**Une image contenant ligne, Tracé, reçu, diagramme

Description générée automatiquementProduit scalaire**

|  |
| --- |
| **Définition.** La **norme (ou longueur) d’un vecteur** , est définie par  **Définition.** La **longueur de**  est |

**Exemple.** Soit , alors . est de longueur .

|  |
| --- |
| **Définition.** Un vecteur est **unitaire** ssi il est de norme , autrement dit s’il est de longueur . **Remarque.** On peut rendre un vecteur unitaire en le divisant par sa norme. est toujours de norme . |

Une image contenant ligne, diagramme, Tracé

Description générée automatiquement  
**Définition.** Soit et deux vecteurs non nuls. On note et les points tels que et .   
 et sont alors deux points situés sur le cercle de centre et de rayon .  
**L’angle orienté de et** noté est défini comme la longueur de l’arc de cercle , modulo , comptée positivement dans le sens direct, négativement dans le sens indirect. Sa **mesure principale** est exprimée dans l’intervalle .  
**L’angle géométrique (non-orienté)** **de et** noté est défini comme la valeur absolue de la mesure principale de l’angle orienté . est donc un nombre dans l’intervalle .

|  |
| --- |
| **Remarque.** Visuellement, l’angle géométrique de et noté correspond à l’angle saillant que l’on mesure directement au rapporteur entre et si on les fait partir d’un même point. est un nombre dans l’intervalle . |

**Définition**. Deux vecteurs non nuls sont **orthogonaux**, s’ils forment un angle géométrique valant .  
**Définition**. Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires**, s’ils forment un angle géométrique valant ou .  
**Propriété.** Deux vecteurs non nuls et sont **colinéaires** ssi il existe un réel tel que .

|  |
| --- |
| **Définition**. Un **repère** désigne la donnée d’un point et de vecteurs et non colinéaires. |

**Propriété et définition**. Soit . Soit un vecteur . Il existe d’uniques tels que .  
 et sont **les coordonnées du vecteur dans le repère** . On note   
**Propriété et définition**. Soit un point . Il existe d’uniques tels que .  
 et sont **les coordonnées du point dans le repère** . On note

|  |
| --- |
| **Remarque**. Quand on change de repère , les coordonnées d’un vecteur ou d’un point changent. Cependant, la plupart des formules vectorielles restent valables, si on les écrit dans un même repère . |

**Définition**. On note le **repère canonique**. Jusqu’ici, on a toujours utilisé .

|  |
| --- |
| **Définition**. Un **repère** est **orthonormé** si et sont orthogonaux et de longueur (dans . |

Une image contenant ligne, diagramme, Tracé, texte

Description générée automatiquement **Exemples.** Ici on considère comme le repère de référence.Ci-contre, les repères , et sont orthonormés.   
Les longueurs ont donc la même mesure dans ,, .  
 n’est pas orthonormé car ses vecteurs sont de longueur 2 (en les mesurant dans ).  
 n’est pas orthonormé car ses vecteurs ne sont pas orthogonaux (au sens de ).

**Propriété**. Les longueurs et angles géométriques ne changent pas si on change de repère orthonormé

|  |
| --- |
| **Définition (Produit scalaire).** Dans un repère orthonormé, si et , alors on appelle **produit scalaire de et**  et on note le nombre réel défini par : |

**Exemple**. Le produit scalaire de et vaut

**Propriété**. Expression algébrique de la norme

**Théorème.** Propriétés algébriques du produit scalaire.  
Soit trois vecteurs du plan, et un réel. Alors :  
• (commutativité) • donc   
• (distributivité) •   
• •

|  |
| --- |
| **Propriété**. Soit et , dans un repère orthonormé.  et orthogonaux . |
| Dans un repère orthonormé, deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul |

**Exemple**. On considère les vecteurs et . Leur produit scalaire vaut :  
 donc les deux vecteurs et ne sont pas orthogonaux.

|  |
| --- |
| **Propriété.** Etant donné deux points et et leur milieu , on a  **Propriété**. Soit et deux points distincts. Un point vérifie :  ssi appartient cercle de diamètre . **Propriété**. Soit , et trois points distincts.  est rectangle en si et seulement si appartient au cercle de diamètre . |

|  |
| --- |
| **Théorème.** **Loi des cosinus**, ou **formule d’Al-Kashi** (généralisation du théorème de Pythagore) Dans un triangle quelconque, on a, par exemple . On l’écrit parfois sous la forme en notant , |

**Exemple**. Soit un triangle tel que , et . Calculer la longueur .  
 et donc

**Corollaire**. Pour tous vecteurs et non nuls,   
**Rappel**. Pour tous vecteurs et ,

|  |
| --- |
| **Propriété**. **Produit scalaire (définition géométrique)**. Soit et deux vecteurs du plan non nuls. Alors Si et , alors le produit scalaire s’écrit  Le produit scalaire est invariant par changement de repère orthonormé. (Car les longueurs et angles géo. le sont) |

**Exemple**. Soit deux vecteurs et tels que et et .  
Leur produit scalaire vaut =

|  |
| --- |
| **Propriétés**. Soit deux vecteurs non nuls. On a puisque  • et sont colinéaires de même sens  • et sont colinéaires de sens opposé  • et sont orthogonaux  Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. |

**Propriété (projeté orthogonal)**. Soit trois points (ou deux vecteurs qu’on fait partir d’un même point ). Alors où est le projeté orthogonal de sur . Le signe est si est de même sens que , et sinon.

**Propriété**. Pour calculer les coordonnées d’un vecteur dans un repère orthonormé, on projette le vecteur sur les vecteurs de base. Dans un repère orthonormé ,  
Les coordonnées d’un vecteur vérifient  et .   
Les coordonnées d’un point vérifient et .

Une image contenant ligne, diagramme

Description générée automatiquement**Propriété et définitions**. Soit une droite.  
Alors est un vecteur unitaire directeur de cette droite .  
Soit un point du plan. Soit le projeté orthogonal de sur la droite .  
Alors : et   
 est appelé **vecteur projeté orthogonal** du vecteur sur la droite .  
 est appelé **composante** de le long de la droite (orientée par ).