Probabilités

Définition. Une **expérience aléatoire** est une expérience dont les issues sont connues sans que l'on puisse déterminer laquelle sera réalisée.

Définition. L'univers d'une expérience aléatoire est l'ensemble des issues possibles de cette expérience.

Exemple. On lance une pièce de monnaie et on regarde de quel côté elle tombe. Les résultats sont Pile et Face. Pour cette expérience aléatoire, l'univers est $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}$.

Définition. Donner **une loi de probabilité** associée à une expérience aléatoire, c'est en donner toutes les issues et attribuer une probabilité (un nombre compris entre 0 et 1) à chacune d'elles de sorte que la somme des probabilités des issues est égale à 1. On peut présenter les résultats sous forme d'un tableau.

Exemple. Une étude menée sur la répartition des groupes sanguins en France a montré que 45 % de la population est du groupe A, 9 % du groupe B, 4 % du groupe AB et 42 % du groupe O.

On choisit au hasard une personne en France et on note son groupe sanguin. On représente la situation avec un tableau :

Issue	A	B	AB	O
Probabilité	$0{,}45$	$0{,}09$	$0{,}04$	$0{,}42$

Définition. Une loi est dite **équirépartie** lorsque chaque issue a la même probabilité de se réaliser, qui est alors $\frac{1}{n}$ où n est le nombre total d'issues possibles. (On parle aussi d'expérience **équiprobable**).

Définition. Un événement est un ensemble d'issues. On peut en décrire un avec une phrase.

Exemple. On lance un dé cubique équilibré et on observe le résultat.
Alors l'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. L'événement A : « Obtenir un nombre pair » est $A = \{2; 4; 6\}$

Définition. La probabilité d'un événement A est égale à la somme des probabilités des issues qui réalisent cet événement.

Exemple. Dans le cas de la répartition des groupes sanguins, la probabilité qu'une personne en France ait un groupe sanguin différent de A est égale à : $0{,}09 + 0{,}04 + 0{,}42 = 0{,}55$.

Définition. Un **événement impossible** est un événement qui ne se réalise jamais : sa probabilité vaut 0.

Propriété. Dans une situation d'équiprobabilité, où il y a n issues,
la probabilité d'un événement A réalisé par k issues est : $P(A) = \frac{k}{n}$

Exemple. Si $A =$ « Obtenir un nombre pair » pour un lancé de dé équilibré à 6 faces alors $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

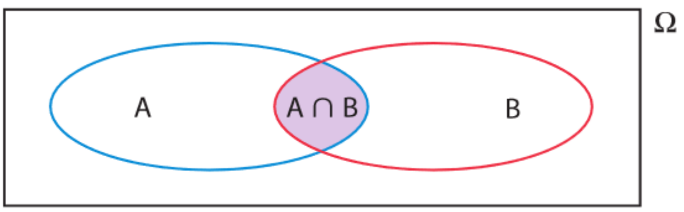
Définition. L'événement contraire d'un événement A, noté $\bar{A}$, est l'ensemble des issues qui ne réalisent pas A, autrement dit $\bar{A}$ est réalisé par les issues de Ω qui ne sont pas dans A. $\bar{A} = \Omega \setminus A$.
Propriété. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

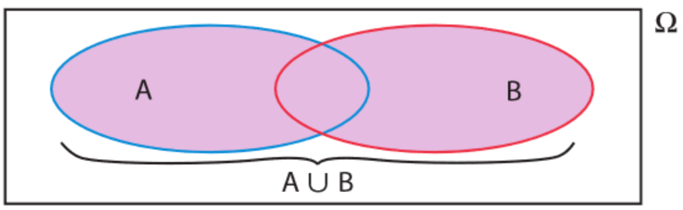
Exemple. $P(\text{« Obtenir un nombre impair »}) = P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Définition. Soit A et B deux événements.

L'événement $A \cup B$ (se lit « **A union B** ») est l'ensemble des issues qui réalisent A ou B.
L'événement $A \cap B$ (se lit « **A inter B** ») est l'ensemble des issues qui réalisent A et B

Exemple. On lance un dé à 6 faces et on considère les événements A : « Obtenir un nombre pair » et B : « Obtenir un multiple de 3 ». $A = \{2; 4; 6\}$ et $B = \{3; 6\}$. Alors $A \cap B = \{6\}$ et $A \cup B = \{2; 3; 4; 6\}$.





Propriété. $P(A) + P(B) = P(A \cap B) + P(A \cup B)$. En particulier $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exemple. Dans l'exemple précédent, $P(A) = \frac{3}{6}$; $P(B) = \frac{2}{6}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Donc $P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

Définition. Deux événements A et B sont disjoints ssi $A \cap B = \emptyset$.
Propriété. Etant donné 2 événements A et B disjoints, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.