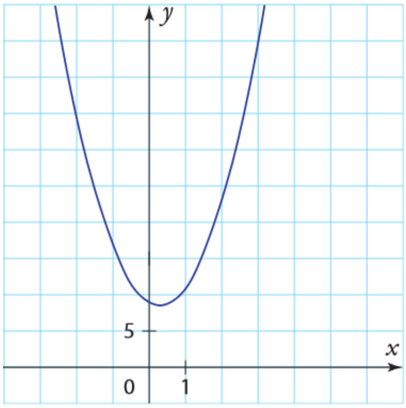
Etude de variations

Définition. Un intervalle I est **trivial** ssi I est vide ou de la forme $I = [a\,;a]$ avec $a \in \mathbb{R}$. (I a 0 ou 1 point).
Un intervalle non trivial a au moins 2 éléments distincts $a < b$ donc une infinité d'éléments (entre a et b).
Définition. Un intervalle I est **ouvert** s'il est de la forme $I =]a\,;b[$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Hypothèse. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I non trivial.
Théorème (admis). Etudier les variations d'une fonction, c'est étudier le signe de sa dérivée.
f est croissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.
f est constante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 3x + 9$.
Par somme et produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour déterminer ses variations, on peut étudier le signe de f'.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5 \times 2x - 3 \times 1 + 0 = 10x - 3$
Donc $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 10x - 3 > 0 \Leftrightarrow 10x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{10}$



x	$-\infty$		$\frac{3}{10}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	$\frac{81}{10}$	$\nearrow$	

Théorème (admis). Etude des variations strictes d'une fonction.
Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ sauf peut-être un nombre fini de fois, alors f est strictement croissante sur I.
Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ sauf peut-être un nombre fini de fois, alors f est strictement décroissante sur I.
Exemple. Dans le tableau précédent f' ne s'annule qu'en $\frac{3}{10}$ donc les variations de f sont strictes.
Remarque. Si f est strictement croissante sur I, on peut certes affirmer : pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$, mais on n'a pas forcément : pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$.
Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais $f'(0) = 0$.
Il existe même des fonctions f strictement croissantes telles que f' s'annule un nombre infini de fois.

Hypothèse. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$.
Définition. On dit que $\boldsymbol{f}$ **admet un minimum global en** $\boldsymbol{a}$ si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$
Définition. On dit que $\boldsymbol{f}$ **admet un maximum global en** $\boldsymbol{a}$ si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$
Définition. On dit que $\boldsymbol{f}$ **admet un minimum local en** $\boldsymbol{a}$ s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I, tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \geq f(a)$
Définition. On dit que $\boldsymbol{f}$ **admet un maximum local en** $\boldsymbol{a}$ s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I, tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \leq f(a)$

Définition. Un minimum ou un maximum global est appelé **extremum global**.
Définition. Un minimum ou un maximum local est appelé **extremum local**.
Remarque. A l'intérieur d'un intervalle, un extremum global est en particulier local.
Un extremum local n'est pas forcément global.
Exemple. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = [-8; 7]$ dont voici le tableau de variations :

x	-8		-1		4		7
Variations de f	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	6	$\searrow$	-5

f admet un minimum local en -1 qui vaut -2. Avec $J =]-8; 4[$, pour tout $x \in J$, $f(x) \geq f(-1)$
f admet un maximum local en 4 qui vaut 6. Avec $J =]-1; 7[$, pour tout $x \in J$, $f(x) \leq f(4)$
f admet un maximum global en 4 qui vaut 6 car pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(4)$
f admet un minimum global en 7 qui vaut -5 car pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(7)$

Hypothèse. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert non trivial. Soit $a \in I$.

Propriété (admis). Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

Exemple. Soit la fonction f définie sur $]0;2[$ par $f(x) = x^2 - 2x + 1$.
Pour tout $x \in]0;2[$, $f(x) = (x-1)^2$ or un carré est toujours positif, donc f admet un minimum global (donc local) en 1 qui vaut 0. De plus, f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]0;2[$. On en déduit que $f'(1) = 0$.
Vérifions le en calculant explicitement la dérivée de f.
Pour tout $x \in]0;2[$, $f'(x) = 2x - 2$. Donc $f'(1) = 2 \times 1 - 2 = 0$. C'est bien ce que l'on attendait.

Remarque. Si I n'est pas ouvert, alors il est possible que $f'(a) \neq 0$, quand a est au bord de I.
Exemple. Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x$. f admet un minimum local en 0 qui vaut 0 et un maximum local en 1 qui vaut 1. Mais $f'(0) = f'(1) = 1 \neq 0$.

Remarque. La réciproque est fausse. Si $f'(a) = 0$, alors f n'admet pas forcément un extremum local en a.
Exemple. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$.
$f'(0) = 0$, mais 0 n'est ni un minimum ni un maximum local de f puisque $f(x) > 0$ dès que $x > 0$ et $f(x) < 0$ dès que $x < 0$.

Propriété (admis). Si $f'(a) = 0$ et f' change de signe en a, alors f admet un extremum local en a.
Remarque. En pratique retenir cette propriété n'est pas vraiment utile. Il suffit de construire le tableau de variations de f pour voir où se situe les minimums et les maximums locaux.
Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 3x + 9$.
Par somme et produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 10x - 3$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 10x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{10}$.
On peut donc dresser le tableau de signe de f' puis le tableau de variations de f comme précédemment.

x	$-\infty$		$\frac{3}{10}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$\searrow$		$\frac{81}{10}$		$\nearrow$

Observer le tableau de signe de f' montre que $f'\left(\frac{3}{10}\right) = 0$, et que f' change de signe en $\frac{3}{10}$, ce qui permet d'en déduire par la propriété que f admet un extremum local en $\frac{3}{10}$.
Observer le tableau de variations de f permet de voir directement que f admet un minimum local en $\frac{3}{10}$.