

Vecteurs du plan

Hypothèse. On suppose que chaque point du plan correspond à la donnée de deux réels x et y qui représentent sa position. Les deux réels x et y sont appelés **coordonnées canoniques** du point.

Définition. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on note $(x; y)$ le point du plan de coordonnées canoniques x et y .

Définition. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on définit un nouvel objet noté $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et appelé **vecteur du plan** de coordonnées canoniques x et y .

Définition. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur du plan.

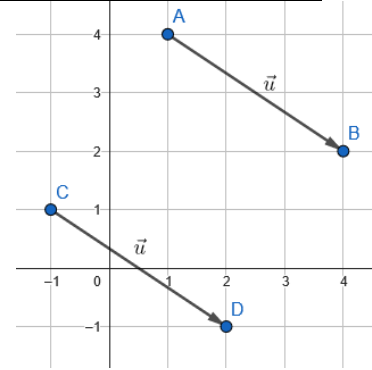
\vec{u} représente la translation « se déplacer de x unités vers la droite/gauche et de y unités vers le haut/bas ». On représente le vecteur \vec{u} par une flèche qui va à droite/gauche de x unités et en haut/bas de y unités. Visuellement, deux vecteurs sont égaux s'ils pointent dans la même direction, et ont la même longueur.

Pour tout point $M = (x_M; y_M)$ on note parfois $M + \vec{u} = (x_M + x; y_M + y)$

$M + \vec{u}$ est le point obtenu en appliquant la translation représentée par \vec{u} au point M .

La flèche représentée par \vec{u} relie toujours un point M à son translaté $M + \vec{u}$, pour tout M . La position précise de la flèche n'a pas d'importance.

Exemple. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ représente la translation « se déplacer de 3 unités à droite et 2 unités vers le bas ». Sur l'image ci-contre, $A + \vec{u} = (1; 4) + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = (4; 2) = B$. De même $C + \vec{u} = D$. Les deux flèches représentent le même vecteur \vec{u} .

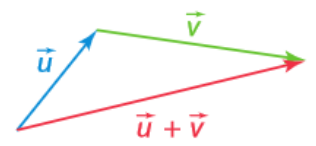


Définition. On note $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ le **vecteur nul**. Il représente la translation « immobile »

Définition. Pour tous $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

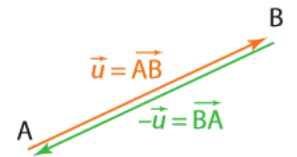
Additionner des vecteurs, c'est appliquer des translations successivement.

Exemple. $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.



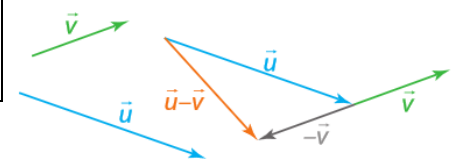
Définition. Pour tout $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $-\vec{u} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.

Le vecteur opposé a la même longueur mais pointe dans la direction opposée.



Définition. Pour tous $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$
 $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ donc soustraire un vecteur, c'est additionner son opposé.

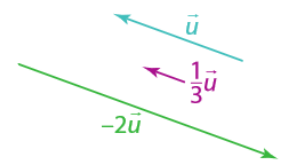
Exemples. $-\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$



Définition. Pour tout $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et tout réel k , $k\vec{u} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Multiplier un vecteur par $k \geq 0$, c'est multiplier sa longueur par k sans changer de sens.
 Multiplier un vecteur par $k < 0$, c'est multiplier sa longueur par $|k|$ et inverser son sens

Exemple. $3\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \end{pmatrix}$



Propriétés algébriques. Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tous réels k et k' :

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$
- $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $0\vec{u} = \vec{0}$

Définition. Etant donnés deux points $A = (x_A; y_A)$ et $B = (x_B; y_B)$ on note $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Le vecteur \overrightarrow{AB} représente la translation qui déplace notamment le point A au point B , car $A + \overrightarrow{AB} = B$.

La flèche représentant le vecteur \overrightarrow{AB} est donc souvent tracée du point A au point B .

Exemple. Si $A = (-1; 2)$ et $B = (0; -4)$, alors $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Propriété. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ssi $ABDC$ est un parallélogramme. (Attention à l'ordre des lettres).

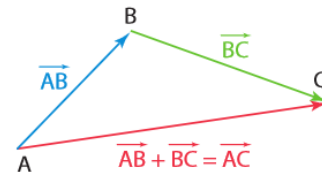
Propriété. Pour tous points A, B on a $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Propriété. Pour tout point A , on a $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Propriétés. Soit un vecteur \vec{u} .

Pour tout point A , on peut écrire \vec{u} sous la forme $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ pour un certain point B .

Pour tout point A , on peut écrire \vec{u} sous la forme $\vec{u} = \overrightarrow{CA}$ pour un certain point C .



Propriété. Relation de Chasles.

Soit A, B, C trois points. Alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Attention, $AB + BC \geq AC$.

Exemple. $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{DD} = \vec{0}$.

Définition. M est le milieu d'un segment $[AB]$ ssi $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ ssi $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ssi $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

Exemple. Si $A = (3; 5)$ et $B = (9; -1)$ alors le milieu de $[AB]$ est le point $M = \left(\frac{3+9}{2}; \frac{5+(-1)}{2}\right) = (6; 2)$

Définition. La longueur d'un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, notée $\|\vec{u}\|$ et lue « norme de \vec{u} » est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Définition. La longueur d'un segment $[AB]$ est $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \left\| \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Exemple. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$. \vec{u} est de longueur 5.

Remarque. A ce stade, on peut techniquement définir, la longueur d'une courbe, puis l'angle géométrique entre deux vecteurs comme la longueur de l'arc du cercle de rayon 1 qu'ils délimitent.

Définition. Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires**, s'ils forment un angle nul ou plat.

Définition. Deux vecteurs non nuls sont **orthogonaux**, s'ils forment un angle droit.

Définition. Un repère $R = (O; \vec{i}; \vec{j})$ désigne la donnée d'un point O et de vecteurs \vec{i} et \vec{j} non colinéaires.

Définition. On note $R_0 = \left((0; 0); \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ le **repère canonique**. Jusqu'ici, on a seulement utilisé R_0 .

Remarque. Quand on change de repère R , les coordonnées d'un vecteur ou d'un point changent.

Cependant, les définitions et formules précédentes restent valables, si on les écrit dans un même repère R .

Définition. Un repère $R = (O; \vec{i}; \vec{j})$ est **orthogonal** si \vec{i} et \vec{j} sont orthogonaux.

Définition. Un repère $R = (O; \vec{i}; \vec{j})$ est **orthonormé** si \vec{i} et \vec{j} sont orthogonaux et de longueur 1 dans R_0 .

Propriété. Les longueurs, aires et angles géom. ne changent pas si on change de repère orthonormé.

Propriété. Deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires** ssi il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Exemple. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. (ou ce qui revient au même $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix}$)

Définition. Le **déterminant** de deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_R$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_R$ est $\det(\vec{u}; \vec{v}) = xy' - x'y$.

Exemple. Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, alors $\det(\vec{u}; \vec{v}) = (3)(-1) - (1)(2) = -3 - 2 = -5$.

Propriété. Dans un repère orthonormé, l'aire du parallélogramme formé par \vec{u} et \vec{v} vaut $|\det(\vec{u}; \vec{v})|$

Propriété. Deux vecteurs sont colinéaires ssi leur déterminant est nul. (dans n'importe quel repère R)

Exemple. $\det\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix}\right) = (3)(-6) - (2)(-9) = 18 - (-18) = 0$ donc $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix}$ sont bien colinéaires.

Propriété. Deux droites (AB) et (MN) sont parallèles ssi \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{MN} sont colinéaires ssi $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{MN}) = 0$.

Propriété. Trois points distincts A, B et C sont alignés ssi \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires ssi $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$.

Exemple. Les points $A = (1; 3)$, $B = (2; 6)$ et $C = (3; 9)$ sont-ils alignés ?

$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \det\left(\begin{pmatrix} 2-1 \\ 6-3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3-1 \\ 9-3 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}\right) = 1 \times 6 - 2 \times 3 = 0$. Donc A, B et C sont alignés.