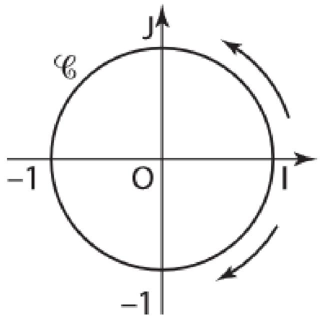
Fonctions trigonométriques

1. Repérage sur le cercle trigonométrique

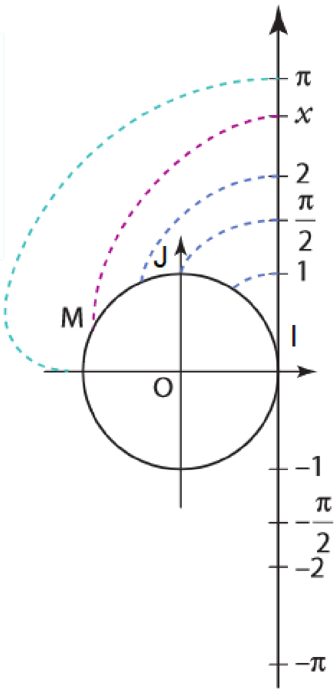
Hypothèse. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).



Définition. On appelle **cercle trigonométrique** le cercle $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ de centre l'origine O du repère et de rayon $OI = 1$.

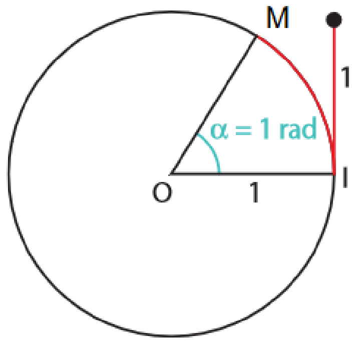
Remarque. Le périmètre du cercle trigonométrique est 2π.

Définition. Le **sens direct** (ou **sens positif** ou **sens trigonométrique**) est le sens <u>contraire</u> de rotation des aiguilles d'une montre.
Le **sens indirect** est le sens de rotation des aiguilles d'une montre.



Définition. Pour repérer un point M du cercle trigonométrique, on enroule autour du cercle dans le sens direct, un axe vertical orienté vers le haut. On peut associer à chaque réel x de l'axe vertical un **point image** M sur le cercle. Le nombre réel x est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

Définitions. L'angle orienté $(\overrightarrow{\boldsymbol{OI}}, \overrightarrow{\boldsymbol{OM}})$ est la longueur de l'arc de cercle $\widehat{IM}$, comptée positivement dans le sens direct, négativement dans le sens indirect. L'unité associée à cette mesure est **le radian** noté $\boldsymbol{rad}$.



Exemple. Le point-image de $\frac{\pi}{2}$ est J. Autrement dit, une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est $\frac{\pi}{2}$.

Exemple. Le point-image de 2π est I. Autrement dit, une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OI})$ est 2π.

Remarque. Tout point sur le cercle trigonométrique correspond à plusieurs nombres, tous distants d'un multiple de 2π (le périmètre du cercle), selon le nombre de tours complets de l'enroulement de l'axe. Autrement dit, un angle orienté donné a plusieurs mesures possibles (une infinité) toutes distantes de 2π.

Exemple. Les points de la droite des réels $0; 2\pi; 4\pi$, et plus généralement de la forme $2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) ont pour image le même point : I. Ils correspondent tous au même angle orienté de 0 rad.

Définition. On choisit comme **mesure principale de $(\overrightarrow{\boldsymbol{OI}}, \overrightarrow{\boldsymbol{OM}})$** la longueur du seul arc $\widehat{IM}$ de longueur comprise dans $]-\pi; \pi]$. Les calculs d'angles se font modulo 2π (à multiple de 2π près).

Exemple. Un tour de cercle admet pour mesure d'angle 2π rad puisque le périmètre de $\mathcal{C}$ est 2π. Cependant la mesure principale de cet angle est 0 rad, car $0 \times 2\pi$ est l'unique multiple de 2π compris dans $]-\pi; \pi]$.

Définition. 1° $= \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$ rad

Remarque. $30° = \frac{\pi}{6}$ rad ; $45° = \frac{\pi}{4}$ rad ; $90° = \frac{\pi}{2}$ rad ; $180° = \pi$ rad ; $360° = 2\pi$ rad

2. Coordonnées d'un point du cercle trigonométrique

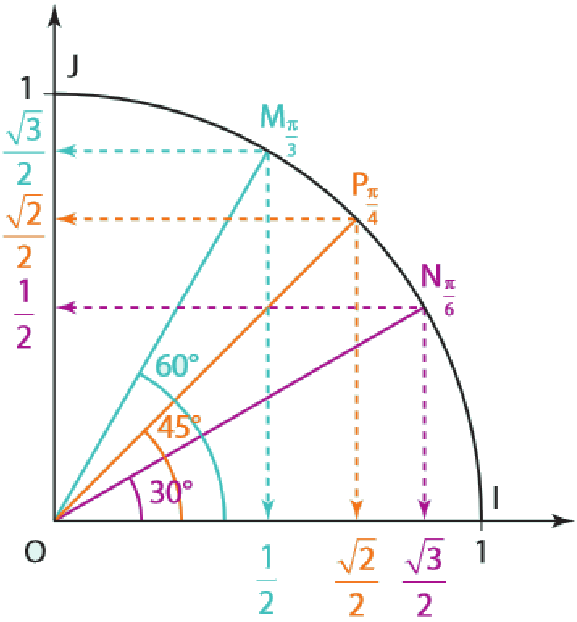
Définition. Pour tout réel x, on appelle **cosinus de x** et **sinus de x**, notés $\mathbf{cos}(\boldsymbol{x})$ et $\mathbf{sin}(\boldsymbol{x})$ les coordonnées du point M_x image de x sur le cercle trigonométrique. On écrit $M_x = (\cos(x)\,;\sin(x))$.

Propriétés. Sinus et cosinus.

Pour tout nombre réel x, $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$

Pour tout nombre réel x, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$

Pour tout nombre réel x, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

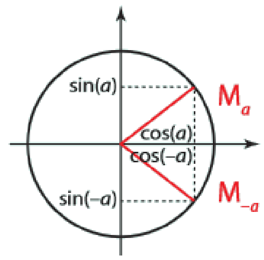
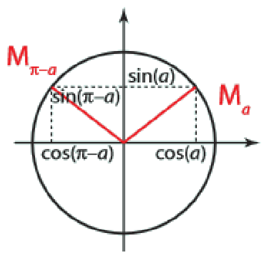
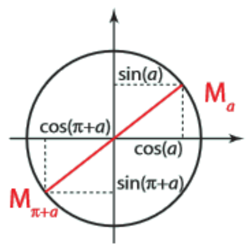
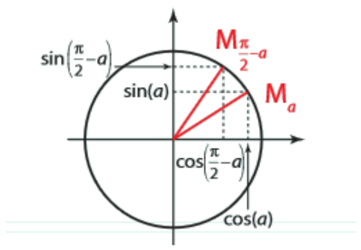
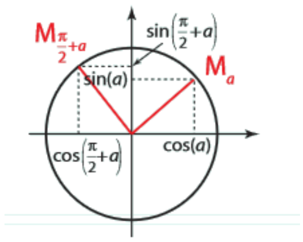


Notation. On note parfois $\mathbf{cos^2}(\boldsymbol{x})$ au lieu de $(\cos(x))^2$ et $\mathbf{sin^2}(\boldsymbol{x})$ au lieu de $(\sin(x))^2$.

Propriété. Valeurs remarquables

Angle $\widehat{IOM}$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Réel x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x) = \cos(\widehat{IOM})$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x) = \sin(\widehat{IOM})$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Propriété. Symétries du cosinus et du sinus.

	$\cos(-a) = \cos(a)$ $\sin(-a) = -\sin(a)$	$a \in \mathbb{R}$	
	$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$ $\sin(\pi - a) = \sin(a)$		$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$ $\sin(\pi + a) = -\sin(a)$
	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)$		$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin(a)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a)$

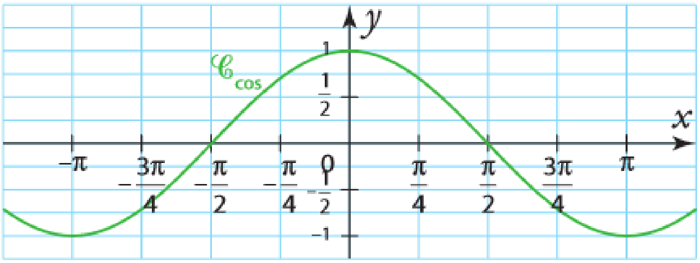
3. Fonctions cosinus et sinus

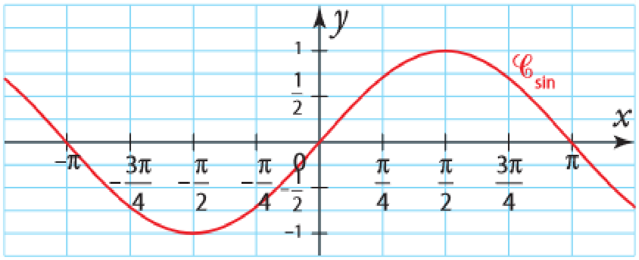
Définition. La fonction cosinus, notée ***cos***, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathbf{cos}: x \mapsto \cos(x)$
Définition. La fonction sinus, notée ***sin***, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathbf{sin}: x \mapsto \sin(x)$

Propriété (admis). Les fonctions cosinus et sinus ont les variations suivantes sur $[-\pi;\pi]$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
cos	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1
sin	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

Graphes. Fonctions cosinus et sinus.





Propriété. Les fonctions sinus et cosinus sont des fonctions périodiques de période 2π.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

Propriété. La fonction cosinus est paire. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$
Propriété. La fonction sinus est impaire. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$

Remarque. Les courbes représentatives du cosinus et du sinus sont « décalées » de $\frac{\pi}{2}$.
Cela découle des propriétés de symétrie : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.

Propriété. Table des valeurs du cosinus et du sinus autour du cercle trigonométrique.

$\widehat{IOM}$ (°)	-150	-135	-120	-90	-60	-45	-30	0	30	45	60	90	120	135	150	180
x	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(x)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0