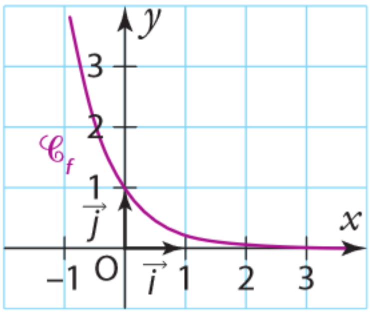
Fonctions exponentielles

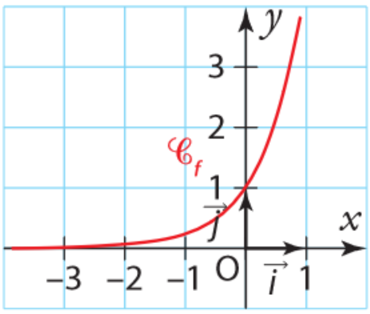
Propriété. Fonction exponentielle de base a.
Soit a un réel > 0. Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x+y) = f(x)f(y)$ et telle que $f(1) = a$.
Cette fonction est appelée **fonction exponentielle de base a**.
Définition. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\boldsymbol{a^x} = f(x)$

Propriétés.
- $a^x > 0$.
- $a^{x+y} = a^x \times a^y$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
- $(a^x)^n = a^{nx}$
- $a^0 = 1$ • $a^1 = a$ • $a^{-1} = \frac{1}{a}$
- La fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante.
- $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$
- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

Exemples. $e^3 \times e^4 = e^{3+4} = e^7$ $\quad e^{-2} = \frac{1}{e^2}$ $\quad (e^{1,5})^4 = e^{1,5\times 4} = e^6$ $\quad (e^x)^4 = e^{4x}$

Propriété. Variations d'une fonction exponentielle paramétrée : $f : x \mapsto a^{kx}$ où $k \in \mathbb{R}$.
Si $k < 0$, $f : x \mapsto a^{kx}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Si $k > 0$, $f : x \mapsto a^{kx}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$





Propriété. La suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = a^{kn}$ où $k \in \mathbb{R}$, est une suite géométrique de raison a^k.
Exemple. La suite (u_n) définie par $u_n = a^{2n}$ est géométrique de raison a^2.