Inégalités et inéquations

Règles (Manipulation des inégalités). Soit a, b, c, k des réels.

- Si $a < b$ alors $a + c < b + c$
- Si $a < b$ alors $a - c < b - c$
- Si $a < b$ et $k > 0$ alors $ka < kb$
- Si $a < b$ et $k < 0$ alors $ka > kb$ (Multiplier une inégalité par un nombre < 0 *inverse* l'inégalité)
- Si $a < b$ et $k > 0$ alors $\frac{a}{k} < \frac{b}{k}$
- Si $a < b$ et $k < 0$ alors $\frac{a}{k} > \frac{b}{k}$ (Diviser une inégalité par un nombre < 0 *inverse* l'inégalité)
- Ces règles restent valables en remplaçant $<$ par $\leq$ et $>$ par $\geq$. (mais k doit rester $\neq 0$ pour $\div$)

Définition. **Une inéquation** est une inégalité dans laquelle est présente une inconnue. **Résoudre une inéquation,** c'est déterminer l'ensemble de toutes les valeurs de l'inconnue qui vérifient l'inégalité.

Exemple. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(I) \Leftrightarrow 3x + 6 \geq 2x - 5$.
On veut isoler l'inconnue x.
D'abord on fait passer tous les x à gauche de $\leq$. On peut soustraire $2x$

$(I) \Leftrightarrow 3x + 6 - 2x \geq -5$	On peut donc simplifier le membre à gauche de $\leq$.
$(I) \Leftrightarrow x + 6 \geq -5$	On peut faire passer toutes les constantes à droite de $\leq$ en soustrayant 6
$(I) \Leftrightarrow x \geq -5 - 6$	On simplifie à droite de $\leq$
$(I) \Leftrightarrow x \geq -11$	x est maintenant isolé. On a résolu l'inéquation.

L'ensemble des solutions de (I) est $[-11; +\infty[$.

Exemple. Résoudre $(J) \Leftrightarrow 3x + 2 < 5x - 3$

$(J) \Leftrightarrow 3x + 2 < 5x - 3$	On soustrait $5x$ pour faire passer tous les x à gauche de $<$
$(J) \Leftrightarrow 3x + 2 - 5x < -3$	On simplifie à gauche de $<$
$(J) \Leftrightarrow -2x + 2 < -3$	On soustrait 2 pour faire passer toutes les constantes à droite de $<$
$(J) \Leftrightarrow -2x < -3 - 2$	On simplifie à droite de $<$
$(J) \Leftrightarrow -2 \times x < -5$	Pour isoler x, on doit diviser par -2 or -2 est négatif, on doit inverser $<$
$(J) \Leftrightarrow x > \frac{-5}{-2}$	
$(J) \Leftrightarrow x > 2{,}5$	x est maintenant isolé. On a résolu l'inéquation.

L'ensemble des solutions de (J) est $]2{,}5; +\infty[$.