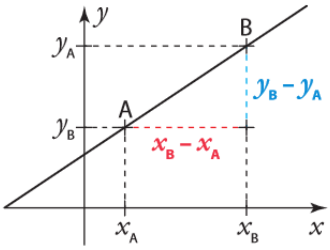
Dérivation

Définitions. La pente (ou coefficient directeur) d'une droite non verticale, est <u>le nombre</u> m qui indique de combien d'unités la droite monte (ou descend si $m < 0$) lorsqu'on avance d'<u>une</u> unité vers la droite.
La pente d'une droite d'équation « $y = mx + p$ » est m. p s'appelle **l'ordonnée à l'origine** de d.

Exemple. La droite $y = 5x + 3$ a pour pente 5 et pour ordonnée à l'origine 3.
Exemple. La droite $y = -2x$ a pour pente -2 et pour ordonnée à l'origine 0.



Propriété. Etant donnés $A = (x_A; y_A)$ et $B = (x_B; y_B)$ deux points du plan d'abscisses distinctes $(x_A \neq x_B)$, alors la pente de la droite (AB) est $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Exemple. Donner la pente de la droite passant par $A = (3; 9)$ et $B = (6; 12)$.
La pente de cette droite est $\frac{12-9}{6-3} = \frac{3}{3} = 1$. $m = 1$.

Idée : La dérivée d'une fonction en un point (de sa courbe) est la pente de la fonction en ce point.
C'est <u>un nombre</u> qui mesure la vitesse de variation de la fonction au point considéré.
La dérivée généralise la notion de pente à une fonction. Elle dépend du point. Elle n'existe pas toujours.

Dérivées usuelles.

$f(x)$	Conditions	$f'(x)$
c	$c \in \mathbb{R}$	0
x		1
$a \times x$	$a \in \mathbb{R}$	a
$a \times x + b$	$a, b \in \mathbb{R}$	a
x^2		$2x$
x^3		$3x^2$
x^4		$4x^3$
x^n	$n \geq 1$	nx^{n-1}

Opérations sur les dérivées.

f	Conditions	f'
$u + v$	$u, v: I \to \mathbb{R}$	$(u + v)' = u' + v'$
$u - v$	$u, v: I \to \mathbb{R}$	$(u - v)' = u' - v'$
$a \times u$	$a \in \mathbb{R},\ u: I \to \mathbb{R}$	$(a \times u)' = a \times u'$

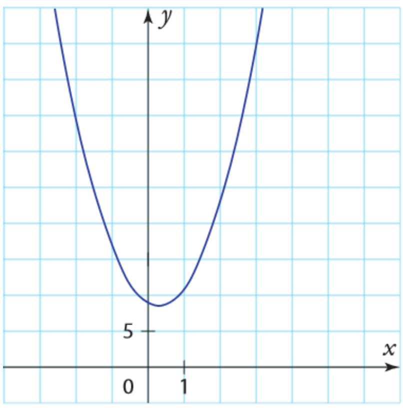
Exemples.
$(3x^2 + 5x)' = (3x^2)' + (5x)' = 3(x^2)' + 5(x)'$
$(3x^2 + 5x)' = 3 \times (2x) + 5 \times (1) = 6x + 5$

$(2x - 3x^3)' = (2x)' - (3x^3)' = 2(x)' - 3(x^3)'$
$(2x - 3x^3)' = 2 \times (1) - 3 \times (3x^2) = 2 - 9x^2$

Théorème (admis). Etudier les variations d'une fonction f, c'est étudier le signe de sa dérivée.
f est croissante sur I si et seulement si, $f' \geq 0$ sur I.
f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f' \leq 0$ sur I.
f est constante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f' = 0$ sur I.

Exemple. Soit f la fonction définie par $f(x) = 5x^2 - 3x + 9$.
Pour étudier les variations de f on détermine le signe de $f'(x)$.
On calcule $f'(x) = 5 \times 2x - 3 \times 1 + 0 = 10x - 3$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{10} = -\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↘	$\frac{81}{10}$	↗	



Rappel. La fonction affine définie par $f(x) = a \times x + b$ s'annule et change de signe une fois en $x = -\frac{b}{a}$.