Raisonnement logique

Définition. Le contexte est l'ensemble des propositions et variables connues. C'est ce que l'on sait.
Quand on démontre quelque chose, on peut l'ajouter au contexte pour l'utiliser par la suite.

Définition. **Le but** est la proposition qu'on cherche à démontrer. C'est ce que l'on veut.

Définition. **Une preuve ou démonstration** est une suite de phrases visant à démontrer un but donné, à partir d'un contexte donné. Ces phrases peuvent temporairement modifier le contexte, ou modifier le but. Ces phrases consistent en général à appliquer des règles de déductions ou des théorèmes précédemment établis.

Intentions. Ce document cherche à répondre aux questions :

- Que se passe-t-il dans la tête d'un mathématicien ou d'un logicien quand il raisonne ?
- Quel ensemble de règles suffit à traiter toute situation logique ?
- Comment ces règles fonctionnent elles ? Qu'ai-je le droit de faire ?
- Comment faire pour rendre son raisonnement plus systématique et vérifiable ?

Limites. Ce document ne cherche pas à répondre aux questions:

- Comment raisonner efficacement en minimisant les erreurs ?
- Quelles sont les stratégies ou méthodes utiles pour trouver une démonstration ?
- Comment rédiger efficacement une démonstration dans un style informel ?
- Qu'est-ce que la vérité ? Quelles sont les tables de vérité des connecteurs logiques ?

Remarques. Dans ce document, chaque démonstration est organisée en trois colonnes : une pour le contexte, une pour le but, et une pour la rédaction.
Les deux premières colonnes ne sont en pratique jamais explicitées, mais montrent ce qui se passe dans la tête d'un logicien lorsqu'il raisonne.
La troisième colonne fournit une rédaction de la démonstration, complète mais sans doute trop mécanique et trop détaillée pour être agréable à lire pour un lecteur humain.
Dans les exemples donnés, le sens de phrases n'a aucune importance, seule la manipulation syntactique de suites de symboles est utilisée pour faire des déductions.
C'est ce qui donne sa force à la logique : Une machine mécanique et donc impartiale peut être construite pour vérifier automatiquement la validité des raisonnements.

Règles de la logique propositionnelle.

Règle : introduction de et. Sachant « P » ; « Q » on déduit « P et Q »

Exemple. Sachant : « il pleut » ; « il y a des nuages », démontrer : « il pleut et il y a des nuages ».

Contexte : (On sait)	But : (On veut)	Démonstration :
il pleut ; il y a des nuages		Montrons : il pleut et il y a des nuages.
il pleut ; il y a des nuages	il pleut et il y a des nuages	D'après : introduction de et : il pleut et il y a des nuages
il pleut ; il y a des nuages ; il pleut et il y a des nuages	~~il pleut et il y a des nuages~~	On a montré : il pleut et il y a des nuages
il pleut ; il y a des nuages ; il pleut et il y a des nuages		

Règle : élimination de et à gauche. Sachant « P et Q » on déduit « P ».

Règle : élimination de et à droite. Sachant « P et Q » on déduit « Q ».

Exemple. Sachant : « il pleut et le sol est mouillé », démontrer : « le sol est mouillé et il pleut ».

Contexte : (On sait)	But : (On veut)	Démonstration :
il pleut et le sol est mouillé		Montrons : le sol est mouillé et il pleut
il pleut et le sol est mouillé	le sol est mouillé et il pleut	D'après : élimination de et à droite : le sol est mouillé
il pleut et le sol est mouillé ; le sol est mouillé	le sol est mouillé et il pleut	D'après : élimination de et à gauche : il pleut
il pleut et le sol est mouillé ; le sol est mouillé ; il pleut	le sol est mouillé et il pleut	D'après : introduction de et : le sol est mouillé et il pleut
il pleut et le sol est mouillé ; le sol est mouillé ; il pleut ; le sol est mouillé et il pleut	~~le sol est mouillé et il pleut~~	On a montré : le sol est mouillé et il pleut
il pleut et le sol est mouillé ; le sol est mouillé ; il pleut ; le sol est mouillé et il pleut		

Remarque. On vient en fait de montrer la commutativité du et (dire P et Q revient à dire Q et P). On voit que la validité d'un argument logique ne dépend absolument pas du fond, mais seulement de sa forme.

Règle : introduction de si-alors. Ayant : « On a montré : Q » dans un paragraphe indenté sous une clause « Supposons : P », on déduit « Si P alors Q ».
En mathématiques, on utilise aussi le symbole d'implication $\Rightarrow$ pour signifier si-alors. On écrit « $P \Rightarrow Q$ »

Exemple. Sachant « le sol est sec », démontrer : « si il fait beau alors le sol est sec et il fait beau ».

Contexte : (On sait)	But : (On veut)	Démonstration :
le sol est sec		Montrons : si il fait beau alors (le sol est sec et il fait beau)
le sol est sec	si il fait beau alors (le sol est sec et il fait beau)	Supposons : il fait beau
le sol est sec ; il fait beau	si il fait beau alors (le sol est sec et il fait beau)	Montrons : le sol est sec et il fait beau
le sol est sec ; il fait beau	le sol est sec et il fait beau > si il fait beau alors (le sol est sec et il fait beau)	D'après : introduction de et : le sol est sec et il fait beau
le sol est sec ; il fait beau ; le sol est sec et il fait beau	~~le sol est sec et il fait beau~~ > si il fait beau alors (le sol est sec et il fait beau)	On a montré : le sol est sec et il fait beau
le sol est sec; ~~il fait beau ; le sol est sec et il fait beau~~	si il fait beau alors (le sol est sec et il fait beau)	D'après : introduction de si-alors : si il fait beau alors (le sol est sec et il fait beau)
le sol est sec ; si il fait beau alors (le sol est sec et il fait beau)	~~si il fait beau alors (le sol est sec et il fait beau)~~	On a montré : si il fait beau alors (le sol est sec et il fait beau)
le sol est sec ; si il fait beau alors (le sol est sec et il fait beau)		

Remarque. En quittant une clause, on efface les connaissances acquises qui dépendent de la supposition.

Exemple. Démontrer : « si j'ai faim alors j'ai faim. ».

Contexte : (On sait)	But : (On veut)	Démonstration :
		Montrons : si j'ai faim alors j'ai faim
	si j'ai faim alors j'ai faim	Supposons : j'ai faim
j'ai faim	si j'ai faim alors j'ai faim	Montrons : j'ai faim
j'ai faim	~~j'ai faim~~ > si j'ai faim alors j'ai faim	On a montré : j'ai faim
	si j'ai faim alors j'ai faim	D'après : introduction de si-alors : si j'ai faim alors j'ai faim
si j'ai faim alors j'ai faim	~~si j'ai faim alors j'ai faim~~	On a montré : si j'ai faim alors j'ai faim
si j'ai faim alors j'ai faim		

Règle : élimination de si-alors. Sachant « Si P alors Q » ; « P », on déduit « Q ».

Exemple. Sachant « si il pleut alors il y a des nuages » ; « il pleut », démontrer : « il y a des nuages ».

Contexte : (On sait)	But : (On veut)	Démonstration :
si il pleut alors il y a des nuages ; il pleut		Montrons : il y a des nuages
si il pleut alors il y a des nuages ; il pleut	il y a des nuages	D'après : élimination de si-alors : il y a des nuages
si il pleut alors il y a des nuages ; il pleut ; il y a des nuages	~~il y a des nuages~~	On a montré : il y a des nuages
si il pleut alors il y a des nuages ; il pleut ; il y a des nuages		

Règle : introduction de ou à gauche. Sachant « P », on déduit « P ou Q ».

Règle : introduction de ou à droite. Sachant « Q », on déduit « P ou Q ».

Exemple. Sachant « il pleut » ; « le sol est mouillé », montrer : « il fait beau ou le sol est mouillé ».

Contexte : (On sait)	But : (On veut)	Démonstration :
il pleut ; le sol est mouillé		Montrons : il fait beau ou le sol est mouillé
il pleut ; le sol est mouillé	il fait beau ou le sol est mouillé	D'après : introduction de ou à droite : il fait beau ou le sol est mouillé
il pleut ; le sol est mouillé ; il fait beau ou le sol est mouillé	~~il fait beau ou le sol est mouillé~~	On a montré : il fait beau ou le sol est mouillé
il pleut ; le sol est mouillé ; il fait beau ou le sol est mouillé		

Règle : élimination de ou.
Sachant : « P ou Q » ; « Si P alors R » ; « Si Q alors R », on déduit : « R ».

Exemple. Sachant « il fait jour ou il fait nuit » ; « si il fait nuit alors le feu brûle » ; « si il fait jour alors le feu brûle », démontrer « le feu brûle ».

Contexte : (On sait)	But : (On veut)	Démonstration :
il fait jour ou il fait nuit ; si il fait nuit alors le feu brûle ; si il fait jour alors le feu brûle		Montrons : le feu brûle
il fait jour ou il fait nuit ; si il fait nuit alors le feu brûle ; si il fait jour alors le feu brûle	le feu brûle	D'après : élimination de ou : le feu brûle
il fait jour ou il fait nuit ; si il fait nuit alors le feu brûle ; si il fait jour alors le feu brûle; le feu brûle	~~le feu brûle~~	On a montré : le feu brûle
il fait jour ou il fait nuit ; si il fait nuit alors le feu brûle ; si il fait jour alors le feu brûle; le feu brûle		

Règle : introduction de la contradiction (Principe de non contradiction) :
Sachant : « P » ; « non P », on déduit « contradiction ».
Cette règle peut être comprise comme un cas particulier de l'élimination de si-alors en interprétant « non P » comme synonyme de : « Si P alors contradiction ».

Exemple. Sachant : « Il fait chaud » ; « Il ne fait pas chaud », démontrer : « contradiction ».

Contexte : (On sait)	But : (On veut)	Démonstration :
il fait chaud ; non (il fait chaud)		Montrons : contradiction
il fait chaud ; non (il fait chaud)	contradiction	D'après : principe de non contradiction : contradiction
il fait chaud ; non (il fait chaud) ; contradiction	~~contradiction~~	On a montré : contradiction
il fait chaud ; non (il fait chaud) ; contradiction		

Règle : élimination de la contradiction (Principe d'explosion) :
Sachant « contradiction », on déduit n'importe quelle proposition « P ».

Exemple. Sachant : « les poules n'ont pas de dents », démontrer : « si les poules ont des dents alors je suis la reine d'Angleterre »

Contexte : (On sait)	But : (On veut)	Démonstration :
non (les poules ont des dents)		Montrons : si les poules ont des dents alors je suis la reine d'Angleterre
non (les poules ont des dents)	si les poules ont des dents alors je suis la reine d'Angleterre	Supposons : les poules ont des dents
non (les poules ont des dents) ; les poules ont des dents	si les poules ont des dents alors je suis la reine d'Angleterre	Montrons : je suis la reine d'Angleterre
non (les poules ont des dents) ; les poules ont des dents	je suis la reine d'Angleterre > si les poules ont des dents alors je suis la reine d'Angleterre	D'après : principe de non contradiction : contradiction
non (les poules ont des dents) ; les poules ont des dents ; contradiction	je suis la reine d'Angleterre > …	D'après : principe d'explosion : je suis la reine d'Angleterre
non (les poules ont des dents) ; les poules ont des dents ; contradiction ; je suis la reine d'Angleterre	~~je suis la reine d'Angleterre~~ > …	On a montré : je suis la reine d'Angleterre
non (les poules ont des dents) ; ~~les poules ont des dents ; contradiction ; je suis la reine d'Angleterre~~	si les poules ont des dents alors je suis la reine d'Angleterre	D'après : introduction de si-alors : si les poules ont des dents alors je suis la reine d'Angleterre
non (les poules ont des dents) ; si les poules ont des dents alors je suis la reine d'Angleterre	~~si les poules ont des dents alors je suis la reine d'Angleterre~~	On a montré : si les poules ont des dents alors je suis la reine d'Angleterre
non (les poules ont des dents) ; si les poules ont des dents alors je suis la reine d'Angleterre		

Règle : introduction de non.
Sachant : « Si P alors contradiction », on déduit « non P »
Cette règle est redondante en interprétant « non P » comme synonyme de « Si P alors contradiction ».

Règle : élimination de non.
Sachant : « non P », on déduit « Si P alors contradiction ».
Cette règle est redondante en interprétant « non P » comme synonyme de « Si P alors contradiction ».

« non P » doit être compris comme « le contraire de la proposition P ».

Règle : Introduction de l'équivalence.
Sachant « Si P alors Q » ; « Si Q alors P », on déduit : « P équivaut à Q ».
Cette règle est redondante si on interprète « P équivaut à Q » par « (Si P alors Q) et (Si Q alors P) »

Règle : Elimination de l'équivalence à gauche. Sachant « P équivaut à Q », on déduit : « Si P alors Q »
Cette règle est redondante si on interprète « P équivaut à Q » par « (Si P alors Q) et (Si Q alors P) »

Règle : Elimination de l'équivalence à droite. Sachant « P équivaut à Q », on déduit : « Si P alors Q »
Cette règle est redondante si on interprète « P équivaut à Q » par « (Si P alors Q) et (Si Q alors P) »

En mathématiques, on utilise aussi le symbole ⇔ pour l'équivalence. On écrit « $P \Leftrightarrow Q$ ».
Donc : Avoir « $P \Leftrightarrow Q$ » revient à avoir « $P \Rightarrow Q$ » ; « $Q \Rightarrow P$ » c'est-à-dire « $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ »

Remarque : Les règles précédentes forment ce que l'on appelle la logique propositionnelle intuitionniste (ou constructiviste). Ajouter la règle suivante donne la logique classique.
Logique propositionnelle classique = Logique propositionnelle intuitionniste + principe du tiers exclus

Règle : Principe du tiers exclus. Sachant rien, on déduit « P ou non P ».

Exemple. Sachant « Si je dors, alors je respire » ; « Si je ne dors pas alors je respire », démontrer « je respire ».

Contexte : (On sait)	But : (On veut)	Démonstration :
si je dors alors je respire ; si non(je dors) alors je respire		Montrons : je respire.
si je dors alors je respire ; si non(je dors) alors je respire	je respire	D'après : principe du tiers exclus : je dors ou non (je dors)
si je dors alors je respire ; si non(je dors) alors je respire ; je dors ou non (je dors)	je respire	D'après : élimination de ou : je respire
si je dors alors je respire ; si non(je dors) alors je respire ; je dors ou non (je dors) ; je respire	~~je respire~~	On a montré : je respire.
si je dors alors je respire ; si non(je dors) alors je respire ; je dors ou non (je dors) ; je respire		

Règle : Raisonnement par l'absurde.
Sachant « Si non P alors contradiction » on déduit : « P »

Exemple. Sachant « si elle n'est pas pauvre alors elle dépense » ; « si elle dépense alors elle est pauvre » démontrer « elle est pauvre ».

Contexte : (On sait)	But : (On veut)	Démonstration :
si non (elle est pauvre) alors elle dépense ; si elle dépense alors elle est pauvre		Montrons : elle est pauvre
…	elle est pauvre	Supposons : non (elle est pauvre)
… ; non (elle est pauvre)	elle est pauvre	Montrons : contradiction
si non (elle est pauvre) alors elle dépense ; si elle dépense alors elle est pauvre ; non (elle est pauvre)	contradiction > elle est pauvre	D'après : élimination de si-alors : elle dépense
si non (elle est pauvre) alors elle dépense ; si elle dépense alors elle est pauvre ; non (elle est pauvre) ; elle dépense	contradiction > …	D'après : élimination de si-alors : elle est pauvre
…; non (elle est pauvre) ; elle dépense ; elle est pauvre	contradiction > …	D'après : principe de non contradiction : contradiction
… ; elle dépense ; elle est pauvre ; contradiction	~~contradiction~~ > …	On a montré : contradiction
si non (elle est pauvre) alors elle dépense ; si elle dépense alors elle est pauvre ; ~~non (elle est pauvre) ; elle dépense ; elle est pauvre ; contradiction~~	elle est pauvre	D'après : introduction de si-alors : si non (elle est pauvre) alors contradiction
… ; si non (elle est pauvre) alors contradiction	elle est pauvre	D'après : raisonnement par l'absurde : elle est pauvre
… ; elle est pauvre	~~elle est pauvre~~	On a montré : elle est pauvre
… ; elle est pauvre		

Remarque. Le raisonnement par l'absurde se déduit de la logique intuitionniste + principe du tiers exclus

Démonstration :
Hypothèse : Si non P alors contradiction
Montrons : P
Supposons : P
    Montrons : P
    On a montré : P
D'après : introduction de si-alors : Si P alors P (1)
Supposons : non P
    Montrons : P
    D'après : élimination de si-alors (sur l'hypothèse) : contradiction
    D'après : principe d'explosion : P
    On a montré : P
D'après : introduction de si-alors : Si non P alors P (2)
D'après : principe du tiers exclus : P ou non P (3)
D'après : élimination de ou sur (1),(2),(3) : P
On a montré : P

Remarque. Le principe du tiers exclus se déduit de la logique intuitionniste + raisonnement par l'absurde. Autrement dit, si on admet la logique intuitionniste, principe du tiers exclus et raisonnement par l'absurde sont équivalents, ajouter l'un ou l'autre, revient à ajouter les 2 et donne la logique classique.

Règle (introduction de la double négation). Sachant « P », on déduit « non (non P) ».
Cette règle est déduite en logique intuitionniste.

Règle (élimination de la double négation). Sachant « non (non P) », on déduit « P »
Cette règle est déduite en logique classique.

Remarque. En logique classique on a donc « $P \Leftrightarrow$ non (non P) »

Règles du calcul des prédicats.

Règle : introduction de pour-tout.

Ayant : « On a montré : $P(x)$ » dans un paragraphe indenté sous une clause : « Soit x », on déduit « Pour tout x, $P(x)$ ».

En mathématiques, on utilise le symbole ∀ pour signifier pour tout. On écrit « $\forall x, P(x)$ »

« Pour tout x, $P(x)$ » est à comprendre au sens : Toute chose x vérifie la propriété $P(x)$.

Exemple. Démontrer : « Tout homme grand est grand »

Contexte : (On sait)	But : (On veut)	Démonstration :
		Montrons : Pour tout h, si (h est un homme et h est grand) alors h est grand
	Pour tout h, si (h est un homme et h est grand) alors h est grand	Soit h (une chose)
h	Pour tout h, si (h est homme et h est grand) alors h est grand	Montrons : si (h est un homme et h est grand) alors h est grand
h	si (h est homme et h est grand) alors h est grand > …	Supposons : h est un homme et h est grand
h ; h est un homme et h est grand	si (h est homme et h grand) alors h est grand > …	Montrons : h est grand
h ; h est un homme et h est grand	h est grand > … > …	D'après : élimination de et à droite : h est grand
h ; h est un homme et h est grand ; h est grand	~~h est grand~~ > … > …	On a montré : h est grand
h ; ~~h est un homme et h est grand ; h est grand~~	si (h est homme et h grand) alors h est grand > …	D'après : introduction de si-alors : si (h est un homme et h est grand) alors h est grand
h ; si (h est un homme et h est grand) alors h est grand	~~si (h est homme et h grand) alors h est grand~~ > …	On a montré : si (h est un homme et h est grand) alors h est grand
~~h ; si (h est un homme et h est grand) alors h est grand~~	Pour tout h, si (h est homme et h est grand) alors h est grand	D'après : introduction de pour-tout : Pour tout h, si (h est homme et h grand) alors h est grand
Pour tout h, si (h est homme et h grand) alors h est grand	~~Pour tout h, si (h est homme et h est grand) alors h est grand~~	On a montré : Pour tout h, si (h est homme et h est grand) alors h est grand
Pour tout h, si (h est homme et h grand) alors h est grand		

Remarque. Quand on quitte une clause, on oublie les connaissances acquises dans cette clause.

Règle : élimination de pour-tout.

Connaissant un terme « t » et sachant « Pour tout x, $P(x)$ », on déduit « $P(t)$ »

Exemple. Connaissant « Socrate », et sachant « Socrate est un chat noir » ; « tout chat noir est rusé » démontrer « Socrate est rusé ».

Contexte : (On sait)	But : (On veut)	Démonstration :
Socrate ; Socrate est un chat noir ; Pour tout c, si c est un chat noir alors c est rusé		Montrons : Socrate est rusé
Socrate ; Socrate est un chat noir ; Pour tout c, si c est un chat noir alors c est rusé	Socrate est rusé	D'après : élimination de pour-tout : si Socrate est un chat noir alors Socrate est rusé
Socrate ; Socrate est un chat noir ; … ; si Socrate est un chat noir alors Socrate est rusé	Socrate est rusé	D'après : élimination de si-alors : Socrate est rusé
… ; Socrate est rusé	~~Socrate est rusé~~	On a montré : Socrate est rusé
… ; Socrate est rusé		

Règle : introduction de il-existe.
Connaissant un terme « t » et sachant « $P(t)$ », on déduit : « Il existe x, $P(x)$ »
En mathématiques, on utilise le symbole ∃ pour signifier il existe. On écrit « $\exists x, P(x)$ ».
« Il existe x, $P(x)$ » est à comprendre au sens : Il existe au moins une chose x vérifiant la propriété $P(x)$.

Règle : élimination de il-existe.
Sachant « Il existe x, $P(x)$ », on peut utiliser la règle suivante :
On écrit « D'après : élimination de il-existe : On choisit a tel que $P(a)$ », puis on ajoute la variable « a » et la proposition « $P(a)$ » au contexte.

Exemple. Sachant « Un être est aimé par tous » démontrer : « tout être aime quelqu'un ».

Contexte : (On sait)	But : (On veut)	Démonstration :
il existe y, pour tout x, x aime y		Montrons : pour tout x, il existe y, x aime y
il existe y, pour tout x, x aime y	pour tout x, il existe y, x aime y	Soit e (un être)
il existe y, pour tout x, x aime y ; e	…	Montrons : il existe y, e aime y
il existe y, pour tout x, x aime y ; e	il existe y, e aime y > …	D'après : élimination de il-existe : On choisit d tel que pour tout x, x aime d
… ; e ; d ; pour tout x, x aime d	il existe y, e aime y > …	D'après : élimination de pour-tout : e aime d
… ; e ; d ; … ; e aime d	il existe y, e aime y > …	D'après : introduction de il-existe : il existe y, e aime y
… ; e ; d ; … ; e aime d ; il existe y, e aime y	~~il existe y, e aime y~~ > …	On a montré : il existe y, e aime y
il existe y, pour tout x, x aime y ; ~~e ; d ; …~~	pour tout x, il existe y, x aime y	D'après : introduction de pour-tout : pour tout x, il existe y, x aime y
il existe y, pour tout x, x aime y ; pour tout x, il existe y, x aime y	~~pour tout x, il existe y, x aime y~~	On a montré : pour tout x, il existe y, x aime y
il existe y, pour tout x, x aime y ; pour tout x, il existe y, x aime y		

Remarque. Dans une formule « Pour tout x, $P(x)$ » ou « Il existe x, $P(x)$ » le x est une variable muette et peut être remplacé par n'importe quelle lettre (remplacer toutes les occurrences) sans changer le sens. Cela peut être commode pour bien distinguer les choses dans une démonstration. C'est ce qu'on a fait dans la démonstration ci-dessus.

Remarque. Le calcul des prédicats est donc constitué de 4 règles.

La logique intuitionniste = Logique propositionnelle intuitionniste + calcul des prédicats.
La logique classique = Logique propositionnelle classique + calcul des prédicats.

La logique classique que l'on vient d'énoncer s'appelle aussi: La logique du premier ordre.

Remarques supplémentaires sur le calcul des prédicats.

- Les règles montrent qu'il y a essentiellement deux façons de déclarer une variable dans le contexte :
* Déclaration universelle de variable : On écrit « Soit x ». (Cela indique qu'on va utiliser la règle d'introduction du pour-tout à la fin du paragraphe).
* Déclaration existentielle de variable : Sur application de la règle d'élimination du il-existe, on écrit « On choisit x tel que $P(x)$ » quand on sait que « il existe x, $P(x)$ » ce qui a pour effet d'ajouter « x » et « $P(x)$ » au contexte.

- On fait souvent une déclaration universelle et une supposition de manière fusionnée:
« Soit x tel que $P(x)$ » peut s'interpréter par : « Soit x. Supposons $P(x)$. ».
« Soit $x \in E$ » peut s'interpréter par « Soit x. Supposons $x \in E$. ».
« Soit un chat c. » peut s'interpréter par « Soit c. Supposons c est un chat. ».

- Attention, « Il existe x tel que $P(x)$ » signifie seulement « Il existe x, $P(x)$ », il n'y a pas de supposition.
« Il existe $x \in E$, $P(x)$ » peut s'interpréter par « Il existe x, $x \in E$ <u>et</u> $P(x)$ »
« Il existe un chat x, $P(x)$ » peut s'interpréter par « Il existe x, x est un chat <u>et</u> $P(x)$ »

- Beaucoup écrivent aussi « Soit x tel que $P(x)$ » lorsqu'ils font en fait une déclaration existentielle de variable, ce qui n'est pas recommandable car il y a risque de confusion avec la déclaration universelle + supposition.
Il vaut mieux déclarer existentiellement avec l'expression bien distincte « On <u>choisit</u> x tel que $P(x)$ ».

- Dans une démonstration, l'expression « On <u>note</u> x le $P(x)$ » est une déclaration existentielle dans un cadre restreint. Le verbe noter est employé pour indiquer que l'objet x choisi satisfaisant la propriété $P(x)$ est unique.

- Dans une démonstration, l'expression « On <u>pose</u> $x = \cdots$ » est une déclaration existentielle dans un cadre plus restreint. Le verbe poser est employé pour indiquer que l'objet x choisi est défini par une égalité. Définir par une égalité entraîne automatiquement l'unicité de l'objet.

Axiomes de l'égalité

Les règles suivantes servent à faire des déductions avec le symbole d'égalité noté $=$.

Règle réflexivité de $=$. Connaissant un terme « a », on déduit « $a = a$ ».

Règle de Leibniz. Connaissant les termes « a » ; « b » et sachant « $a = b$ » ; « $P(a)$ », on déduit « $P(b)$ ».
Autrement dit, deux termes égaux satisfont exactement aux mêmes propriétés.

Règle de symétrie de $=$. Connaissant les termes « a » ; « b », et sachant « $a = b$ », on déduit « $b = a$ ».
Remarque. Cette règle découle de la règle de Leibniz et de la réflexivité de $=$.
En effet, connaissant les termes « a » ; « b », et sachant « $a = b$ », si on choisit pour $P(x)$ l'expression « $x = a$ », on a bien « $a = a$ » càd « $P(a)$ » par réflexivité, donc on en déduit « $P(b)$ » càd « $b = a$ ».

Règle de transitivité de $=$. Connaissant les termes « a » ; « b » ; « c » et sachant « $a = b$ » ; « $b = c$ », on déduit « $a = c$ ».
Remarque. Cette règle découle de la règle de Leibniz.
On choisit pour $P(x)$ l'expression « $a = x$ ». Comme « $a = b$ » on a « $P(b)$ ». De plus on a « $b = c$ ». Donc on a « $P(c)$ » c'est-à-dire « $a = c$ ».