Vecteurs du plan

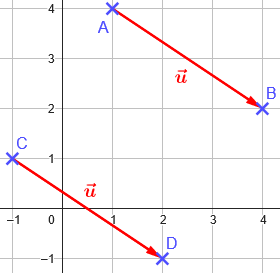
**Définition.** On note le point du plan de coordonnées et . ( et sont des nombres réels)

|  |
| --- |
| **Définition**. Un **vecteur**  est un objet qui contient *deux* nombres et et se note explicitement en colonne ou implicitement avec une lettre minuscule surmontée d’une flèche. On peut écrire |
| représente un déplacement horizontal de unités et vertical de unités. Il est représenté par une flèche. |
| Conventionnellement, le déplacement est compté positivement vers la droite pour , et vers le haut pour . |

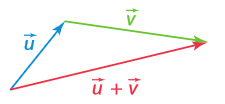
Une image contenant ligne, Tracé, diagramme, capture d’écran

Description générée automatiquement **Exemples**. Sur l’image, on a représenté plusieurs vecteurs.  
 car on se déplace de 2 unités à droite et 1 unité en haut.  
 car on se déplace de 0 unités horizontalement et 2 unités en haut.  
 car on se déplace de 3 unités à gauche et 0 unités verticalement.  
 car on se déplace de 1 unités à droite et 1 unité en bas.

|  |
| --- |
| **Définition.** Soit un point et un vecteur. On note |
| Concrètement, est le point au bout de la flèche , si on fait partir la flèche depuis . |

**Exemple.** Sur la figure, . On a :  
   
 est l’image de par la translation de vecteur .  
   
 est l’image de par la translation de vecteur .  
Les 2 flèches sur la figure représentent le même vecteur .   
Un vecteur est une flèche dont la position est sans importance.

**Propriété**. Deux vecteurs sont identiques s’ils ont même direction, même sens, même longueur.

**Définition**. Pour tous et , .  
Additionner des vecteurs, c’est appliquer des translations successivement.

Visuellement il suffit de les mettre bout à bout, car  **Exemples.**

Une image contenant ligne

Description générée automatiquement**Définition**. Pour tout , .   
Le vecteur opposé a la même longueur mais son sens est inversé.

**Exemples.**

Une image contenant ligne, diagramme, Tracé, pente

Description générée automatiquement**Définition**. Pour tous et ,   
 donc soustraire un vecteur, c’est additionner son opposé.

**Exemple.**

Une image contenant texte, périphérique, jauge

Description générée automatiquement**Définition.** Pour tout et tout nombre réel ,   
Multiplier un vecteur par , c’est multiplier sa longueur par sans changer de sens.  
Multiplier un vecteur par , c’est multiplier sa longueur par et inverser son sens

**Exemples.**

**Définition**. On note le **vecteur nul**. Il représente la translation « immobile »

**Propriétés de calcul**. Pour tous vecteurs et tous réels et :

Une image contenant ligne, diagramme, Tracé, nombre

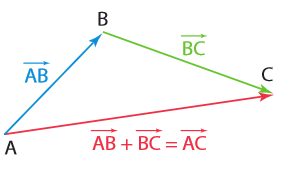
Description générée automatiquement**Définition**. Soit deux points et . On définit

Le vecteur représente la translation qui déplace le point au point , car   
La flèche représentant est donc souvent représentée allant du point au point .  
**Exemple.** Si et , alors .

**Propriété.** Pour tout point , on a .  
**Propriété.** Pour tous points on a .  
**Prop.** On peut toujours écrire un vecteur sous la forme pour un certain point   
**Prop.** On peut toujours écrire un vecteur sous la forme pour un certain point

Une image contenant ligne, Tracé, Police, pente

Description générée automatiquement**Propriété.** ssi est un parallélogramme. (Attention à l’ordre des lettres).

**Propriété**. **Relation de Chasles.**   
Soit trois points. Alors . Attention, .

**Exemple.**    
**Exemple.**   
**Exemple.**

Une image contenant ligne, Tracé, reçu, diagramme

Description générée automatiquement**Définition.** La **norme (ou longueur) d’un vecteur** , est définie par   
**Définition.** La **longueur de**  est

**Exemple.** Soit , alors . est de longueur .

Une image contenant ligne, Tracé, diagramme, capture d’écran

Description générée automatiquement**Définition.** est le **milieu d’un segment** ssi   
**Propriété.** Les coordonnées du milieu de sont  et

**Exemple.** Si et alors le milieu est

Une image contenant ligne, diagramme, Tracé

Description générée automatiquement**Remarque**. On peut techniquement définir, la **longueur d’une courbe**, puis **l’angle géométrique entre deux vecteurs** (non nuls).

Une image contenant ligne, pente, diagramme

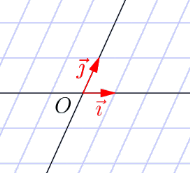
Description générée automatiquement**Définition**. Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires**, s’ils forment un angle nul ou plat (0° ou 180°), autrement dit s’ils sont alignés, dans le même sens ou de sens opposés.

**Exemple.** Les vecteurs et sur l’image ci-contre sont colinéaires entre eux.  
Le vecteur n’est colinéaire avec aucun des autres vecteurs.

Une image contenant ligne, Tracé, diagramme

Description générée automatiquement**Définition**. Deux vecteurs non nuls sont **orthogonaux**, s’ils forment un angle droit (90°).

**Exemple.** Les vecteurs et sur l’image ci-contre sont orthogonaux, car si on les fait partir du même point, ils forment un angle droit.

**Définition**. Un **repère** désigne la donnée d’un point et de vecteurs et non colinéaires. On note un tel repère.  
Un repère sert à repérer les coordonnées, les longueurs, aires, angles, etc..

Une image contenant ligne, diagramme, Tracé, capture d’écran

Description générée automatiquement**Remarque**. Quand on change de repère, les coordonnées d’un vecteur ou d’un point changent. Cependant, les définitions et formules précédentes restent valables, si on les écrit dans un même repère .  
Attention : Les longueurs, aires et angles sont des notions a priori relatives au repère utilisé.  
**Définition**. On note le **repère canonique**. Jusqu’ici, on a toujours utilisé .

**Définition**. Un **repère** est **orthonormé** si et sont orthogonaux et de longueur (dans .

**Propriété.** Les longueurs, aires et angles géométriques sont identiques dans tout repère *orthonormé*.

**Exemple.** Le repère canonique est orthonormé.

Une image contenant ligne, diagramme, Tracé, texte

Description générée automatiquement **Exemples.** Ici on considère comme le repère de référence.Ci-contre, les repères , et sont orthonormés.   
Les longueurs ont donc la même mesure dans ,, .  
 n’est pas orthonormé car ses vecteurs sont de longueur 2 (en les mesurant dans ).  
 n’est pas orthonormé car ses vecteurs ne sont pas orthogonaux (au sens de ).

Une image contenant texte, diagramme, ligne, Tracé

Description générée automatiquement

|  |
| --- |
| **Définition**. Le **déterminant** de deux vecteurs et est  . (A priori le déterminant dépend du repère) |

**Exemple.** Si et , alors   
   
**Propriété.** Dans un repère orthonormé, l’aire du parallélogramme formé par et quand on les fait partir d’un même point, vaut    
**Exemple.** En supposant que l’unité de base est le , l’aire du parallélogramme précédent délimité par et est

|  |
| --- |
| **Propriété.** Deux vecteurs non nuls et sont **colinéaires** ssi il existe un nombre réel tel que . |

Une image contenant texte, périphérique, jauge

Description générée automatiquement**Exemple.**  et sont colinéaires car .   
**Exemple.** Les vecteurs ci-contre sont colinéaires entre eux puisqu’ils sont proportionnels à

|  |
| --- |
| **Propriété**. Deux vecteurs sont colinéaires ssi leur déterminant est nul. (dans n’importe quel repère) |

**Exemple.**  donc et sont bien colinéaires.

**Propriété**. Deux droites et sont parallèles ssi et sont colinéaires ssi .  
**Propriété**. Trois points distincts et sont alignés ssi et sont colinéaires ssi .  
**Exemple.** Les points , et sont-ils alignés ?  
. Donc et sont alignés.