Produit scalaire algébrique

|  |
| --- |
| **Définition (Produit scalaire).** Dans un repère orthonormé, si et , alors on appelle **produit scalaire de et**  et on note le *nombre* défini par |

**Exemple**. Le produit scalaire de et est    
Attention le produit scalaire n’est pas une multiplication . et sont des *vecteurs* et pas des nombres.  
**Exemple**.

**Hypothèses**. Soit trois vecteurs du plan, et un réel.

**Propriété**. Le produit scalaire est commutatif. **Exemple.**

**Propriété**. Le produit scalaire est distributif sur .   
**Exemple.**

**Propriété**. Dans un produit scalaire, les constantes peuvent être sorties devant  
**Exemple.**

**Une image contenant ligne, Tracé, reçu, diagramme

Description générée automatiquementRappel.** La **norme** (ou **longueur**) d’un vecteur , est définie par

**Exemple.** Soit , alors . est de longueur .

**Propriété**. Le carré scalaire est égal au carré de la norme.

**Exemple**. . Aussi    
Attention : est un nombre donc . Mais dans il s’agit du produit scalaire et pas .

**Corollaire**. La norme d’un vecteur est la racine de son carré scalaire.

Une image contenant ligne, diagramme

Description générée automatiquement**Propriété**. 1ère identité remarquable vectorielle. **Propriété**. 2ème identité remarquable vectorielle.   
**Preuve**.

**Propriété**. Dans un repère orthonormé, deux vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul.

et orthogonaux .

**Exemple.** Montrer que et sont orthogonaux.  
 donc les vecteurs et sont orthogonaux.

Une image contenant ligne, cercle, diagramme

Description générée automatiquement**Propriété**. Soit deux points distincts. Soit un point.  
 appartient au cercle de diamètre ssi ssi est rectangle en (quand )  
L’ensemble des points tels que est le cercle de diamètre .

**Exemple**. Si  et , donner une équation du cercle de diamètre   
On note ce cercle. Soit un point du plan.

**Propriété.** Etant donné deux points et et leur milieu , on a

**Exemple**. Soit

**Rappel**. est un **vecteur directeur de la droite**  ssi est colinéaire à ssi   
**Propriété**. Un vecteur directeur d’une droite d’équation cartésienne "  " est .

**Définition**. est un **vecteur normal à la droite**  ssi est orthogonal à ssi   
**Propriété**. Un vecteur normal à une droite d’équation cartésienne "  " est .

**Exemple.** Déterminer une équation de la droite de vecteur normal et passant par .  
Soit un point du plan.

Rappels

**Vocabulaire.** Un vecteur est **unitaire** ssi il est de norme , autrement dit s’il est de longueur .

**Remarque.** On peut rendre un vecteur unitaire en le divisant par sa norme. est toujours de norme .

Une image contenant ligne, diagramme, Tracé

Description générée automatiquement**Définition.** **L’angle géométrique entre deux vecteurs non nuls et** noté est défini comme la longueur, le long du cercle de centre de rayon , de l’arc le plus court possible entre et , les points de tels que et .

**Idée.** correspond à l’angle saillant que l’on mesure directement au rapporteur entre et si on les fait partir d’un même point.

**Remarque.**  est toujours un nombre dans l’intervalle

**Définition**. Deux vecteurs non nuls sont **orthogonaux**, s’ils forment un angle géométrique valant (droit).  
**Propriété.** Deux vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul

**Définition**. Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires**, s’ils forment un angle géométrique valant ou .  
**Propriété.** Deux vecteurs non nuls et sont colinéairesssi il existe un réel tel que .  
**Propriété.** Deux vecteurs non nuls et sont colinéairesssi

**Définition**. Un **repère** désigne la donnée d’un point et de vecteurs et non colinéaires.

**Propriété**. Soit . Soit un vecteur . Il existe d’uniques tels que .  
**Définition.** et sont **les coordonnées du vecteur dans le repère** . On note   
**Propriété**. Soit un point . Il existe d’uniques tels que .  
**Définition.** et sont **les coordonnées du point dans le repère** . On note

**Remarque**. Quand on change de repère , les coordonnées d’un vecteur ou d’un point changent.  
Cependant, la plupart des formules vectorielles restent valables, si on les écrit dans un même repère .

**Définition**. On note le **repère canonique**.   
Il sert de référence pour les repères orthonormés.

**Définition**. Un **repère** est **orthonormé** si et sont orthogonaux et de longueur (dans .

Une image contenant ligne, diagramme, Tracé, texte

Description générée automatiquement **Exemples.** Ici on considère comme le repère de référence.Ci-contre, les repères , et sont orthonormés.   
Les longueurs ont donc la même mesure dans ,, .  
 n’est pas orthonormé car ses vecteurs sont de longueur 2 (en les mesurant dans ).  
 n’est pas orthonormé car ses vecteurs ne sont pas orthogonaux (au sens de ).

**Propriété**. Les longueurs et angles géométriques ne changent pas si on change de repère orthonormé

Produit scalaire géométrique

Une image contenant ligne, triangle, diagramme

Description générée automatiquement**Théorème.** **Loi des cosinus**, ou **formule d’Al-Kashi**  
Dans un triangle quelconque, on a, par exemple :  
En posant , , on peut écrire :

**Exemple**. Soit un triangle tel que , et . Calculer la longueur .  
 et donc

**Corollaire (Al-Kashi vectoriel)**. Pour et non nuls, **Rappel. Produit scalaire (algébrique).** Si dans un repère orthonormé :   
**Rappel. (2ème identité remarquable)**. Pour tous et ,

|  |
| --- |
| **Propriété**. **Produit scalaire (géométrique)**. Soit et non nuls dans un repère orthonormé. Alors : Si et , alors le produit scalaire s’écrit |

**Exemple**. Soit deux vecteurs et tels que et et .  
Leur produit scalaire vaut =

**Corollaires**. Soit deux vecteurs non nuls. On a puisque   
• et sont orthogonaux   
• et sont colinéaires de même sens   
• et sont colinéaires de sens opposé

**Propriété (Interprétation géométrique)**. Soit trois points (ou deux vecteurs qu’on fait partir d’un même point ). Alors où est le projeté orthogonal de sur .   
Le signe est si est de même sens que , et sinon.

**Exemple**.

**Propriété**. Le produit scalaire est invariant par changement de repère orthonormé (Car les longueurs et angles géométriques le sont). Ainsi, dans tout repère orthonormé ,

**Corollaire**. Dans tout repère orthonormé   
Les coordonnées d’un vecteur dans peuvent s’obtenir en calculant  et .   
Les coordonnées d’un point dans peuvent s’obtenir en calculant et .

**Exemple**.

**Méthode**. Pour déterminer la composante d’un vecteur dans une direction donnée, on « projette » sur un vecteur directeur *unitaire* dans la direction souhaitée. (On calcule )

**Exemple**. Une piste de ski est représentée par une droite qui descend avec une pente de °.   
La piste est donc dirigée par le vecteur unitaire . Un skieur de 70 kg, subit son poids comme une force d’environ 700 N vers le bas, donc . La composante du poids du skieur le long de la piste est donc N.