## Déterminer si un entier est multiple d’un autre.

**Définition**. Un nombre entier est un **multiple** d’un nombre entier si est un entier relatif (dans ).  
On dit aussi «  est **divisible** par  » ou «  est un **diviseur** de  »

1. est-il un multiple de  ?

est un entier donc est un multiple de .

1. est-il divisible par  ?

donc n’est pas un multiple de .

1. est-il un diviseur de  ?

est un entier donc est un diviseur de .

1. est-il un multiple de ?
2. est-il un diviseur de ?
3. est-il divisible par  ?
4. Quels sont les diviseurs de ?

## Déterminer si un entier est premier.

**Définition**. Un entier *supérieur à un*, est **premier** si on ne peut pas l’obtenir en multipliant deux entiers naturels plus petits. Autrement dit, il n’a pas d’autres diviseurs que et lui-même.

* n’est pas considéré premier. Cela garantit l’unicité de la décomposition en facteurs premiers.
* La listedesnombres premiers commence par **,…**

**Méthode**. Pour déterminer si un entier est premier, on essaye de diviser cet entier par 2, puis 3, puis 4, etc. jusqu’à trouver un résultat entier. Si on n’y arrive pas avant l’entier lui-même, alors il est premier.

1. Déterminer si est un nombre premier.

. . . . Donc . *n’est pas* premier.

* Si un entier n’a aucun diviseur compris entre et sa racine carrée, alors il est premier.
* Au lieu de tester tous les diviseurs, on peut se limiter aux diviseurs premiers

1. Déterminer si est un nombre premier.

. Il suffit de tester la division par les premiers compris entre et . C’est-à-dire ; et .  
. . . Donc *est* premier.

1. Déterminer si est un nombre premier.
2. Déterminer si est un nombre premier.
3. Déterminer si est un nombre premier.
4. Déterminer si est un nombre premier.

## Décomposer un entier en produit de facteurs premiers.

**Théorème.**Tout entier naturel peut s’écrire comme un produit d’entiers premiers de façon unique à l’ordre près.

**Méthode**. Pour décomposer un nombre en produit de facteurs premiers :   
- On divise par tant que le résultat reste entier. Puis on divise par 3 autant que possible, puis par 4, etc…  
- Au bout d’un moment le résultat est . La décomposition est donnée par les diviseurs qui ont fonctionné.

1. Décomposer en produit de facteurs premiers.

. . . . . . . . . . . . .  
Donc . Donc

* Au lieu de tester tous les diviseurs, on peut se limiter aux diviseurs premiers
* On peut s’arrêter dès que le carré du diviseur actuel est plus grand que le résultat actuel.

1. Décomposer en produit de facteurs premiers.

. . . . . . donc on s’arrête.

1. Décomposer en produit de facteurs premiers.
2. Décomposer en produit de facteurs premiers.
3. Décomposer en produit de facteurs premiers.
4. Décomposer en produit de facteurs premiers.

## Raisonner sur un problème de parité.

**Définition**. Un entier est **pair** ssi il existe un entier relatif tel que .  
**Définition**. Un entier est **impair** ssi il existe un entier relatif tel que .

1. Montrer que la somme de deux entiers pairs est toujours paire.

Soit et deux entiers pairs. Montrons que est pair.   
 est pair donc il existe un entier tel que .  
 est pair donc il existe un entier tel que .  
Montrons que est pair.  
 or est un entier. Donc est pair.

1. Montrer que la somme de deux entiers *impairs* est toujours paire.

Soit et deux entiers impairs. Montrons que est pair.   
 est impair donc il existe un entier tel que .  
 est impair donc il existe un entier tel que .  
Montrons que est pair.  
 or est un entier. Donc est pair.

1. Montrer que le produit de deux entiers pairs est pair.
2. Montrer que le produit de deux entiers impairs est impair.
3. Montrer que la différence de deux entiers pairs est paire.
4. est irrationnel.  
   Un nombre est rationnel s’il peut s’écrire sous la forme avec des entiers, et .  
   On veut montrer que n’est pas rationnel en raisonnant par l’absurde.  
   On suppose que est rationnel. On peut donc écrire
   1. Montrer que
   2. On décompose en produit de facteurs premiers.

Si s’écrit , alors comment s’écrit  ? Rappel : et

* 1. Quelle est la parité de l’exposant de dans l’unique décomposition en facteurs premiers de ?
  2. Quelle est la parité de l’exposant de dans l’unique décomposition en facteurs premiers de ?
  3. Même question pour ?
  4. Mettre en évidence une contradiction.
  5. Conclure.