Géométrie repérée

Définition. Etant donnés un vecteur $\vec{u}$, et une droite d dont A et B sont deux points distincts, $\vec{u}$ est un **vecteur directeur de la droite** d ssi $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Remarque. Deux vecteurs directeurs d'une même droite, sont colinéaires.

Propriété. Un vecteur directeur d'une droite d d'équation cartésienne « $ax+by+c=0$ » est $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Exemple. La droite d'équation cartésienne « $4x-5y+2=0$ » admet comme vecteur directeur $\vec{u}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$.

Propriété. Etant donnés un point A et un vecteur $\vec{u}$ non nul, il existe une unique droite d passant par le point A et ayant pour vecteur directeur $\vec{u}$.

Exemple. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A=(-1;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. Soit $M=(x;y)$ un point du plan.

$M\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\vec{u} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{pmatrix}x+1\\y-3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right)=0 \Leftrightarrow (x+1)(1)-(y-3)(-2)=0$

$M\in d \Leftrightarrow x+1+2y-6=0 \Leftrightarrow x+2y-5=0$. Donc une équation de d est « $x+2y-5=0$ ».

Définition. Vecteur normal
Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à une droite d s'il est orthogonal à tout vecteur directeur de cette droite.

Remarque. Deux vecteurs normaux à une même droite, sont colinéaires.

Propriété. Un vecteur normal à une droite d d'équation cartésienne « $ax+by+c=0$ » est $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Exemple. La droite d'équation cartésienne « $4x-5y+2=0$ » admet comme vecteur normal le vecteur $\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$ et comme vecteur directeur $\vec{u}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$. On remarque qu'on a bien $\vec{n}\cdot\vec{u}=4\times5-5\times4=0$.

Propriété. Etant donnés un point A et un vecteur $\vec{n}$ non nul, il existe une unique droite d passant par le point A et ayant pour vecteur normal $\vec{n}$.

Exemple. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par $A=(-2;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$. Soit $M=(x;y)$ un point du plan.

$M\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (x+2)\times2+(y-3)\times5=0$

$M\in d \Leftrightarrow 2x+4+5y-15=0 \Leftrightarrow 2x+5y-11=0$ Donc une équation de d est « $2x+5y-11=0$ ».

Propriété. Equation cartésienne d'un cercle.
Le cercle C de centre le point $A=(a;b)$, de rayon $r>0$ admet pour équation « $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ »

Démonstration. Soit $M=(x;y)$ un point du plan.

$M\in C \Leftrightarrow AM=r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

Exemple. Une équation du cercle de centre $A=(1;-2)$ et de rayon 3 est $(x-1)^2+(x+2)^2=9$.