Dérivation

Rappel : La pente d'une droite (non verticale) est le nombre relatif m qui indique de combien d'unités la droite monte (ou descend si $m < 0$) lorsqu'on avance d'une unité vers la droite.
La pente d'une droite d'équation « $y = mx + p$ » est son coefficient directeur m.

Idée : La dérivée d'une fonction en un point (de sa courbe) est la pente de la fonction en ce point.
La dérivée généralise la notion de pente à une fonction. Elle dépend du point. Elle n'existe pas toujours.
Plus précisément : On se place en un point d'abscisse a de la courbe représentative d'une fonction f.
Si en faisant un zoom infini sur le point, la courbe se déforme et devient une droite (non verticale), alors :
- Cette droite est appelée **tangente à la courbe représentative de f en a**.
- On dit que la fonction f est **dérivable en a**, (elle admet une dérivée en a)
- La **dérivée de la fonction f en a, notée $f'(a)$** est la pente de la tangente (à f en a).

La tangente est la droite passant par $A = \big(a; f(a)\big)$ et de coefficient directeur $f'(a)$.
L'équation de la tangente est : « $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ »

Définition. f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I.
Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée de la fonction f**,
la fonction $f': I \to \mathbb{R}: x \mapsto f'(x)$

Dérivées usuelles. A chaque ligne, f est définie et vaut l'expression de la colonne à gauche sur tout D_f. On déduit que f est dérivable sur $D_{f'}$, et $f'(x)$ vaut l'expression dans la dernière colonne sur tout $D_{f'}$.

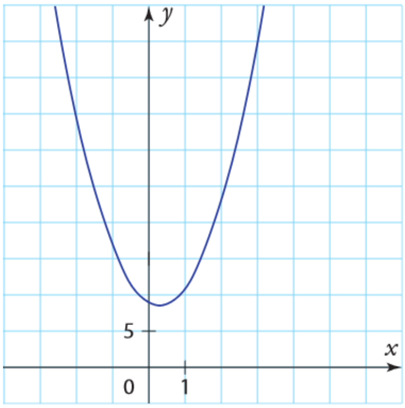
$f(x)$	Conditions	D_f	$D_{f'}$	$f'(x)$
c	$c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	1
ax	$a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
$ax + b$	$a, b \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
x^2		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
x^3		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$3x^2$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$		$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$
e^x		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x

Opérations sur les dérivées. A chaque ligne :
- On suppose que u et v sont dérivables.
- On déduit que f est dérivable sur I.

f	Conditions	f'
$u + v$	$u, v: I \to \mathbb{R}$	$u' + v'$
$u - v$	$u, v: I \to \mathbb{R}$	$u' - v'$
$a \times u$	$a \in \mathbb{R},\ u: I \to \mathbb{R}$	au'
$u \times v$	$u, v: I \to \mathbb{R}$	$u'v + v'u$
$\frac{1}{v}$	$v: I \to \mathbb{R}^*$	$\frac{-v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$u: I \to \mathbb{R},\ v: I \to \mathbb{R}^*$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$
e^u	$u: I \to \mathbb{R}$	$u'e^u$

Hypothèse. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I non trivial.
Théorème. Etudier les variations d'une fonction, c'est étudier le signe de sa dérivée.
f est croissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.
f est constante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 3x + 9$.
Par somme et produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour déterminer ses variations, on peut étudier le signe de f'.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5 \times 2x - 3 \times 1 + 0 = 10x - 3$
Or $10x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{10}$ et $10x - 3 > 0 \Leftrightarrow 10x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{10}$. Donc :



x	$-\infty$		$\frac{3}{10}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	$\frac{81}{10}$	$\nearrow$	

f atteint son minimum $\frac{81}{10}$ en $x = \frac{3}{10}$