

Polynômes du second degré

Exemples. $x \mapsto 5x^2 - 3x + 0,2$ est une fonction polynôme de degré 2

$x \mapsto 2x^5 + x^3 - x + 1$ est une fonction polynôme de degré 5

$x \mapsto -3x + 5$ est une fonction polynôme de degré 1

Définition. Une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une **fonction polynôme de degré 2** ssi :

Il existe trois nombres réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Une **équation de degré 2** est une équation de la forme « $ax^2 + bx + c = 0$ » avec $a \neq 0$.

Exemple. $f: x \mapsto x^2 - 3x + 0,2$ est une fonction polynôme de degré 2 avec $a = 1, b = -3, c = 0,2$.

Exemple. $f: x \mapsto 5x + 2$ n'en n'est pas une car même si $f(x) = 0x^2 + 5x + 2$, on a $a = 0$ ce qui est interdit.

Exemple. $f: x \mapsto (x - 1)^2$ est une fonction polynôme de degré 2 car en développant on s'aperçoit que :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 1$ (donc $a = 1, b = -2, c = 1$).

Définitions. L'écriture « $f(x) = ax^2 + bx + c$ » est appelée **forme développée** de f . a, b, c sont uniques.

a est le **coefficient dominant** de f . c est le **coefficient constant** de f .

Théorème (Forme canonique). Une fonction polynôme de degré 2 peut s'écrire sous la forme suivante :

$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec α, β des nombres réels uniques. On a $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$

Définition. L'écriture « $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ » est appelée **forme canonique** de f .

Exemple. Mettre $f: x \mapsto 3x^2 + 12x + 9$ sous la forme canonique. On calcule $\alpha = -\frac{(12)}{2 \times (3)} = -2$,

Donc $\beta = f(-2) = 3(-2)^2 + 12(-2) + 9 = -3$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 3(x + 2)^2 - 3$.

Méthode sans formule. $f(x) = 3(x^2 + 4x + 3) = 3\left(x^2 + 2 \times \frac{4}{2}x + 3\right) = 3(x^2 + 2 \times 2x + 2^2 - 2^2 + 3) =$

$3((x + 2)^2 - 2^2 + 3) = 3((x + 2)^2 - 1) = 3(x - (-2))^2 - 3$. Donc par unicité, $\alpha = -2$ et $\beta = -3$.

Rappel. La courbe représentative d'une fonction de degré 1, « $y = ax + b$ » est une droite.

Définition. La courbe représentative d'une fonction de degré 2 « $y = ax^2 + bx + c$ » est une parabole.

Définition. Si le coefficient dominant a est > 0 (resp. < 0) la parabole est « **vers le haut** (resp. **bas**) »

Théorème. La forme canonique permet de trouver les variations et les extremums de f suivant le signe de a

Si $a > 0$:			Si $a < 0$:		
x	$-\infty$	$+\infty$	x	$-\infty$	$+\infty$
f			f		

Diagram illustrating the variations of a parabola based on the sign of the leading coefficient a .
 For $a > 0$ (parabola opening upwards), the function f is decreasing on $]-\infty; \alpha]$ and increasing on $]\alpha; +\infty[$. The minimum value is β at $x = \alpha$.
 For $a < 0$ (parabola opening downwards), the function f is increasing on $]-\infty; \alpha]$ and decreasing on $]\alpha; +\infty[$. The maximum value is β at $x = \alpha$.

Exemple. Etudier les variations de $f: x \mapsto 3x^2 + 12x + 9$. On a vu que $\alpha = -2$ et $\beta = -3$, donc f est décroissante sur $]-\infty; -2]$, croissante sur $[-2; +\infty[$ et atteint son minimum qui vaut -3 en $x = -2$.

Propriété. La parabole C_f admet pour axe de symétrie la droite d'équation « $x = \alpha$ ».

Définition et propriété. Le **sommet de la parabole** C_f est le point le plus bas (resp. haut) si la parabole est orientée vers le haut (resp. bas). Les coordonnées du sommet de la parabole sont toujours $(\alpha; \beta)$

Exemple. Déterminer le sommet de la parabole d'équation « $y = 4x^2 + 8x - 10$ ». On a un polynôme de degré 2. On a $\alpha = -\frac{8}{2 \times 4} = -1$ et $\beta = 4(-1)^2 + 8(-1) - 10 = -14$, donc son sommet est le point $(-1; -14)$.

Définition. Une **racine d'une fonction** f est un nombre x tel que $f(x) = 0$. C'est une solution de l'équation « $f(x) = 0$ ». Résoudre une équation, c'est déterminer l'ensemble de ses racines.

Rappel. Résolution d'une équation de degré 1. Si $f: x \mapsto ax + b$ est un polynôme de degré 1 :

f a exactement 1 racine sur \mathbb{R} c-à-d « $ax + b = 0$ » a exactement 1 solution sur \mathbb{R} , et cette solution est :

$x_1 = -\frac{b}{a}$ (Démonstration : $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$. La dernière étape est valide car $a \neq 0$)

Exemple. $3x - 6 = 0$ est un équation de degré 1, qui admet une unique solution : $x = -\frac{(-6)}{(3)} = 2$.

Hypothèse. Soit $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme de degré 2. ($a \neq 0$)

Définition. $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant de f** .

Théorème. Résolution d'une équation de degré 2.

On calcule le discriminant Δ de f . On a 3 situations possibles suivant le signe de Δ .

Si $\Delta < 0$: Alors f n'a pas de racines sur \mathbb{R} autrement dit « $ax^2 + bx + c = 0$ » n'a pas de solutions dans \mathbb{R} . Dans ce cas on ne peut pas factoriser f sur \mathbb{R} .

Si $\Delta = 0$: Alors f a exactement 1 racine sur \mathbb{R} autrement dit « $ax^2 + bx + c = 0$ » a exactement 1 solution dans \mathbb{R} , et cette solution est $x_0 = -\frac{b}{2a} = \alpha$. On peut alors factoriser f . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - x_0)^2$

Si $\Delta > 0$: Alors f a exactement 2 racines sur \mathbb{R} , « $ax^2 + bx + c = 0$ » a exactement 2 solutions dans \mathbb{R} , et ces deux solutions sont $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Définition. La forme « $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ » est appelée **forme factorisée** de f .

Factoriser un polynôme de degré 2 revient à déterminer ses racines, donc revient à résoudre « $f(x) = 0$ »

Remarque. Le cas $\Delta = 0$ correspond au cas limite où $x_1 = x_2$. On dit que x_0 est une **racine double**.

Exemple. Résoudre $2x^2 + x - 3 = 0$. On pose $f: x \mapsto 2x^2 + x - 3$. Le discriminant de f est

$$\Delta = (1)^2 - 4 \times (2) \times (-3) = 25 \text{ donc l'équation a 2 solutions : } x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{(25)}}{2 \times (2)} = -\frac{3}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{(25)}}{2 \times (2)} = 1$$


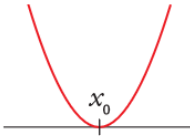
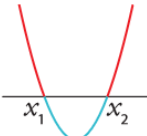
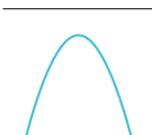
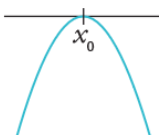
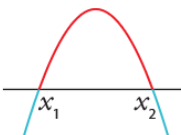
Exemple. Déterminer les racines de $f: x \mapsto x^2 + x + 1$. Le discriminant de f est $\Delta = (1)^2 - 4 \times (1) \times (1) = -3 < 0$ donc f n'a pas de racines sur \mathbb{R} . L'équation « $x^2 + x + 1 = 0$ » n'a pas de solution réelle.

Exemple. Factoriser $f: x \mapsto 9x^2 - 30x + 25$. Le discriminant de f est $\Delta = (-30)^2 - 4 \times (9) \times (25) = 0$.

Donc f admet une seule racine $x_0 = -\frac{(-30)}{2 \times 9} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 9 \left(x - \frac{5}{3}\right)^2$

Théorème. Résolution d'une inéquation de degré 2.

Le signe d'un trinôme est déterminé par les 6 cas de figures suivants :

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$																									
$a > 0$	 <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="2">+</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$	+		 <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	$f(x)$	+	0	+	 <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$f(x)$	+	0	-	0	+
x	$-\infty$	$+\infty$																										
$f(x)$	+																											
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$																									
$f(x)$	+	0	+																									
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$																								
$f(x)$	+	0	-	0	+																							
$a < 0$	 <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="2">-</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$	-		 <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	$f(x)$	-	0	-	 <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$f(x)$	-	0	+	0	-
x	$-\infty$	$+\infty$																										
$f(x)$	-																											
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$																									
$f(x)$	-	0	-																									
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$																								
$f(x)$	-	0	+	0	-																							

Exemple. Résoudre (I) : « $2x^2 + x - 3 < 0$ » sur \mathbb{R} . On pose $f(x) = 2x^2 + x - 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a $a = 2 > 0$, et on a vu que $\Delta > 0$ et après résolution les racines sont $x_1 = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = 1$.

On est donc dans le cas n° 3. On observe que pour satisfaire (I), il faut se placer strictement (car (I) est une inégalité stricte) entre (pour être négatif) les racines. L'ensemble des solutions de (I) est donc $] -\frac{3}{2}; 1[$.

Propriété. Si $\Delta \geq 0$, alors $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ (Utile pour trouver l'autre racine connaissant l'une)

Exemple. Trouver les racines de $f: x \mapsto 2x^2 - x - 1$. En testant des petites valeurs entières $x = 1; 2; 3; -1; -2$ on trouve par chance une racine « évidente » : $f(1) = 0$ donc $x_1 = 1$ est racine évidente.

D'après les relations coefficients racines, on a $1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ donc $x_2 = -\frac{1}{2}$ est l'autre racine.

Propriété. Deux réels ont pour somme S et produit P ssi ils forment les 2 solutions de « $x^2 - Sx + P = 0$ ».