Dénombrement

**Vocabulaire**. On appelle **ensemble** une collection d’objets, sans ordre particulier.   
Les objets d’un ensemble sont appelés **éléments**.  
On dit qu’un objet **appartient** à l’ensemble , si est un élément de . On note alors .  
**Exemple**. Un ensemble peut être noté explicitement avec des accolades.  
 est un ensemble. est un ensemble.

**Axiome**. Deux ensembles sont égaux ssi ils ont les mêmes éléments. Formellement

**Définition**. L’ensemble **est** **inclus dans** (**est** **une partie de**) l’ensemble si tous les éléments de sont des éléments de . On note . Symboliquement on a   
**Exemple**.

**Remarque**. Deux ensembles sont égaux si l’un est inclus dans l’autre, et l’autre est inclus dans l’un.  
 car

**Définition**. **L’intersection** de deux ensembles et notée ( lire «  inter  » ) est l’ensemble des éléments appartenant à *et* à . Symboliquement, pour tout objet , on a et

**Définition**. **L’union** de deux ensembles et notée ( lire «  union  » ) est l’ensemble des éléments appartenant à *ou* à . Symboliquement, pour tout objet , on a ou

**Définition**. **L’ensemble vide** noté est un ensemble qui n’a pas d’élément. Cet ensemble existe et est unique.

**Définition**. **L’ensemble des parties** **d’un ensemble** est un ensemble et est noté . On a

**Vocabulaire**. On appelle **-uplet** une collection ordonnée de objets.  
**Remarque.** Un -uplet sur un ensemble , peut être vu comme fonction de

**Vocabulaire**. Un ensemble a un élément s’appelle **un singleton**. Un ensemble a deux éléments s’appelle **une paire**.  
**Vocabulaire**. Une 2-liste s’appelle **un couple**. Un couple est donc une paire ordonnée.  
**Exemple**. mais .

**Définition**. Le **produit cartésien de par**  notédésigne l’ensemble des couples d’éléments provenant d’un ensemble puis d’un ensemble . Formellement et .  
 ne contient donc que des couples. Ce n’est pas l’intersection de et .

**Définition**. L’ensemble des fonctions de vers est noté ou .

**Définition**. La **somme disjointe** **de et**  notédésigne l’ensemble tel que :

**Propriété**. Le nombre de choix objets parmi objets, avec ordre et sans remise, est   
**Vocabulaire**. Un tel choix s’appelle **une permutation**. (ou **une** **bijection**)

**Remarque**. Le nombre de choix objets parmi objets, avec ordre et avec remise, est .  
**Remarque**. Le nombre de choix objets parmi objets, sans ordre et sans remise, est .  
**Remarque**. Le nombre de choix objets parmi objets, sans ordre et avec remise, est compliqué ( )

**Propriété**. Le nombre de choix objets parmi objets, avec ordre et sans remise, est   
**Vocabulaire**. Un tel choix s’appelle **un arrangement.** (ou **une** **injection**)

**Exemple**. Combien existe-t-il de nombres à exactement 3 chiffres distincts, tous non-nuls ?  
Cela revient à choisir chiffres parmi possibles (car il y a 10 chiffres), avec ordre et sans remise.  
La réponse est donc possibilités.

**Propriété**. Le nombre de choix de objets parmi objets, avec ordre et avec remise, est   
**Remarque**. Un tel choix correspond simplement à **une fonction** ou à un -uplet**.**

**Exemple**. Combien existe-t-il de mots de passes constitués de lettres minuscules ?  
Cela revient à choisir lettres parmi possibles, avec ordre et remise. Il y a possibilités.

**Corollaire**. Le nombre de fonctions d’un ensemble à éléments vers un ensemble à éléments est .   
**Corollaire**. Le nombre de -uplets sur un ensemble à éléments est .   
**Corollaire**. Le nombre de parties d’un ensemble à éléments est .

**Propriété**. Le nombre de choix de objets parmi objets, sans ordre et sans remise, est   
**Vocabulaire**. Un tel choix s’appelle **une combinaison.**

**Exemple**. Combien peut-on former de groupes de 3 élèves parmi une classe de 10 élèves ?  
Cela revient à choisir élèves parmi élèves, sans ordre et sans remise.  
Il y a donc groupes possibles.

**Corollaire**. Le nombre de parties à éléments d’un ensemble à éléments est .  
**Corollaire**. Le nombre de parties d’un ensemble à éléments est donc

**Propriété**. Le nombre de choix de objets parmi objets, sans ordre et avec remise est   
Il s’agit du nombre de choix de objets parmi objets, sans ordre et sans remise.

**Exemple**. On a des fleurs rouges, jaunes et bleues. Combien de bouquets différents de 12 fleurs peut-on composer ?  
Cela revient à choisir fleurs parmi types, avec remise et sans ordre.  
Il y a donc bouquets possibles. (Cela revient à choisir séparateurs de couleurs parmi 14 emplacements)

**Définition**. Une fonction est une **bijection** ssi elle choisit tout élément de exactement une fois   
 ssi il existe une fonction telle que .  
 **Définition**. Une **permutation** de est une bijection .   
On note l’ensemble des permutations de .  
TODO déf le cardinal.

**Propriété**. Le nombre de permutations d’un ensemble de cardinal est .  
  
**Idée de la preuve.** Choisir une permutation de , revient à choisir un premier élément parmi , puis un deuxième élément parmi les restants, puis un troisième parmi les restants, … puis un -ième parmi le seul restant.  
Il y a donc possibilités.

**Preuve**. Par récurrence sur .  
Pour ou c’est vrai. Supposons le résultat vrai au rang .  
**Idée de l’hérédité.** Choisir une permutation de revient à choisir l’image de dans (il y a possibilités), et à choisir une permutation dans qui est de taille (il y a possibilités par hypothèse de récurrence). Il y a donc un total de possibilités.  
**Preuve de l’hérédité**.  
Soit . On a et   
Réciproquement, soit et . On peut construire en posant et .   
On a donc défini une bijection :