**Principe** **du raisonnement par récurrence**. Soit une propriété dépendant d’un entier . Si :  
- est vraie. (initialisation)  
- Pour tout entier fixé, si est vraie, alors est vraie. (hérédité)  
Alors : Pour tout entier , est vraie.  
Ce principe marche encore en remplaçant par , ou par n’importe quel rang initial .  
**Exemple.** Si le premier domino tombe, et si pour tout (si le -ième domino tombe alors le -ième domino tombe), alors tous les dominos tombent.  
**Exemple.** (car et pour tout , )  
**Exemple. (Inégalité de Bernoulli)** Pour tout et tout entier ,

**Définition**. **Une suite a pour limite quand tend vers**  ssi les termes finissent au bout d’un moment par tous se trouver au-dessus d’une valeur qu’on a fixé :   
On écrit : ou encore : . On a une définition analogue pour tend vers .  
**Définition**. **Une suite a pour limite le réel quand tend vers**  ssi les termes finissent au bout d’un moment par se trouver à une distance de à une valeur fixée :   
On écrit : ou encore : . On a une définition analogue pour tend vers .  
**Définition**. est **convergente** ssi elle admet pour limite un réel. Sinon est **divergente**.  
**Propriété**. Si une suite admet une limite (finie ou non) alors cette limite est unique.

**Propriétés**. **Limites usuelles** à connaitre.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Si |  |  |  |  |  |  |  | () | () | () |
| Alors |  |  |  |  |  |  |  |  |  | Pas de limite |

**Règles d’addition, produit, quotient de limites.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  | |  |  |  |  | |  |  |  | si   si  indéterminé si | |  |  |  | si   si  indéterminé si | |  |  |  |  | |  |  | indéterminé |  | |  |  |  |  | |  |  | indéterminé |  |   Dans ces tableaux : Indéterminé signifie qu’on ne peut pas conclure sur la limite.   (resp ) signifie que et  que (resp. ) à partir d’un certain rang. | |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | |  |  |  | |  | ou |  | |  |  | si   si | |  |  | si   si | |  |  | si ou   si ou | |  |  | si ou   si ou | |  |  | indéterminé | |  |  | indéterminé | |

Pour déterminer on peut juste remarquer que et utiliser :   
**Exemple**. Calculer . On a et donc par somme .  
**Méthodes** : **Pour lever une forme indéterminée**:  
- On peut simplifier : Déterminer . On a une F.I. «  ». Cependant donc .  
- On peut factoriser : Déterminer . Sachant on a une F.I. «  ». Mais or et , donc par produit .

**Théorème de passage à la limite de l’inégalité** .   
Soit , deux suites convergentes telles que . Alors   
( est conservé par passage à la limite )   
**Remarque**. Si , alors mais pas nécessairement .  
Par exemple mais

**Théorème de comparaison**. Soit et deux suites telles que .  
Si alors . (Une suite à une autre suite de limite , tend aussi vers )  
Si alors . (Une suite à une autre suite de limite , tend aussi vers )  
**Exemple**. Déterminer la limite de la suite définie par .  
On a donc , or donc .

**Théorème de gendarmes**. Soit , et trois suites telles que .  
Si alors .   
(Une suite encadrée par deux autres suites ayant même limite , converge également vers cette limite .)  
**Exemple**. Déterminer la limite de la suite définie par .  
On a donc , or donc .

**Définition**. Une suite est **majorée** par un réel ssi pour tout ,   
**Définition**. Une suite est **minorée** par un réel ssi pour tout ,   
**Définition**. Une suite est **bornée** ssi elle est majorée et minorée. ( , )

**Théorème de convergence monotone.**Toute suite croissante majorée converge. Toute suite croissante non majorée tend vers .  
Toute suite décroissante minorée converge. Toute suite décroissante non minorée tend vers .  
**Exemple**. La suite définie par est majorée par (car ) et est croissante (car , ), donc converge. (On pouvait aussi vérifier cela en levant la F.I.)  
**Remarque**. Une suite tendant vers n’est pas forcément croissante, par exemple :  
La suite définie par tend vers mais n’est pas croissante.  
**Remarque**. Une suite non majorée n’a pas forcément de limite, par exemple :  
La suite définie par est non majorée mais n’a pas de limite.  
**Remarque**. Une suite convergente est toujours bornée. La réciproque est fausse. Par exemple  
La suite définie par est bornée mais n’a pas de limite.  
**Remarque**. En résumé, le théorème de convergence monotone affirme qu’une suite monotone admet toujours une limite finie ou non, et affirme que cette limite est finie ssi la suite est bornée.