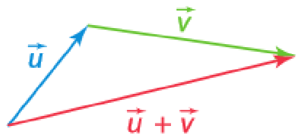
Géométrie repérée

Hypothèse. Dans tout ce qui suit, on se place dans un repère $(O; I; J)$.

Définition. Soit $\vec{u} = \binom{x}{y}$ un vecteur du plan. On représente le vecteur $\vec{u}$ par une flèche.
$\vec{u}$ représente la translation « se déplacer de x unités vers la droite/gauche et de y unités vers le haut/bas ».
Visuellement, deux vecteurs sont égaux s'ils pointent dans la même direction, et ont la même longueur.

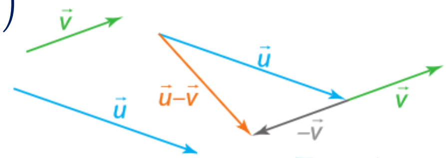
Définition. Soit $\vec{u} = \binom{x}{y}$ et $\vec{v} = \binom{x'}{y'}$. On pose $\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}} = \binom{x}{y} + \binom{x'}{y'} = \binom{x+x'}{y+y'}$.



Additionner des vecteurs, c'est appliquer des translations successivement.

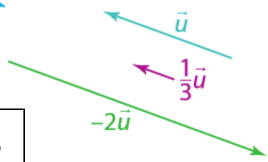
Définition. Soit $\vec{u} = \binom{x}{y}$ et $\vec{v} = \binom{x'}{y'}$. On pose $\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{v}} = \binom{x}{y} - \binom{x'}{y'} = \binom{x-x'}{y-y'}$

$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ donc soustraire un vecteur, c'est additionner son opposé.



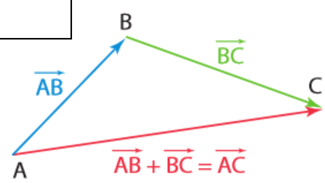
Définition. Soit $\vec{u} = \binom{x}{y}$ et k un réel. On pose $\boldsymbol{k}\vec{\boldsymbol{u}} = k\binom{x}{y} = \binom{kx}{ky}$

Multiplier un vecteur par $k \geq 0$, c'est multiplier sa longueur par k.
Multiplier un vecteur par $k < 0$, c'est multiplier sa longueur par $|k|$ et inverser son sens.



Définition. Etant donnés deux points $A = (x_A; y_A)$ et $B = (x_B; y_B)$ on note $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ représente la translation qui déplace notamment le point A au point B

Exemple. Si $A = (-1; 2)$ et $B = (0; -4)$, alors $\overrightarrow{AB} = \binom{0-(-1)}{-4-2} = \binom{1}{-6}$.



Propriété. **Relation de Chasles.**
Soit A, B, C trois points. Alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Attention, $AB + BC \geq AC$.

Définition. La **longueur d'un vecteur** $\vec{u} = \binom{x}{y}$, notée $\|\vec{\boldsymbol{u}}\|$ et lue « **norme de $\vec{\boldsymbol{u}}$** » est $\|\vec{\boldsymbol{u}}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Définition. La **longueur d'un segment** $[AB]$ est $\boldsymbol{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| = \left\|\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Exemple. Soit $\vec{u} = \binom{3}{-4}$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$. $\vec{u}$ est de longueur 5.

Définition. M est le **milieu d'un segment** $[AB]$ ssi $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
Propriété. Les coordonnées du milieu M d'un segment $[AB]$ sont $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

Exemple. Si $A = (3; 5)$ et $B = (9; -1)$ alors le milieu de $[AB]$ est le point $M = \left(\frac{3+9}{2}; \frac{5+(-1)}{2}\right) = (6; 2)$

Définition. Une **équation** est l'expression d'une égalité, par exemple « $2y^2 - 7x = 4$ ».
Définition par l'exemple. Un point $(2; -3)$ **vérifie l'équation** « $2y^2 - 7x = 4$ » car $2(-3)^2 - 7 \times (2) = 4$

Exemples. Le point $(2; 3)$ vérifie aussi l'équation car $2 \times (3)^2 - 7 \times (2) = 4$
Le point $(5; 1)$ ne vérifie pas l'équation car $2 \times (1)^2 - 7 \times (5) = -33 \neq 4$.

Remarque. Une équation à *deux* variables réelles, correspond donc toujours à un ensemble de points du *plan* : L'ensemble de tous les points qui rendent l'équation vraie.

Propriété. Toute droite du plan d peut être décrite comme l'ensemble des points $(x; y)$ du plan vérifiant une équation de la forme « $ax + by + c = 0$ » où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et a et b ne sont pas tous les deux nuls.
Définition. L'expression « $ax + by + c = 0$ » est une **équation cartésienne de la droite $\boldsymbol{d}$.**

Remarque. Un point $M = (x; y)$ du plan vérifie : $M \in d \iff ax + by + c = 0$

Idée. 2 vecteurs non nuls sont colinéaires s'ils sont alignés dans le même sens ou dans des sens opposés
Définition. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** ssi il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Exemple. $\binom{3}{2}$ et $\binom{-9}{-6}$ sont colinéaires car $\binom{-9}{-6} = -3\binom{3}{2}$. (ou ce qui revient au même $\binom{3}{2} = -\frac{1}{3}\binom{-9}{-6}$)

Idée. Un vecteur directeur d'une droite, est un vecteur aligné avec la droite dans un sens ou l'autre.
Définition. $\vec{u}$ est un **vecteur directeur de la droite** $(\boldsymbol{AB})$ ssi $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Définition. Le **déterminant** de deux vecteurs $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ est $\mathbf{det}(\vec{u};\vec{v})=xy'-x'y$.

Exemple. Si $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, alors $\det(\vec{u};\vec{v})=(3)(-1)-(1)(2)=-3-2=-5$.

Propriété. Dans un repère orthonormé, l'aire du parallélogramme formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut $|\det(\vec{u};\vec{v})|$

Propriété. Deux vecteurs sont colinéaires ssi leur déterminant est nul. (dans n'importe quel repère)

Exemple. $\det\left(\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-9\\-6\end{pmatrix}\right)=(3)(-6)-(2)(-9)=-18+18=0$ donc $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-9\\-6\end{pmatrix}$ sont bien colinéaires.

Propriété. Trois points distincts A, B et C sont alignés ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ssi $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=0$.

Exemple. Les points $A=(1;3)$, $B=(2;6)$ et $C=(3;9)$ sont-ils alignés ?

$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\det\left(\begin{pmatrix}2-1\\6-3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3-1\\9-3\end{pmatrix}\right)=\det\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}\right)=1\times 6-2\times 3=0$. Donc A, B et C sont alignés.

Propriété. Un vecteur directeur d'une droite d d'équation cartésienne « $ax+by+c=0$ » est $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Exemple. La droite d'équation cartésienne « $4x-5y+2=0$ » admet comme vecteur directeur $\vec{u}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$.

Propriété. Deux droites d'équations cartésiennes « $ax+by+c=0$ » et « $a'x+b'y+c'=0$ » sont parallèles ssi $\det\left(\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}\right)=0$ (Leurs vecteurs directeurs sont colinéaires)

Exemple. Les droites $3x+2y-5=0$ et $-6x-4y=0$ sont parallèles car $\det\left(\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}\right)=0$

Remarque. Deux droites (AB) et (MN) sont parallèles ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires ssi $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{MN}\right)=0$.

Propriété. Etant donnés un point A et un vecteur $\vec{u}$ non nul, il existe une unique droite d passant par le point A et ayant pour vecteur directeur $\vec{u}$.

Exemple. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A=(-1;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. Soit $M=(x;y)$ un point du plan.

$M\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\vec{u} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u}\right)=0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{pmatrix}x+1\\y-3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right)=0 \Leftrightarrow (x+1)(1)-(y-3)(-2)=0$

$M\in d \Leftrightarrow x+1+2y-6=0 \Leftrightarrow x+2y-5=0$. Donc une équation de d est $x+2y-5=0$.

Déf. « $\begin{cases}ax+by+c=0\\a'x+b'y+c'=0\end{cases}$ » est un **système linéaire de 2 équations à 2 inconnues.** $a,b,c,a',b',c'\in\mathbb{R}$

Théorème. Un tel système a : soit une seule solution, soit aucune solution, soit une infinité de solutions. Résoudre un tel système revient à chercher les coordonnées du point d'intersection, s'il y en a un, des deux droites dont les équations sont celles du système. On le résout par substitution ou par combinaison.

- Le système admet un seul couple solution ssi les deux droites sont sécantes ($\det\left(\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}\right)\neq 0$)
- Le système admet aucune solution ssi les deux droites sont parallèles non confondues.
- Le système admet une infinité de solutions ssi les deux droites sont parallèles confondues.

Propriété. Equation cartésienne d'un cercle.
Le cercle C de centre le point $(a;b)$, de rayon $r>0$ admet pour équation « $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ »

Exemple. Une équation du cercle de centre $(1;-2)$ et de rayon 3 est $(x-1)^2+(x+2)^2=9$.

Exemple. $(x-1)^2+(x+2)^2=-1$ n'est pas un cercle. L'équation n'est jamais vérifiée car un carré est ≥0

Exemple. Déterminer l'ensemble des points du plan vérifiant l'équation (E) : $x^2+6x+y^2-4y=3$.

On met sous forme canonique $x^2+6x=(x+3)^2-9$. De même $y^2-4y=(y-2)^2-4$. Ainsi :

$(E)\Leftrightarrow (x+3)^2-9+(y-2)^2-4=3 \Leftrightarrow (x+3)^2+(y-2)^2-13=3 \Leftrightarrow \left(x-(-3)\right)^2+(y-2)^2=16$

Donc l'ensemble cherché est un cercle de centre $(-3;2)$ et de rayon $\sqrt{16}=4$