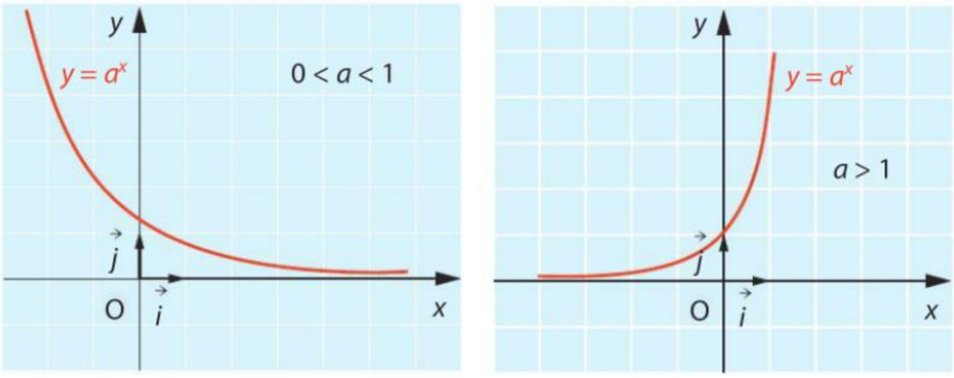
Fonctions exponentielles de base a

Propriété. Fonction exponentielle de base a.
Soit a un réel strictement positif.
Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x+y) = f(x)f(y)$ et telle que $f(1) = a$.
Définition. Cette fonction est appelée **fonction exponentielle de base a**.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\boldsymbol{a^x} = f(x)$

Sa représentation graphique varie selon que $a < 1$ ou $a > 1$



Propriété. La fonction $x \mapsto a^x$ est positive, et $\begin{cases} \text{strictement croissante} & \text{si a} > 1 \\ \text{strictement décroissante} & \text{si a} < 1 \end{cases}$

Propriété. $x \mapsto k \times a^x$ a le même sens de variation que $x \mapsto a^x$ si $k > 0$, le sens *contraire* si $k < 0$

Exemple. $x \mapsto 7 \times 0{,}5^x$ est décroissante car $a = 0{,}5 < 1$ et $k = 7 > 0$

Exemple. $x \mapsto -0{,}3 \times 4^x$ est décroissante car $a = 4 > 1$ mais $k = -0{,}3 < 0$

Propriétés. $a^{x+y} = a^x \times a^y$ $\quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$ $\quad (a^x)^y = a^{xy}$

Propriété. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

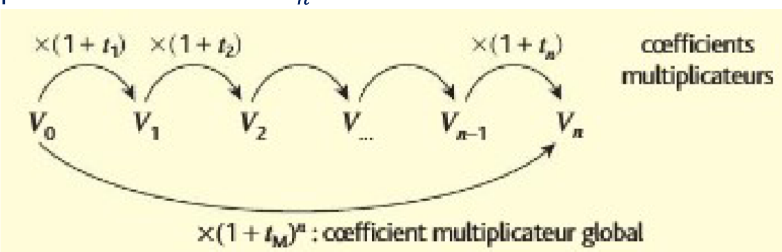
Propriétés. $a^0 = 1$ $\quad a^1 = a$ $\quad a^{-1} = \frac{1}{a}$

Exemples. $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$ $\quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ $\quad (2^{1{,}5})^4 = 2^{1{,}5\times 4} = 2^6 = 64$

Propriété. Si $a^x = a^y$ alors $x = y$.

Exemple. Résoudre $3^x = 3^{2x+5}$. Alors $x = 2x + 5$ donc $-x = 5$ donc $x = -5$.

Définition. Lors de n évolutions successives à des taux $t_1, t_2, \dots, t_n$ entre une valeur V_0 et une valeur V_n, on appelle **taux d'évolution moyen** le taux noté $\boldsymbol{t_M}$ qu'il faut appliquer n fois successivement à la valeur V_0 pour obtenir la valeur V_n.



$V_1 = V_0 \times (1 + t_1)$ $\quad V_2 = V_0(1+t_1)(1+t_2)$ $\dots$ $\quad V_n = V_0(1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n)$
Le taux moyen doit vérifier : $V_n = V_0(1+t_M)(1+t_M)\dots(1+t_M) = V_0(1+t_M)^n$
On a donc $(1+t_M)^n = (1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n)$

$$\boldsymbol{t_M} = \left((1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n)\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$