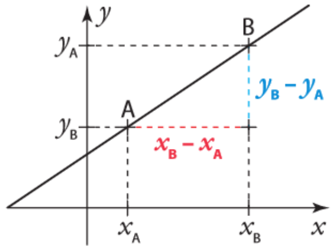
Dérivation

Rappels. Toute droite du plan d <u>non verticale</u> admet une équation de la forme " $y = mx + p$ " où m et p sont des constantes réelles. Dans ce cas l'expression " $y = mx + p$ " est **l'équation <u>réduite</u> de la droite d**

Exemple. $y = 3x + 6$ et $y = -17x - 30$ sont des équations réduites de droites.

Définitions. La pente (ou coefficient directeur) d'une droite non verticale, est <u>le nombre</u> m qui indique de combien d'unités la droite monte (ou descend si $m < 0$) lorsqu'on avance d'<u>une</u> unité vers la <u>droite</u>.
La pente d'une droite d'équation " $y = mx + p$ " est m. p s'appelle **l'ordonnée à l'origine** de d.

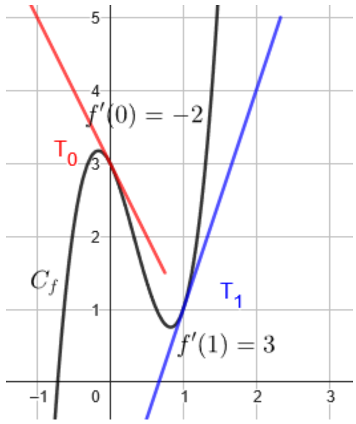
Exemple. La droite $y = 5x + 3$ a pour pente 5 et pour ordonnée à l'origine 3.
Exemple. La droite $y = -2x$ a pour pente -2 et pour ordonnée à l'origine 0.
Exemple. La droite $y = x - 1$ a pour pente 1 et pour ordonnée à l'origine -1.



Propriété. Etant donnés $A = (x_A; y_A)$ et $B = (x_B; y_B)$ deux points du plan d'abscisses distinctes $(x_A \neq x_B)$, alors la pente de la droite (AB) est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$$\text{pente} = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$$

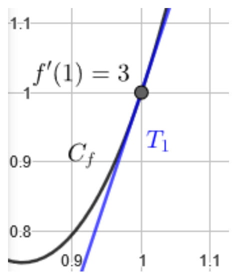
Exemple. Donner la pente de la droite passant par $A = (1; 1)$ et $B = (2; 4)$.
La pente de cette droite est $m = \frac{4-1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$.



Idée principale. La dérivée d'une fonction en un point (de sa courbe) est la pente de la fonction en ce point.
C'est <u>un nombre</u> qui mesure la « vitesse de variation » de la fonction au point étudié. La notion de dérivée généralise la notion de pente à une fonction.
Contrairement aux droites : Elle <u>dépend du point</u> choisi. Elle n'existe <u>pas toujours.</u>

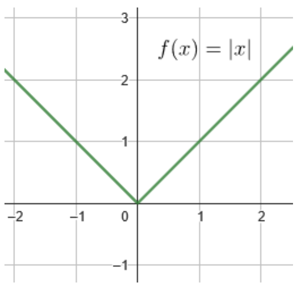
Exemple. Sur le graphe de f ci-contre, la dérivée de la fonction f en $x = 1$ est 3 car la droite T_1 tangente à C_f au point <u>de C_f</u> d'abscisse 1, a pour pente $m = 3$.
On écrit $f'(1) = 3$. La fonction « monte à une vitesse de 3 carreaux/unité » en 1.
Exemple. La dérivée de f en $x = 0$ est -2 car la tangente T_0 a pour pente -2.
On écrit $f'(0) = -2$. La fonction « descend à une vitesse de 2 carreaux/unité » en 0

Intuitions. On se place en un point d'abscisse a de la courbe d'une fonction f.
<u>Si</u> en faisant un zoom infini sur le point, la courbe se déforme et devient <u>une droite</u> (non verticale), <u>alors</u> :
- Cette droite est appelée **tangente à la courbe représentative de f en a**.
- La **dérivée de la fonction f en a**, notée $f'(a)$ est la pente de la tangente à f en a.
- On dit que la fonction f est **dérivable en a**, (elle admet une dérivée en a).

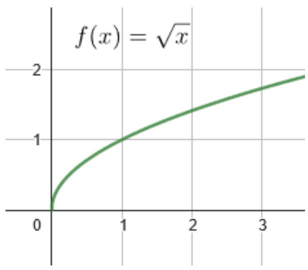


Exemple. Dans l'exemple précédent, si on zoome sur la courbe en $(1; 1)$, la courbe se déforme progressivement jusqu'à se confondre avec T_1.
T_1 est donc la tangente à f en 1, et sa pente 3 est la dérivée de f en 1.
De même, T_0 est ce que l'on voit si on zoome très près de $(0; 3)$. T_0 est la tangente à f en 0.

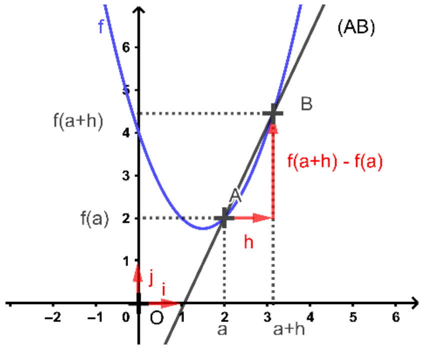
Contre exemples. Il y a des fonctions qui ne sont pas dérivables en certains points.



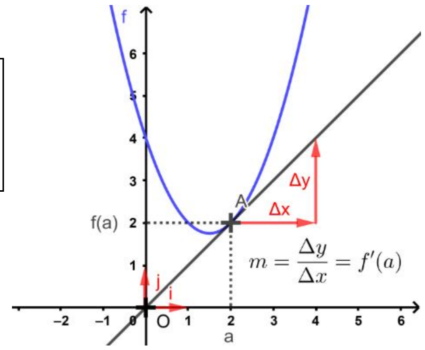
La valeur absolue $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable <u>en 0</u>, car si on zoome sur l'origine, la fonction forme un pic infiniment pointu, et non une droite. Il n'y a pas de tangente <u>en 0</u>. (Elle est cependant dérivable partout ailleurs)



La racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable <u>en 0</u>, car si on zoome sur l'origine, la tangente est <u>verticale</u> donc la dérivée <u>en 0</u> n'est pas un nombre fini.



Remarque. Pour obtenir la tangente et la dérivée, en un point A fixé sur la courbe d'une fonction f, la définition rigoureuse suivante exprime l'idée que :
- On commence par tracer la droite (AB) où B est un point qui bouge librement le long de la courbe, et situé à une distance horizontale h de A.
- On rapproche le point B du point A, en faisant tendre la distance h vers 0.
- Quand B et A sont confondus, la droite limite obtenue est la tangente, et la pente limite obtenue est la dérivée. La dérivée est la pente de la tangente.



Définition. Soit I un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Soit a et b des réels de l'intervalle I. On note $h = b - a$.

f* est dérivable en *a si $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est un nombre réel.
Dans ce cas on note $\boldsymbol{f'(a)} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. $f'(a)$ est la **dérivée de f en a.**

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est appelé **taux d'accroissement de f entre a et b.**

Remarque. Dans la définition, $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ peut être écrit sous la forme $\lim\limits_{b \to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ou sous la forme $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ ce qui s'écrit aussi $\frac{df}{dx}$ en physique.

Exemple. Soit la fonction définie par $f(x) = x^2$
$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2-3^2}{h} = \frac{h^2+6h}{h} = h + 6$ si $h \neq 0$. Donc quand $h \to 0$, $\frac{f(3+h)-f(3)}{h} \to 6$ donc $f'(3) = 6$.

Définition (Tangente). Si f est dérivable en a, **la tangente à C_f en a** est la droite passant par $A = (a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.
Propriété. L'équation de la tangente à C_f en a est " $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ "

Exemple. Donner l'équation réduite de la tangente en 2 de la fonction f telle que $f(2) = 3$ et $f'(2) = -5$.
$y = (-5)(x-2) + (3) = -5x + 10 + 3 = -5x + 13$. La tangente a pour équation réduite $y = -5x + 13$.

Définition. *f* est dérivable sur un intervalle *I* si elle est dérivable en tout nombre réel x de I.
Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée de la fonction f**, la fonction $f' : \begin{matrix} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{matrix}$

Remarque. La courbe d'une fonction dérivable sur tout un intervalle, a généralement un aspect lisse. Les pics et changements abrupts de direction correspondent à des points de non-dérivabilité.

Dérivées usuelles. A chaque ligne, f est définie et vaut l'expression de la colonne à gauche *sur tout* D_f. On déduit que f est dérivable sur $D_{f'}$, et $f'(x)$ vaut l'expression dans la dernière colonne sur tout $D_{f'}$.

$f(x)$	Conditions	D_f	$D_{f'}$	$f'(x)$
c	$c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	1
ax	$a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
$ax+b$	$a, b \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
x^2		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
x^3		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$3x^2$
x^n	$n \in \mathbb{N}, n > 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
x^n	$n \in \mathbb{Z}, n < 0$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$		$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$		$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x

Opérations sur les dérivées. A chaque ligne :
I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
u et v sont dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On déduit que f est définie et dérivable sur I.

f	Conditions	f'
$u+v$		$(u+v)' = u' + v'$
$u-v$		$(u-v)' = u' - v'$
$a \times u$	$a \in \mathbb{R}$	$(a \times u)' = a \times u'$
$u \times v$		$(uv)' = u'v + v'u$
$\frac{1}{v}$	$v : I \to \mathbb{R}^*$ v ne s'annule pas sur I.	$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$v : I \to \mathbb{R}^*$ v ne s'annule pas sur I.	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
e^u		$(e^u)' = u'e^u$
$x \mapsto v(ax+b)$	$v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$x \mapsto a \times v'(ax+b)$