Suites numériques

Idée. Une suite est une liste infinie de nombres, par exemple $(1; 3; 5; 7; 9; 11; \dots)$.
Définition. Une **suite** est une fonction $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

u est définie sur $\mathbb{N}$ (entiers positifs) ou plus généralement, sur tous les entiers à partir d'un entier initial k.

Exemple. La liste des entiers naturels $(0; 1; 2; 3; 4; \dots)$ est une suite.

Exemple. La liste des multiples de 3 supérieurs à 6 : $(6; 9; 12; 15; \dots)$ est une suite.

Contre-Exemple. $(1; 2; 3; 4)$ n'est pas une suite car c'est une liste finie.

Notations. Le n-ième nombre d'une suite est noté $\boldsymbol{u_n}$

u_n est **le terme de rang $\boldsymbol{n}$.** Une suite u est aussi notée $(\boldsymbol{u_n})$ ou plus précisément $(u_n)_{n\geq 0}$.

Attention : Ne pas confondre u_n qui est un nombre et (u_n) qui désigne la suite u.

Exemple. Si $u = (1; 3; 5; 7; \dots)$ est la suite des entiers impairs, alors $u_0 = 1$; $u_1 = 3$; $u_2 = 5$; $u_3 = 7$; …

Le rang initial est très souvent 0. Mais on peut aussi définir une suite $(u_n)_{n\geq k}$ avec un rang initial $k \geq 1$.

Vocabulaire. Définir une suite par une formule explicite, c'est donner u_n en fonction de n directement.

Exemples.

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $u = (-1; 0; 3; 8; 15; 24; \dots)$

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 6}$ définie à partir du rang 6 par $u_n = \frac{1}{n-5}$. On a $u = (u_6\,; u_7\,; u_8\,; \dots) = \left(1\,; \frac{1}{2}\,; \frac{1}{3}\,; \frac{1}{4}\,; \dots\right)$

Vocabulaire. Définir une suite par récurrence, c'est : donner une relation permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents ET donner un ou plusieurs premiers termes.

Exemple. Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -6 \\ u_{n+1} = 3u_n + 15 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ (suivant = 3 × courant + 15)

$u_1 = 3 \times (-6) + 15 = -3$ (autrement dit, on a remplacé n par 0 : $u_1 = u_{0+1} = 3u_0 + 15$)

$u_2 = 3 \times (-3) + 15 = 6$ (autrement dit, on a remplacé n par 1 : $u_2 = u_{1+1} = 3u_1 + 15$)

$u_3 = 3 \times (6) + 15 = 33$

Etc… $u = (-6; -3; 6; 33; \dots)$ Pour calculer chaque terme, on doit connaître le précédent.

Vocabulaire. Si le terme **courant** est u_n alors u_{n+1} est le terme **suivant**. u_{n-1} est le terme **précédent**.
Remarque. *Attention* à ne pas confondre u_{n+1} (le terme suivant) et $u_n + 1$ (le terme courant + 1)

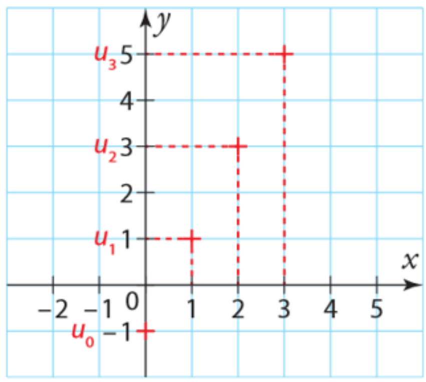
Exemple. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors $u_{n+1} = (n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n + 1 - 1 = n^2 + 2n$ mais $u_n + 1 = (n^2 - 1) + 1 = n^2$

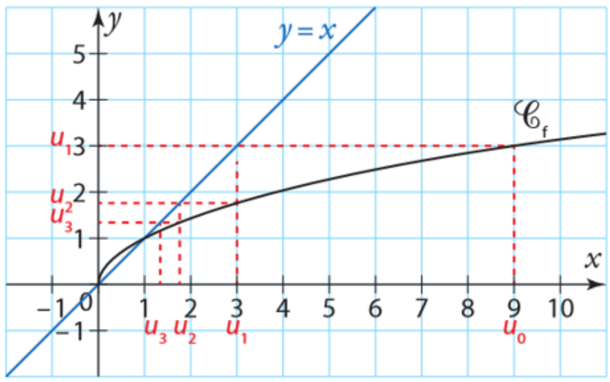
Méthode. Pour représenter une suite dans un repère (voir 1.), on place les points de coordonnées $(n; u_n)$.

Méthode. Si la suite (u_n) est *définie par récurrence*, ($u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$), alors (voir 2.) on peut construire les termes à l'aide de la courbe représentative de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$

1 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2n - 1$.



2 On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.



Définition. Une suite (u_n) est **croissante** ssi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$
Définition. Une suite (u_n) est **décroissante** ssi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$
Définition. Une suite (u_n) est **constante** ssi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$

Si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes, on parle de suite **strictement croissante** ou **strictement décroissante**.

Exemples. $(1; 3; 5; 19; 33; 200; \ldots)$ est le début d'une suite strictement croissante.
$(-11; -3; 5; 5; 5; 6; 8; 8; 10; 11; \ldots)$ est le début d'une suite croissante (mais pas strictement).
$(6; 2; 0; -1; -3; -10; \ldots)$ est le début d'une suite décroissante.
$(1; -1; 2; -2; 3; -3; \ldots)$ n'est ni croissante, ni décroissante.

Méthode. Pour étudier les variations d'une suite, on peut comparer $u_{n+1} - u_n$ à 0.

Exemple. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n^2 + 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = n^2 + 1 \geq 1 > 0$. Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

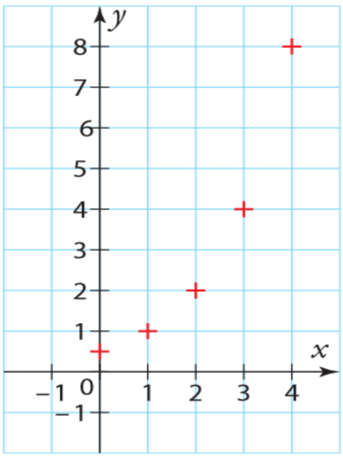
Méthode. Pour étudier les variations d'une suite *à valeurs positives*, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

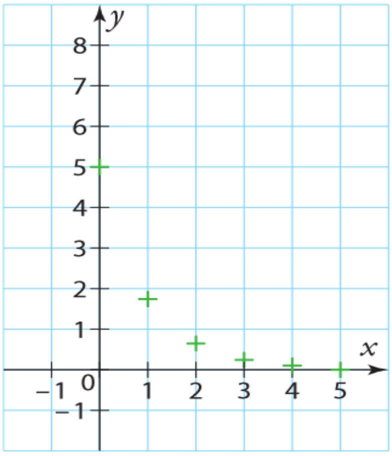
Exemple. La suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est croissante. En effet :
Soit $n \in \mathbb{N}$. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. (Donc $u_{n+1} > u_n$ puisque $u_n > 0$)

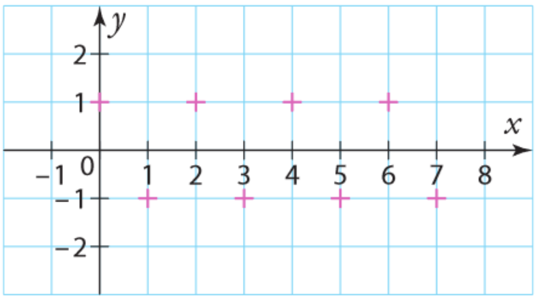
Méthode. Pour montrer qu'une suite n'est pas croissante, il suffit de trouver un n tel que $u_n > u_{n+1}$

Exemple. On note $u_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. $(u_n) = (1; -1; 1; -1; 1; -1; 1; \ldots)$
(u_n) n'est pas croissante car pour $n = 0$ on a : $u_0 = 1 > u_1 = -1$
(u_n) n'est pas décroissante car pour $n = 1$ on a : $u_1 = -1 < u_2 = 1$

Exemples. Allure d'une suite croissante, d'une suite décroissante.





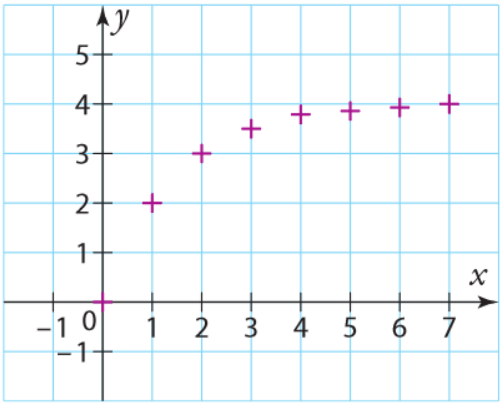


Remarque. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ n'est pas croissante ni décroissante

Suites et limites

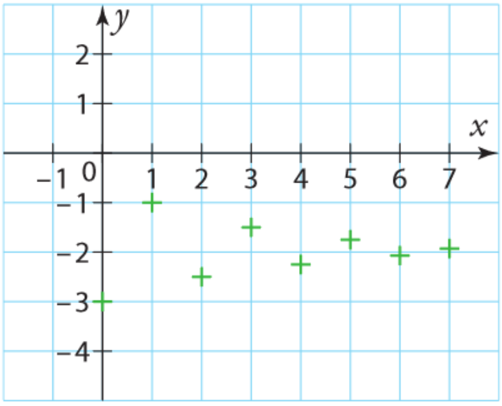
Idée. Soit l un réel. Une suite (u_n) **a pour limite finie l** si les termes u_n deviennent tous aussi proches de l que l'on veut en prenant n suffisamment grand. On dit aussi que (u_n) **converge vers l**, ou encore que **u_n tend vers l quand n tend vers** $+\infty$, et on note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$

Exemple.



On observe que les termes successifs de (u_n) semblent se rapprocher de 4. On peut conjecturer que (u_n) converge vers 4.

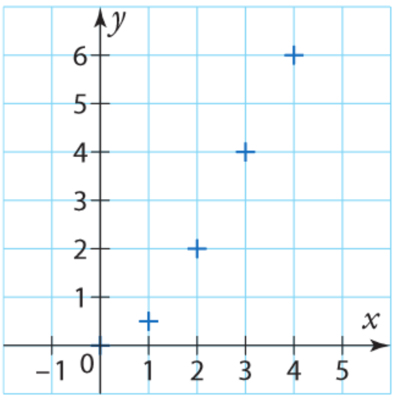
$$\lim_{n\to\infty} u_n = 4$$



On observe que les termes successifs de (u_n) semblent se rapprocher de -2. On peut conjecturer que (u_n) converge vers -2.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = -2$$

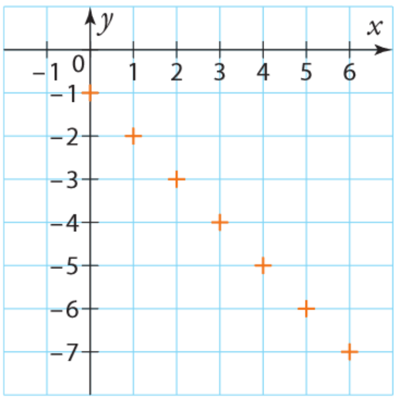
Idée.
Une suite (u_n) **a pour limite** $+\infty$ si les termes u_n deviennent tous aussi grands que l'on veut en prenant n suffisamment grand.



On dit aussi :
(u_n) **diverge vers** $+\infty$
u_n **tend vers** $+\infty$ **quand n tend vers** $+\infty$

On note : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

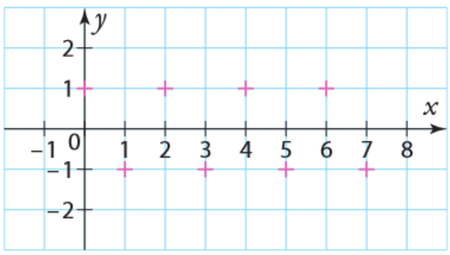
Idée.
Une suite (u_n) **a pour limite** $-\infty$ si les termes u_n deviennent tous aussi <u>*négativement* grands</u> que l'on veut en prenant n suffisamment grand.



On dit aussi :
(u_n) **diverge vers** $-\infty$
u_n **tend vers** $-\infty$ **quand n tend vers** $+\infty$

On note : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$

Remarque. Une suite (u_n) peut n'avoir aucune limite.
$(-1)^n$ n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$.
Les termes ne deviennent ni de plus en plus grand, ni de plus en plus petits, ni ne se rapprochent d'un réel.



Suites arithmétiques et géométriques

Idée. Une suite (u_n) est **arithmétique** si on ajoute toujours le <u>même</u> nombre pour passer au terme suivant
Définition. Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$
r est appelé **raison de la suite arithmétique** (u_n).

$$\boxed{u_0} \xrightarrow[+r]{} \boxed{u_1} \xrightarrow[+r]{} \boxed{u_2} \longrightarrow \boxed{\cdots} \longrightarrow \boxed{u_n} \xrightarrow[+r]{} \boxed{u_{n+1}}$$

Exemple. La suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$ est la suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = -2$.

Propriété. Terme général d'une suite arithmétique. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$ Deux termes distants de n rangs diffèrent de n fois la raison
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + (n-1)r$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + (n-p)r$

Exemple. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 0{,}5$.
Cette suite est arithmétique de raison $r = -0{,}5$ et de premier terme $v_0 = 3$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + r \times n = 3 - 0{,}5n$.

Remarque. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
La suite est strictement croissante si $r > 0$, strictement décroissante si $r < 0$, et constante si $r = 0$.

Idée. (u_n) est **géométrique** si on multiplie toujours par le <u>même</u> nombre pour passer au terme suivant
Définition. (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel q, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times q$
q est appelé **raison de la suite géométrique** (u_n).

$$\boxed{u_0} \xrightarrow[\times q]{} \boxed{u_1} \xrightarrow[\times q]{} \boxed{u_2} \longrightarrow \boxed{\cdots} \longrightarrow \boxed{u_n} \xrightarrow[\times q]{} \boxed{u_{n+1}}$$

Exemple. La suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$ est la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 0{,}5$.

Propriété. Terme général d'une suite géométrique. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$

Remarque. Si le rang initial est 1 il faut adapter la formule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$
Remarque. Si le rang initial est p il faut adapter la formule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Exemple. La suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$ est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 0{,}5$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = 0{,}5 \times 2^n$.

Propriété. Somme des n premiers entiers. Pour tout entier $n \geq 1$, on a $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Propriété.
Somme de termes <u>consécutifs</u> d'une suite <u>arithmétique</u> $=$ nombre de termes $\times \frac{(1^{\text{er}}\text{ terme} + \text{dernier terme})}{2}$

Exemple. $10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 = 6 \times \frac{10+25}{2} = 105$

Propriété. Somme des n premières puissances d'un réel différent de 1.
Soit q <u>un réel $\neq 1$</u>. Pour tout entier $n \geq 1$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Propriété. Somme de termes <u>consécutifs</u> d'une suite <u>géométrique</u> = 1er terme $\times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$

Exemple. $8 + 16 + 32 + 64 + 128 = 8 \times \frac{1-2^5}{1-2} = 8 \times \frac{-31}{-1} = 248$