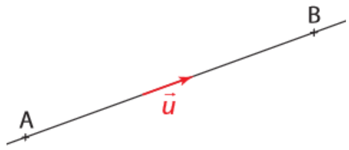
Droite passant par un point et dirigée par un vecteur

Déf. Un **vecteur directeur d'une droite** d est un vecteur aligné avec la droite dans un sens ou l'autre.

Remarque. $\vec{u}$ est un **vecteur directeur de la droite** (AB) si $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.



Propriété. Un vecteur directeur d'une droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Exemple. Donner un vecteur directeur de la droite $3y - 6x - 12 = 0$. Un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Définition. Dans un repère donné, le **déterminant** de deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est le nombre

$\det(\vec{u};\vec{v}) = xy' - yx'$

Propriété. Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est zéro.

Exemple. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

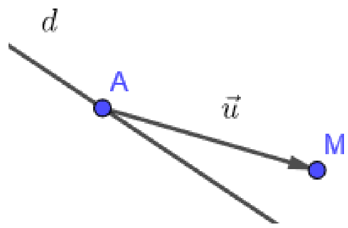
$\begin{vmatrix} 3 & -9 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = (3) \times (-6) - (2) \times (-9) = -18 + 18 = 0$ donc $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Propriété. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Propriété (admis). Description d'une droite par un point et un vecteur directeur.
Etant donnés un point A et un vecteur $\vec{u}$ non nul, il existe une unique droite d passant par le point A et ayant pour vecteur directeur $\vec{u}$.

Exemple.

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A = (-1; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Méthode 1. Soit $M = (x\,; y)$ un point du plan.
(On cherche une condition sur les coordonnées $(x; y)$ de M pour que M se trouve sur la droite d.)
($M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ est un vecteur directeur de la droite d)
($M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}$ (qui est directeur de d))

$M \in d \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0$ (Or $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - (-1) \\ y - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 3 \end{pmatrix}$ Donc :)

$M \in d \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x + 1 & -2 \\ y - 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(1) - (y - 3)(-2) = 0$

$M \in d \Leftrightarrow x + 1 + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 5 = 0$ Donc une équation de d est $x + 2y - 5 = 0$

Méthode 2. (L'équation de d est de la forme $ax + by + c = 0$. On cherche des valeurs pour a, b, c.)
$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d donc, d admet une équation de la forme $1x - (-2)y + c = 0$
Autrement dit $x + 2y + c = 0$. (Il reste à déterminer la valeur de c)
On sait que $A \in d$, donc les coordonnées de A vérifie l'équation.
$x_A + 2y_A + c = (-1) + 2(3) + c = 0$ donc $5 + c = 0$ donc $c = -5$.
Une équation de d est donc $x + 2y - 5 = 0$.

Remarque. Pour déterminer l'équation d'une droite passant par deux points A, B il suffit de déterminer l'équation de la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$