

Inéquations - 1

A. Manipuler une inégalité

Propriétés.

- Ajouter ou soustraire un même nombre c aux deux côtés d'une inéquation, donne une inéquation équivalente

$$A \leq B \Leftrightarrow A + c \leq B + c$$

$$A \leq B \Leftrightarrow A - c \leq B - c$$

- Multiplier ou diviser un même nombre $c > 0$ aux 2 côtés d'une inéquation, donne une inéquation équivalente

$$A \leq B \Leftrightarrow A \times c \leq B \times c$$

$$A \leq B \Leftrightarrow \frac{A}{c} \leq \frac{B}{c}$$

- Multiplier ou diviser un même nombre $c < 0$ aux 2 côtés d'une inéquation, donne une inéquation équivalente

$$A \leq B \Leftrightarrow A \times c \geq B \times c$$

ATTENTION : Pour $c < 0$, il faut changer le sens de l'inéquation !

$$A \leq B \Leftrightarrow \frac{A}{c} \geq \frac{B}{c}$$

Exercice A1.

1. Soit x un nombre réel tel que $x \geq 4$. Que peut-on dire de $x + 6$?
2. Soit x un nombre réel tel que $x < 6$. Que peut-on dire de $\frac{x}{2}$?
3. Soit a un réel tel que $2 < a \leq 9$. Donner un encadrement de $3a$.
4. Soit z un réel tel que $3 \leq z \leq 4$. Donner un encadrement de $-2z$.
5. Soit x un réel tel que $-4 < x < 0$. Donner un encadrement de $\frac{x}{4}$.
6. Soit y un réel tel que $-5 < y < 2$. Donner un encadrement de $y - 3$.

Exercice A2. Marco affirme qu'il a une somme S entre 100 et 160 euros sur un compte en banque.

1. Ses parents rajoutent 30 euros sur ce compte. Que peut-il affirmer maintenant ?
2. Marco dépense 80 euros pour acheter un vélo d'occasion. Que peut-il dire de la somme restant sur son compte ?

B. Résoudre une inéquation

Méthode. Pour résoudre une inéquation simple du 1^{er} degré en x :

- Chaque **terme à droite et contenant x** est déplacé à gauche, en changeant son signe.
- Chaque **terme à gauche ne contenant pas x** est déplacé à droite, en changeant son signe.
- On simplifie à gauche en factorisant par x , et à droite par calcul.
- Si le terme restant à gauche, est de la forme $c x$, on *divise* par c les deux côtés pour isoler x .
 - **ATTENTION** : Si $c < 0$, on doit **inverser** le sens de l'inégalité.
- On donne la solution sous forme d'intervalle

ATTENTION : Cette méthode du 1^{er} degré ne marche pas si l'équation contient des $x^2, x^3, \frac{1}{x}, \sqrt{x}, \dots$

Exemple. Résoudre $(J) : 5x + 2 \leq 3x - 3$

$$(J) \Leftrightarrow$$

Exemple. Résoudre $(I) : -2x + 3 < 13 + 3x$

$$\begin{aligned} (I) &\Leftrightarrow -2x + 3 < 13 + 3x \\ &\Leftrightarrow -2x + 3 - 3x < 13 \\ &\Leftrightarrow -2x - 3x < 13 - 3 \\ &\Leftrightarrow (-2 - 3)x < 10 \\ &\Leftrightarrow -5x < 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{-5x}{-5} > \frac{10}{-5} \\ &\Leftrightarrow x > -2 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (I) est :

$$\mathcal{S}_I =] - 2; +\infty[$$

Inéquations - 2

Exercice B1. Résoudre les inéquations suivantes :

$$(I) : 4x - 8 < 16$$

$$(J) : -3x - 9 \leq 1$$

$$(K) : 5x + 7 \leq 27$$

$$(L) : 6x + 2 > 5x - 5$$

Exercice B2. Résoudre les inéquations suivantes :

$$(M) : -3(x + 4) - 24 \geq 0$$

$$(N) : 6x + 7 > 2(x - 8) - 9$$

$$(O) : \frac{x}{3} \leq 5x$$

$$(P) : \frac{x}{10} + 1 > \frac{x}{3}$$

C. Etudier le signe d'une expression

Méthode. Pour étudier le signe d'une expression $A(x)$

- On résout l'inéquation $A(x) \geq 0$ d'inconnue x .
- Dans l'ensemble solution, la fonction A est positive
- Ailleurs, la fonction A est négative.

Exemple. Etudier le signe de $A(x) = -2x - 6$.

$$A(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq 6 \Leftrightarrow x \leq \frac{6}{-2} \Leftrightarrow x \leq -3$$

$$\text{Sur }]-\infty; -3] \quad A(x) \geq 0.$$

$$\text{Sur }]-3; +\infty[\quad A(x) < 0.$$

Exercice C1. Etudier le signe de

$$B(x) = 4x + 8$$

$$C(x) = -5x + 7$$

Inéquations - 3

D. Déterminer la position d'une courbe par rapport à l'axe des abscisses

Méthode. Pour **déterminer la position relative de $A(x)$ par rapport à l'axe des abscisses**

- On résout l'inéquation $A(x) \geq 0$ d'inconnue x .
- Dans l'ensemble solution, la fonction A est au-dessus de l'axe des abscisses.
- Ailleurs, la fonction A est en-dessous de l'axe des abscisses.

Exemple. Etudier le signe de $A(x) = 3x - 7$.

$$A(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3x - 7 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 7 \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{3}$$

Sur $]\frac{7}{3}; +\infty[$ A est au dessus de l'axe des abscisses.

Sur $]-\infty; \frac{7}{3}]$ A est en dessous de l'axe des abscisses.

Exercice D1. Déterminer la position des fonctions suivantes par rapport à l'axe des abscisses.

$$D(x) = -3x + 12$$

$$E(x) = 10x + 4$$

E. Etudier la position relative de deux courbes

Méthode. Pour **déterminer la position relative de $A(x)$ par rapport à $B(x)$**

- On résout l'inéquation $A(x) \geq B(x)$ d'inconnue x .
- Dans l'ensemble solution, la fonction A est au-dessus de la fonction B .
- Ailleurs, la fonction A est en-dessous de la fonction B .

Exemple. Etudier la position relative des courbes :

$$A(x) = 4x + 9 \text{ et } B(x) = -x + 44$$

$$A(x) \geq B(x) \Leftrightarrow 4x + 9 \geq -x + 44$$

$$\Leftrightarrow 4x + x \geq 44 - 9$$

$$\Leftrightarrow 5x \geq 35$$

$$\Leftrightarrow x \geq 7$$

Sur $[7; +\infty[$, A est au dessus de B .

Sur $]-\infty; 7[$, A est en dessous de B .

Exercice E1. Etudier la position relative de

1) $C(x) = 50x + 10$ et $D(x) = 25x - 115$.

2) $E(x) = 15 - 2x$ et $F(x) = x + 14$

F. Résoudre un problème numérique avec une inéquation.