

Second degré (Partie 2)

Définition. Une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une **fonction polynôme de degré 2** ssi :
Il existe trois nombres réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Définition. Une **équation de degré 2** est une égalité " $f(x) = 0$ " où f est de degré 2.

Théorème (Forme canonique). $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec α, β uniques. On a $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$

Propriété. Les coordonnées du sommet de la parabole sont toujours $(\alpha; \beta)$

Théorème. La forme canonique permet de trouver les variations et les extremums de f suivant le signe de a

Si $a > 0$:			
x	$-\infty$	α	$+\infty$
f			
		β	

Si $a < 0$:			
x	$-\infty$	α	$+\infty$
f			
		β	

Définition. Une **racine** d'une **fonction** f est un nombre x tel que $f(x) = 0$.
C'est une **solution** de l'**équation** " $f(x) = 0$ ".

Hypothèse. Soit $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme de degré 2. ($a \neq 0$)

Définition. $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant de f** .

Théorème. Résolution d'une équation de degré 2.

On calcule le discriminant Δ de f . On a 3 situations possibles suivant le signe de Δ .

Si $\Delta < 0$: Alors f n'a pas de racines sur \mathbb{R} autrement dit " $ax^2 + bx + c = 0$ " n'a pas de solutions dans \mathbb{R} . Dans ce cas on ne peut pas factoriser f sur \mathbb{R} .

Si $\Delta = 0$: Alors f a exactement 1 racine sur \mathbb{R} autrement dit " $ax^2 + bx + c = 0$ " a exactement 1 solution dans \mathbb{R} , et cette solution est $x_0 = -\frac{b}{2a} = \alpha$. On peut alors factoriser f . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - x_0)^2$

Si $\Delta > 0$: Alors f a exactement 2 racines sur \mathbb{R} , " $ax^2 + bx + c = 0$ " a exactement 2 solutions dans \mathbb{R} , et ces deux solutions sont $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Définition. La forme " $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ " est appelée **forme factorisée de f** .

Factoriser un polynôme de degré 2 revient à **déterminer ses racines**, donc revient à **résoudre** " $f(x) = 0$ "

Remarque. Le cas $\Delta = 0$ correspond au cas limite où $x_1 = x_2$. On dit que x_0 est une **racine double** de f .

Exemple. Résoudre $2x^2 + x - 3 = 0$. On pose $f: x \mapsto 2x^2 + x - 3$. Le discriminant de f est

$$\Delta = (1)^2 - 4 \times (2) \times (-3) = 25 \text{ donc l'équation a 2 solutions : } x_1 = \frac{-(1) - \sqrt{(25)}}{2 \times (2)} = -\frac{3}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-(1) + \sqrt{(25)}}{2 \times (2)} = 1$$

Exemple. Déterminer les racines de $f: x \mapsto x^2 + x + 1$. Le discriminant de f est $\Delta = (1)^2 - 4 \times (1) \times (1) = -3 < 0$ donc f n'a pas de racines sur \mathbb{R} . L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle.

Exemple. Factoriser $f: x \mapsto 9x^2 - 30x + 25$. Le discriminant de f est $\Delta = (-30)^2 - 4 \times (9) \times (25) = 0$.

Donc f admet une seule racine $x_0 = -\frac{(-30)}{2 \times 9} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 9 \left(x - \frac{5}{3}\right)^2$

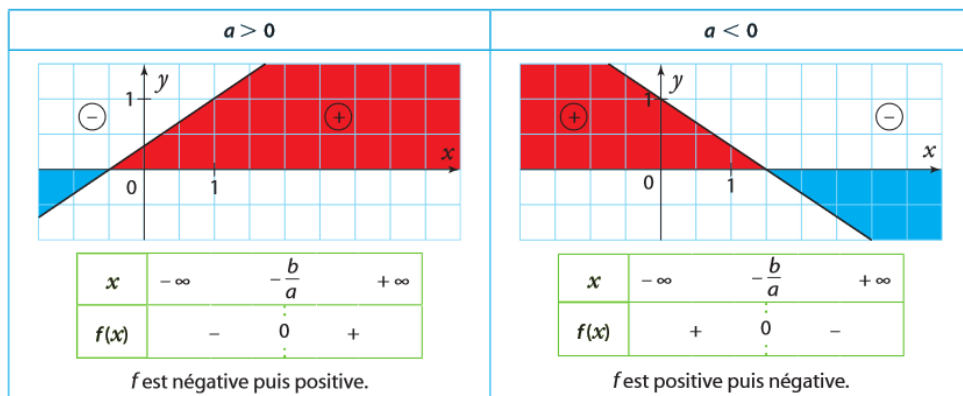
Propriété. Si $\Delta \geq 0$, alors $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ (Utile pour trouver l'autre racine connaissant l'une)

Exemple. Trouver les racines de $f: x \mapsto 2x^2 - x - 1$. En testant des petites valeurs entières $x = 1; 2; 3; -1; -2$ on trouve par chance une racine évidente : $f(1) = 0$ donc $x_1 = 1$ est racine évidente.

D'après les relations coefficients racines, on a $1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ donc $x_2 = -\frac{1}{2}$ est l'autre racine.

Propriété. Deux réels ont pour somme S et produit P ssi ils forment les 2 solutions de " $x^2 - Sx + P = 0$ ".

Rappels. Fonction polynôme (affine) de degré 1. Si $f: x \mapsto ax + b$ est un polynôme de degré 1 ($a \neq 0$): $x_1 = -\frac{b}{a}$ est l'unique racine de f . La fonction s'annule et change de signe une fois en $-\frac{b}{a}$.



Exemple. Déterminer le signe de $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto -3x + 4$.
 g est une fonction affine avec $a = -3$ et $b = 4$. a est négatif donc g est décroissante sur \mathbb{R} .
 g s'annule en $\frac{4}{3}$, g est positive sur $] -\infty; \frac{4}{3}]$ et g est négative sur $[\frac{4}{3}; +\infty[$.

Exemple. Déterminer le signe de $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto (3x + 4)(-2x + 6)$

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	3	$+\infty$
$3x + 4$	$-$	0	$+$	$+$
$-2x + 6$	$+$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$-$	0	$+$	$-$


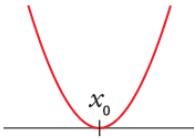
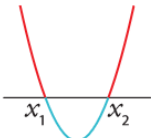
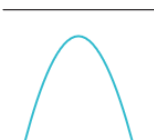
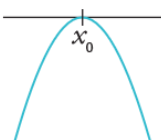
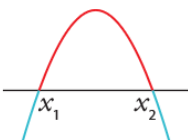
Exemple. Déterminer le signe de

$$k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{3x-5}{2x+7}$$

x	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$3x - 5$	$-$	$-$	0	$+$
$2x + 7$	$-$	0	$+$	$+$
$k(x)$	$+$	$-$	0	$+$

Théorème. Résolution d'une inéquation de degré 2.

Le signe d'un trinôme est déterminé par les 6 cas de figures suivants :

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$																									
$a > 0$	 <table border="1" data-bbox="209 1332 454 1467"><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="2">+</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$	+		 <table border="1" data-bbox="474 1332 762 1467"><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	$f(x)$	+	0	+	 <table border="1" data-bbox="780 1332 1294 1467"><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$f(x)$	+	0	-	0	+
	x	$-\infty$	$+\infty$																									
$f(x)$	+																											
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$																									
$f(x)$	+	0	+																									
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$																								
$f(x)$	+	0	-	0	+																							
$a < 0$	 <table border="1" data-bbox="209 1635 454 1769"><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="2">-</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$	-		 <table border="1" data-bbox="474 1635 762 1769"><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	$f(x)$	-	0	-	 <table border="1" data-bbox="780 1635 1294 1769"><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$f(x)$	-	0	+	0	-
	x	$-\infty$	$+\infty$																									
$f(x)$	-																											
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$																									
$f(x)$	-	0	-																									
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$																								
$f(x)$	-	0	+	0	-																							

Exemple. Résoudre (I) : $2x^2 + x - 3 < 0$ sur \mathbb{R} . On pose $f(x) = 2x^2 + x - 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\Delta = (1)^2 - 4 \times (2) \times (-3) = 25 \text{ donc l'équation a 2 solutions : } x_1 = \frac{-(1) - \sqrt{(25)}}{2 \times (2)} = -\frac{3}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-(1) + \sqrt{(25)}}{2 \times (2)} = 1$$

On a $a > 0$, et $\Delta > 0$. On est donc dans le cas n° 3. On observe que pour satisfaire (I), il faut se placer strictement (car (I) est une inégalité stricte) entre (pour être négatif) les racines. L'ensemble des solutions de (I) est donc $] -\frac{3}{2}; 1[$.