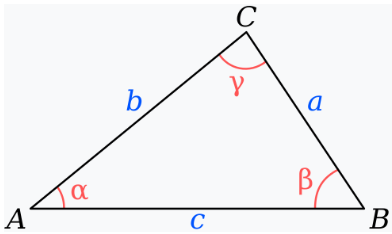
A. Déterminer complètement un triangle à partir d'au moins 3 informations

Dans toute cette partie on considère un triangle ABC. Pour abréger, on utilise les notations suivantes : $a = BC,\ b = AC,\ c = AB, \alpha = \widehat{BAC}, \beta = \widehat{ABC}, \gamma = \widehat{ACB}$



Théorème. Loi des cosinus, ou **formule d'Al-Kashi**

Dans un triangle ABC on a par exemple : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

Par symétrie, les lettres peuvent être permutées : $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Théorème. Loi des sinus. Dans un triangle ABC on a : $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Théorème. Somme des angles. Dans un triangle ABC on a : $\alpha + \beta + \gamma = \pi \text{ rad} = 180\ °$.

Méthode générale. Pour déterminer complètement un triangle à partir de 3 informations, on utilise ces 3 théorèmes.

i) A partir de la longueur de deux côtés et de l'angle *situé entre eux*

Méthode. Si on connait par exemple b, c et α :

- Pour trouver a on utilise la loi des cosinus faisant intervenir α et on applique $\sqrt{}$.
- Pour trouver β on isole $\sin\beta$ dans $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ puis on applique arcsin .
- Pour trouver γ on résout $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

Exercice A1. Soit un triangle ABC tel que $AB = 8$ cm, $AC = 4$ cm et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ rad. Déterminer BC.

$c = 8$; $b = 4$; $\alpha = \frac{\pi}{3}$. On cherche $a = BC$

Exercice A2. Soit un triangle DEF tel que $DE = 8$, $EF = 10$ et $\widehat{DEF} = \frac{\pi}{5}$ rad. Déterminer la longueur DF.

ii) A partir de la longueur de deux côtés et d'un *autre* angle

Méthode. Si on connait par exemple b, c et β :

- Pour trouver γ, on isole $\sin\gamma$ dans $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ puis on applique arcsin
- Pour trouver α, on utilise $\alpha + \beta + \gamma = \pi$
- Pour trouver a, on peut utiliser $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$. (Ou la loi des cosinus)

Exercice A3. Soit un triangle ABC tel que $AB = 5$ cm, $AC = 7$ cm et $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{4}$. Déterminer BC.

On sait que $c = 5$; $b = 7$; $\beta = \frac{\pi}{4}$. On cherche $a = BC$.

Exercice A4. Soit un triangle DEF tel que $DE = 7$ cm, $DF = 9$ cm. $\widehat{DEF} = 50°$. Déterminer EF.

iii) A partir des longueurs des 3 côtés

Méthode.

• Pour trouver un angle α du triangle, on utilise la loi des cosinus, on isole $\cos\alpha$ puis on applique arccos

Exercice A5. Soit un triangle ABC tel que $AB = 3$, $BC = 4$ et $AC = 6$. Déterminer l'angle $\widehat{BAC}$ en °.

On sait que $c = 3$; $a = 4$; $b = 6$. On cherche $\alpha = \widehat{BAC}$.

Exercice A6. Soit un triangle IJK tel que $IJ = 5$, $JK = 6$, $KI = 7$. Déterminer l'angle $\widehat{IJK}$ en °.

iv) A partir de la longueur d'un côté et de deux angles

Méthode. Si on connait par exemple α, β et a

• Pour trouver γ, on utilise $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

• Pour trouver b, on utilise $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$

• Pour trouver c, on utilise $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Exercice A7. Soit un triangle ABC tel que $AB = 10$, $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$. Déterminer BC et AC.

Exercice A8. Soit un triangle MNO tel que $MN = 5$, $\widehat{MNO} = 60°$ et $\widehat{NOM} = 40°$. Déterminer OM et ON.

B. Calculer le produit scalaire de deux vecteurs à partir de leur longueur et de l'angle entre eux.

Rappel. Produit scalaire (définition algébrique). $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Rappel. (1ère identité remarquable). $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

Rappel. (2ème identité remarquable). $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

Propriété. Reformulation vectorielle de la loi des cosinus. $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$

La 2ème identité remarquable, et la loi des cosinus, entraînent la conséquence suivante :

Propriété. Produit scalaire (définition géométrique). $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

Exemple. Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ tels que $AB = 2$ et $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 30°$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$

Exercice B1. Soit deux vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ tels que $DE = 3$ et $DF = 4$ et $\widehat{DEF} = \frac{\pi}{3}$ rad. Calculer $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}$

$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} =$

Exercice B2. Soit un carré ABCD de centre O et de côté 6, calculer les produits scalaires suivants.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} =$

$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} =$

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} =$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DO} =$

Exercice B3. Soit un triangle équilatéral ABC de côté 6. Calculer les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} =$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} =$

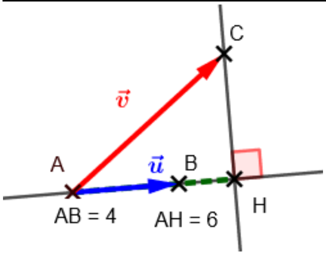
Exercice B4. Déterminer $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ en degrés dans les cas suivants.

i. $\|\vec{u}\| = 2,\ \|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{6}$

ii. $\|\vec{u}\| = 6,\ \|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$

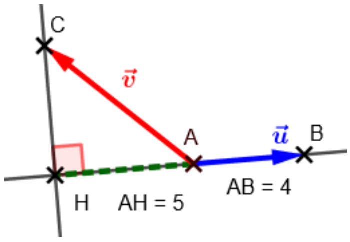
C. Projeter un vecteur dans une direction donnée

Propriété. **(Interprétation géométrique)**
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \pm AB \times AH$ où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
Le signe est $+$ si $\overrightarrow{AH}$ est de même sens que $\overrightarrow{AB}$, et $-$ sinon.



Ici $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont dans le même sens, donc

$\vec{u} \cdot \vec{v} = +4 \times 6 = +24$



Ici $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont dans des sens opposés, donc

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -4 \times 5 = -20$

Methode. Pour calculer la composante d'un vecteur $\vec{v}$ dans une direction $\vec{u}$, on calcule $\vec{v} \cdot \left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right)$
Si le vecteur $\vec{u}$ est déjà unitaire (de norme 1), on calcule $\vec{v} \cdot \vec{u}$.

Exercice C1. Une piste de ski est représentée par une droite qui descend vers la droite avec une pente de $45°$. Un skieur de 70 kg, subit son poids comme une force $\vec{F}$ d'environ 700 N vers le bas, donc $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -700 \end{pmatrix}$.
Calculer la composante du poids du skieur, le long de la pente descendante.

On cherche un vecteur directeur $\vec{u}$ de la pente descendante.

Exercice C2. Un avion situé à une altitude de 0 m, s'envole avec un angle de 20° par rapport à l'horizontale, à une vitesse constante de 300 km/h.

i. Calculer la vitesse verticale de l'avion.

ii. Au bout de combien de temps atteint-il une altitude de 2000 m ?