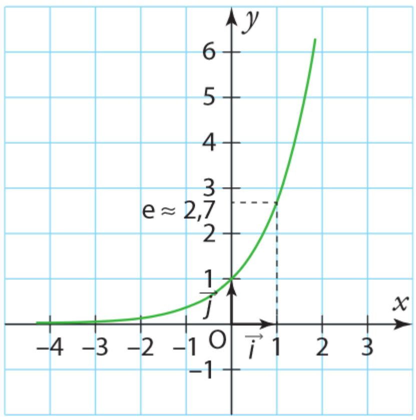
Fonction exponentielle



Propriété (admise). Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et $f' = f$

Définition. Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**. On la note **exp.** Sa courbe représentative est représentée ci-contre

Propriétés. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\exp' = \exp$ La dérivée de l'exponentielle est elle-même.
$\exp(0) = 1$

Notation exponentielle. Les propriétés de l'exponentielle sont similaires à celles des puissances. Pour cette raison on préfère la notation e^x plus compacte que $\exp(x)$.

Définition. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $e^x = \exp(x)$
Définition. Le nombre e est l'image de 1 par la fonction exponentielle. $e = e^1 = \exp(1) \approx 2{,}718\ldots$

Hypothèse. Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

Propriété. $e^{x+y} = e^x \times e^y$
Exemple. Simplifier $e^5 \times e^3$
$e^5 \times e^3 = e^{5+3} = e^8$

Propriété. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
Exemple. Simplifier $\frac{1}{e^{-3}}$
$\frac{1}{e^{-3}} = e^{-(-3)} = e^3$
Remarque. $e^{-1} = \frac{1}{e}$

Propriété. $e^{x-y} = e^x \times e^{-y} = \frac{e^x}{e^y}$

Exemple. Simplifier $\frac{e^7}{e^{-3}}$
$\frac{e^7}{e^{-3}} = e^{7-(-3)} = e^{10}$

Propriété. $(e^x)^y = e^{xy}$
Exemple. Simplifier $(e^{-2x})^3$
$(e^{-2x})^3 = e^{(-2x)(3)} = e^{-6x}$

Propriété. $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$ plus généralement $\sqrt[n]{e} = e^{\frac{1}{n}}$
Exemple. Simplifier $\sqrt{e^{4x}}$
$\sqrt{e^{4x}} = (e^{4x})^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\times 4x} = e^{2x}$

Propriété. $e^x > 0$

Preuve. $e^x = e^{2\times\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0$ car un carré est ≥ 0.
De plus, s'il existait $x \in \mathbb{R}$ tel que $e^x = 0$, on aurait $1 = e^0 = e^{x-x} = e^x e^{-x} = 0$. Absurde, donc $e^x > 0$.

Propriété. $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété. $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
Exemple. Résoudre l'équation $(E) \Leftrightarrow e^{2x+3} = e^{-3x}$
$(E) \Leftrightarrow 2x + 3 = -3x \Leftrightarrow 5x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}$

Propriété. $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
Exemple. Résoudre l'inéquation $(I) \Leftrightarrow e^{3x} < e^9$
$(I) \Leftrightarrow 3x < 9 \Leftrightarrow x < \frac{9}{3} \Leftrightarrow x < 3$

Propriété. Si u est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors e^u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $(e^u)' = u' \times e^u$

Exemple. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-8x+2}$. Alors $f'(x) = -8e^{-8x+2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Propriétés. Variations d'une fonction exponentielle paramétrée par $k \in \mathbb{R}$

Si $k < 0$, $x \mapsto e^{kx}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Si $k > 0$, $x \mapsto e^{kx}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Remarque. A quoi sert la fonction exponentielle ? C'est une solution particulière de l'équation différentielle " $f' = f$ ". Les solutions d'une équation différentielle plus générale de la forme " $f' = af + b$ " où a, b sont des constantes, peuvent s'écrire à l'aide de la fonction exponentielle. On rencontre ce type d'équations différentielles en physique, en économie, en biologie, … Pour savoir manipuler leurs solutions, il suffit de savoir manipuler la fonction $x \mapsto e^x$.