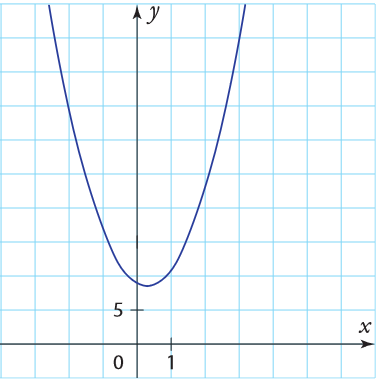
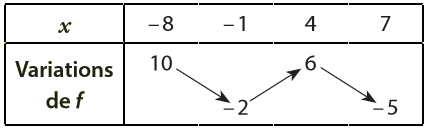
**Définition.** Un intervalle est **trivial** ssi est vide ou de la forme avec . ( a 0 ou 1 point).  
Un intervalle non trivial a au moins deux points distincts , donc une infinité de points (entre et ).  
**Définition**. Un intervalle est **ouvert** s’il est de la forme avec et   
**Définition**. Un réel est **intérieur** à l’intervalle ssi il existe tels que .  
**Exemple**. est intérieur à puisque avec et .  
**Exemple**. n’est pas intérieur à car il n’existe pas de tel que .

**Hypothèse.** Soit une fonction définie et dérivable sur un intervalle non trivial.  
**Théorème (admis)**. Etudier les variations d’une fonction, c’est étudier le signe de sa dérivée.  
 est croissante sur si et seulement si, pour tout , .  
 est décroissante sur si et seulement si, pour tout , .  
 est constante sur si et seulement si, pour tout , .  
**Théorème (admis)**. Etude des variations strictes d’une fonction.  
Si est strictement croissante sur , alors pour tout , . La réciproque est fausse.  
Si est strictement décroissante sur , alors pour tout , . La réciproque est fausse.  
Si pour presque tout , ( peut éventuellement s’annuler pour un nombre fini de valeurs de ), alors est strictement croissante sur .  
Si pour presque tout , ( peut éventuellement s’annuler pour un nombre fini de valeurs de ), alors est strictement décroissante sur .

**Exemple**. Soit la fonction définie sur par .  
Par somme et produits de fonctions dérivables sur , est dérivable sur .  
Pour déterminer ses variations, on peut étudier le signe de .   
Pour tout ,   
Or et . Donc :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Signe de |  |
| Variations de |  |

**Remarque.** Si est strictement croissante sur , on a pas forcément : pour tout , .   
Par exemple, la fonction définie sur par est strictement croissante sur mais . **Remarque**. Si pour tout , et s’annule un nombre infini de fois, alors est croissante mais pas forcément strictement. Il suffit de considérer une fonction constante . est dérivable sur et pour tout , . est bien croissante car constante, mais pas strictement croissante. **Remarque**. Si est strictement croissante sur , alors pour tout , , mais il reste possible que s’annule un nombre infini de fois. (Dessiner une fonction lisse strictement croissante en escalier avec des points régulièrement espacés où la tangente devient horizontale).

**Hypothèse.** Soit une fonction définie et dérivable sur un intervalle non trivial. Soit .  
**Définition**. On dit que  **admet un minimum global en**  si pour tout ,   
**Définition**. On dit que  **admet un maximum global en**  si pour tout ,   
**Définition**. Un minimum ou un maximum global est appelé **extremum global**.  
**Définition**. On dit que  **admet un minimum local en**  s’il existe un intervalle ouvert contenant , tel que pour tout ,   
**Définition**. On dit que  **admet un maximum local en**  s’il existe un intervalle ouvert contenant , tel que pour tout ,   
**Définition**. Un minimum ou un maximum local est appelé **extremum local**.  
**Remarque.** Un extremum global est local. Un extremum local n’est pas forcément global.  
**Exemple**. Soit une fonction définie sur l’intervalle dont voici le tableau de variations :  
  
 admet un minimum local en qui vaut . Avec , pour tout ,   
 admet un maximum local en qui vaut . Avec , pour tout ,   
 admet un maximum local en qui vaut . Avec , pour tout ,   
 admet un minimum local en qui vaut . Avec , pour tout ,   
 admet un maximum global en qui vaut car pour tout ,   
 admet un minimum global en qui vaut car pour tout ,

**Propriété (admis)**. En un extremum local intérieur, la dérivée s’annule.  
Si admet un extremum local en et est un point intérieur à , alors .  
**Exemple**. Soit la fonction définie sur par . est dérivable sur .  
D’après le cours sur le second degré, on sait que admet un minimum global en .  
 est un point intérieur à , et admet un extremum local (car global) en donc le théorème permet d’en déduire sans calcul que . Vérifions le en calculant la dérivée de .  
Pour tout , . Donc . C’est bien ce que l’on attendait.  
**Remarque**. Si admet un extremum local en un point non intérieur à , alors il est possible que . Soit la fonction définie sur par . admet un minimum local en qui vaut et un maximum local en qui vaut . Mais .

**Propriété (admis)**. Si la dérivée s’annule en changeant de signe, il y a extremum local.  
Si et est intérieur à et change de signe en , alors admet un extremum local en  **Remarque**. En pratique retenir cette propriété n’est pas très utile. Il suffit de construire le tableau de variations de pour voir où se situe les minimums et les maximums locaux. **Exemple**. Soit la fonction définie sur par .  
Par somme et produits de fonctions dérivables sur , est dérivable sur .  
Pour tout , . Pour tout , .   
On peut donc dresser le tableau de signe de puis le tableau de variations de comme précédemment.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Signe de |  |
| Variations de |  |

Observer le tableau de signe de montre que , et que change de signe en , ce qui permet d’en déduire par la propriété précédente que admet un extremum local en .  
Observer tableau de variations de permet de voir directement que admet un minimum local en .  
**Remarque**. Si , alors n’admet pas forcément un extremum local en .  
Par exemple soit définie sur par . est dérivable sur avec pour tout , .  
, mais n’est ni un minimum ni un maximum local de puisque dès que et dès que .