Rappels

Hypothèses. Soit une expérience aléatoire, d'univers Ω et de loi de probabilité P.

Définition. Soit A et B deux événements, avec B de probabilité non nulle.
On appelle **probabilité de A *sachant* B** la probabilité que A se réalise *sachant* que B s'est réalisé.

$$\boldsymbol{P_B(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Propriété. Soit A et B deux événements de probabilité $\neq 0$. Puisque $A \cap B = B \cap A$ alors :

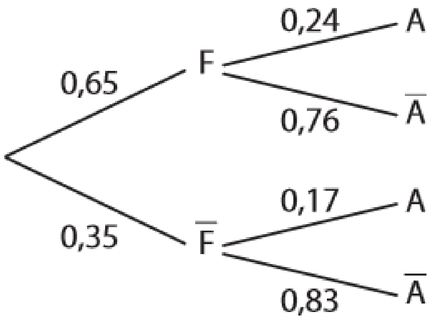
$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$
$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Exemple. Si la probabilité d'être fumeur est $P(F) = 0{,}3$; si la probabilité d'être fumeur *sachant* qu'on a le cancer du poumon est $P_C(F) = 0{,}9$; et si la probabilité d'avoir le cancer du poumon est $P(C) = 0{,}1$; Alors :
La probabilité qu'un fumeur ait le cancer du poumon est $P_F(C) = \frac{P(C \cap F)}{P(F)} = \frac{P_C(F) \times P(C)}{P(F)} = \frac{0{,}9 \times 0{,}1}{0{,}3} = 0{,}3 = 30\ \%$

Propriété. Dans un arbre pondéré, la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est toujours égale à 1.

Exemple. Lors d'une colonie de vacances, il y a :
- 65 % de filles, dont 24 % font de la randonnée.
- 35 % de garçons, dont 17 % font de la randonnée.

On choisit un enfant au hasard.
On note F l'événement « L'enfant est une fille. »
On note A l'événement « L'enfant fait de la randonnée. »
On a $P(F) = 0{,}65$. Donc $P(\bar{F}) = 1 - P(F) = 0{,}35$.
On a $P_F(A) = 0{,}24$. Donc $P_F(\bar{A}) = 1 - P_F(A) = 0{,}76$.
On a $P_{\bar{F}}(A) = 0{,}17$. Donc $P_{\bar{F}}(\bar{A}) = 1 - P_F(A) = 0{,}83$.

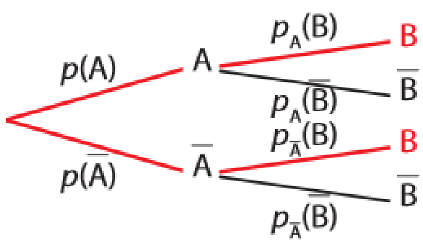


Méthode. Dans un arbre pondéré, on peut calculer $P(A \cap B)$ en multipliant les probabilités le long du chemin qui contient A et B.

Ex. La probabilité que l'enfant soit une fille qui fait de la randonnée est $P(F \cap A) = 0{,}65 \times 0{,}24 = 0{,}156$.
La probabilité que l'enfant soit un garçon qui ne fait pas de randonnée est $P(\bar{F} \cap \bar{A}) = 0{,}35 \times 0{,}83 = 0{,}2905$.

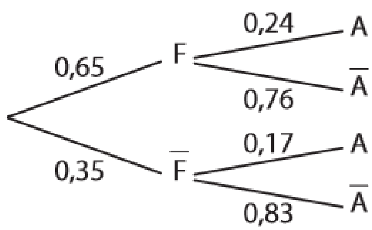
Propriété. Formule des probabilités totales (cas particulier)

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$$



Méthode. Dans un arbre pondéré, pour calculer $P(B)$:
- On repère tous les chemins qui mènent à B
- On multiplie les probabilités le long de chaque chemin
- On ajoute les probabilités obtenues

Exemple. On reprend l'exemple de la colonie de vacances.
La probabilité qu'un enfant fasse de la randonnée est :
$P(A) = 0{,}65 \times 0{,}24 + 0{,}35 \times 0{,}17 = 0{,}2155$.



Evènements indépendants

Définition. On dit que deux événements A et B de probabilités non nulles, sont **indépendants** si :

$$P(B) = P_A(B)$$

Le fait que A soit réalisé ou non n'a pas d'influence sur la probabilité de réalisation de B.
De manière symétrique, A et B sont indépendants si et seulement si :

$$P(A) = P_B(A)$$

Exemple. On observe le résultat d'un lancer de dé équilibré, et on observe le temps qu'il fait aujourd'hui.
Savoir si A = " Il pleut ", n'a aucune influence, sur la probabilité de B = " Obtenir le numéro 6 ".
La probabilité d'obtenir 6 sachant qu'il pleut, est identique à la probabilité d'obtenir 6. $P_A(B) = P(B)$
" Il pleut " et " Obtenir le numéro 6 " sont des événements indépendants.

Contre-Exemple. On jette un dé équilibré. On note $A =$ " le résultat est pair " et $B =$ " le résultat est 6 "
Les événements A et B sont-ils indépendants ?
$P_A(B) = \frac{1}{3}$ mais $P(B) = \frac{1}{6}$ donc A et B ne sont pas indépendants.

Exemple. On donne la répartition des licenciés dans un club. On tire au sort une personne de ce club pour une tombola et on considère les événements A : « La personne est adulte. » et B : « La personne pratique le basket-ball. ».
Les événements A et B sont-ils indépendants ?
$P(A) = \frac{132}{528} = 0{,}25$ et $P_B(A) = \frac{45}{180} = 0{,}25$.
Ainsi $P(A) = P_B(A)$ donc A et B sont indépendants.

	Adulte	Enfant	Total
Handball	73	174	247
Basket-ball	45	135	180
Gymnastique	14	87	101
Total	132	396	528

Propriété. Soit deux événements A et B de probabilités non nulles.
A et B sont indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Exemple. On observe le résultat d'un lancer de dé équilibré, et on observe le temps qu'il fait aujourd'hui.
On note A = " Il pleut ", et B = " Obtenir le numéro 6 ". On suppose que $P(A) = \frac{1}{3}$ et que $P(B) = \frac{1}{6}$
Quelle est la probabilité qu'il pleuve et que l'on obtienne le numéro 6 ?

Il est raisonnable de supposer que A et B sont indépendants car ils n'ont pas d'influence l'un sur l'autre.
$P($" Il pleut et on obtient le numéro 6 "$) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$

Remarque. Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont, A et $\overline{B}$ le sont, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont.