Vecteurs du plan

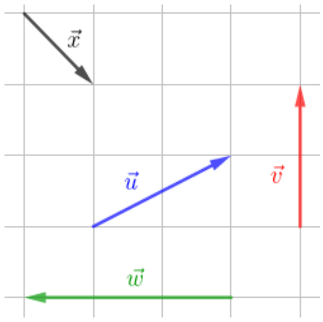
Définition. On note $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ le point du plan de coordonnées x et y. (x et y sont des nombres réels)

Définition. Un **vecteur** $\vec{\boldsymbol{u}}$ est un objet qui contient *deux* nombres x et y et se note explicitement en colonne $\binom{x}{y}$ ou implicitement avec une lettre minuscule surmontée d'une flèche. On peut écrire $\vec{u} = \binom{x}{y}$

$\vec{u}$ représente un déplacement horizontal de x unités et vertical de y unités. Il est représenté par une flèche.

Conventionnellement, le déplacement est compté positivement vers la droite pour x, et vers le haut pour y.

Exemples. Sur l'image, on a représenté plusieurs vecteurs.



$\vec{u} = \binom{2}{1}$ car on se déplace de 2 unités à droite et 1 unité en haut.

$\vec{v} = \binom{0}{2}$ car on se déplace de 0 unités horizontalement et 2 unités en haut.

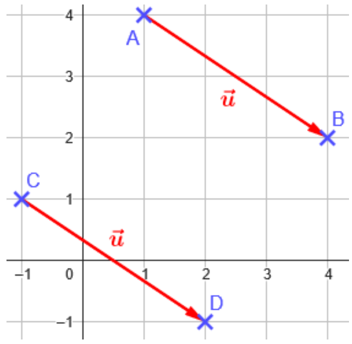
$\vec{w} = \binom{-3}{0}$ car on se déplace de 3 unités à gauche et 0 unités verticalement.

$\vec{x} = \binom{1}{-1}$ car on se déplace de 1 unités à droite et 1 unité en bas.

Définition. Soit $M = (x_M; y_M)$ un point et $\vec{u} = \binom{x}{y}$ un vecteur. On note $\boldsymbol{t_{\vec{u}}(M)} = (x_M + x; y_M + y)$

Concrètement, $\boldsymbol{t_{\vec{u}}(M)}$ est le point au bout de la flèche $\vec{u}$, si on fait partir la flèche $\vec{u}$ depuis M.

Exemple. Sur la figure, $\vec{u} = \binom{3}{-2}$. On a :

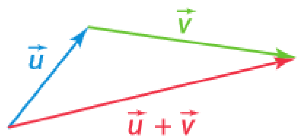


$t_{\vec{u}}(A) = (1+3; 4-2) = (4; 2) = B$
B est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.
$t_{\vec{u}}(C) = (-1+3; 1-2) = (2; -1) = D$
D est l'image de C par la translation de vecteur $\vec{u}$.
Les 2 flèches sur la figure représentent le même vecteur $\vec{u}$.
Un vecteur est une flèche dont la position est sans importance.

Propriété. Deux vecteurs sont identiques s'ils ont même direction, même sens, même longueur.

Définition. Pour tous $\vec{u} = \binom{x}{y}$ et $\vec{v} = \binom{x'}{y'}$, $\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}} = \binom{x}{y} + \binom{x'}{y'} = \binom{x+x'}{y+y'}$.

Additionner des vecteurs, c'est appliquer des translations successivement.

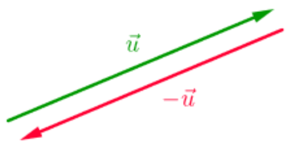


Visuellement il suffit de les mettre bout à bout, car $t_{\vec{u}+\vec{v}}(M) = t_{\vec{v}}\big(t_{\vec{u}}(M)\big)$

Exemples. $\binom{2}{-5} + \binom{-1}{4} = \binom{1}{-1}$ $\qquad \binom{1}{2} + \binom{0}{3} + \binom{-1}{-4} = \binom{0}{1}$

Définition. Pour tout $\vec{u} = \binom{x}{y}$, $-\vec{\boldsymbol{u}} = -\binom{x}{y} = \binom{-x}{-y}$.

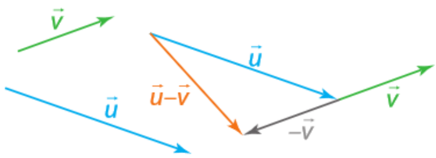
Le vecteur opposé a la même longueur mais son sens est inversé.



Exemples. $-\binom{1}{-1} = \binom{-1}{1}$ $\qquad -\binom{-5}{8} = \binom{5}{-8}$

Définition. Pour tous $\vec{u} = \binom{x}{y}$ et $\vec{v} = \binom{x'}{y'}$, $\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{v}} = \binom{x}{y} - \binom{x'}{y'} = \binom{x-x'}{y-y'}$

$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ donc soustraire un vecteur, c'est additionner son opposé.

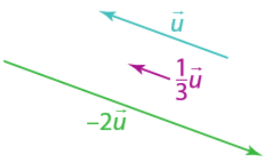


Exemple. $\binom{2}{-5} - \binom{-1}{4} = \binom{3}{-9}$

Définition. Pour tout $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et tout nombre réel k, $\boldsymbol{k\vec{u}} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Multiplier un vecteur par $k \geq 0$, c'est multiplier sa longueur par k sans changer de sens.

Multiplier un vecteur par $k < 0$, c'est multiplier sa longueur par $|k|$ et inverser son sens



Exemples. $3\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \end{pmatrix}$ $\qquad -4\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$

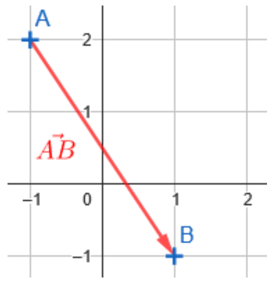
Définition. On note $\vec{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ le **vecteur nul**. Il représente la translation « immobile »

Propriétés de calcul. Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tous réels k et k' :

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ $\qquad (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ $\qquad k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ $\qquad k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$

$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ $\qquad \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ $\qquad (k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$ $\qquad 0\vec{u} = \vec{0}$

Définition. Soit deux points $A = (x_A\,;y_A)$ et $B = (x_B\,;y_B)$. On définit $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$



Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ représente la translation qui déplace le point A au point B, car $t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$

La flèche représentant $\overrightarrow{AB}$ est donc souvent représentée allant du point A au point B.

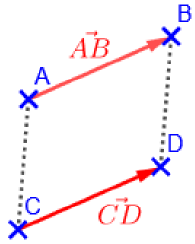
Exemple. Si $A = (-1; 2)$ et $B = (1; -1)$, alors $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} (1) - (-1) \\ (-1) - (2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Propriété. Pour tout point A, on a $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Propriété. Pour tous points A, B on a $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Prop. On peut toujours écrire un vecteur $\vec{u}$ sous la forme $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ pour un certain point B

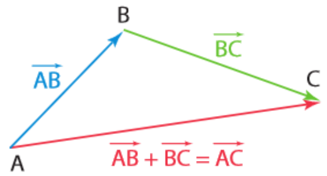
Prop. On peut toujours écrire un vecteur $\vec{u}$ sous la forme $\vec{u} = \overrightarrow{CA}$ pour un certain point C



Propriété. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ssi $ABDC$ est un parallélogramme. (Attention à l'ordre des lettres).

Propriété. Relation de Chasles.

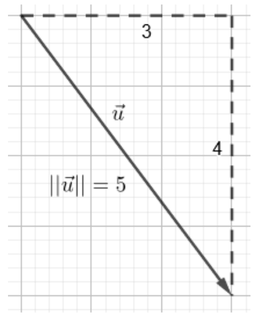
Soit A, B, C trois points. Alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. $\qquad$ Attention, $AB + BC \geq AC$.



Exemple. $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{DG}$

Exemple. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

Exemple. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$



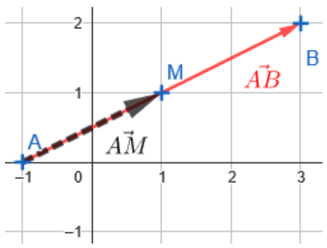
Définition. La **norme (ou longueur) d'un vecteur** $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, est définie par $\|\vec{\boldsymbol{u}}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Définition. La **longueur de** $[AB]$ est $\boldsymbol{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| = \left\|\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Exemple. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$. $\vec{u}$ est de longueur 5.

Définition. M est le **milieu d'un segment** $[AB]$ ssi $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Propriété. Les coordonnées du milieu M de $[AB]$ sont $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$



Exemple. Si $A = (-1; 0)$ et $B = (3; 2)$ alors le milieu est $M = \left(\frac{-1+3}{2}; \frac{0+2}{2}\right) = (1; 1)$