Objectif. Calculer des probabilités conditionnelles dans un tableau à double entrée.

Exercice 1.
1. Un institut de sondage réalise une étude sur deux PCS (professions et catégories socioprofessionnelles), les employés et les ouvriers. Elle dispose de l'échantillon ci-dessous.

	Femme	Homme	Total
Employé	40	13	53
Ouvrier	9	32	41
Total	49	45	94

Quand on tire au sort une personne dans cet échantillon, on considère les événements F : « La personne est une femme » et E : « La PCS de la personne est "employée" ».
a) Calculer $P(F)$, $P(E)$ et $P(F \cap E)$.
b) Supposons que l'on sache que la personne tirée au sort est une femme. Quelle est la probabilité que sa PCS soit « employée » ?
Cette probabilité est dite conditionnelle, et est notée $P_F(E)$ ce qui se lit « probabilité de E sachant F ».
c) Décrire par une phrase $P_E(F)$, puis calculer cette probabilité. Même question pour $P_{\overline{F}}(\overline{E})$.
2. D'après l'Insee, si l'on considère ces deux PCS, en France, il y a 57 % d'employés dont 76 % de femmes. On tire au sort une personne de la population parmi celles appartenant à une de ces PCS.
a) En reprenant les mêmes notations qu'à la question 1., traduire les deux pourcentages de l'énoncé en une probabilité, éventuellement conditionnelle.
b) Quelle est la probabilité que la personne tirée au sort soit une femme dont la PCS est « employée » ? On commencera par donner la formule littérale en utilisant la question 2. a) puis on donnera le résultat sous forme décimale.

Exercice 2. Greg a créé une playlist de 300 titres de différents genres musicaux interprétés par des artistes de différents pays. La répartition de ces titres est donnée par le tableau ci-dessous.

	Rap	Pop	Electro	Total
Américain	117	34	27	178
Autre	23	61	38	122
Total	140	95	65	300

Quand il lance sa playlist en mode aléatoire, on considère les événements A : « L'interprète du titre joué est américain. », R : « Le titre joué est du rap. », et E : « Le titre joué est de l'électro. ».
1. Calculer $P_A(R)$ et $P_{\overline{R}}(A)$.
2. Un titre pop est joué. Écrire la probabilité que son interprète soit américain comme une probabilité conditionnelle puis la calculer.

Exercice 3. Dans une boulangerie, on dispose d'une réduction si l'on choisit la formule « dessert mystère » pour laquelle le dessert accompagnant le menu est tiré au hasard. Ceyda choisit cette formule alors que les desserts encore disponibles sont répartis comme suit.

	Chocolat	Vanille	Total
Tartelette	8	11	19
Éclair	13	7	20
Total	21	18	39

On considère les événements E : « Son dessert est un éclair » et V : « Son dessert est à la vanille. »
1. Calculer $P_E(V)$, $P_V(E)$, $P_{\overline{E}}(V)$.
2. Ceyda voit que son dessert est un éclair. Écrire la probabilité qu'il soit au chocolat comme une probabilité conditionnelle puis la calculer.

Exercice 4. Dans un jeu de construction, il y a des briques de couleurs et de tailles différentes (taille 2 et taille 4). Un enfant dispose de briques selon la répartition ci-dessous.

	Rouge	Jaune	Vert	Total
Taille 2	97	101	83	281
Taille 4	74	86	68	228
Total	171	187	151	509

Il prend une brique au hasard et on considère les événements R : « La brique est rouge », V : « La brique est verte » et T_4 : « La brique est de taille 4. »
1. Calculer $P_R(T_4)$, $P_{T_4}(V)$, $P_{\overline{T_4}}(\overline{V})$.
2. L'enfant prend une brique de taille 4. Calculer la probabilité qu'elle soit jaune.

Objectif. Calculer avec des probabilités conditionnelles

Exercice 5.
1. Soit deux événements A et B tels que $P(A) = 0{,}2$ et $P_A(B) = 0{,}8$. Calculer $P(A \cap B)$.
2. Soit deux événements A et B tels que $P(A) = 0{,}1$ et $P(A \cap B) = 0{,}06$. Calculer $P_A(B)$.
3. Soit deux événements A et B tels que $P(B) = \frac{3}{4}$ et $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$. Calculer $P_B(A)$.

Exercice 6. Quand on lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6, quelle est la probabilité que le résultat soit inférieur ou égal à 3 sachant qu'il est impair ?

Exercice 7. Soit deux événements A et B disjoints de probabilités non nulles. Calculer $P_A(B)$.

Exercice 8. Soit deux événements A et B tels que $P(A) = \frac{1}{3}$ et $P_{\overline{A}}(B) = \frac{7}{12}$. Calculer $P(\overline{A} \cap B)$ et $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Exercice 9. Dans une bibliothèque, les statistiques montrent que : 45 % des adhérents sont des filles ; et 20 % des adhérents sont des garçons ayant emprunté plus de 50 livres. Quand on rencontre un garçon sortant de la bibliothèque, quelle est la probabilité qu'il ait emprunté plus de 50 livres ?

Objectif. Reconnaître et utiliser les probabilités conditionnelles (ou non) dans un énoncé.

Exercice 10. Dans un lycée, 60 % des élèves ont une calculatrice graphique dont 80% sont de marque A. On emprunte la calculatrice d'un élève au hasard et on considère les événements G : « Sa calculatrice est graphique. » et A : « Sa calculatrice est de marque A »
Quelle est la probabilité que ce soit une calculatrice graphique de marque A ?

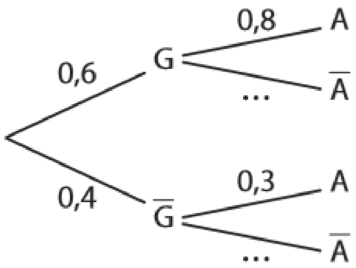
Exercice 11. Dans un placard, Idriss a 70 % de polos et 30 % de chemises. Il prend un vêtement dans ce placard et considère les événements C : « Ce vêtement est une chemise. » et B : « Ce vêtement est bleu. ».
1. 45 % des chemises sont bleues. Calculer la probabilité que le vêtement soit une chemise bleue.
2. De plus, 24,5 % des vêtements de ce placard sont des polos bleus. Idriss prend un polo. Quelle est la probabilité qu'il soit bleu ?

Exercice 12. Dans une ville, 80 % des logements sont des appartements, occupés à 45 % par une seule personne et à 55 % par plusieurs personnes. Le reste des logements sont des maisons. Quand on prend un logement au hasard dans cette ville, on considère les événements A : « Le logement est un appartement. » et S : « Le logement est occupé par une seule personne. »
1. a) Déterminer $P(A)$ et $P_A(S)$ en utilisant l'énoncé.
b) En déduire la probabilité que le logement soit un appartement occupé par une seule personne.
2. Par ailleurs, 17 % des logements de cette ville sont des maisons occupées par plusieurs personnes.
a) Traduire cette information en une probabilité en utilisant les événements $\overline{A}$ et $\overline{S}$.
b) Déterminer $P(\overline{A})$ en utilisant l'énoncé.
c) En déduire la probabilité que le logement soit occupé par plusieurs personnes sachant que c'est une maison.

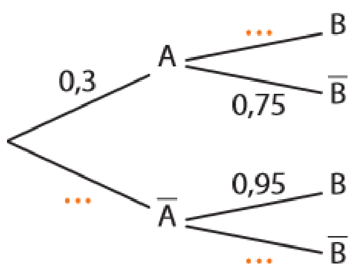
Exercice 13. Il manque des cartes dans un jeu de sorte que, quand on tire une carte, la probabilité d'obtenir une figure de carreau soit $\frac{1}{24}$ et celle d'obtenir un carreau soit $\frac{5}{24}$. Quand on tire une carte dans ce jeu, on appelle F l'événement « obtenir une figure » et C l'événement « obtenir un carreau ».
1. Traduire les données de l'énoncé par des probabilités mettant en jeu les événements F et C
2. En déduire la probabilité d'obtenir une figure sachant que la carte est un carreau.

Objectif. Construire un arbre pondéré.

Exercice 14. Compléter l'arbre pondéré suivant



Exercice 15. Pour 2 événements A et B, recopier et compléter l'arbre ci-contre puis calculer $P(A \cap B)$, $P(\overline{A} \cap B)$, $P(A \cap \overline{B})$, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$



Exercice 16. On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 0{,}12$, $P_A(B) = 0{,}73$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}36$. Tracer un arbre pondéré possible avec ces événements A et B.

Exercice 17. La production d'une entreprise de matériel mathématique est composée à 70 % d'équerres et à 30 % de rapporteurs. Suite à un problème en usine, 20 % des équerres ont des défauts et 30 % des rapporteurs n'en ont pas. Représenter la situation par un arbre pondéré après avoir énoncé les événements y apparaissant.

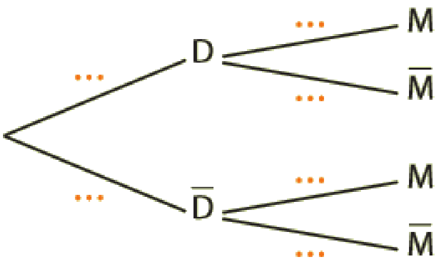
Objectif. Reconnaître une partition de l'univers

Exercice 18. On considère l'expérience aléatoire consistant à tirer une personne au sort dans la population française. Les événements A : « La personne est mineure », B : « La personne a entre 20 et 59 ans inclus » et C : « La personne a au moins 60 ans » forment-ils une partition de l'univers ?

Exercice 19. On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé équilibré à 10 faces et à considérer le résultat obtenu. Donner une partition de l'univers associé à cette expérience aléatoire :
a) formée de 4 événements définis par des ensembles.
b) formée de 3 événements définis par des phrases.

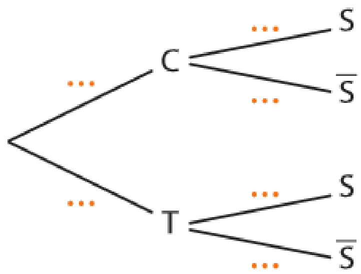
Objectif. Utiliser un arbre pondéré et la formule des probabilités totales.

Exercice 20. Lorsque le basketteur Stephen Curry tire en match, il y a 53 % de chance que ce soit un tir à 2 points et 47 % que ce soit un tir à 3 points. De plus, quand il tire à 2 points, son pourcentage de réussite est de 51,5 % contre 43,5 % à 3 points. Lorsque Curry tire en match, on considère les événements D : « Il tire à 2 points » et M : « Il marque. » Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous puis calculer $P(M)$.



Exercice 21. 75 % des jeux de Ben et Nat sont des jeux de plateaux dont 10 % sont compétitifs et 90 % coopératifs. Leurs autres jeux sont des jeux vidéos dont 80 % sont compétitifs et les autres coopératifs. Ils tirent au hasard un jeu. Représenter la situation par un arbre pondéré puis déterminer la probabilité que le jeu obtenu soit coopératif.

Exercice 22. Le matin, Dzovinar boit du café avec une probabilité $\frac{7}{12}$ ou du thé avec une probabilité $\frac{5}{12}$. Lorsqu'elle boit du café, elle y met du sucre la moitié du temps alors que quand elle boit du thé, elle y met du sucre 90 % du temps. On appelle C l'événement : « elle boit du café ce matin », T l'événement : « elle boit du thé ce matin » et S l'événement : « elle met du sucre dans sa boisson ce matin ».
1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation.



2. Quelle est la probabilité qu'elle boive un café sucré ce matin ?
3. Déterminer la probabilité qu'elle ne mette pas de sucre dans sa boisson ce matin.

Objectif. Inverser un conditionnement

Exercice 23. Sophie a mis des dragées dans une boîte, les unes contiennent une amande, les autres pas :

• 30 % des dragées contiennent une amande.
• 40 % des dragées avec amande sont bleues et les autres roses.
• 25 % des dragées sans amande sont roses et les autres bleues.

Sophie choisit au hasard une dragée dans la boîte et on considère les événements :

• A : « La dragée choisie contient une amande. »
• B : « La dragée choisie est bleue. »

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Montrer que $P(A \cap B) = 0{,}12$
3. Calculer $P(B)$ puis en déduire $P_B(A)$.
4. Calculer $P_{\overline{B}}(A)$.
5. Sophie préfère les dragées contenant une amande. Doit-elle plutôt choisir une dragée bleue ou rose ?

Exercice 24. Dans un lycée (sans internat), il y a :

• 35 % d'élèves en seconde dont 52 % de filles qui sont à 80 % demi-pensionnaires ; 19 % des garçons de seconde sont externes.
• 40 % d'élèves en première dont 50 % de garçons qui sont à 78 % demi-pensionnaires ; 81 % des filles de première sont demi-pensionnaires.
• 54 % des élèves de terminale sont des filles dont aucune n'est externe ; 95 % des garçons de terminale sont demi-pensionnaires.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. En utilisant les règles de calcul classiques sur les arbres pondérés, déterminer la probabilité qu'un élève de ce lycée soit externe.
3. On rencontre un élève externe en dehors du lycée. Quelle est la probabilité que ce soit un garçon de Seconde ?

Objectif. Utiliser l'indépendance de deux événements.

Exercice 25. Soit deux événements indépendants A et B tels que $P(\overline{B}) = 0{,}53$ et $P(A \cap B) = 0{,}25$. Calculer $P(A)$

Exercice 26. Soit deux événements indépendants A et B tels que $P(A \cup B) = 0{,}23$ et $P(A) = 0{,}11$.
Calculer $P(B)$.

Exercice 27. Dans un magasin de meubles, il y a 55 % de canapés dont 14 % en cuir, 30 % de fauteuils dont 20 % en cuir et le reste est constitué de poufs dont 42 % en cuir. Un client se présente et choisit un meuble. On considère les événements F : « Le meuble choisi est un fauteuil. » et C : « Le meuble choisi est en cuir. ». Montrer que ces deux événements sont indépendants.

Exercice 28. Dans la chorale d'un lycée, il y 7 élèves de seconde, 9 élèves de première et n élèves de terminale. De plus, parmi les élèves de seconde, il n'y a qu'une seule fille, contre 3 parmi les élèves de première et 6 parmi les élèves de terminale. On tire au sort un élève de la chorale. Pour quelle(s) valeur(s) de n les événements « L'élève est en terminale » et « L'élève est une fille » sont-ils indépendants ?

Objectif. Représenter une succession de deux épreuves indépendantes par un arbre ou un tableau.

Exercice 29. Sur un trajet, il y a deux feux tricolores qui ne sont pas synchronisés. Quand on s'y présente, la probabilité que le premier feu soit vert est 0,45 et la probabilité que le deuxième feu soit vert est 0,4.

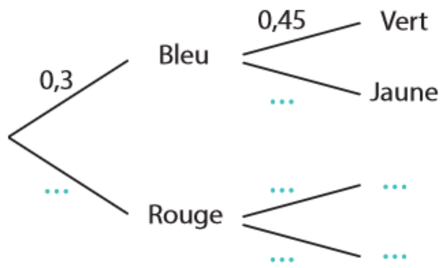
1. Pourquoi peut-on penser que les deux épreuves (ou expériences aléatoires) consistant à se présenter au premier feu et regarder s'il est vert ou non et à se présenter au deuxième feu et regarder s'il est vert ou non sont indépendantes ?
2. On considère que ces deux épreuves sont en effet indépendantes. Représenter cette succession de deux épreuves indépendantes par un arbre ou un tableau à double entrée.

Exercice 30. Une urne contient des boules de deux couleurs : 6 boules rouges et 4 boules bleues. On tire successivement deux boules de cette urne avec remise et on note les couleurs obtenues.

1. Pourquoi peut-on penser que ces deux épreuves sont indépendantes ?
2. Sous cette hypothèse d'indépendance, représenter cette succession de deux épreuves par un arbre ou un tableau à double entrée.

Exercice 31. On considère une pièce truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir Pile est 0,7 et une pièce « normale ». On lance la pièce truquée puis la pièce normale et on note les résultats obtenus.
1. Pourquoi peut-on penser que ces deux épreuves sont indépendantes ?
2. Sous cette hypothèse d'indépendance, représenter cette succession de deux épreuves par un arbre ou un tableau à double entrée.

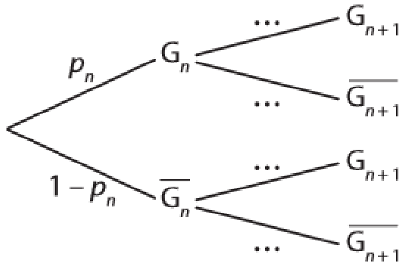
Exercice 32. On donne ci-dessous un arbre incomplet représentant une succession de deux épreuves indépendantes.
1. Recopier et compléter cet arbre.



2. Dresser un tableau représentant cette expérience aléatoire.

Exercice 33. L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée pour plusieurs raisons, il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné. Une étude menée dans une ville a permis de constater que :
• 40 % de la population est vaccinée ;
• 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
• 20 % de la population a contracté la grippe.
On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les événements V : « La personne est vaccinée contre la grippe » et G : « La personne a contracté la grippe ».
1. Donner la probabilité de l'événement G.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré dans lequel figure une inconnue.
3. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.
4. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.

Exercice 34. On donne le paramétrage d'une machine à sous dans un casino :
• Si elle donne un gain lors d'une utilisation, la probabilité qu'elle en donne un à l'utilisation suivante est 0,01 ;
• si elle ne donne pas de gain, la probabilité qu'elle en donne un à l'utilisation suivante est 0,1.
Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'événement « la n-ième utilisation donne un gain » et on note p_n la probabilité de cet événement.
Pour la première partie, la probabilité d'obtenir un gain est 0,2, on a donc $p_1 = 0{,}2$.
1. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en y inscrivant les bonnes probabilités.



2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -0{,}09p_n + 0{,}1$.
3. En déduire p_{10} à l'aide de la calculatrice et interpréter le résultat.

Exercice 35. Mathieu a prévenu ses élèves en début d'année :
• s'il y a une interrogation à une séance, la probabilité qu'il y en ait une à la suivante est 0,7 ;
• s'il n'y a pas eu d'interrogation à une séance, la probabilité qu'il n'y en ait pas à la suivante est 0,05.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n l'événement « il y a une interrogation à la n-ième séance » et on note $p_n = p(I_n)$.
Pour la première séance, Mathieu a annoncé qu'il n'y aurait pas d'interrogation donc $p_1 = 0$.
1. Construire un arbre faisant apparaître I_n et I_{n+1} représentant la situation.
2. Montrer que $p_{n+1} = -0{,}25p_n + 0{,}95$.
3. On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = p_n - 0{,}76$.
a) Montrer que (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
b) En déduire u_n puis p_n en fonction de n.
4. Quelle est la probabilité qu'il y ait une interrogation lors de la 120e et dernière séance de l'année ?