Fonctions numériques

Exemple et définitions. Pour définir précisément une fonction numérique on écrit par exemple :

$$f: \begin{array}{l} [-5;7] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x+5 \end{array}$$

f est la fonction qui à chaque nombre x associe le nombre $3x+5$.
Par exemple f envoie le nombre 1 sur $3(1)+5=8$. f envoie le nombre -2 sur $3(-2)+5=-1$.
Le nombre x choisi est appelé **variable** ou **paramètre**. $3x+5$ est **l'image** par f de la variable x.
Plus généralement on note $f(x)$ l'image par f d'un nombre x. On lit « **f de x** ».
Ici on peut donc écrire $f(x)=3x+5$. Par exemple, $f(1)=8$ et $f(-2)=-1$.
La variable x doit être choisie dans **l'ensemble de définition** $[-5;7]$, et l'image correspondante $f(x)$ doit tomber dans **l'ensemble d'arrivée** $\mathbb{R}$.

Propriété. L'image d'un certain nombre x par une fonction f est toujours unique.

Exemple. Sur l'exemple précédent, l'image par f de 1 est 8. Aussi, -1 est l'image par f de -2.
Exemple. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x)=(6-x)^2$
Alors par exemple, $h(12)=\big(6-(12)\big)^2=(-6)^2=(-6)\times(-6)=36$. L'image par h de 12 est 36.

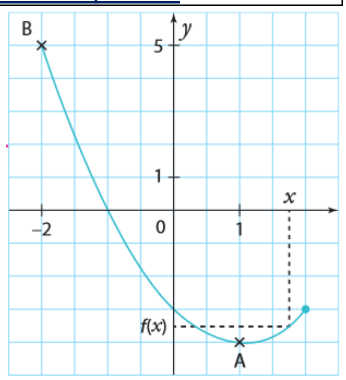
Définition. Si y est l'image de x, on a l'égalité $f(x)=y$. On dit que x est **un antécédent de y par f**.
Propriété. Un même nombre y peut avoir 0, 1 ou plusieurs antécédents par la fonction f.

Exemple. Avec la fonction h précédente, $h(12)=36$, et $h(0)=\big(6-(0)\big)^2=6^2=36$.
36 est l'image de 12 et de 0 par h. 12 est un antécédent de 36 par h. 0 est un autre antécédent de 36 par h

Remarque. Il est courant de ne pas préciser l'ensemble d'arrivée car on considère qu'il est évident ($\mathbb{R}$).
Exemple. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x)=x-4$.
Il faut comprendre que g est à valeurs dans $\mathbb{R}$, autrement dit $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Remarque. Il est courant de ne pas préciser l'ensemble de définition de f. Dans ce cas, il faut chercher l'ensemble le plus grand possible pour lequel l'expression de f a un sens dans le contexte.
Exemple. Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\frac{1}{x}+2$
Il faut comprendre que f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et que l'ensemble de définition est une partie D de $\mathbb{R}$.
D'après l'expression on voit que $f(x)$ est défini si $x \neq 0$ mais pas en $x=0$. Donc $D=\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des réels non nuls. Il faut donc comprendre que $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

Définition. Dans un repère du plan R, **la courbe représentative d'une fonction $f: D \to \mathbb{R}$** est l'ensemble des points de coordonnées $\big(x; f(x)\big)$ où $x \in D$. Un point $(x;y)$ se trouve sur la courbe ssi $y=f(x)$.
On dit que c'est la courbe d'équation " $y=f(x)$ ". Être sur la courbe signifie vérifier l'équation.

Exemple. Soit la fonction $f: [-2;2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x)=(x-1)^2-4$.
On a tracé la courbe C_f représentative de f sur le graphe ci-contre.
Il s'agit de la courbe d'équation $y=(x-1)^2-4$.



Exemple. Etant donné un $x \in D$ et ayant calculé $y=f(x)$, on peut vérifier graphiquement que $y=f(x)$.
Il suffit de regarder le point $(x;y)$ et de vérifier s'il se trouve sur la courbe C_f.
En $x=1$ on calcule $y=f(1)=\big((1)-1\big)^2-4=0^2-4=-4$, donc le point $A=(1;-4)$ doit se trouver sur C_f. C'est bien le cas.
Exemple. On peut lire graphiquement la valeur de $f(x)$ pour un x donné.
Si on cherche à déterminer $f(-2)$, on regarde le point de la courbe situé à $x=2$, ici c'est B. On regarde ensuite l'ordonnée y de B. On voit que le point $B=(-2;5)$ donc $y=5$, ce qui signifie que $f(-2)=5$.
Vérifions le. $f(-2)=\big((-2)-1\big)^2-4=(-3)^2-4=9-4=5$.
Remarque. Une droite verticale peut rencontrer une courbe de fonction une fois au maximum.
Remarque. Une droite horizontale peut rencontrer une courbe de fonction une ou plusieurs fois.