Intervalles et inégalités

Définition d'un intervalle. L'ensemble des nombres réels compris entre a (inclus) et b (inclus) est appelé **intervalle** et se note $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$. a et b sont **les bornes de l'intervalle**. Les autres types d'intervalles sont :

Ensemble des réels x tels que	Signification	Notation	Représentation
$a \leq x \leq b$	x est entre a inclus et b inclus	$x \in [a;b]$	
$a < x \leq b$	x est entre a exclus et b inclus	$x \in]a;b]$	
$a \leq x < b$	x est entre a inclus et b exclus	$x \in [a;b[$	
$a < x < b$	x est entre a exclus et b exclus	$x \in]a;b[$	
$x \geq a$ (ou $a \leq x$)	x est supérieur ou égal à a	$x \in [a;+\infty[$	
$x > a$ (ou $a < x$)	x est (strictement) supérieur à a	$x \in]a;+\infty[$	
$x \leq b$ (ou $b \geq x$)	x est inférieur ou égal à a	$x \in]-\infty;b]$	
$x < b$ (ou $b > x$)	x est (strictement) inférieur ou égal à a	$x \in]-\infty;b[$	

Définition. $-\infty$ et $+\infty$ se disent respectivement « moins l'infini » et « plus l'infini ». Le crochet est toujours vers l'extérieur en $+\infty$ et $-\infty$.

Définition. L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est $]-\infty;+\infty[$. L'ensemble des nombres réels positifs s'écrit $\mathbb{R}_+$ ou $[0;+\infty[$ et l'ensemble des nombres réels négatifs s'écrit $\mathbb{R}_-$ ou $]-\infty;0]$.

Définition. **L'intersection de deux intervalles** I et J est l'ensemble noté $I \cap J$ qui contient les nombres qui appartiennent à I et à J.

Définition. **L'union de deux intervalles** I et J est l'ensemble noté $I \cup J$ qui contient les nombres qui appartiennent à I ou à J.

Exemple. Si $I=[0;12]$ et $J=[3;20]$, $I \cap J=[3;12]$ et $I \cup J=[0;20]$.

Définition. L'ensemble des réels non nuls s'écrit $\mathbb{R}^*$ ou $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ ou $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Règles (manipulation des inégalités). Soit a,b,c,k des réels.

- Si $a<b$ alors $a+c<b+c$. (Ajouter un réel aux 2 côtés d'une inégalité conserve l'inégalité)
- Si $a<b$ alors $a-c<b-c$. (Soustraire un réel aux 2 côtés d'une inégalité conserve l'inégalité)
- Si $a<b$ et $k>0$ alors $ka<kb$. (Multiplier une inégalité par un réel >0 conserve l'inégalité)
- Si $a<b$ et $k<0$ alors $ka>kb$. (Multiplier une inégalité par un réel <0 inverse l'inégalité)
- Si $a<b$ et $k>0$ alors $\frac{a}{k}<\frac{b}{k}$. (Diviser une inégalité par un réel >0 conserve l'inégalité)
- Si $a<b$ et $k<0$ alors $\frac{a}{k}>\frac{b}{k}$. (Diviser une inégalité par un réel <0 inverse l'inégalité)
- Ces règles restent valables en remplaçant $<$ par $\leq$ et $>$ par $\geq$. (mais k doit rester $\neq 0$ pour $\div$)

Définition. **Une inéquation** est une inégalité dans laquelle est présente une inconnue. **Résoudre une inéquation** revient à déterminer l'ensemble de toutes les valeurs de l'inconnue qui vérifient l'inégalité.

Exemple. Résoudre (I): $2x+6 \geq x-5$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $(I) \Leftrightarrow 2x-x \geq -6-5 \Leftrightarrow x \geq -11$. Donc l'ensemble des solutions de (I) est $[-11;+\infty[$.

Définition de la valeur absolue. Etant donné un réel a, on définit $|a|=a$ si $a \geq 0$, $|a|=-a$ si $a \leq 0$.

Exemple. $|3|=3$; $|-4|=4$; $|-1{,}5|=1{,}5$; $|5{,}6|=5{,}6$. La valeur absolue « enlève » le signe $-$.

Propriété. **La distance entre deux réels $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$** quelconques est $\boldsymbol{d(a;b)}=|a-b|$

(Car si $a>b$ c'est $a-b$, et si $a<b$ c'est $b-a$).

Exemple. $d(2{,}5;7)=|2{,}5-7|=|-4{,}5|=4{,}5$. $d(1;-3)=|1-(-3)|=|4|=4$.

Propriété. Pour $x,a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$ on a : $|x-a| \leq r \Leftrightarrow x \in [a-r;a+r]$