Produit scalaire algébrique

Définition (Produit scalaire). Dans un repère <u>orthonormé</u>, si $\vec{u}=\binom{x}{y}$ et $\vec{v}=\binom{x'}{y'}$, alors on appelle **produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$** et on note $\vec{u}\cdot\vec{v}$ le <u>*nombre*</u> défini par $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$

Exemple. Le produit scalaire de $\vec{u}=\binom{2}{3}$ et $\vec{v}=\binom{-3}{-5}$ est $\vec{u}\cdot\vec{v}=(2)\times(-3)+(3)\times(-5)=-21$

Attention le produit scalaire $\cdot$ n'est <u>pas une multiplication</u> $\times$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des *vecteurs* et <u>pas des nombres</u>.

Exemple. $\binom{5}{-1}\cdot\binom{3}{-2}=(5)\times(3)+(-1)\times(-2)=15+2=17$

Hypothèses. Soit $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ trois vecteurs du plan, et k un réel.

Propriété. Le produit scalaire est commutatif. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

Exemple. $\binom{-4}{3}\cdot\binom{2{,}5}{-1}=(-4)(2{,}5)+(3)(-1)=-13$ $\binom{2{,}5}{-1}\cdot\binom{-4}{3}=(2{,}5)(-4)+(-1)(3)=-13$

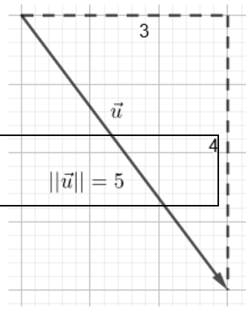
Propriété. Le produit scalaire $\cdot$ est distributif sur $+$. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$

Exemple. $\left(\binom{1}{0}+\binom{3}{-2}\right)\cdot\binom{2}{3}=\binom{1}{0}\cdot\binom{2}{3}+\binom{3}{-2}\cdot\binom{2}{3}=2+0+6-6=2$

Propriété. Dans un produit scalaire, les constantes peuvent être sorties devant

$$\vec{u}\cdot(k\vec{v})=(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

Exemple. $\binom{5}{-1}\cdot5\binom{3}{-2}=5\left(\binom{5}{-1}\cdot\binom{3}{-2}\right)=5\times((5)(3)+(-1)(-2))=5(17)=85$



Rappel. La **norme** (ou **longueur**) d'un vecteur $\vec{u}=\binom{x}{y}$, est définie par $||\vec{u}||=\sqrt{x^2+y^2}$

Exemple. Soit $\vec{u}=\binom{3}{-4}$, alors $||\vec{u}||=\sqrt{(3)^2+(-4)^2}=5$. $\vec{u}$ est de longueur 5.

Propriété. Le carré scalaire est égal au carré de la norme. $\vec{u}^2=\vec{u}\cdot\vec{u}=x^2+y^2=||\vec{u}||^2$

Exemple. $\binom{4}{-3}\cdot\binom{4}{-3}=(4)(4)+(-3)(-3)=25$. Aussi $\left\|\binom{4}{-3}\right\|^2=\sqrt{(4)^2+(-3)^2}^2=(4)^2+(-3)^2=25$

<u>Attention</u> : $||\vec{u}||$ est un nombre donc $||\vec{u}||^2=||\vec{u}||\times||\vec{u}||$. Mais dans $\vec{u}\cdot\vec{u}$ il s'agit du produit scalaire et pas $\times$.

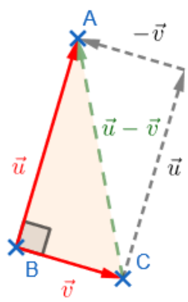
Corollaire. La norme d'un vecteur est la racine de son carré scalaire. $||\vec{u}||=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}=\sqrt{x^2+y^2}$

Propriété. 1ère identité remarquable vectorielle. $||\vec{u}+\vec{v}||^2=||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$

Propriété. 2ème identité remarquable vectorielle. $||\vec{u}-\vec{v}||^2=||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$

Preuve. $\left\|\binom{x}{y}-\binom{x'}{y'}\right\|^2=\left\|\binom{x-x'}{y-y'}\right\|^2=(x-x')^2+(y-y')^2=x^2+y^2+x'^2+y'^2-2xx'-2yy'$

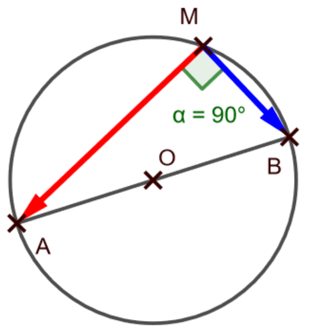
Propriété. Dans un repère orthonormé, deux vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul.



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\Leftrightarrow ||\vec{u}-\vec{v}||^2=||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2 \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow xx'+yy'=0$.

Exemple. Montrer que $\vec{u}=\binom{2}{-3}$ et $\vec{v}=\binom{-3}{-2}$ sont orthogonaux.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2)\times(-3)+(-3)\times(-2)=-6+6=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.



Propriété. Soit $A,\ B$ deux points distincts. Soit M un point.
M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ ssi $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ ssi ABM est rectangle en M (quand $M\neq A,B$)
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Exemple. Si $A=(5;4)$ et $B=(1;2)$, donner une équation du cercle de diamètre $[AB]$
On note C ce cercle. Soit $M=(x;y)$ un point du plan.
$M\in C \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}5-x\\4-y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-x\\2-y\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (5-x)(1-x)+(4-y)(2-y)=0$
$M\in C \Leftrightarrow 5-5x-x+x^2+8-4y-2y+y^2=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-6x-6y+13=0$

Propriété. Etant donné deux points A et B et leur milieu I, on a $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2$

Exemple. Soit

Rappel. $\vec{u}$ est un **vecteur directeur de la droite** $(\boldsymbol{AB})$ ssi $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ ssi $\det(\vec{u};\overrightarrow{AB})=0$

Propriété. Un vecteur directeur d'une droite d'équation cartésienne " $ax+by+c=0$ " est $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Définition. $\vec{u}$ est un **vecteur normal à la droite** $(\boldsymbol{AB})$ ssi $\vec{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ ssi $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0$
Propriété. Un vecteur normal à une droite d'équation cartésienne " $ax+by+c=0$ " est $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

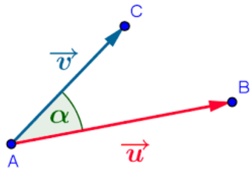
Exemple. Déterminer une équation de la droite (d) de vecteur normal $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et passant par $A=(1\,;0)$.
Soit $M=(x;y)$ un point du plan.
$M\in(d)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y-0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (x-1)(2)+(y)(-3)=0 \Leftrightarrow 2x-3y-2=0$

Rappels

Vocabulaire. Un vecteur est **unitaire** ssi il est de norme 1, autrement dit s'il est de longueur 1.

Remarque. On peut rendre un vecteur unitaire en le divisant par sa norme. $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ est toujours de norme 1.

Définition. L'angle géométrique entre deux <u>vecteurs non nuls</u> $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ est défini comme la longueur, le long du cercle $\mathcal{C}$ de centre O de rayon 1, de l'arc le plus court possible entre A et B, les points de $\mathcal{C}$ tels que $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \overrightarrow{OA}$ et $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \overrightarrow{OB}$.



Idée. $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ correspond à l'angle saillant que l'on mesure directement au rapporteur entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si on les fait partir d'un même point.

Remarque. $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ est toujours un <u>nombre</u> dans l'intervalle $[0;\pi]$

Définition. Deux vecteurs non nuls sont **orthogonaux**, s'ils forment un angle géométrique valant $\frac{\pi}{2}$ (droit).
Propriété. Deux vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

Définition. Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires**, s'ils forment un angle géométrique valant 0 ou π.
Propriété. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
Propriété. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $\det(\vec{u};\vec{v}) = \vec{0}$

Définition. Un **repère** $R = (O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ désigne la donnée d'un point O et de vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ <u>non colinéaires</u>.

Propriété. Soit $R = (O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Soit un vecteur $\vec{u}$. Il existe d'uniques $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
Définition. x et y sont **les coordonnées du <u>vecteur</u> $\vec{u}$ <u>dans le repère R</u>**. On note $\vec{u} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}_{\boldsymbol{R}}$

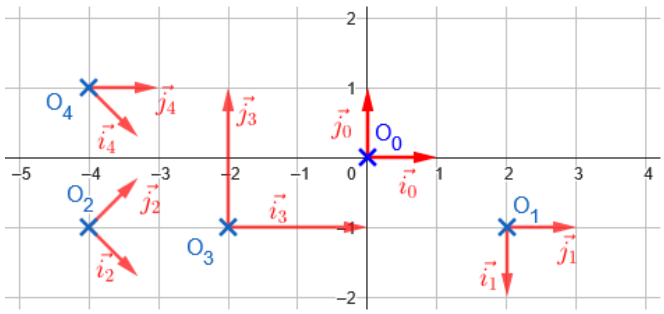
Propriété. Soit un point M. Il existe d'uniques $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
Définition. x et y sont **les coordonnées du <u>point</u> M <u>dans le repère R</u>**. On note $M = (\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{R}}$

Remarque. Quand on change de repère R, les coordonnées d'un vecteur ou d'un point changent.
Cependant, la plupart des formules vectorielles restent valables, si on les écrit dans un <u>même</u> repère R.

Définition. On note $\boldsymbol{R_0} = \left((0;0);\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ le **repère canonique**.

Il sert de référence pour les repères orthonormés.

Définition. Un **repère** $R = (O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ est **orthonormé** si $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux et de longueur 1 (<u>dans R_0</u>).

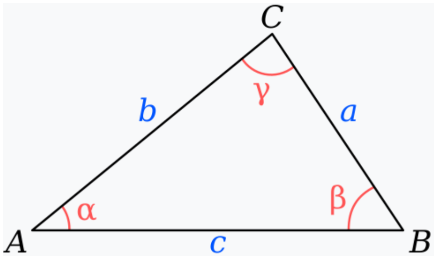


Exemples. Ici on considère R_0 comme le repère de référence.
Ci-contre, les repères R_0, R_1 et R_2 sont orthonormés.
Les longueurs ont donc la même mesure dans R_0, R_1, R_2.
R_3 n'est pas orthonormé car ses vecteurs sont de longueur 2 (en les mesurant dans R_0).
R_4 n'est pas orthonormé car ses vecteurs ne sont pas orthogonaux (au sens de R_0).

Propriété. Les longueurs et angles géométriques ne changent pas si on change de repère <u>orthonormé</u>

Produit scalaire géométrique

Théorème. Loi des cosinus, ou **formule d'Al-Kashi**
Dans un triangle ABC quelconque, on a, par exemple :
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$$
En posant $a = BC,\ b = AC,\ c = AB,\ \alpha = \widehat{BAC}$, on peut écrire :
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$



Exemple. Soit un triangle ABC tel que $AB = 8$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 50°$.
Calculer la longueur BC.
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 64 + 16 - 2 \times 8 \times 4 \times \cos(50°) \approx 38{,}86$ et donc $BC \approx 6{,}23$

Corollaire (Al-Kashi vectoriel). Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, $\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$

Rappel. Produit scalaire (algébrique). Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Rappel. (2ème identité remarquable). Pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

Propriété. Produit scalaire (géométrique). Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls dans un repère orthonormé. Alors :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$$
Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors le produit scalaire s'écrit $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$

Exemple. Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ tels que $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = 2$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 30°$.
Leur produit scalaire vaut $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

Corollaires. Soit $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On a $-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ puisque $-1 \leq \cos(.) \leq 1$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens $\Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = 1 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens opposé $\Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \pi \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = -1 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

Propriété (Interprétation géométrique). Soit trois points A, B, C (ou deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ qu'on fait partir d'un même point A). Alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \pm AB \times AH$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).
Le signe est $+$ si $\overrightarrow{AH}$ est de même sens que $\overrightarrow{AB}$, et $-$ sinon.

Exemple.

Propriété. Le produit scalaire est invariant par changement de repère orthonormé (Car les longueurs et angles géométriques le sont). Ainsi, dans tout repère orthonormé R, $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_R x'_R + y_R y'_R$

Corollaire. Dans tout repère orthonormé $R = (O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$,
Les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}$ dans R peuvent s'obtenir en calculant $x_{\vec{v}} = \vec{v} \cdot \vec{\imath}$ et $y_{\vec{v}} = \vec{v} \cdot \vec{\jmath}$.
Les coordonnées d'un point M dans R peuvent s'obtenir en calculant $x_M = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{\imath}$ et $y_M = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{\jmath}$.

Exemple.

Méthode. Pour déterminer la composante d'un vecteur $\vec{v}$ dans une direction donnée, on « projette » sur un vecteur directeur *unitaire* $\vec{u}$ dans la direction souhaitée. (On calcule $\vec{v} \cdot \vec{u}$)

Exemple. Une piste de ski est représentée par une droite qui descend avec une pente de $45°$.
La piste est donc dirigée par le vecteur unitaire $\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos(-45°) \\ \sin(-45°) \end{pmatrix}$. Un skieur de 70 kg, subit son poids

comme une force $\vec{F}$ d'environ 700 N vers le bas, donc $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -700 \end{pmatrix}$. La composante du poids du skieur le long de la piste est donc $\vec{F} \cdot \vec{u} = (-700)(\sin(-45°)) = 700\sin(45°) \approx 500$ N.