Soit une expérience aléatoire d’univers sur laquelle est définie une probabilité .  
Soit et deux évènements. On suppose .

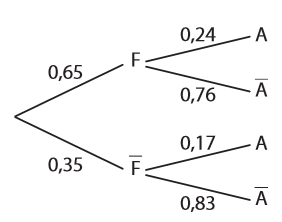
Probabilités conditionnelles et indépendance

|  |
| --- |
| **Définition.** On appelle **probabilité conditionnelle de sachant**  la probabilité que l’évènement se réalise sachant que l’évènement est réalisé. Elle est notée ou et est définie par |
|  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Plein tarif | Demi-tarif | Total |
| Séance du matin | 103 | 91 | 194 |
| Séance du soir | 280 | 26 | 306 |
| Total | 383 | 117 | 500 |

**Exemple.** On donne ci-contre la répartition des spectateurs sur une journée dans une salle de cinéma selon les séances et le tarif. On choisit un de ces spectateurs au hasard et on considère les événements :  
- M : « La personne a assisté à la séance du matin. »   
- D : « La personne a payé demi-tarif. »  
La probabilité que la personne ait assisté à la séance du matin sachant qu’elle a payé demi-tarif est car parmi les 117 personnes ayant payé demi-tarif, 91 sont venues le matin.  
De même, , la probabilité que la personne ait payé demi-tarif, sachant qu’elle a assisté à la séance du matin est . Attention à ne pas confondre et

|  |  |
| --- | --- |
| **Propriété.** Probabilité conditionnelle et intersection On a, de manière équivalente, et   |  | | --- | | **Propriété.** Règle du produit Soit un évènement A tel que et . Dans l’arbre pondéré ci-contre, les probabilités des événements , , , et peuvent être obtenues en multipliant entre-elles les probabilités écrites sur les branches qui « mènent » à l’événement.  **Démonstration.** Cette propriété découle immédiatement de la propriété . | |

**Exemple.** Dans un lycée, les élèves de Terminale faisant la spécialité mathématiques, se répartissent ainsi :  
- 65 % de filles, dont 24 % souhaitent faire PASS.  
- 35 % de garçons, dont 17 % souhaitent faire PASS.  
On tire au sort un de ces élèves et on considère les événements F : « L’élève est une fille. » et A : « L’élève souhaite faire PASS. ». On peut représenter la situation par l’arbre pondéré ci-contre. La probabilité que l’élève tiré au sort soit une fille qui souhaite faire PASS est . La probabilité que l’élève tiré au sort soit un garçon qui ne souhaite pas faire PASS est .

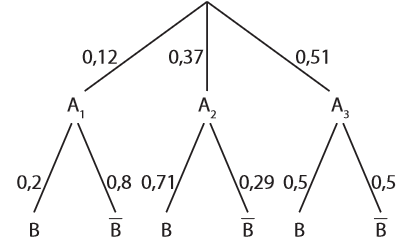
|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | **Définition.** Partition de l’univers. Soit événements de probabilités non nulles . Ces événements forment **une partition de l’univers**  si : - Ils sont disjoints deux à deux, c’est-à-dire   si  - Leur union est l’univers, c’est-à-dire   .  Plus généralement, on dit que forment **une partition d’un événement**  si ils sont disjoints deux à deux et leur union est égale à . | |

**Remarque.** Un événement et son contraire forment toujours une partition de l’univers .

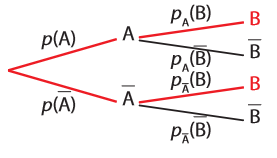
|  |
| --- |
| **Propriété.** Les probabilités d’une partition s’additionnent. Si forment une partition de l’univers , alors  Si forment une partition d’un événement , alors |

**Propriété.** Arbre pondéré et partition.  
On peut construire des arbres pondérés avec plus de deux branches partant d’un même nœud tant que tous les événements « reliés à un même nœud » forment une partition de l’univers.

|  |
| --- |
| **Propriété.** Dans un arbre pondéré, la somme des probabilités des branches issues d’un même nœud est donc toujours égale à . |
|  |

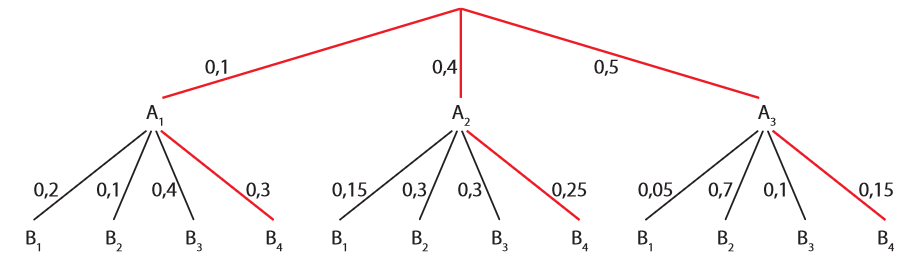
 **Exemple.** Soit , et formant une partition de l’univers. Dans l’arbre ci-contre, les événements reliés à un même nœud (, et d’une part et et d’autre part) forment des partitions de l’univers, c’est donc bien un arbre pondéré.  
On peut y calculer par exemple :

|  |
| --- |
| **Propriété.** **Formule des probabilités totales (cas particulier)** Soit et deux événements. On suppose que et . Alors : **Remarque.** Sur un arbre pondéré, on peut comprendre la formule des probabilités totales comme le fait que l’on additionne les probabilités et associées aux « chemins » pour lesquels est réalisé, représentés en rouge sur l’arbre ci-contre. |

**Exemple.** On reprend l’exemple des élèves d’un lycée faisant la spécialité mathématiques. La probabilité qu’un élève souhaite faire PASS est :   
.

|  |
| --- |
| **Propriété.** **Formule des probabilités totales (cas général).** Soit formant une partition de l’univers. Soit un événement. Alors , , …, forment une partition de l’événement , de plus on a  Ce résultat est aussi appelé la formule de Bayes. |

**Exemple.** Pour l’arbre pondéré ci-dessous (on admet que et d’une part et et d’autre part forment 2 partitions), .



**Indépendance de deux évènements**

Soit et deux événements tels que et .

|  |
| --- |
| **Définition.** Indépendance de deux événements. On dit que et sont des **événements indépendants** si . Concrètement, cela veut dire que le fait que A soit réalisé n’a pas d’influence sur la probabilité de réalisation de B. De manière symétrique, on a alors également |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Adulte | Enfant | Total |
| Handball | 73 | 174 | 247 |
| Basket-ball | 45 | 135 | 180 |
| Gymnastique | 14 | 87 | 101 |
| Total | 132 | 396 | 528 |

**Exemple.** On donne la répartition des licenciés dans un club. On tire au sort une personne de ce club pour une tombola et on considère les événements A : « La personne est adulte. » et B : « La personne pratique le basket-ball. ».   
On constate que et .   
Ainsi donc et sont indépendants.

|  |
| --- |
| **Propriété.** Indépendance et intersection  et sont indépendants si et seulement si . |

**Exemple.** Dans l’exemple précédent, on appelle G l’événement « La personne pratique la gymnastique ». On a alors et   
Donc d’une part. D’autre part, .   
Ainsi, donc et ne sont pas indépendants.

**Remarque.** Si et sont indépendants, alors et le sont, et le sont, et le sont.