Suites

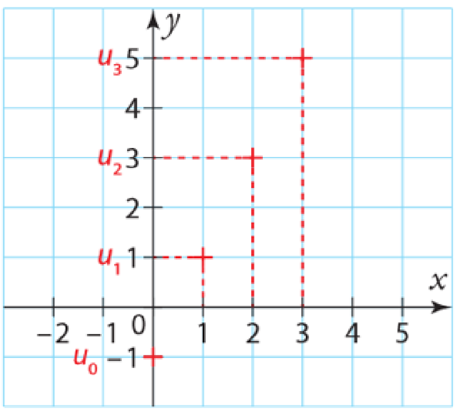
Idée. Une suite est une liste infinie de nombres : $(1; 3; 5; 7; 9; 11; \ldots)$.
Définition. Une **suite numérique** est une fonction u à valeurs dans $\mathbb{R}$ et définie sur $\mathbb{N}$ (tous les entiers).

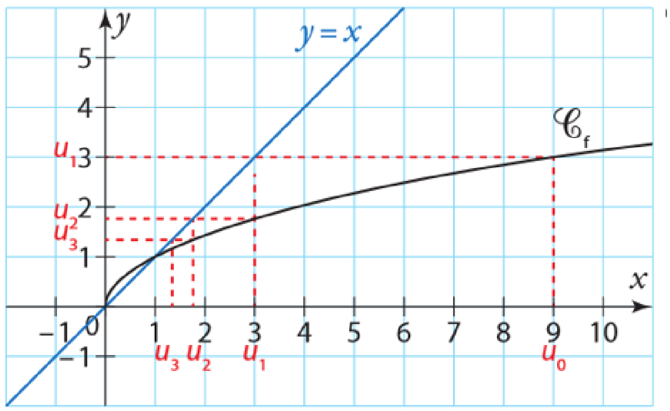
Une suite u associe à tout entier n, un réel noté $\boldsymbol{u_n}$ (au lieu de l'écriture habituelle $u(n)$).
On note la suite u parfois $(u_n)_{n\geq 0}$ ou juste (u_n). Pour tout n, u_n est **le terme général de rang $\boldsymbol{n}$** de la suite.
Attention : Il ne faut pas confondre u_n qui est en général un nombre et (u_n) qui désigne la fonction u.

Exemples. • $(1; 2; 3; 4; \ldots)$ est une suite. • $(-3; -4; -5; \ldots)$ est une suite. • $(1; 2; 3; 4)$ n'est pas une suite.
• La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 1$. Le premier terme est u_0 et $u_0 = -1$
• La suite $(u_n)_{n\geq 6}$ définie pour tout entier $n \geq 6$ par $u_n = \frac{1}{n-5}$. Le premier terme est u_6 et $u_6 = 1$
• La suite (u_n) définie par $u_0 = -6$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 3u_n + 15$.
Pour calculer un terme, on doit connaître le précédent. Par exemple, $u_{20} = 3u_{19} + 15$
Remarque. Il ne faut pas confondre u_{n+1}, qui désigne le terme suivant u_n, et $u_n + 1$.

Méthode. Pour représenter une suite dans un repère (1.), on place les points de coordonnées $(n; u_n)$.
Méthode. Si la suite est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, alors (2.) on peut parfois construire les termes à l'aide de la courbe représentative de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$

1 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2n - 1$. 2 On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

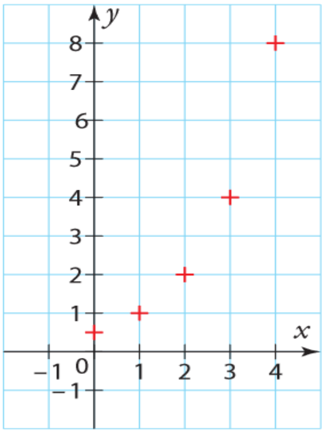


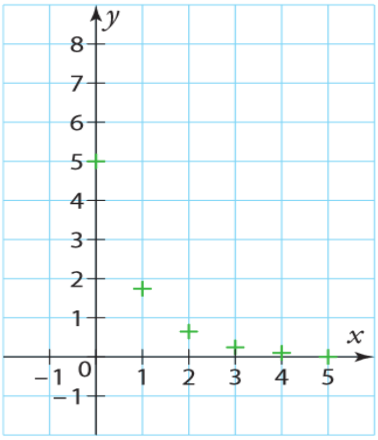


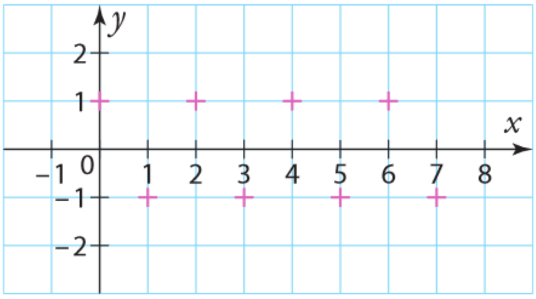
Définition. Une suite (u_n) est **croissante** ssi, pour tout entier n, $u_{n+1} \geq u_n$.
Définition. Une suite (u_n) est **décroissante** ssi, pour tout entier n, $u_{n+1} \leq u_n$.
Définition. Une suite (u_n) est **monotone** ssi elle est soit croissante, soit décroissante.
Définition. Une suite (u_n) est **constante** ssi, pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n$.
Définition. Comme pour les fonctions, si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes, on parle de suite **strictement croissante**, **strictement décroissante**, ou **strictement monotone**.

Exemples. • $(1; 3; 5; 19; 33; 200; \ldots)$ est une suite croissante (strictement).
• $(1; 3; 5; 5; 5; 6; 8; 8; 10; 11; \ldots)$ est une suite croissante mais pas strictement croissante.
• $(1; 0; -1; -3; -10; \ldots)$ est une suite décroissante.
• $(1; -1; 2; -2; 3; -3; \ldots)$ n'est ni croissante, ni décroissante.
• $(3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; \ldots)$ est une suite constante.
• Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n^2 + 1$.
$n^2 + 1 > 0$ donc $u_{n+1} > u_n$, donc la suite (u_n) est strictement croissante.

Exemples. Allure d'une suite croissante, d'une suite décroissante, et d'une suite non monotone.







Remarque. Il existe des suites qui ne sont pas monotones, comme la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$.

Définition. Une **suite** (u_n) **est arithmétique** ssi la différence de deux termes consécutifs est <u>constante</u>.
Plus précisément, (u_n) est arithmétique ssi il existe un réel r, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+1} = u_n + r$.
r est appelé **raison de la suite arithmétique** (u_n).

$$\boxed{u_0} \xrightarrow{+r} \boxed{u_1} \xrightarrow{+r} \boxed{u_2} \longrightarrow \boxed{\cdots} \longrightarrow \boxed{u_n} \xrightarrow{+r} \boxed{u_{n+1}}$$

Exemple. La suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$ est arithmétique de raison 3.

Propriété. Terme général d'une suite arithmétique. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$ (Deux termes distants de n rangs diffèrent de n fois la raison)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + (n-1)r$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + (n-p)r$

Exemple. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 0{,}5$.
Cette suite est arithmétique de raison $-0{,}5$ et de premier terme 3. Donc, $v_n = 3 - 0{,}5n$.

Définition. Une **suite** (u_n) **est géométrique** ssi le quotient de deux termes consécutifs est <u>constant</u>.
Plus précisément, (u_n) est géométrique s'il existe un réel q, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+1} = q \times u_n$.
q est appelé **raison de la suite géométrique** (u_n).

$$\boxed{u_0} \xrightarrow{\times q} \boxed{u_1} \xrightarrow{\times q} \boxed{u_2} \longrightarrow \boxed{\cdots} \longrightarrow \boxed{u_n} \xrightarrow{\times q} \boxed{u_{n+1}}$$

Exemple. La suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$ est la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 0{,}5$.

Propriété. Terme général d'une suite géométrique. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Exemple. La suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$ est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 0{,}5$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = 0{,}5 \times 2^n$.

Propriété. Somme des termes consécutifs d'une S.A. = $\text{nombre de termes} \times \frac{(\text{1er terme} + \text{dernier terme})}{2}$

Exemple. $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}$

Propriété. Somme des termes consécutifs d'une S.G. = 1er terme $\times \frac{1 - \text{q}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{q}}$

Exemple. Soit q <u>un réel $\neq 1$</u>. $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$