Taux et coefficient multiplicateur moyen

On suppose qu'une quantité passe d'une valeur initiale V_i à une valeur finale V_f.
Définition. **Le taux d'évolution** est $\boldsymbol{t} = \frac{V_f - V_i}{V_i}$

Exemple. La population d'une ville passe de $55\,000$ à $74\,250$ habitants.
Le **taux d'évolution** de cette population est $t = \frac{74\,250 - 55\,000}{55\,000} = \frac{19\,250}{55\,000} = 0{,}35 = 35\ \%$.
On dit que « la population de la ville a augmenté de $35\ \%$ ».

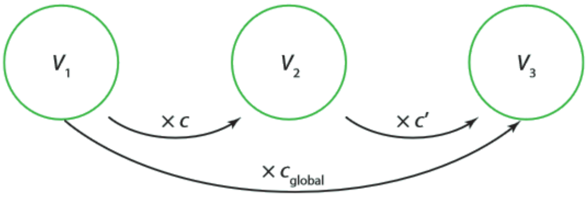
Propriété. $V_f = V_i \times (1 + t)$
Exemple. Dans l'exemple précédent on a bien $55\,000 \times (1 + 0{,}35) = 55\,000 \times 1{,}35 = 74\,250$

Définition. $c = 1 + t$ est appelé **coefficient multiplicateur.** On a donc $V_f = c \times V_i$
Pour appliquer une hausse (ou une baisse), on multiplie par le coefficient multiplicateur.
Attention on ne multiplie pas par le taux.

Exemple. Un salarié touchant 2000 € par mois est augmenté de 17 %. Quel est son nouveau salaire?
Le taux d'évolution de son salaire est $t = \frac{17}{100} = 0{,}17$. Son nouveau salaire est $(1 + 0{,}17) \times 2\,000 = 2\,340$ €.
Le **coefficient multiplicateur** est $c = 1{,}17$.
Nouveau salaire = Ancien salaire × coeff. multiplicateur.

Propriété et définitions. **Evolutions successives**.
Si on a une évolution d'une valeur V_1 à une valeur V_2 suivie d'une autre évolution de la valeur V_2 à V_3 :

Le coefficient multiplicateur global est le coefficient multiplicateur entre V_1 et V_3.
Il vaut $c_G = c_1 \times c_2$.
Le taux d'évolution global vaut alors $t_G = c_G - 1$



Exemple. Le nombre d'abonnés d'un journal en ligne augmente de 30 % puis baisse de 10 %.
Il est donc multiplié par 1,3 puis par 0,9. Alors $c_G = 1{,}3 \times 0{,}9 = 1{,}17$.
Le taux d'évolution global est donc $t_G = 1{,}17 - 1 = 0{,}17 = 17\ \%$.
Le nombre d'abonnés a donc globalement augmenté de 17 %. (Il a été globalement multiplié par $1{,}17$).

Pour 2 évolutions, le coefficient multiplicateur moyen vaut $c_M = (c_G)^{\frac{1}{2}}$
Le taux d'évolution moyen vaut alors $t_M = c_M - 1$

Exemple. Sur l'exemple précédent, le coefficient moyen est $C_M = (1{,}17)^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}082$
Donc le taux moyen est $t_M \approx 0{,}082 = 8{,}2\ \%$.
Une hausse de 30 % suivie d'une baisse de 10% équivaut donc à : deux hausses moyennes de $8{,}2\ \%$.

Pour n évolutions, le coefficient multiplicateur global est le coefficient multiplicateur entre V_1 et V_n.
Il vaut $c_G = c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n$
Le taux d'évolution global vaut alors $t_G = c_G - 1$

Pour n évolutions, le coefficient multiplicateur moyen vaut $c_M = (c_G)^{\frac{1}{n}}$
Le taux d'évolution moyen vaut alors $t_M = c_M - 1$