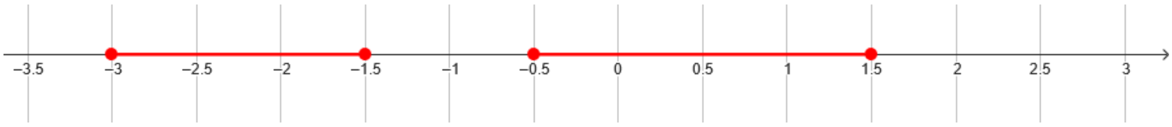
Intervalles - 1

A. Comprendre la notion d'intervalle.

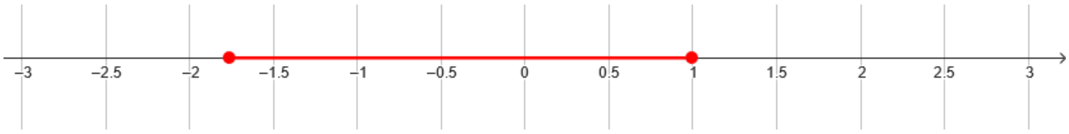
• On peut représenter les nombres réels sur un axe gradué.

• Pour représenter un *ensemble* de nombres, on peut colorier une ou plusieurs parties de l'axe.



Définition. Un **intervalle** est un *ensemble* *continu* de nombres réels.

Exemple. L'ensemble colorié ci-dessous des nombres entre $-1{,}75$ et 1 est un intervalle car il n'a qu'une partie.



• En général, un intervalle est délimité par *deux* valeurs, appelées **borne inférieure**, et **borne supérieure**.

• Chacune des deux bornes peut être soit incluse, soit exclue, et peut être soit finie, soit infinie : ∞

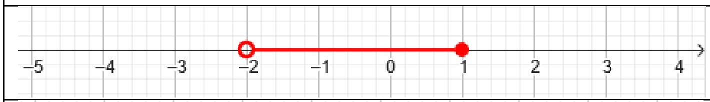
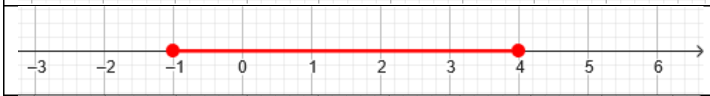
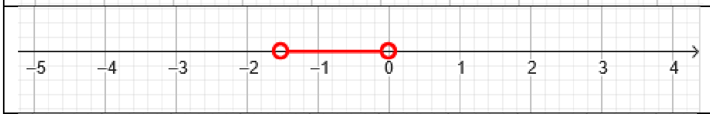
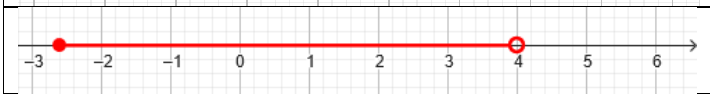
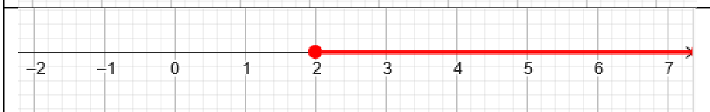
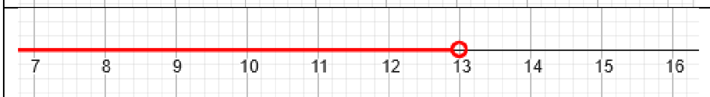
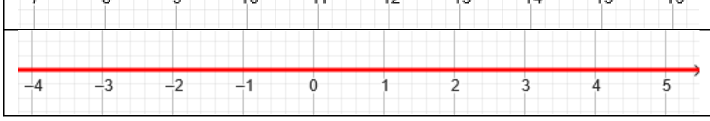
B. Désigner ou représenter un intervalle.

Méthode. Pour désigner un intervalle à partir de sa représentation :

• On commence par écrire : *borne inférieure ; borne supérieure*

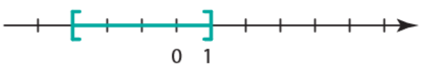
• On entoure avec des crochets tournés vers l'intérieur si la borne est incluse, vers l'extérieur sinon.

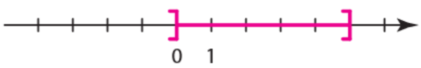
Exemples.

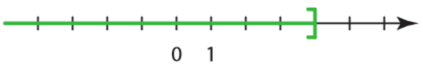
Schéma	Intervalle	Borne inf.	Borne sup.
	$]-2\,;1]$	-2 est exclus	1 est inclus
	$[-1\,;4]$	-1 est inclus	4 est inclus
			
			
	$[2\,;\infty[$	2 est inclus	∞ est exclus
			
			

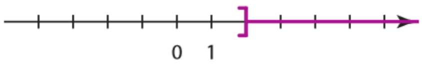
• L'intervalle $]-\infty\,;\infty[$ contient tous les nombres réels. C'est donc l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R} =]-\infty\,;\infty[$

Exercice B1. Ecrire les intervalles correspondants :

a) 

b) 

c) 

d) 

Exercice B2. Représenter sur une droite graduée les intervalles suivants avec 4 couleurs différentes :

a) $]1\,;4]$ b) $[-0{,}5\,;3]$

c) $]-\infty\,;2]$ d) $[0\,;+\infty[$

Exercice B3. Vrai ou faux

(a) $3 \in [1\,;5[$ (b) $2 \in [2\,;4]$

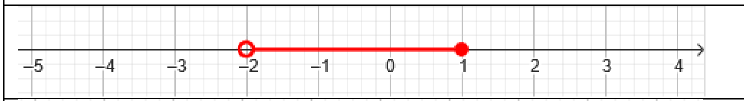
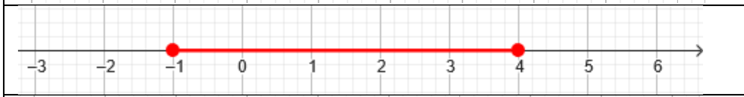
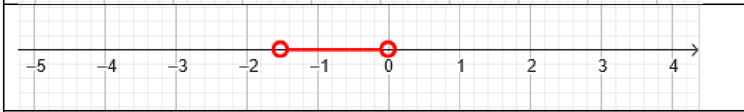
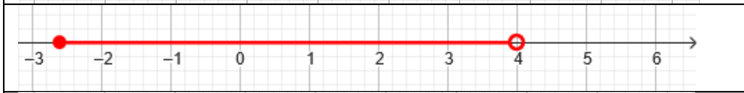
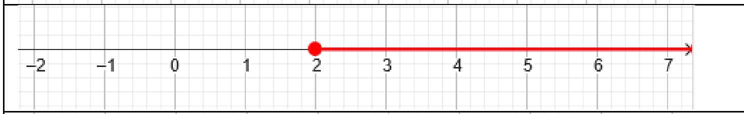
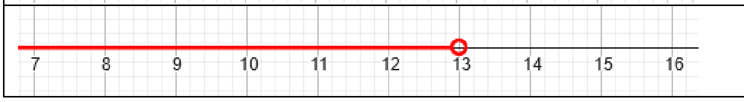
(c) $2 \in]2\,;3]$ (d) $6 \in]-\infty\,;5]$

Intervalles - 2

C. <u>Traduire l'appartenance à un intervalle par une inégalité et réciproquement.</u>

Méthode. Pour traduire l'appartenance d'un nombre x à un intervalle, en une inégalité :
- On peut commencer par écrire : *borne inférieure* $< x <$ *borne supérieure*
- Si un crochet est tourné vers l'intérieur (si sa borne est incluse), on ajoute un trait sous le signe $<$ qui devient $\leq$
- Si une des bornes est infinie, on n'écrit qu'une inégalité simple. Un nombre x vérifie toujours $-\infty < x$ et $x < \infty$.

Exemples.

Schéma	Ecrire :		Revient à écrire :
	$x \in]-2\,;1]$	$\Leftrightarrow$	$-2 < x \leq 1$
	$x \in [-1\,;4]$	$\Leftrightarrow$	$-1 \leq x \leq 4$
		$\Leftrightarrow$	
		$\Leftrightarrow$	
	$x \in [2\,;\infty[$	$\Leftrightarrow$	$2 \leq x$ $(2 \leq x < \infty)$
		$\Leftrightarrow$	

Méthode. Pour traduire une inégalité sur un nombre x, en l'appartenance de x à un intervalle :
- On peut commencer par écrire : $x \in$ *borne inférieure* ; *borne supérieure*
- Si une inégalité est stricte $<$ on met un crochet vers l'extérieur. Si elle est large $\leq$ on met un crochet vers l'intérieur.
- S'il n'y a qu'une inégalité simple, la borne manquante est ∞ ou $-\infty$ (suivant qu'elle est supérieure ou inférieure).

Exemple. Traduire l'inégalité par l'appartenance à un intervalle. $5 < x \leq 7$ $\Leftrightarrow$

Exercice C1. Traduire chaque appartenance par une inégalité.

(a) $x \in [0\,;2[$ $\Leftrightarrow$

(b) $y \in]-5\,;3]$ $\Leftrightarrow$

(c) $2 + z \in [0\,;3]$ $\Leftrightarrow$

(d) $a \in]-\infty\,;\,5{,}88]$ $\Leftrightarrow$

(e) $b \in]-3{,}5\,;\,\infty[$ $\Leftrightarrow$

Exercice C2. Traduire chaque inégalité par l'appartenance à un intervalle.

(a) $3 \leq x \leq 6$ $\Leftrightarrow$

(b) $-5{,}2 < y \leq 2$ $\Leftrightarrow$

(c) $1 \leq x - 2 < 3$ $\Leftrightarrow$

(d) $c \leq -5$ $\Leftrightarrow$

(e) $2 < z$ $\Leftrightarrow$

Intervalles - 3

D. Représenter et simplifier l'intersection de deux intervalles

Définition. **L'intersection** des intervalles I et J est l'ensemble noté $\boldsymbol{I \cap J}$ des nombres qui appartiennent à I *et* à J.

Méthode. Pour représenter *l'intersection* de deux intervalles :
- Sur un axe gradué, on colorie les deux intervalles avec deux couleurs différentes.
- L'intersection est l'ensemble des points coloriés par les deux couleurs à la fois.

Exemple. Représenter puis simplifier $A =]3;6[\cap [4;8[$

Exercice D1. Représenter puis simplifier :

(a) $A = [-4;5] \cap [0;10]$

(b) $B =]-5;2] \cap [4;7]$

(c) $C = [10;20[\cap [0;15[$

(d) $D = [0;8[\cap]2;5]$

E. Traduire l'appartenance à une intersection d'intervalles

Exemple. Traduire $x \in]3;6] \cap [4;8[$ par des inégalités :

$x \in]3;6] \cap [4;8[\quad \Leftrightarrow \quad x \in]3;6]$ et $x \in [4;8[\quad \Leftrightarrow \quad 3 < x \leq 6$ et $4 \leq x < 8$

Exemple. Traduire $x \in [-2;3[\cap [-3;0]$ par des inégalités :

$x \in [-2;3[\cap [-3;0] \quad \Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow$

Exemple. Traduire $-3 \leq x < 0$ et $-2 < x < 5$ avec une intersection d'intervalles. Représenter puis simplifier.

$-3 \leq x < 0$ et $-2 < x < 5 \quad \Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow$

Exercice E1. Traduire chaque affirmation par des inégalités :

(a) $x \in [-1;1] \cap [0;2] \quad \Leftrightarrow$

(b) $z \in]3;5] \cap]1;4] \quad \Leftrightarrow$

(c) $y \in [0;2] \cap [2;3[\quad \Leftrightarrow$

Exercice E2. Traduire chaque affirmation par l'appartenance à une intersection. Simplifier.

(a) $3 < x < 10$ et $2 \leq x \leq 5 \quad \Leftrightarrow$

(b) $-5 \leq b \leq 2$ et $-10 < b < 2 \quad \Leftrightarrow$

(c) $-2 < z < -1$ et $3 \leq z < 5 \quad \Leftrightarrow$

Intervalles - 4

F. Représenter et simplifier l'union de deux intervalles

Définition. L'union des intervalles I et J est l'ensemble noté $\boldsymbol{I \cup J}$ des nombres qui appartiennent à I *ou* à J.

Méthode. Pour représenter *l'union* de deux intervalles :
- Sur un axe gradué, on colorie les deux intervalles.
- L'union est l'ensemble des points coloriés. Ce n'est pas toujours un intervalle.

Exemple. Représenter puis simplifier $A =]3;6[\cup [4;8[$

Exercice F1. Représenter puis simplifier *si possible* :

(a) $A = [-4;5] \cup [0;10]$

(b) $B =]-5;2] \cup [4;7]$

(c) $C = [10;20[\cup [0;15[$

(d) $D = [0;8[\cup]2;5]$

G. Traduire l'appartenance à une union d'intervalles

Exemple. Traduire $x \in]3;6] \cup [4;8[$ par des inégalités :

$x \in]3;6] \cup [4;8[\quad \Leftrightarrow \quad x \in]3;6]$ ou $x \in [4;8[\quad \Leftrightarrow \quad 3 < x \leq 6$ ou $4 \leq x < 8$

Exemple. Traduire $x \in [-2;3[\cup [-3;0]$ par des inégalités :

$\Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow$

Exemple. Traduire $-3 \leq x < 0$ ou $-2 < x < 5$ avec une union d'intervalles. Représenter puis simplifier.

$-3 \leq x < 0$ ou $-2 < x < 5 \quad \Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow$

Exercice G1. Traduire chaque affirmation par des inégalités :

(a) $x \in [-1;1] \cup [0;2] \quad \Leftrightarrow$

(b) $z \in]3;5] \cup]1;4] \quad \Leftrightarrow$

(c) $y \in [0;2] \cup [2;3[\quad \Leftrightarrow$

Exercice G2. Traduire chaque affirmation par l'appartenance à une union. Simplifier *si possible*.

(a) $3 < x < 10$ ou $2 \leq x \leq 5 \quad \Leftrightarrow$

(b) $-5 \leq b \leq 2$ ou $-10 < b < 2 \quad \Leftrightarrow$

(c) $-2 < z < -1$ ou $3 \leq z < 5 \quad \Leftrightarrow$