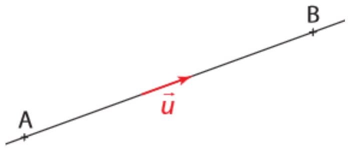
Equations de droites du plan



Définition. Etant donnés un vecteur $\vec{u}$, et une droite d dont A et B sont deux points distincts, $\vec{u}$ est un **vecteur directeur de la droite** d ssi $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Exemple. Si $A = (2; -4)$ et $B = (6; 2)$ alors $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs de (AB).

Définition. Une **équation** est une expression d'une égalité, par ex « $3y + 4x^2 = 7$ ».
Dans ce contexte, les lettres non assignées et définies dans l'expression (ici x et y) sont des **variables**.
Définition et exemple. **Un point $(a; b)$ vérifie l'équation** « $3y + 4x^2 = 7$ » ssi $3b + 4a^2 = 7$.
Exemples. Le point $(-1; 1)$ vérifie l'équation « $3y + 4x^2 = 7$ » car $3 \times 1 + 4 \times (-1)^2 = 3 + 4 = 7$.
Le point $(1; 1)$ vérifie aussi l'équation « $3y + 4x^2 = 7$ ». Le point $(0; 0)$ ne la vérifie pas car $0 \neq 7$.
Remarque. Une équation à deux variables réelles, correspond donc toujours à un ensemble de points du plan : L'ensemble de tous les points qui rendent l'équation vraie.

Propriété. **Equation cartésienne d'une droite**
Toute droite du plan d peut être décrite comme l'ensemble des points $(x; y)$ du plan vérifiant une équation de la forme « $ax + by + c = 0$ » où a et b sont des constantes réelles, pas toutes les deux nulles.
La réciproque est vraie.
Définition. L'expression « $ax + by + c = 0$ » est **une équation cartésienne de la droite d.**

Remarque. Un point $M = (x; y)$ du plan vérifie : M appartient à la droite d $\Leftrightarrow ax + by + c = 0$
Remarque. Une même droite admet une infinité d'équations cartésiennes équivalentes.
Exemple. $x + y = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y = 0 \Leftrightarrow 123x + 123y = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0$

Propriété. Un vecteur directeur d'une droite d d'équation cartésienne « $ax + by + c = 0$ » est $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Propriétés et définitions. **Equation réduite d'une droite**
Toute droite du plan d non verticale admet une équation de la forme « $y = mx + p$ » où m et p sont des constantes réelles. Dans ce cas l'expression « $y = mx + p$ » est **l'équation réduite de la droite d.**
Toute droite du plan d verticale admet une équation de la forme « $x = k$ » où k est une constante réelle.
Dans ce cas l'expression « $x = k$ » est **l'équation réduite de la droite d.**

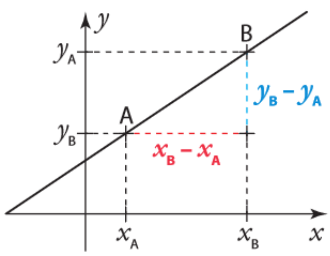
Propriété. Toute droite admet une unique équation sous forme réduite.

Hypothèse. Soit une droite d non verticale d'équation réduite « $y = mx + p$ »

Définition. m s'appelle **le coefficient directeur** de la droite d, p s'appelle **l'ordonnée à l'origine** de d.

Propriété. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d.

Propriété. Le point d'intersection de la droite d avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées $(0; p)$.



Propriété. Si $m > 0$ la droite « monte ». Si $m < 0$ la droite « descend ». Si $m = 0$ la droite est horizontale (parallèle à l'axe des abscisses.). m est aussi appelé **pente** de d.
m indique combien d'unités la droite monte (ou descend) si on va une unité à droite.

Propriété. Etant donnés $A = (x_A; y_A)$ et $B = (x_B; y_B)$ deux points du plan d'abscisses distinctes $(x_A \neq x_B)$, alors le coefficient directeur de la droite (AB) est $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Propriété. Deux droites du plan peuvent être soit sécantes, soit parallèles (strictement), soit confondues.
Propriété. Deux droites d'équations réduites « $y = mx + p$ » et « $y = m'x + p'$ » sont parallèles ssi $m = m'$. De plus, si $p = p'$ alors elles sont confondues.
Propriété. Deux droites d'équations cartésiennes « $ax + by + c = 0$ » et « $a'x + b'y + c' = 0$ » sont parallèles ssi $ab' - ba' = 0$ (ssi $\det\left(\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}\right) = 0$).