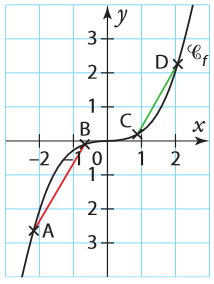
Convexité

1. **Convexité d’une fonction**

|  |
| --- |
| **Définition.** Sécante Dans ce contexte, **une sécante** de la courbe représentative d’une fonction , désigne un segment de droite qui relie deux points distincts de . |
| **Définition**. Convexité et concavité Soit une fonction et sa courbe représentative dans un repère. On dit que :  est **convexe sur un intervalle**  ssi  reste en dessous de ses sécantes dans cet intervalle.  est **concave sur un intervalle**  ssi  reste au-dessus de ses sécantes dans cet intervalle. |

Autrement dit :  
Si est une fonction convexe sur un intervalle , alors pour tous réels et de et pour tout , on a :   
Si est une fonction concave sur un intervalle , alors pour tous réels et de et pour tout , on a :   
  
**Exemple**. Soit la fonction cube définie sur par , et sa courbe représentative dans le repère ci-contre. On observe que reste en dessous du segment pour tous , d’abscisses positives, et que reste au-dessus du segment pour tous d’abscisses négatives.  
Donc est convexe sur et est concave sur .

|  |
| --- |
| **Propriété**. Fonctions usuelles. La fonction est concave (sur ). Les fonctions et sont convexes (sur ). La fonction est convexe sur et concave sur . |

**Remarque**. Si les inégalités précédentes sont strictes, on dira que est une fonction strictement convexe ou strictement concave sur .

|  |
| --- |
| **Propriété**. est convexe sur si et seulement si est concave sur . |

**Exemple**. Soit la fonction définie sur par . La fonction est convexe, donc est concave.

1. **Fonction convexe et dérivées premières et seconde**

|  |
| --- |
| **Définition**. Dérivée seconde  Soit une fonction supposée deux fois dérivable sur un intervalle . On appelle **dérivée seconde de**  la fonction notée |

**Exemple**. Soit la fonction définie sur par l’expression .  
Par somme, est dérivable sur avec pour tout ,   
Par somme, est dérivable sur . (Donc est deux fois dérivable sur ).  
Pour tout , .

|  |
| --- |
| **Théorème**. Convexité et dérivée seconde.  Soit une fonction supposée deux fois dérivable.  est convexe sur si et seulement si est croissante sur si et seulement si est positive sur .  est concave sur si et seulement si est décroissante sur si et seulement si est négative sur . |

**Exemple**. Soit la fonction définie et dérivable sur .   
On a dressé le tableau de variations de la fonction .  
Alors est concave sur et convexe sur .

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

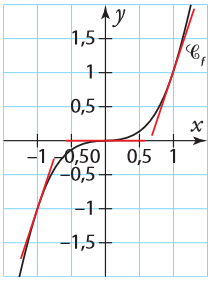
**Exemple**. Soit la fonction cube définie sur par .  
 est dérivable sur et pour tout , .  
 est dérivable sur et pour tout , .  
 est du signe de . Donc si , , et si , .  
 est positive sur et négative sur . On retrouve que est convexe sur et est concave sur .

**Remarque**. Attention, une fonction convexe n’est pas toujours deux fois dérivable.

1. **Tangente et point d’inflexion.**

|  |
| --- |
| **Propriété**. Dérivée seconde et tangente. Soit une fonction deux fois dérivable sur un intervalle .  est convexe sur si et seulement si la courbe représentative de est au-dessus de ses tangentes.  est concave sur si et seulement si la courbe représentative de est en dessous de ses tangentes. |

|  |
| --- |
| **Définition**. Point d’inflexion Soit une fonction deux fois dérivable sur un intervalle et sa courbe représentative. On dit qu’un point de est **un point d’inflexion de**  si au point , traverse la tangente en à . |

 **Exemple**. Soit la fonction cube et sa courbe représentative dans un repère. Alors l’origine du repère est un point d’inflexion pour . En revanche les tangentes en et en ne traversent pas la courbe, les points de coordonnées et ne sont donc pas des points d’inflexion.

|  |
| --- |
| **Propriété**. Point d’inflexion Soit une fonction deux fois dérivable sur et .  admet un point d’inflexion en , si et seulement si et change de signe au voisinage de . Attention : Si sans changer de signe près de , il n’y a pas de point d’inflexion. |