

Suites

Idee. (4; 5; -1; 9) est une liste (ou tuple), c'est un ensemble fini de nombres dont l'ordre importe.

On peut modéliser une liste par une fonction $u: \{1; 2; 3; 4\} \rightarrow \mathbb{R}$ où $u(1) = 4$; $u(2) = 5$; $u(3) = -1$; $u(4) = 9$

Une **suite** est une liste infinie de nombres : (1; 3; 5; 7; 9; 11; ...). On la modélisera par une fonction $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Définition. Une **suite numérique** est une fonction u à valeurs dans \mathbb{R} et définie sur \mathbb{N} (tous les entiers) ou plus généralement, sur tous les entiers à partir d'un certain entier initial n_0 .

Une suite u associe à tout entier n , un réel noté u_n (au lieu de l'écriture habituelle $u(n)$).

La suite u est aussi notée $(u_n)_{n \geq 0}$ ou (u_n) . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est le **terme général de rang n** de la suite.

Attention : Il ne faut pas confondre u_n qui est un nombre et (u_n) qui désigne la suite u .

Définition. Définir une suite par une formule explicite, c'est donner u_n en fonction de n directement.

Exemples. - La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 1$. On a $u = (-1; 0; 3; 8; 15; 24; \dots)$

- La suite $(u_n)_{n \geq 6}$ définie pour tout entier $n \geq 6$ par $u_n = \frac{1}{n-5}$. On a $u = (u_6; u_7; u_8; \dots) = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots\right)$

Définition. Définir une suite par récurrence, c'est : donner une relation permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents ET donner un ou plusieurs premiers termes.

Exemple. La suite (u_n) définie par $u_0 = -6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 15$.

Pour $n = 0$, on a $u_{0+1} = 3u_0 + 15$, c'est-à-dire $u_1 = 3 \times (-6) + 15 = -3$

Pour $n = 1$, on a $u_{1+1} = 3u_1 + 15$, c'est-à-dire $u_2 = 3 \times (-3) + 15 = 6$

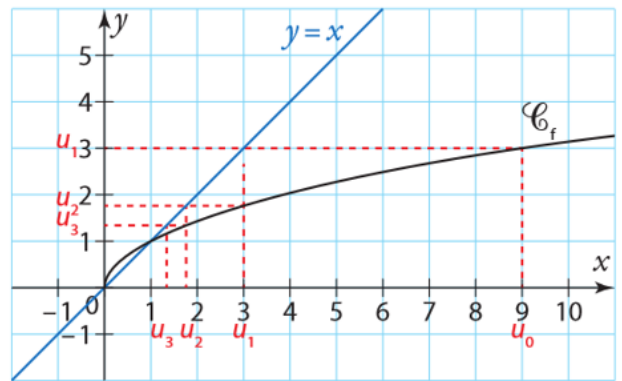
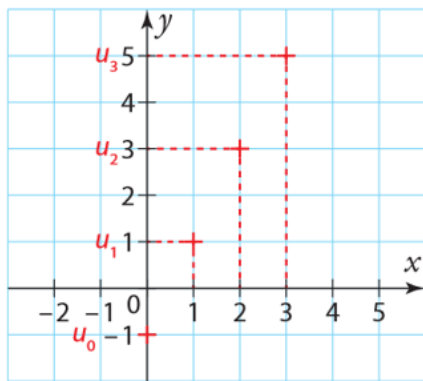
Pour calculer un terme, on doit connaître le précédent. $u = (-6; -3; 6; 33; \dots)$

Remarque. Attention à ne pas confondre u_{n+1} qui désigne le terme suivant u_n , et $u_n + 1$.

Méthode. Pour représenter une suite dans un repère (voir 1.), on place les points de coordonnées $(n; u_n)$.

Méthode. Si la suite est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, alors (voir 2.) on peut construire les termes à l'aide de la courbe représentative de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$

① On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2n - 1$. ② On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.



Définition. Une suite (u_n) est **croissante** ssi, pour tout entier n , $u_{n+1} \geq u_n$.

Définition. Une suite (u_n) est **décroissante** ssi, pour tout entier n , $u_{n+1} \leq u_n$.

Définition. Une suite (u_n) est **monotone** ssi elle est soit croissante, soit décroissante.

Définition. Une suite (u_n) est **constante** ssi, pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n$.

Définitions. Si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes, on parle de suite **strictement croissante**, **strictement décroissante**, ou **strictement monotone**.

Méthode. Pour étudier les variations d'une suite on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Exemple. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n^2 + 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = n^2 + 1 \geq 1 > 0$. Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

Méthode. Pour étudier les variations d'une suite à valeurs positives on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Exemple. La suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est croissante. En effet :

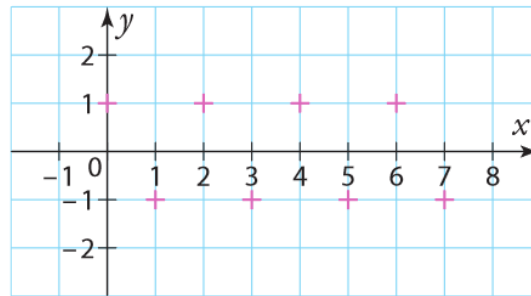
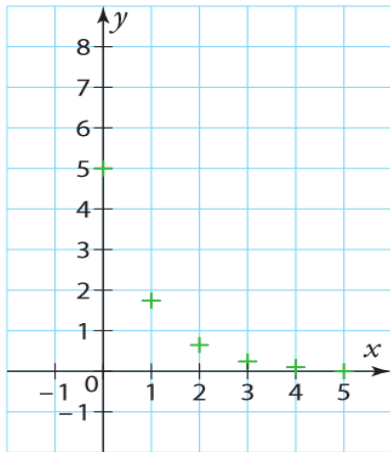
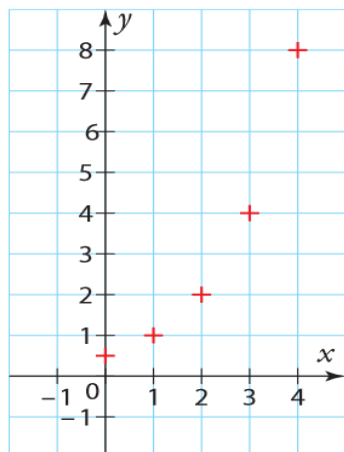
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. (Donc $u_{n+1} > u_n$ puisque $u_n > 0$)

Méthode. Pour montrer qu'une suite n'est pas croissante, il suffit de trouver un n tel que $u_n > u_{n+1}$

Exemple. $((-1)^n)_{n \geq 0}$ n'est pas croissante car pour $n = 0$ on a : $(-1)^0 = 1 > (-1)^1 = -1$

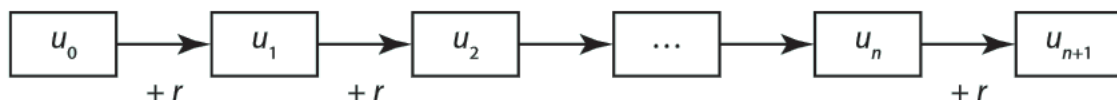
Exemple. $((-1)^n)_{n \geq 0}$ n'est pas décroissante car pour $n = 1$ on a : $(-1)^1 = -1 < (-1)^2 = 1$

Exemples. Allure d'une suite croissante, d'une suite décroissante, et d'une suite non monotone.



Remarque. Il existe des suites qui ne sont pas monotones, comme la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$.

Définition. Une suite (u_n) est **arithmétique** ssi la différence de deux termes consécutifs est constante. Plus précisément, (u_n) est arithmétique ssi il existe un réel r , tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+1} = u_n + r$. r est appelé **raison de la suite arithmétique** (u_n) .



Exemple. La suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$ est la suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = -2$.

Propriété. Terme général d'une suite arithmétique. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$ (Deux termes distants de n rangs diffèrent de n fois la raison)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + (n - 1)r$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + (n - p)r$

Exemple. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 0,5$.

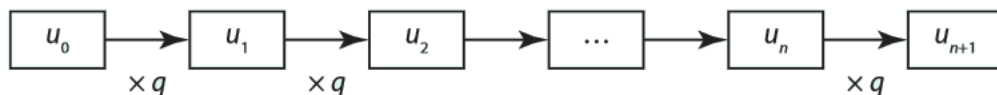
Cette suite est arithmétique de raison $r = -0,5$ et de premier terme $v_0 = 3$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + r \times n = 3 - 0,5n$.

Propriété. Sens de variation d'une suite arithmétique. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$, alors la suite est strictement croissante.
- Si $r < 0$, alors la suite est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, alors la suite est constante.

Définition. Une suite (u_n) est **géométrique** ssi le quotient de deux termes consécutifs est constant. Plus précisément, (u_n) est géométrique s'il existe un réel q , tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+1} = q \times u_n$. q est appelé **raison de la suite géométrique** (u_n) .



Exemple. La suite (u_n) définie par $u_0 = 0,5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$ est la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 0,5$.

Propriété. Terme général d'une suite géométrique. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Exemple. La suite (u_n) définie par $u_0 = 0,5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$ est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 0,5$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = 0,5 \times 2^n$.

Propriété. Sens de variation d'une suite géométrique non nulle.

- Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite est strictement croissante.
- Si $q > 1$ et $u_0 < 0$, alors la suite est strictement décroissante.
- Si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite est strictement décroissante.
- Si $u_0 < 0$, alors la suite est strictement croissante.
- Si $q = 0$ ou $q = 1$, alors la suite est constante.
- Si $q < 0$, alors la suite n'est pas monotone.

Propriété. Somme des n premiers entiers.

Pour tout entier $n \geq 1$, on a $1 + 2 + \dots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}$

Propriété.

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique = nombre de termes $\times \frac{(1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme})}{2}$

Remarque. Pour les suites arithmétiques, une somme de termes consécutifs ne dépend pas de la raison.

Exemple. $10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 = 6 \times \frac{10+25}{2} = 105$

Propriété. Somme des n premières puissances d'un réel différent de 1.

Soit q un réel $\neq 1$. Pour tout entier $n \geq 1$, $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Propriété.

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique = $1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$

Exemple. $8 + 16 + 32 + 64 + 128 = 8 \times \frac{1-2^5}{1-2} = 8 \times \frac{-31}{-1} = 248$