

# Nombres et calculs numériques

**Définition.** Un **nombre entier naturel** est un nombre entier qui est positif.

On note  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels.  $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$

**Exemples.**  $3 \in \mathbb{N}$ .  $17 \in \mathbb{N}$ .  $-10 \notin \mathbb{N}$ .  $3,4 \notin \mathbb{N}$ .

**Définition.** Un **nombre entier relatif** est un nombre entier qui est positif ou négatif.

On note  $\mathbb{Z}$  l'ensemble des entiers relatifs.  $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

**Exemples.**  $3 \in \mathbb{Z}$ .  $17 \in \mathbb{Z}$ .  $-10 \in \mathbb{Z}$ .  $3,4 \notin \mathbb{Z}$ .

**Définition.** Un **nombre décimal** est un nombre qui peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule. On note  $\mathbb{D}$  l'ensemble des nombres décimaux.

**Exemples.**  $17 \in \mathbb{D}$ .  $-3,5 \in \mathbb{D}$ .  $10,135 \in \mathbb{D}$ .  $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$  car  $\frac{1}{3} \approx 0,3333 \dots$ .  $\frac{3}{4} \in \mathbb{D}$  car  $\frac{3}{4} = 0,75$ .

**Remarque.** Un nombre est décimal ssi il peut s'écrire comme une fraction avec une puissance de 10 au dénominateur. Par exemple  $10,135 = \frac{10135}{1000}$ .  $\frac{3}{4} = 0,75 = \frac{75}{100}$ .  $17 = \frac{17}{1} = \frac{17}{10^0}$

**Définition.** Un **nombre rationnel** est un nombre qui peut s'écrire comme une fraction (d'entiers).

On note  $\mathbb{Q}$  l'ensemble des rationnels. Un nombre rationnel peut s'écrire  $\frac{a}{b}$  avec  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ,  $b \neq 0$ .

**Exemples.**  $17 \in \mathbb{Q}$  car  $17 = \frac{17}{1}$ .  $10,135 \in \mathbb{Q}$  car  $10,135 = \frac{10135}{1000}$ .  $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ .

**Définition.** Un **nombre irrationnel** désigne un nombre réel qui n'est pas rationnel.

On note  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  l'ensemble des irrationnels.

**Exemples.** On peut montrer qu'il existe des nombres qui ne sont pas rationnels  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ,  $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ ,  $\pi \notin \mathbb{Q}$ .

**Définition.** Un **nombre réel** désigne n'importe quel nombre avec un développement décimal.

On note  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels. Tous les nombres vus précédemment sont dans  $\mathbb{R}$ .

**Propriété.** Les ensembles de nombres obéissent à la hiérarchie suivante :  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

La notation  $A \subset B$  lue «  $A$  est inclus dans  $B$  » signifie que tous les éléments de  $A$  sont dans  $B$ .

**Définition de «  $a$  puissance  $n$  ».** Pour  $a$  un réel et  $n$  un entier non nul, On note :

$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$ . On note  $a^{-n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$ . De plus, on pose  $a^0 = 1$ .

**Exemples.**  $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ .  $5^{-2} = \frac{1}{5 \times 5} = \frac{1}{25}$

**Règle.**  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$   $a^1 = a$   $a^{-1} = \frac{1}{a}$

**Règle.**  $a^n \times a^m = a^{n+m}$  (Si on multiplie des puissances d'un même réel, on ajoute leurs exposants)

**Règle.**  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$  (Si on divise des puissances d'un même réel, on soustrait leurs exposants)

**Règle.**  $(a^n)^m = a^{n \times m}$  (Si on prend la puissance d'une puissance, on multiplie les exposants)

**Règle.**  $a^n \times b^n = (ab)^n$  (Le produit de puissances  $n$ -ièmes, est la puissance  $n$ -ième du produit)

**Définitions par l'exemple.**

La **valeur approchée à  $10^{-2}$  près par défaut** de 152,1596 est 152,15.

La **valeur approchée à  $10^{-2}$  près par excès** de 152,1596 est 152,16.

La **valeur arrondie à  $10^{-2}$  près** de 152,1596 est 152,16 (c'est le plus proche entre 152,15 et 152,16)

**L'encadrement à  $10^{-2}$  près** de 152,1596 est  $152,15 \leq 152,1596 \leq 152,16$

Note : « à  $10^{-2}$  près » peut être remplacé par « au centième près » ou par « à 0,01 près ».

**Exemples.**

La valeur arrondie à 2 **chiffres significatifs** près de 152,1596 est 150.

L'encadrement à l'unité près de  $\pi$  est  $3 \leq \pi \leq 4$ .

La valeur arrondie à l'unité de 13,5 est 14.

**Définition et méthode.** Pour écrire un grand nombre en **notation scientifique**, par exemple 3125,58 : On divise ce nombre par 10 (on décale la virgule à gauche) plusieurs fois, jusqu'à ce que la virgule soit juste après le premier chiffre  $3125,58 = 3,12558 \times 10^3$  ( avec  $10^3 = 1000$  ).  
Pour écrire un petit nombre en notation scientifique, par exemple 0,00052 : On multiplie par 10 (on décale la virgule à droite) plusieurs fois  $0,00052 = 5,2 \times 10^{-4}$  (où  $10^{-4} = \frac{1}{10000} = 0,0001$  ).

**Définition de la valeur absolue.** Etant donné un réel  $a$ , on définit  $|a| = a$  si  $a \geq 0$ ,  $|a| = -a$  si  $a \leq 0$ .

**Exemple.**  $|3| = 3$  ;  $|-4| = 4$  ;  $|-1,5| = 1,5$  ;  $|5,6| = 5,6$ .

La valeur absolue d'un nombre est le nombre sans signe moins.

**Propriété et définition de la racine carrée d'un réel positif.** Etant donné un réel positif  $a$ , il existe un unique réel positif  $r$  tel que  $r^2 = a$ . On le note  $\sqrt{a}$  (on dit « racine carrée de  $a$  »).

On a donc  $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$ . Si par chance on trouve  $r$  tel que  $r \times r = a$ , nécessairement  $r = \sqrt{a}$

**Exemples.**  $\sqrt{9} = 3$  car  $3 \times 3 = 9$ .  $\sqrt{1} = 1$  car  $1 \times 1 = 1$ .  $\sqrt{0} = 0$  car  $0 \times 0 = 0$ .  $\sqrt{2} \approx 1,41 \dots$

**Règles.** Pour tout réel quelconque  $a$ ,  $\sqrt{a^2} = |a|$ . Pour tout réel positif  $a$ ,  $(\sqrt{a})^2 = a$

**Règle.** Pour tous réels  $a, b \geq 0$ ,  $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ . (La racine d'un produit est le produit des racines)

**Règle.** Pour tous réels  $a, b > 0$ ,  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ . (La racine d'un quotient est le quotient des racines)

**Règle.** Simplification d'un radical au dénominateur. Pour tous réels  $a, b > 0$ ,  $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}^2} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$