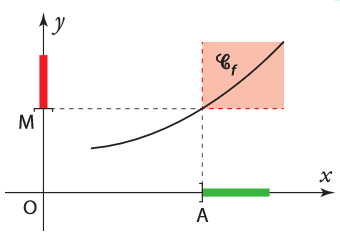
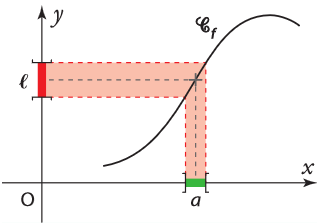
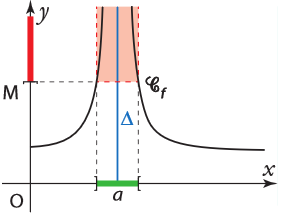
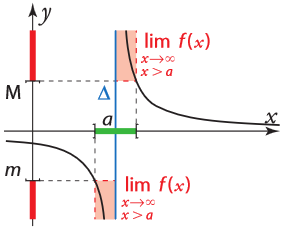
**Une image contenant texte, sport

Description générée automatiquementDéfinitions**. **Une fonction a pour limite en**  ssi étant donné un intervalle contenant aussi petit soit il, la courbe , en allant vers la droite, finit par entrer dans l’intervalle sans jamais en ressortir :  
, , .  
Dans ce cas on note ou encore   
Dans ce cas la droite d’équation «  » est une **asymptote horizontale** à la courbe .  
De façon similaire, on définit «  **a pour limite en**», « ».

**Définitions**. **Une fonction a pour limite en**  ssi étant donnée une valeur aussi grande soit elle, la courbe , en allant vers la droite, finit par dépasser sans jamais redescendre :  
, , .  
Dans ce cas on note ou encore   
De façon similaire, on définit «  **a pour limite en**» ; « » ; et les autres cas …

******Définitions**. **Une fonction a pour limite en**  ssi étant donnée une valeur M aussi grande soit elle, la courbe , en se rapprochant de , finit par dépasser sans jamais redescendre :  
, , .   
Dans ce cas on note ou encore   
Dans ce cas la droite d’équation «  » est une **asymptote verticale** à la courbe . De façon similaire, on définit «  **a pour limite en**», « ».

**Définitions**. **Une fonction a pour limite en**  ssi étant donné un intervalle contenant aussi petit soit il, la courbe , en se rapprochant de , finit par entrer dans l’intervalle sans jamais en ressortir :  
, , .  
Dans ce cas on note ou encore

**Définitions**. Parfois la limite en n’existe pas, on peut alors souvent définir une limite à droite ou à gauche de que l’on note respectivement : et . Il faut adapter les définitions précédentes en restreignant l’intervalle où varie à un seul côté.

**Propriété**. Si et existent et ont la même valeur alors existe et .   
Réciproquement si , alors .

**Définitions**. Limite en / . Pour toutes les définitions de limites finies précédemment données, on écrit parfois (respectivement ) pour signifier d’une part que et d’autre part que (respectivement ) près de .

**Propriétés**. **Limites usuelles** à connaitre.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Fonction constante | Pour tout réel , | | | | | |
| Fonction inverse |  | |  | |  | |
| Fonction puissance | Pour tout entier naturel | | Si pair : | | Si est impair : | |
| Fonction exponentielle |  |  | |  | |  |
| Fonction racine carrée |  |  | |  | |  |

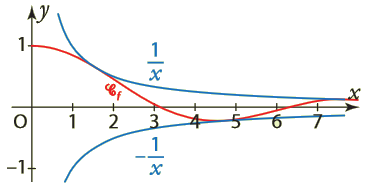
**Exemple**. car tout intervalle autour de , contient dès que est assez grand (en l’occurrence dès que on a bien ) . **Remarque**. En pratique, pour mémoriser ces tables, on remplace mentalement par une valeur proche de sa limite dans l’expression , et on essaye de deviner vers quoi tend . Par exemple, pour « se rappeler » de on remplace par (proche de ), donc on devine que .

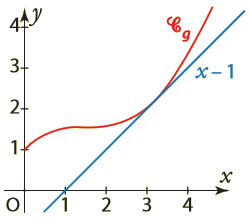
**Règles d’addition, produit, quotient de limites.**Soit et deux fonctions. On note une valeur réelle ou ou ou ou .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  | |  |  |  |  | |  |  |  | si   si  indéterminé si | |  |  |  | si   si  indéterminé si | |  |  |  |  | |  |  | indéterminé |  | |  |  |  |  | |  |  | indéterminé |  |   Dans ces tableaux : Indéterminé signifie qu’on ne peut pas conclure sur la limite.   (resp ) signifie que et  que (resp. ) pour assez proche de . | |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  | |  |  | si   si | |  |  | si   si | |  |  | si ou   si ou | |  |  | si ou   si ou | |  |  | indéterminé | |  |  | indéterminé | |

Pour déterminer on peut juste remarquer que .  
**Exemple**. Calculer . On a et donc par somme .  
**Méthodes** : **Pour lever une forme indéterminée**  
- On peut simplifier : Déterminer . On a une F.I. «  ». Cependant donc .  
- On peut factoriser : Déterminer . Sachant on a une F.I. «  ». Mais or et , donc par produit .

**Notation.** On note

**Théorème des gendarmes**. **Limite par encadrement**.  
Soit trois fonctions définies au voisinage de   
et vérifiant pour tout , .  
Si alors   
**Exemple.** Soit la fonction définie sur par . On cherche .  
La fonction sin est périodique non constante, de valeurs comprises entre et . Elle n’a donc pas de limite en . On ne peut pas appliquer la règle quotient. Comme la fonction sin est bornée par et , on a pour tout , donc en divisant par on obtient pour tout . et d’autre part . Par le théorème des gendarmes, on en déduit .

**Théorème**. **Limite par comparaison**.  
Soit deux fonctions définies au voisinage de   
et vérifiant pour tout , .  
Si alors   
Si alors   
Si et admettent une limite (finie ou non) en , alors on a toujours   
**Exemple.** Soit la fonction définie sur par . On cherche .  
La fonction cos est périodique non constante, de valeurs comprises entre et . Elle n’a donc pas de limite en . On ne peut pas appliquer la règle somme. Comme la fonction cos est bornée par et , on a pour tout , .  
Donc en ajoutant , on a soit : pour tout , .  
. Par le théorème de comparaison de limites, on en déduit que .

**Théorème**. **Composition de limites ou changement de variables**.  
Soit . Soit , définie au voisinage de , respectivement de .  
Si  alors    
**Exemple.** Déterminer . On a et donc par composition, .

**Théorème.** **Croissances comparées**. Soit deux réels strictement positifs.  
 et plus généralement . (L’exponentielle impose sa limite à )  
 et plus généralement .

et plus généralement . (x impose sa limite au logarithme)  
 et plus généralement .