**Hypothèses**. Soit une expérience aléatoire, d’univers et de loi de probabilité .

Probabilités conditionnelles et indépendance

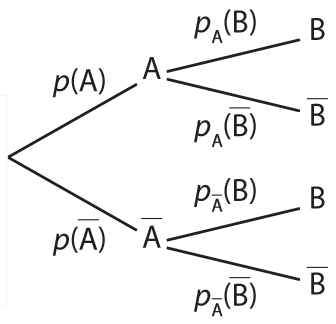
**Définition.** Soit et deux événements, avec de probabilité non nulle.  
On appelle **probabilité de *sachant***  la probabilité que se réalise *sachant* que s’est réalisé.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Plein tarif | Demi-tarif | Total |
| Séance du matin | 103 | 91 | 194 |
| Séance du soir | 280 | 26 | 306 |
| Total | 383 | 117 | 500 |

**Exemple.** On donne ci-contre la répartition des spectateurs sur une journée dans une salle de cinéma selon les séances et le tarif. On choisit un de ces spectateurs au hasard et on considère les événements :  
- : « La personne a payé demi-tarif. »  
- : « La personne a assisté à la séance du matin. »   
La probabilité que la personne ait assisté à la séance du matin sachant qu’elle a payé demi-tarif est car parmi les 117 personnes ayant payé demi-tarif, 91 sont venues le matin.  
De même, , la probabilité que la personne ait payé demi-tarif, sachant qu’elle a assisté à la séance du matin est . Attention à ne pas confondre et

**Propriété.** Soit et deux événements de probabilité . Puisque alors :

**Exemple**. Si la probabilité d’être fumeur est  ; si la probabilité d’être fumeur *sachant* qu’on a le cancer est  ; et si la probabilité d’avoir le cancer est  ; Alors :  
La probabilité qu’un fumeur ait le cancer est

**Représentation**. Dans un **arbre pondéré**, on représente les probabilités conditionnelles comme ci-contre.

**Propriété.** Dans un arbre pondéré, la somme des probabilités des branches issues d’un même nœud est toujours égale à .

Une image contenant ligne, diagramme, Police, blanc

Description générée automatiquement**Exemple.** Lors d’une colonie de vacances, il y a :  
- 65 % de filles, dont 24 % font de la randonnée.  
- 35 % de garçons, dont 17 % font de la randonnée.  
On choisit un enfant au hasard.  
On note l’événement « L’enfant est une fille. »  
On note l’événement « L’enfant fait de la randonnée. »   
On a . Donc .  
On a . Donc .  
On a . Donc .

**Méthode**. Dans un arbre pondéré, on peut calculer en multipliant les probabilités le long du chemin qui contient et .

**Ex.** La probabilité que l’enfant soit une fille qui fait de la randonnée est . La probabilité que l’enfant soit un garçon qui ne fait pas de randonnée est .

**Définition.** Une **partition** d’un événement est un ensemble de événements tels que:  
- Ils sont tous de probabilités non nulles   
- Ils sont disjoints deux à deux, c’est-à-dire si   
- Leur union est l’univers, c’est-à-dire  .

**Idée**. Une **partition** d’un événement est une classification de toutes ses issues en catégories séparées.

**Exemples.** On choisit un être humain au hasard parmi l’ensemble des êtres humains.   
 { "Vit dans l’hémisphère nord" ; "Vit dans l’hémisphère sud" } est une partition de .  
{ "Age 18 ans" ; "18 ans Age 50 ans " ; "Age 50 ans" } est une partition de .  
{"A les yeux verts" ; "A les yeux marrons"} n’est pas un partition de car il existe des gens aux yeux bleus.

**Propriété.** Les probabilités d’une partition s’additionnent.  
Si forment une partition d’un événement , alors   
Si forment une partition de l’univers , alors

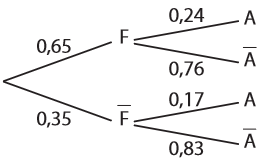
**Remarque.** Un événement et son contraire forment une partition de l’univers d’où

**Propriété.** Dans un arbre pondéré, la somme des probabilités des branches issues d’un même nœud est toujours égale à . (Car ces événements forment une partition de l’événement associé au nœud.)

Une image contenant ligne, Police, texte, diagramme

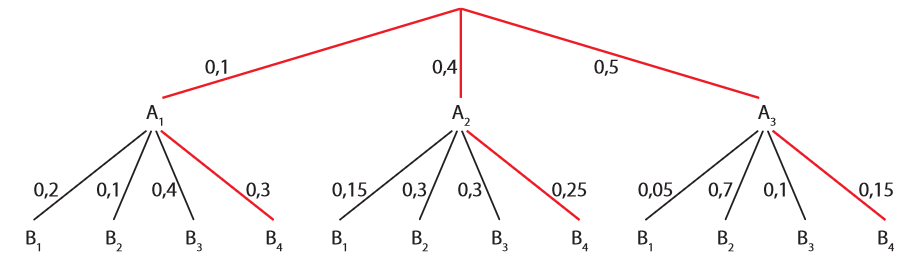
Description générée automatiquement**Propriété.** **Formule des probabilités totales (cas particulier)**

|  |
| --- |
| **Méthode.** Dans un arbre pondéré, pour calculer  :   * On repère tous les chemins qui mènent à * On multiplie les probabilités le long de chaque chemin * On ajoute les probabilités obtenues |

**Exemple.** On reprend l’exemple de la colonie de vacances.   
La probabilité qu’un enfant fasse de la randonnée est :  
.

**Propriété.** **Formule des probabilités totales (cas général).**  
Soit formant une partition de l’univers. Soit un événement.  
Alors , , …, forment une partition de l’événement et

**Exemple.** Pour l’arbre pondéré ci-dessous



**Indépendance de deux évènements**

**Définition.** On dit que deux événements et de probabilités non nulles, sont **indépendants** si :

Le fait que A soit réalisé ou non n’a pas d’influence sur la probabilité de réalisation de B.   
De manière symétrique, on a alors également

**Exemple.** On observe le résultat d’un lancer de dé équilibré, et on observe le temps qu’il fait aujourd’hui.  
Savoir si " Il pleut ", n’a aucune influence, sur la probabilité de " Obtenir le numéro 6 ".  
La probabilité d’obtenir 6 sachant qu’il pleut, est identique à la probabilité d’obtenir 6.   
" Il pleut " et " Obtenir le numéro 6 " sont des événements indépendants.

**Contre-Exemple.** On jette un dé équilibré. On note  " le résultat est pair " et " le résultat est 6 "  
 mais donc et ne sont pas indépendants.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Exemple.** On donne la répartition des licenciés dans un club. On tire au sort une personne de ce club pour une tombola et on considère les événements A : « La personne est adulte. » et B : « La personne pratique le basket-ball. ».   et .  Ainsi donc et sont indépendants. | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | |  | Adulte | Enfant | Total | | Handball | 73 | 174 | 247 | | Basket-ball | 45 | 135 | 180 | | Gymnastique | 14 | 87 | 101 | | Total | 132 | 396 | 528 | |

|  |
| --- |
| **Propriété.** Soit deux événements et de probabilités non nulles.  et sont indépendants si et seulement si . |

**Exemple.** On observe le résultat d’un lancer de dé équilibré, et on observe le temps qu’il fait aujourd’hui.  
On note " Il pleut ", et " Obtenir le numéro 6 ". On suppose que .  
Il est raisonnable de supposer que et sont indépendants car ils n’ont pas d’influence l’un sur l’autre.  
On en déduit que (" Il pleut et on obtient le numéro 6 ")

**Preuve**. et indépendants

**Remarque.** Si et sont indépendants, alors et le sont, et le sont, et le sont.