

# Variations d'une fonction

**Hypothèse.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition.**  $f$  est **croissante sur  $I$**  si : Pour tous  $x, x' \in I$ , si  $x \leq x'$  alors  $f(x) \leq f(x')$

Autrement dit la sortie  $f(x)$  augmente quand on augmente l'entrée  $x$  dans  $I$ .

**Définition.**  $f$  est **décroissante sur  $I$**  si : Pour tous  $x, x' \in I$ , si  $x \leq x'$  alors  $f(x) \geq f(x')$

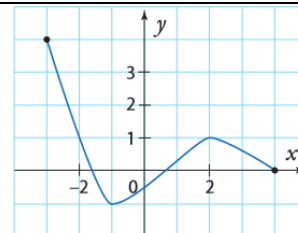
Autrement dit la sortie  $f(x)$  diminue quand on augmente l'entrée  $x$  dans  $I$ .

**Définitions. Etudier les variations d'une fonction**, c'est dire si elle est croissante / décroissante, et sur quels intervalles. On représente les variations d'une fonction avec un **tableau de variations**.

**Exemple.** Soit la fonction  $f$  définie sur  $[-3; 4]$  par le graphe ci-contre :

Son tableau de variations est :

$x$	-3	-1	2	4
$f$	4	-1	1	0



$f$  est décroissante sur  $[-3; -1]$ , croissante sur  $[-1; 2]$  et décroissante sur  $[2; 4]$ .

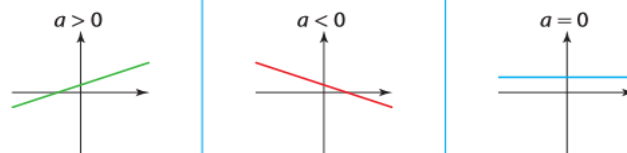
**Définition.** Une fonction **affine** est de la forme  $f(x) = ax + b$  pour  $x \in \mathbb{R}$ . ( $a$  et  $b$  sont des constantes).

**Propriétés.** La courbe représentative d'une fonction affine est une droite.

Si  $a > 0$  alors  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Si  $a < 0$  alors  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

Si  $a = 0$  alors  $f$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .



**Exemple.**  $x \mapsto 4x - 3$  est affine et croissante car  $a = 4 > 0$ .

**Exemple.**  $x \mapsto -2x + 8$  est affine et décroissante car  $a = -2 < 0$ .

**Hypothèse.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

**Définition.** On dit que  $f$  a un **maximum en  $a \in I$**  si pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \leq f(a)$

Dans ce cas, on dit que le **maximum** vaut  $f(a)$ .

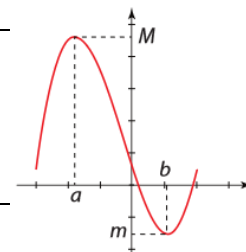
**Définition.** On dit que  $f$  a un **minimum en  $b \in I$**  si pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \geq f(b)$

Dans ce cas, on dit que le **minimum** vaut  $f(b)$ .

**Exemple.** Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x - 3)^2 + 5$ .

Un carré est toujours positif donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(x - 3)^2 \geq 0$  donc  $f(x) \geq 5$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq f(3) = 5$ . Donc  $f$  admet un minimum en 3 qui vaut 5.



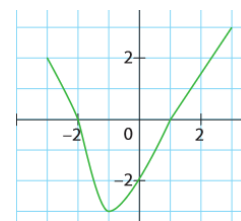
**Remarque.** Une fonction peut n'avoir ni maximum, ni minimum. (Par exemple  $x \mapsto x^3$  sur  $\mathbb{R}$ )

# Signe d'une fonction

**Définition.** Étudier le signe d'une fonction ou d'une expression  $f(x)$  c'est déterminer les valeurs de  $x$  pour lesquelles  $f(x)$  est strictement positif, nul ou strictement négatif.

Le signe est souvent présenté sous la forme d'un **tableau de signes**.

**Exemples.** La fonction  $f$  définie sur  $[-3; 3]$  par le graphe ci-contre admet le tableau de signes suivant :



$x$	-3	-2	1	3		
$f(x)$		+	0	-	0	+

La fonction définie par  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^2$  vérifie : Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) \geq 0$ . Donc son tableau de signe est :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$x^2$	$+$	$0$	$+$

Soit la fonction définie par  $h: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{x}$ .

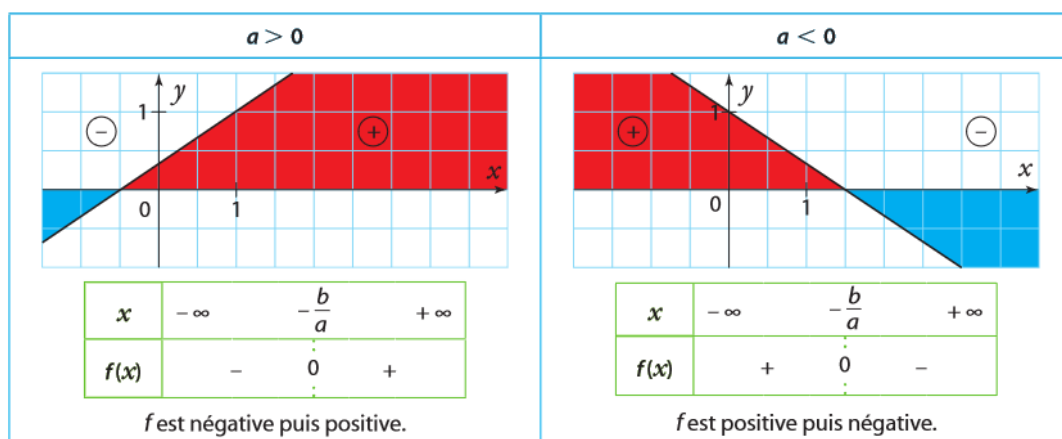
Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $\frac{1}{x}$  a le même signe que  $x$ . Donc :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$-$		$+$

**Remarque.** Résoudre l'inéquation " $f(x) \geq 0$ " revient à étudier le signe du terme " $f(x)$ "

**Propriété.** Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels avec  $a \neq 0$ .

La fonction affine  $f: x \mapsto ax + b$  s'annule et change de signe exactement une fois sur  $\mathbb{R}$  en  $x = -\frac{b}{a}$ .



**Exemple.** Dresser le tableau de signes de la fonction  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto -3x + 4$ .  $g$  est affine et  $a = -3 < 0$ .  $g$  est décroissante, s'annule en  $\frac{4}{3}$ ,  $g$  est positive sur  $] -\infty; \frac{4}{3}]$  et  $g$  est négative sur  $[\frac{4}{3}; +\infty[$ .

**Règle.** Pour déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient on étudie le signe de chacun des facteurs séparément, puis on compose les tableaux en utilisant la règle des signes.

**Exemple.** Déterminer le signe de  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto (3x + 4)(-2x + 6)$

$x$	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$3$	$+\infty$	
$3x+4$	$-$	$0$	$+$	$+$	
$-2x+6$	$+$	$+$	$0$	$-$	
$h(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

**Exemple.** Déterminer le signe de

$$k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{3x-5}{2x+7}$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$3x - 5$	-	-	0	+
$2x + 7$	-	0	+	+
$k(x)$	+	-	0	+

**Remarque.** Une double barre symbolise une valeur interdite (Pour un quotient, un zéro au dénominateur devient une valeur interdite puisqu'on ne peut pas diviser par zéro).