

Dérivation

Rappel : La pente d'une droite (non verticale) est le nombre relatif m qui indique de combien d'unités la droite monte (ou descend si $m < 0$) lorsqu'on avance d'une unité vers la droite.

Propriété. La pente d'une droite d'équation « $y = mx + p$ » est son coefficient directeur m .

Idee : La dérivée d'une fonction en un point (de sa courbe) est la pente de la fonction en ce point. C'est un nombre qui sert à mesurer la vitesse de variation de la fonction au point considéré.

La dérivée généralise la notion de pente à une fonction. Elle dépend du point. Elle n'existe pas toujours.

Définitions. On se place en un point d'abscisse a de la courbe représentative d'une fonction f .

Si en faisant un zoom infini sur le point, la courbe se déforme et devient une droite (non verticale), alors :

- Cette droite est appelée **tangente à la courbe représentative de f en a** .
- On dit que la fonction f est **dérivable en a** , (elle admet une dérivée en a)
- La **dérivée de la fonction f en a** , notée $f'(a)$ est la pente de la tangente (à f en a).

Propriété. La tangente est la droite passant par $A = (a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété. L'équation de la tangente est : « $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ »

Définition. f est **dérivable sur I** si elle est dérivable en tout réel x de I .

Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée de la fonction f** ,

la fonction $f': I \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f'(x)$

Dérivées usuelles. A chaque ligne, f est définie et vaut l'expression de la colonne à gauche sur tout D_f . On déduit que f est dérivable sur $D_{f'}$, et $f'(x)$ vaut l'expression dans la dernière colonne sur tout $D_{f'}$.					Opérations sur les dérivées. A chaque ligne : - On suppose que u et v sont dérivables. - On déduit que f est dérivable sur I .		
$f(x)$	Conditions	D_f	$D_{f'}$	$f'(x)$	f	Conditions	f'
c	$c \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	0	$u + v$	$u, v: I \rightarrow \mathbb{R}$	$u' + v'$
x		\mathbb{R}	\mathbb{R}	1	$u - v$	$u, v: I \rightarrow \mathbb{R}$	$u' - v'$
ax	$a \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	a	$a \times u$	$a \in \mathbb{R}, u: I \rightarrow \mathbb{R}$	au'
$ax + b$	$a, b \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	a	$u \times v$	$u, v: I \rightarrow \mathbb{R}$	$u'v + v'u$
x^2		\mathbb{R}	\mathbb{R}	$2x$	$\frac{1}{v}$	$v: I \rightarrow \mathbb{R}^*$	$\frac{-v'}{v^2}$
x^3		\mathbb{R}	\mathbb{R}	$3x^2$	$\frac{u}{v}$	$u: I \rightarrow \mathbb{R}, v: I \rightarrow \mathbb{R}^*$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$		\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	e^u	$u: I \rightarrow \mathbb{R}$	$u'e^u$
e^x		\mathbb{R}	\mathbb{R}	e^x			

Hypothèse. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I non trivial.

Théorème. Etudier les variations d'une fonction, c'est étudier le signe de sa dérivée.

f est croissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.

f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.

f est constante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Exemple. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 5x^2 - 3x + 9$.

Par somme et produits de fonctions dérivables sur \mathbb{R} , f est dérivable sur \mathbb{R} .

Pour déterminer ses variations, on peut étudier le signe de f' .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5 \times 2x - 3 \times 1 + 0 = 10x - 3$

Or $10x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{10}$ et $10x - 3 > 0 \Leftrightarrow 10x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{10}$. Donc :

x	$-\infty$	$\frac{3}{10}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f			

f atteint son minimum $\frac{81}{10}$ en $x = \frac{3}{10}$

