

Equations - 1

A. Remplacer une variable dans une expression.

Méthode. Pour remplacer une certaine lettre par une valeur dans une expression :

- On remplace *chaque* apparition de la lettre par la valeur entre parenthèses.

Exemple. Calculer $A(x) = 3x + 5x^2 - 6$ en $x = 10$.

$$A(10) = 3(10) + 5(10)^2 - 6 = 3 \times 10 + 5 \times 10 \times 10 - 6 = 30 + 500 - 6 = 524$$

Exemple. Calculer $B(x) = -x^2$ en $x = -2$

$$B(-2) =$$

Exemple. Calculer $C(x) = 2(-x)^2$ en $x = -3$

$$C(-3) =$$

Exercice A1. Calculer :

$$A(x) = 3x^2 - x + 4 \quad \text{en } x = -2 :$$

$$B(x) = -5x + 3 \quad \text{en } x = -4 :$$

$$C(t) = -t^2 + 2t \quad \text{en } t = 5 :$$

$$D(y) = (-10 - y)^2 \quad \text{en } y = -3 :$$

B. Tester une équation en une valeur.

Définitions. Une **égalité** est une expression comportant un signe égal.

Une **équation** est une *égalité* comportant un ou plusieurs nombres inconnus notés avec des lettres.

Exemples. $4x + 5,3 = 17$ est une équation.

$3x + 6$ n'est pas une équation car il n'y a pas de signe $=$.

Méthode. Pour tester une équation à une variable x en une valeur k

- On remplace la variable x par la valeur k , puis on calcule les deux côtés du signe égal.
- Si les résultats sont les mêmes, l'équation est vraie *en* $x = k$, sinon, l'équation est fausse *en* $x = k$.

Exemple. L'équation (A) : $3x + 5 = -2x + 10$ est-elle vérifiée en $x = 3$?

$$3(3) + 5 = -2(3) + 10 \Leftrightarrow 9 + 5 = -6 + 10 \Leftrightarrow 14 = 4$$

Mais $14 \neq 4$. Donc l'équation (A) est fausse en $x = 3$.

Exemple. L'équation (B) : $-2x + 7 = 3$ est-elle vérifiée en $x = 2$?

Exercice B1. Tester les équations suivantes :

(E) : $-6x - 3 = 15$ est-elle vérifiée en $x = -3$?

(F) : $-x + 2 = -3x + 10$ est-elle vérifiée en $x = 6$?

(G) : $-13 = 10x + 7$ est-elle vérifiée en $x = 2$?

(H) : $3x^2 - 6x = 6x^2 - 9$ est-elle vérifiée en $x = -3$?

Equations - 2

C. Résoudre une équation du premier degré.

Définition. Une **solution** d'une équation est une valeur qui rend l'équation *vraie*.

Exemple. L'équation $3x - 3 = 0$ est vraie en $x = 1$. 1 est une solution de l'équation $3x - 3 = 0$.

- Une équation peut avoir zéro, une, ou plusieurs solutions.

Définition. Deux équations sont **équivalentes** si elles ont le même ensemble de solutions.

Exemple. L'équation $3 + x = 6$ est équivalente à l'équation $4 + x = 7$. On écrit $3 + x = 6 \Leftrightarrow 4 + x = 7$

- Le symbole \Leftrightarrow signifie « est équivalent à » / « revient à dire que » / « si et seulement si »

Définition. Résoudre une équation c'est trouver l'ensemble de ses solutions.

Propriétés.

- Ajouter ou soustraire un même nombre c aux deux côtés d'une équation, donne une équation équivalente
- Multiplier ou diviser un même nombre c *non nul* aux 2 côtés d'une équation, donne une équation équivalente

Méthode. Pour résoudre une équation simple du 1^{er} degré en x :

- Chaque **terme à droite et contenant x** est déplacé à gauche, en changeant son signe.
- Chaque **terme à gauche ne contenant pas x** est déplacé à droite, en changeant son signe.
- On simplifie à gauche les termes en x , et à droite par calcul.
- Si le terme restant à gauche, est de la forme $c x$, on *divise* par c les deux côtés.
- On a résolu l'équation quand x est isolé.

ATTENTION : Cette méthode du 1^{er} degré ne marche pas si l'équation contient des $x^2, x^3, \frac{1}{x}, \sqrt{x}, \dots$

Exemple. Résoudre $(E) : 3x + 5 = 35 - 7x$

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow 3x + 5 = 35 - 7x \\ &\Leftrightarrow 3x + 5 + 7x = 35 \\ &\Leftrightarrow 3x + 7x = 35 - 5 \\ &\Leftrightarrow (3 + 7)x = 30 \\ &\Leftrightarrow 10x = 30 \\ &\Leftrightarrow \frac{10x}{10} = \frac{30}{10} \\ &\Leftrightarrow x = 3\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) est :

$$S_E = \{3\}$$

Exercice C1. Résoudre les équations suivantes :

$$(A) : 3x - 5 = 5x + 13$$

$$(B) : 1 - 7x = 3 - 11x$$

$$(A) \Leftrightarrow$$

$$(C) : 6 - 2x = 8x - 34$$

$$(D) : 9x - 13 = 5x + 2$$

Equations - 3

- Pour des équations un peu plus compliquées, il est utile de commencer par développer et simplifier.

Exercice C2. Résoudre les équations suivantes :

$$(F) : 5(x - 1) = -3(2 - x)$$

$$(G) : 5 - (x - 3) = 4x - (3x - 8)$$

$$(H) : 13x + 2 = x - 5 - 3(x + 12) + 4x$$

- Pour se débarrasser des fractions, on peut multiplier par les dénominateurs des 2 côtés.

Exercice C3. Résoudre les équations suivantes :

$$(A) : \frac{x-2}{3} = \frac{3}{4} + x$$

$$(A) \Leftrightarrow 3 \times \left(\frac{x-2}{3}\right) = 3 \times \left(\frac{3}{4} + x\right)$$

$$(A) \Leftrightarrow x - 2 = \frac{9}{4} + 3x$$

$$(A) \Leftrightarrow 4 \times (x - 2) = 4 \times \left(\frac{9}{4} + 3x\right)$$

$$(A) \Leftrightarrow 4x - 4 \times 2 = 4 \times \frac{9}{4} + 4 \times 3x$$

$$(A) \Leftrightarrow 4x - 8 = 9 + 12x$$

$$(A) \Leftrightarrow 4x - 12x = 9 + 8 \Leftrightarrow -8x = 17 \Leftrightarrow x = -\frac{17}{8}$$

$$\text{Donc } S_A = \left\{-\frac{17}{8}\right\}$$

$$(B) : x + \frac{3}{5} = \frac{4}{3}x - 1$$

$$(C) : \frac{3-2x}{4} = \frac{x+2}{5}$$

- Certaines équations aboutissent à une égalité vraie comme $0 = 0$, dans ce cas, toute valeur est solution, $S = \mathbb{R}$.
- Certaines équations aboutissent à une égalité fausse comme $0 = 1$, dans ce cas, il n'y a pas de solution, $S = \emptyset$.

Exercice C4. Résoudre les équations suivantes :

$$(A) : 2(x + 4) + 1 - 5x = 3(1 - x) + 7$$

$$(B) : 3(x - 5) - 2x = 2(x + 4) - x - 7$$

D. Résoudre un problème numérique avec une équation.

<p>Méthode. Pour résoudre un problème numérique :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Bien lire <i>la question</i> posée • Modélisation : <ul style="list-style-type: none"> • On note le nombre inconnu cherché avec une lettre. • On peut préciser chaque quantité ou relation utile. • On représente le problème avec une équation. • Résolution : <ul style="list-style-type: none"> • On résout l'équation du problème. • Interprétation : <ul style="list-style-type: none"> • On répond au problème en français à l'aide des solutions. 	<p>Exemple. Un père a 40 ans et son fils a 10 ans. Dans combien d'années le père aura le double de l'âge de son fils ?</p> <p>On note x le nombre d'années cherché. Dans x années, le père aura $40 + x$ ans. Dans x années, le fils aura $10 + x$ ans. On veut résoudre (E) : $40 + x = 2(10 + x)$.</p> $ \begin{aligned} (E) \quad &\Leftrightarrow 40 + x = 2 \times 10 + 2 \times x \\ &\Leftrightarrow 40 + x = 20 + 2x \\ &\Leftrightarrow x - 2x = 20 - 40 \\ &\Leftrightarrow -x = -20 \\ &\Leftrightarrow x = 20 \end{aligned} $ <p>Le père aura le double de l'âge du fils dans 20 ans.</p>
---	--

- La **modélisation** désigne le passage du réel aux mathématiques.
- La **résolution** s'effectue dans le monde mathématique.
- L'**interprétation** désigne le retour des mathématiques au réel.

D. Résoudre un problème numérique avec une équation.

<p>Méthode. Pour résoudre un problème numérique :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Bien lire <i>la question</i> posée • Modélisation : <ul style="list-style-type: none"> • On note le nombre inconnu cherché avec une lettre. • On peut préciser chaque quantité ou relation utile. • On représente le problème avec une équation. • Résolution : <ul style="list-style-type: none"> • On résout l'équation du problème. • Interprétation : <ul style="list-style-type: none"> • On répond au problème en français à l'aide des solutions. 	<p>Exemple. Un père a 40 ans et son fils a 10 ans. Dans combien d'années le père aura le double de l'âge de son fils ?</p> <p>On note x le nombre d'années cherché. Dans x années, le père aura $40 + x$ ans. Dans x années, le fils aura $10 + x$ ans. On veut résoudre (E) : $40 + x = 2(10 + x)$.</p> $ \begin{aligned} (E) \quad &\Leftrightarrow 40 + x = 2 \times 10 + 2 \times x \\ &\Leftrightarrow 40 + x = 20 + 2x \\ &\Leftrightarrow x - 2x = 20 - 40 \\ &\Leftrightarrow -x = -20 \\ &\Leftrightarrow x = 20 \end{aligned} $ <p>Le père aura le double de l'âge du fils dans 20 ans.</p>
---	--

- La **modélisation** désigne le passage du réel aux mathématiques.
- La **résolution** s'effectue dans le monde mathématique.
- L'**interprétation** désigne le retour des mathématiques au réel.

Equations - 5

Exercice D1. Il y a 10 ans, Alice avait la moitié de l'âge qu'elle aura dans 10 ans. Quel âge à Alice ?

Exercice D2. Une personne dépense le quart de son salaire pour se loger, les $\frac{3}{7}$ pour se nourrir. Il lui reste 594 € pour les autres dépenses. Quel est son salaire ?

Exercice D3. Dans un bassin plein aux deux tiers on verse 20 litres. Il est alors plein aux trois quarts. Quelle est la capacité du bassin ?

Exercice D4. Thomas a obtenu 11 et 16 aux deux premiers contrôles de mathématiques. Quelle note doit-il obtenir au troisième contrôle pour obtenir 15 de moyenne ?

Exercice D5. Dans un jardin, le tiers de la surface est recouvert par des fleurs, un sixième par des plantes et vertes et le reste soit 150 m^2 , est occupé par la pelouse. Quel est l'aire de ce jardin ?

Exercice D6. François et son cousin William ont 200 € à eux deux. François a 20 € de plus que William. Combien d'argent possède chacun des deux cousins ?

Exercice D7. Le personnel d'une entreprise est composé d'hommes et de femmes. L'entreprise emploie 107 personnes. Si elle embauche 8 femmes de plus alors la composition de femmes représente 40 % de l'effectif total. Combien de femmes y a-t-il dans cette entreprise ?

Exercice D8. Si tous les inscrits étaient venus, la sortie en autocar aurait coûté 25 € par personne. Mais il y a eu 3 absents et chaque participant a dû payer un supplément de 1,50 €. Combien y avait-il d'inscrits ?

Equations - 6

E. Trouver les antécédents d'un nombre par une fonction, par le calcul.

Méthode. Pour trouver les antécédents d'un nombre connu k par une fonction f

- On résout l'équation $f(x) = k$ d'inconnue x .
- L'ensemble des valeurs trouvées est l'ensemble des antécédents de k par f .

Exemple. Déterminer le(s) antécédent(s) de 4 par la fonction $f(x) = 3x - 2$.

On résout $f(x) = 4$.

$$f(x) = 4 \Leftrightarrow 3x - 2 = 4 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{3} \Leftrightarrow x = 2$$

L'unique antécédent de 4 par f est 2.

- Chercher les antécédents d'un nombre, c'est chercher le(s) entrée(s) connaissant la sortie.

Exemple. Déterminer le(s) antécédent(s) de -2 par la fonction $g(x) = 3 - 10x$.

- Un nombre y peut avoir zéro, un, plusieurs, ou une infinité d'antécédents par f .

Exercice E1. Soit la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 3x - 8$. Déterminer les éventuels antécédents des nombres suivants : a) 3 b) -5 c) $\frac{1}{2}$

Exercice E2. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (3 - x)(x - 1)$. Déterminer les antécédents de 0 par f .