Suites numériques

|  |
| --- |
| **Idée.** Une **suite** est une liste ordonnée et infinie de nombres, par exemple . |

**Exemple.** La liste des entiers naturels ) est une suite.   
**Exemple.** La liste des multiples de 3 supérieurs à  : est une suite.   
**Contre-Exemple.** n’est pas une suite car c’est une liste finie.

|  |
| --- |
| **Notation**. On note **le** **terme de rang** d’une suite |

**Exemple.** Si est la suite des entiers impairs, alors ; ; ; ; …

**Notation.** Une suite est aussi notée voire quand on veut être précis.   
Attention : Ne pas confondre qui est un simple nombre et qui désigne *toute* la suite .

**Remarque.** Le rang initial est souvent . Mais on peut définir une suite avec un rang initial .

|  |
| --- |
| **Vocabulaire.** Une suite est **définie explicitement** si on peut écrire en fonction du *rang* avec des fonctions bien connues. |

**Exemples.** Soit la suite définie par pour tout . On a   
Soit la suite définie à partir du rang par . On a

|  |
| --- |
| **Vocabulaire.** Une suite est **définie par récurrence** si :   * On donne une formule exprimant tout terme, en fonction d’un ou plusieurs *termes précédents* * On donne un premier terme de la suite (voire plusieurs premiers termes) |

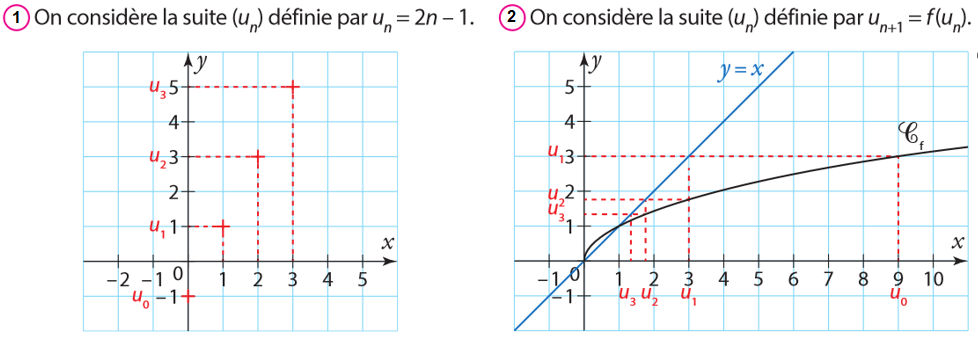
**Exemple.** Soit la suite définie par (suivant = 3 courant + 15)   
 ( autrement dit, on a remplacé par  : )  
 ( autrement dit, on a remplacé par  : )  
   
Etc… Pour calculer chaque terme, on doit connaître le précédent.

|  |
| --- |
| **Vocabulaire.** Si le terme **courant** est , alors est le terme **suivant**. est le terme **précédent**. **Remarque**. *Attention* à ne jamais confondre (le terme suivant) et (le terme courant + 1) |

**Exemple.** Soit la suite définie par pour tout .  
Alors mais

|  |
| --- |
| **Méthode.** Pour représenter une suite dans un repère (voir 1.), on place les points de coordonnées . |

**Méthode.** Si la suite est *définie par récurrence*, ( et ), alors (voir 2.) on peut construire les termes à l’aide de la courbe représentative de la fonction et de la droite d’équation



|  |
| --- |
| **Définition.** Une suite est **croissante** ssi, pour tout entier ,  **Définition.** Une suite est **décroissante** ssi, pour tout entier  **Définition.** Une suite est **constante**  ssi, pour tout entier , |

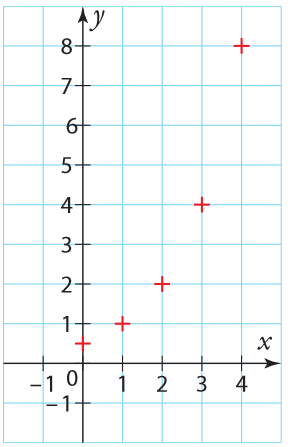
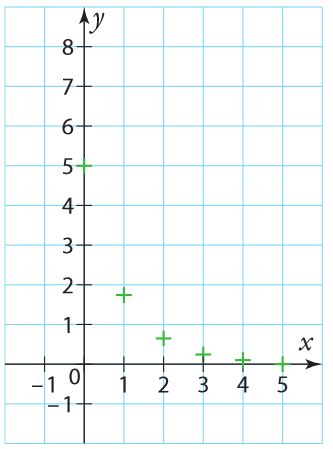
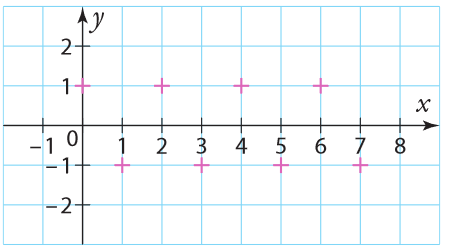
Si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes, on parle de suite **strictement croissante** ou **strictement décroissante**.   
**Exemples.** ) est le début d’une suite strictement croissante.  
 est le début d’une suite croissante (mais pas strictement).  
) est le début d’une suite décroissante.  
) n’est ni croissante, ni décroissante.

|  |
| --- |
| **Méthode.** Pour étudier les variations d’une suite, on peut comparer à .  est croissante ssi pour tout ,   est décroissante ssi pour tout , |

**Exemple.** Etudier les variations de la suite définie par pour tout .  
Soit .   
. Donc la suite est croissante (strictement).

**Méthode.** Pour étudier les variations d’une suite *à valeurs positives*, on peut comparer à .  
**Exemple.** La suite définie par pour tout , est croissante. En effet :  
Soit . donc . (Donc puisque )

**Méthode.**Pour montrer qu’une suite n’est pas croissante, il suffit de trouver un certain rang tel que   
Pour montrer qu’une suite n’est pas décroissante, il suffit de trouver un certain tel que   
En pratique, on peut calculer quelques premiers termes de la suite pour trouver un rang défaillant.  
**Exemple.** On note pour .   
 n’est pas croissante car pour on a :   
 n’est pas décroissante car pour on a :

**Exemples.** Allure d’une suite croissante, d’une suite décroissante.

**Remarque.** La suite définie par n’est pas croissante ni décroissante

Suites et limites

**Définition.** Soit un réel. Une suite  **a pour limite finie**  si les termes deviennent tous aussi proches de que l’on veut en prenant suffisamment grand. On dit aussi que  **converge vers** . On dit aussi que  **tend vers quand tend vers** . On écrit

Une image contenant diagramme, ligne, Tracé

Description générée automatiquement**Exemples.**

|  |  |
| --- | --- |
| On observe que les termes successifs de semblent se rapprocher de On peut conjecturer que converge vers . | On observe que les termes successifs de semblent se rapprocher de On peut conjecturer que converge vers . |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Définition.** Une suite **a pour limite** si les termes deviennent tous aussi grands que l’on veut en prenant suffisamment grand. | Une image contenant texte, ligne, nombre, Tracé  Description générée automatiquementOn dit aussi :  **diverge vers**    **tend vers quand tend vers**    On note : | **Définition.** Une suite **a pour limite**  si les termes deviennent tous aussi *négativement* grands que l’on veut en prenant suffisamment grand. | Une image contenant texte, diagramme, nombre, Tracé  Description générée automatiquementOn dit aussi :  **diverge vers**    **tend vers quand tend vers**    On note : |

Une image contenant ligne, Tracé, diagramme, nombre

Description générée automatiquement**Remarque**. Une suite peut n’avoir aucune limite.   
 n’a pas de limite quand tend vers .  
Les termes ne deviennent ni de plus en plus grand, ni de plus en plus petits, ni ne se rapprochent d’un réel.

Suites arithmétiques et géométriques

**Idée.** Une suite est **arithmétique** si on ajoute toujours le même nombre pour passer au terme suivant.

**Exemple *a*.**  est le début d’une suite arithmétique , car on ajoute à chaque fois.  
**Exemple *b*.**  est le début d’une suite arithmétique , car on ajoute à chaque fois.

**Définition.** Une suite est **arithmétique** s’il existe un réel , tel que pour tout ,   
 est appelé **raison de la suite arithmétique** .

**Exemple.** Dans l’exemple *a*, pour tout , . La raison de cette suite est .  
**Exemple.** Dans l’exemple *b*, pour tout , . La raison de cette suite est .

**Méthode**. Pour montrer qu’une suite est arithmétique, on peut montrer que est constant (indépendant de ).

**Exemple**. Soit la suite définie par . La suite est-elle arithmétique ?  
. Donc est arithmétique de raison .

|  |
| --- |
| **Propriété.** Soit une suite arithmétique de raison . **Idée**. Deux termes distants de rangs diffèrent de fois la raison |

**Exemple.** Dans l’exemple *a*, est arithmétique de raison , donc pour tout ,   
**Exemple.** Dans l’exemple *b*, est arithmétique de raison , donc pour tout ,

**Remarque**. Si le rang initial est il faut adapter la formule. Pour tout ,   
**Remarque**. Si le rang initial est il faut adapter la formule. Pour tout ,

**Propriété.** Soit une suite arithmétique de raison .  
La suite est strictement croissante si , strictement décroissante si , et constante si .

**Exemple.** Dans l’exemple *a*, est arithmétique de raison donc est croissante.

**Idée.** est **géométrique** si on multiplie toujours par le même nombre pour passer au terme suivant.

**Exemple *c*.**  est le début d’une suite géométrique , car on à chaque fois.  
**Exemple *d*.**  est le début d’une suite géométrique , car on à chaque fois.

**Définition.** Une suite est **géométrique** s’il existe un réel , tel que pour tout ,   
 est appelé **raison de la suite géométrique** .

**Exemple.** Dans l’exemple *c*, pour tout , . La raison de cette suite est .  
**Exemple.** Dans l’exemple *d*, pour tout , . La raison de cette suite est .

|  |
| --- |
| **Propriété.** Soit une suite géométrique de raison . **Idée**. Deux termes distants de rangs, sont dans un rapport égal à la raison puissance |

**Exemple.** Dans l’exemple *a*, est géométrique de raison , donc pour tout ,   
**Exemple.** Dans l’exemple *b*, on a , donc pour tout ,

**Remarque**. Si le rang initial est il faut adapter la formule. Pour tout ,   
**Remarque**. Si le rang initial est il faut adapter la formule. Pour tout ,

Somme de suites arithmétiques et géométriques

**Propriété.** Somme des premiers entiers. Pour tout entier , on a

**Démonstration.** Soit un entier . On note la somme des premiers entiers.  
   
   
Donc en sommant les deux égalités, on obtient :  
………………………………………………………………………………… Donc .

|  |
| --- |
| **Propriété.**  Somme de termes consécutifs d’une suite arithmétique = |

**Démonstration.** Symboliquement, il faut montrer que   
   
   
   
……………………………………………………………

**Exemple.**

**Propriété.** Somme des premières puissances d’un réel différent de .  
Soit un réel . Pour tout entier ,

**Démonstration.** On note   
Donc   
Donc . Comme , on peut diviser par .

|  |
| --- |
| **Propriété**. Somme de termes consécutifs d’une suite géométrique = 1er terme |

**Démonstration.**…………………………………….

**Exemple.**