Probabilités

Définition. Une **expérience aléatoire** est une expérience dont les issues sont connues sans que l'on puisse déterminer laquelle sera réalisée.

Définition. **L'univers** d'une expérience aléatoire est l'ensemble des issues possibles. On le note $\boldsymbol{\Omega}$.

Exemple. On lance une pièce de monnaie et on regarde de quel côté elle tombe. Les résultats sont Pile et Face. C'est une expérience aléatoire dont l'univers est $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}$.

Définition. Donner **une loi de probabilité** associée à une expérience aléatoire, c'est donner une probabilité (un nombre entre 0 et 1) à chaque issue, de sorte que la somme des probabilités soit égale à 1.
On représente une loi de probabilité avec un tableau à deux lignes (issues et probabilités).

Exemple. Une étude menée sur la répartition des groupes sanguins en France a montré que 45 % de la population est du groupe A, 9 % du groupe B, 4 % du groupe AB et 42 % du groupe O.
On choisit au hasard une personne en France et on note son groupe sanguin. La loi de probabilité est :

Issue	A	B	AB	O
Probabilité	$0{,}45$	$0{,}09$	$0{,}04$	$0{,}42$

Définition. Une loi est dite **équirépartie** (ou **équiprobable**) lorsque chaque issue a la même probabilité de se réaliser, qui est alors $\frac{1}{n}$ où n est le nombre total d'issues.

Exemple. On lance un dé cubique <u>équilibré</u> et on observe le résultat. Chaque issue a une chance sur 6 de se réaliser.

Définition. **Un événement** est un ensemble d'issues. Il est souvent décrit par une phrase, et noté en lettre capitale.

Exemple. On lance un dé cubique équilibré et on observe le résultat.
Alors l'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. L'événement « Obtenir un nombre pair » peut être écrit $A = \{2; 4; 6\}$

Définition. **La probabilité d'un événement** A est égale à la somme des probabilités <u>des issues</u> qui réalisent cet événement. Elle se note $\boldsymbol{P(A)}$ si on parle d'un événement noté A.

Exemple. Dans le cas précédent, $P(\text{"obtenir un nombre pair"}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Exemple. Dans le cas de la répartition des groupes sanguins, la probabilité qu'une personne en France ait un groupe sanguin <u>différent</u> de A est égale à : $P(\text{"groupe } B\text{"}) + P(\text{"groupe } AB\text{"}) + P(\text{"groupe } O\text{"}) = 0{,}09 + 0{,}04 + 0{,}42 = 0{,}55$.

Propriété. <u>Dans une situation d'équiprobabilité</u>, où il y a n issues,
la probabilité d'un événement A réalisé par k issues est alors : $P(A) = \frac{k}{n}$

Exemple. Si $A =$ « Obtenir un nombre pair » pour un lancé de dé équilibré à 6 faces alors $P(A) = P(\{2; 4; 6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

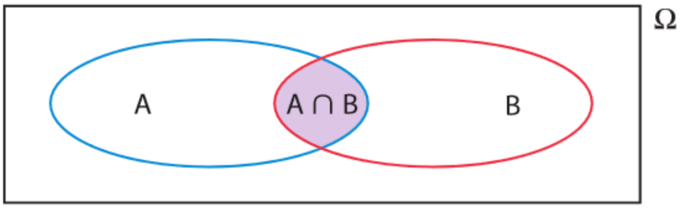
Définition. L'événement contraire d'un événement A, noté $\boldsymbol{\bar{A}}$, est l'ensemble des issues qui ne réalisent pas A, autrement dit A est réalisé par toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans A.
Propriété. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

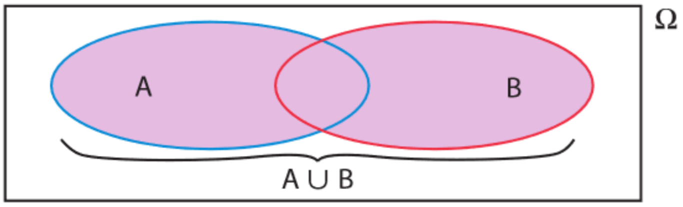
Exemple. Dans le contexte de l'exemple précédent, $P(\text{"Obtenir un nombre impair"}) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Définition. Soit A et B deux événements.

L'événement $\boldsymbol{A \cup B}$ (se lit « **A union B** ») est l'ensemble des issues qui réalisent A <u>ou</u> B.
L'événement $\boldsymbol{A \cap B}$ (se lit « **A inter B** ») est l'ensemble des issues qui réalisent A <u>et</u> B

Exemple. On lance un dé à 6 faces et on considère les événements A : « Obtenir un nombre pair » et B : « Obtenir un multiple de 3 ». $A = \{2; 4; 6\}$ et $B = \{3; 6\}$. Alors $A \cap B = \{6\}$ et $A \cup B = \{2; 3; 4; 6\}$.





Propriété. $P(A) + P(B) = P(A \cap B) + P(A \cup B)$ En particulier $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exemple. Dans l'exemple précédent, $P(A) = \frac{3}{6}$; $P(B) = \frac{2}{6}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Donc $P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

Définition. Deux événements A et B sont **disjoints** ssi $A \cap B = \emptyset$

Propriété. Etant donné 2 événements A et B disjoints, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$