Exercices. Fonction exponentielle

Objectif. Calculer avec la fonction exponentielle

Exercice 1. Simplifier les expressions suivantes.

1. $A = (e^3)^2 \times e^5$
2. $B = e^{-2} \times e^7 \times e$
3. $C = \frac{e^4}{e^7}$
4. $D = \frac{e^{-2}}{e}$
5. $E = \left(\frac{e^2}{e^{-3}}\right)^3$
6. $F = (e^2 - 1)(e^2 + 1)$

Exercice 2. Simplifier les expressions suivantes.

1. $A(x) = \left(\frac{x}{e^2}\right)^2$
2. $B(x) = e^{2x} \times e$
3. $C(x) = \frac{e^{4x}}{e^{-x}}$
4. $D(x) = \left(\frac{1}{e^x}\right)^2$
5. $E(x) = \frac{e^{3x} \times e^{-x}}{e^x}$
6. $F(x) = e^x \times (e^{-2x})^3$

Exercice 3. Simplifier les expressions suivantes.

1. $A(x) = e^3 \times e^{-4} \times e^2$
2. $B(x) = \frac{e^{-3}}{e^2}$
3. $C(x) = \frac{e^2 \times e^4}{e}$
4. $D(x) = (e^{3x})^2$
5. $E(x) = e \times (e^x)^{-4}$
6. $F(x) = \frac{e^{-1} \times e^{-2}}{(e^2)^{-2} \times e^{-x}}$

Exercice 4. Développer les expressions suivantes.

1. $A(x) = (e^2 - e)^2$
2. $B(x) = (e^3 - e)(1 - e^2)$
3. $C(x) = (e^x + 1)^2$
4. $D(x) = (e^{-x} + e^{4x})e^x$
5. $E(x) = (e^{-x} + e^x)^2$
6. $F(x) = (e - e^x)(e + e^x)$

Exercice 5. Factoriser les expressions suivantes.

1. $A(x) = e^2 - 4e$
2. $B(x) = e^4 - 1$
3. $C(x) = e - e^3$
4. $D(x) = e^{3x} - e^x$
5. $E(x) = e^{2x} - e^{4x}$
6. $F(x) = 2e^{2x} - 4e^x$

Objectif. Résoudre des équations ou inéquations avec la fonction exponentielle

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $e^x = 1$
2. $e^x = e^{-1}$
3. $e^x - e = 0$
4. $e^{2x+4} = 1$
5. $e^{-3x+7} = e^{-2}$
6. $e^{x^2} - e = 0$

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $e^x(e^x - 1) = e^{2x}$
2. $e^{x+1}(e^{-1} + 1) = e^x + 1$
3. $e(e^{x-3} + 1) = 2e$
4. $(e^x - e^3)e^x = 0$
5. $(1 - e^x)(x + 4) = 0$
6. $(e^{-x} - e)^2 = 0$

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $e^x > e$
2. $e^x \leq 0$
3. $e^x < e^{-2}$
4. $e^{3x+1} > 1$
5. $e^{-2x+1} \geq e^4$
6. $e^{2x+1} + e^{5x-7} < 0$

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $e^{3x-4} \times e^{2x-1} > e^2$
2. $\frac{e^{x+1}}{e^2} > e^3$
3. $(e^{x+1})^2 < 1$
4. $e^x(e - e^{-x}) > e^3 - 1$
5. $e^{2x-3} \leq e^x \times e^{-7x+2}$
6. $e^{x+2}(-e^{-2} + 1) \geq -e^x + e^5$

Exercice 10. Etudier le signe des expressions suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $A(x) = e^{x^2-5x}$
2. $B(x) = -2e^{x+2}$
3. $C(x) = e^{x+3} - 1$
4. $D(x) = e^{-x+7} - e$
5. $E(x) = e^x - e^{2x+3}$
6. $F(x) = e^4 - e^{5x}$

Objectif. Calcul de dérivées et étude de variations.

Exercice 11. Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $A(x) = e^x - 3x + 4$
2. $B(x) = x^2e^x$
3. $C(x) = 2e^{-3x+1} - 3x + 1$
4. $D(x) = (x + 1)e^{3x+1}$
5. $E(x) = \sqrt{x}e^x$
6. $F(x) = 3xe^x$

Exercice 12. Etudier les variations des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $A(x) = e^{-x}$
2. $B(x) = -e^{-2x+3}$
3. $C(x) = e^x - ex$
4. $D(x) = e^{-5x} + 5x$
5. $E(x) = e^{2x} - 2x + 1$

Exercice 13. Etudier les variations des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $A(x) = \frac{e^x}{x}$
2. $B(x) = \frac{2}{e^x + 3}$
3. $C(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1}$
4. $D(x) = xe^x$
5. $E(x) = 4xe^{-x}$
6. $F(x) = (x - 1)e^x$

Exercice 14. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x-1} - e$ et C_f sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer une expression de $f'(x)$
2. Déterminer les variations de f

Exercice 15. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_f avec les axes du repère.

Exercice 16. Etudier le sens de variations de (u_n) dans chaque cas suivant :
1. $u_n = e^{5n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. $u_n = e^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
3. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = e^{0,5}u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
4. $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 17. Simplifier les sommes suivantes
1. $S = 1 + e^2 + e^4 + e^6 + \cdots + e^{2n}$ où $n \in \mathbb{N}$
2. $S = 1 + e^{0,5} + e^1 + e^{1,5} + \cdots + e^{0,5n}$ où $n \in \mathbb{N}$

Objectif. Modéliser avec la fonction exponentielle

Exercice 18. Après administration d'un médicament à un patient, on modélise la concentration (en microgramme par litre) de son principe actif dans le sang par une fonction f définie par : $f(t) = 15e^{-0,2t}$ où $t \in [0; +\infty[$ correspond au temps en heure après l'administration.
1. Déterminer la concentration initiale.
2. Déterminer la concentration au bout de deux heures.
3. Estimer au bout de combien de temps la concentration aura diminué de moitié.

Exercice 19. Le tableau suivant indique la population de la Belgique en 1831 et en 1866

Année	1831	1866
Population (en milliers)	3787	4828

Manquant de données, on souhaite estimer la population de la Belgique au XIXe siècle en s'appuyant sur ces deux dates. On souhaite modéliser la population (en milliers) de la Belgique l'année $1831 + n$ par une suite (u_n) de la forme $u_n = C \times e^{kn}$ où C et k sont deux constantes réelles.

1. Donner les deux équations que doivent vérifier C et k.
2. En déduire la valeur de C.
3. Déterminer à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de k à 10^{-3} près.
4. Dans la suite de l'exercice, on prendra $u_n = 3787e^{0,00694n}$
a. Déterminer une estimation de la population en 1840 selon ce modèle
b. Toujours selon ce modèle, déterminer en quelle année la population de la Belgique dépasserait les 10 millions d'habitants.
c. Une étude statistique estime la population de la Belgique en 1900 à 6694 milliers. Déterminer l'erreur en pourcentage de l'estimation obtenue avec ce modèle.

Exercice 20. Une usine fabrique et commercialise des toboggans. Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 300 et 1 300. On suppose que toute la production est commercialisée. Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de toboggans est modélisé sur l'intervalle $[3; 13]$ par la fonction f définie par $f(x) = -2x + 20 - e^{-2x+10}$
1. Déterminer le nombre de toboggans que l'usine doit produire pour obtenir un bénéfice maximal et donner ce bénéfice, arrondi à l'euro.
2. Pour être rentable, l'usine doit avoir un bénéfice positif. Déterminer le nombre minimum et le nombre maximum de toboggans que l'usine doit fabriquer en un mois pour qu'elle soit rentable. Justifier la réponse.

Objectif. Démonstrations

Exercice 21. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
But : Montrer que $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
On pose $g(x) = e^{-x}e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
1. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que g est constante sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $g(0)$
4. En déduire que $e^{-x}e^x = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
5. Conclure.

Exercice 22. L'exponentielle ne s'annule jamais.
Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$, tel que $e^x = 0$.
1. Montrer que $e^{-x}e^x = 1$
2. Montrer que $0 = 1$. Conclure.

Exercice 23. Unicité de l'exponentielle
Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable t.q. $f(0) = 1$ et $f' = f$
Soit $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable t.q. $g(0) = 1$ et $g' = g$
Le but est de montrer que $f = g$
1. On pose $h = \frac{f}{g}$ (possible car g ne s'annule jamais d'après les exercices précédents)
2. Calculer h' et montrer que h est constante.
3. Calculer $h(0)$ et conclure.