordonnées de leurs points d'intersection quand ils existent.

(1) Le cercle d'équation $x^2 - 3x + y^2 + y - 16 = 0$ et la droite d'équation $y = -4$

(2) Le cercle de centre $(2; 3)$, de rayon $3\sqrt{2}$ et la droite d'équation $x = -1$

(3) Le cercle de centre $(0; 0)$, de rayon 2 et la droite d'équation $y = 3$

(4) Le cercle d'équation $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 32$ et la droite d'équation $y = x + 9$

(5) Le cercle d'équation $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 18$ et la droite d'équation $x + y + 1 = 0$

L. Déterminer par calcul, l'intersection de deux cercles

Méthode. En général on résout en s'inspirant de la méthode par substitution.
Par exemple, on peut mettre les deux équations sous la forme
$x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$ et $x^2 + a'x + y^2 + b'y + c' = 0$
De sorte que par soustraction on obtienne : $(a - a')x + (b - b')y + (c - c') = 0$
Cette équation peut être réduite puis injectée dans une des deux équations. On obtient une équation à une seule inconnue, qui peut ensuite être résolue, et permet de trouver dans un deuxième temps l'autre inconnue.

Exercice L1. Trouver par calcul, l'intersection du cercle $\mathcal{C}$ de centre $A = (6; -1)$ de rayon 10 et du cercle $\mathcal{C}'$ de centre $B = (0; -4)$ de rayon 5.