Nombres et calculs numériques

Définition. Un **nombre entier naturel** est un nombre entier qui est positif.
On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$

Exemples. $3 \in \mathbb{N}$. $17 \in \mathbb{N}$. $-10 \notin \mathbb{N}$. $3{,}4 \notin \mathbb{N}$.

Définition. Un **nombre entier relatif** est un nombre entier qui est positif ou négatif.
On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. $\mathbb{Z} = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$

Exemples. $3 \in \mathbb{Z}$. $17 \in \mathbb{Z}$. $-10 \in \mathbb{Z}$. $3{,}4 \notin \mathbb{Z}$.

Définition. Un **nombre décimal** est un nombre qui peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.

Exemples. $17 \in \mathbb{D}$. $-3{,}5 \in \mathbb{D}$. $10{,}135 \in \mathbb{D}$. $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ car $\frac{1}{3} \approx 0{,}3333 \ldots$. $\frac{3}{4} \in \mathbb{D}$ car $\frac{3}{4} = 0{,}75$.

Remarque. Un nombre est décimal ssi il peut s'écrire comme une fraction avec une puissance de 10 au dénominateur. Par exemple $10{,}135 = \frac{10135}{1000} = \frac{10135}{10^3}$. $\frac{3}{4} = 0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{75}{10^2}$. $17 = \frac{17}{1} = \frac{17}{10^0}$

Définition. Un **nombre rationnel** est un nombre qui peut s'écrire comme une fraction (d'entiers).
On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels. Un nombre rationnel peut s'écrire $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$.

Exemples. $17 \in \mathbb{Q}$ car $17 = \frac{17}{1}$. $10{,}135 \in \mathbb{Q}$ car $10{,}135 = \frac{10135}{1000}$. $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$.

Définition. Un **nombre irrationnel** désigne un nombre réel qui n'est pas rationnel.
On note $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'ensemble des irrationnels.

Exemples. On peut montrer qu'il existe des nombres qui ne sont pas rationnels $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Définition. Un **nombre réel** désigne n'importe quel nombre avec un développement décimal.
On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Tous les nombres vus précédemment sont dans $\mathbb{R}$.

Propriété. Les ensembles de nombres obéissent à la hiérarchie suivante : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
La notation $A \subset B$ lue « A est inclus dans B » signifie que tous les éléments de A sont dans B.

Définition de « a puissance n ». Pour a un réel et n un entier non nul, On note :
$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$. On note $a^{-n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$ De plus, on pose $a^0 = 1$.

Exemples. $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$. $5^{-2} = \frac{1}{5 \times 5} = \frac{1}{25}$

Règle. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $a^1 = a$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Règle. $a^n \times a^m = a^{n+m}$ (Si on multiplie des puissances d'un même réel, on ajoute leurs exposants)

Règle. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (Si on divise des puissances d'un même réel, on soustrait leurs exposants)

Règle. $(a^n)^m = a^{n \times m}$ (Si on prend la puissance d'une puissance, on multiplie les exposants)

Règle. $a^n \times b^n = (ab)^n$ (Le produit de puissances n-ièmes, est la puissance n-ième du produit)

Règle. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ (Le quotient de puissances n-ièmes, est la puissance n-ième du quotient)

Définitions par l'exemple.
La **valeur approchée à 10^{-2} près par défaut** de $152{,}1596$ est $152{,}15$.
La **valeur approchée à 10^{-1} près par excès** de $152{,}1596$ est $152{,}2$.
La **valeur arrondie à 10^{-2} près** de $152{,}1596$ est $152{,}16$ (c'est le plus proche entre $152{,}15$ et $152{,}16$)
L'encadrement à 10^{-3} près de $152{,}1596$ est $152{,}159 \leq 152{,}1596 \leq 152{,}160$
Note : « à 10^{-2} près » peut être remplacé par « au centième près » ou par « à $0{,}01$ près ».
La valeur arrondie à 2 **chiffres significatifs** près de $152{,}1596$ est 150.

Exemple. L'encadrement à l'unité près de π est $3 \leq \pi \leq 4$.
Exemple. La valeur arrondie à l'unité de $13{,}5$ est 14.

Définition et méthode. Pour écrire un grand nombre en **notation scientifique**, par exemple $3125{,}58$: On divise ce nombre par 10 (on décale la virgule à gauche) plusieurs fois, jusqu'à ce que la virgule soit juste après le premier chiffre $3125{,}58 = 3{,}12558 \times 10^3$ (avec $10^3 = 1000$).
Pour écrire un petit nombre en notation scientifique, par exemple $0{,}00052$: On multiplie par 10 (on décale la virgule à droite) plusieurs fois $0{,}00052 = 5{,}2 \times 10^{-4}$ (où $10^{-4} = \frac{1}{10000} = 0{,}0001$).

Rappel des règles de calcul avec des fractions
Dans l'écriture $\frac{a}{b}$, a est le nombre de parts de gâteau choisies, et b est le nombre total de parts de gâteau.

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b} = a \times \frac{c}{b}$$

Attention $\frac{a}{b} \times c \neq \frac{a \times c}{b \times c}$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{ac}{bd}$$

Attention $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \neq \frac{a+c}{b+d}$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{ad}{bc}$$

Attention $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} \neq \frac{a-c}{b-d}$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

Définition de la valeur absolue. Etant donné un réel a, on définit $|a| = a$ si $a \geq 0$, $|a| = -a$ si $a \leq 0$.
Exemple. $|3| = 3$; $|-4| = 4$; $|-1{,}5| = 1{,}5$; $|5{,}6| = 5{,}6$.
La valeur absolue d'un nombre est le nombre sans signe moins.

Propriété et définition de la racine carrée d'un réel positif. Etant donné un réel positif a, il existe un unique réel positif r tel que $r^2 = a$. On le note $\sqrt{a}$ (on dit « racine carrée de a »).
On a donc $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$. Si par chance on trouve r tel que $r \times r = a$, nécessairement $r = \sqrt{a}$
Exemples. $\sqrt{9} = 3$ car $3 \times 3 = 9$. $\sqrt{1} = 1$ car $1 \times 1 = 1$. $\sqrt{0} = 0$ car $0 \times 0 = 0$. $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ ....
Règles. Pour tout réel quelconque a, $\sqrt{a^2} = |a|$. Pour tout réel positif a, $(\sqrt{a})^2 = a$
Règle. Pour tous réels $a, b \geq 0$, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. (La racine d'un produit est le produit des racines)
Règle. Pour tous réels $a, b > 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. (La racine d'un quotient est le quotient des racines)
Règle. Simplification d'un radical au dénominateur. Pour tous réels $a, b > 0$, $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}^2} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$