Systèmes d'équations

Définition. Système linéaire de deux équations à deux inconnues.
On dit qu'un couple de réels $(x; y)$ vérifie le système suivant de 2 équations linéaires du 1er degré à 2 inconnues « $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ » où a, b, c, a', b', c' sont des réels, si ce couple vérifie les deux équations.

Théorème. Un tel système a : soit une seule solution, soit aucune solution, soit une infinité de solutions.
Résoudre un tel système revient à chercher les coordonnées du point d'intersection, s'il y en a un, des deux droites dont les équations sont celles du système.
- Le système admet un seul couple solution ssi les deux droites sont sécantes.
- Le système admet aucune solution ssi les deux droites sont parallèles non confondues.
- Le système admet une infinité de solutions ssi les deux droites sont confondues.

Règle. Résolution d'un système par substitution.
Cette méthode consiste à isoler une inconnue à partir d'une équation et à la remplacer dans l'autre équation afin d'obtenir une nouvelle équation avec une seule inconnue.
On résout alors cette nouvelle équation puis on remplace l'inconnue trouvée dans la première équation afin de trouver la seconde inconnue.
Cette méthode a l'avantage d'être simple, mais le désavantage d'être lente et propice aux erreurs.

Exemple. Pour résoudre (E): $\begin{cases} -2x+y+3=0 \\ 3x-5y-2=0 \end{cases}$ on peut effectuer les étapes suivantes :

1. On isole y dans la première équation ; 2. On remplace y dans la 2ème équation pour n'avoir que du x
3. On résout la 2ème équation pour trouver x ; 4. On remplace x par sa valeur dans la 1ère pour trouver y.

Supposons que $(x; y)$ vérifie (E). Alors $\begin{cases} y=2x-3 \\ 3x-5y-2=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} y=2x-3 \\ 3x-5(2x-3)-2=0 \end{cases}$ donc

$\begin{cases} y=2x-3 \\ 3x-10x+15-2=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} y=2x-3 \\ -7x+13=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} y=2x-3 \\ x=\frac{13}{7} \end{cases}$ donc $\begin{cases} y=\frac{5}{7} \\ x=\frac{13}{7} \end{cases}$ c'est-à-dire $(x; y)=\left(\frac{13}{7}; \frac{5}{7}\right)$.

Réciproquement si $(x; y)=\left(\frac{13}{7}; \frac{5}{7}\right)$ alors $(x; y)$ vérifie (E). L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{\left(\frac{13}{7}; \frac{5}{7}\right)\right\}$.

Règle. Résolution d'un système par combinaison.
Cette méthode consiste à multiplier les deux équations par des nombres de telle manière qu'en additionnant les équations membre à membre, une inconnue s'élimine. Ainsi, il n'y a plus qu'à résoudre une équation à une seule inconnue. Pour trouver la deuxième inconnue, on peut renouveler la même méthode ou substituer. Cette méthode est plus rapide mais plus astucieuse.

Exemple. Pour résoudre (E): $\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \begin{cases} -2x+y+3=0 \\ 3x-5y-2=0 \end{cases}$ on peut effectuer les étapes suivantes :

Supposons que $(x; y)$ vérifie (E). Alors $\begin{pmatrix} L_1 \coloneqq 3L_1 \\ L_2 \coloneqq 2L_2 \end{pmatrix} \begin{cases} -6x+3y+9=0 \\ 6x-10y-4=0 \end{cases}$ donc

$\begin{pmatrix} L_1 \coloneqq L_1 \\ L_2 \coloneqq L_1+L_2 \end{pmatrix} \begin{cases} -6x=-3y-9 \\ -7y+5=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=\frac{-3}{-6}y+\frac{-9}{-6} \\ y=\frac{5}{7} \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=\frac{13}{7} \\ y=\frac{5}{7} \end{cases}$ donc $(x; y)=\left(\frac{13}{7}; \frac{5}{7}\right)$.

Réciproquement si $(x; y)=\left(\frac{13}{7}; \frac{5}{7}\right)$ alors $(x; y)$ vérifie (E). L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{\left(\frac{13}{7}; \frac{5}{7}\right)\right\}$.