Produit scalaire algébrique

|  |
| --- |
| **Définition (Produit scalaire).** Dans un repère orthonormé, si et , alors on appelle **produit scalaire de et**  et on note le *nombre* défini par |

**Exemple**. Le produit scalaire de et est    
Attention le produit scalaire n’est pas une multiplication . et sont des *vecteurs* et pas des nombres.  
**Exemple**.

**Hypothèses**. Soit trois vecteurs du plan, et un réel.

**Propriété**. Le produit scalaire est commutatif. **Exemple.**

**Propriété**. Le produit scalaire est distributif sur .   
**Exemple.**

**Propriété**. Dans un produit scalaire, les constantes peuvent être sorties devant  
**Exemple.**

**Rappel.** La **norme** (ou **longueur**) d’un vecteur , est définie par

**Exemple.** Soit , alors . est de longueur .

**Propriété**. Le carré scalaire est égal au carré de la norme.

**Exemple**. . Aussi    
Attention : est un nombre donc . Mais dans il s’agit du produit scalaire et pas .

**Corollaire**. La norme d’un vecteur est la racine de son carré scalaire.

Une image contenant ligne, diagramme

Description générée automatiquement**Propriété**. 1ère identité remarquable vectorielle. **Propriété**. 2ème identité remarquable vectorielle.   
**Preuve**.

**Propriété**. Dans un repère orthonormé, deux vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul.

et orthogonaux .

**Exemple.** Montrer que et sont orthogonaux.  
 donc les vecteurs et sont orthogonaux.

Une image contenant ligne, cercle, diagramme

Description générée automatiquement**Propriété**. Soit deux points distincts. Soit un point.  
 appartient au cercle de diamètre ssi   
L’ensemble des points tels que est le cercle de diamètre .

**Exemple**. Si  et , donner une équation du cercle de diamètre   
On note ce cercle. Soit un point du plan.

**Propriété.** Etant donné deux points et et leur milieu , on a

**Exemple**. Soit  et , déterminer l’ensemble des points tels que .  
On note le milieu de . On a .   
De plus   
Soit un point du plan.  
   
 est un cercle de centre et de rayon .

**Rappel**. est un **vecteur directeur de la droite**  ssi est colinéaire à ssi   
**Rappel**. Un vecteur directeur d’une droite d’équation cartésienne "  " est .

**Définition**. est un **vecteur normal à la droite**  ssi est orthogonal à ssi   
**Propriété**. Un vecteur normal à une droite d’équation cartésienne "  " est .

**Exemple.** Les droites et sont-elles perpendiculaires ?  
Leurs vecteurs normaux sont et , or donc .   
On pouvait aussi utiliser les vecteurs directeurs. Pour traduire des situations avec des droites, on a souvent le choix entre vecteur directeur / vecteur normal, et entre produit scalaire nul / déterminant nul.

Une image contenant ligne, diagramme, Tracé, Parallèle

Description générée automatiquement**Définition**. Le **projeté orthogonal** **d’un point sur une droite** est le point tel que   
Si on connait l’équation de , c’est le point t.q.   
Si on connait deux points et de , c’est le point tel que

**Exemple.** Déterminer le projeté orthogonal du point sur la droite où et .   
   
   
   
   
On résout Le projeté orthogonal de sur est .

Pour aller plus loin…

Changements de repère.

**Propriété**. Dans tout repère orthonormé   
Les coordonnées d’un vecteur dans peuvent s’obtenir en calculant  et .   
Les coordonnées d’un point dans peuvent s’obtenir en calculant et .

Une image contenant ligne, Tracé, diagramme, capture d’écran

Description générée automatiquement**Exemple**. On note et .  
On a .   
Calculer les coordonnées de dans .  
   
   
Donc . Par des calculs similaires   
Ainsi dans , et   
Donc