Suites et récurrence

Principe du raisonnement par récurrence. Soit une propriété $P(n)$ dépendant d'un entier n. Si :
- $P(0)$ est vraie. (initialisation)
- Pour tout entier n fixé, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie. (hérédité)

Alors : Pour tout entier $n \geq 0$, $P(n)$ est vraie.
Ce principe marche encore en remplaçant 0 par 1, ou par n'importe quel rang initial n_0.
Exemple. Si le premier domino tombe, et si pour tout n (si le n-ième domino tombe alors le $(n+1)$-ième domino tombe), alors tous les dominos tombent.
Exemple. $\forall n \geq 1,\ 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ (car $1 = \frac{1\times(1+1)}{2}$ et pour tout $n \geq 1$, $\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$)
Exemple. (Inégalité de Bernoulli) Pour tout $a > 0$ et tout entier n, $(1+a)^n \geq 1 + na$

Définition. **Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers** $+\infty$ ssi les termes finissent au bout d'un moment par tous se trouver au-dessus d'une valeur qu'on a fixé : $\forall h \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq h$
On écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou encore : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. On a une définition analogue pour (u_n) tend vers $-\infty$.
Définition. **Une suite (u_n) a pour limite le réel l quand n tend vers** $+\infty$ ssi les termes finissent au bout d'un moment par se trouver à une distance de l $\leq$ à une valeur fixée : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$
On écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ou encore : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$. On a une définition analogue pour (u_n) tend vers $-\infty$.
Définition. (u_n) est **convergente** ssi elle admet pour limite un réel. Sinon (u_n) est **divergente**.
Propriété. Si une suite (u_n) admet une limite (finie ou non) alors cette limite est unique.

Propriétés. **Limites usuelles** à connaitre.

Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n =$	c	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	q^n $(q > 1)$	q^n $(\lvert q\rvert < 1)$	q^n $(q < -1)$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	c	0	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	Pas de limite

Règles d'addition, produit, quotient de limites.

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$	$\lim\limits_{n\to\infty} v_n =$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n + v_n =$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n =$
l	l'	$l + l'$	$l \times l'$
l	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ si $l > 0$ $-\infty$ si $l < 0$ indéterminé si $l = 0$
l	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ si $l > 0$ $+\infty$ si $l < 0$ indéterminé si $l = 0$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	indéterminé	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	indéterminé	$-\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$
l	$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$
l	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$l \neq 0$	0^+	$+\infty$ si $l > 0$ $-\infty$ si $l < 0$
$l \neq 0$	0^-	$-\infty$ si $l > 0$ $+\infty$ si $l < 0$
$+\infty$	l'	$+\infty$ si $l' > 0$ ou $l' = 0^+$ $-\infty$ si $l' < 0$ ou $l' = 0^-$
$-\infty$	l'	$-\infty$ si $l' > 0$ ou $l' = 0^+$ $+\infty$ si $l' < 0$ ou $l' = 0^-$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	indéterminé
0	0	indéterminé

Dans ces tableaux :
Indéterminé signifie qu'on ne peut pas conclure sur la limite.
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0^+$ (resp 0^-) signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et que $v_n > 0$ (resp. $v_n < 0$) à partir d'un certain rang.
Pour déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n$ on peut juste remarquer que $u_n - v_n = u_n + (-v_n)$ et utiliser : $-(+\infty) = -\infty$

Exemple. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$.
Méthodes : **Pour lever une forme indéterminée** :
- On peut simplifier : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n}$. On a une F.I. « $\frac{+\infty}{+\infty}$ ». Cependant $\frac{n}{n} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.
- On peut factoriser : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - n$. Sachant $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ on a une F.I. « $+\infty - \infty$ ».

Mais $n^2 - n = n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$, donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = +\infty$.

Théorème de passage à la limite de l'inégalité $\leq$.
Soit (u_n), (v_n) deux suites convergentes telles que $\forall n \geq n_0,\ u_n \leq v_n$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$
($\leq$ est conservé par passage à la limite)
Remarque. Si $\forall n \geq n_0,\ u_n < v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ mais pas nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
Par exemple $\forall n \geq 1,\ 0 < \frac{1}{n}$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

Théorème de comparaison. Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\forall n \geq n_0,\ u_n \leq v_n$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. (Une suite $\geq$ à une autre suite de limite $+\infty$, tend aussi vers $+\infty$)
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. (Une suite $\leq$ à une autre suite de limite $-\infty$, tend aussi vers $-\infty$)
Exemple. Déterminer la limite de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n + (-1)^n$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n - 1$, or $\lim\limits_{n\to+\infty} n - 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Théorème de gendarmes. Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que $\forall n \geq n_0,\ u_n \leq v_n \leq w_n$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.
(Une suite encadrée par deux autres suites ayant même limite l, converge également vers cette limite l.)
Exemple. Déterminer la limite de la suite définie par $\forall n \geq 1,\ u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $\forall n \geq 1,\ -\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$, or $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Définition. Une suite (u_n) est **majorée** par un réel M ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$
Définition. Une suite (u_n) est **minorée** par un réel m ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$
Définition. Une suite (u_n) est **bornée** ssi elle est majorée et minorée. ($\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n \leq M$)

Théorème de convergence monotone.
Toute suite croissante majorée converge. Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
Toute suite décroissante minorée converge. Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.
Exemple. La suite définie par $u_n = \frac{n-1}{n+4}$ est majorée par 1 (car $\forall n,\ u_n - 1 = -\frac{5}{n+4} \leq 0$) et est croissante (car $\forall n,\ u_{n+1} - u_n = \frac{5}{(n+4)(n+5)} \geq 0$), donc (u_n) converge. (On pouvait aussi vérifier cela en levant la F.I.)
Remarque. Une suite tendant vers $+\infty$ n'est pas forcément croissante, par exemple :
La suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n + 2(-1)^n$ tend vers $+\infty$ mais n'est pas croissante.
Remarque. Une suite non majorée n'a pas forcément de limite, par exemple :
La suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n(-1)^n$ est non majorée mais n'a pas de limite.
Remarque. Une suite convergente est toujours bornée. La réciproque est fausse. Par exemple
La suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n$ est bornée mais n'a pas de limite.
Remarque. En résumé, le théorème de convergence monotone affirme qu'une suite monotone admet toujours une limite finie ou non, et affirme que cette limite est finie ssi la suite est bornée.