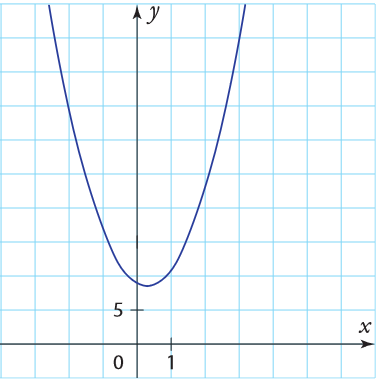
**Variations et dérivée**

**Hypothèse.** Soit une fonction dérivable sur un intervalle non trivial. ( non vide et non réduit à un point)

|  |
| --- |
| **Théorème**. Etudier les variations d’une fonction, c’est étudier le signe de sa dérivée.  est croissante sur si et seulement si est positive sur ( pour tout , )  est décroissante sur si et seulement si est négative sur ( pour tout , )  est constante sur si et seulement si est nulle sur ( pour tout , ) |

**Exemple**. Soit la fonction définie sur par .  
 est dérivable sur (par somme et produits de fonctions dérivables sur ).  
Pour déterminer ses variations, on peut étudier le signe de .   
Pour tout ,   
Donc

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Signe de |  |
| Variations de |  |

**Théorème**. Etude des variations strictes d’une fonction.  
Si pour tout (sauf peut-être un nombre fini de fois) alors est strictement croissante sur   
Si pour tout (sauf peut-être un nombre fini de fois) alors est strictement décroissante sur   
**Exemple.** Dans le tableau précédent ne s’annule qu’en donc les variations de sont strictes.   
**Remarque.** Si est strictement croissante sur , alors sur mais on n’a pas forcément  sur .   
Par exemple, la fonction définie sur par est strictement croissante sur mais .Il existe même des fonctions strictement croissantes telles que s’annule un nombre infini de fois.

**Hypothèse.** Soit une fonction définie sur un intervalle . Soit .

|  |
| --- |
| **Définition**. On dit que  **admet un minimum global en**  si pour tout ,  **Définition**. On dit que  **admet un maximum global en**  si pour tout ,  **Définition**. Un minimum ou un maximum global est appelé **extremum global**. |

**Définition**. Un intervalle est **ouvert** s’il est de la forme avec et

|  |
| --- |
| **Définition**. On dit que  **admet un minimum local en**  s’il existe un intervalle ouvert contenant , tel que pour tout ,  **Définition**. On dit que  **admet un maximum local en**  s’il existe un intervalle ouvert contenant , tel que pour tout ,  **Définition**. Un minimum ou un maximum local est appelé **extremum local**. |

**Remarque.** Un extremum global est en particulier local. Un extremum local n’est pas forcément global.  
**Remarque.** Les extremums se lisent directement dans un tableau de variations.

**Exemple**. Soit une fonction définie sur l’intervalle dont voici le tableau de variations :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Variations de |  |

admet un minimum local en qui vaut . Avec , pour tout ,   
 admet un maximum local en qui vaut . Avec , pour tout ,   
 admet un maximum global en qui vaut car pour tout ,   
 admet un minimum global en qui vaut car pour tout ,

**Définition**. Un nombre réel est **intérieur** à un intervalle si : et n’est pas une borne de .

|  |
| --- |
| **Théorème**. Soit une fonction dérivable sur un intervalle .Si admet un extremum local en un réel intérieur à , alors .  **Idée**. En chaque extremum d’une courbe lisse, la pente est horizontale (sauf peut-être aux bords). |

**Exemple**. Soit la fonction définie sur par .  
Pour tout , or un carré est toujours positif, donc admet un minimum global (donc local) en qui vaut 0. De plus, est dérivable sur l’intervalle et est intérieur à .  
On en déduit que .  
Vérifions le en calculant explicitement la dérivée de .  
Pour tout , . Donc . C’est bien ce que l’on attendait.

**Remarque**. Si n’est pas intérieur à , alors il est possible que , quand est au bord de .   
**Exemple**. Soit la fonction définie sur par .   
 a un minimum global en qui vaut et un maximum global en qui vaut . Mais .

**Remarque**. La réciproque est fausse. Si , alors n’admet pas forcément un extremum local en .  
**Exemple**. Soit définie sur par . est dérivable sur avec pour tout , .  
, mais n’est ni un minimum ni un maximum local de puisque dès que et dès que .

**Propriété**. Si et change de signe en , alors admet un extremum local en . **Remarque**. En pratique retenir cette propriété n’est pas utile. Il suffit de construire le tableau de variations de pour voir où se situe les minimums et les maximums locaux.

**Exemple**. Soit la fonction définie sur par .  
Par somme et produits de fonctions dérivables sur , est dérivable sur .  
Pour tout , .   
On peut donc dresser le tableau de signe de puis le tableau de variations de comme précédemment.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Signe de |  |
| Variations de |  |

Observer le tableau de signe de montre que , et que change de signe en , ce qui permet d’en déduire par la propriété que admet un extremum local en .  
Observer le tableau de variations de permet de voir directement que admet un minimum local en .