Produit scalaire algébrique

|  |
| --- |
| **Définition (Produit scalaire).** Dans un repère orthonormé, si et , alors on appelle **produit scalaire de et**  et on note le *nombre* défini par |

**Exemple**. Le produit scalaire de et est    
Attention le produit scalaire n’est pas une multiplication . et sont des *vecteurs* et pas des nombres.  
**Exemple**.

**Hypothèses**. Soit trois vecteurs du plan, et un réel.

**Propriété**. Le produit scalaire est commutatif. **Exemple.**

**Propriété**. Le produit scalaire est distributif sur .   
**Exemple.**

**Une image contenant ligne, Tracé, reçu, diagramme

Description générée automatiquementPropriété**. Les constantes dans un produit scalaire, peuvent être sorties.  **Exemple.**

**Rappel.** La **norme** (ou **longueur**) d’un vecteur , est définie par   
**Rappel.** La **longueur de**  est

**Exemple.** Soit , alors . est de longueur .

**Propriété**. Le carré scalaire est égal au carré de la norme.

**Exemple**. . Aussi    
Attention : est un nombre donc . Mais dans il s’agit du produit scalaire et pas .

**Corollaire**. La norme d’un vecteur est la racine de son carré scalaire.

Une image contenant ligne, diagramme

Description générée automatiquement**Propriété**. 1ère identité remarquable vectorielle. **Propriété**. 2ème identité remarquable vectorielle.   
**Preuve**.

**Propriété**. Dans un repère orthonormé, deux vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul.

et orthogonaux .  
**Exemple.** Montrer que et sont orthogonaux.  
 donc les vecteurs et sont orthogonaux.

|  |
| --- |
| **Propriété**. Soit deux points distincts. Soit un point.  appartient au cercle de diamètre ssi ssi est rectangle en (quand ) Autrement dit : L’ensemble des points tels que est le cercle de diamètre . |

**Exemple**. Déterminer l’ensemble des points tels que

**Propriété.** Etant donné deux points et et leur milieu , on a

**Rappel**. est un **vecteur directeur de la droite**  ssi est colinéaire à ssi   
**Propriété**. Un vecteur directeur d’une droite d’équation cartésienne "  " est .

|  |
| --- |
| **Définition**. est un **vecteur normal à la droite**  ssi est orthogonal à ssi  **Propriété**. Un vecteur normal à une droite d’équation cartésienne "  " est . |

Rappels

Une image contenant ligne, diagramme, Tracé

Description générée automatiquement**Définition.** Un vecteur est **unitaire** ssi il est de norme , autrement dit s’il est de longueur .  
**Remarque.** On peut rendre un vecteur unitaire en le divisant par sa norme. est toujours de norme .  
**Définitions.** Soit et deux vecteurs non nuls. On note et les points tels que et .   
 et sont alors deux points situés sur le cercle de centre et de rayon .  
**L’angle orienté de et** noté est défini comme la longueur de l’arc de cercle , modulo , comptée positivement dans le sens direct, négativement dans le sens indirect. Sa **mesure principale** est exprimée dans l’intervalle .  
**L’angle géométrique (non-orienté)** **de et** noté est défini comme la valeur absolue de la mesure principale de l’angle orienté . est donc un nombre dans l’intervalle .

|  |
| --- |
| **Remarque.** Visuellement, l’angle géométrique de et noté correspond à l’angle saillant que l’on mesure directement au rapporteur entre et si on les fait partir d’un même point. est un nombre dans l’intervalle . |

**Définition**. Deux vecteurs non nuls sont **orthogonaux**, s’ils forment un angle géométrique valant (droit).  
**Propriété.** Deux vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul

**Définition**. Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires**, s’ils forment un angle géométrique valant ou .  
**Propriété.** Deux vecteurs non nuls et sont colinéairesssi il existe un réel tel que .  
**Propriété.** Deux vecteurs non nuls et sont colinéairesssi

**Définition**. Un **repère** désigne la donnée d’un point et de vecteurs et non colinéaires.

**Propriété**. Soit . Soit un vecteur . Il existe d’uniques tels que .  
**Définition.** et sont **les coordonnées du vecteur dans le repère** . On note   
**Propriété**. Soit un point . Il existe d’uniques tels que .  
**Définition.** et sont **les coordonnées du point dans le repère** . On note

|  |
| --- |
| **Remarque**. Quand on change de repère , les coordonnées d’un vecteur ou d’un point changent. Cependant, la plupart des formules vectorielles restent valables, si on les écrit dans un même repère . |

**Définition**. On note le **repère canonique**. Jusqu’ici, on a toujours utilisé .

|  |
| --- |
| **Définition**. Un **repère** est **orthonormé** si et sont orthogonaux et de longueur (dans . |

Une image contenant ligne, diagramme, Tracé, texte

Description générée automatiquement **Exemples.** Ici on considère comme le repère de référence.Ci-contre, les repères , et sont orthonormés.   
Les longueurs ont donc la même mesure dans ,, .  
 n’est pas orthonormé car ses vecteurs sont de longueur 2 (en les mesurant dans ).  
 n’est pas orthonormé car ses vecteurs ne sont pas orthogonaux (au sens de ).

**Propriété**. Les longueurs et angles géométriques ne changent pas si on change de repère orthonormé

Produit scalaire géométrique

|  |
| --- |
| **Théorème.** **Loi des cosinus**, ou **formule d’Al-Kashi** **(généralisation de Pythagore)** Dans un triangle quelconque, on a, par exemple :  On l’écrit parfois sous la forme en notant , |

**Exemple**. Soit un triangle tel que , et . Calculer la longueur .  
 et donc

**Corollaire (Al-Kashi vectoriel)**. Pour et non nuls, **Rappel. Produit scalaire (algébrique).** Si dans un repère orthonormé :   
**Rappel. (2ème identité remarquable)**. Pour tous et ,

|  |
| --- |
| **Propriété**. **Produit scalaire (géométrique)**. Soit et non nuls dans un repère orthonormé. Alors : Si et , alors le produit scalaire s’écrit |

**Exemple**. Soit deux vecteurs et tels que et et .  
Leur produit scalaire vaut =

|  |
| --- |
| **Propriété (Interprétation géométrique)**. Soit trois points (ou deux vecteurs qu’on fait partir d’un même point ). Alors où est le projeté orthogonal de sur .  Le signe est si est de même sens que , et sinon. |

**Corollaires**. Soit deux vecteurs non nuls. On a puisque   
• et sont orthogonaux   
• et sont colinéaires de même sens   
• et sont colinéaires de sens opposé

**Propriété**. Le produit scalaire est invariant par changement de repère orthonormé.   
Dans n’importe quel repère orthonormé ,

**Méthode**. Pour déterminer les coordonnées inconnues d’un objet dans un repère orthonormé,   
On « projette » (on applique le produit scalaire) sur les vecteurs de base du repère.  
**Propriété**. Dans tout repère orthonormé   
Les coordonnées d’un vecteur dans peuvent s’obtenir en calculant  et .   
Les coordonnées d’un point dans peuvent s’obtenir en calculant et .

**Méthode**. Pour déterminer la « composante » d’un vecteur dans une direction donnée, on « projette » sur un vecteur directeur *unitaire* dans la direction souhaitée. (On calcule )  
**Exemple**. Une piste de ski est représentée par une droite qui descend avec une pente de °.   
La piste est donc dirigée par le vecteur unitaire . Un skieur de 70 kg, subit son poids comme une force d’environ 700 N vers le bas, donc . La composante du poids du skieur le long de la piste est donc N.