Produit scalaire algébrique

Définition (Produit scalaire). Dans un repère <u>orthonormé</u>, si $\vec{u} = \binom{x}{y}$ et $\vec{v} = \binom{x'}{y'}$, alors on appelle **produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$** et on note $\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v}}$ le <u>*nombre*</u> défini par $\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v}} = xx' + yy'$

Exemple. Le produit scalaire de $\vec{u} = \binom{2}{3}$ et $\vec{v} = \binom{-3}{-5}$ est $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2) \times (-3) + (3) \times (-5) = -21$

Attention le produit scalaire $\cdot$ n'est <u>pas une multiplication</u> $\times$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des *vecteurs* et <u>pas des nombres</u>.

Exemple. $\binom{5}{-1} \cdot \binom{3}{-2} = (5) \times (3) + (-1) \times (-2) = 15 + 2 = 17$

Hypothèses. Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs du plan, et k un réel.

Propriété. Le produit scalaire est commutatif. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Exemple. $\binom{-4}{3} \cdot \binom{2{,}5}{-1} = (-4)(2{,}5) + (3)(-1) = -13$ $\binom{2{,}5}{-1} \cdot \binom{-4}{3} = (2{,}5)(-4) + (-1)(3) = -13$

Propriété. Le produit scalaire $\cdot$ est distributif sur $+$. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d}$

Exemple. $\left(\binom{1}{0} + \binom{3}{-2}\right) \cdot \binom{2}{3} = \binom{1}{0} \cdot \binom{2}{3} + \binom{3}{-2} \cdot \binom{2}{3} = 2 + 0 + 6 - 6 = 2$

Propriété. Dans un produit scalaire, les constantes peuvent être sorties devant

$$\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Exemple. $\binom{5}{-1} \cdot 5\binom{3}{-2} = 5\left(\binom{5}{-1} \cdot \binom{3}{-2}\right) = 5 \times \big((5)(3) + (-1)(-2)\big) = 5(17) = 85$

Rappel. La **norme** (ou **longueur**) d'un vecteur $\vec{u} = \binom{x}{y}$, est définie par $\|\boldsymbol{\vec{u}}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exemple. Soit $\vec{u} = \binom{3}{-4}$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$. $\vec{u}$ est de longueur 5.

Propriété. Le carré scalaire est égal au carré de la norme. $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 = \|\vec{u}\|^2$

Exemple. $\binom{4}{-3} \cdot \binom{4}{-3} = (4)(4) + (-3)(-3) = 25$. Aussi $\left\|\binom{4}{-3}\right\|^2 = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2}^2 = (4)^2 + (-3)^2 = 25$

<u>Attention</u> : $\|\vec{u}\|$ est un nombre donc $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\|$. Mais dans $\vec{u} \cdot \vec{u}$ il s'agit du produit scalaire et pas $\times$.

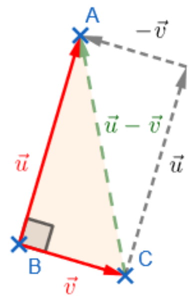
Corollaire. La norme d'un vecteur est la racine de son carré scalaire. $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Propriété. 1ère identité remarquable vectorielle. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

Propriété. 2ème identité remarquable vectorielle. $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

Preuve. $\left\|\binom{x}{y} - \binom{x'}{y'}\right\|^2 = \left\|\binom{x - x'}{y - y'}\right\|^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - 2xx' - 2yy'$

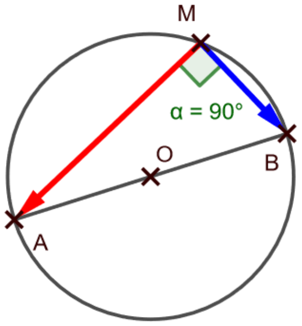
Propriété. Dans un repère orthonormé, deux vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul.



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\Leftrightarrow \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

Exemple. Montrer que $\vec{u} = \binom{2}{-3}$ et $\vec{v} = \binom{-3}{-2}$ sont orthogonaux.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2) \times (-3) + (-3) \times (-2) = -6 + 6 = 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.



Propriété. Soit $A,\ B$ deux points distincts. Soit M un point.
M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ ssi $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Exemple. $A=(5;4)$ et $B=(1;2)$, donner une équation du cercle C de diamètre $[AB]$.
Soit $M=(x;y)$ un point du plan.

$$M\in C \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}5-x\\4-y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-x\\2-y\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (5-x)(1-x)+(4-y)(2-y)=0$$

$$M\in C \Leftrightarrow 5-5x-x+x^2+8-4y-2y+y^2=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-6x-6y+13=0$$

Rappel. $\vec{u}$ est un **vecteur directeur de la droite** $(\boldsymbol{AB})$ ssi $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ ssi $\det(\vec{u};\overrightarrow{AB})=0$

Rappel. Un vecteur directeur d'une droite d'équation cartésienne " $ax+by+c=0$ " est $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Définition. $\vec{u}$ est un **vecteur normal à la droite** $(\boldsymbol{AB})$ ssi $\vec{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ ssi $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0$
Propriété. Un vecteur normal à une droite d'équation cartésienne " $ax+by+c=0$ " est $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Exemple. Les droites $d_1: 2x-3y+4=0$ et $3x+2y-1=0$ sont-elles perpendiculaires ?
Leurs vecteurs normaux sont $\vec{n_1}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{n_2}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, or $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=6-6=0$ donc $d_1\perp d_2$.
On pouvait aussi utiliser les vecteurs directeurs. Pour traduire des situations avec des droites, on a souvent le choix entre vecteur directeur / vecteur normal, et entre produit scalaire nul / déterminant nul.

Exemple. Donner une équation de la droite d passant par $A=(5,-3)$ de vecteur normal $\vec{n}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.
Soit $M=(x;y)$ un point du plan.

$$M\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-5\\y-(-3)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (x-5)(-3)+(y+3)(2)=-3x+15+2y+6=0$$

$M\in d \Leftrightarrow -3x+2y+21=0$. L'équation de la droite d est $-3x+2y+21=0$.

Exemple. Donner une équation de la droite Δ passant par $A=(-2{,}4)$ perpendiculaire à $d: 5x+2y-3=0$.
Un vecteur *directeur* de d est $\vec{u}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$. C'est aussi un vecteur *normal* de Δ. Soit $M=(x;y)$ un point.

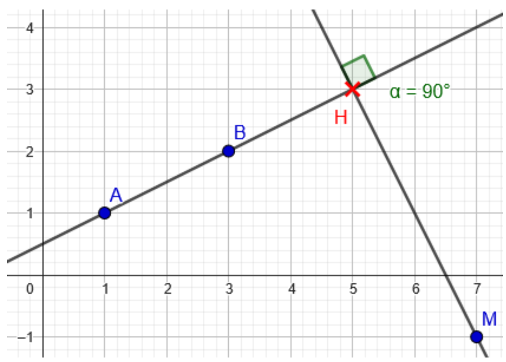
$$M\in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-(-2)\\y-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (x+2)(-2)+(y-4)(5)=-2x-4+5y-20=0$$

$M\in \Delta \Leftrightarrow -2x+5y-24=0$. L'équation de la droite Δ est $-2x+5y-24=0$.

Définition. Le **projeté orthogonal d'un point $\boldsymbol{M}$ sur une droite $\boldsymbol{d}$** est le point $H\in d$ tel que $(MH)\perp d$

Si on connait deux points A et B de d, c'est le point H tel que $\begin{cases}\det(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{AB})=0\\ \overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$

Exemple. Déterminer le projeté orthogonal H du point $M=(7;-1)$ sur la droite (AB) où $A=(1;1)$ et $B=(3;2)$. $\quad \overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}(3)-(1)\\(2)-(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$



$$\det(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{AB})=\begin{vmatrix}x_H-1 & 2\\ y_H-1 & 1\end{vmatrix}=(x_H-1)(1)-(y_H-1)(2)$$

$$\det(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{AB})=x_H-1-2y_H+2=x_H-2y_H+1=0$$

$$\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}x_H-(7)\\y_H-(-1)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=(x_H-7)(2)+(y_H+1)(1)$$

$$\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{AB}=2x_H-14+y_H+1=2x_H+y_H-13=0$$

On résout $\begin{cases}x-2y+1=0\\2x+y-13=0\end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\y=3\end{cases}$ Le projeté orthogonal de M sur (AB) est $H=(5;3)$.

Si on connait l'équation $ax+by+c=0$ de d, c'est le point H t.q. $\begin{cases}ax_H+by_H+c=0\\ \overrightarrow{MH}\cdot\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}=0 \quad \left(\text{ou } \det\left(\overrightarrow{MH};\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right)=0\right)\end{cases}$