Variations et extremums

Hypothèse. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

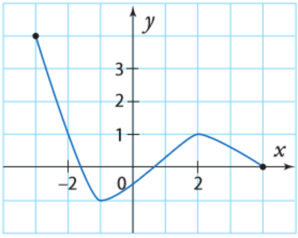
Définition. f est **croissante sur I** ssi : Pour tous $x_1, x_2 \in I$, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$
Autrement dit $f(x)$ augmente lorsque x augmente sur I.
Définition. f est **décroissante sur I** ssi : Pour tous $x_1, x_2 \in I$, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$
Autrement dit $f(x)$ diminue lorsque x augmente sur I.

Définition. On définit de manière analogue « **strictement croissante** » et « **strictement décroissante** » en remplaçant les inégalités larges $\leq$ par des inégalités strictes $<$.

Définition. f est **monotone** sur I ssi : f est croissante sur I ou f est décroissante sur I.

Définition. Un tableau de variations regroupe les informations concernant les variations d'une fonction sur son ensemble de définition.

Exemple. Soit la fonction f définie sur $[-3; 4]$ par le graphe ci-dessous :



Son tableau de variations est :

x	-3		-1		2		4
f	4	↘	-1	↗	1	↘	0

On peut lire que f est décroissante sur $[-3; -1]$, croissante sur $[-1; 2]$ et décroissante sur $[2; 4]$.

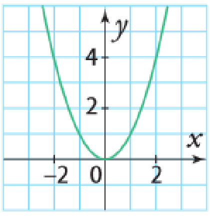
Propriétés. Sens de variation des fonctions usuelles.

Fonction carré

$x \mapsto x^2$

La fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}-$ et croissante sur $\mathbb{R}+$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto x^2$		↘	0	↗	

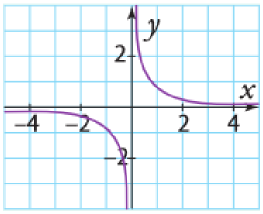


Fonction inverse

$x \mapsto \frac{1}{x}$

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^*+$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$		↘	‖	↘	

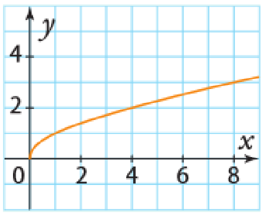


Fonction racine carrée

$x \mapsto \sqrt{x}$

La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}+$.

x	0		$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	0	↗	

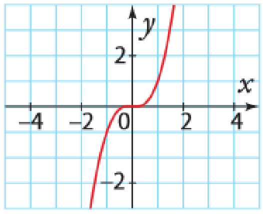


Fonction cube

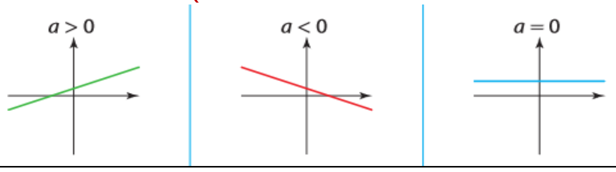
$x \mapsto x^3$

La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$x \mapsto x^3$		↗	

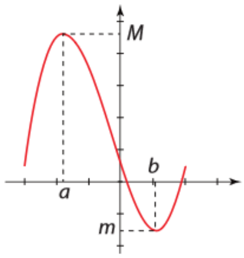


Propriété. Soit une fonction affine définie par $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto ax + b$. ($a$ et b sont des constantes réelles).
Si $a > 0$ alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a < 0$ alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a = 0$ alors f est constante sur $\mathbb{R}$.



Exemple. $x \mapsto 4x - 3$ est croissante sur $\mathbb{R}$ car $a = 4 > 0$. $x \mapsto -2x + 8$ est décroissante car $a = -2 < 0$.

Définition. f a pour **maximum** M sur I ssi pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$ et il existe $a \in I$ tel que $f(a) = M$.
Autrement dit, M (s'il existe) est l'ordonnée du point le plus haut de la courbe de f sur I.
Définition. f a pour **minimum** m sur I ssi pour tout $x \in I$, $m \leq f(x)$ et il existe $a \in I$ tel que $f(a) = M$. m (s'il existe) est l'ordonnée du point le plus bas de la courbe de f sur I.
Définition. Un **extremum** est un minimum ou un maximum.



Remarque. Une fonction peut n'avoir ni maximum, ni minimum. (Par ex. $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$)