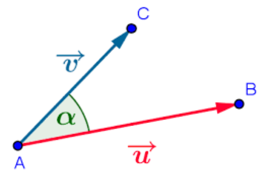
Produit scalaire géométrique

Définition. L'angle géométrique entre deux <u>vecteurs non nuls</u> $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ est défini comme la longueur, le long du cercle $\mathcal{C}$ de centre $O=(0;0)$ de rayon 1, de l'arc le plus court possible entre A et B, les points de $\mathcal{C}$ définis par $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}=\overrightarrow{OA}$ et $\frac{\vec{v}}{\|v\|}=\overrightarrow{OB}$.

Idée. $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ correspond à l'angle saillant que l'on mesure directement au rapporteur entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si on les fait partir d'un même point.

Remarque. $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ est un <u>nombre</u> qui appartient toujours à l'intervalle $[0;\pi]$



Définition. Deux vecteurs $\vec{u};\vec{v}$ non nuls sont **orthogonaux**, s'ils forment un angle droit. $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})=\frac{\pi}{2}$

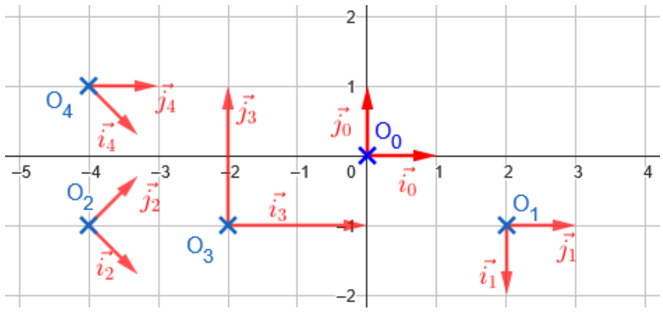
Définition. Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires**, s'ils forment un angle valant 0 ou π. $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})\in\{0;\pi\}$

Propriété. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.
Propriété. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $\det(\vec{u};\vec{v})=0$

Définition. Un **repère** $R=(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ désigne la donnée d'un point O et de vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ <u>non colinéaires</u>.

Déf. $\boldsymbol{R_0}=\left((0;0);\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ est **le repère canonique**. Il sert de référence pour les repères orthonormés.

Définition. Un **repère** $R=(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ est **orthonormé** si $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux et de longueur 1 (<u>dans R_0</u>).



Exemples. Ici R_0 est le repère de référence.
Ci-contre, les repères R_0, R_1 et R_2 sont orthonormés.
Les longueurs ont donc la même mesure dans R_0,R_1, R_2.
R_3 n'est pas orthonormé car ses vecteurs sont de longueur 2 (en les mesurant dans R_0).
R_4 n'est pas orthonormé car ses vecteurs ne sont pas orthogonaux (au sens de R_0).

Propriété. Soit $R=(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Soit un vecteur $\vec{u}$. Il existe d'uniques $x,y\in\mathbb{R}$ tels que $\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$.

Définition. x et y sont **les coordonnées du <u>vecteur</u> $\vec{u}$ <u>dans le repère R</u>**. On note souvent $\vec{u}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}_{\boldsymbol{R}}$

Propriété. Soit $R=(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Soit un point M. Il existe d'uniques $x,y\in\mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{OM}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$.
Définition. x et y sont **les coordonnées du <u>point</u> M <u>dans le repère R</u>**. On note souvent $M=(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{R}}$

Remarque. Quand on change de repère R, les coordonnées d'un vecteur ou d'un point changent.
Cependant, la plupart des formules vectorielles restent valables, si on les écrit dans un <u>même</u> repère R.

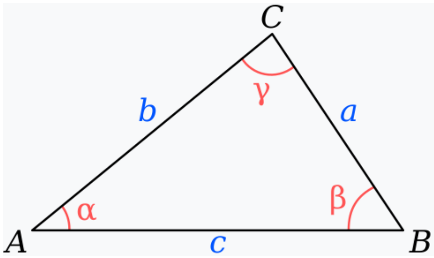
Propriété. Les longueurs et angles géométriques ne changent pas si on change de repère <u>orthonormé</u>

Théorème. Loi des cosinus, ou **formule d'Al-Kashi**
Dans un triangle ABC quelconque, on a, par exemple :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$$

En posant $a = BC,\ b = AC,\ c = AB,\ \alpha = \widehat{BAC}$, on peut écrire :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$



Exemple. Soit un triangle ABC tel que $AB = 8$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = 50°$.
Calculer la longueur BC.
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 64 + 16 - 2 \times 8 \times 4 \times \cos(50°) \approx 38{,}86$ et donc $BC \approx 6{,}23$

Hypothèse. On se place dans un repère orthonormé R fixé. Soit $\vec{u} = \binom{x}{y}$, $\vec{v} = \binom{x'}{y'}$ deux vecteurs non nuls

Rappel. Produit scalaire (algébrique). $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Rappel. (2ème identité remarquable). $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

Propriété. Reformulation vectorielle d'Al-Kashi. $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$

Propriété. Produit scalaire (géométrique). $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$
Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$

Exemple. Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ tels que $AB = 2$ et $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 30°$.
Leur produit scalaire vaut $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

Corollaire. Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est un nombre qui ne dépend *pas* du repère orthonormé R choisi.
Quand on utilise $\vec{u} \cdot \vec{v} = \binom{x}{y}_R \cdot \binom{x'}{y'}_R = xx' + yy'$, on peut choisir un repère orthonormé R qui nous arrange.

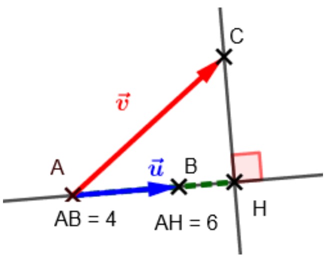
Corollaire. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (Car $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$)

Corollaire. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de même sens $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ (Car $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = 1$)
Corollaire. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de sens opposés $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ (Car $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \pi \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = -1$)

Propriété (Interprétation géométrique). Soit trois points A, B, C (ou deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ qu'on fait partir d'un même point A). Alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \pm AB \times AH$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).
Le signe est $+$ si $\overrightarrow{AH}$ est de même sens que $\overrightarrow{AB}$, et $-$ sinon.

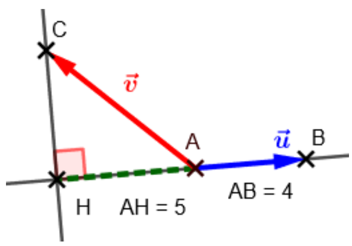
Exemple.
Ici $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont dans le même sens, donc

$\vec{u} \cdot \vec{v} = +4 \times 6 = +24$



Exemple.
Ici $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont dans des sens opposés, donc

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -4 \times 5 = -20$



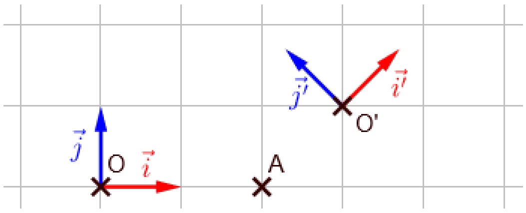
Méthode. Pour déterminer la composante d'un vecteur $\vec{v}$ dans une direction donnée, on « projette » sur un vecteur directeur *unitaire* $\vec{u}$ dans la direction souhaitée. (On calcule $\vec{v} \cdot \vec{u}$)

Exemple. Une piste de ski est représentée par une droite qui descend avec une pente de $45°$.
La piste est donc dirigée par le vecteur unitaire $\vec{u} = \binom{\cos(-45°)}{\sin(-45°)}$. Un skieur de 70 kg, subit son poids comme une force $\vec{F}$ d'environ 700 N vers le bas, donc $\vec{F} = \binom{0}{-700}$. La composante du poids du skieur le long de la piste est donc $\vec{F} \cdot \vec{u} = (-700)(\sin(-45°)) = 700\sin(45°) \approx 500$ N.

Pour aller plus loin…

Changements de repère.

Propriété. Dans tout repère orthonormé $R = (O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$,
Les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}$ dans R peuvent s'obtenir en calculant $x_{\vec{v}}^R = \vec{v}\cdot\vec{\imath}$ et $y_{\vec{v}}^R = \vec{v}\cdot\vec{\jmath}$.
Les coordonnées d'un point M dans R peuvent s'obtenir en calculant $x_M^R = \overrightarrow{OM}\cdot\vec{\imath}$ et $y_M^R = \overrightarrow{OM}\cdot\vec{\jmath}$.



Exemple. On note $R = (O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ et $R' = (O';\vec{\imath'};\vec{\jmath'})$.
On a $A = (2;0)_R$.
Calculer les coordonnées de A dans R'.

$x_{\vec{\imath'}} = \vec{\imath'}\cdot\vec{\imath} = \|\vec{\imath'}\|\|\vec{\imath}\|\cos(\vec{\imath'};\vec{\imath}) = \cos(\vec{\imath'};\vec{\imath}) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$y_{\vec{\imath'}} = \vec{\imath'}\cdot\vec{\jmath} = \cos(\vec{\imath'};\vec{\jmath}) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc $\vec{\imath'} = \begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}_R$. Par des calculs similaires $\vec{\jmath'} = \begin{pmatrix}-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}_R$

Ainsi dans R', $x_A = \overrightarrow{O'A}\cdot\vec{\imath'} = \begin{pmatrix}2-3\\0-1\end{pmatrix}_R\cdot\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}_R = -\sqrt{2}$ et $y_A = \overrightarrow{O'A}\cdot\vec{\jmath'} = \begin{pmatrix}2-3\\0-1\end{pmatrix}_R\cdot\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}_R = 0$

Donc $A = \left(-\sqrt{2};0\right)_{R'}$