Dérivation et composée

Dérivées de référence. A chaque ligne, f est définie et vaut l'expression de la 2ème colonne <u>sur tout</u> D_f. On déduit : f est dérivable sur $D_{f'}$, et $f'(x)$ vaut l'expression dans la 3ème colonne <u>sur tout</u> $D_{f'}$	**Opérations sur les dérivées**. A chaque ligne : - On suppose que u et v sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, et dérivables sur un intervalle I. - On déduit que f est définie et dérivable sur I.

D_f	$f(x)$	$f'(x)$	$D_{f'}$	Conditions
$\mathbb{R}$	c	0	$\mathbb{R}$	$c \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x	1	$\mathbb{R}$	
$\mathbb{R}$	ax	a	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$ax+b$	a	$\mathbb{R}$	$a, b \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x^2	$2x$	$\mathbb{R}$	
$\mathbb{R}$	x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$	
$\mathbb{R}$	x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}, n > 0$
$\mathbb{R}^*$	x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$	$n \in \mathbb{Z}, n < 0$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$	
$\mathbb{R}$	e^x	e^x	$\mathbb{R}$	

f	f'	Conditions
$u+v$	$(u+v)' = u' + v'$	
$u-v$	$(u-v)' = u' - v'$	
$a \times u$	$(a \times u)' = a \times u'$	$a \in \mathbb{R}$
$u \times v$	$(uv)' = u'v + v'u$	
$\frac{1}{v}$	$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$	$v: I \to \mathbb{R}^*$ <u>v ne s'annule pas sur I.</u>
$\frac{u}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	$v: I \to \mathbb{R}^*$ <u>v ne s'annule pas sur I.</u>
$e(i(x))$	$e'(i(x)) \times i'(x)$	$i: I \to J$ et $e: J \to \mathbb{R}$
e^u	$(e^u)' = u'e^u$	

Propriété. **Dérivée de la composée.**
Soit $i: I \to J$ une fonction dérivable et $e: J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$.
Alors la fonction $f: x \mapsto e(i(x))$ est dérivable sur I et sa dérivée est $f'(x) = e'(i(x)) \times i'(x)$

$$\big(\text{exterieur}(\text{interieur})\big)' = \text{exterieur}'(\text{interieur}) \times \text{interieur}'$$

Exemple. Calculer la dérivée de $f(x) = (3x+5)^{10}$
$f(x) = e(i(x))$ avec $i(x) = 3x + 5$ et $e(y) = y^{10}$. $i'(x) = 3$ et $e'(y) = 10y^9$
Donc $f'(x) = e'(i(x)) \times i'(x) = 10(i(x))^9 \times 3 = 30(3x+5)^9$

Exemple. Calculer la dérivée de $f(x) = \sqrt{4x+2}$
$f(x) = e(i(x))$ avec $i(x) = 4x + 2$ et $e(y) = \sqrt{y}$. $i'(x) = 4$ et $e'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$
Donc $f'(x) = e'(i(x)) \times i'(x) = \frac{1}{2\sqrt{i(x)}} \times 4 = \frac{4}{2\sqrt{4x+2}} = \frac{2}{\sqrt{4x+2}}$

Exemple. Calculer la dérivée de $f(x) = e^{-7x^2+2}$
$f(x) = e(i(x))$ avec $i(x) = -7x^2 + 2$ et $e(y) = e^y$. $i'(x) = -7 \times 2x = -14x$ et $e'(y) = e^y$.
Donc $f'(x) = e'(i(x)) \times i'(x) = e^{(-7x^2+2)} \times (-14x) = -14x\, e^{-7x^2+2}$

Exemple. Sur quel intervalle I la dérivée de $f(x) = \sqrt{4x+2}$ est-elle définie ?
$f(x) = e(i(x))$ avec $i(x) = 4x + 2$ et $e(y) = \sqrt{y}$
e n'est dérivable que sur $J =]0; +\infty[= \mathbb{R}_+^*$. $i(x)$ doit donc être à valeurs dans J.
On résout $i(x) \in J \Leftrightarrow 4x + 2 > 0 \Leftrightarrow 4x > -2 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{4} \Leftrightarrow x > -0{,}5 \Leftrightarrow x \in]-0{,}5; +\infty[$
Donc on doit choisir $I =]-0{,}5; +\infty[$ pour que $i: I \to J$ et que f soit dérivable sur I.