Suites numériques

Idée. Une **suite** est une liste ordonnée et infinie de nombres, par exemple $(1;3;5;7;9;11;\dots)$.

Exemple. La liste des entiers naturels $(0;1;2;3;4;\dots)$ est une suite.

Exemple. La liste des multiples de 3 supérieurs à 6 : $(6;9;12;15;\dots)$ est une suite.

Contre-Exemple. $(1;2;3;4)$ n'est pas une suite car c'est une liste finie.

Notation. On note u_n **le terme de rang n** d'une suite u

Exemple. Si $u=(1;3;5;7;\dots)$ est la suite des entiers impairs, alors $u_0=1$; $u_1=3$; $u_2=5$; $u_3=7$; …

Attention : Ne pas confondre u_n qui est un simple nombre et (u_n) qui désigne *toute* la suite u.

Remarque. Le rang initial est souvent 0. Mais on peut définir une suite $(u_n)_{n\geq k}$ avec un rang initial $k\geq 1$.

Vocabulaire. Une suite (u_n) est **définie explicitement** si on peut écrire u_n en fonction du *rang* n

Exemples. Soit la suite (u_n) définie par $u_n=n^2-1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On a $u=(-1;0;3;8;15;24;\dots)$

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 6}$ définie à partir du rang 6 par $u_n=\frac{1}{n-5}$. On a $u=(u_6\,;u_7\,;u_8\,;\dots)=\left(1\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{4}\,;\dots\right)$

Vocabulaire. Une suite (u_n) est **définie par récurrence** si :

- On donne une formule exprimant tout terme, en fonction d'un ou plusieurs *termes précédents*
- On donne un premier terme de la suite (voire plusieurs premiers termes)

Exemple. Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases}u_0=-6\\ u_{n+1}=3u_n+15 \quad \text{pour } n\in\mathbb{N}\end{cases}$ (suivant = 3 × courant + 15)

$u_1=3\times(-6)+15=-3$ (autrement dit, on a remplacé n par 0 : $u_1=u_{0+1}=3u_0+15$)

$u_2=3\times(-3)+15=6$ (autrement dit, on a remplacé n par 1 : $u_2=u_{1+1}=3u_1+15$)

$u_3=3\times(6)+15=33$

Etc… $u=(-6;-3;6;33;\dots)$ Pour calculer chaque terme, on doit connaître le précédent.

Vocabulaire. Si le terme **courant** est u_n, alors u_{n+1} est le terme **suivant**. u_{n-1} est le terme **précédent**.
Remarque. *Attention* à ne jamais confondre u_{n+1} (le terme suivant) et u_n+1 (le terme courant + 1)

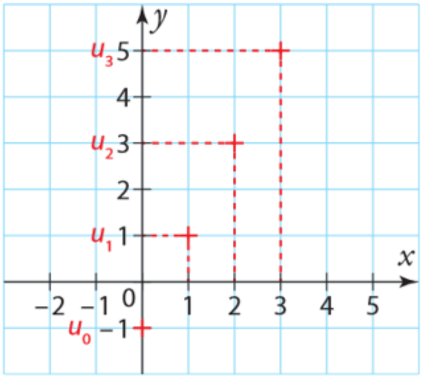
Exemple. Soit la suite (u_n) définie par $u_n=n^2-1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Alors $u_{n+1}=(n+1)^2-1=n^2+2n+1-1=n^2+2n$ mais $u_n+1=(n^2-1)+1=n^2$

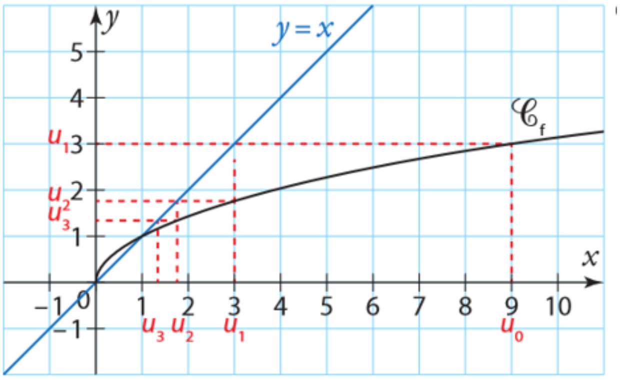
Méthode. Pour représenter une suite dans un repère (voir 1.), on place les points de coordonnées $(n;u_n)$.

Méthode. Si la suite (u_n) est *définie par récurrence*, ($u_0\in\mathbb{R}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$), alors (voir 2.) on peut construire les termes à l'aide de la courbe représentative de la fonction f et de la droite d'équation $y=x$

1 On considère la suite (u_n) définie par $u_n=2n-1$.



2 On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1}=f(u_n)$.



Suites arithmétiques et géométriques

Idée. Une suite (u_n) est **arithmétique** si on ajoute toujours le <u>même</u> nombre pour passer au terme suivant.

Exemple *a*. $(6; 11; 16; 21; 26; 31; \dots)$ est le début d'une suite arithmétique u, car on ajoute 5 à chaque fois.
Exemple *b*. $(7; 4; 1; -2; -5; -8; \dots)$ est le début d'une suite arithmétique v, car on ajoute -3 à chaque fois.

Définition. Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$
r est appelé **raison de la suite arithmétique** (u_n).

Exemple. Dans l'exemple *a*, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 5$. La raison de cette suite est $r = 5$.
Exemple. Dans l'exemple *b*, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 3$. La raison de cette suite est $r = -3$.

Propriété. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + r \times n$$

Idée. Deux termes distants de n rangs diffèrent de n fois la raison

Exemple. Dans l'exemple *a*, (u_n) est arithmétique de raison $r = 5$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6 + 5n$
Exemple. Dans l'exemple *b*, (v_n) est arithmétique de raison $r = -3$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 - 3n$

Remarque. Si le rang initial est 1 il faut adapter la formule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + r(n-1)$
Remarque. Si le rang initial est $p \in \mathbb{N}$ il faut adapter la formule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + r(n-p)$

Propriété. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
La suite est strictement croissante si $r > 0$, strictement décroissante si $r < 0$, et constante si $r = 0$.

Exemple. Dans l'exemple *a*, (u_n) est arithmétique de raison $r = 5 > 0$ donc (u_n) est croissante.

Idée. (u_n) est **géométrique** si on multiplie toujours par le <u>même</u> nombre pour passer au terme suivant.

Exemple *c*. $(3; 6; 12; 24; 48; 96; \dots)$ est le début d'une suite géométrique u, car on $\times\, 2$ à chaque fois.
Exemple *d*. $(900; 90; 9; 0{,}9; 0{,}09; \dots)$ est le début d'une suite géométrique v, car on $\times \frac{1}{10}$ à chaque fois.

Définition. Une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel q, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$
q est appelé **raison de la suite géométrique** (u_n).

Exemple. Dans l'exemple *c*, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 \times u_n$. La raison de cette suite est $q = 2$.
Exemple. Dans l'exemple *d*, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{10} \times v_n$. La raison de cette suite est $q = \frac{1}{10}$.

Propriété. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n$$

Idée. Deux termes distants de n rangs, sont dans un rapport égal à la raison puissance n

Exemple. Dans l'exemple *a*, (u_n) est géométrique de raison $q = 2$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^n$
Exemple. Dans l'exemple *b*, on a $q = \frac{1}{10}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 900 \times \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{900}{10^n}$

Remarque. Si le rang initial est 1 il faut adapter la formule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 q^{n-1}$
Remarque. Si le rang initial est $p \in \mathbb{N}$ il faut adapter la formule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p q^{n-p}$