Dérivation

**Rappels**. Toute droite du plan non verticale admet une équation de la forme "  " où et sont des constantes réelles. Dans ce cas l’expression "  " est **l’équation réduite de la droite   
Exemple**. et sont des équations réduites de droites.

|  |
| --- |
| **Définitions. La pente (ou coefficient directeur) d’une droite** non verticale,est le nombre qui indique de combien d’unités la droite monte (ou descend si ) lorsqu’on avance d’une unité vers la droite.  La pente d’une droite d’équation "  " est . s’appelle **l’ordonnée à l’origine** de . |

**Une image contenant ligne, diagramme, Tracé, pente

Description générée automatiquementExemple**. La droite a pour pente et pour ordonnée à l’origine .  
**Exemple**. La droite a pour pente et pour ordonnée à l’origine .  
**Exemple**. La droite a pour pente et pour ordonnée à l’origine .

|  |
| --- |
| **Propriété**. Etant donnés et deux points du plan d’abscisses distinctes ), alors la pente de la droite est |

Une image contenant ligne, diagramme, Tracé, texte

Description générée automatiquement**Exemple**. Donner la pente de la droite passant par et   
La pente de cette droite est .

|  |
| --- |
| **Idée principale. La dérivée d’une fonction en un point (de sa courbe)** est la pente de la fonction en ce point. C’est un nombre qui mesure la « vitesse de variation » de la fonction au point étudié. La notion de dérivée généralise la notion de pente à une fonction.  Contrairement aux droites : Elle dépend du point choisi. Elle n’existe pas toujours. |

Une image contenant ligne, diagramme, Tracé, nombre

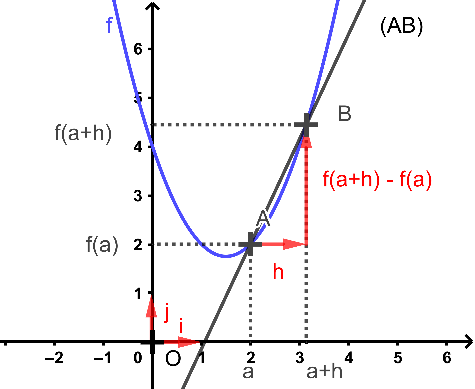
Description générée automatiquement**Exemple**. Sur le graphe de ci-contre, la dérivée de la fonction en est car la droite tangente à au point de d’abscisse , a pour pente .  
On écrit . La fonction « monte à une vitesse de carreaux/unité » en .  
**Exemple**. La dérivée de en est car la tangente a pour pente .  
On écrit . La fonction « descend à une vitesse de carreaux/unité » en

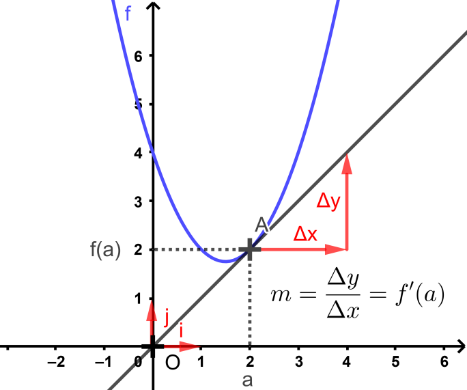
|  |
| --- |
| **Intuitions.** On se place en un point d’abscisse de la courbe d’une fonction .  Si en faisant un zoom infini sur le point, la courbe se déforme et devient une droite (non verticale), alors : - Cette droite est appelée **tangente à la courbe représentative de en** . |
| - La **dérivée de la fonction en** ,notéeest la pente de la tangente à en . |
| - On dit que la fonction est **dérivable en** , (elle admet une dérivée en ). |

**Exemple.** Dans l’exemple précédent, si on zoome sur la courbe en , la courbe se déforme progressivement jusqu’à se confondre avec .   
 est donc la tangente à en , et sa pente est la dérivée de en .  
De même, est ce que l’on voit si on zoome très près de . est la tangente à en .

**Contre exemples.** Il y a des fonctions qui ne sont pas dérivables en certains points.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Une image contenant ligne, diagramme, Tracé, origami  Description générée automatiquement | La valeur absolue  n’est pas dérivable en , car si on zoome sur l’origine, la fonction forme un pic infiniment pointu, et non une droite. Il n’y a pas de tangente en . (Elle est cependant dérivable partout ailleurs) |  | La racine carrée n’est pas dérivable en 0, car si on zoome sur l’origine, la tangente est verticale donc la dérivée en 0 n’est pas un nombre fini. |

**Remarque.** Pour obtenir la tangente et la dérivée, en un point fixé sur la courbe d’une fonction , la définition rigoureuse suivante exprime l’idée que :  
- On commence par tracer la droite où est un point qui bouge librement le long de la courbe, et situé à une distance horizontale de .  
- On rapproche le point du point , en faisant tendre la distance vers .  
- Quand et sont confondus, la droite limite obtenue est la tangente, et la pente limite obtenue est la dérivée. La dérivée est la pente de la tangente.

**Définition.** Soit un intervalle. Soit .   
Soit et des réels de l’intervalle . On note .

|  |
| --- |
| **est dérivable en**  si  existe et est un nombre réel.  Dans ce cas on note . est la **dérivée de en .** |

est appelé **taux d’accroissement de entre et** .  
**Remarque**. Dans la définition, peut être écrit sous la forme ou sous la forme ce qui s’écrit aussi en physique.

**Exemple.** Soit la fonction définie par   
 si . Donc quand , donc .

|  |
| --- |
| **Définition (Tangente).** Si est dérivable en , **la tangente à en** est la droite passant par et de coefficient directeur .  **Propriété.** L’équation de la tangente à en est "  " |

**Exemple.** Donner l’équation réduite de la tangente en de la fonction telle que et .  
. La tangente a pour équation réduite .

|  |
| --- |
| **Définition. est dérivable sur un intervalle**  si elle est dérivable en tout nombre réel de . Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée de la fonction** , la fonction |

**Remarque**. La courbe d’une fonction dérivable sur tout un intervalle, a généralement un aspect lisse.   
Les pics et changements abrupts de direction correspondent à des points de non-dérivabilité.

|  |  |
| --- | --- |
| **Dérivées usuelles**. A chaque ligne, est définie et vaut l’expression de la colonne à gauche *sur tout* . On déduit que est dérivable sur et vaut l’expression dans la dernière colonne sur tout . | **Opérations sur les dérivées**. A chaque ligne :  est un intervalle de .   et sont dérivables sur et à valeurs dans . On déduit que est définie et dérivable sur . |
| |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  | Conditions |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | |  | Conditions | |  | |  |  | |  | |  |  | |  | |  |  | |  | |  |  | |  | |  | ne s’annule pas sur . | |  | |  | ne s’annule pas sur . | |  | |  |  | |  | |  | |  |  | |