**Polynômes du second degré**

**Exemples**. est une fonction polynôme de degré est une fonction polynôme de degré   
 est une fonction polynôme de degré

|  |
| --- |
| **Définition.** Une fonction est une **fonction polynôme de degré**  ssi : Il existe trois nombres réels avec , tels que pour tout , . Une **équation de degré**  est une équation de la forme «  » avec . |

**Exemple**. est une fonction polynôme de degré avec , , .  
**Exemple**. n’en n’est pas une car même si , on a ce qui est interdit.  
**Exemple**. est une fonction polynôme de degré car en développant on s’aperçoit que : Pour tout , (donc ).  
**Définitions**. L’écriture «  » est appelée **forme développée** de . sont uniques.   
 est le **coefficient dominant** de . est le **coefficient constant** de .

|  |
| --- |
| **Théorème** (**Forme** **canonique**). Une fonction polynôme de degré peut s’écrire sous la forme suivante :  avec des nombres réels uniques. On a   et  **Définition**. L’écriture «  » est appelée **forme canonique** de . |

**Exemple**. Mettre sous la forme canonique. On calcule ,  
Donc . Donc pour tout .  
**Méthode sans formule.** . Donc par unicité, et .

|  |
| --- |
| **Rappel**. La courbe représentative d’une fonction de degré , «  » est une droite. |
| **Définition**. La courbe représentative d’une fonction de degré «  » est une **parabole**. |

**Définition**. Si le coefficient dominant est (resp. ) la parabole est « **vers le haut (resp. bas)**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Théorème**. La forme canonique permet de trouver les variations et les extremums de suivant le signe de | | | |
| |  |  | | --- | --- | | Si  : | | |  |  | |  |  | | |  |  | | --- | --- | | Si  : | | |  |  | |  |  | |  |  |

**Exemple**. Etudier les variations de . On a vu que et , donc est décroissante sur , croissante sur et atteint son minimum qui vaut en .

**Propriété**. La parabole admet pour axe de symétrie la droite d’équation «  ».

|  |
| --- |
| **Définition et propriété**. **Le sommet de la parabole** est le point le plus bas (resp. haut) si la parabole est orientée vers le haut (resp. bas). Les coordonnées du sommet de la parabole sont toujours |

**Exemple**. Déterminer le sommet de la parabole d’équation «  ». On a un polynôme de degré . On a et , donc son sommet est le point .

|  |
| --- |
| **Définition**. Une **racine d’une fonction**  est un nombre tel que . C’est une solution de l’équation «  ». Résoudre une équation, c’est déterminer l’ensemble de ses racines. |

**Rappel**. **Résolution d’une équation de degré .** Si est un polynôme de degré :  
 a exactement racine sur càd «  » a exactement solution sur , et cette solution est :   
 ( Démonstration : . La dernière étape est valide car )  
**Exemple**. est un équation de degré , qui admet une unique solution : .

|  |
| --- |
| **Hypothèse**. Soit une fonction polynôme de degré . () **Définition**. est appelé **discriminant de** . **Théorème. Résolution d’une équation de degré** .  On calcule le discriminant de . On a 3 situations possibles suivant le signe de . Si : Alors n’a pas de racines sur autrement dit «  » n’a pas de solutions dans . Dans ce cas on ne peut pas factoriser sur . Si : Alors a exactement racine sur autrement dit «  » a exactement 1 solution dans , et cette solution est . On peut alors factoriser Pour tout  Si : Alors a exactement racines sur , «  » a exactement solutions dans , et ces deux solutions sont et . On a alors pour tout , |

**Définition**. La forme «  » est appelée **forme factorisée** de .   
Factoriser un polynôme de degré revient à déterminer ses racines, donc revient à résoudre «  »  
**Remarque**. Le cas correspond au cas limite où . On dit que est une **racine double**.  
**Exemple**. Résoudre . On pose . Le discriminant de est   
 donc l’équation a solutions : et   
**Exemple**. Déterminer les racines de . Le discriminant de est donc n’a pas de racines sur . L’équation «  » n’a pas de solution réelle.  
**Exemple**. Factoriser . Le discriminant de est .  
Donc admet une seule racine . Donc pour tout ,

|  |
| --- |
| **Théorème**. **Résolution d’une inéquation de degré** .  Le signe d’un trinôme est déterminé par les 6 cas de figures suivants : |

**Exemple**. Résoudre (I) : «  » sur . On pose pour tout . On a , et on a vu que et après résolution les racines sont et .   
On est donc dans le cas n° 3. On observe que pour satisfaire (I), il faut se placer strictement (car (I) est une inégalité stricte) entre (pour être négatif) les racines. L’ensemble des solutions de (I) est donc .  
**Propriété**. Si , alors et ( Utile pour trouver l’autre racine connaissant l’une )  
**Exemple**. Trouver les racines de . En testant des petites valeurs entières on trouve par chance une racine « évidente » : donc est racine évidente.  
D’après les relations coefficients racines, on a donc est l’autre racine.  
**Propriété.** Deux réels ont pour somme et produit ssi ils forment les 2 solutions de «  ».