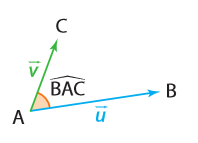
**Hypothèse.** On se place dans un repère orthonormé .

|  |
| --- |
| **Définition.** Un vecteur est **unitaire** ssi il est de norme , autrement dit s’il est de longueur . **Exemple**. Dans un repère orthonormé , les vecteurs sont unitaires (et orthogonaux). **Remarque.** On peut rendre un vecteur unitaire en le divisant par sa norme. est toujours de norme . |

**Définition.** **Angle orienté**. Si et sont unitaires : Soit et les points tels que ,.  
 et sont 2 points du cercle trigonométrique puisque et sont unitaires et est de rayon .  
**L’angle orienté de et** noté est défini comme la longueur de l’arc de cercle , modulo , comptée positivement dans le sens direct, négativement dans le sens indirect.  
Si et sont quelconques : on se ramène au cas unitaire. est défini comme l’angle orienté .

|  |
| --- |
| **Définition.** **Angle géométrique**. Intuitivement, l’angle géométrique de et noté correspond à l’angle saillant (entre 0 et ) que l’on mesure directement au rapporteur entre et si on les fait partir d’un même point. est donc toujours dans l’intervalle . |

Rigoureusement, peut se définir comme la valeur absolue de la mesure principale (celle dans ) de l’angle orienté .   
**Remarque et définition**. Dans un repère orthonormé , l’angle géométrique vaut toujours , mais l’angle orienté peut valoir soit , soit .  
Un repère orthonormé est **direct** (resp. **indirect**) ssi (resp. ).  
**Propriété (admise)**. Les longueurs et les angles géométriques ne changent pas lorsque l’on change de repère orthonormé. Les angles orientés ne changent pas par changement de repère orthonormé direct.

1. **Point de vue géométrique du produit scalaire**

|  |
| --- |
| **Théorème.** **Loi des cosinus**, ou **formule d’Al-Kashi** (généralisation du théorème de Pythagore) Dans un triangle quelconque, on a, par exemple . On l’écrit parfois sous la forme en notant , |

**Exemple**. Soit un triangle tel que , et . Calculer la longueur .  
 et donc

|  |
| --- |
| **Définition**. **Produit scalaire**. Soit et deux vecteurs du plan tous deux non nuls. On appelle **produit scalaire de et**  et on note le nombre réel défini par : Si et , alors le produit scalaire s’écrit :  La loi des cosinus se réécrit alors . Dans le cas où est nul ou est nul, on définit . (l’angle n’a pas de sens dans ce cas) |

**Exemple**. Soit deux vecteurs et tels que et et .  
Leur produit scalaire vaut =

|  |
| --- |
| **Propriétés**. Soit deux vecteurs non nuls. On a puisque  • et sont colinéaires de même sens  • et sont colinéaires de sens opposé  • et sont orthogonaux  ( Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. ) |

**Propriété (projeté orthogonal)**. Soit trois points (ou deux vecteurs qu’on fait partir d’un même point ). Alors où est le projeté orthogonal de sur . Le signe est si est de même sens que , et sinon.

1. **Point de vue algébrique du produit scalaire**

|  |
| --- |
| **Théorème.** Calculer un produit scalaire de vecteurs à partir de leurs coordonnées. Dans un repère orthonormé, si et , alors |

**Démonstration**. On peut choisir 3 points tels que et .  
D’une part, d’après Chasles : .  
D’autre part, d’après la loi des cosinus, et la définition géométrique du produit scalaire :  
   
Ainsi , donc :  
   
   
.  
**Exemple**. Le produit scalaire de et vaut

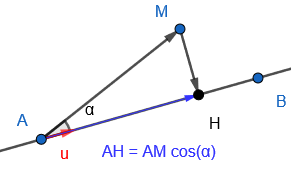
**Théorème.** Propriétés algébriques du produit scalaire.  
Soit trois vecteurs du plan, et un réel. Alors :  
• (commutativité) • donc   
• (distributivité) •   
• • (Loi des cosinus)

|  |
| --- |
| **Propriété**. Dans un repère orthonormé, deux vecteurs et sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul si et seulement si . |

**Exemple**. On considère les vecteurs et . Leur produit scalaire vaut :  
 donc les deux vecteurs et ne sont pas orthogonaux.

|  |
| --- |
| **Propriété.** Etant donné deux points et et leur milieu , on a  **Propriété**. Soit et deux points distincts. L’ensemble des points du plan tels que est le cercle de diamètre . **Propriété**. Soit , et trois points distincts.  est rectangle en si et seulement si appartient au cercle de diamètre . |

**Propriété**. Pour calculer les coordonnées d’un vecteur dans un repère orthonormé, on projette le vecteur sur les vecteurs de base. Dans un repère orthonormé ,  
Les coordonnées d’un vecteur vérifient  et .   
Les coordonnées d’un point vérifient et .

**Propriété et définitions**. Soit une droite.  
Alors est un vecteur unitaire directeur de cette droite .  
Soit un point du plan. Soit le projeté orthogonal de sur la droite .  
Alors : et   
 est appelé **vecteur projeté orthogonal** du vecteur sur la droite .  
 est appelé **composante** de le long de la droite (orientée par ).